**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**
**FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL**
**DEPARTAMENTO DE CC.NN. Y MATEMÁTICA**
**SECCIÓN DE MATEMÁTICA**

**TRABAJO DE GRADO:**

# ANÁLISIS ARMÓNICO SOBRE LA ESFERA.

**PRESENTADO POR:**


JAIME ARNOLDO LÓPEZ SANDOVAL.

MARITZA ODEXA HERNÁNDEZ SALAMANCA.


**PARA OPTAR AL GRADO DE:**

LICENCIADO EN MATEMÁTICA.

**ASESORA DIRECTORA:**

LICDA. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ.

**ASESOR ESPECIALISTA:**

M.SC. GABRIEL ALEXANDER CHICAS REYES.

**CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, AGOSTO DE 2020.**

**SAN MIGUEL** **EL SALVADOR** **CENTROAMÉRICA**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**

**AUTORIDADES**

MSC. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO
**RECTOR**

PHD. RAÚL ERNESTO AZCÚNAGA LÓPEZ
**VICE-RECTOR ACADÉMICO**

ING. JUAN ROSA QUINTANILLA
**VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO**

ING. FRANCISCO ALARCÓN
**SECRETARIO GENERAL**

LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN
**FISCAL GENERAL**

LIC. LUIS ANTONIO MEJÍA LIPE
**DEFENSOR DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**

**FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL**

**AUTORIDADES**

LIC. CRISTÓBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ
**DECANO**

LIC. OSCAR VILLALOBOS
**VICE - DECANO**

LIC. ISRAEL LÓPEZ MIRANDA
**SECRETARIO INTERINO**

# Agradecimientos.

*"Un millón de gracias no compensarían a todos los que me ayudaron para llegar hasta aquí."*

A Dios por iluminarme, guiarme y permitir culminar mi carrera profesional.

A los diferentes catedráticos, especialmente a **M.Sc Jorge Alberto Martínez Gutiérrez**, por su paciencia, tolerancia y aporte de sus conocimientos para mi formación profesional.

A nuestros asesores: **M.Sc. Gabriel Alexander Chicas Reyes** y **Licda. Sonia del Carmen Martínez de López**, por ser nuestros guías, por su paciencia y tiempo brindado.

A mi madre amada, **Odexa Elena Salamanca Arias**, por ser mi mayor fuente de inspiración para seguir adelante, por brindarme su amor y apoyo incondicional en todo momento a pesar de su estado de salud incapacitante.

A mi segunda madre, mi tía **María Elizabeth Salamanca Arias**, por brindarme su apoyo, sus consejos, sus regaños, por inculcar en mi principios y valores. A mi tío, **Raúl Alexander Salamanca Arias**, a quien considero como mi padre, por siempre apoyarme, cuidarme y fortalecerme con su vigor y carácter. A mi tío, **Héctor Eladio Salamanca Arias**, por su consejos y apoyo brindado; en estos momentos él es un ángel que me guía desde el cielo.

A mi hermano, **Rafael Elías Benítez Salamanca**, por brindarme sus consejos, apoyo moral y aporte económico. A mis hermanas **Sara Oneyda Hernández Salamanca** y **Melissa Maricela Hernández Salamanca**, por ser mis entusiastas a lo largo de mis actividades académicas.

A mis compañeros y amigos, por compartir sueños, tristezas, alegrías y aventuras en nuestro proceso de formación profesional; no existen palabras para agradecerles, pero a cada uno de ustedes los tengo presentes en mi corazón y pensamientos.

***Maritza Odexa Hernández Salamanca.***

**Agradezco...**

A mi madre, **Rosa María Sandoval** por su apoyo y su amor incondicional en todo momento. A mi hermano, **Kevin Daniel López Sandoval**, ya que siempre fue comprensivo, a pesar de que lo desvelaba, nunca se quejó por ello.

A mi novia, **Licda. Fátima Margarita Flores Andrade**, por estar apoyándome siempre y darme fuerzas para seguir adelante. Por ayudarme a ver lo bueno en lo malo, a pesar de todo.

A mi amigo, **Lic. Mario Francisco Hernández Hernández**, por siempre tener la disposición de ayudarme y explicarme cosas que no entendía.

A nuestros asesores: **Licda. Sonia del Carmen Martínez de López** y **M.Sc. Gabriel Alexander Chicas Reyes**, por orientarnos, brindarnos su valioso tiempo y ayudarnos a culminar nuestra carrera.

Por último, agradezco a **cada profesor** que he tenido en el transcurso de mi vida escolar.

***Jaime Arnoldo López Sandoval.***

# Índice general

# Introducción.

A continuación, se presenta un informe final del trabajo de investigación titulado: **Análisis armónico sobre la esfera.**

Damos a conocer los objetivos que se perseguirán a lo largo del proceso y la justificación del estudio. Ahora bien, el presente trabajo consta de cuatro capítulos, los cuales resumimos a continuación:

## Capítulo 1: Series de Fourier.

En este capítulo estudiamos la construcción de la serie de Fourier sobre el círculo. Además, estudiamos algunos tipos de convergencia de las series de Fourier, como lo es la convergencia en la norma-$L^2$, la convergencia puntual y por último, y más importante, la convergencia uniforme.

## Capítulo 2: Espacios de Hilbert.

En este capítulo, hacemos un breve, pero importante repaso de los espacios pre-Hilbert y los espacios de Hilbert, obteniendo algunos resultados importantes que nos servirán en capítulos posteriores, entre los que cabe destacar, que en particular, cada espacio pre-Hilbert de dimensión finita es completo. Además, estudiaremos bases ortonormales y el teorema de completación, obteniendo como resultado que las exponenciales forman una base ortonormal del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

## Capítulo 3: Transformada de Fourier.

Este capítulo, trata sobre la transformada de Fourier, la cual abarca el caso cuando una función no es periódica. Estudiaremos la fórmula de inversión y el teorema de Plancherel que nos dice que la transformada de Fourier preserva la norma-$L^2$. Conoceremos bajo qué criterios la fórmula de la serie de Poisson se mantiene y verificaremos la ecuación de la serie theta clásica.

## Capítulo 4: Análisis armónico sobre la esfera.

En este capitulo, se analizan las funciones armónicas esféricas, así como las propiedades de los grupos topológicos $SO(n)$ y $O(n)$ sobre la esfera $S^{n-1}$. Se define un Laplaciano esférico y una integral esférica. Obtenemos la descomposición espectral de $L^2(S^{n-1})$, además se obtiene la convergencia de la serie de Fourier-Laplace en la esfera $S^{n-1}$. Finalmente se muestra uno de los resultados más importantes de esta investigación, que consiste en demostrar que los espacios $\mathcal{H}^n_{(d)}$ son representaciones irreducibles de $O(n)$.

# Justificación.

En matemáticas, el análisis armónico se encarga de estudiar la representación de funciones armónicas. Investiga y generaliza las nociones de series de Fourier y transformadas de Fourier. Una de las ramas más modernas del análisis armónico, que tiene sus raíces a mediados del siglo XX, es el análisis sobre grupos topológicos. **Aquí necesitamos que un grupo actúe *transitivamente* sobre nuestro espacio**, y dicho grupo ya no tiene que ser abeliano (como sucede en la recta real o en el círculo), así que tenemos que usar más herramientas de álgebra. Al mismo tiempo, las técnicas de análisis funcional siguen siendo importantes, así como la topología, teoría de representaciones, etc. Por ello, resulta muy interesante el estudio de esta rama del análisis, ya que reúne varias áreas de la matemática.

# Objetivos.

**General**.

- Estudiar las funciones armónicas en la esfera.

**Específicos**.

- Definir el operador Laplaciano esférico y la integral esférica $SO(n)$-invariantes.
- Mostrar la descomposición espectral de $L^2(S^{n-1})$.
- Estudiar las condiciones para la convergencia uniforme de la serie de Fourier-Laplace de funciones en la esfera.
- Mostrar que los espacios de Hilbert $\mathcal{H}^n_{(d)}$ son irreducibles para $O(n)$.
- Proporcionar ejemplos que nos permitan una mejor comprensión.

# Capítulo 1

# Series de Fourier.

La teoría de las series de Fourier se encarga de investigar si una función periódica dada, se puede escribir como una suma de ondas simples. Una onda simple se describe en términos matemáticos como una función de la forma $c\,\text{sen}(2\pi kx)$ ó $c\cos(2\pi kx)$ para un número entero $k$ y un número complejo $c$.

La fórmula

$$e^{2\pi ix} = \cos(2\pi x) + i\,\text{sen}(2\pi x)$$

que se deduce de la fórmula de Euler,

$$e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}\,x,$$

demuestra que si una función $f$ puede escribirse como la suma de exponenciales

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi ikx}$$

para algunas constantes $c_k$, entonces también se pueden escribir como una suma de ondas simples. Este punto de vista tiene la ventaja de que proporciona fórmulas más simples y es más adecuado para la generalización. Dado que los exponenciales $e^{2\pi ikx}$ son de valor complejo, por tanto es natural considerar funciones periódicas de valor complejo.

En este capítulo, comenzamos nuestro estudio riguroso de la serie de Fourier y preparamos el escenario introduciendo los objetos principales en el tema.

## 1.1. Funciones periódicas.

Antes recordemos unas definiciones que nos serán de utilidad.

**Definición 1.1.1** Se dice que $T : X \to Y$ es una ***aplicación*** si para cada par de puntos $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 = x_2$, entonces $T(x_1) = T(x_2)$ en $Y$.

**Definición 1.1.2** Sea $T : X \to Y$ una aplicación. Decimos que $T$ es ***inyectiva*** si para $T(x_1) = T(x_2)$ en $Y$ , entonces $x_1 = x_2$ en $X$. De forma equivalente, $T$ es inyectiva si para $x_1 \neq x_2$ implica que $T(x_1) \neq T(x_2)$.

**Definición 1.1.3** Sea $T : X \to Y$ una aplicación. Decimos que $T$ es ***sobreyectiva*** si para cada $y$ en $Y$, existe un $x$ en $X$ tal que $T(x) = y$.

**Definición 1.1.4** Se dice que una aplicación $T : X \to Y$ es ***biyectiva***, si $T$ es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

**Definición 1.1.5** Una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se llama ***periódica de periodo $\boldsymbol{L > 0}$*** si para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + L) = f(x).$$

Si $f$ es periódica de periodo $L$, entonces la función $F(x) = f(Lx)$ es periódica de periodo 1 es decir, $L = 1$. Esto que se verifica a continuación

$$\begin{aligned}
F(x+1) &= f(L(x+1)) \\
&= f(Lx + L) \\
&= f(Lx) \\
F(x+1) &= F(x).
\end{aligned}$$

Así $F(x)$ es periódica de periodo 1. Además, ya que $f(x) = F(\frac{x}{L})$, es suficiente considerar solamente funciones periódicas de periodo 1. Por simplicidad llamaremos tales funciones solamente ***periódicas***.

**Ejemplo 1.1.6** Las siguientes funciones son periódicas:

I) $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)$ es periódica ya que para $L = 1$, $\operatorname{sen}(2\pi(x + 1)) = \operatorname{sen}(2\pi x)$.

II) $f(x) = \cos(2\pi x)$, es periódica ya que para $L = 1$, $\cos(2\pi(x + 1)) = \cos(2\pi x)$.

III) $f(x) = e^{2\pi i x}$, es periódica ya que para $L = 1$,

$$e^{2\pi i(x+1)} = \cos(2\pi(x + 1)) + i \operatorname{sen}(2\pi(x + 1)) = \cos(2\pi x) + i \operatorname{sen}(2\pi x) = e^{2\pi i x}.$$

Además, cada función dada en el intervalo semiabierto $[0, 1)$ se puede extender a una función periódica de una manera única.

**Definición 1.1.7** Sean $X, Y$ espacios vectoriales y $T : X \to Y$ una aplicación. Decimos que $T$ es ***lineal*** si para cada $x, y \in X$ y para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ cumple las siguientes propiedades:

(L1) $T(x + y) = Tx + Ty$.

(L2) $T(\alpha x) = \alpha Tx$.

De esto se deduce que si $\alpha = 0$, entonces $T(0x) = 0Tx$, es decir, $T0 = 0$.

**Lema 1.1.8** Sean $X, Y$ espacios vectoriales. Si $T : X \to Y$ es una aplicación que cumple que para cada $x, y \in X$ y cada $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty,$$

entonces $T$ es lineal.

**Demostración:**

Necesitamos demostrar que se cumplen las propiedades de la Definición 1.1.7. Por hipótesis sabemos que, para cada $x, y \in X$ y cada $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty. \tag{1.1}$$

- Verificando que se cumple (L1). Considerando $\beta = 0$ en (1.1) tenemos que

$$T(\alpha x + 0y) = \alpha Tx + 0Ty = \alpha Tx + 0 = \alpha Tx.$$

- Verificando que se cumple (L2). Considerando $\alpha = \beta = 1$ en (1.1) tenemos que

$$T(1x + 1y) = 1Tx + 1Ty = Tx + Ty.$$

Por lo tanto, $T$ es lineal.

$\blacksquare$

Además, se deduce que si $X$ e $Y$ son dos espacios vectoriales y $T : X \to Y$ es lineal, entonces $T$ debe de ser inyectiva. Verifiquemos este hecho. Sean $Tx_1, Tx_2 \in Y$ tales que $Tx_1 = Tx_2$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= Tx_1 - Tx_2 \\ 0 &= T(x_1 - x_2), \quad \text{por ser } T \text{ lineal} \\ \Rightarrow 0 &= x_1 - x_2, \quad \text{por ser } T \text{ lineal} \\ \Rightarrow x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $T$ cumple con la Definición 1.1.2, es decir, $T$ es inyectiva.

De ahora en adelante, diremos que una aplicación es lineal siempre que cumpla la hipótesis del Lema 1.1.8.

**Definición 1.1.9** Un ***producto interno*** $\langle .,. \rangle$ es una función que va desde $V \times V$ a $\mathbb{C}$, donde $V$ es un espacio vectorial complejo, que satisface las siguientes propiedades para todo $u, v, w \in V$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

(IP1) $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$; es decir, que sea $\mathbb{C}$-lineal.

(IP2) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$.

(IP3) $\langle v, v \rangle \geq 0$ y $\langle v, v \rangle = 0$ implica que $v = 0$.

Observemos que si $v = 0$, entonces $\langle v, v \rangle = 0$, se deduce de (IP1), ya que

$$\begin{aligned} &v = 0 \\ &v = 0 \cdot v, \quad \text{donde 0, es el cero de } \mathbb{C}, \end{aligned}$$

luego por la propiedad (IP1) tenemos

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= \langle 0 \cdot v, 0 \cdot v \rangle \\ &= 0^2 \langle v, v \rangle \\ \langle v, v \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Además, si $f$ y $g$ son funciones periódicas, entonces también lo es $af + bg$ para $a, b \in \mathbb{C}$, así que el conjunto de funciones periódicas forman un espacio vectorial complejo.

**Definición 1.1.10** Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es ***continua en un punto*** $x \in \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{para cada } y \in \mathscr{D}(f) \text{ que satisface } |y - x| < \delta.$$

Se dice que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es ***continua*** si es continua en cada punto de $\mathbb{R}$.

Denotaremos por $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ al subespacio lineal de todas las funciones periódicas continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. También, definimos $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ como el espacio de todas las funciones periódicas infinitamente diferenciables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Para $f$ y $g$ en $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ sea

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

donde "$\overline{g(x)}$" indica la conjugación compleja de $g(x)$ y la integral de una función de valor complejo $h(x) = u(x) + iv(x)$ se define por linealidad, es decir,

$$\int_0^1 h(x)\ dx = \int_0^1 u(x)\ dx + i\int_0^1 v(x)\ dx.$$

**Lema 1.1.11** $\langle .,. \rangle$ define un producto interno en el espacio vectorial $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

**<u>Demostración:</u>**

Necesitamos verificar que se cumplen las propiedades de la Definición 1.1.9. Sean $f, g, h \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

- Verificando que cumple (IP1).

$$\begin{aligned}
\langle \alpha f + \beta g, h \rangle &= \int_0^1 [\alpha f(x) + \beta g(x)]\overline{h(x)}\ dx \\
&= \int_0^1 [\alpha f(x)\overline{h(x)} + \beta g(x)\overline{h(x)}]\ dx \\
&= \alpha \int_0^1 f(x)\overline{h(x)}\ dx + \beta \int_0^1 g(x)\overline{h(x)}\ dx \\
\langle f + \beta g, h \rangle &= \alpha\langle f, h \rangle\ + \beta\langle g, h \rangle.
\end{aligned}$$

- Verificando que cumple (IP2).

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle\ &= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\ dx \\
&= \overline{\overline{\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\ dx}} \\
&= \overline{\int_0^1 \overline{f(x)\overline{g(x)}}\ dx} \\
&= \overline{\int_0^1 \overline{f(x)}[\overline{\overline{g(x)}}]\ dx} \\
&= \overline{\int_0^1 g(x)\overline{f(x)}\ dx} \\
\langle f, g \rangle\ &= \overline{\langle g, f \rangle}.
\end{aligned}$$

- Verificando que cumple (IP3). Como

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{f(x)}\ dx = \int_0^1 |f(x)|^2\ dx.$$

Sea $f \neq 0$ y $g(x) = |f(x)|^2$, entonces $g$ es continua dado que $f$ es continua. Ya que

$f \neq 0$, existe un $x_0 \in [0,1]$ con $g(x_0) = \alpha > 0$. Entonces, como $g$ es continua, existe un $\delta > 0$ tal que $g(x) > \frac{\alpha}{2}$ para todo $x \in [0,1]$ con $|x - x_0| < \delta$. Por lo que $|g(x) - \alpha| < \varepsilon$, es decir, $-\varepsilon + \alpha < g(x) < \varepsilon + \alpha$, si escogemos $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx = \int_0^1 g(x) \, dx \\
&> \int_{|x-x_0|<\delta} \frac{\alpha}{2} \, dx \\
&= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\alpha}{2} \, dx \\
&= \frac{2\alpha\delta}{2} \\
&= \alpha\delta > 0 \\
\Rightarrow \langle f, f\rangle &> 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\langle ., . \rangle$ define un producto interno en $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

■

## 1.2. Exponenciales.

Para $k \in \mathbb{Z}$, sea

$$e_k(x) = e^{2\pi i k x},$$

entonces por (III) del Ejemplo 1.1.6 sabemos que $e^{2\pi i x}$ es de periodo 1, pero además es continua en $[0,1]$, entonces $e_k$ se encuentra en $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. El producto interno de los $e_k$ se da en el siguiente lema.

**Lema 1.2.1** Si $k, l \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\langle e_k, e_l \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } k = l \\ 0, & \text{si } k \neq l. \end{cases}$$

En particular, se deduce que los $e_k$, para un valor de $k$ variable, genera vectores linealmente independientes en el espacio vectorial $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Finalmente si

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k(x)$$

para algunos coeficientes $c_k \in \mathbb{C}$, entonces

$$c_k = \langle f, e_k \rangle.$$

**Demostración:**

Sean $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Si $k = \ell$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle e_k, e_\ell \rangle &= \int_0^1 e^{2\pi i k x} e^{-2\pi i \ell x} dx \\
&= \int_0^1 e^{2\pi i (k-\ell) x} \\
&= \int_0^1 1 dx \\
\langle e_k, e_\ell \rangle &= 1.
\end{aligned}$$

Si $k \neq \ell$ y sea $m = k - \ell \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle e_k, e_\ell \rangle &= \int_0^1 e^{2\pi i k x} e^{-2\pi i \ell x} dx \\
&= \int_0^1 e^{2\pi i (k-\ell) x} dx \\
&= \int_0^1 e^{2\pi i m x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi i m} e^{2\pi i m x} \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2\pi i m} (1 - 1) \\
\langle e_k, e_\ell \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Ahora, deduciremos la independencia lineal. Supongamos que tenemos

$$\lambda_{-n} e_{-n} + \lambda_{-n+1} e_{-n+1} + \cdots + \lambda_n e_n = 0,$$

para algún $n \in \mathbb{N}$ y coeficientes $\lambda_k \in \mathbb{C}$. Entonces tenemos que demostrar que todos los coeficientes $\lambda_k = 0$. Sea $k \in \mathbb{Z}$, así

$$\begin{aligned}
0 &= \langle 0, e_k \rangle \\
&= \langle \lambda_{-n} e_{-n} + \lambda_{-n+1} e_{-n+1} + \cdots + \lambda_n e_n, e_k \rangle \\
&= \lambda_{-n} \langle e_{-n}, e_k \rangle + \cdots + \lambda_k \langle e_k, e_k \rangle + \cdots + \lambda_n \langle e_n, e_k \rangle \\
&= \lambda_{-n}(0) + \cdots + \lambda_k(1) + \cdots + \lambda_n(0) \\
0 &= \lambda_k.
\end{aligned}$$

Así, se ha demostrado que los $e_k$ son linealmente independientes. Ahora, supongamos que

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k(x),$$

para algunos coeficientes $c_k \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle f, e_k \rangle &= \left\langle \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k, e_k \right\rangle \\
&= \langle c_{-n}e_{-n} + c_{-n+1}e_{-n+1} + \cdots + c_n e_n, e_k \rangle \\
&= c_{-n}\langle e_{-n}, e_k \rangle + \cdots + c_k \langle e_k, e_k \rangle + \cdots + c_n \langle e_n, e_k \rangle \\
&= c_{-n}(0) + \cdots + c_k(1) + \cdots + c_n(0) \\
\langle f, e_k \rangle &= c_k.
\end{aligned}$$

■

**Definición 1.2.2** Sea $f : X \to Y$ una función y sea $A \subseteq X$, definimos la ***restricción*** de $f$ a $A$ como

$$\begin{aligned}
f|_A : A &\to Y \\
a &\mapsto f(a), \quad \text{siempre que } a \in A.
\end{aligned}$$

Se lee "$f$ restringida a $A$".

**Definición 1.2.3** Para un subconjunto $A$ de $[0,1]$, sea $\mathbf{1}_A$ la ***función característica***, es decir,

$$\mathbf{1}_{A(x)} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

**Definición 1.2.4** Sean $I_1, I_2, \cdots, I_m$ sub-intervalos de $[0,1]$ que pueden ser abiertos, cerrados ó semiabiertos. Una ***función escalonada de Riemann*** es una función de la forma

$$s(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{1}_{I_j}(x)$$

para algunos coeficientes $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

Para una función escalonada de Riemann $s(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{1}_{I_j}(x)$ se deduce

$$\begin{aligned}
\int_0^1 s(x)dx &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{1}_{I_j}(x)dx \\
&= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_0^1 \mathbf{1}_{I_j}(x)dx \\
\int_0^1 s(x)dx &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \text{longitud}(I_j).
\end{aligned}$$

**Definición 1.2.5** Una función de valor real $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ se llama ***Riemann integrable*** si para cada $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas $\varphi$ y $\psi$ en $[0,1]$ tales que $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ para cada $x \in [0,1]$ y

$$\int_0^1 (\psi(x) - \varphi(x))dx < \varepsilon.$$

Es decir, a medida que $\varepsilon$ se acerca a cero, las integrales de las funciones escalonadas tenderán a un límite común, que se define como la integral de $f$. Tenga en cuenta que, como consecuencia, todas las funciones Riemann integrables en $[0,1]$ están acotadas. Una función de valor complejo se llama Riemann integrable si sus partes real e imaginaria lo son.

**Definición 1.2.6** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función periódica y Riemann integrable en el intervalo $[0,1]$. Los números

$$c_k(f) = \langle f, e_k \rangle = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

se llaman los ***coeficientes de Fourier*** de $f$.

**Definición 1.2.7** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función periódica y Riemann integrable en el intervalo $[0,1]$. Llamamos ***serie de Fourier*** de $f$ a la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{2\pi ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e_k(x),$$

es decir que, la sucesión de las sumas parciales $S_n(f) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$.

Sea $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de todas las funciones periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son Riemann integrales en $[0,1]$. Ya que cada función continua en el intervalo [0,1] es Riemann integrable, se deduce que $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ es un subespacio de $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Tenga en cuenta que el producto interno $\langle ., . \rangle$ definido en $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ se extiende a $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, pero ya no es positivo allí, como lo muestra el siguiente corolario.

**Corolario 1.2.8** Pruebe dando un ejemplo que el producto interno definido en el Lema 1.1.11 para el espacio $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ no es definido positivo en el espacio $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

**Demostración:**

Consideremos $f(x)$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0,1) \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Mas adelante se demostrará que $f$ tiene solamente una discontinuidad en $x = 1$ (ver Ejemplo 1.4.5). Además, es claro que $f$ es acotada. Así $f$ es Riemann integrable, es decir, $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Luego

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \int_0^1 |f(x)|^2 dx \\
&= \int_{[0,1)} |0|^2 dx + \int_1^1 |1|^2 dx, \quad \text{por como está definida } f \\
\langle f, f\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Pero la función $f$ que hemos considerado no es la función cero en $[0, 1]$. Así, contradice la propiedad (IP3) de la Definición 1.1.9. Por lo tanto, $\langle ., .\rangle$ no es definido positivo en el espacio $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

$\blacksquare$

**Definición 1.2.9** Una ***norma*** $\|.\|$ es una función que va desde un espacio vectorial complejo $V$ a $\mathbb{R}_0^+$, que satisface las siguientes propiedades para todo $v, w \in V$ y para todo $\lambda \in \mathbb{C}$:

(N1) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$.

(N2) $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0$, implica que $v = 0$.

(N3) $\|v+w\| \leq \|v\|+\|w\|$. Esta última propiedad se conoce como **desigualdad triangular.**

Si $V$ posee una norma $\|.\|$, decimos que $V$ es un ***espacio normado***.

La norma y el producto interno de un espacio vectorial están muy relacionados. Veremos que un espacio pre-Hilbert (ver Definición 2.1.1) induce una norma en dicho espacio. Pero antes, demostraremos una desigualdad que nos ayudará a demostrar este hecho.

**Lema 1.2.10** ***(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)*** Sea $V$ un espacio pre-Hilbert arbitrario. Entonces para cualquier $v, w \in V$ se cumple la siguiente desigualdad

$$|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle.$$

Además, se cumple la igualdad sí y sólo sí $v$ y $w$ son linealmente dependientes.

**Demostración:**

Si $w = 0$, entonces la desigualdad es trivial. Supongamos que $w \neq 0$. Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle v-\lambda w, v-\lambda w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle - \overline{\lambda}\langle v,w\rangle - \lambda\langle w,v\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w,w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle - \overline{\lambda}\langle v,w\rangle - \lambda[\langle w,v\rangle - \overline{\lambda}\langle w,w\rangle] \\
\Rightarrow 0 &\leq \langle v,v\rangle - \overline{\lambda}\langle v,w\rangle - \lambda[\langle w,v\rangle - \overline{\lambda}\langle w,w\rangle].
\end{aligned}$$

En particular, si $\overline{\lambda} = \frac{\langle w,v\rangle}{\langle w,w\rangle}$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle v,v\rangle - \frac{\langle w,v\rangle}{\langle w,w\rangle}\langle v,w\rangle - \lambda\left[\langle w,v\rangle - \frac{\langle w,v\rangle}{\langle w,w\rangle}\langle w,w\rangle\right] \\
&= \langle v,v\rangle - \frac{\langle w,v\rangle\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle} - \lambda[\langle w,v\rangle - \langle w,v\rangle] \\
&= \langle v,v\rangle - \frac{\overline{\langle v,w\rangle}\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle} \\
&= \langle v,v\rangle - \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\langle w,w\rangle} \\
\Rightarrow 0 &\leq \langle v,v\rangle - \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\langle w,w\rangle} \\
\Rightarrow \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\langle w,w\rangle} &\leq \langle v,v\rangle \\
\Rightarrow |\langle v,w\rangle|^2 &\leq \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle.
\end{aligned}$$

Ahora, es evidente que, si $v = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces se genera una igualdad. Recíprocamente, si $v - \lambda w \neq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, la desigualdad es estricta.

$\blacksquare$

**Teorema 1.2.11** Si $V$ es un espacio pre-Hilbert, entonces la función definida por

$$v \in V \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

es una norma en $V$.

**Demostración:**

Sean $v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Necesitamos demostrar las propiedades de la Definición 1.2.9.

- Verificando que se cumple (N1).

$$\begin{aligned}
\|\lambda v\| &= \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} \\
&= \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle v,v\rangle} \\
&= \sqrt{|\lambda|^2\langle v,v\rangle} \\
&= |\lambda|\sqrt{\langle v,v\rangle} \\
\|\lambda v\| &= |\lambda|\|v\|.
\end{aligned}$$

- Verificando que se cumple (N2). Como $\langle v, v\rangle \geq 0$ ya que $V$ es un espacio pre-Hilbert, entonces:
$$\|v\| \ = \sqrt{\langle v, v\rangle} \geq 0.$$
Además, si $\|v\| = 0$, entonces:
$$\begin{aligned} 0 &= \|v\| \\ 0 &= \sqrt{\langle v, v\rangle} \\ 0 &= \langle v, v\rangle \\ 0 &= v, \quad \text{dado que } V \text{ es un espacio pre-Hilbert.} \end{aligned}$$

- Verificando que se cumple (N3). Usemos el hecho de que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$, por lo que
$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + (\langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle) + \langle w, w\rangle \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &= \|v\|^2 + +2\,\mathrm{Re}(\langle v, w\rangle)\|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w\rangle| + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2, \quad \text{por Lema 1.2.10} \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2 \\ \Rightarrow \|v + w\|^2 &\leq (\|v\| + \|w\|)^2 \\ \Rightarrow \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|.\|$ define una norma en $V$.

■

Así, como resultado de este teorema y del Lema 1.1.11 se deduce que, si
$$f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \mapsto \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left[\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}},$$
entonces $\|.\|_2$ es una norma en el espacio $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

## 1.3. La desigualdad de Bessel.

La desigualdad de Bessel da una aproximación de la suma de las normas cuadradas de los coeficientes de Fourier y es de importancia central en la teoría de las series de Fourier. Su prueba se basa en la siguiente lema.

**Lema 1.3.1** Sea $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, y para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea $c_k = \langle f, e_k \rangle$ su $k$-ésimo coeficiente de Fourier. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

<u>**Demostración:**</u>

Consideremos $g = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e_k$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \left\langle f, \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\rangle \\
&= \overline{\sum_{k=-n}^{n} c_k} \langle f, e_k \rangle \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} \langle f, e_k \rangle \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} c_k \\
\langle f, g \rangle &= \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\langle g, g \rangle &= \left\langle g, \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\rangle \\
&= \overline{\sum_{k=-n}^{n} c_k} \langle g, e_k \rangle \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} \left\langle \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j, e_k \right\rangle \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} c_k \\
\langle g, g \rangle &= \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2,
\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_2^2 &= \langle f - g, f - g \rangle \\
&= \langle f, f \rangle - \langle f, g \rangle - \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle
\end{aligned}$$

$$= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

$$\|f-g\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

$$\Rightarrow \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

■

**Teorema 1.3.2** ***(Desigualdad de Bessel)*** Sea $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ con coeficientes de Fourier $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Entonces

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

**Demostración:**

Por el Lema 1.3.1 sabemos que

$$0 \leq \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2,$$

entonces cuando $n \to \infty$ tendremos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f\|_2^2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \\ &= \int_0^1 |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \\ \Rightarrow 0 &\leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \\ \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &\leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

■

## 1.4. Convergencia en la norma-$L^2$.

Introducimos la noción de convergencia-$L^2$, que es la noción apropiada de convergencia para las series de Fourier.

**Definición 1.4.1** Sea $f$ una función en $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Decimos que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge en la norma-$L^2$*** a $f$ si

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0.$$

**Definición 1.4.2** Una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un intervalo $I$ ***converge puntualmente*** a una función $f$, si para cada $x \in I$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, de manera que para todo $n \geq n_0$,

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Un concepto de convergencia que de hecho implica la convergencia-$L^2$ es el de *convergencia uniforme*. Veamos su definición a continuación.

**Definición 1.4.3** Una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un intervalo $I$ ***converge uniformemente*** a una función $f$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, de manera que para todo $n \geq n_0$,

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{para cada } x \in I.$$

La diferencia entre la convergencia puntual que vimos en la Definición 1.4.2 y la convergencia uniforme, radica en el hecho de que en el caso de la convergencia uniforme el número $n_0$ no depende de $x$. Este se puede elegir uniformemente para cada $x \in I$. Es decir, que convergencia puntual no implica convergencia uniforme.

El siguiente lema determina que existe una relación, bajo ciertas hipótesis, entre las funciones que forman la sucesión de funciones y la función a la que convergen.

**Lema 1.4.4** Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente a la función $f$ en $I$, y todas las funciones $f_n$ son continuas en $I$, entonces también la función $f$ es continua en $I$.

**Demostración:**

Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas en $I$ y que converge uniformemente a $f$ en $I$. Así, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para cada } n \geq N \text{ y cada } x \in I.$$

Como $f_N$ es continua en $I$, entonces para cada $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f_N(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para cada } y \in I \text{ que satisface } |y - x| < \delta.$$

Ahora, si $y \in I$ y $|y - x| < \delta$, entonces

$$
\begin{aligned}
|f(y)-f(x)| &= |f(y)-f(x)+f_N(x)-f_N(x)+f_N(y)-f_N(y)| \\
&= |(f(y)-f_N(y))+(f_N(y)-f_N(x))+(f_N(x)-f(x))| \\
&\leq |f(y)-f_N(y)|+|f_N(y)-f_N(x)|+|f_N(x)-f(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon \\
\Rightarrow |f(y)-f(x)| &< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Es decir, $|f(y)-f(x)| < \varepsilon$ para cada $y \in I$ que satisface $|y-x| < \delta$. Como $x \in I$ es arbitrario, entonces $f$ es continua en $I$.

■

**Ejemplo 1.4.5** La sucesión $f_n(x) = x^n$ en el intervalo $I = [0,1]$ converge puntualmente, pero no uniformemente, a la función

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}
$$

Sin embargo, en cada subintervalo $[0,a]$ para un $a < 1$, la sucesión converge uniformemente a la función cero.

**Demostración:**

Primero demostremos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a $f$.
Si $x=0$, entonces $f_n(0) = 0^n = 0 \to 0$.
Si $x=1$, entonces $f_n(1) = 1^n = 1 \to 1$.

Ahora, consideremos cuando $0 < x < 1$, entonces $f_n(x) = x^n$ converge a cero, dado que para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$
|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x^n| = x^n < \varepsilon, \quad \text{para cada } n \leq N.
$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a $f$.

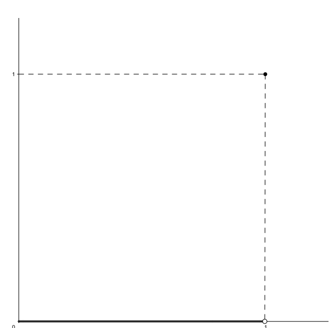

Figura 1.1: Gráfica de la función $f(x)$.

Ahora demostraremos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente a $f$ en $I$. Para ello razonemos por contradicción. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f$ en $I$.

Como $f_n(x) = x^n$ es continua en $I$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces por el Lema 1.4.4 debe ser que $f$ es continua en $I$. Así, para cada $x \in I$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \text{para cada } y \in \mathscr{D}(f) \text{ que satisface } |x - y| < \delta.$$

Consideremos $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $y = 1$. Sea $\delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta$, es decir $x \in (y-\delta, y) = (1-\delta, 1)$, entonces

$$|f(x) - f(y)| = |0 - f(1)| = |-1| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2},$$

esto genera una contradicción.

Por lo tanto, $f$ no es continua en $I$. Así $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente a $f$.

Finalmente, demostraremos que en cada subintervalo $J = [0, a]$ para $a < 1$, la sucesión converge uniformemente a la función cero.

Sea $g$ la función cero en $J$, es decir, que $g(x) = 0$ para cada $x \in J$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $0 < a < 1$, entonces $a^n$ converge a cero cuando $n \to \infty$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a^n < \varepsilon$ para cada $n \geq N$, entonces

$$|f_n(x) - g(x)| = |x^n - 0| = |x^n| = x^n < \varepsilon, \quad \text{para cada } n \geq N \text{ y cada } x \in J.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $g$ en $J$.

$\blacksquare$

El siguiente ejemplo nos muestra las condiciones para que una sucesión funciones de sumas parciales converja.

**Ejemplo 1.4.6 (Test-M de Weierstrass)** Sea $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ para una sucesión de funciones $a_k(x)$, $x \in I$. Supongamos que existe una sucesión $c_k$ de números reales positivos tales que $|a_k(x)| \leq c_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $x \in I$. Supongamos además que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k < \infty.$$

Entonces la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$.

**Demostración:**

Sea $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$. Como $|a_k(x)| \leq c_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $x \in I$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty, \quad \text{para cada } x \in I.$$

Así $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(x)|$ converge para cada $x \in I$, y de esta forma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ también converge en el espacio de Banach $\mathbb{C}$ (ver Definición 2.1.14) para cada $x \in I$.

Sean $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ y $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$, de manera que $s_n \to s = \sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$.
Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s - s_n| < \varepsilon, \quad \text{para cada } n \geq N,$$

es decir,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k - \sum_{k=1}^{n} c_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k < \varepsilon, \quad \text{para cada } n \geq N.$$

Pero

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k < \varepsilon, \quad \text{para cada } n \geq N \text{ y cada } x \in I.$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \right| \\
&= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(x)| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{para cada } n \geq N \text{ y cada } x \in I.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función $f$ en $I$.

$\blacksquare$

**Proposición 1.4.7** Si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f$ uniformemente en $[0,1]$, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f$ en la norma-$L^2$.

**Demostración:**

Sean $I=[0,1]$ y $\varepsilon>0$. Entonces existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon, \quad \text{para cada } n\geq n_0 \text{ y cada } x\in I.$$

Por lo tanto, para $n\geq n_0$

$$\begin{aligned}
\|f-f_n\|_2^2 &= \int_0^1 |f(x)-f_n(x)|^2dx \\
&< \int_0^1 \varepsilon^2 dx \\
&= \varepsilon^2 \\
\Rightarrow \|f-f_n\|_2^2 &< \varepsilon^2 \\
\Rightarrow \|f-f_n\|_2 &< \varepsilon, \quad \text{para cada } n\geq n_0 \text{ y cada } x\in I.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f$ en la norma-$L^2$.

■

Un resultado clave de este capítulo es que la serie de Fourier de cada $f\in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ converge a $f$ en la norma-$L^2$, que demostraremos más adelante. La idea de la prueba es encontrar una clase de funciones simples para las cuales se pueda probar la afirmación mediante el cálculo explícito de los coeficientes de Fourier y luego aproximar la función dada por esas funciones simples. Para llevar a cabo estos cálculos explícitos necesitaremos los siguientes lemas.

**Lema 1.4.8** Si $\alpha<a<b<\beta$ son números reales y si $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ es una función continua diferenciable. Para $k\in\mathbb{R}$ sea

$$F(k)=\int_a^b f(x)\operatorname{sen}(kx)dx.$$

Entonces $\lim\limits_{|k|\to\infty} F(k)=0$ y la convergencia es uniforme en $a,b\in[\alpha,\beta]$.

**Demostración:**

Para $k\neq 0$ integramos por partes para obtener

$$\begin{aligned}
F(k) &= -f(x)\frac{\cos(kx)}{k}\bigg|_a^b + \frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\cos(kx)dx \\
\Rightarrow |F(k)| &= \left|-f(x)\frac{\cos(kx)}{k}\bigg|_a^b + \frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\cos(kx)dx\right| \\
\Rightarrow |F(k)| &\leq \left|-f(x)\frac{\cos(kx)}{k}\bigg|_a^b\right| + \left|\frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\cos(kx)dx\right|.
\end{aligned}$$

Como $|\cos(x)| \leq 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y ya que $f$ y $f'$ son continuas en $[\alpha, \beta]$, entonces existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ y $|f'(x)| \leq M$ para cada $x \in [\alpha, \beta]$. Así

$$\begin{aligned}
\left| -f(x)\frac{\cos(kx)}{k}\Bigg|_a^b \right| &= |-f(x)| \left| \frac{\cos(kb) - \cos(ka)}{k} \right| \\
&\leq |f(x)| \left( \frac{|\cos(kb)| + |\cos(ka)|}{|k|} \right) \\
&\leq M \left( \frac{1+1}{|k|} \right) \\
\Rightarrow \left| -f(x)\frac{\cos(kx)}{k}\Bigg|_a^b \right| &\leq \frac{2M}{|k|}.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{k} \int_a^b f'(x)\cos(kx)dx \right| &= \left| \frac{1}{k} \right| \left| \int_a^b f'(x)\cos(kx)dx \right| \\
&\leq \frac{1}{|k|} \int_a^b |f'(x)\cos(kx)dx \\
&\leq \frac{1}{|k|} \int_a^b M|\cos(kx)dx| \\
&\leq \frac{M}{|k|} \int_a^b 1dx \\
&= \frac{M}{|k|}(b-a) \\
\Rightarrow \left| \frac{1}{k} \int_a^b f'(x)\cos(kx)dx \right| &\leq \frac{M(b-a)}{|k|}.
\end{aligned}$$

De manera que

$$|F(k)| \leq \frac{2M}{|k|} + \frac{M(b-a)}{|k|},$$

así, cuando $|k| \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{|k| \to \infty} |F(k)| = 0.$$

Es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$, tal que si $|k| > N$, entonces

$$|F(k) - 0| = |F(k)| < \varepsilon.$$

Observemos que $N$ no depende de $x \in [a, b] \subset [\alpha, \beta]$. Por lo que $\lim\limits_{|k| \to \infty} F(k) = 0$ converge uniformemente para cada $x \in [a, b] \subset [\alpha, \beta]$.

$\blacksquare$

**Lema 1.4.9** Demuestre que se cumple la siguiente igualdad

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\theta\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \text{para } 0 < \theta < 2\pi.$$

A esta igualdad se le conoce como **igualdad trigonométrica de Lagrange**.

**Demostración:**

Para ello, antes demostremos que

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad \text{para } z \neq 1.$$

Si $z \neq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
(1-z)\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right) &= (1-z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^n) \\
&= 1 + z + z^2 + \cdots + z^n - (z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n+1}) \\
(1-z)\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right) &= 1 - z^{n+1} \\
\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} z^k &= \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Ahora, consideremos $z = e^{i\theta}$. Como $0 < \theta < 2\pi$ por hipótesis, entonces $z \neq 1$. De manera que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} z^k &= \sum_{k=0}^{n} e^{i\theta k} \\
&= \frac{1 - e^{(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}, \quad \text{por (1.2)} \\
&= \frac{1 - e^{(n+1)\theta}}{-e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)} \\
\sum_{k=0}^{n} e^{i\theta k} &= \frac{-e^{-\frac{i\theta}{2}}\left(1 - e^{(n+1)\theta}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}},
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\
\Rightarrow 2i\operatorname{sen}(\theta) &= e^{i\theta} - e^{-i\theta} \\
\Rightarrow 2i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) &= e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}},
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{i\theta k} &= \frac{-e^{-\frac{i\theta}{2}}\left(1-e^{(n+1)\theta}\right)}{2i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}\\ &= \frac{i\left[e^{-\frac{i\theta}{2}}\left(1-e^{(n+1)\theta}\right)\right]}{2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \text{pues } \tfrac{-1}{i}=i\\ \sum_{k=0}^{n} e^{i\theta k} &= \frac{i\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{i\theta\left[(n+1)-\frac{1}{2}\right]}\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)},\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}\frac{i\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{i\theta\left[(n+1)-\frac{1}{2}\right]}\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} &= \frac{i\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left((n+1)-\frac{1}{2}\right)-i\,\text{sen}\left((n+1)-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}\\ &= \frac{i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)-i\cos\left((n+1)-\frac{1}{2}\right)+\text{sen}\left((n+1)-\frac{1}{2}\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}\\ &= \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)+\text{sen}\left((n+1)-\frac{1}{2}\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}+i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left((n+1)-\frac{1}{2}\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}\\ \frac{i\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{i\theta\left[(n+1)-\frac{1}{2}\right]}\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} &= \frac{1}{2}+\frac{\text{sen}\left((n+1)-\frac{1}{2}\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}+i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left((n+1)-\frac{1}{2}\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}\\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} e^{i\theta k} &= \frac{1}{2}+\frac{\text{sen}\left((n+1)-\frac{1}{2}\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}+i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left((n+1)-\frac{1}{2}\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Ahora, recordemos que $\cos(\theta)=\text{Re}\left(e^{i\theta}\right)$, por lo que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) &= \text{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\theta k}\right)\\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) &= \frac{1}{2}+\frac{\text{sen}\left((n+1)-\frac{1}{2}\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}.\end{aligned}$$

■

**Lema 1.4.10** Para $0 \leq x \leq 1$ tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{k^2}=\pi^2\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right).$$

Observe que, como un caso especial, para $x=0$ obtenemos la **fórmula de Euler**:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

**Demostración:**

Sea $x \in (0,1)$. Ya que

$$\begin{aligned}
2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{x} \cos(2\pi kt)dt &= 2\pi \left( \frac{\operatorname{sen}(2\pi kt)}{2\pi k} \right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{x} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(2\pi kx\right) - \operatorname{sen}(2\pi k\left(\frac{1}{2}\right))}{k} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(2\pi kx) - \operatorname{sen}(\pi k)}{k} \\
2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{x} \cos(2\pi kt)dt &= \frac{\operatorname{sen}(2\pi kx)}{k}, \qquad \text{ya que } \operatorname{sen}(\pi k) = 0 \text{ para cada } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Además, ya que $x \in (0,1)$, entonces para $\theta = 2\pi x$ se cumple que $\theta \in (0, 2\pi)$. Así, de la igualdad de Lagrange (Lema 1.4.9) tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(2\pi kx) &= \frac{\operatorname{sen}((2n+1)\pi x)}{2\operatorname{sen}(\pi x)} + \frac{1}{2} \\
\sum_{k=1}^{n} \cos(2\pi kx) + 1 &= \frac{\operatorname{sen}((2n+1)\pi x)}{2\operatorname{sen}(\pi x)} + \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \cos(2\pi kx) &= \frac{\operatorname{sen}((2n+1)\pi x)}{2\operatorname{sen}(\pi x)} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

De esta forma, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(2\pi kx)}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \left[ 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{x} \cos(2\pi kt)dt \right] \\
&= 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{x} \left[ \sum_{k=1}^{n} \cos(2\pi kt) \right] dt \\
&= 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{x} \left[ \frac{\operatorname{sen}((2n+1)\pi x)}{2\operatorname{sen}(\pi x)} - \frac{1}{2} \right] dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\operatorname{sen}((2n+1)\pi t)}{2\operatorname{sen}(\pi t)} dt - 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{dt}{2} \\
\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(2\pi kx)}{k} &= 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\operatorname{sen}((2n+1)\pi t)}{2\operatorname{sen}(\pi t)} dt - \pi \left( x - \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 1.4.8 al primer sumando del lado derecho de la igualdad, se tiene que, cuando $n \to \infty$, este converge a cero. Esto implica que, para $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi kx)}{k} &= -\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\\
&= -\pi\left(\frac{2x-1}{2}\right)\\
\Rightarrow -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi kx)}{k} &= \pi(2x-1)\\
\Rightarrow \pi\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2\operatorname{sen}(2\pi kx)}{k} &= \pi^2(2x-1)\\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k}{k}\left(\frac{-2\pi\operatorname{sen}(2\pi kx)}{k}\right)\right] &= \pi^2(2x-1)\\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2\pi k\operatorname{sen}(2\pi kx)}{k^2} &= \pi^2(2x-1)\\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(2\pi kx)}{k^2}\right)' &= \pi^2(2x-1),
\end{aligned}$$

y nuevamente por el Lema 1.4.8 esta serie converge uniformemente en el intervalo $[\delta, 1-\delta] \subset (0,1)$ para cada $\delta > 0$. Ahora usaremos este resultado para demostrar este lema. Sea

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^2}.$$

Acabamos de ver que la serie de las derivadas converge a $\pi^2(2x-1)$ y que esta convergencia es localmente uniforme, por lo que para $0 < x < 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^2}\right)'\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(2\pi kx)}{k^2}\right)'\\
f'(x) &= \pi^2(2x-1),
\end{aligned}$$

es decir que, $f(x) = \pi^2(x^2 - x) + c$. Nos queda demostrar que $c = \frac{\pi^2}{6}$. Ya que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos(2\pi kx)dx &= \left.\frac{\operatorname{sen}(2\pi kx)}{2\pi k}\right|_0^1 = \frac{\operatorname{sen}(2\pi k) - \operatorname{sen}(0)}{2\pi k}\\
&= \frac{\operatorname{sen}(2\pi k)}{2\pi k}\\
&= \frac{0}{2\pi k}, \quad \text{pues } \operatorname{sen}(2\pi k) = 0 \text{ para cada } k \in \mathbb{N}\\
\int_0^1 \cos(2\pi kx)dx &= 0, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

y dado que la serie que define $f$ converge uniformemente en $[0,1]$, entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\cos(2\pi kx)}{k^2} dx = \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^2} \right) dx \\
&= \int_0^1 f(x) dx \\
&= \int_0^1 (\pi^2(x^2 - x) + c) dx \\
0 &= \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} + c \\
c &= \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^2} = \pi^2 \left( x^2 - x + \frac{1}{6} \right).$$

■

Usando este lema técnico, ahora vamos a demostrar la convergencia de la serie de Fourier para las funciones escalonadas de Riemann.

