UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

SECCIÓN DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE GRADO:

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA MULTILINEAL.

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA.

PRESENTADO POR:

ROMERO DE REYES, EDITH TEODORA.

BERRIOS GÁMEZ, HERNÁN ANTONIO.

DOCENTE DIRECTOR:

LIC. PEDRO FLORES SÁNCHEZ.

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, 10 DE NOVIEMBRE 2020

SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTRO AMÉRICA.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

MTRO. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO.
RECTOR

PHD. RAÚL ERNESTO AZCÚNAGA LÓPEZ.
VICERECTOR ACADÉMICO

ING. JUAN ROSA QUINTANILLA.
VICERECTOR ADMINISTRATIVO

ING. FRANCISCO ALARCÓN.
SECRETARIO GENERAL

LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN.
FISCAL GENERAL

LIC. LUIS ANTONIO MEJÍA LIPE.
DEFENSOR DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

LIC. CRISTÓBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ.

DECANO

LIC. OSCAR VILLALOBOS.

VICEDECANO

LIC. ISRAEL LÓPEZ MIRANDA.

SECRETARIO INTERINO

LIC. JORGE PASTOR FUENTES CABRERA.

DIRECTOR GENERAL DE PROCESOS DE GRADUACIÓN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

SECCIÓN DE MATEMÁTICAS

AUTORIDADES

MTRA. KARLA MARÍA MEJÍA ORTÍZ.
JEFE DEL DEPARTAMENTO

LICDA. MARÍA OLGA QUINTANILLA DE LOVO.
COORDINADORA DE LA CARRERA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

LIC. ABEL MARTÍNEZ LÓPEZ.
COORDINADOR DE PROCESOS DE GRADUACIÓN

TRIBUNAL EVALUADOR

LIC. PEDRO FLORES SÁNCHEZ.

JURADO ASESOR

LICDA. MARÍA OLGA QUINTANILLA DE LOVO.

JURADO CALIFICADOR

LICDA. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ.

JURADO CALIFICADOR

AGRADECIMIENTOS

Dios, tu amor y tu bondad no tienen fin, me permites sonreír ante todos mis logros que son resultado de tu ayuda, y cuando caigo y me pones a prueba, aprendo de mis errores y me doy cuenta de los pones en frente mío para que mejore como ser humano, y crezca de diversas maneras.

Este trabajo de tesis ha sido una gran bendición en todo sentido y te lo agradezco.

Gracias a mis padres por ser los principales promotores de mis sueños, gracias a ellos por cada día confiar y creer en mí y en mis expectativas, gracias por siempre desear y anhelar siempre lo mejor para mi vida, gracias por cada consejo y por cada una de sus palabras que me guiaron durante mi vida Gracias a mi esposo por entenderme en todo, gracias a el porque en todo momento fue un apoyo incondicional en mi vida, Gracias a mi hijo por ser la fuente de mi esfuerzo y todas las energías requeridas en este, gracias por ser el motor de mi vida A cada uno de los licenciados que han formado parte en el desarrollo de mi carrera y en especial a mi asesor de tesis el Lic. Pedro Flores Sánchez por acompañarnos en el camino de nuestro trabajo y por ser comprensible y tolerante con nosotros..

Edith Teodora Romero de Reyes.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente quiero agradecer a Dios por darme la oportunidad de concluir mi carrera profesional, a cada uno de mis maestros que me han formado en el desarrollo de mi carrera y en especial a mi asesor de tesis el Lic. Pedro Flores Sánchez por acompañarnos en el camino de nuestro trabajo y por ser comprensible y tolerante con nosotros...

Agradezco a mi compañera de tesis de igual manera por estar conmigo en el desarrollo y conocimiento de este trabajo.

A mi familia, que han sido el motivo de mi esfuerzo en especial a mi hijo William Armando quien es el que me impulsa a poderle dar un buen ejemplo y a mi madre quien siempre me a empujado a concluir mi carrera.

Agradezco infinitamente a cada uno de las personas que han estado día a día en mi camino de mi carrera profesional.

A Cada uno de ellos le dedico el poder concluir dicha carrera.

Gracias.

Hernán Antonio Berrios Gámez

Índice

Introducción x

Justificación xii

Objetivos xiii

Notas históricas xiv

1.

Espacios vectoriales. **21**

1.1. Espacio vectorial 22

1.2. Subespacio vectorial 25

1.3. Funciones Lineales 28

1.4. Espacios Vectoriales de Dimensión Finita 33

1.5. La Matriz Asociada a una Transformación Lineal 39

2.

Formas y Operadores. **46**

2.1. Formas Bilineales 47

3.

Álgebra Multilineal. **58**

3.1. Producto Tensorial 59

Bibliografía **66**

Introducción

El álgebra multilineal es una área de estudio que generaliza los métodos de álgebra lineal. Los objetos de estudio son los productos tensoriales de espacios vectoriales y las transformaciones multilineales.

El trabajo de investigación consta de tres capítulos. El primer capítulo corresponde a un contenido preliminar como son la teoría de espacios y subespacios vectoriales, la dependencia e independencia lineal, finalizando con bases y dimensiones de los mismos. En el capítulo dos, se aborda el concepto de función bilineal y de las operaciones que con esta se pueden realizar, mostrando las relaciones que existen entre las bases de los espacios vectoriales, mientras que en el capítulo restante desarrolla el álgebra multilineal correspondiente al producto tensorial, el concepto de “Producto Tensorial” es usado para construir el álgebra tensorial sobre un espacio vectorial dado.

El texto que se ha elaborado es de naturaleza Teórico-Ejemplificativo, ha sido redactado en lenguaje simple, que se expone en forma sistemática, concisa y concreta; los fundamentos teóricos, los ejemplos, y las pruebas de Teoremas esenciales para la definición de los elementos del Álgebra Multilineal.

La metodología empleada en el desarrollo de esta investigación es expositiva, demostrativa, y deductiva; Los ejemplos han sido conseguidos y desarrollados de varias fuentes bibliográficas, estableciendo un enfoque lo más comprensible posible, que permita la comprensión de los fundamentos, lemas, teoremas y problemas propuestos. El principal objetivo para la investigación es presentar en forma detallada, clara y coherente las pautas para la inmersión al mundo del Álgebra Multilineal.

Justificación

La intención o propósito de este trabajo de graduación es proporcionar un documento a partir del cual el estudiante de licenciatura en matemática adquiera mayor exhaustividad y profundidad posible en el estudio a la introducción al álgebra multilineal debido a que el álgebra con frecuencia constituye el primer eslabón del estudiante con disciplinas posteriores en su estudio. Reconocemos que la álgebra multilineal es aplicable a múltiples ramas de la ciencia.

Este documento se enfoca en temas básicos como son espacios vectoriales, subespacios vectoriales, funciones lineales y bilineales.

Además se tiene como eje principal explicar detalladamente el producto tensorial que puede ser aplicado en diversos contextos, a vectores, matrices, tensores, y con esto obtener una mejor comprensión del tema.

Esto pretende motivar a los estudiantes para que se interesen en el estudio del álgebra multilineal, incluso se espera que con el desarrollo de todos los contenidos se logre enriquecer el conocimiento matemático de los interesados.

Objetivos

- Objetivos General

    - Proponer un texto introductorio al Álgebra Multilineal desde un enfoque de espacios vectoriales.

- Objetivos Específicos

    - Establecer los temas básicos del álgebra lineal necesarios para la compresión de las funciones bilineales.

    - Describir las propiedades necesarias de las funciones bilineales.

    - Explicar el concepto de producto tensorial.

Notas históricas

Espacios Vectoriales, Funciones Lineales, Subespacios Vectoriales y Espacios Vectoriales de Dimensión Finita

Hermann Gunther Grassmann (1809 -1877) fue el primero en presentar una teoría detallada de espacios vectoriales de dimensión mayor que tres. En sus dos versiones del *Cálculo de Extensión* (1844 y 1862), expresa simbólicamente las ideas geométricas sobre espacios vectoriales y distingue el Álgebra Lineal como una teoría formal, donde la geometría solo es una aplicación particular. El trabajo de Grassmann no fue entendido por sus contemporáneos debido a su forma abstracta y filosófica.

La definición de *espacio vectorial* antes llamado *espacio lineal* llegó a ser ampliamente conocida alrededor del año 1920, cuando Hermann Weyl (1885-1955) y otros publicaron la definición formal. De hecho, tal definición (para dimensión finita e infinita) había sido dada treinta años antes por Peano (1858-1932), quien fue uno de los primeros matemáticos que apreciaron en todo su valor la obra de Grassmann, y además con una notación completamente moderna dio la definición de función lineal. Grassmann no dio la definición formal de función lineal, ya que el lenguaje no estaba disponible, sin embargo no hay duda de que conocía el concepto.

Grassmann comienza su trabajo en 1862 con el concepto de un vector como un segmento de línea recta con longitud y dirección fija. Dos vectores pueden ser sumados uniendo el punto inicial del primer vector con el punto final del segundo. La resta es simplemente la suma del negativo, esto es, el vector con la misma longitud y dirección contraria.

A partir de estas ideas geométricas, Grassmann define el *espacio vectorial* generado por las "unidades" $e_1, e_2, e_3, \cdots$, considerando *combinaciones lineales*

$$\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i e_i = \sum (\alpha_i + \beta_i) e_i$$

$$\alpha(\sum \alpha_i e_i) = \sum (\alpha\alpha_i) e_i$$

y demuestra formalmente las propiedades de espacio vectorial para esas operaciones (no es claro si el conjunto de unidades puede ser infinito, pero la finitud es implícitamente asumida en algunas de sus demostraciones). Desarrolla la teoría de independencia lineal similarmente a la presentación que uno encuentra en los textos actuales sobre Álgebra Lineal.

Grassmann denota a la función lineal que envía los elementos de la base $e_1, e_2, \cdots, e_n$ a los de la base $b_1, b_2, \cdots, b_n$ respectivamente como

$$Q = \frac{b_1, b_2, \cdots, b_n}{e_1, e_2, \cdots, e_n}$$

y considera a Q como un cociente generalizado. Mientras que hay problemas obvios con esta notación, ésta tiene cierta elegancia; por ejemplo, si $b_1, b_2, \cdots, b_n$ son linealmente independientes, entonces el inverso de Q es

$$Q = \frac{e_1, e_2, \cdots, e_n}{b_1, b_2, \cdots, b_n}$$

Da la representación matricial de Q como $Q = \sum \alpha_{r,s} E_{r,s}$ donde

$$E_{r,s} = \frac{0, \cdots, 0, e_s, 0, \cdots, 0}{e_1, \cdots, e_r, \cdots, e_n}$$

El *determinante* de Q lo define como el número

$$\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{e_1 e_2 \cdots b_n}.$$

Define los conceptos de *subespacio vectorial, independencia lineal, espacio generado, dimensión* de un espacio vectorial, intersección de subespacios y se da cuenta de la necesidad de demostrar que cualquier base de un espacio vectorial tiene el mismo número de elementos. Entre otras cosas prueba que todo espacio vectorial de dimensión finita tiene un subconjunto linealmente independiente que genera el mismo espacio y que cualquier subconjunto linealmente independiente se extiende a una base. Demuestra la identidad importante

$$\dim\,(U+V) = \dim\,U + \dim\,V - \dim\,(U \cap V).$$

William Rowan Hamilton (1805-1865), presenta paralelamente a Grassmann una teoría de espacios vectoriales, sólo que lo hace en el caso de dimensión cuatro. Llama *cuaterniones* a los vectores y demuestra que forman un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, definiendo su suma y la multiplicación por un escalar.

