UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
SECCION DE MATEMÁTICA

TRABAJO DE GRADUACIÓN TITULADO:

MATEMATICA ACTUARIAL APLICADA A LAS OPERACIONES DE SEGUROS

PRESENTADO POR:
HECTOR JHONY SALMERON CAÑAS
JACQUELINE YESENIA BLANCO BONILLA

DOCENTE ASESORA:
LICDA. MEIBY SULEMA RIVERA.

PARA OPTAR AL GRADO DE:
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

CIUDAD UNIVERSITARIA, DICIEMBRE DE 2020

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
AUTORIDADES

MSC. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO
RECTOR

PHD. RAÚL ERNESTO AZCÚNAGA LÓPEZ
VICE-RECTOR ACADÉMICO

ING. JUAN ROSA QUINTANILLA
VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO

ING. FRANCISCO ALARCÓN
SECRETARIO GENERAL

LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN
FISCAL GENERAL

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

LIC. CRISTÓBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ

DECANO

LIC. OSCAR VILLALOBOS

VICEDECANO

LIC. ISRAEL LÓPEZ MIRANDA

SECRETARIO INTERINO

MTRA. KARLA MARÍA MEJÍA ORTÍZ

JEFE DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

LICDA. MEIBY SULEMA RIVERA

DOCENTE DIRECTORA

PROF. ABEL MARTÍNEZ LÓPEZ

COORDINADOR DE LOS PROCESOS DE GRADUACIÓN DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

MTRO. JORGE PASTOR FUENTES CABRERA

COORDINADOR GENERAL DE LOS PROCESOS DE GRADUACIÓN DE LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR, FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por la fortaleza y por la bendición de mantenernos bien económicamente y de salud.

A nuestros padres, por su comprensión y apoyo.

A nuestra asesora Licenciada Meiby Sulema Rivera por su disposición, instrucción, apoyo y guía en cada contenido de este trabajo

INDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

La investigación documental realizada consiste en dar a conocer el tema Matemática Actuarial aplicada a las Operaciones de Seguros, a partir de una revisión de documentación acerca de bases técnicas y terminología empleada en operaciones de seguro, clasificación de seguros y tipos de primas se explican los fundamentos teóricos de la matemática actuarial y cómo aplicarlos en las operaciones de seguros de vida en caso de vida, en caso de muerte y mixtos; se muestran los antecedentes de las operaciones de seguro ya que es en ellas que tiene sus raíces la Matemática Actuarial. Se muestra el proceso de construcción de la tabla de valores conmutados o símbolos de conmutación que se utiliza en los ejemplos de las operaciones de seguros de vida en caso de vida, de muerte y seguros de vida mixtos, ésta tabla ayuda a realizar de una manera sencilla las operaciones de seguro ya que este método consiste en la generación de unos cálculos en los que intervienen los valores de las tablas de mortalidad y el tipo de interés, para su posterior tabulación. Dichos cálculos nos permiten expresar una gran cantidad de los seguros de vida como combinación de los mismos. A estos cálculos se les conoce con el nombre de símbolos de conmutación. La ventaja de este método es llegar a expresiones compactas con los símbolos de manera que el cálculo se realice de forma inmediata.

Palabras claves: tablas de mortalidad, seguros de vida, matemática actuarial, símbolos de conmutación.

INTRODUCCION

Las operaciones de seguro son una aplicación de la ciencia actuarial, por tanto, se da a conocer sobre esta área donde la matemática es aplicada, pues la ciencia actuarial está conformada por un conjunto de ramas interrelacionadas, entre ellas la probabilidad y la estadística, finanzas y economía. A medida que se desarrolle el estudio se notará que para las operaciones con seguro necesitamos herramientas que la matemática nos proporciona, se ha titulado: "Matemática Actuarial Aplicada a Operaciones en Seguro", y pretende explicar los fundamentos teóricos de la matemática actuarial y aplicarlos en las operaciones de seguros de vida en caso de vida, en caso de muerte y mixtos, como también; comprender la terminología empleada en los seguros, interpretar los modelos matemáticos en los que se basan las operaciones de seguros para calcular seguros de vida en caso de: vida, muerte y mixtos, además se pretende mostrar los antecedentes históricos de los seguros y estudiar los fundamentos teóricos de la matemática actuarial y ejemplificarlos en las operaciones de seguros de vida en caso de vida, de muerte y seguros de vida mixtos. En el capítulo I, se muestran los antecedentes de la ciencia actuarial; cómo surgió la idea de los seguros y como ésta era tomada en cuenta en las operaciones marítimas, la terminología usada en operaciones en seguro y su clasificación; seguros de vida en caso de vida en caso de muerte y mixto, además las aplicaciones que tiene la ciencia actuarial de las cuales tenemos las primas y operaciones de seguro de vida, en el capítulo II, nos muestra el significado que tienen las variables a utilizar así como también, las funciones propias de la estadística involucradas en operaciones de seguro y los modelos matemáticos los cuales son los valores o símbolos de conmutación, estos últimos nos ayudan a sustituir formulas complejas por simples y para finalizar en el capítulo III, se aborda una serie de ejemplos de primas de operaciones de seguro, en donde se usan las funciones antes descritas, también pasos para la construcción de la tabla de mortalidad que se usará en las operaciones de seguro y también la descripción de los valores o símbolos de conmutación.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Según investigaciones que se ha llevado a cabo, se sabe que en ninguna de las carreras que administra la Universidad de El Salvador se ha considerado el estudio de la ciencia o matemática actuarial ni en las materias obligatorias, ni en las materias electivas, la ciencia actuarial tienes varias aplicaciones una de ellas es en las operaciones de seguro y es en ella que se enfocara este trabajo ya que en el ámbito laboral las aseguradoras nos ofrecen una variedad de seguros y los empleados acceden a ellos sin tener conocimiento previo para poder optar por el que más le convenga.

ANTECEDENTES

En el año 2006 se presentó el trabajo titulado "IMPACTO DE LA PRIVATIZACION DEL SISTEMA DE PENSIONES EN LA SITUACION DE POBREZA DE LAS PERSONAS PENSIONADAS EN EL SALVADOR" en la Sección de Economía de la Universidad de El Salvador, como tesis de la Licenciatura de Economía.

En el año 2013, se presentó el trabajo de grado de la Licenciatura en Economía titulado "CRISIS ECONOMICA Y RENDIMIENTO DEL FONDO DE AHORRO DE PENSIONES DE EL SALVADOR: 2007-2012"; ambos trabajos tratan aspectos relacionados más con lo financiero que aspectos relacionados a la actuaria.

En el año 2017 se presentó un trabajo titulado "MODELOS ESTOCASTICOS DINAMICOS EN MATEMATICA ACTUARIAL" en la Escuela de Matemática, como tesis de la Licenciatura de Matemática, la cual introduce la ciencia actuarial como fundamento.

JUSTIFICACIÓN

En el recorrido de nuestra formación académica nos preguntamos en qué áreas de la vida cotidiana podríamos aplicar los conocimientos matemáticos adheridos en nuestra formación académica, tratando de darle una respuesta parcial a la misma, éste estudio está orientado a una de las tantas aplicaciones centrándonos en el área de la matemática actuarial y su aplicación específicamente a las operaciones de seguro, en los cuales nos enfocaremos en los seguros de: caso de vida, caso de muerte y mixtos; ya que al entrar al ámbito laboral el mercado de seguros es muy amplio y los empleados están obligados a optar por esos servicios y en muchas ocasiones acceden a esos servicios sin tener conocimiento previo de ello e ignorando las operaciones matemáticas involucradas en los seguros y es por ello que se pretende dar a conocer ésta área en la que la matemática es aplicada.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Explicar los fundamentos teóricos de la matemática actuarial y aplicarlos en las operaciones de seguros de vida en caso de vida, en caso de muerte y mixtos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Mostrar los antecedentes históricos de los seguros
- Comprender la terminología empleada en los seguros.
- Interpretar los modelos matemáticos en los que se basan las operaciones de seguros, para calcular seguros de vida en caso de: vida, muerte y mixtos.
- Estudiar los fundamentos teóricos de la matemática actuarial y ejemplificarlos en las operaciones de seguros de vida en caso de vida, de muerte y seguros de vida mixtos.

CAPÍTULO I: PRINCIPIOS ACTUARIALES

En este capítulo damos a conocer los inicios de la ciencia actuarial la cual se aplicó primeramente a operaciones de seguro marítimo y posteriormente a otras áreas, además mostramos una serie de términos utilizados en operaciones en seguro y su clasificación; seguros de vida en caso de vida en caso de muerte y mixto, además las aplicaciones que tiene la ciencia actuarial de las cuales tenemos las primas y operaciones de seguro de vida.

1.1 Antecedentes históricos de la ciencia actuarial

En sus comienzos, el seguro era una forma de solidaridad entre los miembros de una comunidad. Consistía en un fondo o bolsa en la que todas las personas depositaban parte de su dinero. Con el capital que acumulaban entre todos, se pagaban los daños que sufrían algunos de ellos. Por ejemplo: Antiguamente existía en algunos puertos la costumbre de que todos los armadores de barcos que hacían una determinada línea, aportaban a un fondo común una cantidad de dinero en función del número de navíos que poseían. Aquellos armadores cuyos barcos se hundían o eran abordados por los piratas recibían una compensación económica procedente del fondo común para poder adquirir otro barco con el que poder continuar su actividad.