**Lema 1.4.11** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función periódica y tal que $f|_{[0,1]}$ es una función escalonada de Riemann. Entonces, la serie de Fourier de $f$ converge a $f$ en la norma-$L^2$, es decir, la serie

$$f_n = S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k,$$

converge a $f$ en la norma-$L^2$, donde para $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi ikx} dx.$$

__**Demostración:**__

Por el Lema 1.3.1 es suficiente demostrar que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Primero consideramos un caso especial, cuando $f|_{[0,1]} = \mathbf{1}_{[0,a]}$ para algún $a \in [0,1]$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \int_0^1 |\mathbf{1}_{[0,a]}(x)|^2 dx \\
&= \int_0^1 \left(\mathbf{1}_{[0,a]}(x)\right)^2 dx, \qquad \text{pues } \mathbf{1}_{[0,a]} \geq 0 \\
&= \int_0^a 1^2 dx + \int_a^1 0^2 dx \\
\|f\|_2^2 &= a.
\end{aligned}$$

Los coeficientes de Fourier de $f|_{[0,1]} = \mathbf{1}_{[0,a]}$ son

$$\begin{aligned}
c_0 &= \langle f, 1 \rangle \\
&= \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,a]} dx \\
&= \int_0^a 1 dx + \int_a^1 0 dx \\
c_0 &= a \\
\Rightarrow |c_0|^2 &= a^2,
\end{aligned}$$

y para $k \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
c_k &= \langle f, e_k \rangle \\
&= \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,a]}(x) e^{-2\pi i k x} dx \\
&= \int_0^a e^{-2\pi i k x} dx + \int_a^1 0 dx \\
&= -\frac{e^{-2\pi i k x}}{2\pi i k}\bigg|_0^a \\
c_k &= \frac{i}{2\pi k}(e^{-2\pi i k a} - 1).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|c_k|^2 &= \left| \frac{i}{2\pi k}(e^{-2\pi i k a} - 1) \right|^2 \\
&= \left| \frac{i}{2\pi k} \right|^2 \left| (e^{-2\pi i k a} - 1) \right|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2 k^2}(e^{2\pi i k a} - 1)\overline{(e^{2\pi i k a} - 1)} \\
&= \frac{1}{4\pi^2 k^2}(e^{2\pi i k a} - 1)(e^{-2\pi i k a} - 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2k^2}(e^{2\pi ika-2\pi ika} - e^{2\pi ika} - e^{-2\pi ika} + 1) \\
&= \frac{1}{4\pi^2k^2}(e^0 - \cos(2\pi ka) + i\operatorname{sen}(2\pi ka) - \cos(2\pi ka) - i\operatorname{sen}(2\pi ka) + 1) \\
&= \frac{1}{4\pi^2k^2}(2 - 2\cos(2\pi ka)) \\
&= \frac{1}{4\pi^2k^2}[2(1 - \cos(2\pi ka))] \\
|c_k|^2 &= \frac{1-\cos 2\pi ka}{2\pi^2k^2}.
\end{aligned}
$$

Como $\cos(-x) = \cos(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$
\sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1-\cos 2\pi ka}{2\pi^2k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2\pi(-k)a}{2\pi^2(-k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2\pi ka}{2\pi^2k^2},
$$

así que

$$
\sum_{k\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1-\cos 2\pi ka}{2\pi^2k^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2\pi ka}{2\pi^2k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2\pi ka}{\pi^2k^2}.
$$

De manera que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= a^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2\pi ka}{\pi^2k^2} \\
&= a^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2k^2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi ka}{k^2} \\
&= a^2 + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2}\left[\pi^2\left(a^2 - a + \frac{1}{6}\right)\right], \quad \text{por Lema 1.4.10} \\
&= a^2 + \left(\frac{1}{\pi^2}\right)\left(\frac{\pi^2}{6}\right) - a^2 + a - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} + a - \frac{1}{6} \\
&= a \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= \|f\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, hemos demostrado el lema para la función $f = \mathbf{1}_{[0,a]}$. A continuación, deduciremos el mismo resultado para $f = \alpha\mathbf{1}_I$, donde $I$ es un subintervalo arbitrario de $[0,1]$. En primer lugar, tenga en cuenta que ni los coeficientes de Fourier ni la norma cambian si reemplazamos el intervalo cerrado por un intervalo abierto o semi-cerrado. Observemos el comportamiento de los coeficientes de Fourier bajo traslación, es decir, supongamos que

$c_k(f)$ denota el $k-$ésimo coeficiente de Fourier de $f$ y sea $f^y(x) = f(x+y)$, entonces $f^y$ sigue siendo periódica y Riemann integrable, entonces

$$\begin{aligned}
c_k(f^y) &= \int_0^1 f^y(x)e^{-2\pi ikx}dx \\
&= \int_0^1 f(x+y)e^{-2\pi ikx}dx \\
&= \int_y^{1+y} f(x)e^{-2\pi ik(y-x)}dx \\
&= e^{-2\pi iky}\int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}dx \\
c_k(f^y) &= e^{-2\pi iky}c_k(f),
\end{aligned}$$

ya que no importa si uno integra una función periódica sobre $[0,1]$ ó $[y, 1+y]$. Entonces

$$\begin{aligned}
|c_k(f^y)|^2 &= |e^{-2\pi iky}c_k(f)|^2 \\
&= |e^{-2\pi iky}|^2 \ |c_k(f)|^2 \\
|c_k(f^y)|^2 &= |c_k(f)|^2, \quad \text{pues } |e^{-2\pi iky}|^2 = 1.
\end{aligned}$$

Además, utilizando el mismo hecho, de que no importa si uno integra una función periódica sobre $[0,1]$ ó $[y, 1+y]$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f^y\|_2^2 &= \int_0^1 |f^y(x)|^2dx \\
&= \int_0^1 |f(x+y)|^2dx \\
&= \int_y^{y+1} |f(x)|^2dx \\
&= \int_0^1 |f(x)|^2dx \\
\|f^y\|_2^2 &= \|f\|_2^2,
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|\mathbf{1}_I\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Así, el lema queda demostrado para $f|_{[0,1]} = \mathbf{1}_I$, donde $I$ es un intervalo arbitrario en $[0,1]$.

Por último, como una función escalonada arbitraria es una combinación lineal de funciones características de intervalos, así el lema se concluye por la linealidad.

$\blacksquare$

**Teorema 1.4.12** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función periódica y Riemann integrable en $[0,1]$. Entonces la serie de Fourier de $f$ converge a $f$ en la norma-$L^2$. Si $c_k$ denota los coeficientes de Fourier de $f$, entonces

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2.$$

El teorema en particular implica que la sucesión $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tiende a cero cuando $|k| \to \infty$. Este teorema también se conoce como **Lema de Riemann-Lebesgue.**

<u>**Demostración:**</u>

Sea $f = u + iv$ la descomposición de $f$ en partes real e imaginaria. Las sumas parciales de las series de Fourier para $f$ satisfacen

$$\begin{aligned} S_n(f) &= S_n(u+iv) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(u+iv)e_k \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \langle u+iv, e_k\rangle e_k \\ &= \sum_{k=-n}^{n} [\langle u, e_k\rangle e_k + i\langle v, e_k\rangle e_k] \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \langle u, e_k\rangle e_k + i\sum_{k=-n}^{n} \langle v, e_k\rangle e_k \\ S_n(f) &= S_n(u) + iS_n(v). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si las series de Fourier de $u$ y $v$ convergen en la norma-$L^2$ con respecto a $u$ y $v$, entonces el teorema se cumple para $f$.

Para probar el teorema, basta con considerar el caso en el que $f$ tiene valor real. Como, además, las funciones integrables están acotadas, podemos multiplicar a $f$ por un escalar positivo, por lo que podemos suponer que $|f(x)| \leq 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Ya que $f$ es Riemann integrable, existen funciones escalonadas $\varphi, \psi$ en $[0,1]$, tales que

$$-1 \leq \varphi \leq \ f \leq \psi \leq 1$$

y

$$\int_0^1 (\psi(x) - \varphi(x))dx \leq \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Sea $g = f - \varphi$, entonces $0 \leq g \leq \psi - \varphi$. Entonces

$$|g|^2 \leq |\psi - \varphi|^2,$$

pero $-1 \leq \varphi \leq \psi \leq 1$, así

$$\begin{aligned}
|\psi - \varphi| &\leq 2 \\
\Rightarrow |\psi - \varphi||\psi - \varphi| &\leq 2|\psi - \varphi| \\
\Rightarrow |\psi - \varphi|^2 &\leq 2(\psi - \varphi),
\end{aligned}$$

es decir

$$|g|^2 \leq |\psi - \varphi|^2 \leq 2(\psi - \varphi),$$

por lo que

$$\int_0^1 |g(x)|^2 dx \leq 2\int_0^1 (\psi(x) - \varphi(x))dx \leq \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Para las sumas parciales $S_n$, tenemos

$$S_n(f) = S_n(\varphi) + S_n(g).$$

Por el Lema 1.4.11, existe un $n_o \geq 0$ tal que, para $n \geq n_0$, entonces

$$\|\varphi - S_n(\varphi)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, por el Lema 1.3.1, tenemos

$$\begin{aligned}
\|g - S_n(g)\|_2^2 &\leq \|g\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4} \\
\Rightarrow \|g - S_n(g)\|_2 &\leq \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

así que para $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\|f - S_n(f)\|_2 &= \|\varphi + g - S_n(\varphi - g)\|_2 \\
&\leq \|\varphi - S_n(\varphi)\|_2 + \|g - S_n(g)\|_2 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon \\
\Rightarrow \|f - S_n(f)\|_2 &\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S_n(f) \longrightarrow f$ en la norma $L^2$.

■

## 1.5. Convergencia uniforme de la serie de Fourier.

Tenga en cuenta que el último teorema no nos dice nada acerca de la convergencia puntual de la serie de Fourier. De hecho, la serie de Fourier no necesariamente converge puntualmente a $f$. Sin embargo, si la serie de los módulos de los coeficientes de Fourier de la función $f$ convergen, esta converge, como lo muestra el siguiente lema. Este lema es importante, pues nos ayuda a determinar el segundo resultado principal de este capítulo, es decir, si $f$ es continuamente diferenciable entonces su serie de Fourier converge uniformemente a la función $f$.

**Definición 1.5.1** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función continua y periódica. Decimos que la función $f$ es ***continuamente diferenciable por partes*** si existen números reales $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$ tales que para cada $j$ la función $f|_{[t_{j-1},t_j]}$ es continuamente diferenciable.

**Lema 1.5.2** Sea $f$ una función continua y periódica, y supongamos que los coeficientes de Fourier de $f$ satisfacen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

Entonces la serie de Fourier converge uniformemente a $f$. En particular, tenemos para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k(x).$$

<u>**Demostración:**</u>

Sea $s_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi ikx}$. Consideremos primero la parte real de dicha sucesión de sumas parciales

$$\mathrm{Re}\,[s_n(x)] = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{Re}\,[c_k e^{2\pi ikx}].$$

Como $|\,\mathrm{Re}\,(c_k)| \leq |c_k|$ para cada $k \in \mathbb{Z}$ y dado que $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k < \infty$, entonces por El test-M de Weierstrass (ver Ejemplo 1.4.6) tenemos

$$\mathrm{Re}\,[s_n(x)] = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{Re}\,[c_k e^{2\pi ikx}] \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\,[c_k e^{2\pi ikx}]$$

uniformemente. Bajo un razonamiento análogo, obtenemos

$$\mathrm{Im}\,[s_n(x)] = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{Im}\,[c_k e^{2\pi ikx}] \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\,[c_k e^{2\pi ikx.}]$$

De esta forma, afirmamos que la serie de Fourier $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikx}$ converge uniformemente. Denotemos la función límite por $g$. Entonces la función $g$, por ser el límite uniforme de funciones continuas, es continua por Lema 1.4.4. Luego, por la Proposición 1.4.7, la serie de Fourier también converge a $f$ en la norma-$L^2$, así se deduce que

$$\|f - g\|_2 = 0.$$

Dado que $f$ y $g$ son continuas, la propiedad (N2) de norma (Definición 1.2.9) implica que $f = g$, es decir,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k(x).$$

$\blacksquare$

**Teorema 1.5.3** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función continua, periódica y continuamente diferenciable por partes. Entonces la serie de Fourier de $f$ converge uniformemente a $f$.

**Demostración:**

Sea $f$ una función continua, periódica y continuamente diferenciable por partes y denotemos por $c_k$ los coeficientes de Fourier de $f$. Sea $\varphi_j : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{C}$ la derivada continua de $f$ y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función periódica que para cada $j$ coincide con $\varphi_j$ en el intervalo semi-abierto $[t_{j-1}, t_j)$. Sean $\gamma_k$ los coeficientes de Fourier de $\varphi$. Entonces por la desigualdad de Bessel (Teorema 1.3.2) tenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 \leq \|\varphi\|_2^2 < \infty.$$

Ahora, usando integración por partes, obtenemos

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x) e^{-2\pi i k x} dx = -\frac{1}{2\pi i k} f(x) e^{-2\pi i k x} \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} + \frac{1}{2\pi i k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi(x) e^{-2\pi i k x} dx,$$

así

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx &= \sum_{j=1}^{r} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x) e^{-2\pi i k x} dx \\
&= \sum_{j=1}^{r} \left[ -\frac{1}{2\pi i k} f(x) e^{-2\pi i k x} \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} + \frac{1}{2\pi i k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi(x) e^{-2\pi i k x} dx \right] \\
&= -\frac{1}{2\pi i k} \sum_{j=1}^{r} f(x) e^{-2\pi i k x} \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} + \frac{1}{2\pi i k} \sum_{j=1}^{r} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi(x) e^{-2\pi i k x} dx \\
&= -\frac{1}{2\pi i k} (f(t_r) e^{-2\pi i k t_r} - f(t_0) e^{-2\pi i k t_0}) + \frac{1}{2\pi i k} \int_0^1 \varphi(x) e^{-2\pi i k x} dx \\
&= -\frac{1}{2\pi i k} (f(1) - f(0)) + \frac{1}{2\pi i k} \int_0^1 \varphi(x) e^{-2\pi i k x} dx \\
&= -\frac{1}{2\pi i k} (0) + \frac{1}{2\pi i k} \int_0^1 \varphi(x) e^{-2\pi i k x} dx, \quad \text{ya que } f \text{ es de periodo 1} \\
\int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx &= \frac{1}{2\pi i k} \int_0^1 \varphi(x) e^{-2\pi i k x} dx,
\end{aligned}$$

de manera que, para $k \neq 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}dx = \frac{1}{2\pi ik}\int_0^1 \varphi(x)e^{-2\pi ikx}dx \\ c_k &= \frac{1}{2\pi ik}\gamma_k. \end{aligned}$$

Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq (|\alpha| - |\beta|)^2 \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha\beta| \\ \left(\tfrac{1}{2}\right)(0) &\leq \tfrac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha\beta|) \\ 0 &\leq \tfrac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) - |\alpha\beta| \\ |\alpha\beta| &\leq \tfrac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2), \end{aligned}$$

así que

$$|c_k| = \left|\frac{1}{2\pi ik}\gamma_k\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi^2k^2} + |\gamma_k|^2\right),$$

por lo que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

Así, cumplimos con todas las hipótesis del Lema 1.5.2. De manera que la serie de Fourier de $f$ converge uniformemente a la función $f$.

■

## 1.6. El toro unitario.

Hemos definido el espacio $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ como el espacio de funciones periódicas continuas en $\mathbb{R}$. También hay una interpretación diferente de este espacio. Pero antes de profundizar en ello, recordemos algunas definiciones que nos ayudarán a encontrar dicha interpretación.

**Definición 1.6.1** Decimos que la relación " $\sim$ " en un un conjunto $S$ es una ***relación de equivalencia***, si satisface las siguientes propiedades para cada $a, b, c \in S$:

(R1) $a \sim a$. Es decir, que sea reflexiva.

(R2) $a \sim a$ implica que $b \sim a$. Es decir, que sea simétrica.

(R3) $a \sim b$ y $b \sim c$ implica que $a \sim c$. Es decir, que sea transitiva..

**Definición 1.6.2** Sea $\sim$ una relación de equivalencia en un conjunto $S$. Si $a \in S$, entonces definimos la ***clase de equivalencia*** o ***clase de*** $a$ mediante

$$[a] = \{b \in S \mid b \sim a\}.$$

Además, decimos que $a$ es el *representante* de la clase $[a]$.

En $\mathbb{R}$ establecemos la siguiente relación:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

Verifiquemos que la ecuación (1.3) es una relación de equivalencia, es decir, que cumple con las propiedades de la Definición 1.6.1. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$.

- Verificando que se cumple (R1).

$$\begin{aligned} x \sim x &\Leftrightarrow x - x \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow 0 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- Verificando que se cumple (R2).

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow -(y - x) \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow y \sim x \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- Verificando que se cumple (R3).

$$\begin{aligned} x \sim y, y \sim z &\Leftrightarrow x - y, y - z \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x - z \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x \sim z \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

De esta forma, la ecuación (1.3) es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$.

De acuerdo a la Definición 1.6.2, para $x \in \mathbb{R}$ su clase de equivalencia es

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} \mid y \sim x\}.$$

Consideremos $y = x + k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Entonces $y \sim x$, ya que

$$\begin{aligned} y \sim x &\Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow (x + k) - x \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

de manera que

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} \mid y \sim x\} = \{x + k \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\} = x + \mathbb{Z}.$$

Sea $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ el conjunto de todas las clases de equivalencia. Al formar $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, se están relacionando dos números reales cualesquiera que difieran en un entero. De esta manera 0 se relaciona con $-1, -2, -3, \ldots$ y $1, 2, 3, \ldots$; mientras que $\frac{1}{3}$ se relaciona con $\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \ldots$ y con $-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}, \ldots$ Este conjunto se puede identificar con el intervalo semiabierto $[0, 1)$. También se puede identificar con el **toro unitario**

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \tag{1.4}$$

ya que la aplicación $e : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{T}$, definida por $e([x]) = e^{2\pi i[x]}$ da una biyección entre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $\mathbb{T}$. Verifiquemos que $e$ es biyectiva.

- Antes, verifiquemos que $e$ es aplicación o que está bien definida. Sean $[x_1], [x_2] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Supongamos que $[x_1] = [x_2]$, entonces

$$\begin{aligned} x_1 + k_1 &= x_2 + k_2, \quad \text{para cada } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow e^{2\pi i(x_1+k_1)} &= e^{2\pi i(x_2+k_2)}, \quad \text{para cada } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ e^{2\pi i[x_1]} &= e^{2\pi i[x_2]} \\ \Rightarrow e([x_1]) &= e([x_2]). \end{aligned}$$

- Verificando que $e$ es inyectiva. Sean $e^{2\pi i[x_1]}, e^{2\pi i[x_2]} \in \mathbb{T}$. Supongamos que $e^{2\pi i[x_1]} = e^{2\pi i[x_2]}$, entonces

$$\begin{aligned} e^{2\pi i(x_1+k_1)} &= e^{2\pi i(x_2+k_2)}, \quad \text{para cada } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \ln\left(e^{2\pi i(x_1+k_1)}\right) &= \ln\left(e^{2\pi i(x_2+k_2)}\right), \quad \text{para cada } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow 2\pi i(x_1 + k_1) &= 2\pi i(x_2 + k_2), \quad \text{para cada } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow x_1 + k_1 &= x_2 + k_2, \quad \text{para cada } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow [x_1] &= [x_2]. \end{aligned}$$

- Verificando que $e$ es sobreyectiva. Sea $y \in \mathbb{T}$. Consideremos $[x] = \frac{\ln(y)}{2\pi i} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} e([x]) &= e\left(\frac{\ln(y)}{2\pi i}\right) \\ &= e^{2\pi i\left(\frac{\ln(y)}{2\pi i}\right)} \\ &= e^{\ln(y)} \\ e([x]) &= y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aplicación $e : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{T}$, definida por $e([x]) = e^{2\pi i[x]}$ es biyectiva.

Se dice que una sucesión $[x_n]$ converge a $[x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ si existen representantes $x_n' \in \mathbb{R}$ y $x' \in \mathbb{R}$

para las clases $[x_n]$ y $[x]$ respectivamente, tales que la sucesión $(x'_n)$ converge a $x'$ en $\mathbb{R}$. En el intervalo $[0,1)$ significa que $x_n$ converge a $x$ en el intervalo $[0,1)$ o que $[x] = 0$ y que la sucesión $x_n$ se descompone en dos sub-sucesiones, una de las cuales converge a 0 y la otra a 1.

La mejor forma de visualizar $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es como la línea real "*enrollada*", ya sea identificando los enteros o utilizando la aplicación $e^{2\pi i[x]}$ o pegando los extremos del intervalo $[0,1]$ juntos.

Dada la definición de convergencia, es fácil decir qué es una función continua. Se dice que una función $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ es continua, si para cada sucesión convergente $[x_n]$ en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la sucesión $f([x_n])$ converge en $\mathbb{C}$.

Cada función continua en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ se puede componer con la proyección natural $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para dar una función periódica continua en $\mathbb{R}$. De esta manera podemos identificar $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ con el espacio de todas las funciones continuas en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, y veremos $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ de esta manera de ahora en adelante.

# Capítulo 2

# Espacios de Hilbert.

En este capítulo interpretaremos los resultados del capítulo anterior en términos de espacios de Hilbert, ya que la teoría de los espacios de Hilbert tiene características distintivas muy importantes. Por ejemplo, podemos representar un espacio de Hilbert $H$ como una suma directa de un subespacio cerrado (en caso de que $H$ sea finito, esta condición no es necesaria) y su *complemento ortogonal*. Por lo tanto, los espacios de Hilbert son el campo apropiado para las generalizaciones de los resultados de la teoría de Fourier.

## 2.1. Espacios pre-Hilbert y Hilbert.

**Definición 2.1.1** Un espacio vectorial complejo $V$ junto con un producto interno $\langle .,. \rangle$ es llamado un ***espacio pre-Hilbert***.

En ocasiones también es llamado un *espacio con producto interno*, pero ya que nuestro énfasis es en espacios de Hilbert, deberíamos usar el primer término dado.

**Ejemplo 2.1.2** El ejemplo más simple, además del espacio cero, es $V = \mathbb{C}$, con producto interno $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha \bar{\beta}$.

**Ejemplo 2.1.3** Un ejemplo más general seria $V = \mathbb{C}^k$ con $\langle v, w \rangle = v^\top \bar{w}$, donde consideramos los elementos de $\mathbb{C}^k$ como vectores columna, y donde $v^\top$ es la transpuesta de $v$ y $\bar{w}$ es el vector con entradas conjugadas complejas. Es decir,

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix} \right\rangle = v_1 \bar{w}_1 + v_2 \bar{w}_2 + \cdots + v_k \bar{w}_k \ .$$

**Lema 2.1.4** Para cada par $v, w \in V$, tenemos que $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\|$.

**<u>Demostración:</u>**

Sumando un cero conveniente y utilizando la desigualdad del triángulo de la Definición 1.2.9 obtenemos que

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|v - w + w\| \\ &\leq \|v - w\| + \|w\| \\ \Rightarrow \|v\| &\leq \|v - w\| + \|w\|, \end{aligned}$$

entonces

$$\|v\| - \|w\| \leq \|v - w\|. \tag{2.1}$$

Además

$$\begin{aligned} \|w\| &= \|w - v + v\| \\ &\leq \|w - v\| + \|v\| \\ \Rightarrow \|w\| &\leq \|w - v\| + \|v\| \\ \Rightarrow \|w\| - \|v\| &\leq \|w - v\| = \|v - w\| \\ \Rightarrow -\|v - w\| &\leq -(\|w\| - \|v\|), \end{aligned}$$

es decir,

$$-\|v - w\| \leq \|v\| - \|w\|. \tag{2.2}$$

Así, de las desigualdades (2.1) y (2.2) obtenemos

$$-\|v-w\| \leq \|v\| - \|w\| \leq \|v-w\|.$$

Por lo tanto,

$$|\|v\| - \|w\|| \leq \|v-w\|.$$

■

**Definición 2.1.5** Una aplicación lineal $T : V \to W$ entre dos espacios pre-Hilbert es llamada ***isometría*** si $T$ conserva los productos internos, es decir, si para todo $v, v' \in V$,

$$\langle T(v), T(v') \rangle = \langle v, v' \rangle,$$

donde el producto interno en el lado izquierdo es el de $W$, y en el lado derecho es el de $V$.

De esto, se deduce que $T$ debe ser inyectivo, ya que si $T(v) = 0$, entonces

$$\langle v, v \rangle = \langle T(v), T(v) \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 0,$$

lo que implica que $v = 0$.

Además, si $T$ es sobreyectiva, es decir, si $T$ es una isometría biyectiva, entonces $T$ tiene un inverso lineal $T^{-1} : W \to V$, que también es una isometría. Verifiquemos este hecho.

Para empezar verifiquemos que $T^{-1} : W \to V$ es lineal, es decir, que cumple con las propiedades de la Definición 1.1.7. Sean $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

- Verificando que se cumple (L1). Supongamos que

  $$T(v_i) = w_i \Rightarrow T^{-1}(w_i) = v_i, \quad \text{para } i = 1, 2.$$

  Entonces

  $$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= T(v_1) + T(v_2) \\ &= T(v_1 + v_2), \quad \text{ya que } T \text{ es lineal} \\ \Rightarrow T^{-1}(w_1 + w_2) &= T^{-1}(T(v_1 + v_2)) \\ &= v_1 + v_2 \\ T^{-1}(w_1 + w_2) &= T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2). \end{aligned}$$

- Verificando que se cumple (L2). Supongamos que

  $$T(v) = w \Rightarrow T^{-1}(w) = v.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\alpha w &= \alpha T v \\
\Rightarrow T^{-1}(\alpha w) &= T^{-1}(\alpha T v) \\
&= T^{-1}(T(\alpha v)), \quad \text{ya que } T \text{ es lineal} \\
&= \alpha v \\
T^{-1}(\alpha w) &= \alpha T^{-1}(w).
\end{aligned}
$$

De esta forma, $T^{-1}$ es lineal.

Ahora resta determinar que $T^{-1}$ es una isometría, es decir, que cumple con las propiedades de la Definición 2.1.5. Sean $v, v' \in V$

$$
\begin{aligned}
\langle T(v), T(v') \rangle &= \langle v, v' \rangle, \quad \text{ya que } T \text{ es una isometría} \\
\Rightarrow \langle T^{-1}(T(v)), T^{-1}(T(v')) \rangle &= \langle T^{-1}(v), T^{-1}(v') \rangle \\
\langle v, v' \rangle &= \langle T^{-1}(v), T^{-1}(v') \rangle.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $T$ es una isometría.

**Definición 2.1.6** Sean $V, W$ espacios pre-Hilbert. Se dice que $T : V \to W$ es una aplicación ***unitaria*** o un ***isomorfismo de los espacios pre-Hilbert*** si $T$ es una isometría biyectiva.

**Definición 2.1.7** Sea $(V, \langle ., . \rangle)$ un espacio pre-Hilbert. Se dice que una sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $V$ ***converge*** a $v \in V$, si la sucesión $\|v_n - v\|$ de números reales tiende a cero, es decir, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $n_1$ tal que para cada $n \geq n_1$

$$\|v - v_n\| < \varepsilon.$$

En este caso, el vector $v$ está determinado únicamente por la sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v.$$

**Definición 2.1.8** Un subconjunto $D$ de un espacio pre-Hilbert $H$ es llamado un ***subconjunto denso***, si cada $h \in H$ es el límite de una sucesión en $D$, es decir, si para cualquier $h \in H$ existe una sucesión $(d_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en $D$ con $\lim\limits_{j\to\infty} d_j = h$.

**Definición 2.1.9** Una ***sucesión de Cauchy*** en $V$, es una sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $V$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $n_0$ tal que para cada par de números naturales $n, m \geq n_0$, tenemos

$$\|v_n - v_m\| < \varepsilon.$$

**Lema 2.1.10** Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy, entonces su suma $(v_n+w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

**Demostración:**

Sea $\varepsilon > 0$. Como $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, para $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_n - v_m\| < \varepsilon_1, \qquad \text{para todo } n, m \geq N_1. \tag{2.3}$$

Como $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, para $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|w_n - w_m\| < \varepsilon_2, \qquad \text{para todo } n, m \geq N_2. \tag{2.4}$$

Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Así, si $n, m \geq N$, de las ecuaciones (2.3) y (2.4) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(v_n + w_n) - (v_m + w_m)\| &= \|(v_n - v_m) + (w_n - w_m)\| \\
&\leq \|v_n - v_m\| + \|w_n - w_m\| \\
&< \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon \\
\Rightarrow \|(v_n + w_n) - (v_m + w_m)\| < \varepsilon, &\qquad \text{para todo } n, m \geq N.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

■

**Lema 2.1.11** Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $v$ y $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $w$, entonces $(v_n+w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $v + w$.

**Demostración:**

Sean $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones que convergen a $v$ y $w$ respectivamente. Como $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $v$, entonces para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_n - v\| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{para todo } n \geq N_1.$$

Como $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $w$, entonces para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|w_n - w\| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{para todo } n \geq N_2.$$

Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|(v_n + w_n) - (v + w)\| &= \|(v_n - v) + (w_n - w)\| \\
&\leq \|v_n - v\| + \|w_n - w\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|(v_n + w_n) - (v + w)\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Por lo tanto, $(v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $v + w$.

■

**Lema 2.1.12** Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

**Demostración:**

Sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria en $V$ que converge a $v \in V$. Como $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, sea $\varepsilon > 0$ y sea $n_1$ un número natural tal que para todo $n \geq n_1$ tenemos

$$\|v - v_n\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $n, m \geq n_1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|v_n - v_m\| &= \|v_n - v + v - v_m\| \\
&\leq \|v_n - v\| + \|v - v_m\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon \\
\Rightarrow \|v_n - v_m\| &< \varepsilon, \quad \text{para cada } n, m \geq n_1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

■

**Lema 2.1.13** Sea $(V, \langle .,. \rangle)$ es un espacio pre-Hilbert, entonces el producto interno es continuo. Es decir, si la sucesión $(v_n)$ converge a $v$ en $V$ y la sucesión $(w_n)$ converge a $w$ en $V$, entonces la sucesión $\langle v_n, w_n \rangle$ converge a $\langle v, w \rangle$.

**Demostración:**

Observemos que

$$\begin{aligned}
\langle v_n, w_n \rangle - \langle v, w \rangle &= \langle v_n, w_n \rangle - \langle v, w \rangle + \langle v_n, w \rangle - \langle v_n, w \rangle \\
&= [\langle v_n, w_n \rangle - \langle v_n, w \rangle] + [\langle v_n, w \rangle - \langle v, w \rangle] \\
&= [\langle v_n, w_n \rangle + \langle v_n, -w \rangle] + [\langle v_n, w \rangle \langle -v, w \rangle] \\
\langle v_n, w_n \rangle - \langle v, w \rangle &= \langle v_n, w_n - w \rangle + \langle v_n - v, w \rangle \\
\Rightarrow |\langle v_n, w_n \rangle - \langle v, w \rangle| &= |\langle v_n, w_n - w \rangle + \langle v_n - v, w \rangle| \\
&\leq |\langle v_n, w_n - w \rangle| + |\langle v_n - v, w \rangle| \\
&\leq \|v_n\|\|w_n - w\| + \|v_n - v\|\|w\|; \quad \text{por Lema 1.2.10} \\
\Rightarrow |\langle v_n, w_n \rangle - \langle v, w \rangle| &\leq \|v_n\|\|w_n - w\| + \|v_n - v\|\|w\| \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |\langle v_n, w_n \rangle - \langle v, w \rangle| &\leq \lim_{n\to\infty} (\|v_n\|\|w_n - w\|) + \lim_{n\to\infty} (\|v_n - v\|\|w\|).
\end{aligned}$$

Pero, por hipótesis $v_n \to v$ y $w_n \to w$, entonces

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} |\langle v_n, w_n\rangle - \langle v, w\rangle| \leq \|v\|(0) + (0)\|w\| = 0 \\ \Rightarrow &\lim_{n\to\infty} |\langle v_n, w_n\rangle - \langle v, w\rangle| \leq 0 \\ \Rightarrow &\lim_{n\to\infty} |\langle v_n, w_n\rangle - \langle v, w\rangle| = 0. \end{aligned}$$

Es decir, que $\langle v_n, w_n\rangle \to \langle v, w\rangle$. Por lo tanto, el producto interno es continuo.

■

**Definición 2.1.14** Un espacio normado $V$ se denomina ***espacio de Banach*** si este es completo, es decir, si todas las sucesiones de Cauchy en $V$ convergen.

**Definición 2.1.15** Llamamos al espacio pre-Hilbert $V$ un espacio ***completo*** o un ***espacio de Hilbert*** si todas las sucesiones de Cauchy en $V$ convergen.

**Lema 2.1.16** Sean $H, H'$ espacios de Hilbert y sea $T : H \to H'$ una aplicación lineal tal que $\|Tx\| = \|x\|$, para cada $x \in H$. Demuestre que $T$ es una isometría, es decir que, para cada $x, y \in H$

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle.$$

**Demostración:**

Sean $x, y \in H$. Ya que $T$ lineal, entonces $T(x + y) = Tx + Ty$, con $Tx, Ty \in H'$. Además

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|x\| \\ \Rightarrow \|Tx\|^2 &= \|x\|^2 \end{aligned}$$

Luego

$$\|Tx + Ty\|^2 = \|T(x + y)\|^2 = \|x + y\|^2$$

Entonces

$$\|Tx\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle Tx, Ty\rangle + \|Ty\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

Pero $\|Tx\|^2 = \|x\|^2$ y $\|Ty\|^2 = \|y\|^2$. Entonces

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\langle Tx, Ty\rangle &= 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle \\ \Rightarrow \operatorname{Re}\langle Tx, Ty\rangle &= \operatorname{Re}\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

Y dado que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\langle Tx, Ty\rangle &= \operatorname{Re}(-i\langle Tx, Ty\rangle) \\ &= \operatorname{Re}(\langle Tx, T(-iy)\rangle) \\ \operatorname{Im}\langle Tx, Ty\rangle &= \operatorname{Re}(\langle x, -iy\rangle) \end{aligned}$$

Entonces $\text{Im}\langle Tx, Ty\rangle = \text{Re}(-i\langle x, y\rangle) = \text{Im}\langle x, y\rangle$

Por lo tanto, $\text{Im}\langle Tx, Ty\rangle = \text{Im}\langle x, y\rangle$, así $T$ es una isometría.

■

**Lema 2.1.17** Sea $V$ un espacio pre-Hilbert de dimensión finita y sea $W \subset V$ un subespacio. Sea $U$ el **complemento ortogonal** de $W$ en $V$, es decir, $U$ es el espacio de todos los $u \in V$ tales que $\langle u, v\rangle = 0$ para cada $w \in W$. Pruebe que $V$ es la suma directa de los subespacios $W$ y $U$.

**Demostración:**

Sea $\dim V = k < \infty$. Como $W \subset V$ , sea $\dim W = m < k$, es decir, $W$ tiene una base formada por $m$ vectores (linealmente independientes), digamos, $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$. Además, existen $v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_k$ en $V$ tales que

$$\mathscr{B} = \{w_1, w_2, \ldots, w_m, v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_k\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k \mid v_j = w_j, \forall j = 1, \ldots, m\},$$

es una base de $V$.

Ahora, necesitamos encontrar una base ortonormal de $V$, para ello usaremos el **proceso de Gram-Schmidt** de ortonormalización de vectores linealmente independientes, resultando así una base ortonormal $\mathscr{B}^{\perp} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_k\}$ que tiene la propiedad que

$$\text{span}\{\mathscr{B}\} = \text{span}\{\mathscr{B}^{\perp}\} = V.$$

El proceso es como sigue:

- ***Paso 1***. El primer elemento de $\mathscr{B}^{\perp}$ es

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1$$

- ***Paso 2***. Reescribamos $v_2$ como

$$v_2 = \langle v_2, u_1\rangle u_1 + e_2,$$

entonces

$$e_2 = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1,$$

donde $e_2 \neq 0$ ya que $v_2 \in \mathscr{B}$, el cual es un conjunto linealmente independiente. Además, ya que $\langle e_2, u_1\rangle = 0$, podemos tomar

$$u_2 = \frac{1}{\|e_2\|}e_2.$$

- ***Paso 3***. Reescribamos $v_3$ como

$$v_3 = \langle v_3, u_1\rangle u_1 + \langle v_3, u_2\rangle u_2 + e_3,$$

entonces

$$e_3 = v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2,$$

donde $e_3 \neq 0$ ya que $v_3 \in \mathscr{B}$, el cual es un conjunto linealmente independiente. Además, ya que $\langle e_3, u_1\rangle = \langle e_3, u_2\rangle = 0$, podemos tomar

$$u_3 = \frac{1}{\|e_3\|}e_3.$$

- ***Paso n-ésimo***. El vector

$$e_k = v_n - \sum_{r=1}^{k-1}\langle v_k, u_r\rangle u_r,$$

donde $e_k \neq 0$ ya que $v_k \in \mathscr{B}$, el cual es un conjunto linealmente independiente. Además, ya que $\langle e_k, u_1\rangle = \langle e_k, u_2\rangle = \ldots = \langle e_k, u_{k-1}\rangle = 0$, podemos tomar

$$u_k = \frac{1}{\|e_k\|}e_k.$$

De esta forma, hemos encontrado los elementos de $\mathscr{B}^{\perp}$. Además, como

$$\operatorname{span}\{\mathscr{B}\} = \operatorname{span}\{\mathscr{B}^{\perp}\} = V.$$

Significa que

$$\operatorname{span}\{w_1, w_2, \ldots, w_m\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \operatorname{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}.$$

Sea $n > m$. Demostraremos que $u_n \in U$. Sea $w \in W$, entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tales que $w = \sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i w_i$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle u_n, w\rangle &= \left\langle u_n, \sum_{i=1}^{m}\alpha_i w_i\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m}\overline{\alpha_i}\langle u_n, w_i\rangle \\ \langle u_n, w\rangle &= 0,\end{aligned}$$

ya que, como la base $\mathscr{B}^{\perp}$ es ortogonal a la base $\mathscr{B}$ y $n > m$, se tiene que $\langle u_n, w_i\rangle = 0$ para cada $i = 1, \ldots, m$. En consecuencia, $u_n \in U$. Entonces, tenemos que $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_k \in U$, con lo que

$$\operatorname{span}\{u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_k\} \subseteq U$$

(pues $U$ es un subespacio) y, por lo tanto,

$$\dim U \geq \dim(\operatorname{span}\{u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_k\}) = k - m = k - \dim W.$$

Es decir,

$$\dim W + \dim U \geq n. \tag{2.5}$$

Ahora demostraremos que $W \cap U = \{0\}$. Sea $v \in W \cap U$. Como $v \in U$, para cada $w \in W$, se tiene que $\langle v, w \rangle = 0$. En particular, tomando $w = v \in W$, resulta que $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = 0$, de donde $v = 0$. De esta forma, $W \cap U = \{0\}$. Por lo que

$$\begin{aligned} \dim W + \dim U &= \dim(W + U) \\ &\leq \dim V = n \\ \Rightarrow \dim W + \dim U &\leq n. \end{aligned} \tag{2.6}$$

De las ecuaciones (2.5) y (2.6) obtenemos que

$$\dim W + \dim U = n = \dim V.$$

Por lo tanto, $V = W \oplus U$.

■

**Proposición 2.1.18** Un espacio pre-Hilbert que es de dimensión finita, es completo, es decir, es un espacio de Hilbert.

**Demostración:**

Por inducción. Para un espacio pre-Hilbert de dimensión cero no hay nada que probar.

Sea $V$ un espacio pre-Hilbert de dimensión $k+1$ y asumamos que el hecho ha sido probado para todos los espacios de dimensión $k$. Sea $v \in V$ un vector no trivial de norma 1. Sea $W = \mathbb{C}v$ y sea $U$ su espacio ortogonal. Entonces, por el Lema 2.1.17, $V = W \oplus U$ y, por el mismo lema, $\dim U = k$. De esta forma $U$ es completo por hipótesis inductiva.

Sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $V$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \lambda_n v + u_n,$$

donde $\lambda_n \in \mathbb{C}$ y $u_n \in U$. Para $m, n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|^2 &= \|(\lambda_n v + u_n) - (\lambda_m v - u_m)\|^2 \\ &= \|(\lambda_n - \lambda_m)v + (u_n - u_m)\|^2 \\ &= \|(\lambda_n - \lambda_m)v\|^2 + \|u_n - u_m\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle(\lambda_n - \lambda_m)v, (u_n - u_m)\rangle \\ \|v_n - v_m\|^2 &= |\lambda_n - \lambda_m|^2\|v\|^2 + \|u_n - u_m\|^2 + 2\operatorname{Re}[(\lambda_n - \lambda_m)\langle v, (u_n - u_m)\rangle]. \end{aligned}$$

Pero, como $U$ es un subespacio, entonces $y = u_n - u_m \in U$ y como $v \in V$, entonces

$$\langle v, u_n - u_m \rangle = \langle v, y \rangle = 0.$$

Además, recordemos que hemos supuesto que $\|v\| = 1$, es decir que $\|v\|^2 = 1^2 = 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|^2 &= |\lambda_n - \lambda_m|^2 + \|u_n - u_m\|^2 \\ 0 \leq \|u_n - u_m\|^2 &= \|v_n - v_m\|^2 - |\lambda_n - \lambda_m|^2. \end{aligned}$$

Es decir que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|v_n - v_m\|^2 - |\lambda_n - \lambda_m|^2 \\ |\lambda_n - \lambda_m|^2 &\leq \|v_n - v_m\|^2 \leq \|u_n - u_m\|^2 \\ |\lambda_n - \lambda_m|^2 &\leq \|u_n - u_m\|^2 \\ |\lambda_n - \lambda_m| &\leq \|u_n - u_m\|. \end{aligned}$$

Recordemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, es decir que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq N$

$$\begin{aligned} |\lambda_n - \lambda_m| &\leq \|u_n - u_m\| < \varepsilon \\ \Rightarrow |\lambda_n - \lambda_m| &< \varepsilon, \quad \text{para cada } m, n \geq N. \end{aligned}$$

Así, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ y por tanto, convergente. Además, como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $U$, esta también es convergente. Es decir que, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la suma de dos sucesiones de Cauchy que convergen en $V$, lo cual, por Lema 2.1.10 y Lema 2.1.11, implica que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $V$ que converge en $V$.