La Matriz Asociada a una Función Lineal

El Álgebra Matricial se obtuvo como una consecuencia del tratamiento de la teoría aritmética de formas cuadráticas binarias $aX^2+2bXY+cY^2$ contenidas en las *Disquisiciones Aritméticas* de Gauss (1777-1855). Durante su estudio, Gauss introdujo nuevas convenciones notacionales. Luego, para sustituciones (funciones) lineales en dos variables

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y' \end{aligned} \tag{1}$$

decidió, "por brevedad", referirse a ellas por sus coeficientes:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix}$$

Cuando estaba tratando con ejemplos numéricos, modificó la notación anterior, agregándole llaves:

$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{Bmatrix}$$

Cada sustitución lineal la denotó con una sola letra mayúscula cuando no era necesario referirse a los coeficientes. La composición de sustituciones lineales también fue una parte importante en la teoría aritmética de formas. Como en el caso binario, Gauss observó que si la sustitución definida por (1) transforma una forma $F = ax^2 + 2bxy + cy^2$ en F' y si F' es transformada en F'' por una segunda sustitución lineal

$$x' = \varepsilon x'' + \zeta y''$$
$$y'' = \eta x'' + \theta y''$$

entonces existe una nueva sustitución lineal que transforma F directamente en F'':

$$x = (\alpha\varepsilon + \beta\eta)x'' + (\alpha\zeta + \beta\theta)y''$$
$$y = (\gamma\varepsilon + \delta\eta)x'' + (\gamma\eta + \delta\theta)y''$$

Gauss escribió la matriz de coeficientes de esta nueva sustitución lineal, la cual es el producto de las dos matrices de coeficientes de las dos sustituciones lineales originales. También realizó un cálculo análogo en su estudio de formas cuadráticas ternarias $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2$, obteniendo la regla para multiplicar matrices de 3×3. Sin embargo no designó explícitamente este proceso como un tipo de multiplicación de objetos que no son números. Esto no significa que tales ideas fueran muy abstractas para él, ya que fue el primero en introducirlas, pero en un contexto diferente.

Cauchy (1789-1857) escribió en 1815 una memoria sobre la teoría de determinantes, su trabajo fue inspirado tanto en forma como en contenido por las *Disquisiciones* de Gauss. Siguiendo la dirección de Gauss, introdujo un "sistema simétrico"

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \cdots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \cdots, & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \cdots, & a_{n,n}, \end{array}$$

que represento en forma abreviada (a_{ij}), al cual se le asocia un determinante. Aún más, en su formulación del teorema del producto para determinantes, Cauchy reconoció explícitamente la idea de Gauss de componer dos sistemas (a_{ij}) y (b_{ij}) para formar un nuevo sistema (m_{ij}) es el producto de los determinantes de (a_{ij}) y (b_{ij}).

James Joseph Sylvester (1814-1897) en 1850, utiliza el término matriz para denotar un arreglo rectangular de números.

Ferdinand Gotthold Eisenstein (1823-1852) hizo un estudio cuidadoso de las *Disquisiciones Aritméticas* , que inspiraron gran parte de su trabajo. Introdujo la notación $S \times T$ para "la sustitución compuesta de S y T" y $\bar{S}$ para "el sistema inverso del sistema S" en un artículo sobre formas cuadráticas ternarias publicado en 1844.

Eisenstein consideró a las sustituciones lineales como entes que pueden ser sumados y multiplicados como si fueran números ordinarios, solo que la multiplicación no es conmutativa. Consideraba lo anterior como algo generalmente conocido ya que es sugerido por el teorema del producto para determinantes formulado por Cauchy.

Formas Bilineales

Mientras los matemáticos mostraban una tendencia a desdeñar las ecuaciones de primer grado, la resolución de ecuaciones diferenciales fue un problema muy importante. Las ecuaciones lineales se distinguieron desde el principio y su estudio con- tribuyó a poner de manifiesto la linealidad correspondiente. D'Alembert, Lagrange y Euler estudiaron esto, pero el primero es el único que considera útil indicar que la solución general de la ecuación no homogénea es suma de una solución particular y de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente; además, cuando estos autores enuncian que la solución general de la ecuación lineal homogénea de orden n es combinación lineal de n soluciones particulares, no mencionan que éstas deben ser linealmente independientes. Este punto, como tantos otros, no se aclararán hasta la enseñanza de Cauchy en la Escuela Politécnica.

Lagrange introdujo (aunque solamente para el Cálculo y sin darle nombre) la ecuación adjunta $L^*(y) = 0$ de una ecuación diferencial lineal $L(y) = 0$, la cual es un ejemplo típico de dualidad en virtud de la relación

$$\int zL(y)\ dx = \int L^*(z)y\ dx$$

válida para y y z anulándose en los extremos del intervalo de integración. Con más precisión, y treinta años antes de que Gauss definiera explícitamente la traspuesta de una sustitución lineal de 3 variables, vemos aquí el primer ejemplo de un operador funcional L^* traspuesto de un operador L dado mediante una *función bilineal* (en este caso la integral) $\int yz\ dx$.

Posteriormente, el estudio de las formas cuadráticas y bilineales, y de sus matrices y sus invariantes conduce al descubrimiento de principios generales sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales; principios que Jacobi no había alcanzado por carecer de la noción de rango.

Producto Tensorial

El Cálculo Tensorial se inicia a principios del siglo XIX con Grassmann y Cayley, pero prospera hasta fines del mismo. Riemann multiplicó el poder del cálculo tensorial adoptando las coordenadas curvilíneas de Gauss. Un nuevo progreso fue realizado por Christoffel en 1869 al organizar sistemáticamente el nuevo algoritmo, descubriendo las derivadas que después se han llamado invariante y covariante. Finalmente Ricci y su discípulo Levi Civita le dieron la forma definitiva en 1888.

La física relativista de Einstein sacó del olvido este poderoso instrumento, hoy de uso frecuente en las más diversas teorías.

El ejemplo más importante es la curvatura de un espacio y precisamente este tensor de Riemann fue el que le permitió a Einstein expresar su ley de gravitación y su teoría general de relatividad.

Capítulo 1

Espacios vectoriales.

1.1. Espacio vectorial

Definición 1.1. *Un espacio vectorial es una terna $(V, +, \cdot)$, donde V es un conjunto no vacío y $+, \cdot$ son dos operaciones del tipo $+ : V \times V \to V$, $\cdot : K \times V \to V$ a las que llamaremos "suma de vectores" y "producto por escalares" respectivamente denotando $+(u, v) = u + v$ y $\cdot(\lambda, v) = \lambda v$, y con las siguientes propiedades:*

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$ (asociativa).
2. $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$ (conmutativa).
3. Existe $e \in V$ tal que $e + v = v + e = v$, $\forall v \in V$ (elemento neutro).
4. Para cada $v \in V$ existe $w \in V$ tal que $v + w = w + v = e$ (elemento opuesto).
5. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$, $\forall v \in V$, $\forall \lambda, \mu \in K$ (seudo-asociativa).
6. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ y $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, $\forall u, v \in V$ y $\forall \lambda, \mu \in K$ (distributiva).
7. $1v = v$, $\forall v \in V$ (unimodular).

De forma abreviada, diremos que V es un espacio vectorial. A los elementos de V lo llamamos vectores y a los de K, escalares.

Proposición 1.1. *En un espacio vectorial V,*

1. *El elemento neutro es único. Se denotará por 0.*
2. *El elemento opuesto de un vector es único. Si v es un vector, su opuesto lo denotamos por $-v$.*

Demostración. *1) Sea $e \in V$ el elemento neutro de V y supongamos que existe otro elemento $e' \in V$ el cual también cumple que:*

$\forall v \in V$, $v + e' = e' + v = v$, pero también tenemos que $v + e = e + v = v$, $\forall v \in V$. Entonces: $e + e' = e$ y $e + e' = e'$, por lo tanto $e = e'$. Por lo cual e es único y lo denotamos por 0.

2) Sea $v \in V$ y $a \in V$ su opuesto tal que: $a + v = v + a = e$, y supongamos que existe otro elemento opuesto $b \in V$ de v tal que: $v + b = b + v = e$, entonces:
$v + b = v + a$, ya que $v + a = e = v + b$, luego como $+$ es función tenemos:
$b + v + b = b + v + a$, luego
$(b + v) + b = (b + v) + a$; por propiedad asociativa.
$e + b = e + a$, lo que implica que $b = a$ y por lo tanto el opuesto de v es único. Ahora denotamos el opuesto de v como $-v$.
Dada la definición de espacio vectorial para siguiente proposición no es necesaria su demostración.

Proposición 1.2. *En un espacio vectorial se tiene las siguientes propiedades:*

1. *$\lambda \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$, $\lambda \in K$.*
2. *$0v = \boldsymbol{0}$, $v \in V$.*
3. *$(-\lambda)v = -(\lambda v)$, $\lambda \in K$, $v \in V$.*
4. *Si $\lambda v = \boldsymbol{0}$, entonces $\lambda = 0$ o $v = \boldsymbol{0}$.*

Demostración. *1) Sea $v \in V$ y $\lambda \in K$, entonces $\lambda \boldsymbol{0} = \lambda(1\boldsymbol{0}) = (\lambda 1) \cdot \boldsymbol{0}$*

A continuación, damos algunos ejemplos de espacios vectoriales:

1. Si n es un número positivo, se considera el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$ con las misma suma y producto por escalares siguientes:

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

Siempre se supondrá que $\mathbb{R}^n$ tiene esta estructura vectorial y que llamaremos *usual.*

2. Sea $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$ con la suma y producto por escalares como antes.

3. Sea $V = \{p\}$ un conjunto con un único elemento y con $p + p = p$ y $\lambda p = p$.

4. Sea $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ f$ es aplicación $\}$ y para $x \in \mathbb{R}$ se define

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

5. $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f$ es una función diferenciable$\}$ y la suma y el producto por escalares está definido de forma análoga a la del ejemplo anterior.

A continuación definimos estructuras de espacio vectorial a partir de la teoría de conjuntos. Concretamente, a partir del producto cartesiano, aplicaciones biyectivas, espacios cocientes y subconjuntos.

Definición 1.2. *Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales. Se define en $V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2); v_i \in V_i\}$ las siguientes operaciones:*

$$(v_1, v_2) + (u_1, u_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

$$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2).$$

Con esta suma y producto por escalares, $V_1 \times V_2$ es un espacio vectorial y se llama espacio producto.

Como caso particular, se tiene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y de la misma forma, se puede definir el espacio vectorial $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Definición 1.3. *Se considera V un espacio vectorial y V' un conjunto biyectivo con V. Sea $f : V \to V'$ una biyección entre ambos. Se define en V' la siguiente estructura de espacio vectorial:*

$$v' + u' = f(f^{-1}(v') + f^{-1}(u'))$$

$$\lambda v' = f(f^{-1}(v'))$$

Se dice V' tiene la estructura vectorial inducida de V por la biyección f.

La estructura vectorial inducida en un subconjunto de un espacio vectorial motiva el estudio de subespacio vectorial.

1.2. Subespacio vectorial

Definición 1.4. *Sea V un espacio vectorial y U un subconjunto suyo. Se dice que U es un subespacio vectorial de V si satisface las siguientes propiedades:*

1. Si $u, v \in U$, entonces $u + v \in U$.
2. Si $\lambda \in K$ y $u \in U$, entonces $\lambda u \in U$.

Con la suma y producto por escalares de V , U es un espacio vectorial.

Proposición 1.3. *Sea U un subconjunto de un espacio vectorial V. Entonces U es un subespacio vectorial si y sólo si*

1. Si $u, v \in U$, entonces $u + v \in U$.
2. Si $\lambda \in K$ y $u \in U$, entonces $\lambda u \in U$.

Demostración. *La condición necesaria observamos que se cumple por la definición así que solo basta probar la condición suficiente.*
Supongamos que U satisface las propiedades 1 y 2. Veamos que con éstas son suficientes para probar todas las propiedades de espacio vectorial. Todas éstas son ciertas de forma trivial, excepto dos: la existencia de elemento neutro y opuesto. Pero para ello basta con probar que el elemento neutro de V se encuentra en U y lo mismo sucede con el elemento opuesto de un vector de U.