La Ciencia Actuarial tal como hoy se concibe comienza en el siglo XVII. Durante este periodo las necesidades comerciales dieron lugar a operaciones que acarreaban un interés compuesto, los seguros marítimos eran algo habitual y el álgebra de las rentas vitalicias comenzaba su andadura. Este tipo de operaciones requería algo más que el juicio intuitivo y comercial de los primeros aseguradores.

Uno de los pilares de la Ciencia Actuarial fue la Teoría de Probabilidades, las bases del análisis estadístico en el seguro fueron establecidas por Pascal en 1654 en colaboración con el también matemático Pierre de Fermat.

Otro de los pilares es el concepto de tablas de vida, basadas en las investigaciones sobre la mortalidad. Las primeras tablas son debidas a John Graunt (1662). En 1693 Edmund Halley, matemático inglés, publicó un famoso documento describiendo la construcción de tablas de vida completas a partir de la hipótesis de una población estacionaria, así como el método de valoración de las rentas vitalicias, que es en esencia el mismo que se utiliza hoy en día. Las tablas de Halley se utilizaron por la mayoría de las compañías de seguros inglesas creadas durante el siglo XVIII.

Es en el presente siglo cuando la Ciencia Actuarial se enriquece con las aportaciones de las Matemáticas de los seguros no vida, la teoría estadístico-matemática de la estabilidad y la moderna teoría de la decisión.

En sí, la matemática actuarial es la ciencia que permite cuantificar el riesgo en términos monetarios.

1.2 Terminología del seguro

La actividad aseguradora, como cualquier otra que supone una especialidad, tiene su propia forma de expresarse. Vamos a ver una serie de términos de uso frecuente y algunos ejemplos para la contextualización de los términos:

Seguro: Entendido como contrato es el convenio entre dos partes, la compañía o entidad aseguradora por una parte y el tomador o contratante por otra, mediante la cual la primera se compromete a cubrir económicamente la pérdida o daño que el asegurado puede sufrir durante la vigencia del contrato. La obligación del asegurado es pagar, a la firma del contrato, el precio del seguro total o parcialmente.

Riesgo: Es la posibilidad de pérdida o daño. El hombre desde que nace vive con la constante amenaza de enfermedad, accidente, muerte... De la misma forma sus propiedades pueden sufrir incendios, robos, etc.

Siniestro: Es la concreción del riesgo. Por ejemplo, un incendio que destruye una fábrica, el robo de mercancías, muerte en un accidente, etc.

Asegurador: Es la persona jurídica que suscribe el compromiso de ofrecer la protección indemnizatoria cuando se produce el siniestro. Un asegurador es una sociedad anónima, una mutua de seguros, cooperativa, la delegación en España de un asegurador extranjero, etc. Para que una empresa pueda ejercer legalmente como aseguradora debe tener una autorización que concede el ministerio de Economía y Hacienda.

Tomador: Es la persona física o jurídica que firma el contrato y paga su precio.

Asegurado: Es la persona titular del interés asegurado. Es quien sufre el perjuicio económico en sus bienes en caso de que ocurra el siniestro o la persona cuya vida o integridad física se asegura y, por lo tanto, quien percibirá la indemnización en caso de que un siniestro afectase al objeto asegurado (excepto en el caso de seguros de vida, en que recibe la indemnización en caso de muerte el beneficiario). El asegurado puede ser la misma persona que el tomador o una persona distinta.

Beneficiario: Cuando se asegura la vida o la integridad física de una persona puede designarse a otra persona para que reciba las indemnizaciones.

Póliza: Es el documento en que se plasma el contrato de seguro. Tiene dos características que la hacen especialmente importante:

- Es la prueba de que el contrato existe; y
- Es la normativa que regula las relaciones entre los contratantes.

Consta básicamente de tres partes:

a) Condiciones generales: son una serie de cláusulas iguales para todos los contratos de la misma modalidad. Incluyen deberes y derechos, forma de atención del siniestro, riesgos cubiertos, etc.

b) Condiciones particulares: son las que individualizan cada contrato de seguro. Incluyen datos personales del tomador, características del riesgo que se asegura (incendio, accidente, robo...), importe de la prima, etc.

c) Condiciones especiales: aparecen en algunas pólizas y suponen una adaptación para determinados casos especiales. Por ejemplo, hay unas condiciones generales para todos los seguros de robo, pero dadas las características que pueden tener el seguro de robo a joyerías, se crean para este tipo de establecimientos unas condiciones especiales.

Prima: Aportación económica que ha de satisfacer el contratante o asegurado a la entidad aseguradora en concepto de contraprestación por la cobertura de riesgo que este le ofrece. Desde un punto de vista jurídico, es el elemento real más importante del contrato de seguro, porque su naturaleza, constitución y finalidad lo hacen ser esencial y típico de dicho contrato. Técnicamente, es el costo de la probabilidad media teórica de que haya siniestro de una determinada clase. Si en un país, o zona determinada, hubiese 1.000.000 de automóviles, respecto a los cuales la experiencia demostrase que, al cabo de un año, 250.000 de esos vehículos iban a tener siniestro por un importe de $500 cada uno, la prima que el asegurador debería cobrar individualmente a las personas cuyos vehículos quisieran asegurar sería la de $125: Este ejemplo simple pone de manifiesto que la prima debe ser proporcional, entre otros aspectos, a la duración del seguro, al mayor o menor grado de probabilidad del siniestro, a su posible intensidad o costo y, naturalmente, a la suma asegurada. Un análisis más detenido del ejemplo anterior lleva a la consecuencia de que la prima no puede ser equivalente al riesgo, sino proporcional, porque el pago de la indemnización depende de un acontecimiento fortuito, que sucederá o no, y cuya cuantía se desconoce a priori. Por otra parte, el asegurador no se limita a cobrar del asegurado el precio teórico medio de esa probabilidad (prima pura o de riesgo), sino que ha de gravarla con una serie de recargos, tales como:

- Gastos de administración (cobro de primas, tramitación de siniestros, haberes de personal de la empresa, etc.).
- Gastos de adquisición (comisiones de primas, marketing, etc.).
- Gastos de redistribución de riesgos (coaseguro y reaseguro).
- Recargo comercial (para obtener un beneficio lógico por el capital que arriesga la empresa aseguradora y el trabajo que desarrolla).

Todos estos recargos convierten la prima pura o prima de riesgo en prima comercial. Todavía la entidad aseguradora ha de satisfacer otra serie de gravámenes que repercuten sobre la prima comercial y que se denominan impuestos y accesorios, los cuales dan origen a la prima total que el asegurado ha de satisfacer definitivamente a la aseguradora. En resumen, los elementos componentes esenciales de la prima son los siguientes:

1. Precio teórico medio de la probabilidad de que ocurra un siniestro.

2. Recargo por gastos de administración, adquisición, compensación y redistribución de riesgos, más el beneficio comercial.

3. Otros gastos accesorios o fiscales repercutibles en el asegurado.

De estos elementos o de sus combinaciones surgen los siguientes tipos de prima:

1 = **prima pura o prima de riesgo**

1 + 2 = **prima de tarifa, prima bruta o prima comercial**

1 + 2 + 3 = **prima final o prima total.**

1.3 Clasificación de los seguros

Se pueden clasificar en dos grandes grupos: seguros de vida y seguros de no vida. Un seguro de vida es aquél en el que una entidad aseguradora se compromete mediante el cobro de una prima única o periódica a pagar la prestación convenida en el caso de que se cumpla la circunstancia prevista en el contrato: que la persona o personas fallezcan o sobrevivan a un período de tiempo determinado. Existen distintas modalidades de seguros de vida:

-Seguros de vida en caso de muerte:

Cuando ocurra la muerte del asegurado o del pensionista directo, como consecuencia de una enfermedad o accidente no profesional, sus beneficiarios tendrán derecho a recibir una pensión.

-Seguros de vida en caso de vida:

Es una cobertura complementaria del seguro de vida por la que la aseguradora se compromete con el asegurado a abonarle el capital establecido si no ha fallecido antes de que finalice el tiempo contratado. Esto es un aliciente para aquellas personas que temen perder su dinero.

-Seguros de vida mixtos:

Por otro lado, algunas compañías aseguradoras ofrecen seguros de Vida Mixtos, que garantizan el pago de un capital a los beneficiarios de la póliza en caso de fallecimiento del asegurado. También pueden abonárselo al tomador en el caso de que, llegado el vencimiento del seguro, el asegurado continúe con vida. En la actualidad, la mayoría de los seguros de Vida Ahorro contratados son de esta modalidad, ya que incorporan a las características puras de una póliza de ahorro un capital por fallecimiento o incapacidad.

Los seguros de no vida van dirigidos a cubrir daños materiales que ocasionan pérdidas económicas. Los más frecuentes son los de automóviles, incendios, robos, etc. En este caso, las prestaciones o indemnizaciones están en función de la cuantía del daño.