■

## 2.2. Espacios-$\ell^2$.

Los espacios-$\ell^2$ son una clase de espacios de Hilbert, que da ejemplos universales. Sea $S$ un conjunto arbitrario y $\ell^2(S)$ el conjunto de funciones $f : S \to \mathbb{C}$ que satisface

$$\|f\|^2 = \sum_{s\in S} |f(s)|^2 < \infty.$$

El hecho de que la serie converja, en realidad significa, que casi todos los valores de $f(s)$ son cero excepto para $s$ en un subconjunto numerable $\{s_1, s_2, \ldots\}$ de $S$, y que la suma sobre estos valores converge absolutamente. Otra forma expresarlo es

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f(s_j)|^2 = \sup_{\substack{F\subset S \\ F \text{ finito}}} \sum_{s\in F} |f(s)|^2.$$

Esto se demuestra en el siguiente lema.

**Lema 2.2.1** Sea $S$ un conjunto. Supongamos que $f(s) = 0$ excepto para $s$ en un subconjunto numerable $\{s_1, s_2, \ldots\}$ de $S$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f(s_j)|^2 = \sup_{\substack{F\subset S \\ F \text{ finito}}} \sum_{s\in F} |f(s)|^2.$$

Observe que en ambos lados puede ser infinito.

<u>**Demostración:**</u>

Sea $S$ un conjunto. Supongamos que $f(s) = 0$ excepto para $s$ en un subconjunto numerable $\{s_1, s_2, \ldots\}$ de $S$. Demostraremos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f(s_j)|^2 = \sup_{\substack{F\subset S \\ F \text{ finito}}} \sum_{s\in F} |f(s)|^2. \tag{2.7}$$

***Caso I:*** $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |f(s_j)|^2 = \infty$.

Sea $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} |f(s_j)|^2$. Como $S_n < S_{n+1}$ y $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$S_n > \varepsilon, \quad \text{para cada } n \geq N.$$

Tomando $F = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$, se tiene que

$$\sum_{s\in F} |f(s)|^2 = S_N > \varepsilon.$$

Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $F \subset S$, con $F$ finito tal que $\sum\limits_{s\in F} |f(s)|^2 > \varepsilon$.

Por lo que $\sup_{\substack{F\subset S \\ F \text{ finito}}} \sum\limits_{s\in F} |f(s)|^2$ no está acotado superiormente, es decir,

$$\sup_{\substack{F\subset S \\ F \text{ finito}}} \sum_{s\in F} |f(s)|^2 = \infty.$$

Por lo tanto, la ecuación (2.7) se cumple.

***Caso II:*** Supongamos $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |f(s_j)|^2 = L < \infty$.

Significa que $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} |f(s_j)|^2$ converge a $L$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$|L - S_n| < \varepsilon, \quad \text{para cada } n \geq M.$$

Sea $F \subset S$, con $F$ finito, entonces

$$\sum_{s\in F} f(s) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |f(s_j)|^2 = L.$$

Así, $\left\{ \sum_{s\in F} |f(s)|^2 \;\middle|\; F \subset S, F \text{ finito} \right\}$ está acotado por $L$, por lo que el supremo existe, digamos $K$. Es decir,

$$K = \sup_{\substack{F\subset S\\ F \text{ finito}}} \sum_{s\in F} |f(s)|^2.$$

Así, tenemos que $K \leq L$. Además, sabemos que

$$\begin{aligned}
|L-K| &= |L-K+(S_n-S_n)| \\
&= |(L-S_n)+(S_n-K)| \\
&\leq |L-S_n| + |S_n-K| \\
&< \varepsilon + |S_n-K| \\
\Rightarrow |L-K| &< \varepsilon + |S_n-K|, \quad \text{para cada } n \geq M.
\end{aligned}$$

Como $K$ es el supremo, entonces existe $F_\varepsilon \subset S$ con $F_\varepsilon$ finito tal que:

$$K - \varepsilon < \sum_{s\in F_\varepsilon} |f(s)|^2. \tag{2.8}$$

Ya que $F_\varepsilon$ es finito, entonces $F_\varepsilon = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_r}\}$ con $r$ elementos.
Sea $t_0 = \text{máx}\{i_j \mid j = 1, \ldots, r\}$, luego

$$\sum_{s\in F_\varepsilon} |f(s)|^2 \leq \sum_{i=1}^{t_0} |f(s_i)|^2.$$

Pero en la ecuación (2.8) tenemos que

$$K - \varepsilon < \sum_{s\in F_\varepsilon} |f(s)|^2 \leq \sum_{i=1}^{t_0} |f(s_i)|^2,$$

de donde

$$K - \sum_{i=1}^{t_0} |f(s_i)|^2 < \varepsilon. \tag{2.9}$$

- Si $t_0 \geq M$, entonces

$$\begin{aligned}
|L-K| &< \varepsilon + |S_{t_0} - K| \\
&= \varepsilon + (K - S_{t_0}), \quad \text{ya que } K \geq S_{t_0} \\
&< \varepsilon + \varepsilon, \quad \text{esto sucede por la desigualdad (2.9)} \\
&< 2\varepsilon \\
\Rightarrow |L-K| &< 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

- Si $t_0 < M$, entonces

$S_{t_0} < S_M$, es decir $-S_M < -S_{t_0}$, esto implica que $K - S_M < K - S_{t_0}$, de donde

$$\begin{aligned}
|L-K| &< \varepsilon + |S_n - K|, \quad \text{para cada } n \geq M \\
&< \varepsilon + |S_M - K| \\
&= \varepsilon + (K - S_M), \quad \text{ya que } K \geq S_M \\
&< \varepsilon + \varepsilon, \quad \text{esto sucede por la desigualdad (2.9)} \\
&< 2\varepsilon \\
\Rightarrow |L-K| &< 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

En todo caso, $|L-K| < 2\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. De manera que $|L-K| = 0$, entonces $L-K = 0$, y de esta forma $L = K$. Por lo que la ecuación (2.7) se cumple.

■

Tengamos en cuenta que si $S$ es un conjunto finito, entonces $\ell^2(S)$ consiste del espacio vectorial complejo de dimensión finita de todas las aplicaciones de $S$ a $\mathbb{C}$. Por la Proposición 2.1.18, por lo tanto, se deduce que $\ell^2(S)$ es un espacio de Hilbert.

**Teorema 2.2.2** Sea $S$ cualquier conjunto y $f, g \in \ell^2(S)$. Entonces $\ell^2(S)$ forma un espacio de Hilbert con producto interno definido de la siguiente forma

$$\langle f, g \rangle = \sum_{s \in S} f(s)\overline{g(s)}.$$

<u>**Demostración:**</u>

Sea $S$ cualquier conjunto. Primero debemos demostrar que dicho producto interno converge, es decir, debemos demostrar que para cada $f, g \in \ell^2(S)$ entonces

$$\sum_{s \in S} |f(s)\overline{g(s)}| < \infty.$$

Ya que $|f(s)\overline{g(s)}| = |f(s)||g(s)|$, es suficiente para demostrar la afirmación de las funciones no negativas de valor real $f$ y $g$. Sea $M$ un subconjunto finito de $S$. No hay problemas de convergencia para $\ell^2(M)$, por lo tanto, este último es un espacio de Hilbert y la desigualdad de Cauchy-Schwarz es válida para los elementos de $\ell^2(M)$. Sean $f, g \in \ell^2(S)$ funciones de valor real y no negativas, y sean $f|_M = f_M$ y $g|_M = g_M$ sus restricciones a $M$, que se encuentran en $\ell^2(M)$. Tenemos $\|f_M\| \leq \|f\|$ y lo mismo para g. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Lema 1.2.10) tenemos la igualdad

$$\sum_{s \in M} f(s)g(s) = |\langle f_M, g_M \rangle| \leq \|f_M\|\|g_M\| \leq \|f\|\|g\|.$$

Esto implica

$$\sum_{s \in S} f(s)g(s) = \sup_{\substack{M \subset S \\ M \text{ finito}}} \sum_{s \in M} f(s)g(s) \leq \|f\|\|g\| < \infty.$$

Así la convergencia del producto interno está demostrada.

Como ya sabemos que dicho producto interno converge, podemos aplicar la demostración del Teorema 1.2.11 para deducir la desigualdad del triángulo: $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$, lo que significa que si $f, g \in \ell^2(S)$ implica que $f+g \in \ell^2(S)$, de modo que $\ell^2(S)$ es un espacio vectorial complejo. Se deduce que $\ell^2(S)$ es un espacio pre-Hilbert.

Solamente nos resta demostrar que $\ell^2(S)$ es completo. Para esto, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\ell^2(S)$. Entonces para cada $s_0 \in S$,

$$|f_n(s_0) - f_m(s_0)|^2 \leq \sum_{s\in S} |f_n(s) - f_m(s)|^2 = \|f_n - f_m\|^2.$$

Lo cual implica que $(f_n(s_0))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, y por lo tanto, converge a algún número complejo, digamos $f(s_0)$. Esto significa que la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a alguna función $f$ en $S$.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tan grande tal que para $m, n \geq N$ tengamos $\|f_n - f_m\|^2 < \varepsilon$. Para $n \geq N$ y $M \subset S$, con $M$ finito tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{s\in M} |f_n(s) - f(s)|^2 &= \lim_{j\to\infty} \sum_{s\in M} |f_n(s) - f_j(s)|^2 \\
&\leq \sup_{j\geq N} \|f_n - f_j\|^2 \\
&\leq \varepsilon \\
\Rightarrow \sum_{s\in M} |f_n(s) - f(s)|^2 &\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Además, para $n \geq N$,

$$\|f_n - f\|^2 = \sup_{\substack{M\subset S \\ M \text{ finito}}} |f_n(s) - f(s)|^2 \leq \varepsilon.$$

Esto implica que $f \in \ell^2(S)$ y que $f_n \to f$ en $\ell^2(S)$, por lo tanto, este espacio es completo.

■

## 2.3. Bases ortonormales y completación.

**Definición 2.3.1** Un ***sistema completo*** en un espacio pre-Hilbert $H$ es una familia $(a_j)_{j\in J}$ de vectores en $H$ tal que el subespacio lineal generado por $a_j$ es denso en $H$. Es decir,

$$\overline{\operatorname{span}(a_j)} = H.$$

**Definición 2.3.2** Un espacio pre-Hilbert se llama ***separable*** si contiene un sistema completo numerable.

**Ejemplo 2.3.3** Para un espacio de Hilbert de dimensión finita, cualquier familia que contenga una base es un sistema completo, ya que para cualquier base $B$ en un espacio de Hilbert $H$ se tiene que $\text{span}\{B\} = H = \overline{\text{span}\{B\}}$.

**Ejemplo 2.3.4** Para dar un ejemplo de un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, considere el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$. Para $j \in \mathbb{N}$, definimos a $\psi_j$ por

$$\psi_j(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = j \\ 0, & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_j(k)|^2 &= |\psi_j(1)|^2 + \cdots + |\psi_j(j)|^2 + |\psi_j(j+1)|^2 + \cdots \\
&= |0|^2 + \cdots + |1|^2 + |0|^2 + \cdots \\
\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_j(k)|^2 &= |1|^2 = 1 < \infty.
\end{aligned}$$

Así $\psi_j \in \ell^2(\mathbb{N})$. Además para cada $f \in \ell^2(\mathbb{N})$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle f, \psi_j \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\overline{\psi_j(n)} \\
&= f(1)\overline{\psi_j(1)} + f(2)\overline{\psi_j(2)} + \cdots + f(j)\overline{\psi_j(j)} + \cdots \\
&= 0 + 0 + \cdots + f(j)(1) + \cdots \\
\langle f, \psi_j \rangle &= f(j).
\end{aligned}$$

Sea $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j$ y $S_n = \sum_{j=1}^{n} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j$ donde $S_n \in D = \text{span}\{\psi_j(k)\}$.

Debemos probar que $\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|^2 = 0$, es decir,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |f(j) - S_n(j)|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |f(j) - f(j)|^2 \\
\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo que $f \in D$, lo que implica que $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es de hecho un sistema completo.

**Definición 2.3.5** Un ***sistema ortonormal*** en un espacio pre-Hilbert $H$ es una familia $(h_j)_{j\in J}$ de vectores en $H$ tal que para cada $j, j' \in J$, tenemos $\langle h_j, h_{j'}\rangle = \delta_{j,j'}$, donde $\delta_{j,j'}$ es el ***delta de Kronecker***:

$$\delta_{j,j'} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = j' \\ 0, & \text{si } j \neq j'. \end{cases}$$

**Definición 2.3.6** Un sistema ortonormal que también es un sistema completo es llamado ***base ortonormal***.

**Ejemplo 2.3.7** El sistema $(\psi_j)$ del Ejemplo 2.3.4 forma una base ortonormal del espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ ya que, para $\psi_m, \psi_k \in (\psi_j)$ tenemos

$$\langle \psi_m, \psi_k\rangle = \psi_m(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } m = k \\ 0, & \text{si } m \neq k. \end{cases}$$

**Teorema 2.3.8** Cada espacio separable pre-Hilbert $H$ tiene una base ortonormal.

**Demostración:**

Sea $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un sistema completo. Si algunos $a_j$ pueden representarse como una combinación lineal finita de $a_{j'}$ con $j' < j$, entonces podemos dejar de lado este elemento y mantener un sistema completo. Por lo tanto, podemos suponer que cada conjunto finito de $a_j$ es linealmente independiente. Construimos una base ortonormal a partir $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ usando el método de ortonormalización de Gram Schmidt, descrito en la demostración de Lema 2.1.17, por ello no ahondaremos en su proceso.

Supongamos que los $e_1, e_2, \cdots, e_k$, son ortonormales y con

$$\text{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} = \text{span}\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}.$$

Entonces

$$e'_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle a_{k+1}, e_j\rangle e_j.$$

Por el Lema 1.2.1 sabemos que $\langle e_k, e_j\rangle = 0$ si $k \neq j$. Así, para $i = 1, 2, \cdots, k$ tendremos que

$$\begin{aligned}
\langle e'_{k+1}, e_i\rangle = & \left\langle a_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle a_{k+1}, e_j\rangle e_j, e_i \right\rangle \\
= & \langle a_{k+1}, e_i\rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle \langle a_{k+1}, e_j\rangle e_j, e_i\rangle \\
= & \langle a_{k+1}, e_i\rangle - \sum_{j=1}^{k} [\langle a_{k+1}, e_j\rangle \langle e_j, e_i\rangle] \\
= & \langle a_{k+1}, e_i\rangle - \langle a_{k+1}, e_i\rangle \\
\langle e'_{k+1}, e_i\rangle = & 0.
\end{aligned}$$

Además, la independencia lineal implica que $e'_{k+1}$ no puede ser cero, por lo tanto,

$$e_{k+1} = \frac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}.$$

Entonces $e_1, e_2, \ldots, e_{k+1}$ es ortonormal.

Si $H$ es de dimensión finita, este procedimiento producirá una base $(e_j)_{j=1}^n$ en muchos pasos y luego se detendrá. Si $H$ es de dimensión infinita, no se detendrá y, por lo tanto, producirá una sucesión $(e_j)_j$. Por construcción tenemos $\operatorname{span}(e_j)_j = \operatorname{span}(a_j)_j$, que es denso en $H$. Por lo tanto, $(e_j)_j \in \ell^2(\mathbb{N})$ es una base ortonormal.

$\blacksquare$

**Teorema 2.3.9** Supongamos que $H$ es un espacio pre-Hilbert separable de dimensión infinita y sea $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $H$. Entonces, cada elemento $h$ de $H$ puede representarse en la forma

$$h = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j,$$

donde la serie es convergente en $H$, y los coeficientes $c_j$ satisfacen $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty$. Los coeficientes son únicos y están dados por $c_j = c_j(h) = \langle h, e_j \rangle$. Entonces la aplicación $h \mapsto (c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ da una isometría de $H$ a $\ell^2(\mathbb{N})$. Para $h, h' \in H$ tenemos

$$\langle h, h' \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(h)\overline{c_j(h')},$$

así en particular $\|h\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |c_j|^2$.

**Demostración:**

Sea $h \in H$, definimos $c_j(h) = \langle h, e_j \rangle$, y para $n \in \mathbb{N}$, sea $s_n(h) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j e_j \in H$. Como

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|h - s_n(h)\|^2 \\
&= \langle h - s_n(h), h - s_n(h) \rangle \\
&= \langle h, h \rangle - \langle h, s_n(h) \rangle - \langle s_n(h), h \rangle + \langle s_n(h), s_n(h) \rangle \\
&= \langle h, h \rangle - \left\langle h, \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \right\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{n} c_j e_j, h \right\rangle + \left\langle \sum_{j=1}^{n} c_j e_j, \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \right\rangle \\
&= \|h\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 - \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \\
\Rightarrow 0 &\leq \|h\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \leq \|h\|^2, \quad \text{para cada } n.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty.$$

Así obtenemos la aplicación lineal $T : H \to \ell^2(\mathbb{N})$ tal que $h \mapsto (c_j(h))_{j\in\mathbb{N}}$. Ya que $\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \leq \|h\|^2$ para cada $n$, tendremos que $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 = \|Th\|^2 \leq \|h\|^2$, es decir que, $\|Th\| \leq \|h\|$ para cada $h \in H$. Para $h \in \operatorname{span}\{(e_j)_{j\in\mathbb{N}}\}$, tenemos que $h = \lim_{n\to\infty} s_n(h) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|Th\|^2 &= \left\| T\left( \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \right) \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| T\left( \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \right) \right\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} T\left(c_j e_j\right) \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} c_j T\left(e_j\right) \right\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \right\|^2 = \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \right\|^2 \\
\|Th\|^2 &= \|h\|^2 \\
\Rightarrow \|Th\| &= \|h\|.
\end{aligned}$$

Luego $T$ es isometría por Lema 2.1.16. Dado que este subespacio es denso, la última igualdad se mantiene para cada $h \in H$, por lo que $T$ es una isometría. En particular,

$$\langle h, h' \rangle = \langle Th, Th' \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(h) \overline{c_j(h')}.$$

■

El teorema anterior tiene varias consecuencias importantes. En primer lugar, muestra que existe, salvo isomorfismo, sólo un espacio separable de Hilbert de dimensión infinita, este es $\ell^2(\mathbb{N})$. En segundo lugar, reduce todos los cálculos en un espacio de Hilbert a cálculos con elementos de una base ortonormal.

**Teorema 2.3.10** ***(Completación)*** Para cada espacio separable pre-Hilbert $V$ existe un espacio de Hilbert $H$ tal que existe una isometría $T : V \to H$, llamada ***completación***, que aplica a $V$ sobre un subespacio denso de $H$. La completación es única salvo isomorfismo en el siguiente sentido: Si $T' : V \to H'$ es otra isometría sobre un subespacio denso de un espacio de Hilbert $H'$, entonces existe un isomorfismo único de los espacios de Hilbert $S : H \to H'$ tal que $T' = S \circ T$. Lo ilustramos con el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T'"'] & H \arrow[d, "S"] \\ & H' \end{tikzcd}$$

Se acostumbra a considerar un espacio pre-Hilbert $V$ como un subespacio de su completación $H$, viéndolo como $T(V)$, la imagen de la aplicación de completación.

**Demostración:**

Sea $V$ un espacio separable pre-Hilbert. Si $V$ es de dimensión finita, entonces $V$ es en sí mismo un espacio de Hilbert por la Proposición 2.1.18, y podemos tomar $T$ igual a la identidad. Si $V$ no es finito, por el Teorema 2.3.8, podemos elegir una base ortonormal $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Sean $H = \ell^2(\mathbb{N})$ y $T : V \to \ell^2(\mathbb{N})$ la isometría dada en el Teorema 2.3.9. Tenemos que demostrar que $T(V)$ es denso en $H = \ell^2(\mathbb{N})$. Sea $f \in \ell^2(\mathbb{N})$ y para $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n$ definida por

$$f_n(j) = \begin{cases} f(j) & \text{si } j \leq n \\ 0 & \text{si } j > n. \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} \|f_n\|^2 &= \sum_{j\in\mathbb{N}} |f_n(j)|^2 \\ &= \sum_{j\leq n} |f(j)|^2 + \sum_{j>n} |0|^2 \\ \|f_n\|^2 &= \sum_{j\leq n} |f(j)|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Entonces $f_n \in \ell^2(\mathbb{N})$. Además

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|^2 &= \sum_{j\in\mathbb{N}} |f(j) - f_n(j)|^2 \\ &= \sum_{j\leq n} |f(j) - f(j)|^2 + \sum_{j>n} |f(j) - 0|^2 \\ \|f - f_n\|^2 &= \sum_{j>n} |f(j)|^2, \end{aligned}$$

que tiende a cero cuando $n \to \infty$ dado que se cancelan todos los términos. Entonces la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f$ en $\ell^2(\mathbb{N})$. Ahora, para determinar que $T(V)$ es denso en $H$ resta verificar que $f_n \in T(V)$ para cada $n \in N$. Sea $\lambda_j = f(j)$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces

$$f_n = T\left(\sum_{j\leq n} \lambda_j e_j\right), \quad \text{donde } \sum_{j\leq n} \lambda_j e_j \in V,$$

entonces $f_n \in T(V)$ para cada $n \in N$ y de esta forma, $T(V)$ es denso en $H$. Por lo tanto, hemos completado la prueba de la existencia de dicha aplicación $T$.

Ahora, demostraremos que $T$ es única. Supongamos que existe otra isometría $T' : V \to H'$, tal que $T'(V)$ es un subespacio denso de $H'$. Definimos una aplicación $S : H \to H'$ de la siguiente manera: Sea $h \in H$; entonces existe una sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $V$ tal que $T((v_n)_{n\in\mathbb{N}})$ converge a $h$, la cual, por Lema 2.1.12 debe de ser de Cauchy. Como $T$ es una isometría, se deduce que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ debe ser una sucesión de Cauchy en $V$, y como $T'$ es una isometría, la sucesión $(T'(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $H'$. Por lo tanto, converge a algún $h' \in H'$. Definimos $S(h) = h'$. Observemos que $S(h)$ no depende de la elección de la sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y, por lo tanto, está bien definido. Para ver que $S$ es una isometría, sean $v, w$ elementos de $H$ y elegimos las sucesiones $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $V$, de modo que $T(v_n)$ converja a $v$ y $T(w_n)$ converja a $w$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\langle S(v), S(w)\rangle &= \langle \lim_{n\to\infty} T'(v_n), \lim_{n\to\infty} T'(w_n)\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle v_n, w_n\rangle \\
&= \langle \lim_{n\to\infty} T(v_n), \lim_{n\to\infty} T(w_n)\rangle \\
\langle S(v), S(w)\rangle &= \langle v, w\rangle.
\end{aligned}
$$

Por construcción, S satisface $T' = S \circ T$.

■

**Corolario 2.3.11** Sea $V$ un espacio pre-Hilbert con la completación $H$, y sea $H'$ un subespacio Hilbert de $H$ que contiene a $V$. Entonces $H' = H$.

**Demostración:**

Como $H'$ es subespacio de $H$, basta demostrar que $H \subseteq H'$. Sea $h \in H$. Entonces existe una sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $V$ que converge a $h$. Por Lema 2.1.12 se deduce que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ debe ser una sucesión de Cauchy en $V \subset H'$, de manera que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $H'$ y Por lo tanto, su límite $h$ se encuentra en $H'$. Por lo tanto, $H' = H$.

■

## 2.4. Una base para el espacio $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

En el capítulo anterior analizamos que el espacio pre-Hilbert $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Este espacio no es completo, como lo muestra el siguiente corolario.

**Corolario 2.4.1** El espacio pre-Hilbert $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ no es completo.

**Demostración:**

Sea $0 < a < 1$ y $f_n \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ con $n \in \mathbb{N}$ la función definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq c - \frac{1}{n} \\ nx - nc + 1, & \text{si } c - \frac{1}{n} \leq x \leq c \\ 1, & \text{si } c \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Si $n > m$, entonces $c - \frac{1}{m} < c - \frac{1}{n}$. Luego

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_2^2 &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \\ &= \int_0^{c-1/m} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx + \int_{c-1/m}^{c-1/n} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \\ &\quad + \int_{c-1/n}^{c} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx + \int_c^1 |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \\ &= \int_0^{c-1/m} |0-0|^2 dx + \int_{c-1/m}^{c-1/n} |0 - f_m(x)|^2 dx \\ &\quad + \int_{c-1/n}^{c} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx + \int_c^1 |1-1|^2 dx \\ \|f_n - f_m\|_2^2 &= \int_{c-1/m}^{c-1/n} |f_m(x)|^2 dx + \int_{c-1/n}^{c} |f_n(x) - f_m(x)|_2^2 dx. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \int_{c-1/n}^{c} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx &= \int_{c-1/n}^{c} |nx - nc + 1 - (mx - mc + 1)|^2 dx \\ &= \int_{c-1/n}^{c} |(x-c)(n-m)|^2 dx \\ &= \int_{c-1/n}^{c} (x-c)^2 (n-m)^2 dx \\ &= (n-m)^2 \int_{c-1/n}^{c} (x^2 - 2xc + c^2) dx \\ &= (n-m)^2 \left[ \frac{x^3}{3} - cx^2 + c^2 x \right] \Bigg|_{c-1/n}^{c} \\ &= (n-m)^2 \left( \frac{c^3}{3} - \frac{c^3}{3} \right) \\ \int_{c-1/n}^{c} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx &= 0. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_2^2 &= \int_{c-1/m}^{c-1/n} |f_m(x)|^2 dx \\
&\leq \int_{c-1/m}^{c} |f_m(x)|^2 dx \\
&= \int_{c-1/m}^{c} |mx - mc + 1|^2 dx \\
&= \int_{c-1/m}^{c} (mx - mc + 1)^2 dx \\
&= \frac{1}{3m} \\
&< \frac{1}{m} \\
\Rightarrow \|f_n - f_m\|_2^2 &< \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Análogamente, si $m > n$, obtenemos

$$\|f_n - f_m\|_2^2 < \frac{1}{n}.$$

Por lo que

$$\|f_n - f_m\|_2^2 < \frac{1}{m} + \frac{1}{n},$$

para cada $m, n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Sin embargo, no existe $f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2^2 = 0$. Razonemos por contradicción. Supongamos que existe $f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2^2 = 0$, entonces

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^{c-1/n} |f(x)|^2 dx + \int_{c-1/n}^{c} |f_n(x) - f(x)|^2 dx + \int_c^1 |1 - f(x)|^2 dx,$$

y haciendo $n \to \infty$, se obtiene que

$$\int_0^c |f(x)|^2 dx = \int_c^c |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_c^1 |1 - f(x)|^2 dx = 0.$$

Ya que, hemos supuesto que $f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, entonces $f$ es continua. Pero hemos obtenido que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x < c \\ 1, & \text{si } c < x < 1, \end{cases}$$

la cual no es una función continua (es discontinua en $x = c$), lo que es una contradicción. Por lo tanto, $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ no es completo.

$\blacksquare$

Sea $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ la completación $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Algunos de los resultados principales del primer capítulo se pueden resumir en el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.2** Los exponenciales $e_k(x) = e^{2\pi ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, forman una base ortonormal $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

**Demostración:**

Por el Lema 1.2.1, sabemos que los $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ cumplen con la Definición 2.3.5, ya que para $k, l \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\delta_{k,l} = \langle e_k, e_l \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } k = l \\ 0, & \text{si } k \neq l, \end{cases}$$

es decir que, los $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ forman un sistema ortonormal.

Ahora falta demostrar que los $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ forman una base ortonormal. Sea

$$H = \left\{ h = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k \;\middle|\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty \right\}.$$

Ya que $\|h\|^2 = \|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$ significa que dicha serie por lo tanto, converge en $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Ahora, consideremos $T : H \to \ell^2(\mathbb{Z})$ definida por

$$h = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k \mapsto (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Siguiendo un razonamiento análogo a la isometría dada en el Teorema 2.3.9 se deduce que $T$ es isometría. Probemos que $T$ es sobreyectiva. Sea $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, ya que

$$T\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k\right) = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Falta verificar que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k \in H$. Como $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k$ converge en la norma-$L^2$, tenemos que

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k\right\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty,$$

es decir que, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k \in H$ y así $T$ es también sobreyectiva. Por lo tanto, la aplicación $T$ da un isomorfismo a $\ell^2(\mathbb{Z})$, y por lo tanto, $H$ es un subespacio de Hilbert de $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Como consecuencia del Teorema 1.4.12, $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset H$ y mediante el Corolario 2.3.11 obtenemos que $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = H$. Así hemos probado que cada elemento de $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ se puede representar como una serie $h = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k$. De ello se deduce que $c_k = \langle h, e_k \rangle$, y así $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal.

$\blacksquare$

# Capítulo 3

# La transformada de Fourier.

En el capítulo 1, mostramos que cada función periódica continua se puede escribir como una suma de ondas simples. En este capítulo, desarrollamos una teoría análoga para funciones en toda la línea real, donde consideramos funciones que *no son periódicas* en $\mathbb{R}$, siempre que sean de cuadrado integrable.

En el caso periódico, las posibles ondas fueron $\cos(2\pi kx)$ y $\text{sen}(2\pi kx)$, donde $k$ tiene que ser un entero, lo que significa que las posibles "longitudes de onda" son $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. En el caso no periódico, no hay restricción en las longitudes de onda, así cada número real positivo puede ocurrir. En consecuencia, para una función adecuada $f$ en $\mathbb{R}$, el objeto análogo asociado a $f$ ya no será una serie, tendrá que ser reemplazada por una integral sobre $\mathbb{R}$, que de será de hecho otra función $\hat{f}$ en $\mathbb{R}$, que se llama la transformada de Fourier de $f$. En términos generales, la transformada de Fourier es una *versión continua* de los coeficientes de Fourier.

## 3.1. Teoremas de convergencia.

Antes de llegar a la transformada de Fourier en $\mathbb{R}$, necesitaremos dos teoremas importantes: el teorema de convergencia dominada y el teorema de convergencia monótona. Aquí se dara versiones bastante débiles de estos resultados.

**Definición 3.1.1** Se dice que una sucesión de funciones continuas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ converge de manera ***localmente uniforme*** a una función $f$ si para cada punto $x \in \mathbb{R}$ hay una vecindad en la cual $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

**Lema 3.1.2** Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en $\mathbb{R}$ converge de manera localmente uniforme a la función $f$ sí y sólo sí converge uniformemente en cada intervalo acotado $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

**Demostración:**

“ $\Longrightarrow$ ”
Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f$ de manera localmente uniforme. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Sea $x \in [a, b]$, así, por ser $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ localmente convergente de manera uniforme, existe un entorno $(x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x)$ con $\varepsilon_x > 0$ tal que $f_n \to f$, de manera uniforme en $(x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x)$ $\quad (*)$.

Sea $\mathcal{F} = \{(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) | x \in [a, b]\}$, así $\mathcal{F}$ es una cubierta de abiertos del intervalo $[a, b]$, pero el intervalo $[a, b]$ es compacto, por lo que existe una colección finita $(x_1 - \varepsilon_{x_1}, x_1 + \varepsilon_{x_1}), \cdots, (x_k - \varepsilon_{x_k}, x_k + \varepsilon_{x_k})$ de intervalos de $\mathcal{F}$ tal que

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} (x_j - \varepsilon_{x_j}, x_j + \varepsilon_{x_j}).$$

Por $(*)$, $f_n \to f$ uniformemente en $(x_j - \varepsilon_{x_j}, x_j + \varepsilon_{x_j})$ para todo $j = 1, \cdots, k$, así para $\varepsilon > 0$, existen $n_j \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_j$ y para cada $x \in (x_j - \varepsilon_{x_j}, x_j + \varepsilon_{x_j})$

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Sea $N = \max\{n_1, \cdots, n_k\}$, así

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in \bigcup_{j=1}^{k} (x_j - \varepsilon_{x_j}, x_j + \varepsilon_{x_j}).$$

Pero $[a, b] \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{k} (x_j - \varepsilon_{x_j}, x_j + \varepsilon_{x_j})$, de manera que

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in [a, b].$$

Por lo tanto, $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$.

“ $\Longleftarrow$ ”

Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en todo intervalo de la forma $[a,b]$. Sea $x\in\mathbb{R}$, así $(x-1,x+1)\subset[x-1,x+1]$ y como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[x-1,x+1]$, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $(x-1,x+1)$, por lo que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en algún entorno de $x$. Por lo tanto, $f_n\to f$ de manera localmente uniforme.

$\blacksquare$

**Lema 3.1.3** ***(Este es un caso especial del teorema de convergencia dominada)*** Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en $\mathbb{R}$ que converge de manera localmente uniforme a alguna función $f$. Supongamos que existe una función no negativa $g$ en $\mathbb{R}$ que satisface $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx<\infty$ y $|f_n(x)|\leq g(x)$ para cada $x\in\mathbb{R}$ y para cada $n\in\mathbb{N}$. Entonces las integrales $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existen y

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

**Demostración:**

Para cada $T>0$ la sucesión $(f_n)$ converge uniformemente en $[-T,T]$. Además,

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}|f(x)|dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{-T}^{T}|f_n(x)|dx\\
&\leq \int_{-T}^{T} g(x)dx\\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx<\infty\\
\Rightarrow \int_{-T}^{T}|f(x)|dx<\infty,
\end{aligned}$$

y para cada $n$,

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}|f_n(x)|dx &\leq \int_{-T}^{T} g(x)dx\\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx<\infty\\
\Rightarrow \int_{-T}^{T}|f_n(x)|dx<\infty,
\end{aligned}$$

lo cual implica que las integrales existen. Sea $g_n=f_n-f$. Tenemos $|g_n|\leq 2g$, y tenemos que probar que $\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)dx$ tiende a cero.

Como $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx < \infty$ por hipótesis, entonces $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$. Es decir, que para cada $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx - \int_{-t}^{t} g(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{para cada } t \geq \mathrm{T},$$

pero

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx - \int_{-t}^{t} g(x)dx\right| &= \left|\int_{-\infty}^{-t} g(x)dx + \int_{t}^{\infty} g(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{|x|>t} g(x)dx\right| \\
\left|\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx - \int_{-t}^{t} g(x)dx\right| &= \int_{|x|>t} g(x)dx, \quad \text{ya que } g \text{ es no negativa.}
\end{aligned}$$

En particular, para $t = T$ tenemos

$$\int_{|x|>T} g(x)dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

De manera que

$$\int_{|x|>T} 2g(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Despues, ya que $g_n$ tiende a cero uniformemente en $[-T, T]$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ talque para todo $n \geq n_0$ tenemos

$$\int_{-T}^{T} |g_n(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para $n \geq n_0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |g_n(x)|dx &= \int_{-T}^{T} |g_n(x)|dx + \int_{|x|>T} 2g(x)dx \\
&\leq \int_{-T}^{T} |g_n(x)|dx + 2\int_{|x|>T} 2g(x)dx \ < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
\int_{-\infty}^{\infty} |g_n(x)|dx < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es decir, que $\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)$ tiende a cero y, por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

■

**Lema 3.1.4** ***(Este es un caso especial del teorema de convergencia monótona)*** Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas no negativas en $\mathbb{R}$ y asumamos que existe una función $f$ tal que $f_n \to f$ de manera localmente uniforme y que es monótonamente creciente, es decir, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ para cada para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Demostración:

Si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty$, entonces este hecho se deduce del lema anterior. Así, asumamos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \infty$. Es decir, para cada $C > 0$ existe un $T > 0$ tal que

$$\int_{-T}^{T} f(x)dx > C.$$

Por convergencia localmente uniforme, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx \geq \int_{-T}^{T} f(x)dx > C.$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \infty = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

En cualquier caso

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

■

## 3.2. Convolución.

La convolución es una técnica estándar que se puede usar, por ejemplo, para encontrar aproximaciones suaves de funciones continuas. Para nosotros es una herramienta esencial en la prueba de los principales teoremas de este capítulo. Sea $L^1_{bc}(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones continuas acotadas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que satisfacen

$$\|f\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty.$$

Es fácil ver que $\|.\|_1$ satisface las propiedades de una norma (Definición 1.2.9), es decir, que para $f, g \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos

- $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$.

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda f(x)|dx \\ &= |\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \\ \|\lambda f\|_1 &= |\lambda| \|f\|_1. \end{aligned}$$

- $\|f\|_1 \geq 0$ y $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$. Sea $f \neq 0$ y $g(x) = |f(x)|$, entonces $g$ es continua acotada dado que $f$ es continua acotada. Ya que $f \neq 0$, existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ con $g(x_0) = \alpha > 0$. Entonces, como $g$ es continua, existe un $\delta > 0$ tal que $g(x) > \frac{\alpha}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ con $|x - x_0| < \delta$. Por lo que $|g(x) - \alpha| < \varepsilon$, es decir, $-\varepsilon + \alpha < g(x) < \varepsilon + \alpha$, así escogemos $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ entonces

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx \\
&> \int_{|x-x_0|<\delta} \frac{\alpha}{2}dx \\
&= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\alpha}{2}dx \\
&= \frac{2\alpha\delta}{2} \\
&= \alpha\delta \\
&> 0 \\
\Rightarrow \|f\|_1 &> 0.
\end{aligned}$$

- $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |(f+g)(x)|dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)+g(x)|dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(|f(x)| + |g(x)|\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx + \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx \\
&= \|f\|_1 + \|g\|_1 \\
\Rightarrow \|f+g\|_1 &\leq \|f\|_1 + \|g\|_1.
\end{aligned}$$

La desigualdad triangular, asegura que si $f$ y $g$ están en $L^1_{bc}(\mathbb{R})$, entonces también lo está su suma $f+g$, entonces $L^1_{bc}(\mathbb{R})$ es en realidad un espacio vectorial.

**Teorema 3.2.1** Sean $f, g \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$. Entonces la integral

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

existe para cada $x \in \mathbb{R}$ y define una función $f*g \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes ecuaciones se mantienen para $f, g, h \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$:

$$f*g = g*f, \quad f*(g*h) = (f*g)*h, \quad \text{y} \quad f*(g+h) = f*g + f*h.$$

La función$f * g$ es llamada la ***convolución*** ó ***producto de convolución*** de las funciones $f$ y $g$.

__Demostración:__

Sean $f, g \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$. Como $g \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$, entonces $g$ es acotada, así, asumamos que $|g(x)| \leq C$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)g(x-y)|dy &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)||g(x-y)|dy \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} (|f(y)|C)dy \\
&= C\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|dy \\
\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)g(x-y)|dy &= C\|f\|_{1},
\end{aligned}$$

lo cual implica la existencia y acotacion de $f * g$. Ahora, demostraremos su continuidad. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Como $f, g \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$, entonces $f$ y $g$ son acotadas. Supongamos que $|f(x)|, |g(x)| \leq C$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y que $g \neq 0$. Para un $\varepsilon > 0$ dado, existe $T > |x_0|$ tal que

$$\int_{|y|>T} |f(y)|dy < \frac{\varepsilon}{4C}.$$

Ya que una función continua en un intervalo cerrado acotado es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x| \leq 2T, \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{1}}.$$

Entonces para $|x - x_0| < \delta$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-T}^{T} f(y)g(x-y)dy - \int_{-T}^{T} f(y)g(x_0-y)dy\right| &= \left|\int_{-T}^{T} f(y)[g(x-y) - g(x_0-y)]dy\right| \\
&\leq \int_{-T}^{T} |f(y)||g(x-y) - g(x_0-y)|dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{1}} \int_{-T}^{T} |f(y)|dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{1}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|dy \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{2\|f\|_{1}}\right) \|f\|_{1} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|\int_{-T}^{T} f(y)g(x-y)dy - \int_{-T}^{T} f(y)g(x_0-y)dy\right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

además

$$
\begin{aligned}
\int_{|y|>T} |f(y)||g(x-y)-g(x_0-y)|dy &\leq \int_{|y|>T} |f(y)||g(x-y)|dy + \int_{|y|>T} |f(y)||g(x_0-y)|dy \\
&\leq C\int_{|y|>T} |f(y)|dy + C\int_{|y|>T} |f(y)|dy \\
&= 2C\int_{|y|>T} |f(y)|dy \\
&< 2C\left(\frac{\varepsilon}{4C}\right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \\
\Rightarrow \int_{|y|>T} |f(y)||g(x-y)-g(x_0-y)|dy &< \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Lo anterior implica que, para $|x-x_0|<\delta$ tenemos

$$|f*g(x)-f*g(x_0)|<\varepsilon,$$

así $f*g$ es continua en $x_0$. Como $x_0$ se tomó arbitrario, concluimos que $f*g$ es continua.

Para ver que $\|f*g\|_1<\infty$ calculamos

$$
\begin{aligned}
\|f*g\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f*g(x)|dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy\right| dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)g(x-y)|dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)g(x-y)|dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|dy \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx \\
&= \|f\|_1\|g\|_1 \\
\Rightarrow \|f*g\|_1 &\leq \|f\|_1\|g\|_1.
\end{aligned}
$$

A continuación mostramos que $f*g=g*f$. La sustitución $y\mapsto x-y$ da

$$
\begin{aligned}
f*g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)dy \\
f*g(x) &= g*f(x).
\end{aligned}
$$

Además, ya que todas las integrales convergen absolutamente, se les permite cambiar el orden de integración así

$$\begin{aligned}
f * (g * h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} g(z)h(x-y-z)dzdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(z) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)h(x-y-z)dydz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(z-y)h(x-z)dydz \\
f * (g * h)(x) &= (f * g) * h(x).
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
f * (g + h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)[(g+h)(x-y)]dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)[g(x-y) + h(x-y)]dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} f(y)h(x-y)dy \\
f * (g + h)(x) &= f * g(x) + f * h(x).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

## 3.3. La transformada de Fourier.

**Definición 3.3.1** Para $f \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$ se define su ***transformada de Fourier*** por

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}dx.$$

Si calculamos el módulo de $\hat{f}(y)$ observamos que

$$|\hat{f}(y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-2\pi ixy}|dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty,$$

es decir que, la transformada de Fourier $\hat{f}$ está acotada para cada $f \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$.

El siguiente teorema se muestran algunas de las propiedades de la transformada de Fourier.

**Teorema 3.3.2** Sea $f \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$.

(a) Si $g(x) = f(x)e^{2\pi iax}$ para $a \in \mathbb{R}$, entonces $\hat{g}(y) = \hat{f}(y-a)$.

(b) Si $g(x) = f(x-a)$, entonces $\hat{g}(y) = \hat{f}e^{-2\pi iay}$.

(c) Si $g \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$ y $h = f * g$, entonces $\hat{h}(y) = \hat{f}(y)\hat{g}(y)$.

(d) Si $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ para $\lambda > 0$, entonces $\hat{g}(y) = \lambda\hat{f}(\lambda y)$.

(e) Si $g(x) = -2\pi ixf(x)$ y $g \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f}$ es continuamente diferenciable con $\hat{f}'(y) = \hat{g}(y)$.

(f) Sea $f$ continuamente diferenciable y asuma que las funciones $f$ y $f'$ estan en $L^1_{bc}(\mathbb{R})$. Entonces $\widehat{f'}(y) = 2\pi iy\hat{f}(y)$, así, en particular, la función $y\hat{f}(y)$ es acotada.

(g) Sea $f$ dos veces continuamente diferenciable y asuma que las funciones $f, f', f''$ estan todas en $L^1_{bc}(\mathbb{R})$, Entonces $\hat{f} \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$.

**<u>Demostración:</u>**

Para (a) calculamos

$$\begin{aligned}
\hat{g}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi ixy}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x)e^{2\pi iax}\right] e^{-2\pi ixy}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi iax-2\pi ixy}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix(y-a)}dx \\
\hat{g}(y) &= \hat{f}(y-a).
\end{aligned}$$

Para (b) calculamos

$$\begin{aligned}
\hat{g}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi ixy}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-2\pi ixy}dx \\
&= \int_{-\infty-a}^{\infty-a} f(x)e^{-2\pi i(x+a)y}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}e^{-2\pi iay}dx \\
&= e^{-2\pi iay}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}dx \\
\hat{g}(y) &= e^{-2\pi iay}\hat{f}(y).
\end{aligned}$$

Para (c) calculamos

$$\begin{aligned}
\hat{h}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-2\pi ixy}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-z)g(z)dz\right] e^{-2\pi ixy}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-z)e^{-2\pi ixy}dx\; g(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}dx\; g(z)e^{-2\pi izy}dz, \quad \text{por literal (b)} \\
\hat{h}(y) &= \hat{f}(y)\hat{g}(y).
\end{aligned}$$

Para (d) calculamos

$$\begin{aligned}
\hat{g}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi ixy}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tfrac{x}{\lambda})e^{-2\pi ixy}dx \\
&= \int_{\frac{-\infty}{\lambda}}^{\frac{\infty}{\lambda}} f(x)e^{-2\pi i(\lambda x)y}(\lambda dx) \\
&= \lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix(\lambda y)}dx \\
\hat{g}(y) &= \lambda\hat{f}(\lambda y).
\end{aligned}$$

Para (e) observar que

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{f}(y)-\hat{f}(z)}{y-z} &= \frac{1}{y-z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixz}dx\right] \\
&= \frac{1}{y-z}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(e^{-2\pi ixy} - e^{-2\pi ixz}\right)dx \\
&= \frac{1}{y-z}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(e^{-2\pi ixy+(2\pi ixz-2\pi ixz)} - e^{-2\pi ixz}\right)dx \\
&= \frac{1}{y-z}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(e^{-2\pi ixz}e^{-2\pi ix(y-z)} - e^{-2\pi ixz}\right)dx \\
&= \frac{1}{y-z}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixz}\left(e^{-2\pi ix(y-z)} - 1\right)dx \\
\frac{\hat{f}(y)-\hat{f}(z)}{y-z} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixz}\frac{e^{-2\pi ix(y-z)}-1}{y-z}dx.
\end{aligned}$$

Sea $\varphi(x,u) = \dfrac{e^{-2\pi ixu}-1}{u}$, entonces

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x,u)|^2 &= \left|\frac{e^{-2\pi i x u}-1}{u}\right|^2 \\
&= \frac{1}{u^2}\left(e^{-2\pi i x u}-1\right)\left(e^{2\pi i x u}-1\right) \\
&= \frac{1}{u^2}\left(1-e^{-2\pi i x u}-e^{2\pi i x u}+1\right) \\
&= \frac{1}{u^2}\left(2-\cos(2\pi x u)-\cos(2\pi x u)\right) \\
|\varphi(x,u)|^2 &= \frac{2-2\cos(2\pi x u)}{u^2}.
\end{aligned}
$$

Se muestra la gráfica de $|\varphi(x,u)|^2$ para $x=1$ y $x=\frac{1}{2}$

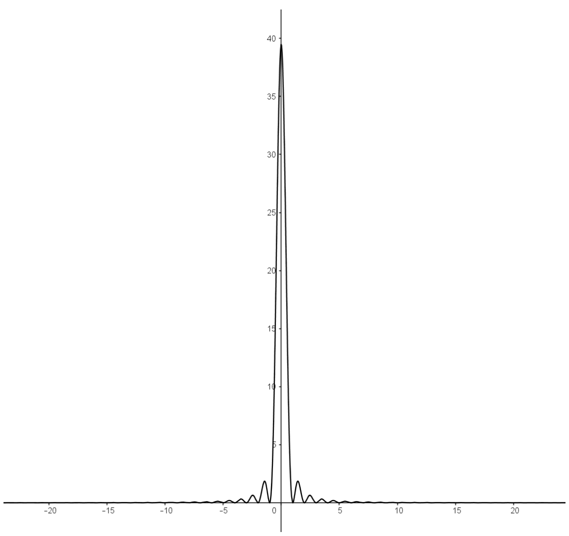

Figura 3.1: Gráfica de la función $|\varphi\,(1,u)\,|^2$.