Por hipótesis, si $u \in U$, $0u = \boldsymbol{0} \in U$. De la misma forma, si $u \in U$, $-1u = -(1u) = -u \in U$. Por lo tanto U es un subespacio vectorial.

En particular, todo subespacio vectorial debe contener el elemento neutro del espacio ambiente, así como los elementos opuestos de todos los vectores del subespacio.

Proposición 1.4.

1. *Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales, entonces $U_1 \cap U_2$ también es subespacio vectorial.*
2. *Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V y $U_1 \subset U_2$, entonces U_1 es un subespacio vectorial de U_2.*

Ejemplos:

1. Si V es un espacio vectorial, $\{\mathbf{0}\}$ y V son subespacios vectoriales, llamados subespacios vectoriales triviales.
2. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.
3. Si V_1 y V_2 son espacios vectoriales, entonces $V_1 \times \{\mathbf{0}\}$ y $\{\mathbf{0}\} \times V_2$ son subespacios vectoriales del espacio producto $V_1 \times V_2$.

4. Si V es un espacio vectorial, V es un conjunto biyectivo con V con la estructura de espacio vectorial inducida por una biyección $f : V \to V'$, entonces $U \subset V$ es un subespacio vectorial si y sólo si $f(U)$ es un subespacio vectorial de V'.

Definición 1.5. *Sean U y W subespacios vectoriales de V . Se define la suma de U con W como el conjunto.*

$$U + W = \{u + w; u \in U, w \in W\}$$

Entonces $U + W$ es un subespacio vectorial. Además se tienen las siguientes propiedades:

1. $U + W = W + U$.
2. $U + U = U$.
3. $U \subset U + W$.
4. *$U + W$ es el menor subespacio (con respecto a la inclusión de conjuntos) que contiene a U y a W .*

Definición 1.6. *Un espacio vectorial V es suma directa de dos subespacios vectoriales U y W suyos, y se denota por $V = U \oplus W$, si $V = U + W$ y $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$*

Con el concepto de subespacio vectorial podemos definir una estructura de espacio vectorial en un conjunto cociente.

Definición 1.7. *Sea U un subespacio vectorial de V . En V se define la siguiente relación binaria R:*

$$vRw \text{ si } v - w \in U$$

Entonces R es una relación de equivalencia en V. Al conjunto cociente se denota por V/U. Es evidente que la clase de equivalencia de un vector v es

$$[v] = v + U = \{v + u; u \in U\}.$$

En V/U se define la siguiente suma y producto por escalares:

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U.$$

$$\lambda(v + U) = (\lambda v) + U.$$

Estas operaciones están bien definidas: por ejemplo, si $v + U = v' + U$ y $w + U = w' + U, v - v' \in U, w - w' \in U$ y por tanto, $(v + w) + U = (v' + w') + U$.

Proposición 1.5. *V/U es un espacio vectorial. El elemento neutro es $0+U$ y si $v+U \in V/U$, su elemento opuesto es $(-v) + U$.*

1.3. Funciones Lineales

Definición 1.8. *Sean U y V espacios vectoriales sobre un campo K. Una función $f : U \to V$ se llama lineal o también homomorfismo de espacios vectoriales si*

(i.) $f(u + v) = f(u) + f(v)$ y
(ii.) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$; $u, v \in U$; $\alpha \in K$

Obsérvese que el $+$ de $u + v$ se refiere a la suma de U y que el $+$ de $f(u) + f(v)$ se refiere a la suma de V. Lo mismo que αv denota la multiplicación escalar de U y $\alpha f(v)$ la de V.

Si en (ii) tomamos $\alpha = 0 \in K$, tenemos que $f(0v) = f(\mathbf{0}) = 0f(v) = \mathbf{0}$, luego $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, i.e., todo homomorfismo de espacios vectoriales (o función lineal) envía el vector cero del dominio en el vector cero del codominio.

Es obvio que las condiciones (i) y (ii) de la definición 1.8 son equivalentes a la siguiente:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v); \alpha, \beta \in K; u, v \in U$$

.

También se suele llamar a una función lineal f. aplicación lineal o transformación lineal. Utilizaremos cualquiera de estas denominaciones.

Ejemplo 1.1. *Sea $U = \mathbb{R}^3$ y $V = \mathbb{R}$ con la suma y multiplicación escalar usuales. Definamos $f : U \to V$ mediante la regla $f(x, y, z) = 3x - 2y + 2z$. Veamos que f es lineal. Como*

$f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = 3(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2)$ $f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = (3x_1, -2y_1 + 2z_1) + (3x_2, -2y_2 + 2z_2)$,

claramente se cumple la condición (i) de 1.8. También, $f(\alpha(x, y, z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ $= 3\alpha x - 2\alpha y + 2\alpha z = \alpha(3x - 2y + 2z) = \alpha f(x, y, z)$. por lo que se cumple (ii) de 1.8.

Ejemplo 1.2. *Sea $U = V = \mathbb{R}^2$. Definamos $f : U \to V$ mediante $f(x, y) = (x + 2, y + 3)$. Como $f(0, 0) = (2, 3) \neq (0, 0)$, f no es lineal pues todo homomorfismo de espacios vectoriales envía el vector cero del dominio en el vector cero del codominio.*

Proposición 1.6. *La composición de dos homomorfismos de espacios vectoriales sobre un campo K es un homomorfismo de espacios vectoriales sobre K.*

Demostración. *Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ funciones lineales. Luego*

$$\begin{aligned}(g\circ f)(u+v) &= g(f(u+v))\\ &= g(f(u)+f(v))\\ &= g(f(u))+g(f(v))\\ &= (g\circ f)(u)+(g\circ f)(v)\end{aligned}$$

Además, $(g\circ f)(\alpha u) = g(f(\alpha u)) = g(\alpha f(u)) = \alpha g(f(u)) = \alpha(g\circ f)(u)$. Por lo tanto $(g\circ f)$ es una función lineal.

Definición 1.9. *Sea $f : U \to V$ un homomorfismo (o función lineal o aplicación lineal) de espacios vectoriales sobre un campo K. Diremos que f es un isomorfismo, y escribiremos $f : U \overset{\cong}{\to} V$ si existe un homomorfismo $g : V \to U$ tal que $g\circ f = 1_U$ y $f\circ g = 1_V$.*

Es fácil comprobar que, si g existe, está determinada en forma única; la denotaremos con f^{-1} y se llama inverso de f. Así, $f : U \to V$ es isomorfismo si, y sólo si, es biyectiva. Diremos que dos espacios U y V sobre un campo K son isomorfos si existe un isomorfismo$f : U \overset{\cong}{\to} V$ y escribiremos $U \cong V$.

Definición 1.10. *Sea $f : U \to V$ un homomorfismo (función lineal) de espacios vectoriales sobre un campo K. El núcleo de f, denotado $ker f$, es el conjunto de todos los elementos $u \in U$ tales que $f(u) = 0$. La imagen de f, denotada $im f$, es el conjunto de $f(u)$ con $u \in U$.*

Proposición 1.7. *Sea $f : U \to V$ un homomorfismo (función lineal) de espacios vectoriales sobre un campo K. Entonces, si U' es un subespacio de U, $f(U')$ es un subespacio de V y, si V' es un subespacio de V, $f^{-1}(V')$es un subespacio de U.*

Demostración. *Veamos que $f(U') = \{f(u)|u \in U'\}$ es un subespacio de V. Sean $v, w \in f(U')$ luego, existen $u, u' \in U'$ tales que $f(u) = v, f(u') = w$. Como U' es subespacio de U, $u + u' \in U'$ y a $\alpha u \in U'$. Como f es lineal.*

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in f(U'),$$

$$v + w = f(u) + f(u') = f(u + u') \in f(U')$$

$$\alpha v = \alpha f(u) = f(\alpha u) \in f(U')$$

Por lo tanto, $f(U')$ es un subespacio de V.

Veamos que $f^{-1}(V') = \{u \in U | f(u) \in V'\}$ es un subespacio de U. Sean $u, u' \in f^{-1}(V')$ entonces $f(u)$ y $f(u')$ están en V'. Como V' es un subespacio de V y f es lineal,

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in V'$$

$$f(u + u') = f(u) + f(u') \in V'$$

$$f(\alpha u) = \alpha f(u) \in V', \alpha \in K.$$

Luego, $f^{-1}(V')$ es un subespacio de U.

Corolario 1.1. *Sea $f : U \to V$ lineal. Entonces imf es un subespacio de V y $kerf$ es un subespacio de U.*

Demostración. *Inmediata de 1.7 tomando $U' = UyV' = 0$.*

Corolario 1.2. *Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ funciones lineales entre espacios vectoriales sobre un campo K tales que $g \circ f$ es isomorfismo. Entonces $V \cong imf \oplus kerg$.*

Demostración. *Veamos que $imf + kerg = V$. Sea $v \in V$ y $g(v) \in W$. Como $g \circ f : U \to W$ es un isomorfismo, existe $u \in U$ tal que $(g \circ f)(u) = g(v)$. Sea $v' = f(u) \in imf$ y $v'' = v - v'$. Entonces $g(v'') = g(v - v') = g(v) - g(v') = (g \circ f)(u) - g(f(u)) = 0$. Luego $v'' \in kerg$ y, por lo tanto, $v' + v'' \in imf + kerg$ pues v era arbitraria.*

Veamos que $imf \cap kerg = 0$. Sea $v \in imf \cap kerg$. Entonces, como $v \in imf$, existe $u \in U$ tal que $f(u) = v$. Como $v \in kerg$, $g(v) = 0$. Luego $gf(u) = g(v) = 0$. Como gf es un isomorfismo, $u = 0$. Luego $f(u) = 0$ y, por lo tanto, $v = 0$. Por definición 1.6 $V \cong im f \oplus ker g$.

Definición 1.11. *Decimos que un vector v de un espacio vectorial V sobre un campo K es una combinación lineal de elementos de un subconjunto S de V si existe un número finito de elementos $\{v_i\}_{i=1}^n$ de S tal que $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, $\alpha_i \in K$. Las α_i se llaman coeficientes. Para simplificar la notación, y cuando no haya posibilidad de confusión, quitaremos los límites del conjunto. Por ejemplo escribiremos $\{v_j\}$ en lugar de $\{v_j\}_{j=1}^n$.*

Teorema 1.1. *El conjunto de todas las combinaciones lineales $\langle S \rangle$ de un subconjunto no vacío S del espacio vectorial V sobre un campo K es un subespacio de V que contiene a S y es el subespacio más pequeño de V que contiene a S.*

Demostración. *Sea $v \in S$, como $v = 1v$ entonces $v \in \langle S \rangle$ y es inmediato comprobar que $\mathbf{0} \in \langle S \rangle$. Si $u, v \in \langle S \rangle$ entonces $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n y$ $v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m$; β_i , $\beta_j \in K$; $u_i, v_j \in S$. Entonces $u + v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m$ y $\alpha u = \alpha(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha\alpha_n u_n$. Luego $u + v$ y α_u pertenece a $\langle S \rangle$. Así, $\langle S \rangle$ es un subespacio de V .*

Supongamos que U es un subespacio de V que contiene a S y supongamos que $u_1, \ldots, u_n \in S \subset U$. Entonces $\alpha_1 u_1, \ldots, \alpha_n u_n \in U$ con $\alpha_i \in K$. Esto significa que U contiene a todas las combinaciones lineales de S, i.e., U contiene a $\langle S \rangle$.