1.4 Usos de la matemática actuarial

A continuación, se detallan algunos de los usos de la matemática actuarial específicamente en las operaciones de seguro:

- El cálculo de primas, reservas, valores garantizados, etc., en las operaciones de seguros de vida.

- El análisis cuantitativo de los sistemas actuariales en los seguros colectivos, sociales y planes de pensiones.

- El estudio de los problemas de tarifación y reservas técnicas en los seguros no vida.

- La determinación de las magnitudes de estabilidad del ente asegurador y el análisis de su solvencia

CAPÍTULO II: EL MÉTODO DEL CÁLCULO DE SEGUROS DE VIDA

En este capitulo damos a conocer la representación que tienen las variables y símbolos a utilizar, así como también, las funciones de distribución de probabilidad, función de supervivencia, fuerza de mortalidad y probabilidad de supervivencia involucradas en operaciones de seguro

El método del cálculo de seguros de vida

Para realizar los cálculos actuariales de los seguros de vida es necesario conocer el significado de las variables utilizadas.

2.1 Símbolos, códigos y significados.

En la “Tabla 1” damos a conocer los símbolos a utilizar y su representación en las operaciones.

Tabla 1

Símbolos y su significado

Símbolo	Significado
x	Edad de la persona
ω	Límite superior de supervivencia
l_x	Sobrevivientes a la edad x
l_0	Recién nacidos

d_x	Fallecimientos
ξ	Variable aleatoria asociada con la edad de fallecimiento de un recién nacido o años de sobrevivencia (completos)
$F(x)$	Función de distribución de la variable aleatoria ξ
$S(x)$	Función de supervivencia
L_x	Promedio de sobrevivientes a la edad de x
T_x	Tiempo futuro de supervivencia
tp_x	Probabilidad de que una persona de edad x sobreviva por lo menos t años más.
p_x	Probabilidad de que sobreviva al año siguiente
tq_x	Probabilidad de que una persona de edad x fallezca dentro de t año
q_x	Probabilidad de que fallezca dentro de un año
$t/n\, q_x$	probabilidad de que una persona de edad x sobreviva a la edad de $x+t$ pero fallezca a la edad $x+t+n$
$p(x)$	Función de densidad de probabilidad (discreto)
$f(x)$	Función de densidad de probabilidad (continuo)
m_x	Fuerza de mortalidad
V^t o VA	Valor actual financiero de una unidad monetaria.
i	Tasa de interés
t	Tiempo
I	Interés
C	Capital

r	Factor de acumulación en el interés compuesto
$VF\ o\ S$	Valor futuro
SA	Suma asegurada
PU	Prima única o valor actual de los beneficios futuros
P	Prima neta anual
P_x	Prima de riesgo o prima pura
ρ_x	Prima comercial
tA_{x+t}	Prima única de un seguro de vida entera y de un seguro de vida entera con pagos limitados
$t\ddot{A}_{x+t;n-t}$	Prima única para un seguro temporal para n años
$tA_{x+t;n-t}$	Prima única de un seguro mixto para n años
M_x	Valor de conmutación
C_x	Valor de conmutación
N_x	Valor de conmutación
D_x	Valor de conmutación
R_x	Valor de conmutación

La x

En matemática actuarial la x representa la edad de la persona asegurada la misma que puede estar entre o y ω. Donde ω es la letra griega utilizada para representar el límite superior de súper vivencia.

$$0 \leq x \leq \omega$$

El l_x

El l_x indica el número de sobrevivientes a la edad de x

$$l_x = l_0.S(x) \quad [1]$$

Donde l_0 es el número de recién nacidos y $S(x)$ es la función de supervivencia.

El $\boldsymbol{d_x}$

d_x Indica el número de fallecimientos a la edad de x

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad [2]$$

La $\boldsymbol{\xi}$ o X

ξ es la variable aleatoria asociada con la edad de fallecimiento de un recién nacido

2.2 La función de distribución de la variable aleatoria $\boldsymbol{\xi}$ o la $\boldsymbol{F(x)}$

que dicho suceso ocurra.

Se denomina función de distribución de la variable aleatoria ξ a la función definida por:

$$F(x) = p(\xi \leq x) \quad [3]$$

La $F(x)$ es la función de distribución.

Variables aleatorias discretas: Es aquella que solo toma ciertos valores (frecuentemente enteros) y que resulta principalmente del conteo realizado.

Se dice que una variable aleatoria ξ es discreta si su rango es un conjunto discreto.

Variables aleatorias continuas: Es aquella que resulta generalmente de la medición y puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo dado.

Se dice que una variable aleatoria ξ es continua si su función de distribución es una función continua.

Una de las propiedades que utilizaremos es la siguiente:

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) \qquad [4]$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \qquad [5]$$

Ejemplo 1:

Representar la probabilidad de fallecimiento un recién nacido entre 15 y 20 años.

<u>Solución:</u>

Usaremos **[**4]

$$F(20) - F(15) = p(15 \leq \xi \leq 20)$$

$$F(20) - F(15) = p(\xi \leq 20) - p(\xi \leq 15)$$

Al conocer los valores de $p(\xi \leq 20)$ y $p(\xi \leq 15)$, conoceríamos la probabilidad de fallecimiento un recién nacido entre 15 y 20 años.

2.3 La función de supervivencia $S(x)$

Sea x la edad, en años enteros, de un ente (individuo, empresa, maquina, etc.), es decir, $x = 0,1,2, \ldots$ y consideremos un ente recién nacido (recién creada, recién comprada, etc.) al cual le asociamos la variable aleatoria ξ que representa la edad de fallecimiento (quiebra, daño, etc.) del ente considerado. Si $F(x)$ es la distribución de probabilidad acumulada, es decir $(F(x) = P(\xi \leq x, x \geq 0))$, definimos la función de supervivencia de x por:

$$S(x) = 1 - F(x) \qquad [6]$$

$S(x)$ representa el valor de la función de supervivencia

Note que:

Si multiplicamos por 1 conveniente obtenemos:

$$S(x) = \frac{S(x).\, l_0}{l_0}$$

Por [1] tenemos:

$$S(x) = \frac{l_x}{l_0}$$

Así también podemos representar a $S(x)$ como:

$$S(x) = \frac{l_x}{l_0} \qquad [7]$$

De [6] obtenemos que:

$$S(A) - S(B) = 1 - F(A) - \big(1 - F(B)\big)$$

$$S(A) - S(B) = F(B) - F(A) \qquad [8]$$

Propiedades:

- La distribución de ξ queda determinada completamente por $F(x)$ o $S(x)$
- $S(x)$ es una función monótona decreciente.
- $S(0) = 1.$
- $\lim_{x \to \infty} S(x) = 0$

La probabilidad que un recién nacido fallezca entre x y y, sobreviviendo a la edad x es:

$$P(x < \xi \leq y | \xi > x) = \frac{P(x < \xi \leq y)}{P(\xi > x)} \qquad [9]$$

De [3] y [4] obtenemos:

$$P(x < \xi \leq y | \xi > x) = \frac{F(y) - F(x)}{1 - F(x)} \qquad [10]$$

De [8] resulta:

$$P(x < \xi \leq y | \xi > x) = \frac{S(x) - S(y)}{S(x)} \qquad [11]$$

El L_x

El L_x es el promedio de sobrevivientes a la edad de x.

$$L_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{2} \quad [12]$$

El T_x

El T_x es el tiempo futuro de supervivencia

$$T_x = \int_0^{\omega} l_{x+t} d_x \quad [13]$$

Donde:

$$T_0 = \sum_{x=0}^{\omega} l_x \quad [14]$$

$$\boldsymbol{T_x = T_{x-1} - L_{x-1}} \quad [15]$$

2.4 La probabilidad de que una persona de edad x sobreviva por lo menos t años más tp_x

tp_x Probabilidad de que una persona de edad x sobreviva por lo menos t años más

$$tp_x = P(T(x) > t). \quad [16]$$

Así $p_x = P(T(x) > 1)$. Es la probabilidad de que sobreviva al año siguiente y no es necesario escribir el prefijo 1.

tp_x Se puede expresar de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{t}p_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} \quad [17]$$

Usando [7] tenemos:

$$\boldsymbol{t}p_x = \frac{\frac{l_{x+t}}{l_0}}{\frac{l_x}{l_0}}$$

$$\boldsymbol{t}p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \quad [18]$$

Ejemplo 2:

Plantear la probabilidad de que una persona de dos años sobreviva dos años más.

<u>Solución:</u>

Tomando la ecuación [17] y [18] de la $\boldsymbol{t}p_x$ tenemos:

$$\boldsymbol{t}p_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$2p_2 = \frac{S(2+2)}{S(2)}$$

$$= \frac{S(4)}{S(2)}$$

$$= \frac{l_4}{l_2}$$

2.5 La probabilidad de que una persona de edad x fallezca dentro de t año $\boldsymbol{tq_x}$

$t\ q_x$**:** Probabilidad de que una persona de edad x fallezca dentro de t año

$$t\, q_x = P(T(x) \leq t). \qquad [19]$$

Así $q_x = P(T(x) \leq 1)$. Es la probabilidad de que fallezca dentro de un año y no es necesario escribir el prefijo 1.