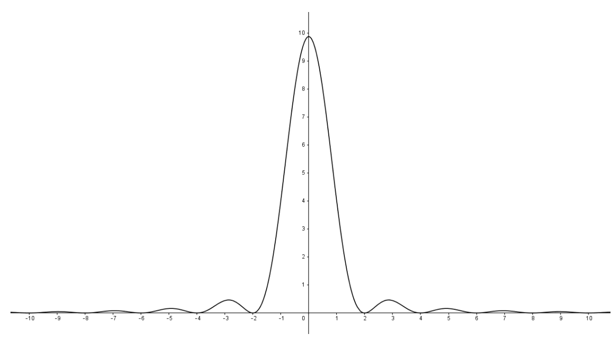

Figura 3.2: Gráfica de la función $|\varphi\left(\frac{1}{2},u\right)|^2$.

Observemos que en cada caso, $|\varphi(x,u)|^2$ toma su valor máximo a cuando $u\to 0$. Luego

$$
\begin{aligned}
\lim_{u\to 0}|\varphi(x,u)|^2 &= \lim_{u\to 0}\frac{2-2\cos(2\pi x u)}{u^2} \\
&= \lim_{u\to 0}\frac{4\pi x\,\mathrm{sen}(2\pi x u)}{2u}, \quad \text{aplicamos L'Hopital} \\
&= \lim_{u\to 0}\frac{2\pi x\,\mathrm{sen}(2\pi x u)}{u} \\
&= \lim_{u\to 0}\frac{4\pi^2x^2\cos(2\pi x u)}{1}, \quad \text{aplicamos L'Hopital} \\
\lim_{u\to 0}|\varphi(x,u)|^2 &= 4\pi^2x^2 \\
\Rightarrow \lim_{u\to 0}|\varphi(x,u)| &= 2\pi|x|.
\end{aligned}
$$

Es decir que, $|\varphi(x,u)| \leq 2\pi|x|$ para cada $u \neq 0$. Además

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0} \varphi(x,u) &= \lim_{u\to 0} \frac{e^{-2\pi ixu}-1}{u} \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{-2\pi ixe^{-2\pi ixu}}{1}, \quad \text{aplicamos L'Hopital} \\
\lim_{u\to 0} \varphi(x,u) &= -2\pi ix,
\end{aligned}$$

y como dicha convergencia no depende del valor de $x$ que tomemos, entonces la convergencia es localmente uniforme en $x$. Por convergencia dominada (Lema 3.1.3) se deduce el hecho.

Para (f) recordemos que por la integrabilidad de $|f|$ existen sucesiones $S_n, T_n \to \infty$ tales que $f(-S_n), f(T_n) \to 0$ . Luego calculamos

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(y) &= \lim_{n\to\infty} \int_{-S_n}^{T_n} f'(x)e^{-2\pi ixy}dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[ f(x)e^{-2\pi iyx}\Big|_{-S_n}^{T_n} + 2\pi iy \int_{-S_n}^{T_n} f(x)e^{-2\pi iyx} \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[ f(T_n)e^{-2\pi iyT_n} - f(-S_n)e^{2\pi iyS_n} \right] + \lim_{n\to\infty} \left[ 2\pi iy \int_{-S_n}^{T_n} f(x)e^{-2\pi ixy}dx \right] \\
&= 2\pi iy \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}dx \\
\widehat{f'}(y) &= 2\pi iy\hat{f}(y).
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
|y\hat{f}(y)| &\leq |2\pi iy\hat{f}(y)| \\
&= |\hat{f'}(y)| \\
\Rightarrow |y\hat{f}(y)| &< \infty, \quad \text{ya que } f' \in L^1_{bc}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Es decir que, $y\hat{f}(y)$ es acotada. Finalmente, para (g) sabemos que $f, f' \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$, entonces por (f) tenemos que

$$\widehat{f'}(y) = 2\pi iy\hat{f}(y), \tag{3.1}$$

pero también $f', f'' \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$, entonces por (f) tenemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{f''}(y) &= 2\pi iy\widehat{f'}(y) \\
\Rightarrow \widehat{f''}(y) &= (2\pi iy)^2\widehat{f'}(y), \quad \text{por la ecuación (3.1).}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
|y^2\hat{f}(y)| &\leq |(2\pi iy)^2\widehat{f'}(y)| \\
&= |\widehat{f''}(y)| \\
\Rightarrow |y^2\hat{f}(y)| &< \infty, \quad \text{ya que } f'' \in L^1_{bc}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Es decir que, $y^2\hat{f}(y)$ está acotada. Como $\hat{f}$ es continua, esta es por lo tanto, integrable. Por lo tanto, $\hat{f} \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$.

$\blacksquare$

**Lema 3.3.3** ***(Lema de Riemann-Lebesgue)*** Sea $f \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\lim_{|x|\to\infty} \hat{f}(x) = 0.$$

**Demostración:**

Como

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi ixy}dy \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi ix\left(y+\frac{1}{2x}\right)}dy \\
\hat{f}(x) &= -\int_{-\infty}^{\infty} f\left(y-\frac{1}{2x}\right)e^{-2\pi ixy}dy,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \frac{\hat{f}(x)+\hat{f}(x)}{2} = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi ixy}dy - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(y-\frac{1}{2x}\right)e^{-2\pi ixy}dy\right] \\
\Rightarrow \hat{f}(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(y)-f\left(y-\frac{1}{2x}\right)\right]e^{-2\pi ixy}dy.
\end{aligned}$$

Además, el integrando está dominado por $|f(y)-f\left(y-\frac{1}{2x}\right)|$ y dado que $f$ es continua tenemos

$$\lim_{|x|\to\infty} y-\tfrac{1}{2x} = y \Rightarrow \lim_{|x|\to\infty} f\left(y-\tfrac{1}{2x}\right) = f(y).$$

Luego, por convergencia dominada tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{|x|\to\infty} \hat{f}(x) &= \lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(y)-f\left(y-\frac{1}{2x}\right)\right]e^{-2\pi ixy}dy\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(y)-\lim_{|x|\to\infty} f\left(y-\frac{1}{2x}\right)\right]\lim_{|x|\to\infty} e^{-2\pi ixy}dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(y)-f(y)\right](0)dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(0)(0)dy \\
\lim_{|x|\to\infty} \hat{f}(x) &= 0.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Definición 3.3.4** Sea $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ el espacio de ***funciones de Schwartz***, es decir, $\mathcal{S}$ consiste en todas las funciones infinitamente diferenciables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que para cada $m, n \geq 0$ tenemos

$$\sigma_{m,n}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| < \infty.$$

**Lema 3.3.5** Sea $f(x) = ke^{-tx^2}$, donde $k \in \mathbb{R}$ y $t > 0$. Entonces para cada $n \geq 0$ existe un polinomio $P_n(x)$ tal que $D^n f(x) = P_n(x)f(x)$ y concluir que $f(x)$ se encuentra en $\mathcal{S}$.

**Demostración:**

Sea $f(x) = ke^{-tx^2}$, con $k \in \mathbb{R}$ y $t > 0$. Sabemos que $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Para $n = 0$, $D^0 f(x) = ke^{-tx^2}$, donde $P_0(x) = (1)x^0 = 1$. Por lo que existe $P_0(x)$, tal que

$$D^0 f(x) = P_0(x)f(x).$$

Ahora para $n \geq 1$. Probando inducción.

Para $n = 1$, $D^1 f(x) = -2xtke^{-x^2}$, entonces existe $P_1(x) = (-2)x^1$, tal que

$$D^1 f(x) = P_1(x)f(x), \quad \text{se cumple para } n = 1.$$

Supongamos que se cumple para $n$, es decir, supongamos que existe un polinomio $P_n(x)$ tal que

$$D^n f(x) = P_n(x)f(x)$$

Ahora demostraremos que se cumple para $n + 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
D^{n+1} f(x) &= D(D^n f(x)) \\
&= D(P_n(x)f(x)) \\
&= D(P_n(x))f(x) + P_n(x)Df(x) \\
&= D(P_n(x))ke^{-tx^2} + P_n(x)(-2xkte^{-tx^2}) \\
&= D(P_n(x))kte^{-x^2} - 2xtP_n(x)ke^{-tx^2} \\
&= (D(P_n(x)) - 2txP_n(x))ke^{-tx^2} \\
&= P_{n+1}(x)ke^{-x^2} \\
D^{n+1} f(x) &= P_{n+1}(x)f(x)
\end{aligned}$$

Por lo que existe un polinomio $P_{n+1}(x)$ tal que

$$D^{n+1} f(x) = P_{n+1}(x)f(x).$$

Ahora, debemos demostrar que $f \in \mathcal{S}$. Sean $m, n \in \mathbb{Z}_0^+$, entonces

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m [P_n(x)f(x)]|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^m[(a_n x^n + \cdots + a_0)ke^{-tx^2}] \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| (a_n x^{n+m} + \cdots + a_0 x^m)ke^{-tx^2} \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{j=m}^{n+m} a_{j-m} x^j k e^{-tx^2} \right| \\
&\leq \sum_{j=m}^{n+m} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| a_{j-m} x^j k e^{-tx^2} \right| \\
\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| &\leq \sum_{j=m}^{n+m} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| a_{j-m} x^j k e^{-tx^2} \right|.
\end{aligned}
$$

Ahora, para encontrar el supremo, encontraremos sus valores máximos por medio de su derivada

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(a_{j-m}x^j k e^{-tx^2}\right) &= a_{j-m} j k x^{j-1} e^{-tx^2} - 2a_{j-m} t k x^{j+1} e^{-tx^2} = 0 \\
\Rightarrow a_{j-m} k x^{j-1} e^{-tx^2}(j - 2tx^2) = 0 \\
\Rightarrow 2tx^2 &= j \\
\Rightarrow x &= \pm\frac{j}{\sqrt{2t}} = C,
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\sigma_{m,n}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| \leq \sum_{j=m}^{n+m} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| a_{j-m} C^j k e^{-tC^2} \right| < \infty
$$

Por lo tanto, $f \in \mathcal{S}$.

$\blacksquare$

**Proposición 3.3.6** Tenemos $\mathcal{S} \subset L^1_{bc}(\mathbb{R})$ y la transformada de Fourier aplica $\mathcal{S}$ a sí mismo; es decir, si $f \in \mathcal{S}$, entonces $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

**Demostración:**

Sea $f \in \mathcal{S}$. Entonces $f$ es acotada y continua, y $(1 + x^2)f(x)$ es acotada, digamos por $C > 0$, así

$$
\begin{aligned}
|(1 + x^2)f(x)| &\leq C \\
(1 + x^2)|f(x)| &\leq C \\
\Rightarrow |f(x)| &\leq \frac{C}{1 + x^2}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\ dx,$$

pero

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\ dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx \\
&= \arctan x|_{-\infty}^{0} + \arctan x|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx &= \pi, \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx \leq C\pi < \infty \\
&\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx < \infty,
\end{aligned}$$

por lo tanto, $f$ de hecho pertenece $L^1_{bc}(\mathbb{R})$. Del literal (e) del Teorema 3.3.2 se deduce que para cada $f \in \mathcal{S}$, se tiene que $\hat{f}$ es infinitamente diferenciable y que

$$((-2\pi i x)^n f)\hat{}\ (y) = \hat{f}^{(n)}(y)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y donde $((-2\pi i x)^n f)\hat{}$ es la transformada de Fourier de $(-2\pi i x)^n f$. A continuación, el literal (f) del Teorema 3.3.2, muestra que para cada $f \in \mathcal{S}$,

$$\widehat{f^{(m)}}(y) = (2\pi i y)^m \hat{f}(y)$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. Tomándolos juntos, vemos que para cada $f \in \mathcal{S}$ y cada $m, n \geq 0$ la función

$$y^m \hat{f}^{(n)}(y)$$

es una transformada de Fourier de una función en $\mathcal{S}$ y, por lo tanto, está acotada. Por lo que $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

■

## 3.4. La fórmula de inversión.

En esta sección mostraremos que la transformada de Fourier es, hasta un giro de signo, inversa a sí misma. Necesitaremos una función auxiliar de la siguiente manera: Para $\lambda > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ sea

$$h_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|} e^{2\pi i t x}\ dt.$$

Observe que $0 < e^{-\lambda|t|} \leq 1$ y que $e^{-\lambda|t|}$ converge a 1 de manera localmente uniforme cuando $\lambda \to 0$.

**Lema 3.4.1** Tenemos

$$h_\lambda(x) = \frac{2\lambda}{4\pi^2x^2+\lambda^2} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(x)\, dx = 1.$$

En particular, se deduce que $h_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}h_1(\frac{x}{\lambda})$ para cada $\lambda > 0$.

<u>**Demostración:**</u>

Tenemos que

$$\begin{aligned}
h_\lambda(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|}e^{2\pi itx}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi itx-\lambda|t|}dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{2\pi itx-\lambda t}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi itx+\lambda t}dt \\
&= \left.\frac{e^{2\pi itx-\lambda t}}{2\pi ix-\lambda}\right|_0^\infty + \left.\frac{e^{2\pi itx+\lambda t}}{2\pi ix+\lambda}\right|_{-\infty}^0 \\
&= \frac{1}{\lambda-2\pi ix} + \frac{1}{\lambda+2\pi ix} \\
h_\lambda(x) &= \frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2x^2}.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2x^2}dx \\
&= 2\lambda\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2(1+\frac{4\pi^2x^2}{\lambda^2})}dx \\
&= \frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{2\pi x}{\lambda})^2}dx \\
&= \frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\lambda dx}{2\pi}\right) \\
&= \left(\frac{2}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\right)\pi, \quad \text{por ecuación (3.2)} \\
\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(x)dx &= 1.
\end{aligned}$$

Así, en particular tenemos

$$\tfrac{1}{\lambda}h_1(\tfrac{x}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{2}{4\pi^2(\frac{x}{\lambda})^2+1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{2}{\frac{4\pi^2x^2+\lambda^2}{\lambda^2}}\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{2\lambda^2}{4\pi^2x^2+\lambda^2}\right) \\
&= \frac{2\lambda}{4\pi^2x^2+\lambda^2} \\
\tfrac{1}{\lambda}h_1(\tfrac{x}{\lambda}) &= h_\lambda(x).
\end{aligned}
$$

■

**Lema 3.4.2** Si $f \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$, entonces para cada $\lambda > 0$,

$$f * h_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|}\hat{f}(t)e^{2\pi ixt}\ dt.$$

**Demostración:**

Calculando

$$
\begin{aligned}
f * h_\lambda(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)h_\lambda(x-y)\ dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|}e^{2\pi it(x-y)}dt\right] dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|}e^{2\pi itx}e^{-2\pi ity}dt\right] dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|}e^{2\pi itx}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi ity}dy\right] dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|}e^{2\pi itx}\hat{f}(t)\ dt \\
f * h_\lambda(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|}\hat{f}(t)e^{2\pi itx}\ dt.
\end{aligned}
$$

■

**Lema 3.4.3** Para cada $f \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$ y cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\lim_{\lambda\to 0} f * h_\lambda(x) = f(x).$$

**Demostración:**

Ya que $\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(x)\ dx = 1$ por Lema 3.4.1, entonces

$$f * h_\lambda(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)h_\lambda(x-y)\ dy - f(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)h_\lambda(x-y)\ dy - f(x)\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(y)\ dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)h_\lambda(x-y)\ dy - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h_\lambda(y)\ dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)h_\lambda(y)\ dy - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h_\lambda(y)\ dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-y)-f(x)]h_\lambda(y)\ dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-y)-f(x)]\tfrac{1}{\lambda}h_1(\tfrac{y}{\lambda})\ dy, \quad \text{por Lema 3.4.1} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-\lambda y)-f(x)]\tfrac{1}{\lambda}h_1(y)(\lambda\ dy) \\
f * h_\lambda(x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-\lambda y)-f(x)]h_1(y)\ dy.
\end{aligned}
$$

Como $f \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$, entonces $f$ esta acotada. Si $|f(x)| \leq C$ para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces el integrando está dominado por $2Ch_1(y)$. Como $f$ es continua, entonces

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 0} x - \lambda y = x, \\
\Rightarrow &\lim_{\lambda\to 0} f(x-\lambda y) = f(x).
\end{aligned}
$$

Esta convergencia no depende del valor que se tome de $y$, entonces convergencia es uniforme para $y$. Luego por el teorema de convergencia dominada (Lema 3.1.3) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}[f * h_\lambda(x) - f(x)] &= \lim_{\lambda\to 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty}[f(x-\lambda y)-f(x)]h_1(y)\ dy\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}[\lim_{\lambda\to 0} f(x-\lambda y) - f(x)]h_1(y)\ dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}[f(x)-f(x)]h_1(y)\ dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}[0]h_1(y)\ dy \\
&= 0(1), \quad \text{nuevamente por Lema 3.4.1} \\
\lim_{\lambda\to 0}[f * h_\lambda(x) - f(x)] &= 0.
\end{aligned}
$$

■

**Lema 3.4.4** ***(Fórmula de inversión)***. Sea $f \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$ y supongamos que $\hat{f} \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$, entonces para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\hat{f}}(x) = f(-x).$$

Es decir,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\ dy.$$

<u>**Demostración:**</u>

Por Lema 3.4.2 tenemos para $\lambda > 0$

$$f * h_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|}\hat{f}(t)e^{2\pi ixt}\ dt.$$

El lado izquierdo de la igualdad tiende a $f(x)$ cuando $\lambda \to 0$ por Lema 3.4.3. El integrando del lado derecho de la igualdad es dominado por $|\hat{f}(t)|$ y $e^{-\lambda|t|}$ converge a 1 de manera localmente uniforme cuando $\lambda \to 0$. Luego, por el teorema de convergencia dominada (Lema 3.1.3) tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\lambda\to 0} f * h_\lambda(x) \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|}\hat{f}(t)e^{2\pi ixt}\ dt\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\lim_{\lambda\to 0} e^{-\lambda|t|}\right]\hat{f}(t)e^{2\pi ixt}\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(1)\hat{f}(t)e^{2\pi ixt}\ dt \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\ dy. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Corolario 3.4.5** La transformada de Fourier restringida a $\mathcal{S}$ da una biyección del conjunto $\mathcal{S}$.

<u>**Demostración:**</u>

Por la Proposición 3.3.6 sabemos que si $f \in \mathcal{S}$, entonces $\hat{f} \in \mathcal{S}$. Verifiquemos que si $f(x) \in \mathcal{S}$, entonces $f(-x) \in \mathcal{S}$. Sean $m, n \geq 0$.

$$\begin{aligned} \sigma_{m,n}(f(x)) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| < \infty \\ \Rightarrow \sigma_{m,n}(f(-x)) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} |(-x)^m f^{(n)}(-x)| \\ &= \sup_{y\in\mathbb{R}} |y^m f^{(n)}(y)|, \quad \text{donde } y = -x \\ &< \infty, \quad \text{dado que } f \in \mathcal{S} \\ \Rightarrow \sigma_{m,n}(f(-x)) &< \infty. \end{aligned}$$

Consideremos $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ definida por $f(x) \mapsto \hat{f}(-x)$. Además, por la fórmula de inversión (Lema 3.4.4), sabemos que $\widehat{\hat{f}}(x) = f(-x)$. Así, consideremos $T^{-1} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ definida por $\hat{f}(-x) \mapsto \widehat{\hat{f}}(-x) = f(x)$. Como

$$\begin{aligned}
(T^{-1} \circ T)(f(x)) &= T^{-1}(T(f(x))) \\
&= T^{-1}(\hat{f}(x)) \\
&= \widehat{\hat{f}}(-x) \\
(T^{-1} \circ T)(f(x)) &= f(x).
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
(T \circ T^{-1})(\hat{f}(-x)) &= T(T^{-1}(\hat{f}(-x))) \\
&= T(\widehat{\hat{f}}(-x)) \\
&= T(f(x)) \\
(T \circ T^{-1})(\hat{f}(-x)) &= \hat{f}(-x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $T$ es biyectiva.

■

**Corolario 3.4.6** Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es continuamente diferenciable y satisface la ecuación diferencial

$$g'(x) = -2\pi x g(x).$$

Entonces existe una constante $c$ tal que $g(x) = ce^{-\pi x^2}$.

**Demostración:**

Supongamos que $u(x) = g(x)e^{\pi x^2}$. Mostraremos que $u'(x) = 0$, para deducir que $u(x)$ es una constante. Entonces

$$\begin{aligned}
u(x) &= g(x)e^{\pi x^2} \\
\Rightarrow u'(x) &= -2\pi x g(x)e^{\pi x^2} + 2\pi x g(x)e^{\pi x^2}, \quad \text{ya que por hipótesis } g'(x) = -2\pi x g(x). \\
u'(x) &= 0
\end{aligned}$$

Como $u'(x) = 0$, entonces $u(x) = c$, por lo que se tendrá que

$$\begin{aligned}
u(x) &= c \\
g(x)e^{\pi x^2} &= c, \quad \text{ya que } u(x) = g(x)e^{\pi x^2} \\
g(x) &= ce^{-\pi x^2}.
\end{aligned}$$

■

**Lema 3.4.7** Sea $f(x) = e^{-\pi x^2}$. Entonces $\hat{f} = f$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

<u>**Demostración:**</u>

De acuerdo con el Corolario 3.4.6, la función $f$ es, hasta múltiplos escalares, la única solución de la ecuación diferencial

$$f'(x) = -2\pi x f(x).$$

Por el Lema 3.3.5, sabemos que $f \in \mathcal{S}$. Luego $\hat{f}$ también se encuentra en $\mathcal{S}$, entonces

$$\begin{aligned}
(\hat{f})'(y) &= ((-2\pi i x)^n f)\hat{\ } (y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [(-2\pi i x) f(x)] e^{-2\pi i x y}\ dx \\
&= i \int_{-\infty}^{\infty} [(-2\pi x) e^{-\pi x^2}] e^{-2\pi i x y}\ dx \\
&= i \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\pi x^2})' e^{-2\pi i x y}\ dx \\
&= i \widehat{f'}(y) \\
&= i(2\pi i y \hat{f}(y)), \quad \text{por literal (f) del Teorema 3.3.2} \\
(\hat{f})'(y) &= -2\pi y \hat{f}(y).
\end{aligned}$$

Nuevamente por el Corolario 3.4.6, concluimos que $\hat{f}(y) = ce^{-\pi y^2}$ para alguna constante $c$. Además

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{f}}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{-2\pi i x y} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} c e^{-\pi y^2} e^{-2\pi i x y} dx \\
&= c \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i x y} dx \\
&= c \hat{f}(x) \\
&= c \left( c e^{-\pi x^2} \right), \quad \text{porque } \hat{f}(y) = c e^{-\pi y^2} \\
&= c^2 e^{-\pi x^2} \\
\hat{\hat{f}}(x) &= c^2 f(x).
\end{aligned}$$

Pero $f(-x) = e^{-\pi(-x)^2} = e^{-\pi x^2} = f(x)$, es decir,

$$c^2 f(x) = \hat{\hat{f}}(x) = f(-x), \quad \text{por Teorema 3.2.1}$$

$$\begin{aligned} c^2 f(x) &= f(x) \\ c^2 &= 1, \quad \text{pues } f > 0 \\ \Rightarrow c &= \pm 1. \end{aligned}$$

Ahora $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx > 0$, por lo tanto, $c = 1$. Es decir, $\hat{f}(y) = f(y) = e^{-\pi y^2}$. En particular, para $y = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x(0)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \\ &= e^{-\pi(0)^2}, \quad \text{ya que } \hat{f}(y) = f(y) = e^{-\pi y^2} \\ &= e^0 \\ \hat{f}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Es decir que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\ dx = 1.$$

■

**Corolario 3.4.8** Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}.$$

**<u>Demostración:</u>**

De la conclusión del Lema 3.4.7 tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1,$$

entonces calculamos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} (\sqrt{\pi} dx) \\ &= \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \\ &= \sqrt{\pi}(1) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

■

## 3.5. El teorema de Plancherel.

El teorema de Plancherel dice que la transformada de Fourier preserva la norma-$L^2$.

**Definición 3.5.1** Sea $L^2_{bc}(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones acotadas continuas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ con

$$\|f\|_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx < \infty.$$

Si $f$ tiene esta última propiedad, decimos que es ***cuadrado integrable***.

**Lema 3.5.2** Para cualquiera par de funciones $f,g\in L^2_{bc}(\mathbb{R})$ la integral

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

converge y define un producto interno en el espacio vectorial $L^2_{bc}(\mathbb{R})$. El espacio $L^1_{bc}(\mathbb{R})$ es un subespacio de $L^2_{bc}(\mathbb{R})$.

**Demostración:**

Para $T>0$ el espacio $C([-T,T])$ de funciones continuas es un espacio pre-Hilbert con el producto interno

$$\langle f,g\rangle_T = \int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

Escribimos $\|.\|_{2,T}$ para la norma en este espacio. Para $f,g\in L^2_{bc}(\mathbb{R})$ sus restricciones a el intervalo $[-T,T]$ da elementos de $C([-T,T])$, y lo mismo se mantiene para sus valores absolutos $|f|$ y $|g|$, dado que $f$ y $g$ son funciones continuas y la función $|\cdot|$ es continua.

Primero, demostremos que $\langle f,g\rangle$ converge, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (ver Lema 1.2.10). Como la desigualdad de Cauchy-Schwarz se mantiene para elementos del espacio vectorial $C([-T,T])$, podemos calcular

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} |f(x)\overline{g(x)}|dx &= \int_{-T}^{T} |f(x)||\overline{g(x)}|dx\\
&= |\langle |f|,|g|\rangle_T|\\
&\le \|f\|_{2,T}\|g\|_{2,T}, \quad \text{por la desigualdad de Cauchy-Schwarz}\\
&= \sqrt{\int_{-T}^{T}|f(x)|^2dx\int_{-T}^{T}|g(x)|^2dx}\\
&\le \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx}\\
&= \|f\|_2\|g\|_2\\
\Rightarrow \int_{-T}^{T} |f(x)\overline{g(x)}|dx &\le \|f\|_2\|g\|_2.
\end{aligned}$$

Así la integral es acotada por una constante que no depende de $T$, lo cual implica que la integral converge cuando $T$ tiende a infinito.

Ahora se demostrará que $\langle f, g\rangle$ define un producto interno en $L^2_{bc}(\mathbb{R})$, es decir, que cumple con las propiedades de la Definición 1.1.9. Sean $f, g, h \in L^2_{bc}(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces

- Verificando que se cumple (IP1).

$$\begin{aligned}
\langle \alpha f + \beta g, h\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)]\overline{h(x)}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(x)\overline{h(x)} + \beta g(x)\overline{h(x)}]dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x)\overline{h(x)}dx + \int_{-\infty}^{\infty} \beta g(x)\overline{h(x)}dx \\
&= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{h(x)}dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{h(x)}dx \\
\langle \alpha f + \beta g, h\rangle &= \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle.
\end{aligned}$$

- Verificando que se cumple (IP2).

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{[f(x)\overline{g(x)}]}}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{[\overline{f(x)\overline{g(x)}]}}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{[\overline{f(x)}g(x)]}dx \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x)]dx} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{f(x)}]dx} \\
\langle f, g\rangle &= \overline{\langle g, f\rangle}.
\end{aligned}$$

- Verificando que se cumple (IP3).

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \geq 0 \\
\Rightarrow \langle f, f\rangle &\geq 0.
\end{aligned}$$

  Por último:

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x)}dx = 0 \\
\Rightarrow |f(x)|^2 &= 0 \\
\Rightarrow f(x) &= 0, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow f &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\langle ., .\rangle$ define un producto interno en $L^2_{bc}(\mathbb{R})$. Para la última parte, sea $f \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$. Entonces $f$ es acotada, es decir que, existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$|f(x)|^2 \leq C|f(x)|,$$

lo cual implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx = C\|f\|_1,$$

y así la primer integral es finita, es decir, $f \in L^2_{bc}(\mathbb{R})$.

■

Por este lema, concluimos que $L^1_{bc}(\mathbb{R})$ es un espacio pre-Hilbert. Escribimos $L^2(\mathbb{R})$ para su completación.

**Lema 3.5.3** ***(Teorema de Plancherel)*** Para cada $f \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$ tenemos que $\hat{f} \in L^2_{bc}(\mathbb{R})$ y

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$

En particular, la transformada de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ se extiende a una aplicación unitaria $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

**Demostración:**

Sea $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ y sea $g = \tilde{f} * f$. Entonces

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(y-x)} f(y) dy,$$

así que

$$g(0) = \|f\|_2^2.$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{\hat{f}(t)} &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x t} dx} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x) e^{-2\pi i x t}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{2\pi i x t} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)} e^{-2\pi i x t} dx, \quad \text{sustituimos } x = -x \\
\overline{\hat{f}(t)} &= \hat{\tilde{f}}(t).
\end{aligned}$$

Luego, por literal (c) del Teorema 3.3.2, tenemos

$$\hat{g}(t) = \hat{\tilde{f}}(t)\hat{f}(t) = \overline{\hat{f}(t)}\hat{f}(t) = |\hat{f}(t)|^2.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= g(0)\\
&= \lim_{\lambda\to 0} g * h_\lambda(0), \quad \text{por Lema 3.4.3}\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|}\hat{g}(t)dt\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|}|\hat{f}(t)|^2dt\\
\|f\|_2^2 &= \|\hat{f}\|_2^2,
\end{aligned}$$

por el teorema de convergencia monótona (Lema 3.1.4).

■

## 3.6. La fórmula de la serie de Poisson.

En esta sección reunimos el análisis de Fourier en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para obtener la fórmula de la serie de Poisson.

**Teorema 3.6.1** Sea $f \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$ y asuma que $f$ es continuamente diferenciable por partes con la posible excepción de un conjunto numerable de puntos. Sea

$$\varphi(x) = \begin{cases} f'(x), & \text{si esta existe}\\ 0, & \text{en otro caso,}\end{cases}$$

y asumiendo que $x^2f(x)$ y $x^2\varphi(x)$ son acotadas. Entonces la **fórmula de la serie de Poisson**

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)$$

se cumple.

**Demostración:**

Sea $g(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)$ y como $x^2f(x)$ es acotada, digamos por $C$ entonces

$$\begin{aligned}
|x^2f(x)| &= x^2|f(x)| \le C\\
\Rightarrow |f(x+k)| &\le \frac{C}{(x+k)^2}\\
\Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(x+k)| &\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+k)^2} < \infty, \quad \text{por ser una serie } p.
\end{aligned}$$

Así, la serie $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)$ converge uniformemente por el Test-M de Weierstrass (ver Ejemplo 1.4.6), para dar una función continua $g$. Del mismo modo, la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x+k)$ converge a una función continua por partes $\tilde{g}$. Además

$$\begin{aligned}\int_0^x \varphi(t)\ dt &= \int_0^x f'(t)\ dt = f(x) - f(0)\\ \Rightarrow f(x) &= \int_0^x \varphi(t)\ dt + f(0),\end{aligned}$$

se deduce que

$$\begin{aligned}\int_0^x \tilde{g}(t)dt &= \int_0^x \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(t+k)\ dt\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^x \varphi(t+k)\ dt\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{x+k} \varphi(t)\ dt\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} [f(x+k) - f(k)]\\ \int_0^x \tilde{g}(t)\ dt &= g(x) - g(0),\end{aligned}$$

donde se nos permitió intercambiar integración y suma porque la suma converge uniformemente. De ello se deduce que $g$ es continuamente diferenciable por partes y, por el Teorema 1.5.3, la serie de Fourier de $g$ converge uniformemente a la función $g$, lo cual implica que la serie de Fourier de $g$ converge puntualmente a $g$, entonces

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g) e^{2\pi ikx},$$

así, para $x = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) &= g(0)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 g(y) e^{-2\pi iky}\ dy\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(y+k) e^{-2\pi iky}\ dy\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(y+k) e^{-2\pi iky}\ dy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i k^2} \int_k^{1+k} f(y) e^{-2\pi i k y}\ dy \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{1+k} f(y) e^{-2\pi i k y}\ dy \\
\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k).
\end{aligned}
$$

La integración y la suma pueden intercambiarse, ya que la suma converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$. Esto termina la prueba de la fórmula de la serie de Poisson.

$\blacksquare$

Como una aplicación de la fórmula de la serie de Poisson, damos una prueba de la ecuación de la serie theta clásica.

**Teorema 3.6.2** Para $t > 0$, sea

$$\Theta(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-t\pi k^2}.$$

Entonces para cada $t > 0$ tenemos

$$\Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

<u>**Demostración:**</u>

Sea $f_t(x) = e^{-t\pi x^2}$. Sabemos que $f \in \mathcal{S}$ por el Lema 3.3.5. Entonces, por el Lema 3.4.7 tenemos $\hat{f}_1 = f_1$. Además, consideremos $\hat{f}_t(y) = \hat{g}(y)$, donde $g(x) = f_1(\sqrt{t}x)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(y) &= \frac{1}{\sqrt{t}} \hat{f}_1\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right), && \text{por literal (d) del Teorema 3.3.2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}} f_1\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right), && \text{por Lema 3.4.7} \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}y\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi y^2}{t}} \\
&= \hat{f}_t(y) \\
\hat{g}(y) &= \frac{1}{\sqrt{t}} f_{1/t}(y).
\end{aligned}
$$

Como $f_t$ pertenece a $\mathcal{S}$, del Teorema 3.6.1 se deduce que

$$
\begin{aligned}
\Theta(t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_t(k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_t(k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{1/t}(k) \\
\Theta(t) &= \frac{1}{\sqrt{t}} \Theta\left(\frac{1}{t}\right).
\end{aligned}
$$

■

# Capítulo 4

# Análisis armónico sobre la esfera.

Ahora nuestro objetivo es mostrar cómo las funciones cuadrado-integrables sobre la esfera admiten una expansión en serie, llamada *serie de Fourier-Laplace*, cuyos términos son polinomios homogéneos armónicos. Para ello se necesitan dos ingredientes. Primero, una condición armónica adecuada (dada por el operador Laplaciano esférico) y segundo que cumpla que sea invariante bajo la acción del grupo topológico, $SO(n)$ u $O(n)$.

También, será necesario definir un una integral invariante en la esfera, bajo la acción de $O(n)$ u $SO(n)$, para así definir el espacio $L^2(S^{n-1})$. Además, daremos ciertas condiciones para que la serie de Fourier-Laplace de una función en la esfera converja uniformemente a la misma función. Por último, demostraremos que la representación de $O(n)$ sobre los espacios de polinomios homogéneos armónicos de grado fijo, es irreducible.

Para ello, es importante mencionar que:

- Las funciones consideradas en este capitulo son *suaves* (infinitamente diferenciables).
- Cuando escribimos que $x \in S^{n-1}$, nos referimos a

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- Cuando escribimos $\|x\|$, nos referimos a

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

## 4.1. Grupos topológicos y acción de $SO(n)$ sobre $S^{n-1}$.

En esta sección comenzaremos definiendo la esfera $S^{n-1}$. Luego, demostraremos que $SO(n)$ es un grupo topológico y definiremos una acción de $SO(n)$ sobre la esfera $S^{n-1}$. A partir de ello, obtendremos dos resultados importantes.

**Definición 4.1.1** Para un entero positivo $n$, una ***n-esfera*** de radio $r$, se define como el conjunto de puntos en el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$ que están a una distancia $r$ de un punto central, donde el radio $r$ es cualquier número real positivo, es decir que,

$$S^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = r\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

**Definición 4.1.2** Para un entero positivo $n$, definimos la ***$(n-1)$-esfera unitaria*** como el conjunto de puntos en el espacio $\mathbb{R}^n$ que están a una distancia $r = 1$ del origen. La simbolizamos por $\boldsymbol{S^{n-1}}$ y la expresamos como

$$S^{n-1} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Para abreviar, en lugar de decir la $(n-1)$-esfera, diremos simplemente la ***esfera***.

**Ejemplo 4.1.3** $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

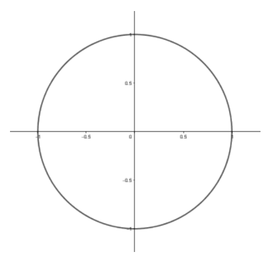

Figura 4.1: La $S^1$ esfera es el círculo unitario.

**Ejemplo 4.1.4** $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

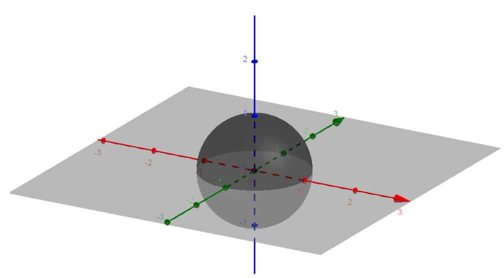

Figura 4.2: La $S^2$ esfera es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$.

**Definición 4.1.5** Sea $n \in \mathbb{N}$. Simbolizamos por $\boldsymbol{M_n}(\mathbb{R})$ al ***conjunto de matrices cuadradas $\boldsymbol{n \times n}$*** definidas de la siguiente manera

$$M_n(\mathbb{R}) = \left\{ a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| \ a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Definición 4.1.6** Llamamos ***grupo lineal general de matrices***, simbolizado por $\boldsymbol{GL_n}(\mathbb{R})$, al espacio de matrices reales de $n \times n$ con determinante distinto de cero (invertibles), es decir,

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det a \neq 0\}.$$

**Definición 4.1.7** Llamamos ***grupo ortogonal***, simbolizado como $\boldsymbol{O(n)}$, al espacio de matrices reales de $n \times n$ invertibles y que su inversa es igual a su matriz transpuesta , es decir,

$$O(n) = \left\{a \in GL_n(\mathbb{R}) \mid aa^\top = a^\top a = 1_n\right\},$$

donde $1_n$ es la matriz identidad.

**Definición 4.1.8** Llamamos ***grupo lineal especial***, simbolizado como $\boldsymbol{SL(n)}$, al espacio de matrices reales de $n \times n$ invertibles, tal que su determinante es 1, es decir,

$$SL(n) = \{a \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det a = 1\}.$$

**Definición 4.1.9** Llamamos ***grupo ortogonal especial***, simbolizado como $\boldsymbol{SO(n)}$, al espacio de matrices reales de $n \times n$ invertibles, tal que su determinante es 1 y que la inversa es igual a su matriz transpuesta, es decir,

$$SO(n) = \left\{a \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det a = 1 \text{ y } aa^\top = 1_n\right\} = SL(n) \cap O(n).$$

**Ejemplo 4.1.10** Consideremos la matriz

$$a = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{aligned} aa^\top &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta & -\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ aa^\top &= 1_2, \end{aligned}$$

además

$$\det a = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1,$$

de manera que $a \in SO(2)$.

**Definición 4.1.11** Se dice que un conjunto no vacío $G$ es un ***grupo*** si en él hay definida una operación $*$ tal que

(G1) Si $a, b \in G$ implica que $a * b \in G$.
(Esto se describe diciendo que $G$ es *cerrado* respecto a $*$.)

(G2) Dados $a, b, c \in G$ se tiene que $a * (b * c) = (a * b) * c$.
(Esto se describe diciendo que es válida la *ley asociativa* en $G$.)

(G3) Existe un elemento especial $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$, para cada $a \in G$.
(Este elemento $e$ es llamado *identidad* o *unidad* en $G$.)

(G4) Para todo $a \in G$, existe un elemento $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$.
(Este elemento $b$ se escribe como $a^{-1}$ y se llama *inverso* de $a$ en $G$.)

**Ejemplo 4.1.12** Consideremos el espacio $GL_n(\mathbb{R})$ de la Definición 4.1.6. Este espacio es un grupo, con la operación $*$, como la multiplicación de matrices ordinaria.

**Definición 4.1.13** Sea $G$ un grupo. Un subconjunto no vacío $A \subset G$ es un ***subgrupo*** de $G$ si:

(SG1) $A$ es cerrado respecto a la operación $*$ de $G$, es decir, si $a, b \in A$ implica que $a * b \in A$.

(SG2) Dado $a \in A$, entonces $a^{-1} \in A$.

De ahora en adelante expresaremos el producto $a * b$ en un grupo $G$ simplemente como $ab$ para cada $a, b \in G$.

**Ejemplo 4.1.14** Consideremos el espacio $O(n)$ de la Definición 4.1.7. Verifiquemos que $O(n)$ es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$. Sean $a, b \in O(n)$, entonces

$$\begin{aligned}
(ab)(ab)^\top &= ab\ b^\top a^\top \\
&= a(bb^\top)a^\top \\
&= a\ 1_n\ a^\top, \quad \text{ya que } b \in O(n) \\
&= (a1_n)a^\top \\
&= aa^\top \\
(ab)(ab)^\top &= 1_n, \quad \text{ya que } b \in O(n).
\end{aligned}$$

Así, $ab \in O(n)$. Además, si $a \in O(n)$, entonces

$$\begin{aligned}
a^{-1}(a^{-1})^{\top} &= a^{-1}(a^{\top})^{-1} \\
&= (a^{\top}a)^{-1} \\
&= (1_n)^{-1}, \quad \text{ya que } a \in O(n) \\
a^{-1}(a^{-1})^{\top} &= 1_n,
\end{aligned}$$

por lo que $a^{-1} \in O(n)$. Por lo tanto, $O(n)$ es subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$.

**Ejemplo 4.1.15** Sea $SL(n)$ el espacio de la Definición 4.1.8. Para verificar que $SL(n)$ es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$, basta recordar que si $a, b \in GL_n(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned}
\det(ab) &= (\det a)(\det b) \\
\det(a^{-1}) &= \frac{1}{\det a}.
\end{aligned}$$

Luego, si $a, b \in SL(n)$, entonces

$$\det(ab) = (\det a)(\det b) = (1)(1) = 1,$$

por lo que $ab \in SL(n)$. Además, si $a \in SL(n)$, entonces

$$\det(a^{-1}) = \frac{1}{\det a} = \frac{1}{1} = 1,$$

por lo que $a^{-1} \in SL(n)$. Por lo tanto, $SL(n)$ es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$.

**Ejemplo 4.1.16** Por último, a partir del Ejemplo 4.1.14 y del Ejemplo 4.1.15, se verifica que el espacio $SO(n)$ de la Definición 4.1.9 es subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$.

**Definición 4.1.17** Se dice que un grupo $G$ es ***abeliano*** si para cada $a, b \in G$, tenemos que $ab = ba$.

**Ejemplo 4.1.18** El conjunto $\mathbb{R}$, con la operación " $+$ ", es un grupo abeliano.

**Ejemplo 4.1.19** El toro unitario de la ecuación (1.4), definido como

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

es un grupo abeliano con la operación " $\times$ " en $\mathbb{C}$.

**Ejemplo 4.1.20** El grupo $GL_n(\mathbb{R})$ del Ejemplo 4.1.12 no es abeliano para $n \geq 2$.

Tanto el círculo como la línea real son grupos y son abelianos. Estas dos características prestan simplicidad a su análisis armónico. Por el contrario, como era de esperarse, el análisis armónico relacionado con grupos no abelianos es más complicado.

Una complicación inmediata es que si $G$ no es un grupo abeliano, entonces no todos los subgrupos de $G$ son normales, por lo que no todos los cocientes $G/H$ (con $H$ subgrupo de $G$) son grupos. Esto ya tiene consecuencias para los cocientes de grupos finitos. Por el contrario, el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de la línea real por los enteros presenta el círculo como un grupo, no simplemente como un espacio cociente de un grupo.

**Definición 4.1.21** Una ***topología*** sobre un conjunto $X$ es una colección $\mathscr{T}$ de subconjuntos de $X$ con las siguientes propiedades

(T1) $\emptyset$ y $X$ están en $\mathscr{T}$.

(T2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathscr{T}$ está en $\mathscr{T}$.

(T3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathscr{T}$ está en $\mathscr{T}$.

Un conjunto $X$ para el que se ha definido una topología $\mathscr{T}$ se llama ***espacio topológico*** y se escribe como $(X, \mathscr{T})$. A los elementos de $\mathscr{T}$ se les llama ***conjuntos abiertos***.

**Definición 4.1.22** Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice que es un ***espacio-$T_1$*** si para cada par de puntos distintos $x, y$ en $X$ existen conjuntos abiertos $U$ y $V$ tal que $x \in U$, $y \notin U$, $y \in V$, $x \notin V$.

**Definición 4.1.23** Decimos que un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es de ***Hausdorff*** si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos disjuntos $U$ y $V$ tales que $x \in U$ e $y \in V$.

**Definición 4.1.24** Un ***grupo topológico*** $G$, es un espacio topológico de Hausdorff junto con una estructura de grupo, tal que la aplicación de $G \times G$ a $G$ enviando $(x, y) \mapsto xy$, y la aplicación de $G$ a $G$ que envía $x \mapsto x^{-1}$, son aplicaciones continuas.