Definición 1.12. *El subespacio más pequeño de un espacio vectorial V sobre un campo K que contiene a un subconjunto S de V se llama subespacio generado por S.*

Por el teorema 1.2, $\langle S \rangle$ es el subespacio generado por un subconjunto S de V . Además, observe que como es el subespacio más pequeño de V que contiene a S,$\langle S \rangle$ es igual a la intersección de todos los subespacios que contienen a S. Si $\langle S \rangle = V$, todo elemento de V es una combinación lineal de elementos de S. En este caso, diremos que V está generado por el subconjunto S de V .

Ejemplo 1.3. *Sea $S = (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$ un subconjunto de$\mathbb{R}^4$. Considere las combinaciones lineales de elementos de S, i.e., expresiones de la forma.*

$$\alpha_1(1,0,0,0)+\alpha_2(0,1,0,0)+\alpha_3(0,0,1,0)+\alpha_4(0,0,0,1).$$

Es claro que cualquier vector de $\mathbb{R}^4$ puede escribirse como combinación lineal de vectores de S; luego $\langle S\rangle = \mathbb{R}^4$.

1.4. Espacios Vectoriales de Dimensión Finita

Iniciaremos esta sección estudiando, desde otro punto de vista, los conceptos de dependencia e independencia lineal.

Consideremos la suma directa $K^n = \oplus_{j=1}^n K_j$ con cada K_j igual a K considerado como espacio vectorial sobre si mismo. Sea $\imath_i : K_i \to \oplus_{j=1}^n K_j$ la inclusión natural dada por $\imath_i(\alpha) = (0,\ldots,\alpha,\ldots,0)$, ($\alpha$ en el lugar i). Y como $\imath_i$ es lineal, la inclusión queda determinada por su valor en 1, $\imath_i(1) = (0,\ldots,1,\ldots,,0) = ei$. Observe que cada $u \in \oplus_{j=1}^n K_j$ puede escribirse en forma única como $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$ con $\alpha_j \in K_j$. Denotaremos con g la función

$$g : \{1,\ldots,n\} \to \oplus_{j=1}^n K_j$$

$$i \mapsto e_i$$

dada por $g(i) = e_i$. (g es simplemente una función.)

Proposición 1.8. *Para todo espacio vectorial V sobre un campo K y para toda función $f : 1,2,\ldots,n \to V$ existe una función lineal única $\phi : \oplus_{j=1}^n K_j \to V$ tal que $f = \phi \circ g$.*

$$\begin{tikzcd} V & \\ \oplus_{j=1}^{n} K_j \arrow[u, "\phi"] & \{1,\ldots,n\} \arrow[l, "g"'] \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. *Sea* $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \in \oplus_{j=1}^{n} K_j$ *y sean* $v_1 = f(1), \ldots, v_n = f(n)$. *Como la expresión de* u *es única podemos definir una función* ϕ *mediante la fórmula* $\phi(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. *Es inmediato comprobar que* ϕ *es lineal y que* $\phi(e_i) = f(i)$, *es decir,* $\phi g(i) = f(i)$, *o sea,* $\phi \circ g = f$.

Definición 1.13. *Diremos que el conjunto* $\{v_j\}$,$j \in 1, 2, \ldots, n$, *de elementos de un espacio vectorial* V *sobre un campo* K *es*

(i) linealmente independiente si ϕ *es inyectiva.*
(ii) un conjunto de generadores de V *si* ϕ *es suprayectiva.*
(iii) una base de V *si* ϕ *es biyectiva.*

En otras palabras, el conjunto $\{v_j\}$, $j \in 1, 2, \ldots, n$ es linealmente independiente *si*$\phi(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0$ implica que $\alpha_j = 0$ para toda j en $1, 2, \ldots, n, \alpha_j \in K_j$.

Diremos que el conjunto $\{v_j\}$, $j \in 1, 2, \ldots, n$, de elementos de un espacio vectorial V sobre un campo$K$ es *linealmente dependiente* si dicho conjunto no es linealmente independiente. Es decir, $\{v_j\}$ es linealmente dependiente si existen escalares $\alpha_i \in K$ no todos cero tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

Esta última expresión es válida para $\alpha_j = 0$, $\forall_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y si ésta ultima expresión es válida únicamente para $\alpha_j = 0, j \in 1, 2, \ldots, n$ entonces el conjunto $\{v_j\}$ es linealmente independiente. En otras palabras, el conjunto $\{v_j\}$ es linealmente independiente si, y sólo si, toda combinación lineal no trivial de vectores del conjunto $\{v_j\}$ es diferente del vector 0.

Decir que ϕ en 1.13 es suprayectiva equivale a decir que todo elemento de V puede escribirse como $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$, i.e., como una combinación lineal. El que ϕ sea biyectiva quiere decir que todo elemento $v \in V$ puede escribirse de una y solamente una manera en la forma $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, \forall_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Es claro que el conjunto $\{e_j\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, es una base de $\oplus_{j=1}^{n} K_j$ (llamada canónica). Frecuentemente se identifica el conjunto $1, 2, \ldots, n$ con el conjunto de los e_j mediante la biyección dada por $j \mapsto e_j$.

Ejemplo 1.4. *Los vectores del espacio vectorial* $\mathbb{R}^4$ *sobre* $\mathbb{R}, v_1 = (2, 3, 1, 4)$, $v_2 = (3, 2, 1, 0)$ *y* $v_3 = (17, 18, 7, 16)$, *son linealmente dependientes puesto que* $4(2, 3, 1, 4) + 3(3, 2, 1, 0) - (17, 18, 7, 16) = (0, 0, 0, 0)$.

Ejemplo 1.5. *Sean* $v_1 = (5, 4, 7)$, $v_2 = (0, 3, 1)$ *y* $v_3 = (0, 0, 2)$ *vectores del espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *sobre* $\mathbb{R}$. *Sea* $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ *una combinación lineal igual a cero. Entonces tenemos un sistema de ecuaciones lineales*

$$5\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0$$

$$4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0$$

$$7\alpha_1 + 1\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

De la primera ecuación, tenemos que $\alpha_1 = 0$. *De la segunda ecuación con* $\alpha_1 = 0$ *tenemos que* $\alpha_2 = 0$, *y de la tercera ecuación con* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ *tenemos que* $\alpha_3 = 0$. *Luego* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ *y los vectores* v_1 , v_2 *y* v_3 *son linealmente independientes.*

Proposición 1.9. *El conjunto de vectores diferentes de cero* $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ *es linealmente dependiente si, y sólo si, uno de ellos es combinación lineal de los vectores precedentes.*

Demostración. Supongamos que son linealmente dependientes; entonces $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ con alguna $\alpha_i \neq 0$. Sea j el mayor entero tal que $\alpha_j \neq 0$. Entonces $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_j v_j + 0v_{j+1} + \ldots + 0v_n = 0$, i.e., $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_j v_j = 0$. Si j = 1 entonces $\alpha_1 v_1 = 0$ con $\alpha_1 \neq 0$, luego $v_1 = 0$. Si $j > 1$, como los vectores v_j son diferentes de cero y

$$v_j = -\alpha_j^{-1} \alpha_1 v_1 - \ldots - \alpha_j^{-1} \alpha_{j-1} v_{j-1},$$

v_j es combinación lineal de los vectores precedentes.

Supongamos ahora que $v_j = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{j-1} v_{j-1}$. Entonces podemos reescribir esto como

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + 0 v_{j+1} + \ldots + 0 v_n = 0$$

con $\alpha_j \neq 0$. Luego, $\{v_i\}_{i=1}^n$ es linealmente dependiente.

Observación Es inmediato de la definición 1.13 que si V es un espacio vectorial sobre un campo K con base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ entonces es isomorfo a K^n .

Teorema 1.2. *Sea $X = \{u_i\}_{i=1}^n$ un conjunto de generadores de un espacio vectorial V sobre un campo K .*

(i) Si u_j es combinación lineal de los vectores $\{u_i\}_{i=1}^{j-1}$ entonces el conjunto $u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n$ genera a V .

(ii) Si $Y = \{v_1, \ldots, v_r\}$ es linealmente independiente entonces $r \leq n$ y V está generado por un conjunto de la forma $v_1, ..., v_r, u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n-r}}$ con $u_{i_j} \in X$.

(iii) Cualquier base de V posee la misma cardinalidad.

Demostración. *(i) Supongamos que u_j es combinación de $\{u_i\}_{i=1}^{j-1}$, entonces $u_j = \sum_{i=1}^{j=1} \beta_i u_i$ Sea $w \in V$. Como $\{u_i\}_{i=1}^n$ genera a V, $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$, sustituyendo u_j con $\sum_{i=1}^{j=1} \beta_i u_i$ tenemos que*

$$w = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i u_i + \alpha_j \sum_{i=1}^{j-1} + \sum_{i=j+1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{j-1} (\alpha_i + \alpha_j \beta_j) u_i + \sum_{i=j+1}^{n} \alpha_i u_i.$$

Por lo tanto, como w era arbitrario, $\{u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n\}$ genera a V .

(ii) Como $\{u_i\}_{i=1}^n$ genera a V , si le agregamos el vector v_1, entonces $\{v_1, u_1, \ldots, u_n\}$

es linealmente dependiente y genera a V .

Por 1.9 uno de los vectores del conjunto $\{v_1, u_1, \ldots, u_n\}$ es una combinación lineal de los vectores precedentes. No puede ser v_1 , pues $\{v_1\}$ es linealmente independiente, tiene que ser uno de los de X, digamos u_j . Por (i) podemos omitir a u_j y obtener un conjunto $\{v_1, u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n\}$
que genera. Repetimos el procedimiento con v_2 . Entonces $\{v_1, v_2, u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n\}$ es linealmente dependiente y genera a V . Por 1.9 uno de los vectores del conjunto es una combinación lineal de los precedentes. Como $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente, ese vector debe ser una u_k . Por (i) podemos omitir u_k y obtener un conjunto $\{v_1, v_2, u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots$
que genera a V . Si continuamos el proceso obtendremos un conjunto, para $r \leq n$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n-}}$
que genera a V .
(iii) Sea $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V y $\{v_1, v_2, \ldots\}$ otra base de V . Como $\{u_i\}_{i=1}^n$ genera a V , la base $\{v_j\}$ debe contener n o menos vectores, pues, si no, sería linealmente dependiente (por (ii)). Si la base $\{v_j\}$ contiene menos de n vectores, entonces $\{u_i\}_{i=1}^n$ es linealmente dependiente (por (ii). Luego, la base $\{v_j\}$ contiene n elementos.

Obsérvese que los espacios vectoriales K^n y K^m son isomorfos si, y sólo si, $n = m$.

Definición 1.14. La *dimensión* en un espacio vectorial V sobre un campo K, denotada dim V , es el número de elementos de una base de V .

A continuación estableceremos un resultado que relaciona la dimensión de la suma de subespacios, con la de cada uno de ellos.

Teorema 1.3. *Sean U y V subespacios de un espacio vectorial W sobre un campo K de dimensión finita. Entonces*

$$\dim\,(U+V) = \dim U + \dim V - \dim\,(U \cap V).$$

Demostración. S*ea $n = dim\ U$, $m = dim\ V$ y $r = dim\ (U \cap V)$. Sea $\{u_i\}_{i=1}^r$ una base de*

$U \cap V$.

(iii) $\{u_i\}_{i=1}^{r}$ es parte de una base de U y también de una base de V , digamos $A = \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{n-r}\}$ y $B = \{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_{m-r}\}$ respectivamente.

Consideremos el conjunto $C = \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{n-r}, w_1, \ldots, w_{m-r}\}$ y veamos que es una base de $U + V$ con lo que habremos terminando. Como A genera a U y B genera a V , C genera a $U + V$.

Corolario 1.3. $\dim\,(U \oplus V) = \dim U + \dim V$.

Demostración. Sea $n = \dim U$. Como $kerf$ es un subespacio de U , $\dim\,(kerf) \leq \dim U = n$. Sea $r = \dim\,(kerf) \leq n$. Veamos que $\dim\,(imf) = n - r$. Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de $kerf$. Podemos extenderla a una base de U de la forma $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{n-r}\}$. Consideremos $\{f(w_1), \ldots, f(w_{n-r})\}$ y veamos que es una base de imf.