Podemos expresar $t\, q_x$ de la siguiente manera:

$$t\, q_x = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} \qquad [20]$$

De [7] y [20] obtenemos:

$$t\, q_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \qquad [21]$$

Ejemplo 3:

Plantear la probabilidad de que una persona de 22 años sobreviva 5 años más.

<u>Solución:</u>

$$5\, q_{22} = \frac{S(22) - S(27)}{S(22)}$$

$$= \frac{l_{22} - l_{27}}{l_{22}}$$

2.6 La probabilidad de que una persona de edad x sobreviva a la edad de $x + t$ pero fallezca a la edad $x + t + n$, t/nq_x

$t/n\ q_x$ es la probabilidad de que una persona de edad x sobreviva a la edad de $x+t$ pero fallezca a la edad $x+t+n$

$$t/nq_x = \frac{S(x+t) - S(x+t+n)}{S(x)} \qquad [22]$$

De [22] y [7] obtenemos:

$$t/nq_x = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+n}}{l_x} \qquad [23]$$

Propiedades:

1. $t\ p_x = 1 - t\ q_x$ [24]
2. En el caso de recien nacidos
   a. $T(0) = \xi$ [25]
   b. $T(0) = S(x), \quad \forall x \geq 0$ [26]
3. $t/nq_x = t\ p_x . nq_{x+t}$ [27]

Además,

$$t/nq_x = P(t < T(x) \leq t+n)$$

$$t/nq_x = (t+n)q_x - t\ q_x \qquad [28]$$

Luego, de [24] y [28] obtenemos:

$$t/nq_x = (1 - (t+n)p_x) - (1 - t\ p_x)$$

$$t/nq_x = 1 - (t+n)p_x - 1 + t\ p_x$$

$$t/nq_x = t\ p_x - (t+n)p_x \qquad [29]$$

Demostración de propiedad 3:

De [22] y [28] obtenemos:

$$t/nq_x = \frac{S(x) - S(x+t+n)}{S(x)} - \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)}$$

$$= \frac{S(x+t) - S(x+t+n)}{S(x)}$$

$$= \frac{S(x+t) - S(x+t+n)}{S(x)} . \frac{S(x+t)}{S(x+t)}$$

$$= \frac{S(x+t)}{S(x)} . \frac{S(x+t) - S(x+t+n)}{S(x+t)}$$

$$= t\, p_x . nq_{x+t}$$

Ejemplo 4:

Plantear la probabilidad de que una persona de 27 años sobreviva a la edad de 30 pero muera a los 35:

<u>Solución:</u>

$$t/n\, qx = \frac{S(x+t) - S(x+t+n)}{S(x)}$$

$$= \frac{l_{x+t} - l_{x+t+n}}{l_x}$$

$$3/5\, q27 = \frac{S(30) - S(35)}{S(27)} = \frac{l_{30} - l_{35}}{l_{27}}$$

2.7 Funciones de densidad de probabilidad

La **función de densidad de probabilidad es una función matemática** para definir cómo se **distribuye una variable numérica en una población.**

Para el caso continuo y discreto se define de la siguiente forma:

- Para el caso discreto se define la función de densidad de probabilidad $p(x)$ como:

$$p(x) = P(\xi = x) \tag{30}$$

- Para el caso continuo se define la función de densidad de probabilidad $f(x)$ como:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{31}$$

2.8 La fuerza de mortalidad m_x

Como q_x es el porcentaje anual de fallecimientos, y es evidente que este valor varía para cada edad x, es interesante disponer de una forma de medir su variación instantánea. Para ello consideramos la probabilidad que una persona fallezca entre x y $x + \Delta_x$ dado que sobrevive a la edad x:

$$P(x < \xi \leq x + \Delta_x | \xi > x) = \frac{F(x + \Delta_x) - F(x)}{1 - F(x)} \tag{32}$$

Y así Δ_x es suficientemente pequeño:

$$P(x < \xi \leq x + \Delta_x | \xi > x) \approx \frac{F'(x)\Delta_x}{1 - F(x)}$$

De [31] obtenemos:

$$P(x < \xi \leq x + \Delta_x | \xi > x) \approx \frac{f(x)\Delta_x}{1 - F(x)}$$

Es decir, la probabilidad de que un individuo de edad x fallezca en el instante Δ_x posterior es proporcional a la duración de ese instante con el coeficiente de proporcionalidad siguiente:

$$\frac{f(x)}{1 - F(x)} \qquad [33]$$

A la expresión [33] se le denomina la fuerza de la mortalidad y se la representa con m_x y es en definitiva una medida de la intensidad de la mortalidad a la edad x, para los individuos que han alcanzado esa edad.

$$m_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \qquad [34]$$

Entonces:

$$m_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

De [31] y [34] obtenemos:

$$m_x = \frac{F'(x)}{1 - F(x)}$$

Aplicando [6] obtenemos:

$$m_x = \frac{\left(1 - S(x)\right)'}{1 - F(x)}$$

$$m_x = \frac{-S'(x)}{1-F(x)}$$

Aplicando [4] obtenemos:

$$m_x = -\frac{S'(x)}{S(x)} \qquad [35]$$

Aplicando [7] obtenemos:

$$m_x = -\frac{\left(\frac{l_x}{l_0}\right)'}{\frac{l_x}{l_0}}$$

$$m_x = -\frac{\frac{l'_x}{l_0}}{\frac{l_x}{l_0}}$$

$$m_x = -\frac{l'_x{}'}{l_x} \qquad [36]$$

$$m_x = -\frac{d}{dx}(\ln(l_x)) \qquad [37]$$

Propiedades de la fuerza de mortalidad:

1. $m_x \geq 0; \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $m_x = -\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{l_x{}'}{l_x}$
3. $np_x = e^{-\int_x^{x+n} m_x dx} = e^{-\int_0^n m_{x+t} dt}$ [38]

4. $nq_x = \int_0^n tp_x \, m_{x+t} dt$ [39]

Demostración:

La propiedad 1 es evidente por [34], la propiedad 2 se demostró en [35] y [36]

Demostración de la propiedad 3.

Usando la propiedad 2 y propiedades de derivada, integrales, logarítmicas y exponenciales tenemos:

$$m_x = -\frac{S'(x)}{S(x)}$$

$$-\frac{d}{d_x}\left(\ln S\,(x)\right) = m_x$$

$$-d\left(\ln S(x)\right) = m_x d_x$$

$$-\int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x+n}} d\left(\ln S(x)\right) = \int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x+n}} m_x \, d_x$$

$$\ln S(x+n) - \ln S(x) = -\int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x+n}} m_x \, d_x$$

$$\ln\left(\frac{S(x+n)}{S(x)}\right) = -\int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x+n}} m_x \, d_x$$

Aplicando [17] obtenemos:

$$\ln\,(\,np_x) = -\int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x+n}} m_x \, d_x$$

$$.\acute{}\,. \qquad np_x = e^{-\int_x^{x+n} m_x dx}$$

<u>Demostración de propiedad 4</u>

Usando la propiedad 2, tenemos:

$$\frac{l'_x}{l_x} = m_x$$

$$l'_x = l_x m_x$$

$$\int_{x}^{x+n} l'_x \, dx = -\int_{x}^{x+n} l_x \, m_x dx$$

$$l_{x+n} - l_x = -\int_{x}^{x+n} l_x \, m_x dx$$

$$l_x - l_{x+n} = \int_{0}^{n} l_{x+t} \, m_{x+t} dt$$

$$\frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \int_{0}^{n} \frac{l_{x+t} m_{x+t} dt}{l_x}$$

$$\frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \int_{0}^{n} \frac{l_{x+t}}{l_x} m_{x+t} dt$$

Aplicando [21] obtenemos:

$$nq_x = \int_{0}^{n} tp_x \, m_{x+t} dt.$$

Es decir que $tp_x m_{x+t}$ es la función de densidad de la variable aleatoria tiempo de vida futuro para un individuo de la edad x.

Cuando l_x viene dado por una tabla de mortalidad y no se conoce su distribución, los valores de m_x pueden estimarse como:

$$m_x = \frac{1}{2}[\ln(l_{x-1}) \; - \; \ln(l_{x+1})] \qquad [40]$$

Demostración:

$$np_x = e^{-\int_0^n m_{x+t} dt}$$

Si $n = 1$.

$$p_x = e^{-\int_0^n m_{x+t} dt}$$

$$\ln p_x = -\int_0^n m_{x+t} dt$$

$$\int_0^n m_{x+t} dt \approx m_{x+1/2}$$

Luego:

$$\ln p_x = -m_{x+1/2}$$

$$-(\ln p_{x-1} + \ln p_x) = \int_{-1}^{1} m_{x+t} dt$$

Aproximando esta última integral se tiene:

$$\int_{-1}^{1} m_{x+t} dt \;\; \approx \; 2m_x = \; -\ln p_{x-1} - \ln p_x$$

$$m_x \approx -\frac{1}{2}(\ln p_{x-1} + \ln p_x)$$

$$\approx \frac{1}{2}(\ln l_{x-1} + \ln l_{x+1})$$

2.9 El factor de actualización al valor presente V^t o VA

El factor de actualización financiera sirve para actualizar cualquier capital futuro al momento actual. El V^t representa el valor actual financiero de una unidad monetaria.