**Ejemplo 4.1.25** Consideremos el grupo $GL_n(\mathbb{R})$ del Ejemplo 4.1.12. Como $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$ (son isométricamente homeomorfos) y este último es un espacio topológico metrizable, entonces $M_n(\mathbb{R})$ también es un espacio topológico metrizable. Luego, como $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$, entonces $GL_n(\mathbb{R})$ es un espacio topológico metrizable y por tanto, también es de Hausdorff.

Verifiquemos que la aplicación de $GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R})$ a $GL_n(\mathbb{R})$ enviando $(a, b) \mapsto ab$ es una aplicación continua. Si $a, b \in GL_n(\mathbb{R})$ con $a = (a_{ij})$ y $b = (b_{ij})$, entonces el $(i, j)$-ésimo elemento de $ab$ es

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

la cual es una combinación lineal de números reales. Por lo tanto, dicha aplicación es continua.

Sólo falta verificar que la aplicación de $GL_n(\mathbb{R})$ a $GL_n(\mathbb{R})$ enviando $a \mapsto a^{-1}$ es continua. Sea $a = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R})$. Recordemos que el determinante de una matriz $a$, $\det a$, siempre nos da un número real, entonces el determinante es una función continua. Además, sea $M_{ij}$ la submatriz de $a$ de tamaño $(n-1) \times (n-1)$, obtenida al eliminar la $i$-ésima fila y la $j$-ésima columna de $a$. El determinante, $\det(M_{ij})$, se denomina el menor de $a_{ij}$. El cofactor $A_{ij}$ se define como

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

Luego, la la matriz adjunta de $a$, $\mathrm{adj}(a)$, es la matriz cuyo $(i, j)$-ésimo elemento es el cofactor $A_{ji}$ de $a_{ji}$, es decir,

$$\mathrm{adj}(a) = (A_{ji}) = (A_{ij})^{\top}.$$

Es decir que, la matriz $\mathrm{adj}(a)$ es obtenida a partir del determinante de $a$, el cual sabemos que es una función continua. Como $a \in GL_n(\mathbb{R})$, entonces $\det(a) \neq 0$, de esta forma, la función

$$\begin{aligned} f : GL_n(\mathbb{R}) &\to GL_n(\mathbb{R}) \\ a &\mapsto a^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(a)}{\det(a)} \end{aligned}$$

es continua, por ser el cociente de funciones continuas.

Por lo tanto, $GL_n(\mathbb{R})$ es un grupo topológico. Y como $GL_n(\mathbb{R})$ es un espacio topológico metrizable, diremos que es un **grupo topológico metrizable**.

**Definición 4.1.26** Sea $G$ un grupo topológico. Decimos que $H$ es un ***subgrupo topológico*** de $G$, si $H$ es subgrupo de $G$ con la topología inducida por $G$.

**Ejemplo 4.1.27** Sabemos que $O(n)$, $SL(n)$ y $SO(n)$ son subgrupos del grupo $GL_n(\mathbb{R})$. Ya que $GL_n(\mathbb{R})$ es un grupo topológico, entonces $O(n)$, $SL(n)$ y $SO(n)$ son subgrupos topológicos de $GL_n(\mathbb{R})$.

**Definición 4.1.28** Una ***acción grupal derecha*** o ***acción*** de un grupo topológico $G$ sobre un espacio topológico $X$, es una aplicación continua de $G \times X$ a $X$ enviando $(g, x) \mapsto x \cdot g$, para todo $g \in G$ y para todo $x \in X$, que satisface las siguientes propiedades

(AG1) $x \cdot (g_1 g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$, para cada $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$.

(AG2) $x \cdot e = x$, para cada $x \in X$ y donde $e$ es la identidad en $G$.

**Lema 4.1.29** El grupo topológico $SO(n)$ define una acción sobre $S^{n-1}$ mediante la multiplicación de matrices a la derecha, es decir,

$$\begin{aligned} \mu : SO(n) \times S^{n-1} &\to S^{n-1} \\ (k, x) &\mapsto xk, \end{aligned}$$

donde $k \in SO(n)$, $x \in S^{n-1}$ y consideramos $x$ como un **vector fila**.

**Demostración:**

Verifiquemos que se cumplen las propiedades de la Definición 4.1.28. Sean $k_1, k_2, 1_n \in SO(n)$ y $x \in S^{n-1}$.

- Verificando que se cumple la propiedad (AG1).

$$\begin{aligned} x \cdot (k_1 k_2) &= x(k_1 k_2) \\ &= (xk_1)k_2, \quad \text{donde } xk_1 \in S^{n-1} \\ x \cdot (k_1 k_2) &= (x \cdot k_1) \cdot k_2, \quad \text{donde } (xk_1)k_2 \in S^{n-1}. \end{aligned}$$

- Verificando que se cumple la propiedad (AG2).

$$x \cdot 1_n = x 1_n = x.$$

Resta probar la continuidad de $\mu$, pero, dado que $xk \in S^{n-1}$ para cada $k \in SO(n)$ y cada $x \in S^{n-1}$, entonces $\mu$ es continua. Por lo tanto, $SO(n)$ actúa sobre $S^{n-1}$.

■

**Definición 4.1.30** Sea $G$ un grupo topológico y $X$ un espacio pre-Hilbert (real o complejo). Decimos que la acción de $G$ sobre $X$ es una ***acción unitaria*** si

$$\langle k \cdot x, k \cdot y \rangle = \langle x, y \rangle,$$

para cada $k \in G$ y cada $x, y \in X$.

Definimos el producto interno usual en $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ como

$$\langle x, y \rangle = xy^\top, \quad \text{para vectores fila } x, y \in S^{n-1},$$

podemos verificar que la acción del Lema 4.1.29 es unitaria, como demostraremos a continuación.

**Lema 4.1.31** La acción de $SO(n)$ sobre $S^{n-1}$ es unitaria.

<u>**Demostración:**</u>

Sea $k \in SO(n)$ y sean $x, y \in S^{n-1}$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle k \cdot x, k \cdot y \rangle &= \langle xk, yk \rangle \\
&= xk(yk)^\top \\
&= xk\ k^\top y^\top \\
&= x(kk^\top)y^\top \\
&= x(1_n)y^\top, \quad \text{ya que } k \in SO(n) \\
&= xy^\top \\
\langle k \cdot x, k \cdot y \rangle &= \langle x, y \rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la acción de $SO(n)$ sobre $S^{n-1}$ es unitaria.

■

Observemos que para cualquier $k \in O(n)$ tenemos que

$$(\det k)^2 = \det k^\top\ \det k = \det(k^\top k) = \det 1_n = 1.$$

Por lo tanto, $\det k = \pm 1$.

**Definición 4.1.32** Una acción de un grupo topológico $G$ sobre un espacio topológico $X$, se dice que es ***transitiva*** si, para cada $x, y \in X$ existe un elemento $g \in G$ tal que $(g, x) \mapsto x \cdot g = y$.

A continuación, uno de los resultados importantes de esta sección.

**Lema 4.1.33** La acción de $SO(n)$ sobre $S^{n-1}$ es transitiva.

<u>**Demostración:**</u>

Probaremos que, dado $x \in S^{n-1}$ existe $k \in SO(n)$ tal que $e_1 k = x$, donde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ es la base estándar de $\mathbb{R}^n$ y $e_i \in S^{n-1}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Primero, calculemos $e_1 k$

$$\begin{aligned}
e_1 k &= x \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es decir, construimos $k \in SO(n)$ de modo que la primer fila de $k$ es $x$. De hecho, completamos $x$ para una $\mathbb{R}$-base $\mathscr{B} = \{x, x_2, \ldots, x_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.

Como $k$ es ortogonal sí y sólo sí las filas (y columnas) de $k$ forman un conjunto ortonormal de vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces necesitamos ortonormalizar la base $\mathscr{B}$. Para ello usaremos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt análogo a como se hizo en el Lema 2.1.17, resultando así una base ortonormal $\mathscr{B}^{\perp} = \{x, u_2, \ldots, u_n\}$ (ya que $x = u_1$) de $\mathbb{R}^n$. Ahora, basta considerar

$$\begin{aligned} u_1 &= \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} = x, \\ u_i &= \begin{pmatrix} k_{i1} & k_{i2} & \ldots & k_{in} \end{pmatrix}, \quad \text{para } i = 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

como las filas de $k$. Así, hemos construido $k$ de tal manera que $e_1 k = x$. Por último, para que dicha $k$ esté en $SO(n)$, el determinante debe de ser 1. Para asegurarse de que sea 1, reemplace $u_n$ por $-u_n$ de ser necesario. Esto no cambia el hecho que $e_1 k = x$, dando así la transitividad.

$\blacksquare$

**Definición 4.1.34** Sea $G$ un grupo topológico que actúa sobre un espacio topológico $X$. Sea $x \in X$, definimos el ***subgrupo de isotropía*** de $G$ inducido por $x$, escrito como $G_x$, como

$$G_x = \{g \in G \mid (g, x) \mapsto x \cdot g = x\}.$$

Verifiquemos que $G_x$ es un subgrupo de $G$, es decir, que cumple con las propiedades de la Definición 4.1.13. Sean $g, g_1, g_2 \in G$ y $e$ la unidad de $G$.

- Verificando que se cumple la propiedad (SG1).

$$\begin{aligned} g_1, g_2 \in G_x \Rightarrow (g_1 g_2, x) &\mapsto x \cdot (g_1 g_2) \\ &= (x \cdot g_1) \cdot g_2 \\ &= x \cdot g_2, \quad \text{ya que } g_1 \in G_x \\ \Rightarrow (g_1 g_2, x) &\mapsto x, \quad \text{ya que } g_2 \in G_x. \end{aligned}$$

  Así, $g_1 g_2 \in G_x$.

- Verificando que se cumple la propiedad (SG2).

$$\begin{aligned} g \in G_x \text{ y } e \in G \Rightarrow (e, x) &\mapsto x \cdot e = x \\ &= x \cdot (g g^{-1}), \quad \text{ya que } e = g g^{-1} = g^{-1} g \\ &= (x \cdot g) \cdot g^{-1} \\ &= x \cdot g^{-1}, \quad \text{ya que } g \in G_x \\ \Rightarrow (g_1 g_2, x) &\mapsto x. \end{aligned}$$

  Así, $g^{-1} \in G_x$. Por lo tanto, $G_x$ es un subgrupo de $G$.

**Lema 4.1.35** Si $G$ un grupo topológico que actúa sobre un espacio topológico $X$ de manera transitiva, entonces todos los subgrupos de isotropía son isomorfos entre sí.

**Demostración:**

Sean $x, y \in X$. El subgrupo de isotropía de $x$ e $y$ son

$$\begin{aligned} G_x &= \{g \in G \mid (g, x) \mapsto x \cdot g = x\} \\ G_y &= \{h \in G \mid (h, y) \mapsto y \cdot h = y\}, \end{aligned}$$

respectivamente. Antes, demostremos que $G_x$ y $G_y$ son conjugados, es decir que $G_y = k^{-1}G_x k$, donde $k \in G$. Como $G$ actúa de manera transitiva sobre $X$, entonces existe $k \in G$ tal que $x \cdot k = y$. Observemos que

$$\begin{aligned} h \in G_y &\Leftrightarrow y \cdot h = y \\ &\Leftrightarrow (x \cdot k) \cdot h = x \cdot k \\ &\Leftrightarrow x \cdot (kh) = x \cdot k \\ &\Leftrightarrow [x \cdot (kh)] \cdot k^{-1} = x \\ &\Leftrightarrow x \cdot (khk^{-1}) = x \\ &\Leftrightarrow khk^{-1} \in G_x \\ &\Leftrightarrow h \in k^{-1}G_x k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $G_y = k^{-1}G_x k$. De este resultado, se deduce además que $G_x = kG_y k^{-1}$. Ahora, basta considerar

$$\begin{aligned} \varphi : G_x &\to G_y \\ g &\rightsquigarrow \varphi(g) = kgk^{-1} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \psi : G_y &\to G_x \\ h &\rightsquigarrow \psi(h) = k^{-1}hk. \end{aligned}$$

Verifiquemos que $\varphi$ es un homomorfismo. Sean $g_1 g_2 \in G_x$ y $e$ la unidad en $G$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi(g_1 g_2) &= k(g_1 g_2)k^{-1} \\ &= kg_1(e)g_2k^{-1} \\ &= kg_1(k^{-1}k)g_2k^{-1} \\ &= (kg_1k^{-1})(kg_2k^{-1}) \\ \varphi(g_1 g_2) &= \varphi(g_1)\varphi(g_2). \end{aligned}$$

Por lo que $\varphi$ es un homomorfismo. De forma análoga se verifica que $\psi$ es un homomorfismo. Ahora, observemos que

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(h) = \varphi(\psi(h)) = \varphi(k^{-1}hk) = k(k^{-1}hk)k^{-1} = h \\ (\psi \circ \varphi)(g) = \psi(\varphi(g)) = \psi(kgk^{-1}) = k^{-1}(kgk^{-1})k = g. \end{aligned}$$

Es decir, $\psi = \varphi^{-1}$. De manera que $\varphi$ es biyectiva y por tanto, $\varphi$ es un isomorfismo.

■

Ahora, por el Lema 4.1.33, sabemos que el grupo topológico $SO(n)$ define una acción transitiva sobre la esfera $S^{n-1}$. Así, por el Lema 4.1.35, sabemos que todos los subgrupos de isotropía son isomorfos entre sí, de manera que, elegimos calcular el subgrupo de isotropía de $e_n = (0, 0, \dots, 1) \in S^{n-1}$, el último vector de la base estándar, definido como sigue

$$SO(n)_{e_n} = \{k \in SO(n) \mid (k, e_n) \mapsto e_n \cdot k = e_n\}. \tag{4.1}$$

**Definición 4.1.36** Sean $X$ e $Y$ espacios topológicos; sea $f : X \to Y$ una biyección. Si la función $f$ y la función inversa $f^{-1} : Y \to X$ son continuas, entonces $f$ se dice que es un ***homeomorfismo***.

**Corolario 4.1.37** Podemos escribir el subgrupo de isotropía de $e_n$ de la ecuación (4.1) como

$$SO(n)_{e_n} = \left\{ k = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in SO(n-1), e_n \cdot k = e_n \right\} \approx SO(n-1).$$

<u>**Demostración:**</u>

Para $k \in SO(n)$ tenemos que

$$\begin{aligned} e_n k &= e_n \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1. \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, como $k \in SO(n)$ sí y sólo sí las filas y columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, entonces significa que $k$ tiene la forma

$$k = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1(n-1)} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{(n-1)1} & k_{(n-1)2} & \dots & k_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

además, por la propiedad de ortonormalidad de $k$, para

$$\begin{aligned} k_i &= \begin{pmatrix} k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{i(n-1)} & k_{in} \end{pmatrix}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, (n-1) \text{ y donde } k_{in} = 0 \\ e_n &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{n(n-1)} & k_{nn} \end{pmatrix} = k_n, \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle k_i, k_j \rangle &= \begin{pmatrix} k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{i(n-1)} & k_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{j1} \\ k_{j2} \\ \vdots \\ k_{j(n-1)} \\ k_{jn} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{r=1}^{n} k_{ir} k_{jr} \\
\Rightarrow \langle k_i, k_j \rangle &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}
\end{aligned}$$

y también

$$\langle e_n, k_i \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_{i2} \\ \vdots \\ k_{i(n-1)} \\ k_{in} \end{pmatrix} = 0, \quad \text{ya que } i \neq n.$$

Ahora, si a $k$ le quitamos la última fila y columna, obtenemos una matriz $A$ de la forma

$$A = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1(n-1)} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(n-1)1} & k_{(n-1)2} & \dots & k_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix},$$

tal que, para

$$k_i' = \begin{pmatrix} k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{i(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, (n-1),$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle k_i', k_j' \rangle &= \begin{pmatrix} k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{i(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{j1} \\ k_{j2} \\ \vdots \\ k_{j(n-1)} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{r=1}^{n-1} k_{ir} k_{jr} \\
&= \sum_{r=1}^{n-1} k_{ir} k_{jr} + k_{in} k_{j_n}, \quad \text{ya que } k_{in} k_{j_n} = 0 \cdot 0 = 0 \\
&= \sum_{r=1}^{n} k_{ir} k_{jr} \\
\langle k_i', k_j' \rangle &= \langle k_i, k_j \rangle
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle k'_i, k'_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

De manera que las filas de $A$ son ortonormales y forman una base de $\mathbb{R}^{n-1}$, y por tanto $A \in O(n-1)$. Para que $A \in SO(n-1)$, reemplace $k'_{n-1}$ por $-k'_{n-1}$ de ser necesario. De esta forma, podemos redefinir $SO(n)_{e_n}$ de la ecuación (4.1) como

$$SO(n)_{e_n} = \left\{ k = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in SO(n-1), e_n \cdot k = e_n \right\} \approx SO(n-1).$$

■

**Definición 4.1.38** Sea $G$ un grupo topológico que actúa sobre un espacio topológico $X$. Para $x \in X$, definimos la **órbita de** $x$ mediante

$$Gx = \{x \cdot g \mid g \in G\}.$$

Observemos que, si $G$ actúa transitivamente sobre $X$, entonces la órbita de $x \in X$ genera todo el espacio $X$, es decir, $Gx = X$. Verifiquemos este hecho por doble inclusión.

- $Gx \subseteq X$. Esto se deduce inmediatamente de la definición de órbita de $x$.
- $X \subseteq Gx$. Sea $y \in X$. Por hipótesis, sabemos que la acción es transitiva, es decir, que existe $g \in G$ tal que $x \cdot g = y$. Esto último, significa que $y \in Gx$. De manera que $X \subseteq Gx$.

Por lo tanto, $Gx = X$.

De la observación anterior y por el Lema 4.1.33, sabemos que, la órbita de $x \in S^{n-1}$ es

$$SO(n)x = \{x \cdot k \mid k \in SO(n)\} = S^{n-1}. \tag{4.2}$$

**Definición 4.1.39** Sean $X, Y$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua e inyectiva. Sea $Z = f(X)$, considerado como subespacio de $Y$; entonces, la función $g : X \to Z$ obtenida al restringir el rango de $f$, es biyectiva. Si ocurre que $g$ es homeomorfismo de $X$ con $Z$ (es decir, si además $g^{-1} : Z \to X$ es continua), decimos que la aplicación $f : X \to Y$ es un ***embebimiento*** de $X$ en $Y$.

**Definición 4.1.40** Sean $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico, $Y$ un subconjunto de $X$ y $p : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. Entonces

$$\mathscr{U} = \{U \in \mathscr{P}(Y) \mid p^{-1}(U) \in \mathscr{T}\}$$

es una topología sobre $Y$, y es llamada ***topología cociente sobre*** $Y$ ***inducida por*** $p$. El espacio topológico $(Y, \mathscr{U})$ es llamado ***espacio cociente*** de $X$ y la aplicación $p$ es llamada ***aplicación cociente***. La aplicación $p$ es continua y además $\mathscr{U}$ es la topología más fina sobre $Y$ para la cual $p$ es continua.

**Proposición 4.1.41** Si $G$ es un grupo topológico actuando sobre el espacio de Hausdorff $X$, $G_x$ es el grupo de isotropía en $x$ y $G_x$ la órbita de $x$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : G/G_x &\to G_x \\ gG_x &\mapsto x \cdot g, \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

<u>**Demostración:**</u>

Probando que $\phi$ esta bien definida. Sean $x \cdot g_1, x \cdot g_2 \in G$ tales que $g_1 G_x = g_2 G_x$, entonces

$$\begin{aligned} g_1 g_2^{-1} &\in G_x \\ \Rightarrow x \cdot (g_1 g_2^{-1}) &= x \\ \Rightarrow x \cdot g_1 &= x \cdot g_2 \\ \Rightarrow \phi(g_1 G_x) &= \phi(g_2 G_x), \end{aligned}$$

así, $\phi$ está bien definida.

Probando que $\phi$ es inyectiva. Sean $g_1 G_x, g_2 G_x \in G/G_x$ tales que $x \cdot g_1 = x \cdot g_2$, entonces

$$\begin{aligned} x &= x \cdot (g_2 g_1^{-1}) \\ \Rightarrow g_2 g_1^{-1} &\in G_x \\ \Rightarrow g_2 G_x &= g_1 G_x, \end{aligned}$$

así, $\phi$ es inyectiva.

Probando que $\phi$ es sobreyectiva. Sea $x \cdot g \in Gx$. Basta tomar $gG_x \in G/G_x$ tal que

$$\phi(gG_x) = x \cdot g,$$

así, $\phi$ es sobreyectiva. Por lo tanto, $\phi$ es biyectiva.

Probado que $\phi$ es continua. Sea $U$ abierto en $X$, entonces $U \cap Gx$ es abierto en $Gx$, así que

$$\phi^{-1}(U \cap Gx) = \{gG_x \mid x \cdot g \in U \cap Gx\} = \{gG_x \mid x \cdot g \in U\}. \tag{4.3}$$

La última igualdad de conjuntos es cierta, porque todo elemento de la forma $x \cdot g$ vive en $Gx$, así que si tiene la forma $x \cdot g$ ya está en $Gx$ y por eso se puede omitir.
Sea $p$ la aplicación cociente de $G$ sobre $G/G_x$, es decir,

$$\begin{aligned} p : G &\to G/G_x \\ g &\mapsto gG_x, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} p^{-1}(\phi^{-1}(U \cap Gx)) &= \{g \in G \mid p(g) \in \phi^{-1}(U \cap Gx)\} \\ &= \{g \in G \mid gG_x \in \phi^{-1}(U \cap Gx)\} \\ p^{-1}(\phi^{-1}(U \cap Gx)) &= \{g \in G \mid x \cdot g \in U\}, \quad \text{esto por (4.3).} \end{aligned}$$

Sea $\mu$ la acción de $G$ sobre $X$, es decir

$$\begin{aligned}\mu : G \times X &\to X\\ (g, x) &\mapsto x \cdot g,\end{aligned}$$

y sea $\mu|_{\{x\}} : G \times \{x\} \to X$ definida por $(g, x) \mapsto x \cdot g$, es decir que, $\mu|_{\{x\}}$ es la aplicación que nos genera la órbita de $x$. Como $\mu$ es continua, entonces $\mu|_{\{x\}}$ lo es. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned}\pi_1 : G &\to G \times \{x\}\\ g &\mapsto (g, x).\end{aligned}$$

Es fácil verificar que $\pi_1$ es una función continua. Sea $V$ un abierto en $G$, entonces $W = V \times \{x\}$ un abierto de $G \times \{x\}$, de donde $\pi_1(W) = V$, el cual es abierto en $G$. De esta forma, $\pi_1$ es continua.

Ahora, basta tomar $\psi = \mu|_{\{x\}} \circ \pi_1 : G \to X$. Como $\psi$ es una composición de funciones continuas, entonces es continua. Así

$$\psi^{-1}(U) = \{g \in G \mid x \cdot g \in U\}$$

es abierto en $G$, entonces $p^{-1}(\phi^{-1}(U \cap Gx))$ es abierto en $G$, de donde $\phi^{-1}(U \cap Gx)$ es abierto en $G/G_x$ por definición de topología cociente. Por lo tanto, $\phi$ es continua.

Como $p$ es continua, sobreyectiva y $G$ es compacto, entonces $p(G) = G/G_x$ (ver Teorema 26.5 de [4, pág. 189]). Por hipótesis sabemos que $X$ es de Hausdorff, y dado que $Gx \subseteq X$, entonces $Gx$ es de Hausdorff (ver Teorema 17.11 de [4, pág. 113]).

Como $\phi : G/G_x \to Gx$ es biyectiva, continua, $G/G_x$ compacto y $Gx$ de Hausdorff, entonces $\phi$ es un homeomorfismo (ver Teorema 26.6 de [4, pág 189]).

■

**Lema 4.1.42** Demuestre que $SO(n)$ es un grupo topológico compacto.

**Demostración:**

Como $SO(n) \subset GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$, entonces para demostrar que $SO(n)$ es compacto, basta demostrar que es cerrado y acotado. Consideremos $SO(n)$ con la norma dada por

$$\|a\| = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(a^\top a)}.$$

Sea $a \in SO(n)$ una matriz arbitraria, entonces

$$\begin{aligned}\|a\| &= \sqrt{\mathrm{Tr}\,(a^\top a)}\\ &= \sqrt{\mathrm{Tr}\,(1_n)}, \quad \text{ya que } a \in SO(n)\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2}$$
$$\|a\| = \sqrt{n},$$

por lo que $SO(n)$ es acotado.

Para probar que $SO(n)$ es cerrado, antes probaremos que $O(n)$ y $SL(n)$ son cerrados. Como $GL_n(\mathbb{R})$ es un grupo topológico metrizable, entonces $GL_n(\mathbb{R})$ es un espacio de Hausdorff. Esta condición es suficiente para afirmar que para cada $a \in GL_n(\mathbb{R})$, el conjunto $\{a\}$ (visto como un conjunto unipuntual) de $GL_n(\mathbb{R})$ es cerrado (ver Teorema 5.1 de [5, pág. 155]). Ahora, consideremos la siguiente función

$$f : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$$
$$a \mapsto a^\top a,$$

la cual sabemos que es continua por el Ejemplo 4.1.25, y dado que $\{1_n\}$ es cerrado en $GL_n(\mathbb{R})$, entonces $f^{-1}(\{1_n\}) = O(n)$ es cerrado en $GL_n(\mathbb{R})$.

Además, sabemos que

$$g : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$a \mapsto \det(a)$$

es una función continua, entonces $g^{-1}\{1\} = SL(n)$ es cerrado en $GL_n(\mathbb{R})$. Por último, como $SO(n) = O(n) \cap SL(n)$, entonces $SO(n)$ es cerrado, pues es la intersección de dos cerrados. Por lo tanto, $SO(n)$ es compacto.

$\blacksquare$

Sabemos que la esfera $S^{n-1}$ es un espacio de Hausdorff, dado que es un subespacio del espacio de Hausdorff $\mathbb{R}^n$. Como $SO(n)$ es un grupo topológico compacto (por Lema 4.1.42) que actúa sobre el espacio de Hausdorff $S^{n-1}$, entonces por la Proposición 4.1.41 obtenemos el segundo resultado importante de esta sección, que es

$$S^{n-1} \approx \frac{SO(n)}{SO(n-1)}.$$

**Lema 4.1.43** Sea $k \in SO(n)$, $x \in S^{n-1}$ y $f$ una función continua en la esfera $S^{n-1}$. Entonces, la fórmula

$$(k \cdot f)(x) = f(xk),$$

define una acción de $SO(n)$ sobre funciones continuas en la esfera $S^{n-1}$.

**Demostración:**

Verifiquemos que se cumplen las propiedades de la Definición 4.1.28. Sean $k_1, k_2, 1_n \in SO(n)$ y $f$ una función continua en $S^{n-1}$.

- Verificando que se cumple la propiedad (AG1).

$$\begin{aligned}((k_1k_2)\cdot f)(x) &= f(x(k_1k_2)) \\ &= f((xk_1)k_2) \\ &= (k_2\cdot f)(xk_1) \\ ((k_1k_2)\cdot f)(x) &= (k_1\cdot(k_2\cdot f))(x).\end{aligned}$$

- Verificando que se cumple la propiedad (AG2).

$$(1_n\cdot f)(x) = f(x1_n) = f(x).$$

Dicha acción es continua, porque $f$ es continua es $S^{n-1}$. Por lo tanto, dicha fórmula define una acción de $SO(n)$ sobre funciones continuas en la esfera $S^{n-1}$.

■

## 4.2. El Laplaciano esférico $SO(n)$-invariante y funciones homogéneas positivas.

Para probar la existencia del operador Laplaciano en $S^{n-1}$ que sea $SO(n)$-invariante, usamos el embebimiento (ver definición 4.1.39) de la esfera $S^{n-1}$ en $\mathbb{R}^n$. Para ello, primero probaremos que el Laplaciano euclidiano habitual en $\mathbb{R}^n$ es $SO(n)$-invariante.

**Definición 4.2.1** Un ***operador lineal*** $T$ es un operador tal que:

(OL1) El dominio $\mathscr{D}(T)$ de $T$ es un espacio vectorial y el rango $\mathscr{R}(T)$ se encuentra en un espacio vectorial sobre el mismo campo,

(OL2) Para todo $x, y \in \mathscr{D}(T)$ y cualquier escalar $\alpha$,

$$\begin{aligned}T(x+y) &= Tx + Ty \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx.\end{aligned}$$

**Definición 4.2.2** Consideremos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, donde $\alpha_i \in \mathbb{Z}_0^+$ para cada $i = 1, \dots, n$ y, sea $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$. Un ***operador diferencial*** de orden $k$ en $n$ variables, representado por $L$, es un operador lineal de la forma

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha(x) D^\alpha$$

donde $c_\alpha(x)$ son funciones suaves y

$$D^\alpha = \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

**Definición 4.2.3** Una ***función propia*** de un operador lineal $T$, es una función $f$ distinta de cero en $\mathscr{D}(T)$ que satisface

$$Tf = \lambda f,$$

donde $\lambda$ es un escalar y es llamado ***valor propio***.

**Ejemplo 4.2.4** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto e^{2x}$. Consideremos el operador diferencial $D = \frac{d}{dx}$, entonces

$$D(f(x)) = D(e^{2x}) = \frac{d}{dx} e^{2x} = 2e^{2x},$$

donde $e^{2x}$ es la función propia del operador diferencial $D$ y $\lambda = 2$ es el valor propio.

**Definición 4.2.5** Definimos el ***operador Laplaciano*** en $\mathbb{R}^n$ como

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Le llamaremos simplemente **Laplaciano**.

**Ejemplo 4.2.6** Calculemos el Laplaciano de

$$F(x, y) = r^{-3} f(x, y),$$

donde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ y $f(x, y) = x^3 - xy^2$. Calculando las primeras dos derivadas parciales de $r^{-3}$ con respecto a $x$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(r^{-3})}{\partial x} &= \frac{\partial(x^2 + y^2)^{-3/2}}{\partial x} \\
&= (-3/2)(2x)(x^2 + y^2)^{-3/2-1} \\
&= -3x(x^2 + y^2)^{-5/2} \\
\frac{\partial(r^{-3})}{\partial x} &= -3xr^{-5} = r_x \\
\Rightarrow \frac{\partial^2(r^{-3})}{\partial x^2} &= \frac{\partial(-3xr^{-5})}{\partial x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -3r^{-5} - 3x(-5/2)(2x)(x^2+y^2)^{-7/2}\\
&= -3r^{-5} + 15x^2(x^2+y^2)^{-7/2}\\
\frac{\partial^2(r^{-3})}{\partial x^2} &= -3r^{-5} + 15x^2r^{-7} = r_{xx}.
\end{aligned}
$$

Es fácil ver que, las primeras dos derivadas parciales de $r^{-3}$ con respecto a $y$ son

$$
\begin{aligned}
r_y &= -3yr^{-5}\\
r_{yy} &= -3r^{-5} + 15y^2r^{-7}.
\end{aligned}
$$

Calculando las primeras dos derivadas parciales de $f$ con respecto a $x$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial(x^3 - xy^2)}{\partial x}\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - y^2 = f_x\\
\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial(x^3 - xy^2)}{\partial x}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6x = f_{xx}.
\end{aligned}
$$

Calculando las primeras dos derivadas parciales de $f$ con respecto a $y$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial(x^3 - xy^2)}{\partial x}\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= -2xy = f_y\\
\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial(-2xy)}{\partial y}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2x = f_{yy}.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2(r^{-3}f)}{\partial x^2}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(r^{-3}f)}{\partial x}\right)\\
&= \frac{\partial(r_xf + r^{-3}f_x)}{\partial x}\\
&= \frac{\partial(r_xf)}{\partial x} + \frac{\partial(r^{-3}f_x)}{\partial x}\\
&= r_{xx}f + r_xf_x + r_xf_x + r^{-3}f_{xx}\\
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= r_{xx}f + 2r_xf_x + r^{-3}f_{xx}.
\end{aligned}
$$

De forma análoga para $y$, tenemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = r_{yy}f + 2r_y f_y + r^{-3} f_{yy}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\Delta F &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\
&= r_{xx}f + 2r_x f_x + r^{-3} f_{xx} + r_{yy}f + 2r_y f_y + r^{-3} f_{yy} \\
&= (r_{xx} + r_{yy})f + r^{-3}(f_{xx} + f_{yy}) + 2(r_x f_x + r_y f_y) \\
&= (-3r^{-5} + 15x^2 r^{-7} - 3r^{-5} + 15y^2 r^{-7})f + r^{-3}(6x - 2x) \\
&\quad + 2[(-3xr^{-5})(3x^2 - y^2) + (-3yr^{-5})(-2xy)] \\
&= [-6r^{-5} + 15r^{-7}(x^2 + y^2)]f + 4r^{-3}x \\
&\quad + 2(-3r^{-5})[x(3x^2 - y^2) + y(-2xy)] \\
&= (-6r^{-5} + 15r^{-7}r^2)f + 4r^{-3}x + 2(-3r^{-5})(3x^3 - xy^2 - 2xy^2) \\
&= (-6r^{-5} + 15r^{-5})f + 4r^{-3}x + 2(-3r^{-5})(3x^3 - 3xy^2) \\
&= 9r^{-5}f + 4r^{-3}x + 2(-3r^{-5})[3(x^3 - xy^2)] \\
&= 9r^{-5}f + 4r^{-3}x + 2(-3r^{-5})(3f) \\
&= 9r^{-5}f + 4r^{-3}x - 18r^{-5}f \\
\Delta F &= -9r^{-5}f + 4r^{-3}x.
\end{aligned}$$

**Lema 4.2.7** El Laplaciano $\Delta$ es $SO(n)$-invariante, es decir,

$$\Delta((k \cdot F)(x)) = (\Delta F)(x \cdot k) = (k \cdot (\Delta F))(x),$$

donde $F, x \in \mathbb{R}^n$ y $k \in SO(n)$.

**Demostración:**

Podemos considerar $k = (k_{st}) \in O(n)$ donde $s, t = 1, \ldots, n$, con $(i, j)$-ésima entrada $k_{ij}$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Por lo que

$$\begin{aligned}
x \cdot k &= \begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_i, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & \ldots & k_{1j} & \ldots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i1} & \ldots & k_{ij} & \ldots & k_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \ldots & k_{nj} & \ldots & k_{nn} \end{pmatrix} \\
&= (x_1 k_{11} + \cdots + x_i k_{i1} + \cdots + x_n k_{n1}, \cdots, \\
&\quad\ x_1 k_{1j} + \cdots + x_i k_{ij} + \cdots + x_n k_{nj}, \cdots, \\
&\quad\ x_1 k_{1n} + \cdots + x_i k_{in} + \cdots + x_n k_{nn}) \\
&= \left( \sum_{i=1}^n x_i k_{i1}, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^n x_i k_{ij}, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^n x_i k_{in} \right) \\
x \cdot k &= \left( \ldots, \quad \sum_{i=1}^n x_i k_{ij}, \quad \ldots \right).
\end{aligned}$$

Entonces por el Lema (4.1.43), tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta[(k\cdot F)(x)] &= \Delta[F(x\cdot k)]\\
&= \frac{\partial^2 F(x\cdot k)}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 F(x\cdot k)}{\partial x_\ell^2}+\cdots+\frac{\partial^2 F(x\cdot k)}{\partial x_n^2}\\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F\left(\ldots,\ \sum_{i=1}^{n} x_i k_{ij},\ \ldots\right)}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_\ell}\frac{\partial F\left(\ldots,\ \sum_{i=1}^{n} x_i k_{ij},\ \ldots\right)}{\partial x_\ell}+\cdots\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial F\left(\ldots,\ \sum_{i=1}^{n} x_i k_{ij},\ \ldots\right)}{\partial x_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[k_{11}F_1(x\cdot k)+\cdots+k_{1s}F_s(x\cdot k)+\cdots+k_{1n}F_n(x\cdot k)\right]+\cdots+\\
&\quad\frac{\partial}{\partial x_\ell}\left[k_{\ell 1}F_1(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell s}F_s(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell n}F_n(x\cdot k)\right]+\cdots+\\
&\quad\frac{\partial}{\partial x_n}\left[k_{n1}F_1(x\cdot k)+\cdots+k_{ns}F_s(x\cdot k)+\cdots+k_{nn}F_n(x\cdot k)\right] \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sum_{s=1}^{n} k_{1s}F_s(x\cdot k)\right]+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_\ell}\left[\sum_{s=1}^{n} k_{\ell s}F_s(x\cdot k)\right]+\cdots\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\sum_{s=1}^{n} k_{ns}F_s(x\cdot k)\right]
\end{aligned}$$

$$\Delta(k\cdot F)(x) = \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\ell}\left[\sum_{s=1}^{n} k_{\ell s}F_s(x\cdot k)\right],$$

donde $F_s$ es la derivada parcial de $F$ con respecto a su $s$-ésimo argumento. Tomando la siguiente derivada. Calculando desde la ecuación (4.4)

$$\begin{aligned}
\Delta(k\cdot F)(x) &= \left[k_{11}\frac{\partial}{\partial x_1}F_1(x\cdot k)+\cdots+k_{1s}\frac{\partial}{\partial x_1}F_s(x\cdot k)+\cdots+k_{1n}\frac{\partial}{\partial x_1}F_n(x\cdot k)\right]+\cdots+\\
&\quad\left[k_{\ell 1}\frac{\partial}{\partial x_\ell}F_1(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell s}\frac{\partial}{\partial x_l}F_s(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell n}\frac{\partial}{\partial x_l}F_n(x\cdot k)\right]+\cdots+\\
&\quad\left[k_{n1}\frac{\partial}{\partial x_n}F_1(x\cdot k)+\cdots+k_{ns}\frac{\partial}{\partial x_n}F_s(x\cdot k)+\cdots+k_{nn}\frac{\partial}{\partial x_n}F_n(x\cdot k)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta(k\cdot F)(x) = {} & [k_{11}(k_{11}F_{11}(x\cdot k)+\cdots+k_{1t}F_{1t}(x\cdot k)+\cdots+k_{1n}F_{1n}(x\cdot k))+\cdots+\\
& k_{1s}(k_{11}F_{n1}(x\cdot k)+\cdots+k_{1t}F_{st}(x\cdot k)+\cdots+k_{1n}F_{sn}(x\cdot k))+\cdots+\\
& k_{1n}(k_{11}F_{n1}(x\cdot k)+\cdots+k_{1t}F_{nt}(x\cdot k)+\cdots+k_{1n}F_{nn}(x\cdot k))]+\cdots+\\
& [k_{\ell 1}(k_{\ell 1}F_{11}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell t}F_{1t}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell n}F_{1n}(x\cdot k))+\cdots+\\
& k_{\ell s}(k_{\ell 1}F_{s1}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell t}F_{st}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell n}F_{sn}(x\cdot k))+\cdots+\\
& k_{\ell n}(k_{\ell 1}F_{n1}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell t}F_{nt}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell n}F_{nn}(x\cdot k))]+\cdots+\\
& [k_{n1}(k_{n1}F_{11}(x\cdot k)+\cdots+k_{nt}F_{1t}(x\cdot k)+\cdots+k_{nn}F_{1n}(x\cdot k))+\cdots+\\
& k_{ns}(k_{n1}F_{s1}(x\cdot k)+\cdots+k_{nt}F_{st}(x\cdot k)+\cdots+k_{nn}F_{sn}(x\cdot k))+\cdots+\\
& k_{nn}(k_{n1}F_{n1}(x\cdot k)+\cdots+k_{nt}F_{nt}(x\cdot k)+\cdots+k_{nn}F_{nn}(x\cdot k))]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= {} & [(k_{11}k_{11}F_{11}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell 1}k_{\ell 1}F_{11}(x\cdot k)+\cdots+k_{n1}k_{n1}F_{11}(x\cdot k))+\cdots+\\
& (k_{1s}k_{11}F_{s1}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell s}k_{\ell 1}F_{s1}(x\cdot k)+\cdots+k_{ns}k_{n1}F_{s1}(x\cdot k))+\cdots+\\
& (k_{1n}k_{11}F_{n1}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell n}k_{\ell 1}F_{n1}(x\cdot k)+\cdots+k_{nn}k_{n1}F_{n1}(x\cdot k))]+\cdots+\\
& [(k_{11}k_{1t}F_{1t}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell 1}k_{\ell t}F_{1t}(x\cdot k)+\cdots+k_{n1}k_{nt}F_{1t}(x\cdot k))+\cdots+\\
& (k_{1s}k_{1t}F_{st}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell s}k_{\ell t}F_{st}(x\cdot k)+\cdots+k_{ns}k_{nt}F_{st}(x\cdot k))+\cdots+\\
& (k_{1n}k_{1t}F_{nt}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell n}k_{\ell t}F_{nt}(x\cdot k)+\cdots+k_{nn}k_{nt}F_{nt}(x\cdot k))]+\cdots+\\
& [(k_{11}k_{1n}F_{1n}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell 1}k_{\ell n}F_{1n}(x\cdot k)+\cdots+k_{n1}k_{nn}F_{1n}(x\cdot k))+\cdots+\\
& (k_{1s}k_{1n}F_{sn}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell s}k_{\ell n}F_{sn}(x\cdot k)+\cdots+k_{ns}k_{nn}F_{sn}(x\cdot k))+\cdots+\\
& (k_{1n}k_{1n}F_{nn}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell n}k_{\ell n}F_{nn}(x\cdot k)+\cdots+k_{nn}k_{nn}F_{nn}(x\cdot k))]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \sum_{\ell=1}^{n} & [(k_{\ell 1}k_{\ell 1}F_{11}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell s}k_{\ell 1}F_{s1}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell n}k_{\ell 1}F_{n1}(x\cdot k))+\cdots+\\
& (k_{\ell 1}k_{\ell t}F_{1t}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell s}k_{\ell t}F_{st}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell n}k_{\ell t}F_{nt}(x\cdot k))+\cdots+\\
& (k_{l1}k_{\ell n}F_{1n}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell s}k_{\ell n}F_{sn}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell n}k_{\ell n}F_{nn}(x\cdot k))]
\end{aligned}
$$

$$
\Delta(k\cdot F)(x) = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}[k_{\ell s}k_{\ell 1}F_{s1}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell s}k_{\ell t}F_{st}(x\cdot k)+\cdots+k_{\ell s}k_{\ell n}F_{sn}(x\cdot k)]
$$

Por lo tanto,

$$
\Delta(k\cdot F)(x) = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} k_{\ell s}k_{\ell t}F_{st}(x\cdot k),
$$

así, intercambiando el orden de los sumandos, tendremos que

$$
\Delta(k\cdot F)(x) = \sum_{s,t=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} k_{\ell s}k_{\ell t}F_{st}\left(\ldots,\ \sum_{i=1}^{n} x_i k_{ij},\ \ldots\right). \tag{4.5}
$$

Ya que $k=(k_{st})$, entonces $k^{\top}=(k_{ts})$, donde $t,s=1,\ldots,n$. Sea $k'_{st}$ el $(s,t)$-ésimo elemento de $k^\top k$, el cual es

$$k'_{st} = \sum_{\ell=1}^{n} k_{\ell s} k_{\ell t},$$

y como $k \in O(n)$, entonces $k^\top k = 1_n$, de manera que

$$k'_{st} = \sum_{\ell=1}^{n} k_{\ell s} k_{\ell t} = \begin{cases} 1, & \text{si } s = t \\ 0, & \text{si } s \neq t, \end{cases}$$

así, en la ecuación (4.5) tenemos

$$\sum_{s=1}^{n} F_{ss}\left(\ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i k_{ij}, \ldots\right) = (\Delta F)(xk).$$

Por lo tanto, para $F, x \in \mathbb{R}^n$ y $k \in O(n)$ tenemos que

$$\Delta((k \cdot F)(x)) = (\Delta F)(x \cdot k) = (k \cdot (\Delta F))(x),$$

donde la última igualdad la obtenemos por el Lema 4.1.43. Por lo tanto, el lema también debe de cumplirse para $k \in SO(n)$.

■

**Definición 4.2.8** Una función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es ***homogénea*** de grado $s \in \mathbb{R}$ si, para cada $t \in \mathbb{R}$ y para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$F(tx) = t^s F(x).$$

**Ejemplo 4.2.9** Si consideramos la función lineal $f : V \to W$ donde $V$ y $W$ son espacios vectoriales reales, entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$f(tx) = tf(x),$$

es decir que, $f$ es una función homogénea de grado 1.

**Definición 4.2.10** Una función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es ***homogénea positiva*** de grado $s \in \mathbb{R}$ si, para todo $t > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$F(tx) = t^s F(x).$$

**Ejemplo 4.2.11** Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $x\mapsto\sqrt[n]{x}$, donde $n\in\mathbb{N}$. Entonces, para $t>0$ tenemos

$$f(tx)=\sqrt[n]{tx}=\sqrt[n]{t}\,\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{t}\,f(x),$$

de esta forma, $f$ es una función homogénea positiva de grado $\frac{1}{n}$.

**Corolario 4.2.12** Si $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ es una función homogénea positiva de grado $s$ sobre $\mathbb{R}^n$, entonces $\Delta F$ es homogénea positiva de grado $s-2$ sobre $\mathbb{R}^n$.

**Demostración:**

Sea $t>0$. Por hipótesis sabemos que $F(x)$ una función homogénea positiva de grado $s$ sobre $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}
&F(tx)=t^sF(x)\\
&\Rightarrow \frac{\partial F(tx)}{\partial x_j}=\frac{\partial(t^sF(x))}{\partial x_j}\\
&\Rightarrow t\frac{\partial F(tx)}{\partial x_j}=t^s\frac{\partial F(x)}{\partial x_j}\\
&\Rightarrow \frac{\partial F(tx)}{\partial x_j}=t^{s-1}\frac{\partial F(x)}{\partial x_j}, \quad \text{ya que } t>0\\
&\Rightarrow \frac{\partial^2 F(tx)}{\partial x_j^2}=t^{s-1}\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j^2}\\
&\Rightarrow t\frac{\partial^2 F(tx)}{\partial x_j^2}=t^{s-1}\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j^2}\\
&\Rightarrow \frac{\partial^2 F(tx)}{\partial x_j^2}=t^{s-2}\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j^2}, \quad \text{ya que } t>0,
\end{aligned}$$

de manera que

$$\Delta F(tx)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F(tx)}{\partial x_j^2}=t^{s-2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j^2}=t^{s-2}\Delta F(x).$$

Por lo tanto, $\Delta F$ es homogénea positiva de grado $s-2$ sobre $\mathbb{R}^n$.