Sea $v \in imf$. Entonces existe $u \in U$ tal que $f(u) = v$. Como $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{n-r}\}$ genera a U , $u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_{n-r} w_{n-r}$ con α_i, $\beta_i \in K$. Como$f(v_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, r$ pues $v_i \in kerf$, tenemos que $f(u) = v = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_{n-r} w_{n-r})$
$= \beta_1 f(w_1) + \ldots + \beta_{n-r} f(w_{n-r})$. Así, $f(w_i)$ genera a la imagen de f .

Ahora veamos la independencia lineal: sea $\beta_1 f(w_1) + \beta_2 f(w_2) + \ldots + \beta_{n-r} f(w_{n-r}) = 0$ y por lo tanto $\sum_{i=1}^{n-r} \beta_i w_i \in kerf$ Como $\{v_i\}$ genera a $kerf$, existe $\alpha_i \in K$, $i = 1, \ldots, r$ tal que

$$\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_{n-r} w_{n-r} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r$$

i.e,

$$\beta_1 w_1 + \ldots + \beta_{n-r} w_{n-r} - \alpha_1 v_1 - \ldots - \alpha_r v_r = 0$$

Como $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{n-r}\}$ es una base de U , es linealmente independiente y por lo tanto $\beta_i = \alpha_i = 0$. En particular $\beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, n - r$ Luego, los $f(w_i)$ son linealmente independientes. Por lo tanto $\dim\,(im\ f) = n - r$.spacios v

1.5. La Matriz Asociada a una Transformación Lineal

Sea K un campo. Denotemos con $Hom_K(U,V)$ el conjunto de transformaciones lineales del espacio vectorial U sobre K en el espacio V sobre K. Sean $f, g : U \to V$ aplicaciones lineales y definamos $f+g : U \to V$ mediante $(f+g)(u) = f(u)+g(u)$. También, si $f : U \to V$ y $\alpha \in K$ definamos una multiplicación escalar $\alpha f : U \to V$ mediante $(\alpha f)(u) = \alpha(f(u))$. Es inmediato comprobar que $f+g$ y αf son lineales.

Teorema 1.4. *Sean U y V espacios vectoriales sobre un campo K . Entonces $Hom_K(U,V)$ con las operaciones definidas arriba es un espacio vectorial sobre K .*

¿Cuál será la dimensión del espacio $Hom_K(U,V)$ si U y V son de dimensión finita? Para responder esta pregunta, primero veamos un resultado previo que nos dice que una transformación lineal está totalmente determinada si conocemos la imagen de los elementos de la base de U .

Proposición 1.10. *Sean U y V espacios vectoriales sobre un campo K . Sea $\{u_i\}_{i=1}^n$ una base de U y $\{v_i\}_{i=1}^n$ cualesquiera vectores de V . Entonces existe una función lineal única $f : U \to V$ tal que $f(u_i) = v_i, i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. *Definamos $f : U \to V$ mediante $f(u) = f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$. En particular $f(u_i) = f(0u_1 + \ldots + 1u_i + 0u_n) = v_i$. Veamos que f es lineal: sean $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ y $u' = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i$ entonces $f(u+u') = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = f(u) + f(u')$ y $f(\alpha u) = \sum_{i=1}^n \alpha\alpha_i v_i = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \alpha f(u)$. Veamos que f es única: sea $f' : U \to V$ otra aplicación lineal tal que $f'(u_i) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces $f'(u) = f'(\sum \alpha_i u_i) = \sum \alpha_i f'(u_i)$
$= \sum \alpha_i v_i = f(u)$. Como u es arbitraria, $f' = f$.*

Teorema 1.5. Si dim $U = n$ y dim $V = m$ *entonces* dim $Hom_k(U,V) = nm$.

Demostración. Sea $\{u_i\}_{i=1}^n$ una base de U y $\{v_j\}_{j=1}^m$ una base de V. Encontremos una base para $Hom_k(U,V)$ y contemos el numeró de elementos de dicha base. Para ello definimos

$f_{ij} \in Hom_k(U,V)$ mediante

$$f_{ij}(u_k) = \begin{cases} v_j & si \quad k = i \\ 0 & si \quad k \neq i. \end{cases}$$

Veamos que $\{f_{ij}\}$ es linealmente independiente: supongamos que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}f_{ij} = 0$; $\alpha_{ij} \in K$. Pero para u_k

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}f_{ij}(u_k) = \sum_{j=1}^{m}\alpha_{kj}f_{kj}(u_k) = \sum_{j=1}^{m}\alpha_{kj}v_j;$$

pero como las v_j son linealmente independientes, para $k = 1,\ldots,n$ tenemos que $\alpha_{k1} = \alpha_{k2} = \ldots = \alpha_{km} = 0$. Luego $\alpha_{ij} = 0$ y por lo tanto $\{f_{ij}\}$ es linealmente independiente. Veamos que $\{f_{ij}\}$ genera a $Hom_k(U,V)$: sea f cualquier elemento de $Hom_k(U,V)$. Sea $w_i = f(u_i)$, $i = 1,\ldots,n$. Como $w_k \in V$, $w_k = \alpha_{k1}v_1 + \ldots + \alpha_{km}v_m$; $k = 1,\ldots,n\alpha_{ij} \in K$. Luego al evaluar en u_k, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}f_{ij}(u_k) = \sum_{j=1}^{m}\alpha_{kj}f_{kj}(u_k) = \sum_{j=1}^{m}\alpha_{kj}v_j = w_k$ pero $w_k = f(u_k)$. Luego, $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}f_{ij}$ y por lo tanto $\{f_{ij}\}$ genera a $Hom_k(U,V)$. Como hay nm elementos en $\{f_{ij}\}$, dim $Hom_k(U,V) = nm$.

Sea $f : U \to V$ una aplicación de espacios vectoriales U y V con dim $U = m$ y dim $V = n$. Supongamos que $\beta = \{u_i,\ldots,u_m\}$ y $\beta' = \{v_1,\ldots,v_n\}$ son bases para U y V respectivamente. Como $f(u_i) \in V$, tenemos que

$$\begin{array}{ccccccc} f(u_1) & = & \alpha_{11}v_1 & + & \ldots & + & \alpha_{1n}v_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ f(u_m) & = & \alpha_{m1}v_1 & + & \ldots & + & \alpha_{mn}v_n \end{array}$$

El sistema de ecuaciones anterior lo podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} f(u_1 \\ \vdots \\ f(u_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}v_1 + \ldots + \alpha_{1n}v_n \\ \vdots \\ \alpha_{m1}v_1 + \ldots + \alpha_{mn}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

A la matriz

$$[f]_{\beta}^{\beta'} = {\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}}^{t} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

se le llama *matriz asociada a la transformación lineal* f, y decimos que *representa* a f .

Ejemplo 1.6. *sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dado por* $f(x, y) = (2x - y, x + y)$. *calculemos* $[f]_{\beta}^{\beta'}$ *con respecto a la base* $\beta = \beta' = \{(1, 0), (0, 1)\}$. *Entonces*

$$f(1,0) = (2,1) = 2(1,0) + 1(1,0) \text{ y}$$
$$f(0,1) = (-1,1) = -1(1,0) + 1(0,1).$$

Luego $[f]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 1.7. *sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la aplicación lineal dada por* $f(x, y) = (4x + y, 2x - 4y)$. *Calculemos* $[f]_{\gamma}^{\gamma'}$ *donde* $\gamma = \gamma' = \{(1, 1), (-1, 0)\}$*:*

$$f(1,1) = (5,2) = (-2)(1,1) + 1(-7)(-1,0) \text{ y}$$
$$f(-1,0) = (-4,-2) = (-2)(1,1) + (2)(-1,0). \text{ Luego}$$

$$[f]_{\gamma'}^{\gamma} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observemos que si $u = (3, 5)$ entonces, en términos de la base $\gamma, u = (3, 5) = 5(1, 1)+ 2(-1, 0)$. Luego $f(u) = f(3, 5) = (17, -14) = -14(1, 1) + 3(-31)(-1, 0)$. As que, el vector traspuesto de coordenadas de u es $[u]_\gamma = \binom{5}{2}$ y el vector traspuesto de coordenadas es $[f(u)]\gamma' = \binom{-14}{-31}$. Finalmente

$$[f]^{\gamma}_{\gamma'} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -31 \end{pmatrix} = [f(u)]_{\gamma'}.$$

Tenemos el siguiente resultado que establece lo que observamos en el ejemplo anterior:

Proposición 1.11. *Sean $\beta = \{u_1, \ldots, u_m\}$ y $\beta' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases para los espacios vectoriales U y Vsobre un campo K respectivamente. Sea $f : U \to V$una transformación lineal. Entonces $[f]^{\beta'}_{\beta}[u]_\beta = [f(u)]_{\beta'}$.*

Demostración. Demostración. Consideremos $f(u_i) = \alpha_{i1}v_1 + \alpha_{i2}v_2 + \ldots + \alpha_{in}v_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}v_j$. Entonces$[f]^{\beta'}_{\beta}$es la matriz cuyo renglón j es $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj})$. Supongamos que $u = \gamma_1 u_1 + \ldots + \gamma_m u_m = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i u_i$. Luego $[u]_\beta =^t (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$. Aplicando la transformación lineal f a u obtenemos $f(u) = f(\sum_{i=1}^{m} \gamma_i u_i) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i f(u_i) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v_j) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\gamma_j) v_j = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{1j}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{mj}\gamma_m) v_j$.

Luego$[f(u)]\beta'$ es el vector columna cuyo coeficiente en el nivel j es $\alpha_{1j}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{mj}\gamma_m$. Calculando

$$[f]^{\beta'}_{\beta} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{mj}\gamma_m \\ \vdots \\ \alpha_{1n}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{mn}\gamma_m \end{pmatrix} = [f(u)]\beta' \ .$$

La proposición anterior nos dice que, el multiplicar el vector de coordenadas de u con respecto a la base $\beta = u_1, \ldots, u_m$ por la matriz $[f]^{\beta'}_{\beta}$ nos da el vector de coordenadas del vector $f(u)$ con respecto a la base $\beta' = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Definición 1.15. *Sean $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\gamma = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$ bases de U.*

Considérese

$$\begin{array}{ccccccccc}
1_U(u_1) & = & u_1 & = & \alpha_{11}u_1' & + & \ldots & + & \alpha_{1n}u_n' \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
1_U(u_n) & = & u_n & = & \alpha_{n1}u_1' & + & \ldots & + & \alpha_{nn}u_n'
\end{array}$$

Luego, la matriz cuadrada

$$N_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz de transición* de la base β en la base γ. Con frecuencia escribimos simplemente N en lugar de N_β^γ. Si $\beta = \gamma$, N_β^β se denota N_β y se llama *matriz asociada a f con respecto (o relativa)* a β.

La matriz de transición N_β^γ puede verse como la matriz asociada a la función lineal $1_U : U \to U$ con respecto a las bases β y γ, es decir $N_\beta^\gamma = [1_U]_\beta^\gamma$.

Ejemplo 1.8. *Considere $U = \mathbb{R}^2$ con bases $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ y $\gamma = \{(1,1),(-1,0)\}$. Entonces*

$$(1,0) = 0(1,1) + (-1)(-1,0) \quad y$$
$$(0,1) = 1(1,1) + (1)(-1,0).$$

Luego $N_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. por otro lado,

$$(1,1) = (1)(1,0) + (1)(0,1) \quad y$$
$$(-1,0) = (-1)(1,0) + 0(0,1).$$

Luego $N_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Observe que $N_\gamma^\beta N_\beta^\gamma = I$.