Siendo t el número de años a actualizar e i representa la tasa de interés, tenemos la siguiente fórmula:

$$V^t = \frac{1}{(1+i)^t} \qquad [41]$$

CAPÍTULO III: PROCESOS ACTUARIALES

Aquí abordaremos una serie de ejemplos de primas de operaciones de seguro, en donde usamos las funciones antes descritas, también pasos para la construcción de la tabla de mortalidad que usaremos en las operaciones de seguro y también la descripción y construcción de los valores o símbolos de conmutación los cuales son expresiones simples que nos facilitaran la construcción de las tablas.

3.1 Notas técnicas

Los cálculos de las primas, tarifas y reservas de los seguros básicos y los complementarios, son convenidos en las denominadas Notas Técnicas de los Seguros diseñadas por los actuarios.

En el caso salvadoreño, la justificación legal de la utilización de notas técnicas o estudios estadísticos según Ley de Sociedad de Seguros está referida así:

> Art. 46.- Sin perjuicio de lo dispuesto en otras leyes, se prohíben los acuerdos, prácticas u operaciones que tengan por objeto impedir, restringir, falsear o eliminar la libre competencia o cuyo efecto tienda a ejercer prácticas oligopólicas en las actividades reguladas por esta Ley. (p.22)
>
> Art. 47.- Los Seguros sólo podrán ser contratados con modelo de pólizas previamente depositadas en la Superintendencia, quien podrá, mediante decisión fundamentada, en un plazo no mayor de treinta días a partir de la fecha del depósito, recomendar los cambios necesarios, cuando contengan cláusulas que se opongan a la legislación o cuando las bases no

sean suficientes para cubrir los riesgos; debiendo las sociedades de seguros en los siguientes diez días del recibo de la decisión fundamentada, remitir a la Superintendencia los modelos corregidos.(p.23)

En los cuales se expone que las aseguradoras serán libres en el establecimiento de las tarifas, siempre que las bases técnicas sean suficientes para cubrir los riesgos, por lo que las primas de riesgo deberán sustentarse con bases técnicas apropiadas.

Las bases técnicas, están referidas a las hipótesis utilizadas en los cálculos, tablas de mortalidad e interés en los casos de los seguros de personas y bases estadísticas en los seguros generales.

La suficiencia de las tarifas no debe limitarse a la expectativa que genera la prima pura o la probabilidad de esperar la misma siniestralidad en las mismas condiciones a los agentes.

La reglamentación normativa se detalla en la norma NPS4-012 denominadas Normas para el depósito de Pólizas de Seguros, y en el anexo No. 2 de dichas normas, se detalla la información técnica para los seguros e incluye:

Para seguros de vida

Bases técnicas:

- Tablas de mortalidad (CSO 80)
- Interés técnico (Interés 3%)
- Tabla de valores de conmutación (referida a conmutaciones básicas utilizadas en el cálculo)
- Asimismo, deben presentarse fórmulas para el cálculo de primas netas, comerciales (para métodos modificados) y de valuación, reservas y valores garantizados, señalando el método de modificación de reservas, si lo hubiere.

- Tablas de primas netas y comerciales.
- Tablas de reservas medias, terminales y valores garantizados.
    - Reservas de balance
    - Reservas matemáticas
    - Valores efectivos a favor del asegurado.

Comúnmente las notas técnicas, suelen presentar la siguiente estructura:

- Descripción del producto (cobertura y exclusiones)
- Bases técnicas (estadísticas o tablas de mortalidad e interés, equivalente a las hipótesis actuariales)
- Fórmulas para el cálculo de las primas netas (vida y daños)
- Fórmulas para el cálculo de las primas de tarifa (vida y daños)
- Recargos administrativos, comisiones y utilidad
- Formas del pago de las primas (anual o fraccionado)
- Coaseguros y deducibles (si los hubiere)
- Fórmulas de las provisiones técnicas: terminales, medias y valores garantizados en el caso de los seguros de vida.

Los gastos asignados al contrato por lo general son:

- Gastos de administración que se pagan durante la vigencia del contrato;
- Gastos de adquisición o comisiones a los agentes de seguro;
- Utilidad por el retorno de la inversión; y,
- En ocasiones, también se recarga la prima con un porcentaje por la transferencia del riesgo a los reaseguradores, aun cuando nuestro medio, no es frecuente.

3.2 Conceptos básicos

En razón con lo anteriormente expuesto, diremos que:

a) Las bases técnicas:

Bases aplicadas para la determinación de las tarifas y las reservas; en los seguros de vida, corresponden a las tablas de mortalidad y la tasa de interés técnico (tasas de descuento).

En los seguros generales (daños), bases técnicas, serán las estadísticas e información utilizada para el cálculo de las tarifas.

Ejemplo: bases técnicas en los seguros de vida:

- Tablas de mortalidad CSO-80
- Interés técnico 3.5% anual

b) La prima de riesgos:

Técnicamente es el costo de la probabilidad media de la realización de un siniestro y se define equivalente a la probabilidad de fallecimiento o sobrevivencia en el seguro de vida y a la probabilidad media de los seguros de daño.

c) La prima comercial o de tarifa:

Resulta de aplicar a la prima de riesgo los recargos de administración, comisiones, utilidad; entre otros.

d) Las reservas técnicas:

Se interpretan como las obligaciones futuras de la aseguradora que se constituyen para garantizar el cumplimiento de las obligaciones derivadas de los contratos de seguro.

3.3 Combinación de eventos aleatorios

La existencia de un seguro de vida en términos actuariales, se debe fundamentalmente a la combinación de eventos aleatorios:

a) La sobrevivencia o la muerte de los seres humanos; y

b) El desarrollo económico con miras hacia el rendimiento de las inversiones.

Si bien la sobrevivencia o la muerte de los seres humanos no pueden ser predichas individualmente, ellas pueden ser cuantificadas de manera satisfactoria para grandes grupos de individuos.

La idea es que los asegurados efectúen pagos regulares a las aseguradoras mientras ésta garantiza el pago de los siniestros.

De esta manera un conjunto de individuos hace contribuciones financieras a un fondo del cual se beneficiarán solo los que se vean afectados, lo cual podría denominarse: mecanismo de solidaridad.

Es por lo anterior que la principal tarea del actuario en una aseguradora es determinar una prima adecuada de manera que esté en condiciones de cubrir los siniestros durante un largo periodo manteniendo el principio de solidaridad en el tiempo.

Es claro que el nivel de las primas debe ser justificable a los ojos de los asegurados.

Para los seguros de vida, el cálculo se sustenta en un modelo matemático que establece que la ocurrencia, la muerte del asegurado y el rendimiento de la inversión, deben ser computables, así:

Determinación de sobrevivientes o muerte y elementos financieros, luego el modelo, posteriormente las probabilidades, tabla de mortalidad, matemáticas financieras e interés para luego calcular las primas y reservas.

Para los seguros de vida, elementos de las probabilidades que se emplean en el cálculo de las primas (netas), se derivan de las tablas de mortalidad.

Es por tal razón que el ingrediente principal del cálculo de las primas y reservas es la tabla de mortalidad, la cual se obtiene observando el comportamiento de la sobrevivencia de grandes grupos de individuos mediante probabilidades y estadísticas.

En nuestro país, se utilizan tablas de la experiencia americana, elaborados por los actuarios de USA. Tables: Experience Americana, Commissioners Standard Ordinary Table (CSO-41), CSO 58, CSO 80 y CSO 2001. (Según las normas para la constitución de las reservas técnicas de las sociedades de seguros).

3.4 La tasa de interés

Las tasas de interés representan el valor del dinero en el tiempo o el dinero pagado por su uso.

Interés simple

Una operación financiera es a interés simple cuando el interés es calculado sobre el capital (o principal) original y para el periodo completo de la transacción.

En otras palabras, no hay capitalización de intereses.

El interés es el producto de los tres factores, capital ($\boldsymbol{C}$)**,** tiempo (t) y la tasa ($\boldsymbol{i}$), así:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{C} * \boldsymbol{t} * \boldsymbol{i} \qquad [42]$$

El interés compuesto

Con el interés compuesto, pagamos o ganamos no solo sobre el capital inicial sino también sobre el acumulado, en contraste con el interés simple que solo paga o gana intereses sobre el capital inicial.

Una operación financiera es a interés compuesto, cuando el plazo completo de la operación (por ejemplo, un año) está dividido en periodos regulares (por ejemplo, un mes) y el interés devengado al final de cada uno de ellos, es agregado al capital existente desde el inicio.