■

**Corolario 4.2.13** Sea $f$ una función en $S^{n-1}$. Creamos una función $F$ en $\mathbb{R}^n-\{0\}$ a partir de $f$ de la siguiente forma

$$F(x)=f(x/\|x\|), \quad \text{donde } \|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demuestre que $F$ es homogénea positiva de grado 0. Decimos que $F$ es la ***función normalizada*** de $f$.

**Demostración:**

Sea $t > 0$, entonces

$$\begin{aligned} F(tx) &= f(tx/\|tx\|) \\ &= f(tx/t\|x\|), \quad \text{dado que } t > 0 \\ &= f(x/\|x\|) \\ &= F(x) \\ F(tx) &= t^0 F(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $F$ es homogénea positiva de grado 0.

■

Hacemos que $F(x) = f(x/\|x\|)$ sea homogénea positiva de grado 0, en lugar de hacer $\|x\|^s f(x/\|x\|)$ de grado $s$. Por lo tanto, las funciones constantes en la esfera $S^{n-1}$, se convierten en funciones constantes en $\mathbb{R}^n - \{0\}$, y se vuelven cero aplicándoles cualquier operador diferencial. La función normalizada $F$ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ de $f$ en $S^{n-1}$ conmuta con la acción de $SO(n)$, porque

$$\begin{aligned} F(xk) &= f(xk/\|xk\|) \\ &= f((x/\|x\|)k), \quad \text{ya que la acción es unitaria por Lema 4.1.31} \\ F(xk) &= (k \cdot f)(x/\|x\|). \end{aligned}$$

**Definición 4.2.14** Sea $F$ la función normalizada de $f$, como en el Corolario 4.2.13. Definimos al ***Laplaciano esférico*** de $f$ como

$$\Delta^S f = (\Delta F)|_{S^{n-1}}.$$

**Ejemplo 4.2.15** Calculemos el Laplaciano esférico a la función $f$ del Ejemplo 4.2.6, es decir

$$f(x, y) = x^3 - xy^2.$$

Es fácil ver que $f$ es una función homogénea positiva de grado 3. Luego, si $r = (x^2+y^2)^{1/2} \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} F(x, y) &= f(x/r, y/r) \\ &= \frac{1}{r^3} f(x, y) \\ F(x, y) &= r^{-3} f(x, y). \end{aligned}$$

Ahora, necesitamos calcular el Laplaciano euclidiano de $F$, pero por el Ejemplo 4.2.6, sabemos que

$$\Delta F = -9r^{-5} f + 4r^{-3} x.$$

Luego

$$\begin{aligned}\Delta^S f &= (\Delta F)|_{S^1}\\ &= (-9r^{-5}f + 4r^{-3}x)|_{S^1}\\ \Delta^S f &= -9f + 4x, \quad \text{ ya que } r = 1 \text{ en } S^1.\end{aligned}$$

De la definición, está claro que

$$\begin{aligned}\Delta^S\, \overline{f} &= (\Delta\overline{F})|_{S^{n-1}}\\ &= (\overline{\Delta F})|_{S^{n-1}}\\ &= \overline{(\Delta F)|_{S^{n-1}}}\\ \Delta^S\, \overline{f} &= \overline{\Delta^S f}.\end{aligned}$$

La $SO(n)$-invarianza del Laplaciano esférico se deduce de la $SO(n)$-invarianza del Laplaciano habitual, para $k \in SO(n)$

$$\begin{aligned}\Delta^S(k\cdot f) &= (\Delta(k\cdot F))|_{S^{n-1}}\\ &= (k\cdot(\Delta F))|_{S^{n-1}}\\ \Delta^S(k\cdot f) &= k\cdot(\Delta F)|_{S^{n-1}},\end{aligned}$$

dado que la restricción a la esfera conmuta con $SO(n)$, como lo hace $F(x) = f(x/\|x\|)$. Por lo tanto, $\Delta^S$ es $SO(n)$-invariante.

A continuación, una propiedad importante para funciones homogéneas positivas.

**Lema 4.2.16** Sea $f$ una función homogénea positiva de grado $s$ en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = sf.$$

Esta identidad se le conoce como **identidad de Euler**.

<u>**Demostración:**</u>

Sea $t > 0$. Por hipótesis tenemos que

$$f(tx) = t^s f(x),$$

derivando con respecto a $t$ y aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(tx)}{\partial t} &= \frac{\partial(t^s f(x))}{\partial t}\\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(tx)}{\partial tx_i}\frac{\partial(tx_i)}{\partial t} &= \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\frac{\partial f(tx)}{\partial tx_i}\right)\\ &= st^{s-1}f,\end{aligned}$$

así, para $t = 1$ obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = sf.$$

■

En el siguiente lema, calculamos el Laplaciano esférico de una función homogénea positiva de grado $s$ en $\mathbb{R}^n$.

**Lema 4.2.17** Para $f$ homogénea positiva de grado $s$ sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$

$$\Delta(\|x\|^{-s} f) = -s(s+n-2)\|x\|^{-(s+2)} f + \|x\|^{-s} \Delta f.$$

**<u>Demostración:</u>**

Sean $r = \|x\|$ y $f_i$ la derivada parcial con respecto al $i$-ésimo argumento

$$\begin{aligned}
\Delta(\|x\|^{-s} f) &= \Delta((r^2)^{-\frac{s}{2}} f) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} ((r^2)^{-\frac{s}{2}} f) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\frac{s}{2}(2x_i)(r^2)^{-(\frac{s}{2}+1)} f + (r^2)^{-\frac{s}{2}} f_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -s x_i (r^2)^{-(\frac{s}{2}+1)} f + (r^2)^{-\frac{s}{2}} f_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big[ -s(r^2)^{-(\frac{s}{2}+1)} f + s x_i \left( \frac{s}{2} + 1 \right) (2x_i)(r^2)^{-(\frac{s}{2}+2)} f - s x_i (r^2)^{-(\frac{s}{2}+1)} f_i \\
&\quad -\frac{s}{2}(2x_i)(r^2)^{-(\frac{s}{2}+1)} f_i + (r^2)^{-\frac{s}{2}} f_{ii} \Big] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big( -s(r^2)^{-(\frac{s}{2}+1)} f + x_i^2 s(s+2)(r^2)^{-(\frac{s}{2}+2)} f - s x_i (r^2)^{-(\frac{s}{2}+1)} f_i \\
&\quad -s x_i (r^2)^{-(\frac{s}{2}+1)} f_i + (r^2)^{-\frac{s}{2}} f_{ii} \Big) \\
\Delta(\|x\|^{-s} f) &= \sum_{i=1}^{n} \left( -s(r^2)^{-(\frac{s}{2}+1)} f + x_i^2 s(s+2)(r^2)^{-(\frac{s}{2}+2)} f - 2s(r^2)^{-(\frac{s}{2}+1)} (x_i f_i) + (r^2)^{-\frac{s}{2}} f_{ii} \right),
\end{aligned}$$

pero, por la identidad de Euler (Lema 4.2.16), para $f$ homogénea positiva de grado $s$ tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = sf,$$

además sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2 = r^2,$$

entonces

$$\Delta(\|x\|^{-s}f) = -ns(r^2)^{-(\frac{s}{2}+1)}f + r^2 s(s+2)(r^2)^{-(\frac{s}{2}+2)}f - 2s(r^2)^{-(\frac{s}{2}+1)}(sf) + (r^2)^{-\frac{s}{2}}\Delta f,$$

simplificando obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta(\|x\|^{-s}f) &= -nsr^{-(s+2)}f + s(s+2)r^{-(s+2)}f - 2s^2r^{-(s+2)}f + r^{-s}\Delta f \\ &= -s[n-(s+2)+2s]r^{-(s+2)}f + r^{-s}\Delta f, \quad \text{pero } \|x\| = r \\ \Delta(\|x\|^{-s}f) &= -s(s+n-2)\|x\|^{-(s+2)}f + \|x\|^{-s}\Delta f.\end{aligned}$$

■

**Ejemplo 4.2.18** Consideremos nuevamente, la función $f$ del Ejemplo 4.2.6, es decir

$$f(x,y) = x^3 - xy^2.$$

Sabemos que $f$ es una función homogénea positiva de grado 3. Luego, aplicando el Lema 4.2.17 para $n = 2$ y $s = 3$ tenemos

$$\begin{aligned}\Delta(r^{-3}f) &= -3(3+2-2)r^{-(3+2)}f + r^{-3}\Delta f \\ &= -9r^{-5} + r^{-3}(4x) \\ \Delta(r^{-3}f) &= -9r^{-5} + 4r^{-3}x.\end{aligned}$$

Llegando al mismo resultado de $\Delta F$ del Ejemplo 4.2.6 como se esperaba.

**Ejemplo 4.2.19** Calcule el Laplaciano esférico de $f(x) = x_i^2$, el cuadrado de la $i$-ésima coordenada de $x$. Sabemos que $f$ es una función homogénea de grado 2, es decir

$$F(x) = f(x/\|x\|) = \|x\|^{-2}f(x).$$

Luego, por el Lema 4.2.17 obtenemos

$$\Delta F(x) = \Delta(\|x\|^{-2}f) = -2n\|x\|^{-4}f + \|x\|^{-2}\Delta f,$$

pero $\Delta f = 2$, entonces

$$\Delta F(x) = \Delta(\|x\|^{-2}f) = -2n\|x\|^{-4}f + 2\|x\|^{-2} = 2\|x\|^{-2}(1 - n\|x\|^{-2}f).$$

Por último, para $\|x\| = 1$ tenemos

$$\Delta^S f = (\Delta F)|_{S^{n-1}} = 2(1 - nf).$$

## 4.3. Polinomios armónicos.

Una vez que tenemos conocimiento de las funciones homogéneas positivas de grado $s$, para extender las funciones desde la esfera $S^{n-1}$ al espacio $\mathbb{R}^n$, nos orientamos en ver cómo se comporta el Laplaciano esférico.

**Definición 4.3.1** Una función $f$ en $\mathbb{R}^n$ se dice que es una ***función armónica*** si

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0.$$

**Ejemplo 4.3.2** Consideremos la función $f(x, y) = 5x - 3xy$ definida en $\mathbb{R}^2$. Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial(5x - 3xy)}{\partial x} = \frac{\partial(5 - 3y)}{\partial y} = 0 \quad \text{y,} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial(5x - 3xy)}{\partial y} = \frac{\partial(-3x)}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

así, $\Delta f = 0$. Por lo tanto $f(x, y) = 5x - 3xy$ es una función armónica en $\mathbb{R}^2$.

**Corolario 4.3.3** Para $f$ homogénea positiva de grado $s$ y armónica, la restricción $f|_{S^{n-1}}$, es una función propia para $\Delta^S$,

$$\Delta^S(f|_{S^{n-1}}) = -s(s + n - 2)(f|_{S^{n-1}}), \quad \text{con valor propio } -s(s + n - 2).$$

**Demostración:**

Como $f$ es homogénea positiva de grado $s$ entonces $f(x/\|x\|) = \|x\|^{-s} f(x)$, para $\|x\|^{-1} > 0$, así

$$\begin{aligned} \Delta^S(f|_{S^{n-1}}) &= \Delta f(x/\|x\|) = \Delta(\|x\|^{-s} f(x)) \\ &= -s(s + n - 2)\|x\|^{-(s+2)} f + \|x\|^{-s}\Delta f, \quad \text{por Lema 4.2.17} \\ &= -s(s + n - 2)\|x\|^{-(s+2)} f, \quad \text{ya que } f \text{ es armónica } \Delta f = 0 \\ \Delta^S(f|_{S^{n-1}}) &= -s(s + n - 2)(f|_{S^{n-1}}), \quad \text{ya que } \|x\| = 1 \text{ en } S^{n-1}. \end{aligned}$$

Por último, como $\Delta^S$ es un operador lineal entonces, por la Definición 4.2.3, $f|_{S^{n-1}}$ es una función propia de $\Delta^S$ con valor propio $-s(s + n - 2)$.

■

**Ejemplo 4.3.4** Consideremos $f(x) = x_i$. Sabemos que $f$ es una función homogénea positiva de grado 1. Como $\Delta f = 0$, entonces por el Corolario 4.3.3 tenemos

$$\Delta^S(f|_{S^{n-1}}) = (1-n)x_i.$$

**Ejemplo 4.3.5** Sea $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ un polinomio en $\mathbb{R}^2$. Determine los coeficientes para los cuales $\Delta^S p = 0$. Sean

$$\begin{aligned} p_1 &= ax^2 + bxy + cy^2 \\ p_2 &= dx + ey \\ p_3 &= f, \end{aligned}$$

es decir que

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + p_3 \\ \Delta^S p &= \Delta^S(p_1 + p_2 + p_3) = \Delta^S p_1 + \Delta^S p_2 + \Delta^S p_3, \end{aligned}$$

de manera que

$$\Delta^S p = 0 \Leftrightarrow \Delta^S p_1 = \Delta^S p_2 = \Delta^S p_3 = 0.$$

Observemos que $p_1$, $p_2$ y $p_3$ son polinomios homogéneos positivos de grado 2, 1 y 0 respectivamente. Para $p_1$, aplicamos el Lema 4.2.17, obteniendo

$$\Delta(\|x\|^{-2}p_1) = -4\|x\|^{-4}p_1 + \|x\|^{-2}\Delta p_1,$$

luego, para $\|x\| = 1$ tenemos

$$\Delta^S p_1 = (\Delta(\|x\|^{-2}p_1))|_{S^1} = -4p_1 + \Delta p_1,$$

pero $\Delta p_1 = 2(a+c)$, entonces

$$\Delta^S p_1 = -4(ax^2 + bxy + cy^2) + 2(a+c),$$

ahora, como $\|x\| = 1$, entonces $y^2 = 1 - x^2$. De manera que

$$\begin{aligned} \Delta^S p_1 &= -4(ax^2 + bxy + c(1-x^2)) + 2(a+c) \\ &= -4((a-c)x^2 + bxy + c) + 2(a+c) \\ &= -4(a-c)x^2 - 4bxy - 4c + 2a + 2c \\ \Delta^S p_1 &= -4(a-c)x^2 - 4bxy + 2(a-c) \\ \Rightarrow \Delta^S p_1 &= -4(a-c)x^2 - 4bxy + 2(a-c) = 0, \end{aligned}$$

sí y sólo sí $b = 0$ y $a = c$. Ahora, como $\Delta p_2 = 0$, entonces por el Corolario 4.3.3 tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta^S p_2 &= -p_2 \\ \Rightarrow \Delta^S p_2 &= -dx - ey = 0, \end{aligned}$$

sí y sólo sí $d = e = 0$. Por último, sabemos que $\Delta^S p_3 = 0$. Por lo tanto, para que $p$ sea un polinomio armónico esférico, debe de ser de la forma

$$p(x,y) = a(x^2 + y^2) + f.$$

**Definición 4.3.6** Definimos el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, como el ***espacio vectorial de polinomios en n variables con coeficientes en*** $\mathbb{C}$, es decir,

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] = \left\{ p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{k} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{d_{ji}} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{C}, d_{ij} \in \mathbb{Z}_0^+ \right\}.$$

**Definición 4.3.7** Decimos que un polinomio $p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ es un ***polinomio homogéneo de grado d***, si todos los monomios tienen el mismo grado.

**Definición 4.3.8** Definimos el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)}$ de los ***polinomios homogéneos de grado*** $\boldsymbol{d} \in \mathbb{Z}_{\mathbf{0}}^{+}$, como

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)} = \left\{ p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} d_{ji} = d, \text{para cada } i = 0, \ldots, k. \right\}.$$

**Lema 4.3.9** Si $p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)}$, con $d \in \mathbb{Z}_0^+$, entonces para todo $\lambda > 0$ tenemos

$$p(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d p(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

**Demostración:**

Sea $p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)}$, entonces

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{k} \left( a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{d_{ji}} \right),$$

donde $\sum\limits_{j=1}^{n} d_{ji} = d$, para cada $i = 0, 1, \ldots, k$. Luego

$$\begin{aligned}
p(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) &= \sum_{i=0}^{k} \left( a_i \prod_{j=1}^{n} (\lambda x_j)^{d_{ji}} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{k} a_i \left[ (\lambda x_1)^{d_{1i}} (\lambda x_2)^{d_{2i}} \cdots (\lambda x_n)^{d_{ni}} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{k} a_i \left[ (\lambda^{d_{1i}} x_1^{d_{1i}})(\lambda^{d_{2i}} x_2^{d_{2i}}) \cdots (\lambda^{d_{ni}} x_n^{d_{ni}}) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{k} a_i \left[ (\lambda^{d_{1i}} \lambda^{d_{2i}} \cdots \lambda^{d_{ni}})(x_1^{d_{1i}} x_2^{d_{2i}} \cdots x_n^{d_{ni}}) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{k} a_i \left[ (\lambda^{d_{1i} + d_{2i} + \cdots + d_{ni}}) \prod_{j=1}^{n} x_j^{d_{ji}} \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k} a_i \left[ \lambda^d \prod_{j=1}^{n} x_j^{d_{j_i}} \right], \quad \text{pues} \sum_{j=1}^{n} d_{j_i} = d, \text{ para cada } i = 0, 1, \ldots, k \\
&= \lambda^d \sum_{i=0}^{k} \left( a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{d_{j_i}} \right) \\
p(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) &= \lambda^d p(x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}
$$

■

El lema anterior demuestra que un polinomio homogéneo de grado $d \in Z_0^+$ es en realidad una función homogénea positiva de grado $d$. Dichos polinomios homogéneos son las funciones homogéneas positivas más manejables. Por lo que, nuestro interés es buscar polinomios homogéneos armónicos.

**Corolario 4.3.10** Calcule la dimensión de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)}$.

**Demostración:**

La dimensión de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)}$ se puede determinar, contando el número de monomios

$$
\prod_{j=1}^{n} x_j^{d_j}, \text{ que satisfacen que } \sum_{j=1}^{n} d_j = d,
$$

donde $d_j \in \mathbb{Z}_0^+$ para cada $j = 1, \ldots, n$. De forma equivalente, podemos escribir $m_j = d_j + 1$ y pedir el número de soluciones enteras positivas para la ecuación

$$
\sum_{j=1}^{n} m_j = n + d. \tag{4.6}
$$

Ahora, imaginemos $d+n$ puntos en una fila. Cada solución de la ecuación (4.6), corresponde a una forma de separar los $d+n$ puntos insertado $n-1$ barras en ciertos lugares. Ya que hay $n+d-1$ posiciones para las barras, tenemos

$$
\binom{n+d-1}{n-1}
$$

formas posibles de colocar las barras. Las barras representan las formas en las que podemos distribuir el grado $d$ del monomio entre las $n$ variables. Por lo tanto, tenemos que

$$
\dim \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)} = \binom{n+d-1}{n-1}.
$$

■

**Lema 4.3.11** Sea $\langle .,. \rangle : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \times \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{C}$ definido por

$$\langle p, q \rangle = (\overline{q}(\partial) p(x))|_{x=0} ,$$

donde $q(\partial)$ significa reemplazar $x_i$ por $\partial / \partial x_i$ en un polinomio y $R|_{x=0}$ significa evaluar el polinomio $R$ en $x = 0$.

Demuestre que $\langle .,. \rangle$ define un producto interno sobre $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

**Demostración:**

Sabemos que los monomios

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{d_{j_0}}, \ldots, \prod_{j=1}^{n} x_j^{d_{j_k}} \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$$

forman una base del espacio vectorial complejo $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Así, por simplicidad, consideraremos solamente monomios. Verificaremos que se cumplen las propiedades de la Definición **PI**. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $p, q, r \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tales que

$$\begin{aligned} p = p(x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{j=1}^{n} x_j^{b_j} \\ q = q(x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{j=1}^{n} x_j^{c_j} \\ r = r(x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{j=1}^{n} x_j^{d_j}. \end{aligned}$$

- Verificando que se cumple (IP1).

$$\begin{aligned} \langle \alpha p + \beta q, r \rangle &= (\overline{r}(\partial)\ (\alpha p + \beta q)(x))|_{x=0} \\ &= (\overline{r}(\partial)\ (\alpha p(x) + \beta q(x)))|_{x=0} \\ &= [\overline{r}(\partial)(\alpha p(x)) + \overline{r}(\partial)(\beta q(x))]|_{x=0} \\ &= (\alpha \overline{r}(\partial) p(x))|_{x=0} + (\beta \overline{r}(\partial) q(x))|_{x=0} \\ &= \alpha (\overline{r}(\partial) p(x))|_{x=0} + \beta (\overline{r}(\partial) q(x))|_{x=0} \\ \langle \alpha p + \beta q, r \rangle &= \alpha \langle p, r \rangle + \beta \langle q, r \rangle. \end{aligned}$$

- Verificando que se cumple (IP3). Como

$$\begin{aligned} q &= \prod_{j=1}^{n} x_j^{c_j} \\ \Rightarrow q(\partial) &= \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{c_j}}{\partial x_j^{c_j}} = \overline{q}(\partial), \quad \text{ ya que } \overline{1} = 1, \end{aligned}$$

luego

$$
\begin{aligned}
q(\partial)p(x) &= \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{c_j}}{\partial x_j^{c_j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{b_j}\right)\\
\Rightarrow q(\partial)p(x) &= \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{c_j}(x_j^{b_j})}{\partial x_j^{c_j}}.
\end{aligned}
$$

Ahora, analicemos los siguientes casos.

**Caso 1.** Supongamos que $c_j \neq b_j$ para algún $j = 1, \ldots, n$.

**Caso 1.1.** Supongamos que $c_j > b_j$, es decir que $c_j - b_j > 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
q(\partial)p(x) &= \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{(c_j-b_j)}(b_j!)}{\partial x_j^{(c_j-b_j)}}\\
q(\partial)p(x) &= \prod_{j=1}^{n} 0, \quad \text{ya que la derivada de una constante es cero}\\
\Rightarrow q(\partial)p(x) &= 0\\
\Rightarrow (q(\partial)p(x))\big|_{x=0} &= 0\big|_{x=0}\\
\Rightarrow (q(\partial)p(x))\big|_{x=0} &= 0 = \langle p, q\rangle.
\end{aligned}
$$

**Caso 1.2.** Supongamos que $b_j > c_j$, es decir que $b_j - c_j > 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
q(\partial)p(x) &= \prod_{j=1}^{n} (b_j \mathrm{P} c_j) x_j^{(b_j-c_j)}, \quad \text{donde } b_j \mathrm{P} c_j = \frac{b_j!}{(b_j-c_j)!}\\
\Rightarrow (q(\partial)p(x))\big|_{x=0} &= \prod_{j=1}^{n} (b_j \mathrm{P} c_j) x_j^{(b_j-c_j)}\Bigg|_{x=0}\\
&= \prod_{j=1}^{n} 0\\
\Rightarrow (q(\partial)p(x))\big|_{x=0} &= 0 = \langle p, q\rangle.
\end{aligned}
$$

**Caso 2.** Supongamos que $c_j = b_j$ para cada $j = 1, \ldots, n$, entonces

$$
\begin{aligned}
q(\partial)p(x) &= \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{c_j}(x_j^{c_j})}{\partial x_j^{c_j}}\\
q(\partial)p(x) &= \prod_{j=1}^{n} c_j!\\
\Rightarrow (q(\partial)p(x))\big|_{x=0} &= \prod_{j=1}^{n} c_j!\Bigg|_{x=0}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow\ (q(\partial)p(x))|_{x=0} = \prod_{j=1}^{n} c_j! = \langle p, q\rangle.$$

Es decir

$$\langle p, q\rangle = \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{c_j}(x_j^{b_j})}{\partial x_j^{c_j}}\Bigg|_{x=0} = \begin{cases} 0, & \text{si algún } c_j \neq b_j, \text{ para } j = 1, \ldots, n \\ \prod_{j=1}^{n} c_j!, & \text{si } c_j = b_j, \text{ para cada } j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

- Verificando que se cumple (IP2).

$$\begin{aligned}
\overline{\langle q, p\rangle} &= \overline{(\overline{p}(\partial)q(x))}\Big|_{x=0} = (\overline{\overline{p}(\partial)q(x)})\Big|_{x=0} \\
&= (p(\partial)\overline{q}(x))|_{x=0} = (p(\partial)q(x))|_{x=0}\,, \quad \text{ya que } \overline{1} = 1 \\
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{b_j}(x_j^{c_j})}{\partial x_j^{b_j}}\Bigg|_{x=0} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si algún } b_j \neq c_j, \text{ para } j = 1, \ldots, n \\ \prod_{j=1}^{n} b_j!, & \text{si } b_j = c_j, \text{ para cada } j = 1, \ldots, n, \quad \text{esto es por (IP3)} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si algún } c_j \neq b_j, \text{ para } j = 1, \ldots, n \\ \prod_{j=1}^{n} c_j!, & \text{si } b_j = c_j, \text{ para cada } j = 1, \ldots, n \end{cases} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{c_j}(x_j^{b_j})}{\partial x_j^{c_j}}\Bigg|_{x=0} \\
&= (q(\partial)p(x))|_{x=0} \\
&= (\overline{q}(\partial)p(x))|_{x=0}\,, \quad \text{ya que } \overline{1} = 1 \\
\overline{\langle q, p\rangle} &= \langle p, q\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo que $\langle ., .\rangle$ define un producto interno sobre $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Es decir, $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ es un espacio pre-Hilbert.

■

**Corolario 4.3.12** Los monomios forman una base del espacio pre-Hilbert $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

**Demostración:**

De la propiedad (IP3) del Lema 4.3.11 tenemos que, si

$$p = p(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{b_j}$$

$$q = q(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{c_j},$$

entonces

$$\langle p, q \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } p \neq q \\ \prod\limits_{j=1}^{n} c_j!, & \text{si } p = q. \end{cases}$$

Por lo tanto, los monomios forman una base ortogonal del espacio pre-Hilbert $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

■

**Lema 4.3.13** Si $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, entonces se cumple la siguiente identidad

$$\langle \Delta f, g \rangle = \langle f, r^2 g \rangle,$$

donde $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

**Demostración:**

Como en el Lema 4.3.11, consideraremos solamente monomios. Sean $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tales que

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{c_j} \quad \text{y} \quad g = g(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{d_j}.$$

- Calculando $\langle \Delta f, g \rangle$. Sabemos que

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \prod_{j=1}^{n} x_j^{c_j} \right) \\ \Delta f &= \sum_{i=1}^{n} c_i(c_i - 1) x_i^{(c_i - 2)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j^{c_j}, \end{aligned}$$

  además

$$g(\partial) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{d_j}}{\partial x_j^{d_j}},$$

  por lo que

$$\langle \Delta f, g \rangle = (g(\partial)\, \Delta f(x))|_{x=0}$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{d_j}}{\partial x_j^{d_j}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} c_i(c_i-1)x_i^{(c_i-2)} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}} x_j^{c_j}\right)\Bigg|_{x=0}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} c_i(c_i-1)\frac{\partial^{d_i}(x_i^{(c_i-2)})}{\partial x_i^{d_i}} \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{\partial^{d_j}}{\partial x_j^{d_j}} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j^{c_j}\right)\right]\Bigg|_{x=0}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} c_i(c_i-1)\frac{\partial^{d_i}(x_i^{(c_i-2)})}{\partial x_i^{d_i}} \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{\partial^{d_j}(x_j^{c_j})}{\partial x_j^{d_j}}\right)\right]\Bigg|_{x=0},$$

así, por (IP3) del Lema 4.3.11 tenemos

$$\langle \Delta f, g\rangle = \begin{cases} 0, & \text{si algún } d_j \neq c_j, \text{ para } j=1,\ldots,n \text{ (con } j\neq i) \text{ o } d_i \neq c_i - 2 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{i=1}^{n} d_i!, & \text{si } d_j = c_j, \text{ para cada } j=1,\ldots,n \text{ (con } j\neq i) \text{ y } d_i = c_i - 2. \end{cases}$$

- Calculando $\langle f, r^2 g\rangle$. Como

$$\begin{aligned} r^2 g &= \left(x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_n^2\right)\left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{d_j}\right) \\ &= x_1^2\left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{d_j}\right) + \cdots + x_i^2\left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{d_j}\right) + \cdots + \left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{d_j}\right) \\ r^2 g &= \sum_{i=1}^{n} x_i^{(d_i+2)} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j^{d_j} \\ \Rightarrow r^2 g(\partial) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{(d_i+2)}}{\partial x_i^{(d_i+2)}} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{\partial^{d_j}}{\partial x_j^{d_j}}, \end{aligned}$$

luego

$$\langle f, r^2 g\rangle = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{(d_i+2)}}{\partial x_i^{(d_i+2)}} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{\partial^{d_j}}{\partial x_j^{d_j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{n} x_J^{c_j}\right)\right]\Bigg|_{x=0}$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{(d_i+2)}(x_i^{c_i})}{\partial x_i^{(d_i+2)}} \left( \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{\partial^{d_j}}{\partial x_j^{d_j}} \prod_{j=1}^{n} x_j^{c_j} \right) \right] \Bigg|_{x=0}$$

$$\langle f, r^2 g\rangle = \left[ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{(d_i+2)}(x_i^{c_i})}{\partial x_i^{(d_i+2)}} \left( \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{\partial^{d_j}(x_j^{c_j})}{\partial x_j^{d_j}} \right) \right] \Bigg|_{x=0},$$

así, por (IP3) del Lema 4.3.11 tenemos que

$$\langle f, r^2 g\rangle = \begin{cases} 0, & \text{si algún } d_j \neq c_j, \text{ para } j = 1, \ldots, n \text{ (con } j \neq i) \text{ o } d_i \neq c_i - 2 \\ \sum_{i=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} d_i!, & \text{si } d_j = c_j, \text{ para cada } j = 1, \ldots, n \text{ (con } j \neq i) \text{ y } d_i = c_i - 2. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\langle \Delta f, g\rangle = \langle f, r^2 g\rangle.$$

■

**Definición 4.3.14** Sea $\mathcal{H}_{(d)}^n$ el espacio de ***polinomios homogéneos armónicos de grado d***, es decir

$$\mathcal{H}_{(d)}^n = \left\{ p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)} \;\middle|\; \Delta p = 0 \right\}.$$

**Lema 4.3.15** La aplicación

$$\Delta : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)} \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)}$$

es sobreyectiva. Los polinomios $f \in \mathcal{H}_{(d)}^n$ son ortogonales a los polinomios $r^2 g$ (con $g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)}$) con respecto a $\langle ., . \rangle$.

**Demostración:**

Razonando por contradicción. Supongamos que $\Delta$ no es sobreyectiva. Como $\Delta$ no es sobreyectiva, entonces existe un polinomio no cero $g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)}$ tal que, es ortogonal a la imagen de $\Delta$. En particular, $g$ debe de ser ortogonal a $\Delta f$, con $f = r^2 g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)}$. De manera que

$$\begin{aligned} \langle \Delta f, g\rangle &= 0 & \\ \Rightarrow \langle f, r^2 g\rangle &= 0, & \text{por Lema 4.3.13} \\ \Rightarrow \langle r^2 g, r^2 g\rangle &= 0, & \text{ya que } f = r^2 g \\ \Rightarrow r^2 g &= 0, & \text{por (IP3) del Lema 4.3.11} \\ \Rightarrow g &= 0, & \text{una contradicción.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Delta$ debe de ser sobreyectiva.

Falta demostrar la segunda afirmación. Sean $f \in \mathcal{H}^n_{(d)}$ y $g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \Delta f, g\rangle = 0, &\quad \text{ya que } \Delta f = 0 \text{ por hipótesis} \\ \Rightarrow \langle f, r^2 g\rangle = 0, &\quad \text{por Lema 4.3.13,} \end{aligned}$$

de manera que $f$ es ortogonal a $r^2 g$, donde $g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)}$.

■

**Corolario 4.3.16** Demuestre que

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)} = \mathcal{H}^n_{(d)} \oplus r^2 \mathcal{H}^n_{(d-2)} \oplus r^4 \mathcal{H}^n_{(d-4)} \oplus \ldots$$

<u>**Demostración:**</u>

Por el Lema 4.3.11 sabemos que $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)}$ es un espacio pre-Hilbert de dimensión finita. Como $\mathcal{H}^n_{(d)}$ es un subespacio de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)}$ y de la segunda afirmación del Lema 4.3.15 tenemos que el espacio ortogonal a $\mathcal{H}^n_{(d)}$ es $r^2\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)}$, entonces por el Lema 2.1.17 tenemos que

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)} = \mathcal{H}^n_{(d)} \oplus r^2 \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)}.$$

Pero, $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)}$ también es un espacio pre-Hilbert de dimensión finita, entonces por lo anterior, podemos escribir a $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)}$ como

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)} = \mathcal{H}^n_{(d-2)} \oplus r^2 \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-4)},$$

es decir que

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)} &= \mathcal{H}^n_{(d)} \oplus r^2 \left(\mathcal{H}^n_{(d-2)} \oplus r^2 \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-4)}\right) \\ \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)} &= \mathcal{H}^n_{(d)} \oplus r^2 \mathcal{H}^n_{(d-2)} \oplus r^4 \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-4)}, \end{aligned}$$

así, por recurrencia obtenemos que

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)} = \mathcal{H}^n_{(d)} \oplus r^2 \mathcal{H}^n_{(d-2)} \oplus r^4 \mathcal{H}^n_{(d-4)} \oplus \ldots$$

■

**Definición 4.3.17** Decimos que un ***armónico esférico*** es un polinomio en $\mathcal{H}^n_{(d)}$ restringido a la esfera $S^{n-1}$.

**Corolario 4.3.18** Los polinomios en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)}$ restringidos a $S^{n-1}$ son iguales a combinaciones lineales de armónicos esféricos.

**Demostración:**

Sea $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)}$. Por el Corolario 4.3.16 tenemos que

$$f = f_d + r^2 f_{d-2} + r^4 f_{d-4} + \ldots,$$

donde $f_j \in \mathcal{H}^n_{(j)}$ para $j \in \mathbb{Z}^+_0$. Restringiendo a $S^{n-1}$ tenemos

$$f|_{S^{n-1}} = (f_d + r^2 f_{d-2} + r^4 f_{d-4} + \ldots)|_{S^{n-1}} = (f_d + f_{d-2} + f_{d-4} + \ldots)|_{S^{n-1}},$$

ya que $r^2 = 1$ sobre $S^{n-1}$.

■

**Corolario 4.3.19** Si $f \in \mathcal{H}^n_{(d)}$, entonces

$$\Delta^S f = -d(d+n-2)f,$$

donde

$$\lambda_d = -d(d+n-2) = -\left(d + \frac{n-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{n-2}{2}\right)^2,$$

$\lambda_d = 0$ sí y sólo sí $d = 0$. Si $d_1 < d_2$, entonces $\lambda_{d_2} < \lambda_{d_1} \leq 0$, y $\lambda_d \to -\infty$ cuando $d \to +\infty$.

**Demostración:**

Del Corolario 4.3.3 se deduce que si $f \in \mathcal{H}^n_{(d)}$, entonces

$$\Delta^S f = -d(d+n-2)f.$$

Además, ya que el grado $d$ es no negativo, tenemos que

$$\lambda_d = -d(d+n-2) = -\left(d + \frac{n-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{n-2}{2}\right)^2.$$

Esto implica que los valores propios $\lambda_d = -d(d+n-2) \leq 0$ y $\lambda_d = 0$ sí y sólo sí $d = 0$. Además, cuando $d \to +\infty$, los valores propios $\lambda_d \to -\infty$. De hecho, si $d_1 < d_2$, entonces $\lambda_{d_2} < \lambda_{d_1} \leq 0$. Por lo tanto, los espacios $\mathcal{H}^n_{(d)}$ se distinguen por sus valores propios para el Laplaciano esférico.

■

**Corolario 4.3.20** La dimensión de $\mathcal{H}^n_{(d)}$ es

$$\dim \mathcal{H}^n_{(d)} = \dim \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)} - \dim \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)} = \binom{n+d-1}{n-1} - \binom{n+d-3}{n-1}.$$

**Demostración:**

Sabemos que

$$\Delta : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)} \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)}$$

es una aplicación lineal sobreyectiva. Entonces (ver Teorema 10.7 de [8, pág. 514])

$$\dim(\ker(\Delta)) + \dim(\Delta(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)})) = \dim \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)}.$$

Como

$$\ker(\Delta) = \left\{p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)} \mid \Delta(p) = 0\right\} = \mathcal{H}^n_{(d)},$$

y por Lema 4.3.15, sabemos que $\Delta$ es sobreyectiva, entonces

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}^n_{(d)} + \dim \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)} &= \dim \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)} \\ \Rightarrow \dim \mathcal{H}^n_{(d)} &= \dim \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)} - \dim \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)}. \end{aligned}$$

Pero, del Corolario 4.3.10, sabemos que

$$\dim \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d)} = \binom{n+d-1}{n-1},$$

y para el espacio $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)}$ tenemos que

$$\dim \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{(d-2)} = \binom{n+(d-2)-1}{n-1} = \binom{n+d-3}{n-1}.$$

Por lo tanto,

$$\dim \mathcal{H}^n_{(d)} = \binom{n+d-1}{n-1} - \binom{n+d-3}{n-1}.$$

■

**Ejemplo 4.3.21** Calcular una base para $\mathcal{H}^2_{(2)}$. Por el Corolario 4.3.10 sabemos que la dimensión de $\mathbb{C}[x, y]^{(2)}$ es

$$\dim \mathbb{C}[x, y]^{(2)} = \binom{2+2-1}{2-1} = \binom{3}{1} = 3,$$

es decir que, la base para $\mathbb{C}[x, y]^{(2)}$ es

$$\mathscr{B} = \left\{x^2, y^2, xy\right\}.$$

Luego, un polinomio $p$ en $\mathbb{C}[x, y]^{(2)}$ tiene la forma

$$p(x, y) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy,$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$ para cada $i = 1, 2, 3$. Luego, para que $p$ esté en $\mathcal{H}^2_{(2)}$, debe ser que $\Delta p = 0$, es decir

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2a_1 + 2a_2 = 0,$$

sí y sólo sí $a_2 = -a_1$. Es decir, para que $p \in \mathcal{H}^2_{(2)}$ debe de tener la forma

$$\begin{aligned} p(x,y) &= a_1x^2 - a_1y^2 + a_3xy \\ p(x,y) &= a_1(x^2 - y^2) + a_3xy. \end{aligned}$$

De manera que, una base para $\mathcal{H}^2_{(2)}$ es

$$\mathscr{B}^2_{(2)} = \left\{x^2 - y^2, xy\right\}$$

con dimensión 2, como lo afirma el Corolario 4.3.20.

**Ejemplo 4.3.22** Calcular una base para $\mathcal{H}^3_{(2)}$. Por el Corolario 4.3.10 sabemos que la dimensión de $\mathbb{C}[x,y,z]^{(2)}$ es

$$\dim \mathbb{C}[x,y,z]^{(2)} = \binom{3+2-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6,$$

es decir que, la base para $\mathbb{C}[x,y,z]^{(2)}$ es

$$\mathscr{B} = \left\{x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz\right\}.$$

Luego, un polinomio $p$ en $\mathbb{C}[x,y,z]^{(2)}$ tiene la forma

$$p(x,y,z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_4xy,$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$ para cada $i = 1, \ldots, 6$. Luego, para que $p$ esté en $\mathcal{H}^3_{(2)}$, debe ser que $\Delta p = 0$, es decir

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 0,$$

sí y sólo sí $a_3 = -(a_1 + a_2)$. Es decir, para que $p \in \mathcal{H}^3_{(2)}$ debe de tener la forma

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= a_1x^2 + a_2y^2 - (a_1 + a_2)z^2 + a_4xy + a_5xz + a_4xy \\ p(x,y,z) &= a_1(x^2 - z^2) + a_2(y^2 - z^2) + a_4xy + a_5xz + a_6yz. \end{aligned}$$

De manera que, una base para $\mathcal{H}^3_{(2)}$ es

$$\mathscr{B}^3_{(2)} = \left\{x^2 - z^2, y^2 - z^2, xy, xz, yz\right\}$$

con dimensión 5, como lo afirma el Corolario 4.3.20.

**Ejemplo 4.3.23** Calcular una base para $\mathcal{H}^2_{(3)}$. Por el Corolario 4.3.10 sabemos que la dimensión de $\mathbb{C}[x,y]^{(3)}$ es

$$\dim \mathbb{C}[x,y]^{(3)} = \binom{2+3-1}{2-1} = \binom{4}{1} = 4,$$

es decir que, la base para $\mathbb{C}[x,y]^{(3)}$ es

$$\mathscr{B} = \left\{x^3, y^3, x^2y, xy^2\right\}.$$

Luego, un polinomio $p$ en $\mathbb{C}[x,y]^{(3)}$ tiene la forma

$$p(x,y) = a_1x^3 + a_2y^3 + a_3x^2y + a_4xy^2,$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$ para cada $i = 1, \ldots, 4$. Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 3a_1x^2 + 2a_3xy + a_4y^2 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= 6a_1x + 2a_3y, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} &= 3a_2y^2 + a_3x^2 + 2a_4xy \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= 6a_2y + 2a_4x. \end{aligned}$$

Luego, para que $p$ esté en $\mathcal{H}^2_{(3)}$, debe ser que $\Delta p = 0$, es decir

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 6a_1x + 2a_3y + 6a_2y + 2a_4x = 0,$$

es decir

$$\begin{aligned} 3a_1x + a_3y + 3a_2y + a_4x &= 0 \\ (3a_1 + a_4)x + (3a_2 + a_3)y &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} 3a_1 + a_4 = 0 &\quad \text{y} \quad 3a_2 + a_3 = 0 \\ \Rightarrow a_4 = -3a_1 &\quad \text{y} \quad a_3 = -3a_2. \end{aligned}$$

Es decir, para que $p \in \mathcal{H}^2_{(3)}$ debe de tener la forma

$$\begin{aligned} p(x,y) &= a_1x^3 + a_2y^3 - 3a_2x^2y - 3a_1xy^2 \\ p(x,y) &= a_1(x^3 - 3xy^2) + a_2(y^3 - 3x^2y). \end{aligned}$$

De manera que, una base para $\mathcal{H}^3_{(2)}$ es

$$\mathscr{B}^2_{(3)} = \left\{x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y\right\}$$

con dimensión 2, como lo afirma el Corolario 4.3.20.

**Ejemplo 4.3.24** Calcular una base para $\mathcal{H}^3_{(3)}$. Por el Corolario 4.3.10 sabemos que la dimensión de $\mathbb{C}[x,y,z]^{(3)}$ es

$$\dim \mathbb{C}[x,y,z]^{(3)} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10,$$

es decir que, la base para $\mathbb{C}[x,y,z]^{(3)}$ es

$$\mathscr{B} = \left\{x^3, y^3, z^3, x^2y, xy^2, x^2z, xz^2, y^2z, yz^2, xyz\right\}.$$

Luego, un polinomio $p$ en $\mathbb{C}[x,y,z]^{(3)}$ tiene la forma

$$p(x,y,z) = a_1x^3 + a_2y^3 + a_3z^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6x^2z + a_7xz^2 + a_8y^2z + a_9yz^2 + a_{10}xyz,$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$ para cada $i = 1, \ldots, 10$. Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= 3a_1x^2 + 2a_4xy + a_5y^2 + 2a_6xz + a_7z^2 + a_{10}yz \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= 6a_1x + 2a_4y + 2a_6z, \\
\frac{\partial p}{\partial y} &= 3a_2y^2 + a_4x^2 + 2a_5xy + 2a_8yz + a_9z^2 + a_{10}xz \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= 6a_2y + 2a_5x + 2a_8z, \\
\frac{\partial p}{\partial z} &= 3a_3z^2 + a_6x^2 + 2a_7xz + a_8y^2 + 2a_9yz + a_{10}xy \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} &= 6a_3z + 2a_7x + 2a_9y.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\Delta p &= \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \\
&= 6a_1x + 2a_4y + 2a_6z + 6a_2y + 2a_5x + 2a_8z + 6a_3z + 2a_7x + 2a_9y \\
&= (6a_1 + 2a_5 + 2a_7)x + (2a_4 + 6a_2 + 2a_9)y + (2a_6 + 2a_8 + 6a_3)z \\
\Delta p &= 2(3a_1 + a_5 + a_7)x + 2(3a_2 + a_4 + a_9)y + 2(3a_3 + a_6 + a_8)z.
\end{aligned}$$

Para que $p$ esté en $\mathcal{H}^3_{(3)}$, debe ser que $\Delta p = 0$, es decir

$$(3a_1 + a_5 + a_7)x + (3a_2 + a_4 + a_9)y + (3a_3 + a_6 + a_8)z = 0,$$

de donde

$$\begin{aligned}
&3a_1 + a_5 + a_7 = 0 \quad \text{y} \quad 3a_2 + a_4 + a_9 = 0 \quad \text{y} \quad 3a_3 + a_6 + a_8 = 0 \\
\Rightarrow\ &a_5 = -(3a_1 + a_7) \quad \text{y} \quad a_4 = -(3a_2 + a_9) \quad \text{y} \quad a_6 = -(3a_3 + a_8).
\end{aligned}$$

Por lo que, para que $p \in \mathcal{H}^3_{(3)}$ debe de tener la forma

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= a_1x^3 + a_2y^3 + a_3z^3 - (3a_2 + a_9)x^2y - (3a_1 + a_7)xy^2 - (3a_3 + a_8)x^2z + a_7xz^2 \\ &\quad + a_8y^2z + a_9yz^2 + a_{10}xyz \\ &= a_1(x^3 - 3xy^2) + a_2(y^3 - 3x^2y) + a_3(z^3 - 3x^2z) + a_7(xz^2 - xy^2) + a_8(y^2z - x^2z) \\ &\quad + a_9(yz^2 - x^2y) + a_{10}xyz. \end{aligned}$$

De manera que, una base para $\mathcal{H}^3_{(3)}$ es

$$\mathscr{B}^3_{(3)} = \left\{x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y, z^3 - 3x^2z, xz^2 - xy^2, y^2z - x^2z, yz^2 - x^2y, xyz\right\}$$

con dimensión 7, como lo afirma el Corolario 4.3.20.