Lema 1.1. *Sea* $N = N_\beta^\gamma$ *la matriz de transición de la base* $\beta = \{u_i\}_{i=1}^n$ *en la base* $\gamma = \{u_i'\}_{i=1}^n$ *del espacio vectorial* U *sobre un campo* K *. Entonces* $N[u]_\gamma = [u]_\beta$*, y* $[u]_\gamma = N^{-1}[u]_\beta$ *para todo* $u \in U$*.*

Demostración. Sea $u_i' = \alpha_{i1}u_1 + \alpha_{i2}u_2 + \ldots + \alpha_{in}u_n = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}u_j$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces N es la matriz cuadrada con renglón j igual a $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj})$.

Si suponemos que $u = \lambda_1 u_1' + \lambda_2 u_2' + \ldots + \lambda_n u_n' = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i'$ entonces $[u]_\gamma =^t (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Luego $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i' = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}u_j) = \sum_{j=1}^n(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\lambda_i)u_j = \sum_{i=1}^n(\alpha_{1j}\lambda_1 + \alpha_{2j}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{nj}\lambda_n)u_j$. Así, $[u]_\beta$ es el vector columna con coeficiente j igual a $\alpha_{1j}\lambda_1 + \alpha_{2j}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{nj}\lambda_n$.

Por otro lado, el coeficiente j de $N[u]_\gamma$ se obtiene multiplicando el renglón j de N por $[u]_\gamma$, i.e., multiplicando $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj})$ por ${}^t(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Dicha multiplicación es precisamente $\alpha_{1j}\lambda_1 + \ldots + \alpha_{nj}\lambda_n$. Luego $N[u]_\gamma$ y $[u]_\beta$. tienen los mismos coeficientes. Por lo tanto $N[u]_\gamma = [u]_\beta$. Finalmente, si multiplicamos por N^{-1}, obtenemos $N^{-1}[u]_\beta = N^{-1}N[u]_\gamma = [u]_\gamma$.

Teorema 1.6. *Sea* N *la matriz de transición de la base* $\beta = \beta' = \{u_i\}$ *a la base* $\gamma = \gamma' = \{u_i'\}$ *del espacio vectorial* U *. Sea* $f : U \to U$ *un operador lineal. Entonces* $[f]_\gamma^{\gamma'} = N_{-1}[f]_\beta^{\beta'}N$ *donde* $N = N_\gamma^\beta$*.*

Demostración. *Sea* $u \in U$*, luego* $N^{-1}[f]_\beta^{\beta'}N[u]_\gamma \overset{(1.1)}{=} N^{-1}[f]_\beta^{\beta'}N[u]_\beta \overset{(1.11)}{=} N^{-1}[f(u)]_{\beta'} \overset{(1.1)}{=} [f(u)]_{\gamma'}$*. Como* $[f]_\gamma^{\gamma'}[u]_\gamma = [f(u)]_{\gamma'}$ *por (1.11) tenemos que* $N^{-1}[f]_\beta^{\beta'}N[u]_\gamma = [f]_\gamma^{\gamma'}[u]_\gamma$*. Luego* $N^{-1}[f]_\beta^{\beta'}N = [f]_\gamma^{\gamma'}$*.*

Ejemplo 1.9. *Considere el operador* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dado por* $f(x, y) = (4x + y, 2x - 4y)$*. Sean* $\beta = \beta'$ *y* $\gamma = \gamma'$*. Luego*

$$f(1,0) = (4,2) = 4(1,0) + 2(0,1) \qquad y$$
$$f(0,1) = (1,-4) = 1(1,0) + (-4)(0,1).$$

Así que

$$[f]_\beta^{\beta'} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculemos $[f]_{\gamma}^{\gamma'}$ utilizando el teorema 1.6 con la $N = N_{\gamma}^{\beta}$ obtenida en

$$
\begin{aligned}
[f]_{\gamma}^{\gamma'} &= N^{-1}[f]_{\beta}^{\beta'}N \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

la cual coincide con la matriz $[f]_{\gamma}^{\gamma'}$ de (ejemplo 1.7).

Capítulo 2

Formas y Operadores.

2.1. Formas Bilineales

Definición 2.1. Sean U , V y W espacios vectoriales sobre un campo K . Una función $f : U$ x $V \to W$ se llama bilineal si:

$(i) f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$

$(ii) f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$ y

$(iii) f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v) = f(u, \lambda v); u_1, u_2, u \in U; v_1, v_2, v \in V; \lambda \in K.$

Es decir, $f : U$ x $V \to W$ es bilineal si es lineal en cada variable cuando la otra se mantiene fija.

Observación. Lo anterior significa que si $v \in V$ se mantiene fija en U x V , la función $u \longmapsto f(u, v)$ es lineal y por lo tanto es un elemento de $Hom_K(U, W)$. De igual forma, si $u \in U$ se mantiene fija en U x V , la función $v \longmapsto f(u, v)$ es lineal y pertenece a $Hom_K(V, W)$. Esto no significa que f sea lineal como función $f : U$ x $V \to W$. Por ejemplo, $f : \mathbb{R}$ x $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) = uv$ es bilineal pero no es lineal. Otro ejemplo, $f : \mathbb{R}$ x $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) = u + v$ es lineal pero no es bilineal.

Ejemplo 2.1. Sea A una matriz de m x n. Definamos

$$f : K^m \times K^n \to K$$

mediante $f(X,Y) = {}^tXAY$. esto es

$$(x_1 \dots x_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (\textstyle\sum_{i=1}^m x_i a_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^m x_i a_{in}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \textstyle\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} y_j$$

$$= \textstyle\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i y_j.$$

Es inmediato comprobar que $f(X,Y) \in K$ y que es bilineal, ya que las propiedades de las matrices establecen que ${}^tXA(Y+Y') =^t XAY +^t XAY'$ y ${}^tXA(\lambda Y) = \lambda({}^tXAY)$.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ entonces

$$f(X,Y) = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + 3x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_3y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2 + x3y_2 + x_1y_3 + 3x_2y_3 + x_3y_3.|$$

Si en la definición 2.1, $W = K$ diremos que f es una *forma bilineal*. Denotamos con

$L^2(U, V; K)$ el conjunto de formas bilineales de $U \times V$ en K. Si $U = V$, simplemente denotamos a $L^2(V, V; K)$ con $L^2(V; K)$ o con $Bil(V)$ entendiéndose que se trata de formas bilineales de $V \times V$ en K, que son las que consideraremos en adelante.

A $Bil(V)$ le podemos dar una estructura de espacio vectorial mediante las reglas $(f + g)(u, v) = f(u, v) + g(u, v)$ y $(\lambda f)(u, v) = \lambda f(u, v)$ para $f, g \in Bil(V), \lambda \in K$.

Consideremos el caso en que tengamos el espacio vectorial de homomorfismos $Hom_K(V, K$. Sus elementos $f : V \to K$, que son homomorfismos o aplicaciones lineales, se acostumbra llamarlos *funcionales lineales* o *formas lineales*. También se acostumbra denotar a $Hom_K(V, K$ con $L^1(V; K)$ o simplemente V^* y se le llama espacio dual de V. Su estructura esta dada por

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \text{ y}$$

$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v); v \in V, \lambda \in K.$$

Aquí vemos a K como espacio vectorial sobre si mismo.

Ejemplo 2.2. Sea $V = M_n(K)$ el espacio de las matrices cuadradas de $n \times n$.

Sea $f = tr : M_n(K) \to K$ dada por $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$, i.e., la traza de la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Como $tr(A + B) = trA + trB$ y $tr(\lambda A) = \lambda trA$, tr es un funcional.

Ejemplo 2.3. Sea $V = K^n$. Si $f \in Hom_K(V, K) = V^*, f$ tiene una representación matricial de la forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \vdots + a_nx_n$$

llamada también *forma lineal*.

Sabemos que si dim $V = n$ entonces dim $V^* = n$ pues $V^* = HomK(V, K)$ y por el teorema 1.5 dim $Hom_K(V, K) = n.1 = n$.

Veamos como determinar una base para V^* a partir de una base de V .

Proposición 2.1. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base del espacio vectorial V sobre K. Sean $f_{1,\ldots,f_n} \in Hom_K(V, K) = V^*$ funcionales dadas por $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, i.e., $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$. Entonces $\{f_i\}_{i=1}^n$ es una base de V^*.

Demostración. Veamos que $\{f_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente: Supongamos que

$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0$. Evaluando en v_1 obtenemos $\lambda_1 f_1(v_1) + \ldots + \lambda_n f_n(v_1) = \lambda_1.1 = 0(v_1) = 0$. Luego $\lambda_1 = 0$. Análogamente, evaluando en $v_2, v_3, \ldots, v_n$ obtenemos que $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$. Luego $\{f_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente. Como dim $V^* = n$ y $\{f_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente, es una base de V^*. Sin embargo veamos directamente que $\{f_i\}_{i=1}^n$ genera a V^* : sea $f \in V^*$ tal que $f(v_i) = \lambda_i$. Sea $\phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i, \phi(v_2) = \lambda_2, \ldots, \phi(v_n) = \lambda_n$. Así que $f(v_i) = \phi(v_i)$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Puesto que f y ϕ son iguales al evaluarlas en los elementos de la base de $V, f = \phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$. Luego $\{f_i\}_{i=1}^n$ genera a V^*.

La base de V^*, así obtenida, se llama *base dual*.

Ejemplo 2.4. Consideremos la base $\{(1,\ 1),\ (3,\ 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Encontremos su base dual para

$(\mathbb{R}^2)^* = Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Deseamos encontrar funcionales $f_1(x, y) = \alpha x + \beta y$ y $f_2(x, y) = \gamma x + \delta y$ tales que $f_1(1, 1) = 1, f_1(3, 1) = 0, f_2(1, 1) = 0, f_{2(3,1)=1}$. Luego

$$\left.\begin{aligned} f_1(1,1) = 1\alpha + 1\beta = 1 \\ f_1(3,1) = 3\alpha + 1\beta = 0 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $\alpha = -\frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{3}{2}$.

También

$$\left.\begin{aligned} f_2(1,1) &= \gamma + \delta = 0 \\ f_2(3,1) &= 3\gamma + \delta = 1 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\delta = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, una base dual es

$$\left\{ f_1(x,y) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y, f_2(x,y) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right\}.$$

Proposición 2.2. Sea Vun espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo K . Sea $\{v_i\}_{i=1}^n$ una base de V y $\{f_i\}_{i=1}^n$ su base dual. Entonces

(i) si $v \in V, v$ es de la forma

$$v = f_1(v)v_1 + f_2(v)v_2 + \ldots + f_n(v)v_n \text{ y}$$

(ii) si $f \in V^*, f$ es de la forma

$$f = f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n.$$

Demostración. (i) Sea $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$. Evaluando $f_i(v) = f_i(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = a_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Luego $v = f_1(v)v_1 + \ldots + f_n(v)v_n$.

(ii) Sea $v = f_1(v)v_1 + \ldots + f_n(v)v_n$. Luego $f_v = f_1(v)f(v_1) + \ldots + f_n(v)f(v_n) = f(v_1)f_1(v) + \ldots + f(v_n)f_n$.

A continuación encontremos una base para $Bil(V)$.

Proposición 2.3. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K de dimensión n. Si $\{f_i\}_{i=1}^n$ es una base para V^* entonces $\{f_{ij}\}_{i,j=1}^n$ dado por $f_{ij}(u,v) = f_i(u)f_j(v)$ es una base lineal para $Bil(V)$.

Demostración. Sea $\{v_i\}_{i=1}^n$ una base de V , dual de $\{f_i\}_{i=1}^n$. Veamos que $\{f_{ij}\}$ es linealmente independiente: supongamos que $\sum a_{ij}f_{ij} = 0$. Entonces para índices $r, s = 1, \ldots, n$ tenemos que
$(\sum a_{ij}f_{ij})(v_r, v_s) = \sum a_{ij}f_{ij}(v_r, v_s = \sum a_{ij}f_{ij}(v_r)f_j(v_s) = \sum a_{ij}\delta_{ir}\delta_{js} = a_{rs} = 0(v_r, v_s) = 0$.
Por tanto $\{f_{ij}\}$ es linealmente independiente.