El factor de acumulación en el interés compuesto en el tiempo estará dado por:

$$\boldsymbol{r = (1 + i)^{n}} \qquad [43]$$

El cual representa la acumulación del interés en el futuro, por lo que el valor futuro de una inversión inicial a una tasa de interés dada compuesta anualmente en un periodo futuro, es la expresión:

$$\boldsymbol{VF = VA} * \boldsymbol{(1 + i)^{n}} \qquad [44]$$

Donde:

$$\boldsymbol{VF} = Valor\ futuro$$

$$\boldsymbol{VA} = Valor\ actual$$

$$\boldsymbol{(1 + i)^{n}} = Factor\ de\ acumulación$$

Ejemplos:

1) Calcular el VF al final de 5 años de una inversión de $20,000.00 con un interés del 2% anual.

2) El señor Miguel Rugía tiene un excedente de utilidades de $1,000.00 y los guarda en un banco a plazo fijo, que anualmente paga 3%; ¿Cuánto tendrá dentro de 3 años?

Solución:

Primer ejemplo:

$$VF = \mathrm{VA} * (1 + \mathrm{i})^{\boldsymbol{n}} = \$20{,}000.00 * (1 + 2\%)^{\mathbf{5}}$$

$$VF = \$22{,}081.61$$

Segundo ejemplo:

$$VA = \$1{,}000;\ \mathrm{n} = 3;\ \mathrm{i} = 0.03;\ \mathrm{VF} = ?$$

$$VF = \mathrm{VA} * (1 + \mathrm{i})^{\boldsymbol{n}} = \$1{,}000.00 * (1 + 0.03)^{\mathbf{3}} = \$1{,}092.73$$

Se aclara que si en una compañía de seguros, el monto de las reservas técnicas de los seguros de vida se determina al 3%, las inversiones afectadas deberán colocarse tasas superiores o iguales para no obtener pérdidas en las operaciones activas.

En tal sentido el valor actual de un capital “$\boldsymbol{C}$” de una suma pagadera después de $\boldsymbol{n}$ periodos de interés, es el monto que tiene que ser invertido hoy a interés compuesto para obtener un valor acumulado de $\boldsymbol{VF}$ después de $\boldsymbol{n}$ periodos.

Por lo tanto, $\boldsymbol{C}$ será igual:

$$\boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{VF}}{(\mathbf{1} + \boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}} \qquad [45]$$

Ejemplo:

¿Cuánto tendría que poner de capital hoy para obtener $75,000? después de 15 años, al 3% de interés?

$$\boldsymbol{C} = \frac{\$75{,}000.00}{(1 + 3\%)^{15}} = \$48{,}139.65$$

3.5 Factores biométricos: tablas de mortalidad

Las funciones o factores biométricas básicas son una serie de funciones teóricas creadas con el objeto de realizar estimaciones actuariales relacionadas con las probabilidades de supervivencia o muerte de personas. Estas funciones constituyen la base del cálculo actuarial, ya que mediante ellas se calculan las diversas fórmulas actuariales de primas, reservas, anualidades, etc., que son utilizadas para valorar obligaciones sujetas a la contingencia de vida o muerte de personas

En relación a los factores utilizados para calcular primas (elementos biométricos) en los seguros de vida a largo plazo, para calcular las tarifas, se refiere conjugar los elementos:

- Tasas de mortalidad;
- Ganancias de inversión; y
- Gastos o recargos a las tarifas.

1) Hipótesis demográfica: tablas de mortalidad que se utilizará, se estima que el comportamiento del grupo asegurado tendrá la tendencia que establece la tabla;

2) La tasa de interés que se espera rinda las inversiones, teniendo presente que deberán ser mayor de la que se utilice para determinar las reservas;

Luego, las bases técnicas a utilizar son:

a) Hipótesis demográfica es la tabla de mortalidad;

b) Hipótesis financieras es la tasa de interés técnico;

c) Recargos que se aplicarán a la prima de riesgo; y

d) La simbología actuarial que se utilizará.

Podemos definir las tablas de mortalidad como la herramienta que recolecta información básica útil para poder calcular las probabilidades de muerte y de sobrevivencia necesarias para determinar primas y reservas en los seguros de vida.

Las tablas de mortalidad constituyen el elemento esencial para el cálculo de las primas, en virtud que ellas contienen:

1) La mortalidad.

2) Interés técnico equivalente a la tasa de descuento que se hará a las primas y reservas, la cual debe contrastarse con las tasas de interés que generan las inversiones. (o la normativa existente emitida por el Banco Central de Reservas BCR).

3) La simbología actuarial tal como: x, d_x, q_x, l_x, probabilidad de sobrevivencia y conmutados.

4) Las probabilidades de fallecimiento y sobrevivencia por cada una de las edades en ella consideradas.

Las tablas se preparan tomando en consideración la Ley de los Grandes Números.; mientras más veces observamos un evento, más posibles será que nuestros resultados observados se aproximen a la probabilidad “verdadera” de que ocurra el evento.

Así, existen tablas de mortalidad de incidencia de muerte y enfermedad.

Tasa de mortalidad

Incidencia de muerte entre un grupo determinado de personas; (Tabla de mortalidad CSO-2001 al 3% de interés técnico)

Tasa de morbilidad

Incidencia de enfermedad y accidentes entre un grupo determinado de personas; (para los seguros de vida, el mercado utiliza tablas de invalidez, para seguros de grupo, género y hábitos; fumador o no fumador).

Tabla 2

Simbología básica utilizada en las tablas de mortalidad

$\boldsymbol{x}$	Edad de la persona
$\boldsymbol{x+t}$	Edad alcanzada
$\boldsymbol{l_x}$	Número de personas de edad $\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{d_x}$	Número de personas que fallecen entre las edades $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x+1}$

$\boldsymbol{q_x}$ Probabilidad que una persona de x años fallezca antes de cumplir $\boldsymbol{x+1}$

$\boldsymbol{p_x}$ Probabilidad que una persona de $\boldsymbol{x+1}$ años alcance $\boldsymbol{x+1}$, es decir 1 año más

$\boldsymbol{np_x}$ Probabilidad que una persona de x años alcance $\boldsymbol{x+n}$, es decir viva por lo menos n años

$\boldsymbol{tq_x}$ Probabilidad que una persona de x años fallezca entre $\boldsymbol{x+1}$; $\boldsymbol{x+2}$; $\boldsymbol{x+3}$; es decir en los próximos años

---

Ejemplo:

Encuentre los valores:

$\boldsymbol{l_x}$, $\boldsymbol{d_x}$, $\boldsymbol{x+t}$, donde $x = 30$ años y $t = 2$

$$x + t = 30 + 2 = 32 = edad\ alcanzada$$

$$l_x = l_{30} = personas\ vivas\ a\ edad\ de\ 30\ años$$

$$d_x = d_{30} = muertos\ a\ la\ edad\ de\ 30\ años.$$

Ejemplo de cómo se expresan los siguientes términos:

$$\boldsymbol{q_{30}}: Probabilidad\ de\ fallecer\ a\ los\ 30\ años$$

$$\boldsymbol{p_{30}}: Probabilidad\ de\ sobrevivir\ a\ los\ 30\ años$$

$$\boldsymbol{5q_{30}}: Probabilidad\ de\ fallecer\ de\ una\ persona\ de\ 30\ años\ en\ un\ lapso\ de\ 5\ años$$

$\boldsymbol{5p_{30}}: Probabilidad\ de\ sobrevivir\ de\ una\ persona\ de\ 30\ \text{años}\ en\ un\ lapso\ de\ 5\ \text{años}$

Para desarrollar las tablas de mortalidad con las expresiones anteriores, se parte de que la $\boldsymbol{q_x}$ o probabilidad de fallecimiento se encuentran establecidas.

Un dado caso las compañías aseguradoras requieran hacer sus propias tablas de mortalidad o utilizar otras, según las normas para la constitución de las reservas técnicas de las sociedades de seguros tenemos lo siguiente:

> **Art. 15.-** La tasa pura de riesgo, base de cálculo de las reservas, debe determinarse utilizando las tablas de mortalidad, interés técnico y fórmulas actuariales que presentan las notas técnicas. Para nuevos planes se adoptará la tabla de mortalidad Comissioners Standard Ordinary Table 1980 (CSO-80), al 3.0 % de interés técnico; en el caso de que una sociedad de seguros pretenda usar otra tabla deberá solicitarlo a la Superintendencia, entidad que deberá aprobarlo siempre que las reservas que resulten sean suficientes para cubrir los riesgos que ofrezcan a los asegurados. (p.6)

Ejemplo:

Ahora daremos un ejemplo de construcción de una tabla de mortalidad para poder entender su estructura y sus elementos.

Por lo tanto, si cuento con las probabilidades de muerte y considero que las personas vivas $\boldsymbol{l_0}$ ascienden a 10,000 podré iniciar con la construcción de la tabla.