**Lema 4.3.25** Sea $f$ un vector propio para $\Delta^S$ sobre la esfera $S^{n-1}$, con valor propio $\lambda$. Para cualquier $s \in \mathbb{C}$ tal que $-s(s+n-2) = \lambda$, la función

$$F(x) = \|x\|^s f(x/\|x\|),$$

sobre $\mathbb{R}^n$, es armónica.

<u>**Demostración:**</u>

Por hipótesis, $\lambda$ es un valor propio de $\Delta^S$, entonces

$$(\Delta f(x/\|x\|))|_{S^{n-1}} = \lambda f(x/\|x\|)|_{S^{n-1}},$$

luego, para cualquier $s \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda = -s(s+n-2)$, tenemos que

$$(\Delta f(x/\|x\|))|_{S^{n-1}} = -s(s+n-2)f(x/\|x\|)|_{S^{n-1}}. \tag{4.7}$$

Por construcción, la función $F(x) = f(x/\|x\|)$ es homogénea positiva de grado 0. Sea $t > 0$, entonces por el Corolario 4.2.12 tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta F(tx) &= t^{-2}\Delta F(x) \\ t^2\Delta F(tx) &= \Delta F(x) \\ t^2\Delta f\left(\frac{tx}{t\|x\|}\right) &= \Delta f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \quad \text{ya que } t > 0 \\ \|x\|^2\Delta f\left(\frac{\|x\|x}{\|x\|\|x\|}\right) &= \Delta f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \quad \text{tomando } t = \|x\| > 0 \\ \Rightarrow \|x\|^2\Delta f(x/\|x\|) &= \Delta f(x/\|x\|), \end{aligned}$$

donde $x$ no necesariamente está en $S^{n-1}$. Luego, por la ecuación (4.7) tenemos que

$$\|x\|^2\Delta f(x/\|x\|) = -s(s+n-2)f(x/\|x\|). \tag{4.8}$$

Dado que $F$ es homogénea positiva de grado $s$, entonces por el Lema 4.2.17 tenemos

$$\Delta(\|x\|^{-s}F(x)) = -s(s+n-2)\|x\|^{-(s+2)}F(x) + \|x\|^{-s}\Delta F(x),$$

multiplicando por $\|x\|^2 > 0$, para $x$ no necesariamente en $S^{n-1}$ tenemos

$$\|x\|^2\Delta(\|x\|^{-s}F(x)) = -s(s+n-2)\|x\|^{-s}F(x) + \|x\|^{-s+2}\Delta F(x). \tag{4.9}$$

Como $F(x) = f(x/\|x\|)$ en la esfera, de las ecuaciones (4.8) y (4.9) tenemos

$$\begin{aligned}
-s(s+n-2)\|x\|^{-s}F(x) &= -s(s+n-2)f(x/\|x\|) \\
&= \|x\|^2\Delta f(x/\|x\|), \quad \text{por la ecuación (4.8)} \\
&= \|x\|^2\Delta(\|x\|^{-s}F(x)), \quad \text{ya que } F = f \text{ en } S \\
-s(s+n-2)\|x\|^{-s}F(x) &= -s(s+n-2)\|x\|^{-s}F(x) + \|x\|^{-s+2}\Delta F(x),
\end{aligned}$$

cancelando términos semejantes, obtenemos

$$0 = \|x\|^{-s+2}\Delta F(x),$$

así $F$ es armónico.

$\blacksquare$

**Definición 4.3.26** Sean $f$ y $g$ dos funciones de valor real definidas en un conjunto $X$, donde $X$ está contenido en el dominio de $f$ y $g$. Si $f$ y $g$ están definidas para todos los números reales $x \in X$ suficientemente grandes ($x \to \infty$) y si existen constantes $c > 0$ y $x_0$ tales que

$$|f(x)| \leq c|g(x)|, \quad \text{para cada } x \geq x_0.$$

Entonces, se dice que ***$f(x)$ es de orden $O(g(x))$***. Donde el símbolo $O$ se lee como ***gran O*** y llamamos a la estimación anterior una ***O-estimación*** (gran O estimación) para $f(x)$. La constante $c$ es llamada la ***O-constante*** y el rango $x \geq x_0$ es llamado el ***rango de validez*** para la $O$-estimación. Este hecho lo denotaremos por[1]

$$f \ll g.$$

Lo especial que tiene la notación "$O$" (gran $O$) es que nos permite expresar, de manera breve, concisa y precisa, la existencia de una constante, sin tener que escribir la constante. A continuación, mostramos algunas propiedades simples de la definición anterior, pero que nos serán de gran utilidad en secciones posteriores.

**Lema 4.3.27** Sean $f$ y $g$ dos funciones definidas en un conjunto de números reales $X$, tal que $f$ y $g$ están definidas para todos los números $x \in X$ suficientemente grandes ($x \to \infty$). Si $f \ll g$, entonces $\beta f \ll g$ para cada $\beta > 0$.

[1] La notación " $\ll$ " fue introducida por **Ivan Vinogradov** como una alternativa a la notación "$O$".

**Demostración:**

Por hipótesis sabemos que $f \ll g$, entonces existen constantes $c > 0$ y $x_0$, tales que

$$|f(x)| \leq c\ |g(x)|, \quad \text{para } x \geq x_0.$$

Sea $\beta > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\beta\ |f(x)| &\leq \beta\,(c\ |g(x)|)\,, \quad \text{para } x \geq x_0 \\
\Rightarrow |\beta\ f(x)| &\leq (\beta c)\ |g(x)|, \quad \text{para } x \geq x_0 \\
\Rightarrow |(\beta f)(x)| &\leq k\ |g(x)|, \quad \text{para } x \geq x_0 \text{ y } \beta c = k > 0 \\
\Rightarrow \beta f &\ll g.
\end{aligned}$$

■

**Lema 4.3.28** Sean $f$ y $g$ dos funciones no negativas definidas en un conjunto de números reales $X$, tal que $f$ y $g$ están definidas para todos los números $x \in X$ suficientemente grandes $(x \to \infty)$. Si $f \ll g$, entonces $f^\alpha \ll g^\alpha$ para $\alpha \in [0,1]$.

**Demostración:**

Por hipótesis sabemos que $f \ll g$, entonces existen constantes $c > 0$ y $x_0$, tales que

$$|f(x)| \leq c\ |g(x)|, \quad \text{para } x \geq x_0.$$

Sea $\alpha \in [0,1]$, entonces

$$\begin{aligned}
|f(x)|^\alpha &\leq (c\ |g(x)|)^\alpha, \quad \text{para } x \geq x_0 \\
\Rightarrow |(f(x))^\alpha| &\leq c^\alpha |g(x)|^\alpha, \quad \text{para } x \geq x_0 \\
\Rightarrow |f^\alpha(x)| &\leq k\ |(g(x))^\alpha|, \quad \text{para } x \geq x_0 \text{ y } c^\alpha = k > 0 \\
\Rightarrow |f^\alpha(x)| &\leq k\ |g^\alpha(x)|, \quad \text{para } x \geq x_0 \\
\Rightarrow f^\alpha &\ll g^\alpha.
\end{aligned}$$

■

**Corolario 4.3.29** Sea $\dim \mathcal{H}^n_{(d)}$, con $d \in \mathbb{Z}^+_0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ fijo. Entonces

$$\dim \mathcal{H}^n_{(d)} \ll d^{n-2}.$$

**Demostración:**

Sea $n$ fijo, entonces

$$\begin{aligned}
\binom{n+d-1}{n-1} &= \frac{[d+(n-1)]!}{(n-1)!\ d!} \\
&= \frac{[d+(n-1)][d+(n-2)]\cdots(d+1)\ d!}{(n-1)!\ d!} \\
\binom{n+d-1}{n-1} &= \frac{[d+(n-1)][d+(n-2)]\cdots(d+1)}{(n-1)!},
\end{aligned}$$

donde el numerador tiene $n-1$ factores. Es decir que, podemos expresarlo como

$$\binom{n+d-1}{n-1} = \frac{d^{n-1} + \sum\limits_{r=2}^{n} a_r d^{n-r}}{(n-1)!}.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\binom{n+d-3}{n-1} &= \frac{[d+(n-3)]!}{(n-1)!\ d!} \\
&= \frac{[d+(n-3)][d+(n-4)]\cdots(d-1)\ d!}{(n-1)!\ d!} \\
\binom{n+d-3}{n-1} &= \frac{[d+(n-3)][d+(n-4)]\cdots(d-1)}{(n-1)!},
\end{aligned}$$

donde el numerador, nuevamente, tiene $n-1$ factores. Es decir que, podemos expresarlo como

$$\binom{n+d-1}{n-1} = \frac{d^{n-1} + \sum\limits_{r=2}^{n} b_r d^{n-r}}{(n-1)!}.$$

Por lo que

$$\dim \mathcal{H}^n_{(d)} = \binom{n+d-1}{n-1} - \binom{n+d-3}{n-1} = p(d),$$

donde

$$p(d) = \sum_{r=2}^{n} \left( \frac{a_r - b_r}{(n-1)!} \right) d^{n-r}$$

y el grado de $p$ es $n-2$. Luego

$$\begin{aligned}
|p(d)| &\le \sum_{r=2}^{n} \frac{|a_r - b_r|}{(n-1)!} d^{n-r} \\
&\le \left( \sum_{r=2}^{n} \frac{|a_r - b_r|}{(n-1)!} \right) d^{n-2} \\
&= c\ d^{n-2} \\
\Rightarrow |p(d)| &\le c\ d^{n-2},
\end{aligned}$$

donde la desigualdad se mantiene para $d \ge 1$ (es decir que $d_0 = 1$) y

$$c = \left( \sum_{r=2}^{n} \frac{|a_r - b_r|}{(n-1)!} \right). \tag{4.10}$$

Por lo tanto,

$$\dim \mathcal{H}^n_{(d)} \ll d^{n-2}.$$

$\blacksquare$

**Observación** **4.3.30** Debemos de tener en cuenta que, la constante $c$ de la ecuación (4.10) es una **constante uniforme** (no depende de $d$).

**Observación** **4.3.31** Tengamos en cuenta que, si $d \in \mathbb{Z}_0^+$, entonces

$$\begin{aligned} |d| &\leq |1+d| \\ \Rightarrow d &\leq (1+d) \\ \Rightarrow d^{\frac{n-2}{2}} &\leq (1+d)^{\frac{n-2}{2}}, \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ fijo} \\ \Rightarrow d^{\frac{n-2}{2}} &\ll (1+d)^{\frac{n-2}{2}}, \end{aligned}$$

para $c = 1$ (es una constante uniforme) y $d \geq 0$.

## 4.4. Integral invariante sobre la esfera.

A continuación, nos ocupamos de dar una definición de integral sobre la esfera.

**Definición 4.4.1** Para una función continua $f$ sobre $S^{n-1}$, definimos la ***integral esférica*** como

$$\int_{S^{n-1}} f(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\|x\|^2)\ f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\ dx \tag{4.11}$$

donde $\gamma$ es una función fija no negativa suave (infinitamente diferenciable) en $[0, \infty)$, con la propiedad de que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\|x\|^2)\ dx = 1.$$

Por conveniencia, podemos suponer en algunos momentos que $\gamma$ tiene soporte compacto [2] y se vuelve idénticamente cero sobre un entorno de 0.

[2]Decimos que el **soporte** de una función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es

$$\operatorname{sop} F = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}},$$

donde la barra representa la clausura. Si $K = \operatorname{sop} F$ es compacto en $\mathbb{R}^n$, decimos que $F$ tiene **soporte compacto**.

Usando esta definición y teniendo en cuenta que la integral sobre $\mathbb{R}^n$ es $SO(n)$-invariante, se verifica el siguiente lema.

**Lema 4.4.2** Sea $f$ una función continua sobre $S^{n-1}$ y $k \in SO(n)$, entonces

$$\int_{S^{n-1}} (k \cdot f)(x)\ dx = \int_{S^{n-1}} f(x)\ dx.$$

Es decir que la integral esférica es $SO(n)$-invariante.

**Demostración:**

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} (k \cdot f)(x)\ dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\|x\|^2)\ f\left(\frac{xk}{\|xk\|}\right) dx, \quad \text{haciendo cambio de variable } x = xk^{-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\|xk^{-1}\|^2)\ f\left(\frac{xk^{-1}k}{\|xk^{-1}k\|}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma((\|xk^{-1}\|)^2)\ f(x/\|x\|)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\|x\|^2) f(x/\|x\|)\ dx, \quad \text{ya que la acción es unitaria por Lema (4.1.31)} \\
\int_{S^{n-1}} (k \cdot f)(x)\ dx &= \int_{S^{n-1}} f(x)\ dx,
\end{aligned}$$

ya que el determinante Jacobiano de $k^{-1} = 1$.

■

En la siguiente proposición se demuestra que el Laplaciano esférico, $\Delta^S$, es autoadjunto y definido-negativo. Estas propiedades las asumimos como verdaderas, en la sección 1.3, para la demostración del Corolario 4.4.4.

**Proposición 4.4.3** Sean $f, \varphi$ funciones diferenciables sobre $S^{n-1} = S$. Entonces el Laplaciano esférico, $\Delta^S$, cumple las siguientes propiedades

(PD1) Ser autoadjunto, es decir

$$\int_{S^{n-1}} (\Delta^S f)\ \varphi = \int_{S^{n-1}} f\ (\Delta^S \varphi).$$

(PD2) Ser definido-negativo, en el sentido que

$$\int_{S^{n-1}} (\Delta^S f)\ \overline{f} \leq 0,$$

con la igualdad solamente para $f$ constante.

Demostración:

**Demostrando (PD1)**. Sean $F(x) = f(x/r)$ y $\Phi(x) = \varphi(x/r)$, dos funciones homogéneas positivas de grado 0, donde $r = \|x\|$. Como

$$\begin{aligned}
&F(rx) = r^0 F(x) = F(x), \quad \text{por ser F homogénea positiva de grado 0} \\
&\Rightarrow (\Delta F)(x) = r^{-2}(\Delta F)(x), \quad \text{por Corolario 4.2.12} \\
&\Rightarrow r^2(\Delta F)(x) = (\Delta F)(x).
\end{aligned}$$

Es decir que, $r^2(\Delta F)(x)$ es una función homogénea positiva de grado 0. Ahora, por Definición 4.4.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} (\Delta^S f) \cdot \varphi &= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\|x\|^2)\ (\Delta f \cdot \varphi) \left( \frac{x}{\|x\|} \right)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(r^2)\ (\Delta f \cdot \varphi) \left( \frac{x}{r} \right)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(r^2)\ \Delta f \left( \frac{x}{r} \right) \cdot \varphi \left( \frac{x}{r} \right)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(r^2)\ (\Delta F)(x)\ \Phi(x)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(r^2)\ r^2 (\Delta F)(x)\ \Phi(x)\ dx, \quad \text{pues } (\Delta F)(x) = r^2(\Delta F)(x) \\
\int_{S^{n-1}} (\Delta^S f) \cdot \varphi &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(r^2)\ (\Delta F)(x)\ \Phi(x)\ dx, \quad \text{haciendo } \delta(r^2) = r^2\ \gamma(r^2).
\end{aligned}$$

Integrando por partes, recordar que $\int u\ dv = uv - \int v\ du$. Sea $u = \delta(r^2)\ \Phi(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
du &= \frac{\partial}{\partial x_i} [\delta(r^2)\ \Phi(x)] \\
du &= 2x_i \delta'(r^2) \Phi(x) + \delta(r^2) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Además, sea $dv = \Delta F(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
dv &= \Delta F(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i^2} \\
\Rightarrow v &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i},
\end{aligned}$$

es decir

$$\int_{S^{n-1}} (\Delta^s f) \cdot \varphi = \delta(r^2)\ \Phi(x)\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \Bigg|_{\mathbb{R}^n} - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \left[ 2x_i \delta'(r^2) \Phi(x) + \delta(r^2) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right] dx,$$

pero

$$\delta(r^2)\ \Phi(x)\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\Bigg|_{\mathbb{R}^n} = 0,$$

ya que $\gamma$ tiene soporte compacto y se desvanece sobre un entorno de 0. Luego, por la identidad de Euler (ver Lema 4.2.16) tenemos que

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\ \left[2x_i\delta'(r^2)\Phi(x) + \delta(r^2)\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right] dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\ \delta(r^2)\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\ dx,$$

ya que

$$\sum_i x_i\ \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0,$$

pues $F$ es homogénea positiva de grado 0. Por lo tanto,

$$\int_{S^{n-1}} (\Delta^s f)\cdot \varphi = -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\ \delta(r^2)\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\ dx. \tag{4.12}$$

Para calcular $\int_{S^{n-1}} f\cdot(\Delta^S\varphi)$, procedemos de forma análoga. Por lo que

$$\int_{S^{n-1}} f\cdot(\Delta^s\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\ \delta(r^2)\frac{\partial F}{\partial x_i}\ dx \tag{4.13}$$

Las expresiones (4.12) y (4.13) son simétricas en $F$ y $\Phi$, así que podemos “intercambiar” las dos funciones y la integral seguirá dando el mismo resultado. De esta forma hemos demostrado (PD1).

**Demostrando (PD2)**. Como $\delta(r^2) = r^2\ \gamma(r^2)$ y por Definición 4.4.1 $\gamma(r^2)\geq 0$, entonces $\delta(r^2)\geq 0$. Teniendo esto en cuenta, para demostrar que $\Delta^S$ es definido-negativo, basta considerar $\Phi = \overline{F}$ en la ecuación (4.12). Es decir

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} (\Delta^S f)\ \overline{f} &= -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\ \delta(r^2)\frac{\partial \overline{F}}{\partial x_i}\ dx \\
&= -\sum_i \int_{\mathbb{R}^n} \delta(r^2)\ \frac{\partial F}{\partial x_i}\ \overline{\frac{\partial F}{\partial x_i}}\ dx, \quad \text{pues } \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \\
&= -\sum_i \int_{\mathbb{R}^n} \delta(r^2)\ \left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|^2\ dx \\
&\leq 0, \quad \text{pues } \delta(r^2) \text{ y } \left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|^2 \text{ son no negativas}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{S^{n-1}} (\Delta^S f)\ \overline{f} \leq 0.$$

Por último, $\int_{S^{n-1}}(\Delta^S f)\,\overline{f} = 0$ sí y sólo sí $\partial F/\partial x_i = 0$ para cada $i$, sí y sólo sí $F$ es constante, sí y sólo sí $f$ es constante.

Por lo tanto, hemos demostrado (PD2), y de esta forma hemos completado la demostración de la Proposición.

■

La integral sobre la esfera se usa para definir el espacio de funciones cuadrado integrables en la esfera, es decir

$$L^2(S^{n-1}) = \left\{ f : S^{n-1} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{S^{n-1}} |f|^2 < \infty \right\},$$

con el producto interno hermitiano, definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_{S^{n-1}} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx,$$

donde $g(\bar{x})$ es el conjugado complejo de $g(x)$.

**Corolario 4.4.4** Sean $f, g$ vectores propios para $\Delta^S$ con valores propios distintos, entonces son ortogonales con respecto al producto interno $\langle ., .\rangle$. Todos los valores propios son números reales no positivos.

**<u>Demostración:</u>**

Sean $\Delta^S f = \lambda f$ y $\Delta^S g = \mu g$. Supongamos que $\lambda \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \int_{S^{n-1}} f\,\overline{f}\,dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda}\int_{S^{n-1}} f\,\overline{f}\,dx \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_{S^{n-1}} (\lambda f)\,\overline{f}\,dx \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_{S^{n-1}} (\Delta^S f)\,\overline{f}\,dx \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_{S^{n-1}} f\,\overline{\Delta^S f},\,dx \quad \text{por (PD1)} \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_{S^{n-1}} f\,(\overline{\lambda f})\,dx, \quad \text{ya que } \Delta^S f = \lambda f \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_{S^{n-1}} f\,(\overline{\lambda}\,\overline{f})\,dx \\
&= \frac{\overline{\lambda}}{\lambda}\int_{S^{n-1}} f\,\overline{f}\,dx \\
&= \frac{\overline{\lambda}}{\lambda}\langle f, f\rangle \\
\lambda\langle f, f\rangle &= \overline{\lambda}\langle f, f\rangle.
\end{aligned}$$

Como $\lambda \neq 0$, $f$ no es idénticamente 0, así $\langle f, f\rangle > 0$ y de esta forma $\lambda = \overline{\lambda}$, es decir que $\lambda$ es real. De la propiedad (PD2) de l Proposición 4.4.3 y de la positividad de la integral esférica se deduce que

$$\begin{aligned}
\lambda\langle f, f\rangle &= \lambda\langle f, f\rangle, \quad \text{pues } \lambda = \overline{\lambda} \\
&= \lambda \int_{S^{n-1}} f\ \overline{f}\ dx \\
&= \int_{S^{n-1}} (\lambda\ f)\ \overline{f}\ dx \\
&= \int_{S^{n-1}} (\Delta^S f)\ \overline{f}\ dx < 0, \quad \text{por (PD2)} \\
\Rightarrow \lambda\langle f, f\rangle &< 0,
\end{aligned}$$

así $\lambda < 0$, ya que $\langle f, f\rangle > 0$. Además

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_{S^{n-1}} f\ \overline{g}\ dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda} \int_{S^{n-1}} f\ \overline{g}\ dx \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_{S^{n-1}} (\lambda\ f)\ \overline{g}\ dx \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_{S^{n-1}} (\Delta^S f)\ \overline{g}\ dx \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_{S^{n-1}} f\ \overline{\Delta^S g}\ dx, \quad \text{por (PD1)} \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_{S^{n-1}} f\ (\overline{\mu g})\ dx, \quad \text{ya que } \Delta^S g = \mu g \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_{S^{n-1}} f\ (\overline{\mu}\ \overline{g})\ dx \\
&= \frac{\overline{\mu}}{\lambda} \int_{S^{n-1}} f\ \overline{g} \\
\langle f, g\rangle &= \frac{\mu}{\lambda} \int_{S^{n-1}} f\ \overline{g}.
\end{aligned}$$

La última igualdad se cumple dado que los valores propios $\lambda$ y $\mu$ son reales. Entonces para $\frac{\mu}{\lambda} \neq 1$ necesariamente la integral es 0. Es decir que $f$ y $g$ son ortogonales respecto al producto interno.

■

**Lema 4.4.5** La acción de $SO(n)$ es unitaria para el producto interno definido en $L^2(S^{n-1})$.

**Demostración:**

Sean $f, g \in L^2(S^{n-1})$ y sea $k \in SO(n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle k \cdot f, k \cdot g\rangle &= \int_{S^{n-1}} f(xk)\overline{g(xk)}\, dx \\
&= \int_{S^{n-1}} f(x)\overline{g(x)}\, dx, \quad \text{sustituyendo } x \text{ por } xk^{-1} \\
\langle k \cdot f, k \cdot g\rangle &= \langle f, g\rangle.
\end{aligned}$$

■

## 4.5. Descomposición espectral de $L^2(S^{n-1})$.

La idea de la descomposición espectral sobre la esfera es que, las funciones sobre la esfera deben ser sumas de funciones propias del Laplaciano esférico. Para funciones de $L^2$, la convergencia debe estar en $L^2$. Para funciones suaves, la suma debe converger en un sentido uniforme. Como es bien conocido en el análisis, la convergencia en la norma-$L^2$ no implica convergencia puntual.

**Teorema 4.5.1** ***(Stone-Weierstrass)*** Sea $K$ un conjunto compacto en un espacio topológico cualquiera y $C(K)$ el espacio de las funciones reales continuas definidas sobre $K$. Supongamos que

(a) $A$ es un subálgebra cerrada de $C(K)$,

(b) $A$ es autoadjunta, es decir que $\bar{f} \in A$ para todo $f \in A$,

(c) $A$ separa puntos en $K$ y

(d) para cada $p \in K$, existe $f \in A$ tal que $f(p) \neq 0$,

entonces $\bar{A} = C(K)$ y, por lo tanto, $A$ es denso en $C(K)$ (ver caso especial del Teorema 5.7 de [13, pág. 122]).

**Teorema 4.5.2** La colección de combinaciones lineales finitas de armónicos esféricos es densa en $L^2(S^{n-1})$.

<u>**Demostración:**</u>

Consideremos el siguiente conjunto $A = \{p = P|_{S^{n-1}} \mid P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\}$.

**Demostrando (a)**. Sean $p, q \in A$ tales que

$$p = P|_S \quad \text{y} \quad q = Q|_S,$$

con $P, Q \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, entonces

$$pq = (P|_S)(Q|_S) = (PQ)|_S,$$

donde $PQ \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. De manera que $pq \in A$ y de esta forma $A$ es una subálgebra cerrada.

**Demostrando (b)**. Sea $p \in A$ tal que $p = P|_S$, con $P \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Entonces

$$\overline{p} = \overline{P|_S} = \overline{P}|_S,$$

donde $\overline{P} \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. De esta forma $\overline{p} \in A$ y así, $A$ es autoadjunta y además cerrada por (a). Por lo tanto, $A$ es un subespacio lineal de $C(S^{n-1})$.

**Demostrando (c)**. Recordemos que se dice que un conjunto $A$ de funciones definidas en $X$ separa puntos, si para cada par de puntos $x, y \in X$, con $x \neq y$, existe una función $f$ en $A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Sean $u = (u_1, \cdots, u_n), v = (v_1, \cdots, v_n) \in S^{n-1}$, con $u_k \neq v_k$ y sea $p \in A$ tal que

$$p = P|_S,$$

donde $P \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ definido por

$$P(x_1, \ldots, x_n) = x_k.$$

Es decir que $p(u) = u_k$ y $p(v) = v_k$, por lo que $p(u) \neq p(v)$. De manera que $A$ separa puntos en $S^{n-1}$.

**Demostrando (d)**. Sean $u \in S^{n-1}$ y $p = P|_S$, con $P \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ definido por

$$P(x_1, \ldots, x_n) = 1,$$

entonces $p(u) = 1$. De esta forma hemos demostrado (d).

Luego, como $S^{n-1}$ es compacta, entonces por el Teorema de Stone-Weierstrass para polinomios (Teorema 4.5.1) $A$ es densa en el espacio $C(S^{n-1})$ con la siguiente norma

$$\|\phi\|_\infty = \sup_{x \in S^{n-1}} |\phi(x)|, \quad \text{para } \phi \in C(S^{n-1}).$$

Como $A$ es densa en $C(S^{n-1})$, entonces para cada $\phi \in C(S^{n-1})$ y para cada $\varepsilon > 0$, existe algún $p \in A$ tal que

$$\|p - \phi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\operatorname{vol}(S^{n-1})}}. \tag{4.14}$$

Sabemos que $L^2(S^{n-1})$ es la completación de $C(S^{n-1})$ con respecto al producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{S^{n-1}} f\ \overline{g}\ dx.$$

Al ser $L^2(S^{n-1})$ la completación de $C(S^{n-1})$, cumple en particular que $C(S^{n-1})$ es denso en $L^2(S^{n-1})$. Por lo que, para cada $f \in L^2(S^{n-1})$ y para cada $\varepsilon > 0$, existe algún $\phi \in C(S^{n-1})$ tal que

$$\|\phi - f\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.15}$$

Ahora, si $\psi \in C(S^{n-1})$, entonces

$$\begin{aligned}
|\psi(x)| &\leq \sup_{x\in S^{n-1}} |\psi(x)| = \|\psi\|_\infty \\
\Rightarrow |\psi(x)|^2 &\leq \|\psi\|_\infty^2 \\
\Rightarrow \left(\int_{S^{n-1}} |\psi(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_{S^{n-1}} \|\psi\|_\infty^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\psi\|_\infty \left(\int_{S^{n-1}} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\psi\|_\infty \sqrt{\mathrm{vol}\,(S^{n-1})} \\
\Rightarrow \left(\int_{S^{n-1}} |\psi(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \|\psi\|_\infty \sqrt{\mathrm{vol}\,(S^{n-1})},
\end{aligned}$$

es decir que, para cada $\psi \in C(S^{n-1})$ tenemos que

$$\|\psi\|_{L^2} \leq \|\psi\|_\infty \sqrt{\mathrm{vol}\,(S^{n-1})}. \tag{4.16}$$

Luego, para $p \in A$ y $f \in L^2(S^{n-1})$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|p - f\|_{L^2} &= \|p - f + (\phi - \phi)\|_{L^2}, \quad \text{donde } \phi \in C(S^{n-1}) \\
&= \|(p - \phi) + (\phi - f)\|_{L^2} \\
&\leq \|p - \phi\|_{L^2} + \|\phi - f\|_{L^2}, \quad \text{por desigualdad triangular} \\
&\leq \|p - \phi\|_\infty \sqrt{\mathrm{Vol}\ (S^{n-1})} + \|\phi - f\|_{L^2}, \quad \text{por ecuación (4.16)} \\
&\leq \left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\mathrm{vol}\,(S^{n-1})}}\right) \sqrt{\mathrm{vol}\,(S^{n-1})} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{por ecuaciones (4.14) y (4.15)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\
\Rightarrow \|p - f\|_{L^2} &\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $A$ es denso en $L^2(S^{n-1})$ con respecto a la norma-$L^2$. Sabemos que cualquier elemento de $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ puede escribirse como una combinación lineal finita de polinomios homogéneos. Luego, por el Corolario 4.3.18, la restricción a $S^{n-1}$ de cada uno de estos polinomios homogéneos es, en sí misma, igual a una combinación lineal finita de armónicos esféricos.

Asi, para $p \in A$ existe un $Y_1 \in \mathcal{H}_{(d_1)}, Y_2 \in \mathcal{H}_{(d_2)}, \cdots, Y_m \in \mathcal{H}_{(d_m)}$ tales que

$$p = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \cdots + a_m Y_m,$$

con $a_i \in \mathbb{C}$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Por lo tanto, la colección de combinaciones lineales finitas de armónicos esféricos es densa en $L^2(S^{n-1})$.

■

**Corolario 4.5.3** Si $d_1 \neq d_2$, entonces los subespacios $\mathcal{H}^n_{(d_1)}$ y $\mathcal{H}^n_{(d_2)}$ de $L^2(S^{n-1})$ son mutuamente ortogonales.

**Demostración:**

Sean $d_1 \neq d_2$ y $f_i \in \mathcal{H}^n_{(d_i)}$ para $i = 1, 2$. Entonces por por Corolario 4.3.19 tenemos que

$$\Delta^S f_i = \lambda_{d_i} f_i,$$

donde $\lambda_{d_i} = -d_i(d_i+n-2)$, para $i = 1, 2$. Como $d_1 \neq d_2$, se deduce que $\lambda_{d_1} \neq \lambda_{d_2}$. Luego, por Corolario 4.4.4 sabemos que para valores propios distintos del Laplaciano esférico tenemos que

$$\langle f_1, f_2 \rangle = 0.$$

Como $f_1, f_2$ se tomaron arbitrarios en $\mathcal{H}^n_{(d_1)}, \mathcal{H}^n_{(d_2)}$ respectivamente, entonces $\mathcal{H}^n_{(d_1)}$ y $\mathcal{H}^n_{(d_2)}$ son mutuamente ortogonales como subespacios de $L^2(S^{n-1})$.

■

**Teorema 4.5.4** ***(Descomposición espectral en la esfera)***

$$L^2(S^{n-1}) = \widehat{\bigoplus_{d \geq 0}} \mathcal{H}^n_{(d)},$$

donde $\widehat{\bigoplus_{d \geq 0}} \mathcal{H}^n_{(d)}$ es la completación de $\bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{H}^n_{(d)}$.

**Demostración:**

Primero, probaremos que $\bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{H}^n_{(d)} \subseteq L^2(S^{n-1})$. Para ello, observemos que $\mathcal{H}^n_{(d)}|_{S^{n-1}} = \mathcal{H}^n_{(d)}$

para cada $d$. En efecto, si $p \in \mathcal{H}^n_{(d)}$, entonces el polinomio normalizado $P$ de $p$ y restringido a la esfera $S^{n-1}$ es

$$\begin{aligned}
P(x) &= p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \\
&= \|x\|^{-d} p(x), \quad \text{por ser homogéneo positivo de grado } d \\
P(x)|_{S^{n-1}} &= p(x), \quad \text{ya que } \|x\| = 1 \text{ sobre la esfera } S^{n-1}.
\end{aligned}$$

Por lo que $\mathcal{H}^n_{(d)}|_{S^{n-1}} = \mathcal{H}^n_{(d)}$. Luego, como $\mathcal{H}^n_{(d)} \subseteq L^2(S^{n-1})$ para cada $d \geq 0$, entonces

$$\bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{H}^n_{(d)} \subseteq L^2(S^{n-1}). \tag{4.17}$$

Ahora, probaremos que $\widehat{\bigoplus}_{d\geq 0}\mathcal{H}^n_{(d)}$ es cerrado. Sabemos que $\widehat{\bigoplus}_{d\geq 0}\mathcal{H}^n_{(d)}$ es un espacio completo. Sea $g \in \overline{\widehat{\bigoplus}_{d\geq 0}\mathcal{H}^n_{(d)}}$ (la clausura de $\widehat{\bigoplus}_{d\geq 0}\mathcal{H}^n_{(d)}$), entonces existe una sucesión $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \widehat{\bigoplus}_{d\geq 0}\mathcal{H}^n_{(d)}$ tal que $\psi_n \to g$. Como $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces es una sucesión de Cauchy (ver Lema 2.1.12). Luego, ya que $\widehat{\bigoplus}_{d\geq 0}\mathcal{H}^n_{(d)}$ es completo, entonces $g \in \widehat{\bigoplus}_{d\geq 0}\mathcal{H}^n_{(d)}$. Por lo tanto, $\widehat{\bigoplus}_{d\geq 0}\mathcal{H}^n_{(d)}$ es cerrado.

Por la ecuación (4.17) sabemos que $\bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{H}^n_{(d)} \subseteq L^2(S^{n-1})$, entonces $\widehat{\bigoplus}_{d\geq 0}\mathcal{H}^n_{(d)} \subseteq \widehat{L^2(S^{n-1})} = L^2(S^{n-1})$. De esta forma

$$L^2(S^{n-1}) = \widehat{\bigoplus_{d\geq 0}}\mathcal{H}^n_{(d)} \oplus W,$$

donde $W$ el complemento ortogonal de $\widehat{\bigoplus}_{d\geq 0}\mathcal{H}^n_{(d)}$. Ahora calcularemos $W$. Sea $f \in W$, entonces por Teorema 4.5.2 existe una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{H}^n_{(d)}$ tal que

$$\varphi_n \to f, \quad \text{en } L^2(S^{n-1}).$$

Pero por hipótesis tenemos que $W \perp \bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{H}^n_{(d)}$, es decir

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_n, f\rangle &= 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle \varphi_n, f\rangle &= \lim_{n\to\infty} 0 = 0.
\end{aligned}$$

Luego, como el producto interno es continuo por el Lema 2.1.13, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \langle \varphi_n, f\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} \varphi_n, f\rangle = 0.$$

Además, ya que $\varphi_n \to f$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \|f\|^2_{L^2} = 0 \\
\Rightarrow f &= 0.
\end{aligned}$$

Como $f$ se tomó arbitrario en $W$, tenemos que $W = \{0\}$. Por lo tanto,

$$L^2(S^{n-1}) = \widehat{\bigoplus_{d\geq 0}} \mathcal{H}^n_{(d)}.$$

$\blacksquare$

**Corolario 4.5.5** Cada función $f \in L^2(S^{n-1})$ es la suma de una serie convergente

$$f = \sum_{d=0}^{\infty} f_d, \tag{4.18}$$

en la norma-$L^2$, donde $f_d \in \mathcal{H}^n_{(d)}$ para cada $d = 0, 1, \ldots$, son determinados de forma única y $f_d$ es la proyección ortogonal de $f$ sobre el espacio $\mathcal{H}^n_{(d)}$ de armónicos esféricos. La serie de la ecuación (4.18), recibe el nombre de **serie de Fourier-Laplace**.

**Demostración:**

Sea $P_d$ el operador de proyección de $L^2(S^{n-1})$ sobre $\mathcal{H}^n_{(d)}$ definido por

$$\begin{aligned} P_d : L^2(S^{n-1}) &\to \mathcal{H}^n_{(d)} \\ f &\mapsto f_d. \end{aligned}$$

Entonces por el Teorema 4.5 tenemos que

$$f = \sum_{d\geq 0} P_d\ f = \sum_{d\geq 0} f_d,$$

en $L^2(S^{n-1})$, donde $f_d$ es la proyección ortogonal de $f$ sobre $\mathcal{H}^n_{(d)}$ y cada $f_d$ es determinado de forma única (ver Corolario 1.9 de [14, pág. 101]).

$\blacksquare$

**Ejemplo 4.5.6** Toda la discusión anterior podemos aplicarla al círculo $S^1$. Como primer paso, calcularemos una base para $\mathcal{H}^2_{(d)}$, para $d \in \mathbb{Z}^+_0$.

Por el Ejemplo 4.3.10 sabemos que la dimensión de $\mathbb{C}[x, y]^{(d)}$ es

$$\dim \mathbb{C}[x, y]^{(d)} = \binom{2 + d - 1}{2 - 1} = \binom{d + 1}{1} = d + 1,$$

es decir que, la base para $\mathbb{C}[x, y]^{(d)}$ es

$$\mathscr{B} = \left\{x^d, x^{d-1}y, x^{d-2}y^2, \ldots, x^2y^{d-2}, xy^{d-1}, y^d\right\}.$$

Luego, un polinomio $p$ en $\mathbb{C}[x,y]^{(d)}$ tiene la forma

$$p(x,y) = \sum_{j=0}^{d} a_j x^{d-j} y^j,$$

donde $a_j \in \mathbb{C}$ para cada $j = 0, 1, \ldots, d$. Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= \sum_{j=0}^{d-1} a_j (d-j) x^{d-j-1} y^j \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= \sum_{j=0}^{d-2} a_j (d-j)(d-j-1) x^{d-j-2} y^j, \\
\frac{\partial p}{\partial y} &= \sum_{j=0}^{d-1} a_j j(j-1) x^{d-j} y^{j-1} \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= \sum_{j=0}^{d-2} a_j j(j-1) x^{d-j} y^{j-2}.
\end{aligned}$$

Recordemos que el Laplaciano hace que se reduzca el grado del polinomio en 2. Luego

$$\begin{aligned}
\Delta p &= \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \\
&= \sum_{j=0}^{d-2} a_j (d-j)(d-j-1) x^{d-j-2} y^j + \sum_{j=0}^{d-2} a_j j(j-1) x^{d-j} y^{j-2} \\
\Delta p &= \sum_{j=0}^{d-2} [a_j (d-j)(d-j-1) + a_{j+2}(j+2)(j+1)] x^{d-j-2} y^j.
\end{aligned}$$

Para que $p$ esté en $\mathcal{H}^d_{(2)}$, debe ser que $\Delta p = 0$, es decir

$$\Delta p = \sum_{j=0}^{d-2} [a_j (d-j)(d-j-1) + a_{j+2}(j+2)(j+1)] x^{d-j-2} y^j = 0,$$

sí y sólo sí

$$a_{j+2} = \frac{-a_j (d-j)(d-j-1)}{(j+2)(j+1)},$$

para $j = 0, 1, \ldots, d-2$.

Sean $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$. Entonces $a_{j+2} = 0$ para cada subíndice impar, ya que $a_1 = 0$. Así, continuaremos analizando solamente los casos en los que el subíndice de $a_{j+2}$ es par.

$$\begin{aligned} a_{0+2} &= \frac{-a_0(d-0)(d-0-1)}{(0+2)(0+1)} \\ &= -\frac{d(d-1)}{2} \\ a_2 &= (-1)^1\binom{d}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2+2} &= \frac{-a_2(d-2)(d-2-1)}{(2+2)(2+1)} \\ &= \frac{d(d-1)(d-2)(d-3)(d-4)}{4(3)(2)} \\ &= (-1)^2\binom{d}{4} \\ a_4 &= (-1)^2\binom{d}{2(2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{4+2} &= \frac{-a_4(d-4)(d-4-1)}{(4+2)(4+1)} \\ &= -\frac{d(d-1)(d-2)(d-3)(d-4)(d-5)}{6(5)(4)(3)(2)} \\ &= (-1)^3\binom{d}{6} \\ a_4 &= (-1)^3\binom{d}{2(3)}. \end{aligned}$$

Así, por recurrencia, obtenemos que

$$a_{2j} = (-1)^j\binom{d}{2j}, \quad \text{donde } a_{2j+1} = 0.$$

Bajo un proceso análogo al anterior, para $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ obtenemos que

$$a_{2j+1} = (-1)^j\binom{d}{2j+1}, \quad \text{donde } a_{2j} = 0.$$

Es decir, para que $p \in \mathcal{H}^2_{(d)}$ debe de tener la forma

$$p(x,y) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}(-1)^j\binom{d}{2j}x^{d-2j}y^{2j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}(-1)^j\binom{d}{2j+1}x^{d-2j-1}y^{2j+1},$$

donde "$\lfloor\ \rfloor$" es la función **mínimo entero**. Observemos que el primer sumando coincide con

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(x+iy)^d &= \operatorname{Re}\left[\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \binom{d}{2j} x^{d-2j} (iy)^{2j}\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \binom{d}{2j} x^{d-2j} i^{2j} y^{2j}\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \binom{d}{2j} x^{d-2j} (-1)^j y^{2j}\right] \\
\operatorname{Re}(x+iy)^d &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{d}{2j} x^{d-2j} y^{2j},
\end{aligned}$$

mientras que el segundo sumando, coincide con

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(x+iy)^d &= \operatorname{Im}\left[\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \binom{d}{2j+1} x^{d-2j-1} (iy)^{2j+1}\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \binom{d}{2j+1} x^{d-2j-1} i^{2j+1} y^{2j+1}\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \binom{d}{2j+1} x^{d-2j-1} i(-1)^j y^{2j+1}\right] \\
\operatorname{Im}(x+iy)^d &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{d}{2j+1} x^{d-2j-1} y^{2j+1},
\end{aligned}$$

es decir

$$p(x,y) = \operatorname{Re}(x+iy)^d + \operatorname{Im}(x+iy)^d.$$

De manera que, una base para $\mathcal{H}^2_{(d)}$ es

$$\mathscr{B}^2_{(d)} = \left\{ \operatorname{Re}(x+iy)^d \ , \ \operatorname{Im}(x+iy)^d \right\},$$

con dimensión 2, como lo afirma el Corolario 4.3.20.

Ahora, observemos que en el cálculo anterior, podemos considerar $d \leq 0$, teniendo en cuenta que podemos escribir cualquier punto sobre el círculo $S^1$ como

$$x + iy = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta = e^{i\theta},$$

para algún $\theta \in \mathbb{R}$ y donde $x^2 + y^2 = 1$. Por la fórmula de De Moivre sabemos que

$$\cos(d\theta) + i \operatorname{sen}(d\theta) = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^d. \tag{4.19}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
(x+iy)^{-d} &= e^{i(-d)\theta} \\
&= e^{-id\theta} \\
&= \overline{e^{id\theta}} \\
&= \overline{\cos(d\theta) + i \operatorname{sen}(d\theta)} \\
&= \cos(d\theta) - i \operatorname{sen}(d\theta) \\
&= (\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)^d, \quad \text{por la fórmula de De Moivre} \\
(x+iy)^{-d} &= (x-iy)^d.
\end{aligned}$$

Por lo que, una base para $\mathcal{H}^2_{(-d)}$ debe de ser

$$\mathscr{B}^2_{(-d)} = \left\{ \operatorname{Re}(x+iy)^d \ , \ \operatorname{Im}(x-iy)^d \right\}.$$

Además, observemos que para $d \geq 0$, podemos escribir la base de $\mathcal{H}^2_{(d)}$ como

$$\mathscr{B}^2_{(d)} = \left\{ (x+iy)^d \ , \ (x-iy)^d \right\} = \left\{ (x+iy)^d \ , \ (x+iy)^{-d} \right\}.$$

Para ello, basta con demostrar que es un conjunto linealmente independiente. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha(x+iy)^d + \beta(x-iy)^d \\
&= \alpha \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} x^{d-j}(iy)^j + \beta \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} x^{d-j}(-iy)^j \\
&= \alpha \left[ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{d}{2j} x^{d-2j} y^{2j} + i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{d}{2j+1} x^{d-2j-1} y^{2j+1} \right] \\
&\quad + \beta \left[ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{d}{2j} x^{d-2j} y^{2j} - i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{d}{2j+1} x^{d-2j-1} y^{2j+1} \right] \\
0 &= (\alpha+\beta) \left[ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{d}{2j} x^{d-2j} y^{2j} \right] + i(\alpha-\beta) \left[ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{d}{2j+1} x^{d-2j-1} y^{2j+1} \right],
\end{aligned}$$

sí y sólo sí $\alpha = \beta = 0$. Luego, por el Corolario 4.5.4 tenemos que 4.5.4 tenemos que

$$L^2(S^1) = \widehat{\bigoplus_{d \in \mathbb{Z}}} \mathbb{C}(x+iy)^d,$$

donde $\mathbb{C}(x+iy)^d$ es el espacio generado por $(x+iy)^d$. Además, sabemos que para el círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, tenemos la parametrización dada por $\theta \to e^{2\pi i\theta}$, correspondiente a la representación $S^1 \approx \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. De esta forma, para cada $f \in L^2(S^1)$ tenemos que

$$f = \sum_{d\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi ik\theta},$$

(hemos sustituido $d = k$, para no confundirlo con el diferencial $d\theta$) donde

$$c_k = \langle f, e^{2\pi ik\theta}\rangle = \int_0^1 f(\theta)e^{-2\pi ik\theta}d\theta.$$

Por lo tanto, obtenemos la serie de Fourier en $S^1$.