Veamos que $\{f_{ij}\}$ genera a $Bil(V)$: sea $f \in Bil(V)$ y $a_{ij} = f(v_i, v_j)$. Basta probar que $f(v_r, v_s) = (a_{ij}f_{ij})(v_r, v_s)$ para $r, s = 1, \ldots, n$. Pero como antes, $(a_{ij}f_{ij})(v_r, v_s) = a_{rs} = f(v_r, v_s)$, luego $\{f_{ij}\}$ genera $Bil(V)$.

Observe que dim $Bil(V) = n^2$.

Sea V un espacio vectorial con base $\gamma = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y sea $f : V \times V \to K$ una forma bilineal de V . Si $u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ y $v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$son vectores de$V$,

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j v_j) \\ &= \alpha_1\beta_1 f(v_1, v_1) + \alpha_1\beta_2 f(v_1, v_2) + \ldots + \alpha_n\beta_n f(v_n, v_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_j f(v_i, v_j). \end{aligned}$$

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz cuadrada tal que $a_{ij} = f(v_i, v_j)$; luego

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_j a_{ij} \\ &= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \\ &= {}^t[u]_\gamma A[v]_\gamma. \end{aligned}$$

Llamaremos a A *matriz asociada a la forma bilineal* f *con respecto a la base* γ. A menudo denotamos a A como $[f]_\gamma$.

Ejemplo 2.5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal dada por $f((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)) = 4\alpha_2\beta_2$ y $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\} = \{(1, 1), (3, 1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ Calculemos la matriz asociada a f con respecto a γ, i.e., $A = (a_{ij})$ donde $a_{ij} = f(\gamma_i, \gamma_j)$

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= f(\gamma_1, \gamma_1) = f((1, 1), (1, 1)) = 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 \\
a_{12} &= f(\gamma_1, \gamma_2) = f((1, 1), (3, 1)) = 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 \\
a_{21} &= f(\gamma_2, \gamma_1) = 4 \\
a_{22} &= f(\gamma_2, \gamma_2) = 4
\end{aligned}
$$

Luego $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.6. Sea f como en el ejemplo anterior. Calculemos la matriz B asociada a $f$con respecto a la base $\gamma' = \{\gamma_1', \gamma_2'\} = \{(2, 1), (1, -1)\}$:

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= f(\gamma_1', \gamma_1') = f((2, 1), (2, 1)) = 4 \\
b_{12} &= f(\gamma_1', \gamma_2') = f((2, 1), (1, -1)) = -4 \\
b_{21} &= f(\gamma_2', \gamma_1') = f((1, -1), (2, 1)) = -4 \\
b_{22} &= f(\gamma_2', \gamma_2') = f((1, -1), (1, -1)) = 4
\end{aligned}
$$

Luego $B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.

Ahora, calculemos la matriz de transición N de la base γ a la base γ' del ejemplo 2.5:

$$
\begin{gathered}
\gamma_1' = (2, 1) = \lambda(1, 1) + \mu(3, 1) \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{2} = \mu \\
\gamma_2' = (1, -1) = \eta(1, 1) + \delta(3, 1) \Longrightarrow = -2, \delta = 1.
\end{gathered}
$$

Luego $N = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Observe que ${}^tNAN = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = B.$

Establezcamos la observación del ejemplo 2.6 en el siguiente teorema:

Teorema 2.1. Sea $f : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal. Si N es la matriz de transición de una base γ a una base γ' de V entonces la matriz B asociada a f con respecto a la base γ' es

$$B =^t NAN$$

donde A es la matriz asociada a f con respecto a γ.

Demostración. Sean $u, v \in V$ arbitrarios. Por el lema 1.1 $N[u]_{\gamma'} = [u]_\gamma$ y $N[v]_{\gamma'} = [v]_\gamma$. Luego ${}^t[u]_\gamma = {}^t[u]_{\gamma'} \, {}^tN$. Así que $f(u, v) = {}^t[u]_\gamma A[v]_\gamma = {}^t[u]_{\gamma'} \, {}^tNAN[v]_{\gamma'}$. Por lo tanto, ${}^tNAN$ es la matriz asociada a f con respecto a γ' .

Teorema 2.2. Sea $f : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal, $\gamma = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $[f]_\gamma$ la matriz asociada a la forma bilineal f . Entonces $Bil(V) \cong Mn(K)$dado por $f \longmapsto [f]_\gamma$.

Demostración. Es claro que $f \longmapsto [f]_\gamma$ es biyectiva pues f está determinada por $f(v_i, v_j)$. Veamos que es lineal: como

$$(f + f')(v_i, v_j) = f(v_i, v_j) + f'(v_i, v_j) \text{ y}$$
$$(\lambda f)(v_i, v_j) = \lambda f(v_i, v_j)\text{para} i, j = 1, \ldots, n,$$

se tiene que $[f + f']_\gamma = [f]_\gamma + [f']_\gamma$ y $[\lambda f]_\gamma = \lambda[f]_\gamma$.

Proposición 2.4. Sean $\{u_i\}_{i=1}^n$ y $\{v_i\}_{i=1}^n$ bases de$V$. Sean $\{f_i\}_{i=1}^n$ y $\{g_i\}_{i=1}^n$ bases de V^* duales de $\{u_i\}$ y $\{v_i\}$ respectivamente. Sea N la matriz de transición de la base $\{u_i\}$en la base $\{v_i\}$. Entonces ${}^tN^{-1}$ es la matriz de transición de la base $\{f_i\}$ en la base $\{g_i\}$.

Demostración. Recuérdese (la definición 1.15) que la matriz N es la matriz cuadrada traspuesta de la asociada al sistema

$$\begin{array}{lcllll} v_1 & = & \alpha_{11}u_1 & + & \dots & +\alpha_{1n}u_n \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ v_n & = & \alpha_{n1}u_1 & + & \dots & +\alpha_{nn}u_n \end{array}$$

i.e. $N = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = {}^t(\alpha_{ij})$ y ${}^tN = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})$.

De la misma manera, la matriz de transiciónBde la base $\{f_i\}$ a $\{g_i\}$es la traspuesta de la asociada al sistema

$$\begin{array}{lcllll} g_1 & = & \beta_{11}f_1 & + & \dots & + & \beta_{1n}f_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ g_n & = & \beta_{n1}f_1 & + & \dots & + & \beta_{nn}f_n \end{array}$$

i.e.

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{1n} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} = {}^t(\beta_{ij}).$$

Deseamos ver que$B = {}^tN^{-1}$. Para ello, veamos que $B\,{}^tN = I$, y así tendremos que $B = {}^tN^{-1}$. Pero

$$\begin{aligned} \delta_{ij} = g_i(v_j) &= (\beta_{i1}f1 + \ldots + \beta_{in}fn)(\alpha_{j1}u_1 + \ldots + \alpha_{jn}u_n) \\ &= \sum_k \sum_l \beta_{ik}\alpha_{jl}f_k(u_l) \\ &= \sum_{k=1}^n \beta_{ik}\alpha_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n \beta_{ik}\alpha'_{kj} \qquad (\alpha'_{kj} = \alpha_{kj}). \end{aligned}$$

Luego $B^tN = I$.

¿Qué sucede cuando consideramos el espacio dual de V^* ? Lo denotaremos con $V^{**} = (V^*)^*$.

¿Qué relación existe entre V y V^{**}? Veremos que $V \cong V^{**}$, pero antes necesitaremos un resultado previo que vale para espacios de dimensión infinita pero que no probaremos aquí.

Lema 2.1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n y $v \in V$ diferente de cero. Entonces existe un elemento $f \in V^*$ tal que $f(v) \neq 0$.

Demostración. Como $v \neq 0$, podemos completar una base de V de la forma $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$con $v_1 = v$. Sea $\{f_1, \ldots, f_n\}$ la base dual. Entonces $f_1(v_1) = f_1(v) = 1 \neq 0$.

Teorema 2.3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo K . La aplicación $\psi : V \longrightarrow V^{**}$ dada por $\psi(v) = \bar{v}$ donde $\bar{v}(f) = f(v) \forall v \in V$ es un isomorfismo.

Demostración. Veamos que ψ es lineal:

$$\begin{aligned}
\psi(u+v)(f) &= \overline{u+v}(f) = f(u+v) = f(u) + f(v) \\
&= \bar{u}(f) + \bar{v}(f) = \psi(u)(f) + \psi(v)(f). \\
\psi(\lambda u)(f) &= (\overline{\lambda u})(f) = f(\lambda u) = \lambda f(u) \\
&= \lambda \bar{u}(f) = \lambda \psi(u)(f).
\end{aligned}$$

Luego ψ es lineal.

Sea $v \neq 0$, $v \in V$. Por el lema 2.1, existe un funcional $f \in V^*$ tal que $f(v) \neq 0$. Luego $0 \neq f(v) = \bar{v}(f) = \psi(v)(f)$ para toda $v \neq 0$, por lo que $\psi \neq 0$, es decir, ψ es no singular ($ker\psi = \{0\}$). ψ es invertible y como dim V^{**} = dim V^* = dim V, ψ es un isomorfismo.

Observe que la función lineal $\psi : V \longrightarrow V^{**}$ se definió sin hacer mención de una base.

A ψ de el teorema 2.3 se le llama aplicación u homomorfismo natural de V en V^{**} . Si V no es de dimensión finita, ψ no es suprayectiva.

Capítulo 3

Álgebra Multilineal.

3.1. Producto Tensorial

A continuación definiremos un espacio vectorial en el cual solamente se tienen relaciones bilineales.

Definición 3.1. Sean U y V espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo K. El *producto tensorial* de U y V , es la pareja (T, f) donde T es un espacio vectorial de dimensión finita y $f : U \times V \longrightarrow T$ es una función bilineal, tal que si W es un espacio vectorial de dimensión finita y $g : U \times V \longrightarrow W$ es bilineal, entonces existe una función lineal única $h : T \longrightarrow W$ tal que $g = h \circ f$.

La condición $g = h \circ f$ se puede representar mediante el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, "h"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Veamos a continuación que, si existe, el producto tensorial de dos espacios vectoriales de dimensión finita es único. Es decir, dados dos productos tensoriales (T, f) y (T', f') de U y V existe un isomorfismo entre T y T'. Esto es inmediato, pues, por ser T un producto tensorial, existe $h : T \longrightarrow T'$ tal que $f' = h \circ f$. Análogamente,como T' es un producto tensorial, existe $h' : T' \longrightarrow T$ tal que $f = h' \circ f'$. Consideremos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, "h"] \arrow[dd, bend left=60, "1_T"] \\ U \times V \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & T' \arrow[d, "h'"] \\ & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & T' \arrow[d, "h'"] \arrow[dd, bend left=60, "1_{T'}"] \\ U \times V \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & T \arrow[d, "h"] \\ & T' \end{tikzcd}$$

Por ser T un producto tensorial, y como $1_T : T \longrightarrow T$ es tal que $1_T \circ f = f$ y también $h' \circ (h \circ f) = f$, por la unicidad tenemos que $h' \circ h = 1_T$. De manera semejante, por ser T' un producto tensorial, y como $1_{T'} : T' \longrightarrow T'$ es tal que $1_{T'} \circ f' = f'$ y también $h \circ (h' \circ f') = f'$, se tiene, por unicidad, que $h \circ h' = 1_{T'}$. Por lo tanto, h es un isomorfismo.

Entonces podemos hablar de el producto tensorial T de U y V, denotado con $T = U \otimes_K V$ o simplemente $U \otimes V$.