Llamaremos $\boldsymbol{l_x}$ a las personas vivas a la edad de x y $\boldsymbol{d_x}$ a las muertas de edad x, luego, si cuento con las $\boldsymbol{q_x}$ tendremos que, para obtener los muertos, multiplico los vivos por $\boldsymbol{q_x}$:

$$\boldsymbol{d_x = l_x * q_x} \qquad [46]$$

Luego, al contar con los $\boldsymbol{d_x}$**,** $\boldsymbol{l_x}$ y $\boldsymbol{q_x}$**,** podré conocer las probabilidades de sobrevivencia:

$$\boldsymbol{p_x = (1 - q_x)} \qquad [47]$$

Supongamos la siguiente ilustración numérica de una tabla de mortalidad, cuando la tasa está dada:

$$\boldsymbol{q_0 = 0.007}$$

$$\boldsymbol{q_1 = 0.003}$$

$$\boldsymbol{q_2 = 0.002}$$

$$\boldsymbol{q_3 = 0.001}$$

Luego, si queremos conocer $\boldsymbol{d_0}$**,** $\boldsymbol{l_1}$**,** $\boldsymbol{d_1}$ y $\boldsymbol{l_2}$**,** tendremos:

$$\boldsymbol{d_0} = 10{,}000 * 0.007 = 70$$

$$\boldsymbol{l_1 = l_0 - d_0} = 10{,}000 - 70 = 9{,}930$$

$$\boldsymbol{d_1 = l_1 * q_1} = 9{,}930 * 0.003 = 29.79$$

$$\boldsymbol{l_2 = l_1 - d_1} = 9{,}930 - 29.79 = 9{,}900.21$$

Con las condiciones anteriores, la tabla tendrá los valores que se muestran en “Tabla 3”.

Tabla 3

Primeros valores de la tabla de mortalidad

x	l_x	d_x	q_x
0	10,000.00	70.00	0.007
1	9,930.00	29.79	0.003
2	9,900.21	19.80	0.002
3	9,880.41	9.88	0.001
4	9,870.53	…	…

Además de [2] 0btenemos:

$$\boldsymbol{l_{x+1} = l_x - d_x} \qquad [48]$$

Luego, por [46] y [2] podemos estimar las siguientes ecuaciones:

$$\boldsymbol{q_x = \frac{d_x}{l_x}} \qquad [49]$$

$$\boldsymbol{q_x} = \frac{\boldsymbol{l_x} - \boldsymbol{l_{x+1}}}{\boldsymbol{l_x}} \tag{50}$$

$$\boldsymbol{q_x} = 1 - \frac{\boldsymbol{l_{x+1}}}{\boldsymbol{l_x}} \tag{51}$$

Ejemplo:

Con la tabla anterior, ¿Cuántas personas fallecen entre las edades de 2 y 3 años?

$$d_2 + d_3 = 19.80 + 9.88 = 29.68$$

Ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad que un hombre de 0 años fallezca antes de alcanzar 1 año?

$$\boldsymbol{q_0} = \frac{\boldsymbol{l_0} - \boldsymbol{l_1}}{\boldsymbol{l_0}} = 0.70\%$$

Nota: Al sumar todas las $\boldsymbol{d_x}$ de una tabla de mortalidad obtenemos $\boldsymbol{l_0}$

3.6 Las primas

Obtenidos los valores de las $\boldsymbol{d_x}$**,** $\boldsymbol{l_x}$**,** $\boldsymbol{q_x}$ **y** $\boldsymbol{p_x}$**,** podemos determinar las primas únicas o los pagos que el asegurado debería realizar al inicio del contrato por todo el periodo de aseguramiento, así si el seguro es a n años, la prima única comprenderá un pago único en lugar de n pagos.

Ejemplo:

Supongamos una persona de edad $x = 30$ años que se asegura en un plan temporal a $n = 15$ años por la suma de **$100,000**.

El pago de la suma asegurada se efectuará al final del año en el cual fallezca el asegurado, siempre que se encuentre dentro del periodo pactado. ¿Cuánto tiene que pagar una persona de 30 años ahora (valor actuarial) por el seguro?; buscamos un pago único que se denomina prima neta única.

En el caso que el asegurado pretenda efectuar pagos anuales durante la vida de seguro, ¿cuánto es la prima anual que debe abonar?

Para calcular las primas combinaremos los elementos de la mortalidad e interés compuesto, con la tabla de mortalidad CSO-2001, al 5% de interés.

Asimismo, consideremos que todas las personas de edad $x = 30$ años compran el seguro, por lo que comenzaremos con los l_{30} de los cuales d_{30} fallecen durante el primer año.

Quedan l_{31} y así continuamos hasta el fin de los contratos, descontando las personas que fallecen al final del año.

Tabla 4

Tabla de mortalidad CSO-2001, al 5% de interés desde x=30 hasta x=44.

t	x	l_x	d_x	$d_x * SA$	V^t	$V^t * d_x * SA$
1	30	980,082	1,117	111,700,000	0.95238	106,380,952.38
2	31	978,965	1,106	110,600,000	0.90703	100317460.32

3	32	977,859	1,105	110,500,000	0.86384	95454054.64
4	33	976,754	1,123	112,300,000	0.82270	92389487.92
5	34	975,630	1,151	115,100,000	0.78353	90183861.76
6	35	974,479	1,179	117,900,000	0.74622	87978795.26
7	36	973,300	1,246	124,600,000	0.71068	88550893.73
8	37	972,054	1,303	130,300,000	0.67684	88192168.87
9	38	970,752	1,398	139,800,000	0.64461	90116326.49
10	39	969,354	1,493	149,300,000	0.61391	91657248.75
11	40	967,861	1,597	159,700,000	0.58468	93373282.47
12	41	966,264	1,730	173,000,000	0.55684	96332873.34
13	42	964,534	1,890	189,000,000	0.53032	100230735.27
14	43	962,644	2,070	207,000,000	0.50507	104549066.27
15	44	960,574	2,296	229,600,000	0.48102	110441525.72

Sumatoria del valor actual de los siniestros esperados	1,436,148,733.20
Prima Única	1,465.34

Dónde:

$$n = el\ plazo\ del\ seguro$$

$$t = los\ \text{años}\ transcurridos\ en\ el\ plazo$$

$$x = Edad$$

$$l_x = Vivos$$

$$d_x * SA = Muertos * Suma\ Asegurada$$

$$V^t = Factor\ de\ actualización\ financiera\ al\ valor\ presente\ o$$

$$valor\ actual\ financiero\ de\ una\ unidad\ monetaria$$

$$V^t * d_x * SA = Valor\ Actual\ de\ los\ sinestros\ esperados$$

El valor actual de los beneficios futuros o prima única para una persona de 30 años, estará dado por la siguiente formulación:

$$PU = \frac{\boldsymbol{SA} * (\boldsymbol{V} d_{30} + \boldsymbol{V^2} d_{31} + \cdots + \boldsymbol{V^{15}} d_{44})}{\boldsymbol{l_{30}}}$$

Donde $\boldsymbol{SA = 100,000}$.

Sumatoria del valor actual de los siniestros esperados dividido entre las personas que iniciaron el contrato a la edad de 30 años, es decir:

$$PU = \frac{1{,}436{,}148{,}733.20}{980{,}082} = \$\boldsymbol{1,465.34}$$

La prima única se pagaría de una sola vez al inicio del contrato para que, en caso de fallecimiento, se pague a los beneficiarios la suma de $100,000.

Por lo tanto, una persona de 30 años ahora (valor actuarial) debe pagar por el seguro como prima única la cantidad de $**1,465.34.**

Consideremos:

$$\boldsymbol{Valor\ actual\ de\ los\ pagos = l_x * V^{t-1}} \quad [52]$$

Además de la prima única pretendemos conocer la prima neta anual que pagará el asegurado, partiendo de igualar el valor actual de los beneficios con el valor actual de las primas futuras, es decir:

Tabla 5

Tabla para encontrar los valores actuales de los pagos, con interés de 5%.

t	x	l_x	V^{t-1}	$l_x * V^{t-1}$
1	30	980,082	1.0000	980,082.00
2	31	978,965	0.9524	932,347.62
3	32	977,859	0.9070	886,946.94
4	33	976,754	0.8638	843,756.83
5	34	975,630	0.8227	802,653.22

6	35	974,479	0.7835	763,529.80
7	36	973,300	0.7462	726,291.45
8	37	972,054	0.7107	690,820.63
9	38	970,752	0.6768	657,043.16
10	39	969,354	0.6446	624,854.23
11	40	967,861	0.6139	594,182.70
12	41	966,264	0.5847	564,954.55
13	42	964,534	0.5568	537,088.62
14	43	962,644	0.5303	510,510.67
15	44	960,574	0.5051	485,155.14
Valores actuales de los pagos				10,600,217.55

Igualando la ecuación con los valores actuales de los siniestros equivalentes a $1,436,148,733.2 y los valores actuales de los pagos de $10,600,217.55, tendremos:

$$\boldsymbol{PA = \frac{valor\ actual\ de\ siniestros}{valor\ actual\ de\ los\ pagos}} \quad [53]$$

$$PA = \frac{1{,}436{,}148{,}733.2}{10{,}600{,}217.55}$$

$$PA = \$135.48$$

Por lo tanto, en el caso que el asegurado pretenda efectuar pagos anuales durante la vida de seguro deberá abonar una prima anual de $135.48

El asegurado pagaría una prima única de $1465.34 desde el inicio del contrato, o bien una prima neta anual nivelada desde el inicio del contrato hasta finalizar los 15 años la cantidad de $135.48. A este valor la aseguradora deberá aplicar los recargos para determinar la prima de tarifa.