## 4.6. Sup-norma de armónicos esféricos.

A partir de la observación de la sección anterior, sabemos que hay una relación inmediata entre la sup-norma y la norma-$L^2(S^1)$ para las funciones $e^{in\theta}$ sobre el círculo $S^1$, ya que

$$\|e^{in\theta}\|_\infty = \sup_{x\in S^1} |e^{in\theta}| = \sup_{x\in S^1} 1 = 1,$$

mientras que

$$\|e^{in\theta}\|_{L^2} = \sqrt{\int_{S^1} |e^{in\theta}|^2\, dx} = \sqrt{\int_{S^1}\, dx} = \sqrt{1} = 1.$$

Es decir que la sup-norma y la norma-$L^2(S^1)$ coinciden en el círculo $S^1$.

Para evaluar la convergencia uniforme de las series de Fourier sobre la esfera, primero debemos ser conscientes de que, a diferencia de las funciones $e^{in\theta}$ sobre el círculo $S^1$, para $f \in \mathcal{H}^n_{(d)}$ sobre $S^{n-1}$ con $n > 1$ no hay una comparación instantánea entre la sup-norma y la norma-$L^2(S^{n-1})$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in S^{n-1}} |f(x)|, \qquad \|f\|_{L^2} = \left(\int_S |f(x)|^2\right)^{1/2}.$$

Sin embargo, un poco de trabajo da una comparación útil. Antes, recordemos el siguiente teorema.

**Teorema 4.6.1** ***(Representación de Riesz para espacios de Hilbert.)*** Cada funcional lineal acotado $f$ en un espacio de Hilbert $H$ puede representarse en términos del producto interno, es decir

$$f(x) = \langle x, z\rangle$$

donde $z$ depende de $f$ y tiene norma $\|z\| = \|f\|$ (ver Teorema 3.8-1 de [3, pág. 188]).

**Proposición 4.6.2** Sea $f \in \mathcal{H}^n_{(d)}$. Entonces

$$\|f\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\dim \mathcal{H}^n_{(d)}}{\mathrm{vol}(S)}}\, \|f\|_{L^2}.$$

Y la estimación es *aguda*, en el sentido de que hay una función en $\mathcal{H}^n_{(d)}$ para la cual se cumple la igualdad.

**Demostración:**

Para $x \in S$, por el Teorema de representación de Riesz (antes mencionado), el funcional $f \to f(x) \in \mathcal{H}^n_{(d)}$ puede representarse como

$$f(x) = \langle f, F_x \rangle, \quad \text{para algún } F_x \in \mathcal{H}^n_{(d)}. \tag{4.20}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\langle f, F_x \rangle| \\ &\leq \|f\|_{L^2}\ \|F_x\|_{L^2} \\ &= C\|f\|_{L^2}, \quad \text{donde } C = \|F_x\|_{L^2} \\ \Rightarrow |f(x)| &\leq C\|f\|_{L^2}, \end{aligned}$$

es decir que $f(x)$ está acotado en términos de su norma-$L^2$. Vamos a demostrar que $f$ está acotado independientemente del $x \in S$ que tomemos. Para ello, basta demostrar que $\|F_x\|_{L^2}$ es la misma para cada $x \in S$.

Luego por la ecuación (4.20) y como la acción es unitaria por el Corolario 4.4.5, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle f, F_{xk} \rangle &= f(xk), \quad \text{por ecuación (4.20) y por la acción} \\ &= (k \cdot f)(x), \quad \text{por la acción} \\ &= \langle k \cdot f, F_x \rangle, \quad \text{por ecuación (4.20)} \\ \langle f, F_{xk} \rangle &= \langle f, k^{-1} \cdot F_x \rangle, \quad \text{por el Corolario 4.4.5} \end{aligned}$$

Como $f$ es arbitrario, esto ultimo se cumple para todo $f \in \mathcal{H}^n_{(d)}$, por lo tanto,

$$F_{xk} = k^{-1} \cdot F_x. \tag{4.21}$$

A partir de esto observemos que

$$\begin{aligned} F_x(x) &= \langle F_x, F_x \rangle, \quad \text{por la ecuación (4.20)} \\ &= \langle k^{-1} \cdot F_x, k^{-1} \cdot F_x \rangle, \quad \text{por ser unitaria la acción} \\ &= \langle F_{xk}, F_{xk} \rangle, \quad \text{por la ecuación (4.21)} \\ F_x(x) &= F_{xk}(xk), \quad \text{por el Corolario 4.4.5} \end{aligned}$$

Además, por el Lema 4.1.33 sabemos que la acción de $SO(n)$ es transitiva sobre $S^{n-1}$, es decir que si $x, y \in S$, entonces existe un $k \in SO(n)$ tal que $xk = y$, de manera que

$$\begin{aligned}
F_y(y) &= F_{xk}(xk), \quad \text{ya que la acción es transitiva}\\
F_y(y) &= F_x(x), \quad \text{esto es por la observación anterior}\\
\Rightarrow \langle F_y, F_y\rangle &= \langle F_x, F_x\rangle, \quad \text{por la ecuación (4.20)}\\
\Rightarrow \|F_y\|_{L^2}^2 &= \|F_x\|_{L^2}^2, \quad \text{por producto interno.}
\end{aligned}$$

Esto ultimo significa que la norma-$L^2$ de la función $F_x$ es la misma para cada $x \in S$, es decir, $F_x(x)$ es independiente de $x$. Por lo tanto, $f$ está acotado.

Además, esto determina la sup-norma, ya que

$$\begin{aligned}
F_x(x) &= \|F_x\|_{L^2}^2, \quad \text{esto por ecuación (4.20)}\\
\Rightarrow |F_x(x)| &= \left|\|F_x\|_{L^2}^2\right| = \|F_x\|_{L^2}^2\\
\Rightarrow \sup_{x\in S}|F_x(x)| &= \sup_{x\in S}\|F_x\|_{L^2}^2 = \|F_x\|_{L^2}^2, \quad \text{pues la norma-}L^2 \text{ de } F_x \text{ es la misma en } S\\
\Rightarrow \|F_x\|_\infty &= \|F_x\|_{L^2}^2 = F_x(x).
\end{aligned}$$

La norma $L^2$ se evalúa como sigue. Sea $\{f_i\}_{i=1}^k$ una base ortonormal de $\mathcal{H}_{(d)}^n$, donde $k = \dim \mathcal{H}_{(d)}^n$. Como $F_x \in \mathcal{H}_{(d)}^n$ por hipótesis, entonces podemos expresar $F_x$ como

$$F_x = \sum_{i=1}^k \langle F_x, f_i\rangle f_i.$$

Evaluando ambos lados en $x$ tenemos

$$\begin{aligned}
F_x(x) &= \sum_{i=1}^k \langle F_x, f_i\rangle \ f_i(x)\\
&= \sum_{i=1}^k \overline{\langle f_i, F_x\rangle} \ f_i(x), \quad \text{por propiedad de producto interno}\\
&= \sum_{i=1}^k \overline{f_i(x)} \ f_i(x), \quad \text{por ecuación (4.20)}\\
F_x(x) &= \sum_{i=1}^k |f_i(x)|^2.
\end{aligned}$$

Integrando $F_x(x) = \sum_{i=1}^k |f_i(x)|^2$ sobre $S$ tenemos

$$\int_S F_x(x)\ dx = \int_S \sum_{i=1}^k |f_i(x)|^2\ dx. \tag{4.22}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\int_S F_x(x)\ dx &= \int_S \|F_x\|_{L^2}^2\ dx, \quad \text{esto por la ecuación (4.20)}\\
&= \|F_x\|_{L^2}^2 \int_S\ dx\\
\int_S F_x(x)\ dx &= \|F_x\|_{L^2}^2\ \operatorname{vol}(S).
\end{aligned}$$

Además, como $\{f_i\}_{i=1}^k$ son una base ortogonal de $\mathcal{H}_{(d)}^n$, entonces

$$\int_{S^{n-1}} |f_i(x)|^2\ dx = 1, \quad \text{para cada } i = 1, \ldots, k.$$

Es decir que

$$\begin{aligned}
\int_S \sum_{i=1}^k |f_i(x)|^2\ dx &= \sum_{i=1}^k \int_S |f_i(x)|^2\ dx\\
&= \sum_{i=1}^k 1\\
&= k\\
\int_S \sum_{i=1}^k |f_i(x)|^2\ dx &= \dim \mathcal{H}_{(d)}^n.
\end{aligned}$$

De manera que, en la ecuación (4.22), tenemos que

$$\begin{aligned}
\|F_x\|_{L^2}^2\ \operatorname{vol}(S^{n-1}) &= \dim \mathcal{H}_{(d)}^n\\
\Rightarrow \|F_x\|_{L^2}^2 &= \frac{\dim \mathcal{H}_{(d)}^n}{\operatorname{vol}(S^{n-1})}\\
\Rightarrow \|F_x\|_{L^2} &= \sqrt{\frac{\dim \mathcal{H}_{(d)}^n}{\operatorname{vol}(S^{n-1})}}.
\end{aligned}$$

Ahora, sólo resta recordar nuestra primera desigualdad, donde teníamos que

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq \|F_x\|_{L^2}\ \|f\|_{L^2}\\
\Rightarrow \sup_{x\in S} |f(x)| &\leq \sup_{x\in S} \|F_x\|_{L^2}\ \|f\|_{L^2}\\
\Rightarrow \sup_{x\in S} |f(x)| &\leq \|F_x\|_{L^2}\ \|f\|_{L^2}, \quad \text{pues la norma-}L^2 \text{ de } F_x \text{ es la misma en } S^{n-1}\\
\Rightarrow \|f\|_\infty &\leq \|F_x\|_{L^2}\ \|f\|_{L^2}\\
\Rightarrow \|f\|_\infty &\leq \sqrt{\frac{\dim \mathcal{H}_{(d)}^n}{\operatorname{vol}(S^{n-1})}}\ \|f\|_{L^2},
\end{aligned}$$

como lo afirma la proposición. Además, observemos que

$$\|F_x\|_\infty = \|F_x\|_{L^2}^2 = \|F_x\|_{L^2}\ \|F_x\|_{L^2} = \sqrt{\frac{\dim \mathcal{H}_{(d)}^n}{\operatorname{vol}(S)}}\ \|F_x\|_{L^2},$$

entonces la estimación es aguda, ya que para $F_x \in \mathcal{H}_{(d)}^n$ se cumple la igualdad.

■

## 4.7. Convergencia uniforme de la serie de Fourier-Laplace.

La relación en $\mathcal{H}_{(d)}^n$ entre la sup-norma y la norma-$L^2$ obtenida en la sección anterior, produce criterios útiles para determinar la convergencia uniforme de la serie de Fourier-Laplace de una función $f \in L^2(S^{n-1})$. Antes, observemos que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}_{(d)}^n &\ll \dim \mathcal{H}_{(d)}^n \\ \Rightarrow \frac{\dim \mathcal{H}_{(d)}^n}{\operatorname{vol}(S^{n-1})} &\ll \dim \mathcal{H}_{(d)}^n, \quad \text{esto es por Lema 4.3.27} \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{\dim \mathcal{H}_{(d)}^n}{\operatorname{vol}(S^{n-1})}} &\ll \sqrt{\dim \mathcal{H}_{(d)}^n}, \quad \text{esto es por Lema 4.3.28} \\ \Rightarrow \sum_{d\geq 0} \sqrt{\frac{\dim \mathcal{H}_{(d)}^n}{\operatorname{vol}(S^{n-1})}} &\ll \sum_{d\geq 0} \sqrt{\dim \mathcal{H}_{(d)}^n}, \quad \text{esto es por Observación 4.3.30.} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Teniendo esto en cuenta, pasamos a analizar el siguiente criterio de Sobolev sobre funciones en $L^2(S^{n-1})$ que es el más interesante de analizar respecto a la comparación entre dichas normas.

**Corolario 4.7.1** ***(Inmersión de Sobolev).*** Sea $f \in L^2(S^{n-1})$ con expansión de Fourier-Laplace $f = \sum_d f_d$ con $f_d \in \mathcal{H}_{(d)}^n$ y que satisface

$$\sum_{d\geq 0}(1+d)^2\ \|f_d\|_{L^2}^2 < \infty, \quad \text{para cualquier } s > \dim S^{n-1} = n-1.$$

Entonces existe algún $\phi \in C(S^{n-1})$ tal que $\phi = \sum_{d\geq 0} f_d$ en $C(S^{n-1})$, con $f = \phi$ casi en todas partes y así la expansión de Fourier-Laplace de $f$ converge uniformemente a $f$, por lo que $f$ será continua.

**Demostración:**

Para cualquier $s \in \mathbb{R}$ y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para series [3], tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{d\geq 0} f_d \right\|_\infty &= \sup_{x\in S^{n-1}} \left| \sum_{d\geq 0} f_d(x) \right| \\
&\leq \sum_{d\geq 0} \sup_{x\in S^{n-1}} |f_d(x)| \\
&\leq \sum_{d\geq 0} \sqrt{\frac{\dim \mathcal{H}^n_{(d)}}{\operatorname{vol}(S^{n-1})}}\ \|f_d\|_{L^2}, \quad \text{por la Proposición 4.6.1 y la Observación 4.3.30} \\
&\ll \sum_{d\geq 0} \sqrt{\dim \mathcal{H}^n_{(d)}}\ \|f_d\|_{L^2}, \quad \text{por la ecuación (4.23)} \\
&\ll \sum_{d\geq 0} (d)^{\frac{n-2}{2}}\ \|f_d\|_{L^2}, \quad \text{por el Corolario 4.3.29 y la Observación 4.3.30} \\
&\ll \sum_{d\geq 0} (1+d)^{\frac{n-2}{2}}\ \|f_d\|_{L^2}, \quad \text{por Observación 4.3.31} \\
&= \sum_{d\geq 0} (1+d)^{\frac{s}{2}}\ \|f_d\|_{L^2}\ \frac{1}{(1+d)^{\frac{s-(n-2)}{2}}}, \quad \text{multiplicando por } 1 = \frac{(1+d)^s}{(1+d)^s} \\
&\leq \left( \sum_{d\geq 0} (1+d)^s\ \|f_d\|^2_{L^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{d\geq 0} \frac{1}{(1+d)^{s-(n-2)}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{por Cauchy-Schwarz}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| \sum_{d\geq 0} f_d \right\|_\infty \ll \left( \sum_{d\geq 0} (1+d)^s\ \|f_d\|^2_{L^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{d\geq 0} \frac{1}{(1+d)^{s-(n-2)}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La serie de la derecha converge para cualquier $s > n-1$ (esto es porque es una serie $p$ o por el criterio de la integral). Y como por hipótesis, para cualquier $s > n-1$ tenemos

$$\sum_{d\geq 0} (1+d)^s\ \|f_d\|^2_{L^2} < \infty,$$

entonces

$$\left\| \sum_{d\geq 0} f_d \right\|_\infty < \infty.$$

[3] Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz o simplemente Desigualdad de Cauchy-Schwarz para series:

$$\left( \sum_{k\geq 0} |a_k b_k| \right) \leq \left( \sum_{k\geq 0} |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k\geq 0} |b_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Verifiquemos que $\sum\limits_{d=0}^{m} f_d$ es una sucesión de Cauchy en $C(S^{n-1})$. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y consideremos que $m \geq n$, entonces

$$\left\| \sum_{d=0}^{m} f_d - \sum_{d=0}^{n} f_d \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{d=n+1}^{m} f_d \right\|_{\infty} \leq \left\| \sum_{d \geq 0} f_d \right\|_{\infty} < \infty.$$

Por lo tanto, la sucesión $\sum\limits_{d=0}^{m} f_d$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach $C(S^{n-1})$ con la sup-norma, es decir que la sucesión $\sum\limits_{d=0}^{m} f_d$ converge a algún $\phi \in C(S^{n-1})$. Luego, por la ecuación (4.16) tenemos

$$\left\| \sum_{d} f_{d \geq 0} - \phi \right\|_{L^2} \leq \sqrt{\mathrm{vol}(S^{n-1})} \left\| \sum_{d \geq 0} f_d - \phi \right\|_{\infty},$$

entonces la sucesión de sumas parciales converge a $\phi$ en $L^2(S^{n-1})$. Por lo tanto, $f = \phi$ en $L^2(S^{n-1})$ (recordemos que, por hipótesis, la serie de Fourier-Laplace de $f$ converge a $f$), lo cual implica que $f = \phi$ casi en todas partes.

Por último, la convergencia uniforme de la sucesión de sumas parciales $\sum\limits_{d=0}^{m} f_d$ a la función $f$, se obtiene del Ejemplo 1.4.6. Teniendo en cuenta esto y que la sucesión de sumas parciales $\sum\limits_{d=0}^{m} f_d$ es continua, entonces por el Lema 1.4.4 $f$ debe de ser continua.

$\blacksquare$

## 4.8. Irreducibilidad de espacios de representación para $O(n)$.

En esta sección demostraremos que la representación de $O(n)$ sobre el espacio $\mathcal{H}_{(d)}^{n}$ es irreducible. Para este fin, damos las siguientes definiciones.

**Definición 4.8.1** Sea $V$ un espacio de Hilbert real o complejo. Llamamos ***grupo lineal general*** de $V$, al conjunto de todas las aplicaciones lineales continuas e invertibles (es decir, cuya inversa existe) de $V$ en $V$, representado por

$$GL(V) = \{T : V \to V \mid T \text{ es una aplicación lineal continua y } T^{-1} \text{ existe}\}.$$

**Definición 4.8.2** Sea $G$ un grupo topológico metrizable y $V$ un espacio de Hilbert (real o complejo) de dimensión finita. Una ***representación*** de $G$ sobre $V$ es un homomorfismo de grupos $\eta : G \to GL(V)$, tal que la acción (ver Definición 4.1.28)

$$\begin{aligned} \phi : G \times V &\to V \\ (x, v) &\mapsto \eta(x)v, \end{aligned}$$

es continua.

**Definición 4.8.3** Decimos que una representación $\eta$ de $G$ sobre $V$ es ***unitaria***, si para $x \in G$ el operador $\eta(x)$ es unitario sobre $V$, es decir,

$$\langle \eta(x)v, \eta(x)w \rangle = \langle v, w \rangle, \quad \text{para cada } v, w \in V \text{ y cada } x \in G.$$

**Definición 4.8.4** Sea $\eta$ una representación de $G$ sobre $V$. Decimos que un subespacio $W \subseteq V$ es ***invariante*** para la representación $\eta$, si $\eta(x)W \subseteq W$ para cada $x \in G$.

**Definición 4.8.5** Una representación $\eta$ se dice que es ***irreducible***, si los únicos subespacios invariantes de $V$ son el subespacio $\{0\}$ y el mismo $V$.

Consideremos el grupo topológico metrizable $O(n)$. Sabemos que $O(n)$ es un grupo topológico metrizable (ver Definición 4.1.24) ya que es un subgrupo cerrado del grupo topológico metrizable $GL_n(\mathbb{R})$ del Ejemplo 4.1.25. Además, como $\mathcal{H}^n_{(d)}$ es de dimensión finita por el Corolario 4.3.20 y sabemos que es un espacio pre-Hilbert, entonces por la Proposición 2.1.18, $\mathcal{H}^n_{(d)}$ es un espacio de Hilbert y es de dimensión finita. Así, podemos definir una representación de $O(n)$ sobre $\mathcal{H}^n_{(d)}$, como sigue

$$\begin{aligned} \pi_d : O(n) &\to GL(\mathcal{H}^n_{(d)}) \\ g &\mapsto \pi_d(g)f(x) = f(xg), \end{aligned} \tag{4.24}$$

para todo $g \in O(n)$, $f \in \mathcal{H}^n_{(d)}$ y $x \in S^{n-1}$. A continuación, demostramos algunas propiedades de la representación $\pi_d$.

**Lema 4.8.6** La representación $\pi_d$ es unitaria.

**<u>Demostración:</u>**

Observemos que, la representación $\pi_d$ es equivalente a la acción de $O(n)$ sobre funciones continuas $f$ en la esfera $S^{n-1}$, como se hizo en la Definición 4.1.43, es decir,

$$(g \cdot f)(x) = f(xg), \quad \text{donde } g \in O(n) \text{ y } x \in S^{n-1}.$$

Si $f \in \mathcal{H}^n_{(d)}$, entonces $f$ ya es continua. Luego, la representación $\pi_d$ es equivalente a la acción de $O(n)$ sobre funciones $f \in \mathcal{H}^n_{(d)}$. Teniendo esto en cuenta, demostremos que $\pi_d$ es unitaria. Sean $f, h \in \mathcal{H}^n_{(d)}$ y $g \in O(n)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \pi_d(g)f, \pi_d(g)h \rangle &= \langle g \cdot f, g \cdot h \rangle \\ \langle \pi_d(g)f, \pi_d(g)h \rangle &= \langle f, h \rangle, \quad \text{esto por el Corolario 4.4.5.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\pi_d$ es unitaria.

■

**Lema 4.8.7** Cada subespacio $V \subseteq \mathcal{H}^n_{(d)}$ es invariante para la representación $\pi_d$.

**Demostración:**

Si $V = \{0\}$, entonces no hay nada más que hacer, pues $\pi_d(g)\{0\} = \{0\}$, para cada $g \in O(n)$. Ahora, supongamos que $V \neq \{0\}$. Como $V \neq \{0\}$, entonces existe $f \in V$, tal que $f$ no es idénticamente cero. Es decir, existe un $x \in S^{n-1}$ tal que $f(x) \neq 0$. Sea $g \in O(n)$, entonces

$$\pi_d(g)f(x) = f(xg),$$

como $xg \in S^{n-1}$ y $f$ es un polinomio definido en la esfera $S^{n-1}$, entonces $f(xg) \in V$. Como $g$ se tomó arbitrario en $O(n)$, entonces $\pi_d(g)V \subseteq V$ para cada $g \in O(n)$. Por lo tanto, $V$ es invariante para la representación $\pi_d$.

■

Diremos que $V \subseteq \mathcal{H}^n_{(d)}$ es $\boldsymbol{O(n)}$**-invariante**, para abreviar el hecho de que $V$ es invariante para la representación $\pi_d$.

**Lema 4.8.8** La representación $\pi_d$ es irreducible sí y sólo sí para cualquier $f \in \mathcal{H}^n_{(d)}$ (no idénticamente cero), la colección de combinaciones lineales finitas de traslaciones de $g \in O(n)$ por $f$ es todo $\mathcal{H}^n_{(d)}$.

**Demostración:**

Supongamos que la representación $\pi_d$ de la ecuación (4.24) es irreducible. Sea $V \subseteq \mathcal{H}^n_{(d)}$, con $V \neq \{0\}$. Como $\pi_d$ es irreducible por hipótesis, entonces

$$\pi_d(g)V = \mathcal{H}^n_{(d)},$$

para cada $g \in O(n)$. En particular, si $f \in V$, tal que $f$ no es idénticamente cero, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_d(g_i) f = \mathcal{H}^n_{(d)},$$

donde $g_i \in O(n)$ y donde $\alpha_i \in \mathbb{C}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ahora, supongamos que para cualquier $f \in \mathcal{H}^n_{(d)}$ (no idénticamente cero), la colección de combinaciones lineales finitas de traslaciones de $g \in O(n)$ por $f$ es todo $\mathcal{H}^n_{(d)}$. Supongamos que $V \neq \{0\}$ es un subespacio invariante de $\mathcal{H}^n_{(d)}$, entonces existe algún $f \in V$ que no es idénticamente cero. Luego, como $V$ es invariante, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_d(g_i) f = \mathcal{H}^n_{(d)} \subseteq V,$$

por lo tanto, debe de ser que $\pi_d(g)V = \mathcal{H}^n_{(d)}$.

■

**Ejemplo 4.8.9** Consideremos el grupo topológico metrizable $O(2)$ y el espacio de Hilbert $\mathcal{H}^2_{(2)}$. Para comenzar, definimos la acción de $O(2)$ sobre $\mathcal{H}^2_{(2)}$, como lo hicimos en la Definición 4.1.43, es decir, la acción de $k \in O(2)$ sobre funciones $f \in \mathcal{H}^2_{(2)}$ del círculo $S^1$ es

$$(k \cdot f)(x) = f(xk), \quad x \in S^1. \tag{4.25}$$

Verificaremos que para cualquier $f \in \mathcal{H}^2_{(2)}$, la colección de combinaciones lineales de $(k \cdot f)(x) = f(xk)$ con $k \in O(2)$ y $x \in S^1$ es todo $\mathcal{H}^2_{(2)}$. Sabemos por el Ejemplo 4.3.21 que una de las base de $\mathcal{H}^2_{(2)}$ es

$$\mathscr{B}^2_{(2)} = \left\{ x^2 - y^2, xy \right\}.$$

Así, consideremos $f(x,y) = x^2 - y^2$, un elemento de la base de $\mathcal{H}^2_{(2)}$. Sea $k \in O(2)$ la matriz de la forma

$$k = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

donde $a^2 + b^2 = 1$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Verifiquemos que $k \in O(2)$, es decir, si cumple que $k\ k^\top = 1_2$

$$\begin{aligned}
k\ k^\top &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & -ab + ba \\ -ab + ab & b^2 + a^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \\
k\ k^\top &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

de manera que, $k \in O(2)$. Ahora, procedemos a calcular $xk$

$$xk = (x, y)\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = (ax - by, bx + ay),$$

es decir que

$$\begin{aligned} f(xk) &= f(ax - by, bx + ay) \\ &= (ax - by)^2 - (bx + ay)^2 \\ &= a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 - b^2x^2 - 2abxy - a^2y^2 \\ &= (a^2 - b^2)x^2 - (a^2 - b^2)y^2 - 4abxy \\ f(xk) &= (a^2 - b^2)(x^2 - y^2) - (4ab)xy. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Como podemos observar, $f(xk)$ es una combinación lineal de los elementos de $\mathscr{B}^2_{(2)}$, lo que significa que si tomamos una función cualquiera de $\mathcal{H}^2_{(2)}$ y aplicamos la acción de $O(2)$ adecuadamente, podremos obtener todo el espacio $\mathcal{H}^2_{(2)}$.

Por otra parte, podemos preguntarnos: ¿Qué valores $a, b$ de $k \in O(2)$, nos llevan de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ a otra función $xy \in \mathcal{H}^2_{(2)}$?. Para encontrar dichos valores $a, b \in \mathbb{R}$, procedemos a resolver la ecuación (4.26) con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 = 0 \qquad & \text{y} \qquad -4ab = 1 \\ \Rightarrow a^2 = b^2 \qquad & \text{y} \qquad ab = -\frac{1}{4} \\ \Rightarrow a = \pm b \qquad & \text{y} \qquad ab = -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

- Si $a = b$, entonces

  $$\begin{aligned} b^2 &= -\frac{1}{4} \\ \Rightarrow b &= \pm\frac{i}{2}, \end{aligned}$$

  pero $b \in \mathbb{R}$, así que $a \neq b$.

- Si $a = -b$, entonces

  $$\begin{aligned} b^2 &= \frac{1}{4} \\ \Rightarrow b &= \pm\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

  de manera que $a = \mp\frac{1}{2}$.

Es decir, las matrices $k_1, k_2 \in O(2)$, que nos llevan de $f(x, y) = x^2 - y^2$ a $xy$, son

$$k_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad k_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

**Teorema 4.8.10** Los espacios de Hilbert $\mathcal{H}^n_{(d)}$ son irreducibles para $O(n)$, en el sentido de que sus únicos subespacios cerrados invariantes bajo la acción de $O(n)$ son $\{0\}$ o todo el espacio $\mathcal{H}^n_{(d)}$.

**Demostración:**

Demostraremos que para cada subespacio no nulo $O(n)$-invariante de cualquier espacio $\mathcal{H}^n_{(d)}$ contiene un vector $O(n-1)$-fijo distinto de cero, donde $O(n-1)$ es el subgrupo de isotropía (ver Definición 4.1.34) del último elemento básico estándar $e_n$, es decir [4]

$$O(n)_{e_n} = \left\{ k = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in O(n-1),\ e_n k = e_n \right\} \approx O(n-1),$$

y decimos que $F$ es un vector $O(n-1)$-fijo, si para cada $g \in O(n-1)$ se cumple que

$$\pi_d(g)F = F,$$

donde $\pi_d$ es la representación definida en la ecuación (4.24).

Luego se demostrará que cada $\mathcal{H}^n_{(d)}$ contiene un único vector $O(n-1)$-fijo. Además, por el Lema 4.8.7 sabemos que el complemento ortogonal de todo subespacio de $\mathcal{H}^n_{(d)}$ es también $O(n)$-invariante. Por lo que, si $\mathcal{H}^n_{(d)}$ no fuera irreducible, habría al menos un espacio bidimensional de $O(n-1)$-vectores fijos en $\mathcal{H}^n_{(d)}$, lo que generaría una contradicción.

Para empezar, recordemos cómo está definida la acción de $O(n)$ sobre la esfera $S^{n-1}$, es decir,

$$\begin{aligned} O(n) \times S^{n-1} &\to S^{n-1} \\ (g, x) &\mapsto xg, \end{aligned}$$

para cada $x \in S^{n-1}$ y $g \in O(n)$. Además, esta acción es transitiva (su demostración es análoga a como se hizo en el Lema 4.1.33), es decir que para cada $x, y \in S^{n-1}$ existe $g \in O(n)$ tal que $xg = y$.

Ahora, definamos una acción (ver Definición 4.1.28) de $O(n-1)$ sobre funciones continuas $\varphi$ en $O(n-1)$, como

$$(h \cdot \varphi) = \varphi(yh), \qquad \text{para } y, h \in O(n-1). \tag{4.27}$$

Verifiquemos este hecho, es decir, que se cumplen las propiedades de la Definición 4.1.28. Sean $y, h_1, h_2 \in O(n-1)$ y $\varphi$ una función continua en $O(n-1)$.

- Verificando que se cumple la propiedad (AG1).

$$\begin{aligned} ((h_1h_2) \cdot \varphi)(y) &= \varphi(y(h_1h_2)) \\ &= \varphi((yh_1)h_2) \\ &= (h_2 \cdot \varphi)(yh_1) \\ ((h_1h_2) \cdot \varphi)(y) &= (h_1 \cdot (h_2 \cdot \varphi))(y). \end{aligned}$$

[4] La prueba de que $O(n)_{e_n} \approx O(n-1)$, es análoga a la prueba que hicimos en el Corolario 4.1.37 con $SO(n)$.

- Verificando que se cumple la propiedad (AG2).

$$(1_n \cdot \varphi)(y) = \varphi(y\ 1_n) = \varphi(y).$$

Por último, ya que para cada $y, h \in O(n-1)$ tenemos que $yh \in O(n-1)$ y como $\varphi$ es continua en $O(n-1)$ entonces $\varphi(yh)$ es continua. Por lo tanto, la acción está bien definida.

Necesitaremos una integral invariante sobre $O(n-1)$. Es decir, con la acción definida anteriormente, queremos que para cada función continua $\varphi$ en $O(n-1)$

$$\int_{O(n-1)} (h \cdot \varphi)(y)\ dy = \int_{O(n-1)} \varphi(y)\ dy.$$

esta es una integral de una función que toma valores vectoriales. [5]

Tenitendo esto en cuenta, procedemos con la demostración del lema.

Sea $\pi_d$ la representación de $O(n)$ sobre $\mathcal{H}^n_{(d)}$, como se definió en la ecuación (4.24). Sea $V \neq \{0\}$ un subespacio de $\mathcal{H}^n_{(d)}$ y por el Lema 4.8.7, sabemos que $V$ es $O(n)$-invariante. Probaremos que $V$ contiene un vector $O(n-1)$-fijo. Como $V \neq \{0\}$, entonces existe $h \in \mathcal{H}^n_{(d)}$, tal que $h$ no es idénticamente cero. Es decir, existe $x \in S^{n-1}$ tal que $h(x) \neq 0$. Pero, nosotros necesitamos que, específicamente, en $e_n$ la función sea distinto de cero. Para ello, recordemos que la acción de $O(n)$ sobre la esfera $S^{n-1}$ es transitiva, es decir que existe $k \in O(n)$, tal que $e_n k = x$. Teniendo esto en cuenta y que $V$ es $O(n)$-invariante, entonces

$$\pi_d(k)h(e_n) = h(e_n k) = h(x) \neq 0,$$

de manera que si consideramos $f(x) = \pi_d(k)h(x)$, entonces $f(e_n) \neq 0$.

Ahora, consideremos la siguiente función

$$F = \int_{O(n-1)} \pi_d(g) f\ dg,$$

[5] Esta integral es llamada **Integral débil** o **Integral de Gelfand-Pettis** (ver Capítulo 14 de [10, pág. 416]) y se define así: para un espacio topológico $V$ sobre $\mathbb{C}$ y una función continua $f$ en un espacio topológico $X$ con medida de Borel, una integral Gelfand-Pettis de $f$ es un vector $I_f \in V$ tal que

$$\lambda(I_f) = \int_X \lambda \circ f, \qquad \text{para todo } \lambda \in V.$$

Si existe y es único este vector $I_f$ se describe como

$$I_f = \int_X f.$$

donde $f(x) = \pi_d(k)h(x)$. Verifiquemos que $F$ es un vector $O(n-1)$-fijo. Sea $h \in O(n-1)$

$$\begin{aligned}
\pi_d(h)F &= \pi_d(h) \int_{O(n-1)} \pi_d(g) f \; dg \\
&= \int_{O(n-1)} [\pi_d(h)\pi_d(g)] f \; dg \\
&= \int_{O(n-1)} \pi_d(hg) f \; dg \\
&= \int_{O(n-1)} \pi_d(g) f \; dg, \quad \text{sustituyendo } g \text{ por } h^{-1}g. \\
\pi_d(h)F &= F.
\end{aligned}$$

Ya que la integral que hemos definido es $O(n-1)$-invariante, entonces la acción transitiva de $O(n)$ sobre la esfera $S^{n-1}$ se puede mover dentro de la integral, cuando la integral se ve como una integral de una función con valor $\mathcal{H}^n_{(d)}$ en $O(n-1)$. Luego, observemos que $F$ no es idénticamente 0, ya que al menos en el punto $e_n$, se verifica que

$$\begin{aligned}
F(e_n) &= \int_{O(n-1)} \pi_d(g) f(e_n) \; dg \\
&= \int_{O(n-1)} f(e_n g) \; dg \\
&= \int_{O(n-1)} f(e_n) \; dg, \quad \text{ya que } g \in O(n-1) \\
F(e_n) &= f(e_n) \int_{O(n-1)} 1 \; dg,
\end{aligned}$$

es decir que, $F(e_n)$ es un múltiplo constante de $f(e_n) \neq 0$. Por lo tanto, sobre la integración en $O(n-1)$, cualquier subespacio cerrado $O(n)$-invariante $V \neq \{0\}$ de $\mathcal{H}^n_{(d)}$ contiene un vector $O(n-1)$-fijo, $F \neq 0$.

Ahora, sea $W$ el complemento ortogonal de $V$ dentro de $\mathcal{H}^n_{(d)}$. Por el Lema 4.8.7, $W$ es $O(n)$-invariante. Por lo tanto, si $W \neq \{0\}$, entonces $W$ tiene un vector $O(n-1)$-fijo distinto de cero.

Ahora, demostraremos que $\mathcal{H}^n_{(d)}$ tiene a lo sumo un vector $O(n-1)$-fijo, salvo múltiplos escalares. Una función $f$ que es $O(n-1)$-invariante puede escribirse como

$$f(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) = F(\rho, x_n) \quad \text{donde } \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2}.$$

Usaremos subíndices para denotar derivadas parciales con respecto al primer y segundo argumento de $F$. Así, tenemos que el Laplaciano de $F$ es

$$\Delta(F(\rho, x_n)) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i F_1}{\rho}\right) + F_{22},$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_iF_1}{\rho}\right) &= \frac{\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(x_iF_1)\right]\rho - \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho)\right]x_iF_1}{\rho^2} \\
&= \frac{\left(F_1 + \frac{x_i^2F_{11}}{\rho}\right)\rho - \left(\frac{x_i}{\rho}\right)(x_iF_1)}{\rho^2} \\
\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_iF_1}{\rho}\right) &= \frac{\rho^2F_1 + \rho x_i^2F_{11} - x_i^2F_1}{\rho^3},
\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\Delta(F(\rho, x_n)) &= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\rho^2F_1 + \rho x_i^2F_{11} - x_i^2F_1}{\rho^3} + F_{22} \\
&= \frac{(n-1)F_1}{\rho} + \frac{\rho^2F_{11}}{\rho^2} - \frac{\rho^2F_1}{\rho^3} + F_{22} \\
&= \frac{(n-1)F_1}{\rho} + F_{11} - \frac{F_1}{\rho} + F_{22} \\
\Delta(F(\rho, x_n)) &= \frac{(n-2)F_1}{\rho} + F_{11} + F_{22}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la condición armónica en tales funciones es

$$\Delta(F(\rho, x_n)) = \frac{(n-2)F_1}{\rho} + F_{11} + F_{22} = 0. \tag{4.28}$$

Tenga en cuenta que la $O(n-1)$-invarianza implica además que $F(\rho, y)$ es una función par de $\rho$. Usando la homogeneidad, $F(0,1) = f(e_n) = 1$, y la paridad, escribimos

$$F(\rho, y) = y^d + c_2y^{d-2}\rho^2 + c_4y^{d-4}\rho^4 + \cdots + c_{2j}y^{d-2j}\rho^{2j} + c_{2j+2}y^{d-2j-2}\rho^{2j+2} + \cdots$$

donde $F(\rho, y)$ es un polinomio homogéneo de grado $d$. Ahora, a $F(\rho, y)$ le aplicaremos la condición armónica de la ecuación (4.28), para resolver recursivamente los coeficientes como sigue

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{n-2}{\rho}F_1 + F_{11} + F_{22}\right)\left(y^d + c_2y^{d-2}\rho^2 + c_4y^{d-4}\rho^4 + \cdots\right. \\
&\quad \left.+ c_{2j}y^{d-2j}\rho^{2j} + c_{2j+2}y^{d-2j-2}\rho^{2j+2} + \cdots\right) \\
&= d(d-1)y^{d-2} + c_2\left[\frac{n-2}{\rho}y^{d-2}(2\rho) + y^{d-2}(2) + (d-2)(d-3)y^{d-4}\rho^2\right] \\
&\quad + c_4\left[\frac{n-2}{\rho}y^{d-4}(4\rho^3) + y^{d-4}[(4)(3)\rho^2] + (d-4)(d-5)y^{d-6}\rho^4\right] + \cdots \\
&\quad + c_{2j}\left[\frac{n-2}{\rho}y^{d-2j}(2j\rho^{2j-1}) + y^{d-2j}[(2j)(2j-1)\rho^{2j-2}] + (d-2j)(d-2j-1)y^{d-2j-2}\rho^{2j}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ c_{2j+2}\left[\frac{n-2}{\rho}y^{d-2j-2}[(2j+2)\rho^{2j+1}] + y^{d-2j-2}[(2j+2)(2j+1)\rho^{2j}]\right.\\
&\left.+(d-2j-2)(d-2j-3)y^{d-2j-4}\rho^{2j+2}\right] + \cdots\\
={}& d(d-1)y^{d-2} + c_2\left[2(n-2)y^{d-2} + 2y^{d-2} + (d-2)(d-3)y^{d-4}\rho^2\right]\\
&+ c_4\left[4(n-2)y^{d-4}\rho^2 + 12y^{d-4}\rho^2 + (d-4)(d-5)y^{d-6}\rho^4\right] + \cdots\\
&+ c_{2j}\left[2j(n-2)y^{d-2j}\rho^{2j-2} + 2j(2j-1)y^{d-2j}\rho^{2j-2} + (d-2j)(d-2j-1)y^{d-2j-2}\rho^{2j}\right]\\
&+ c_{2j+2}\left[(2j+2)(n-2)y^{d-2j-2}\rho^{2j} + (2j+2)(2j+1)y^{d-2j-2}\rho^{2j}\right.\\
&\left.+(d-2j-2)(d-2j-3)y^{d-2j-4}\rho^{2j+2}\right] + \cdots\\
={}& d(d-1)y^{d-2} + c_2\left[2(n-1)y^{d-2} + (d-2)(d-3)y^{d-4}\rho^2\right]\\
&+ c_4\left[4(n+1)y^{d-4}\rho^2 + (d-4)(d-5)y^{d-6}\rho^4\right] + \cdots\\
&+ c_{2j}\left[2j(n+2j-3)y^{d-2j}\rho^{2j-2} + (d-2j)(d-2j-1)y^{d-2j-2}\rho^{2j}\right]\\
&+ c_{2j+2}\left[(2j+2)(n+2j-1)y^{d-2j-2}\rho^{2j} + (2j+2)(2j+1)y^{d-2j-2}\rho^{2j}\right.\\
&\left.+(d-2j-2)(d-2j-3)y^{d-2j-4}\rho^{2j+2}\right] + \cdots\\
0 ={}& [d(d-1) + c_2(2n-1)]y^{d-2} + [c_2(d-2)(d-3) + 4c_4(n+1)]y^{d-4}\rho^2 +\\
&\cdots + [c_{2j}(d-2j)(d-2j-1) + c_{2j+2}(2j+2)(n+2j-1)]y^{d-2j-2}\rho^{2j} + \cdots
\end{aligned}
$$

Por ejemplo, igualar a cero los coeficientes de $y^{d-2}$ da

$$
\begin{aligned}
d(d-1) + c_2(2n-1) &= 0\\
\Rightarrow c_2 &= -\frac{d(d-1)}{2n-1},
\end{aligned}
$$

donde $2n-1 \neq 0$, ya que $n \in \mathbb{N}$ y así, el coeficiente $c_2$ queda completamente determinado. De igual forma, igualando a cero los coeficientes de $y^{d-2j-2}\rho^{2j}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
c_{2j}(d-2j)(d-2j-1) + c_{2j+2}(2j+2)(n+2j-1) &= 0\\
\Rightarrow c_{2j+2} &= -\frac{c_{2j}(d-2j)(d-2j-1)}{(2j+2)(n+2j-1)},
\end{aligned}
$$

donde $(2j+2)(n+2j-1) \neq 0$, ya que $j, n \in \mathbb{N}$ y así, el coeficiente $c_{2j+2}$ queda completamente determinado.

Así, para que $F(\rho, y) \in \mathcal{H}^n_{(d)}$, debe ser de la forma

$$
F(\rho, y) = y^d - \frac{d(d-1)}{2n-1}y^{(d-2)}\rho^2 - \cdots - \frac{c_{2j}(d-2j)(d-2j-1)}{(2j+2)(n+2j-1)}y^{d-2j-2}\rho^{2j+2} - \cdots .
$$

Por lo tanto, salvo múltiplos escalares, hay un único vector $O(n-1)$-fijo, $F(\rho, y)$, en $\mathcal{H}^n_{(d)}$.

La existencia del vector $O(n-1)$-fijo ya estaba probada, integrando sobre $O(n-1)$. Además, habíamos probado que cualquier subespacio $O(n)$-invariante $V \neq \{0\}$ de $\mathcal{H}^n_{(d)}$ contiene un vector $O(n-1)$-fijo distinto de cero y que si, $W$ es el complemento ortogonal de $V$ dentro de $\mathcal{H}^n_{(d)}$ y si suponemos que $W \neq \{0\}$, entonces $W$ también tiene un vector $O(n-1)$-fijo distinto de cero. Pero acabamos de demostrar que, salvo múltiplos escalares, $\mathcal{H}^n_{(d)}$ tiene un único vector $O(n-1)$-fijo, $F$ distinto de cero. Así, supongamos que $\alpha F \in V$ y $\beta F \in W$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $\alpha \neq \beta$, entonces

$$0 = \langle \alpha F, \beta F \rangle = \alpha \overline{\beta} \langle F, F \rangle,$$

como $F \neq 0$ por hipótesis, entonces debe de ser que $\alpha\overline{\beta} = 0$. Ahora, si $\alpha = 0$, entonces $\alpha F = 0$ en $V$, de manera que $V = \{0\}$. Si $\overline{\beta} = 0$, entonces $\beta = 0$ y $\beta F = 0$ en $W$, de manera que $W = \{0\}$. Por lo tanto, la representación de $O(n)$ sobre $\mathcal{H}^n_{(d)}$ es irreducible.

■

# Bibliografía


[1] Anton Deitmar, *A first Course in Harmonic Analysis*, segunda edición, University of Exeter, USA, 2005.

[2] Paul Garret, *Harmonic Analysis on Spheres I*, University of Minnesota, USA, 2014.

[3] Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, primera edicion, University of Windsor, USA, 1978.

[4] James R. Munkres, *Topología*, segunda edición, Massachusetts Institute of Tecnology, USA, 2000.

[5] C. Wayne Patty, *Foundations of Topology*, Virginia Politechnic Institute and State University, Boston, USA, 1993.

[6] Glen E. Bredon, *Topology and Geometry*, Rutgers University, New Brunswick, USA, 2000.

[7] Jordan Bell, *Harmonic polynomials and the spherical Laplacian*, University of Toronto, USA, Agosto 2015.

[8] Bernard Kolman, David R. Hill, *Álgebra Lineal*, octava edicion, México, 2006.

[9] Jean Gallier, *Notes on Spherical Harmonics and Linear Representations of Lie Groups*, University of Pennsylvania, Philadelphia, USA, 2013.

[10] Paul Garret, *Modern analysis of automorphic forms by examples*, Cambridge University, USA, 2017.

[11] Helmut Groemer, *Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics*, Cambridge University, USA, 1996.

[12] A.J. Hildebrand, *Introduction to Analytic Number Theory*, University of Illinois, USA, 2009.

[13] Walter Rudin, *Functional Analysis*, segunda edición, University of Wisconsin, USA, 1991.

[14] Serge Lang, *Real and Functional Analysis*, tercera edición, Yale University, USA, 1993.

# Índice alfabético