En otras palabras, la definición 3.1 nos dice que cualquier función bilineal $g : U \times V \longrightarrow W$ puede expresarse en términos de $f : U \times V \longrightarrow T = U \otimes_K V$ como g(u, v) $= h(f(u, v))$ para una función lineal única $h : U \otimes_K V \longrightarrow W$.

Ahora veamos que, dados dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo K, siempre existe su producto tensorial.

Proposición 3.1. Sean U y V espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo K. Entonces existe un espacio vectorial T de dimensión finita sobre K que cumple la definición 3.1.

Demostración. Sea $u_1, \ldots, u_m$ una base de U y $v_1, \ldots, v_n$ una base de V . Sea $T = K^{mn}$ el espacio vectorial de dimensión mn sobre K y eij con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq m$ n la base canónica. Los elementos de T se pueden expresar en forma única como

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_{ij} \text{ con} \lambda_{ij} \in K.$$

Sea $f : U \times V \longrightarrow T$ la función dada por

$$f(u, v) = f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m, \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j e_{ij}.$$

En particular, $f(u_i, v_j) = e_{ij}$.

Veamos que se cumple la definición 3.1 Comprobemos que f es bilineal: sea $u' = \alpha_1 + \ldots + \alpha'_m u_m$.

$$\begin{aligned} f(u+u',v) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i + \alpha'_i)\beta_j e_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i\beta_j + \alpha'_i\beta_j)e_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i\beta_j e_{ij} + \alpha'_i\beta_j e_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j e_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha'_i\beta_j e_{ij} \\ &= f(u,v) + f(u',v) \end{aligned}$$

Análogamente se tiene que $f(u, v+v') = f(u,v) + f(u,v')$ y que $f(\lambda u, v) = \lambda f(u,v) = f(u, \lambda v)$.

Finalmente, sea $g : U \times V \longrightarrow W$ una función bilineal. Por la proposición 1.10 existe una función lineal única $h : T \longrightarrow W$ tal que $h(e_{ij}) = g(u_i, v_j)$. Así, $g(u,v) =$

$$g(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n}\beta_j v_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j g(u_i,v_j) =$$
$$h(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j e_{ij}) = h(f(u,v)).$$

La función bilineal f se llama función bilineal universal (cualquier otra función bilineal $g : U \times V \longrightarrow W$ se obtiene de f) . Decimos que debido a la propiedad universal, el espacio vectorial $U \otimes_K V$ está determinado en forma única salvo isomorfismo. Es decir, que si en la construcción del espacio vectorial $U \otimes_K V$ hubiéramos tomado bases diferentes para U y V obtendríamos un espacio vectorial isomorfo a $U \otimes_K V$. Aún más, podríamos haber construido el producto tensorial $U \otimes_K$ sin utilizar bases de U y V tal que la definición 3.1 se cumpla.

Para cada $u \in U$ y $v \in V$, el elemento $f(u, v)$lo escribiremos en la forma $u \otimes v$. Es fácil comprobar que $f(U \times V)$ genera el producto tensorial T , el cual denotamos $U \otimes_K V$. De manera que cada elemento de $U \otimes_K V$ se puede escribir en la forma $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(u_i \otimes v_i)$ con $\lambda_i \in K, u_i \in U, v_i \in V$. Esta expresión no es única pues de la bilinealidad de f se tiene que

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \otimes v = \lambda_1(u_1 \otimes v) + \lambda_2(u_2 \otimes v) \qquad \text{y}$$

$$u \otimes (\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1(u \otimes v_1) + \mu_2(u \otimes v_2),$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \in K; u_1, u_2, u \in U$ y $v_1, v_2, v \in V$.

Como caso particular se tiene que

$$(\lambda u) \otimes v = \lambda(u \otimes v) = u \otimes (\lambda v).$$

Si $\lambda = -1$ se tiene que $(-u) \otimes v = -(u \otimes v) = u \otimes (-v) y si \lambda = 0$ se tiene que $0 \otimes v = 0 = u \otimes 0$.

Por lo tanto, cualquier elemento de $U \otimes_K V$ puede escribirse en la forma

$$\sum_{i=1}^{r} (u_i \otimes v_i)$$

donde $u_i \in U, v_i \in V$.

A continuación estableceremos algunas propiedades del producto tensorial.

Proposición 3.2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un campo K . Entonces

$$V \otimes_K K \cong V \cong K \otimes_K V.$$

Demostración. Sea $g : V \times K \longrightarrow V$ a función bilineal dada por $g(v, \lambda) = \lambda v, \lambda \in K, v \in V$. Entonces por la definición 3.1 existe una función lineal única

$h : V \otimes_K K \longrightarrow V$ tal que $h \circ f = g$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \times K \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & V \otimes_K K \arrow[d, "h"] \\ & V \end{tikzcd}$$

La función bilineal g es suprayectiva pues $g(v, 1) = 1 \cdot v = v$. Como $h \circ f = g$ entonces h es suprayectiva.

Veamos que h es inyectiva: sea $x \in V \otimes_K K$. Sea $\{v_i\}_{i=1}^n$ una base de V, x es de la forma $\sum_{i=1}^n (v_i \otimes \lambda_i)$ para $v_i \in V$, $\lambda_i \in K$ y tal que
$x = \sum_{i=1}^n (v_i \otimes \lambda_i) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i v_i \otimes 1) = (\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) \otimes 1 = v \otimes 1$. Luego
$h(x) = h(v \otimes 1) = h(f(v, 1)) = g(v, 1) = 1 \cdot v = v$. Si $h(v \otimes 1) = 0$ entonces $v = 0$ y por lo tanto $x = v \otimes 1 = 0$ Así, h es inyectivo.

Definición 3.2. Sean $V_1, V_2, \ldots, V_m, W$ una colección de espacios vectoriales sobre un campo K. Diremos que una función

$$f : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m \longrightarrow W$$

es *multilineal* si para cada $i = 1, \ldots, m$

$$f(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_m) = f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m) + f(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_m) \text{ y}$$
$$f(v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_m) = \lambda f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m)$$

Donde $\lambda \in K, v_i, v_i' \in V_i$.

Es decir, f es lineal en cada variable cuando las otras se mantienen fijas. También llamaremos *forma multilineal* a una función multilineal con codominio K. Podemos enunciar la definición equivalente a la definición 3.1 para productos multitensoriales.

Definición 3.3. Sean $\{v_i\}_{i=1}^m$ espacios vectoriales sobre un campo K. El *producto tensorial* de $\{V_i\}$ es una pareja (T, f) donde T es un espacio vectorial sobre K y f es una función multilineal $f : V_1 \times \cdots \times V_m \longrightarrow T$ tal que si W es un espacio vectorial sobre un campo K y $g : V_1 \times \cdots \times V_m \longrightarrow W$ es multilineal, entonces existe una función lineal única $h : T \longrightarrow W$ tal que $g = h \circ f$, es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_m \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, "h"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Denotaremos a T con $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ o con $\otimes_{i=1}^{m} V_i$ y es fácil comprobar la unicidad y existencia de T.

Proposición 3.3. Sean U, V, W espacios vectoriales sobre un campo K. Entonces $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W) \cong U \otimes V \otimes W$.

Demostración. Consideremos la función bilineal $g'' : U \times V \longrightarrow$ dada por $g''(u, v) = u \otimes v \otimes w$ para $w \in W$ fija, la cual induce una función lineal $h_w : U \otimes V \longrightarrow U \otimes V \otimes W$ tal que $h_w(u \otimes v) = u \otimes v \otimes w$. Sea $g : (U \otimes V) \times W \longrightarrow U \otimes V \otimes W$ dada por $g(t, w) = U \otimes V \otimes W h_w(t)$. g es bilineal y por lo tanto induce una función lineal $h : (U \times V) \otimes W \longrightarrow U \otimes V \otimes W$ tal que $h((u \otimes v) \otimes w) = u \otimes v \otimes w$.

Construyamos ahora una función $h' : U \otimes V \otimes W \longrightarrow (U \otimes V) \otimes W$ tal que $h' \circ h = 1_{(U \otimes V) \otimes W}$ y $h \circ h' = 1_{U \otimes V \otimes W}$. Para construir h' considere la función $g' : U \times V \times W \longrightarrow (U \otimes V) \otimes W$dada por $g'(u, v, w) = (u \otimes v) \otimes w$. g' es lineal en cada variable, luego induce una función lineal $h' : U \otimes V \otimes W \longrightarrow (U \otimes V) \otimes W$ tal que $h(u \otimes v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$. Es inmediato comprobar que $h' \circ h = 1_{(U \otimes V) \otimes W}$ y que $h \circ h' = 1_{U \otimes V \otimes W}$ y, por lo tanto, h y h' son isomorfismos. La demostración de que $U \otimes (V \otimes W) \cong U \otimes V \otimes W$ es análoga.

Definición 3.4. Sean $V_1, \ldots, V_m$ espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo K. Diremos que la sucesión

$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \longrightarrow V_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} V_m \xrightarrow{f_m} 0$$

es exacta en V_i si $im\ f_{i-1} = ker\ f_i$. Diremos que la sucesión es exacta si es exacta en cada V_i , para toda $i = 1, \ldots, m$.

Proposición 3.4. Sean $V_1, \ldots, V_m$ espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo K y

$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{m-2}} V_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} V_m \xrightarrow{f_m} 0$$

una sucesión exacta. Entonces

$$\dim\, V_1 - \dim\, V_2 + \dim\, V_3 - \cdots + (-1)^{m-1} \dim\, V_m = 0.$$

Demostración. Utilizaremos el proceso de inducción sobre m. Para $m = 1$tenemos la sucesión $0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} 0$. Por exactitud, $im\ f_0 = 0 = ker\ f_1 = V_1$. Luego $V_1 = 0$ y dim $V_1 = 0$. Supongamos que la proposición es válida para $m - 1$. Como $f_2 : V_2 \longrightarrow V_3$ posee núcleo $ker\ f_2 = im\ f_1$ induce una función lineal $V_2/im\ f_1 \longrightarrow V_3$ que es inyectiva. Luego, se tiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow V_2/im\ f_1 \longrightarrow V_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_{m-1} \longrightarrow V_m \longrightarrow 0$$

y, por hipótesis de inducción dim $V_2/im\ f_1 -$ dim $V_3 + \cdots = 0$, es decir, dim $V_2 -$ dim $(im\ f_1) -$ dim $V_3 + \cdots = 0$ y dim $V_1 =$ dim $(im\ f_1) +$ dim $(ker\ f_1) =$ dim $(im\ f_1) + 0 +$ dim$(im\ f_1)$ pues $im\ f_0 = 0 = ker\ f_1$. Luego dim $V_2 - dim V_1 - dim V_3 + \cdots = 0$.

Corolario 3.1. Si $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0$ s una sucesión exacta corta de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo K entonces $V_2 \cong V_1 \oplus V_3$.

Demostración. Por la proposición 3.4 dim V_1- dim V_2+ dim $V_3 = 0$. Luego dim $V_2 =$ dim $V_1 +$ dim V_3 y por lo tanto $V_2 \cong V_1 \oplus V_3$.

Bibliografía

[1] Emilio Lluis - Puebla, Álgebra Lineal, Álgebra Multilineal y K-Teoría Algebraica Clásica. SITESA. (2008).

[2] Birkhoff, G. , Mac Lane S. Algebra. Macmillan. (1968).

[3] Birkhoff, G. , Mac Lane S. A survey of Modern Algebra. Macmillan. (1977).

[4] Guelfand, I.M. Lecciones de Algebra Lineal. U. del País Vasco. (Traducción de la versión rusa de 1971).

[5] Herstein, I.N. Algebra Moderna. Trillas. (1970).

[6] Hoffman, K., Kunze R. Linear Algebra. Prentice Hall. (1961).

[7] Hungerford, T.W. Algebra. Springer Verlag. (1980).