Aclaramos que el cálculo de las primas únicas y anuales es posible desarrollarlas utilizando las probabilidades de muerte y sobrevivencia, multiplicando las q_x por el factor de actualización y la suma asegurada para determinar las probabilidades de fallecimiento en todo el período.

Tabla 6

Tabla para encontrar la prima única con un interés de 5%.

$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{Edad}$	$\boldsymbol{q_x}$	$\boldsymbol{V^t}$	$\boldsymbol{q_x * V^t * SA}$
1	30	0.001140	0.95238	108.57

2	31	0.001130	0.90703	102.49
3	32	0.001130	0.86384	97.61
4	33	0.001150	0.82270	94.61
5	34	0.001180	0.78353	92.46
6	35	0.001210	0.74622	90.29
7	36	0.001280	0.71068	90.97
8	37	0.001340	0.67684	90.70
9	38	0.001440	0.64461	92.82
10	39	0.001540	0.61391	94.54
11	40	0.001650	0.58468	96.47
12	41	0.001790	0.55684	99.67
13	42	0.001960	0.53032	103.94
14	43	0.002150	0.50507	108.59

15	44	0.002390	0.48102	114.96
Prima única				1,478.71

En este caso se sumaron las probabilidades, la suma asegurada y el factor del valor presente.

El resultado determina una prima única equivalente a $1,478.71; mayor que el obtenido con los valores de los muertos y vivos descontados, el cual fue de $1,465.34.

La diferencia presuntamente se origina por las aproximaciones.

Ahora consideremos:

$$\boldsymbol{Valor\ actual\ de\ los\ pagos = p_x * V^{t-1}} \qquad [54]$$

Asimismo, se determina la prima anual considerando las probabilidades de sobrevivencia (p_x):

Tabla 7

Tabla para determinar la prima anual considerando las probabilidades de sobrevivencia.

$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{p_x}$	$\boldsymbol{V^{t-1}}$	$\boldsymbol{p_x * V^{t-1}}$
1	30	0.9989	1.0000	0.99886
2	31	0.9989	0.95238	0.95130

3	32	0.9989	0.90703	0.90600
4	33	0.9989	0.86384	0.86284
5	34	0.9988	0.82270	0.82173
6	35	0.9988	0.78353	0.78258
7	36	0.9987	0.74622	0.74526
8	37	0.9987	0.71068	0.70973
9	38	0.9986	0.67684	0.67586
10	39	0.9985	0.64461	0.64362
11	40	0.9984	0.61391	0.61290
12	41	0.9982	0.58468	0.58363
13	42	0.9980	0.55684	0.55575
14	43	0.9979	0.53032	0.52918
15	44	0.9976	0.50507	0.50386

Valor actual de los pagos	10.88

Para determinar las primas anuales se tiene la fórmula:

$$\boldsymbol{PA} = \frac{PU}{Valor\ actual\ de\ los\ pagos} \qquad [55]$$

$$\boldsymbol{PA} = \frac{1{,}478.71}{10.88}$$

$$\boldsymbol{PA} = \$135.91$$

Por lo tanto, considerando las probabilidades de sobrevivencia p_x tenemos la prima anual $PA = \$135.91$ y considerando los sobrevivientes a la edad x, $\boldsymbol{l_x}$ tenemos la prima anual de $PA = \$135.48$, nuevamente la diferencia presuntamente se origina por las aproximaciones.

3.7 Modelos matemáticos

3.7.1 Valores conmutados o símbolos de conmutación

Valores o símbolos de conmutación:

Este método consiste en la generación de unos cálculos en los que intervienen los valores de las tablas de mortalidad y el tipo de interés, para su posterior tabulación. Dichos cálculos nos permiten expresar una gran cantidad de los seguros de vida como combinación de los mismos. A estos cálculos se les conoce con el nombre de símbolos de conmutación. La ventaja de este método es llegar a expresiones compactas con los símbolos de manera que el cálculo se realice de forma inmediata. Los valores de conmutación permiten sustituir formulas complejas por simples.

Antes que no existían las computadoras, los Actuarios hacían infinidad de cálculos, por lo que, para calcular las primas y las reservas de manera sencilla, diseñaron los valores conmutados.

Sabemos que l_x corresponden a las personas que sobreviven a la edad $\boldsymbol{x}$ y d_x corresponden a las personas que fallecen a edad x.

Si asumimos que a las personas vivas las representamos con la letra $´´D´´$ mayúscula, descontados a valor presente tendremos:

$$D_x = V^x * l_x \qquad [56]$$

Por otra parte, si a las personas que fallecen en el término de un año, la denominamos con la letra " C " y las descontamos a valor presente tenemos:

$$C_x = V^{x+1} * d_x \qquad [57]$$

Los valores conmutados descritos, corresponden a valores básicos de conmutación, los cuales facilitan el cálculo de las primas y las reservas.

Con los valores conmutados básicos, es posible determinar la prima neta anual y comercial de un seguro de vida individual temporal a un año.

La prima riesgo o prima pura será igual a:

$$P_x = \frac{C_x}{D_x} \qquad [58]$$

De [56] y [57] obtenemos:

$$P_x = \frac{V^{x+1} * d_x}{V^x * l_x}; \quad sustituyendo$$

$$P_x = \frac{V * d_x}{l_x}\ ; \ \ simplificando \tag{59}$$

Ejemplo de seguro temporal en caso de vida:

Utilizando los valores de vivos y muertos de las tablas CSO-2001 con un interés del 4%, calcular las primas anuales de un seguro de vida temporal a un año, para una persona de 30 años.

Solución:

Con $V = \frac{1}{1+4\%} = 0.961538462$, tenemos que la prima riesgo es:

$$P_{30} = \frac{C_{30}}{D_{30}} = \frac{V * d_{30}}{l_{30}} = \frac{0.961538462 * 1117}{980082} = 0.001096$$

Asimismo, la prima neta y prima comercial con los siguientes recargos, equivaldrán a:

Recargos:

- Administración: 20%
- Comisión: 15%
- Utilidad: 5%
- Total: 40%

La prima comercial se calcula a través de la siguiente fórmula:

$$\rho_x = \frac{Prima\ Pura}{1 - Recargos} \tag{60}$$

$$\rho_{30} = \frac{0.001096}{(1 - 40\%)} = 0.00183$$

Si la suma asegurada asciende a la cantidad de $25,000.00; la prima neta que deberá pagar el asegurado será equivalente a $\$25{,}000.00 * 0.00183 = \$45.75$. Si la persona quiere pagar mensualmente simplemente se divide entre 12 para obtener el pago mensual $3.81.

Si sumamos las C_x descontadas hasta el final de la tabla y lo simbolizamos con la letra M_x, tendremos:

$$M_x = \sum_{t=1}^{\infty} C_{x+t} \qquad [61]$$

Luego, N_x representaran los vivos conmutados hasta el final de la tabla de mortalidad y se utilizaran para calcular anualidades o primas de seguro de sobrevivencia, como los seguros dótales.

Si sumamos todas las D_x hasta el final de la tabla, y a ella la simbolizamos con la letra N_x tendremos:

$$N_x = \sum_{\boldsymbol{t=0}}^{\omega} \frac{D_{x+t}}{D_x} \qquad [62]$$

Usaremos las M_x para calcular primas de vida entera y seguros temporales, referidas a las personas que fallecen durante la vigencia de las pólizas.

Con los conmutados, las fórmulas de las primas únicas son:

Prima única de un seguro de vida entera y de un seguro de vida entera con pagos limitados:

$$tA_{x+t} = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} \qquad [63]$$

Prima única para un seguro temporal para n años:

$$tA^{..}_{x+t;n-t} = \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} \quad [64]$$

Prima única de un seguro mixto para n años:

$$tA_{x+t;n-t} = \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} \quad [65]$$

Ejemplo de seguro mixto:

Calcular las primas únicas para un seguro mixto en un periodo de $\mathrm{n} = 20$ años, para una persona de $\mathrm{x} = 25$ años con la Tabla de mortalidad CSO-2001 al 4% de interés técnico, para $t = 15$

Solución:

$$15A_{25+15;20-15} = \frac{M_{25+15} - M_{25+20} + D_{25+20}}{D_{25+15}}$$

$$15A_{40;5} = \frac{M_{40} - M_{45} + D_{45}}{D_{40}}$$

$$15A_{40;5} = \frac{49456.34 - 47691.83 + 164055.76}{201594.85}$$

$$15A_{40;5} = 0.82$$

Por lo tanto, la prima única que pagará será de $0.82

Primas de riesgo

Con los conmutados es posible calcular las primas de riesgo de los diferentes planes de seguros con la siguiente formulación:

Prima de riesgo de un seguro de vida entera:

$$P_x = \frac{M_x}{N_x} \quad [66]$$

Prima de riesgo de un seguro de vida temporal en caso de vida:

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \quad [67]$$

Prima de riesgo de un seguro de vida mixto:

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \quad [68]$$

Ejemplo de vida temporal en caso de vida:

Utilizando las tablas de mortalidad CSO-2001 y a un interés técnico del 4%, calcular las primas de riesgo a 15 años para una persona de edad $x = 25$, si la suma asegurada es de $50,000.00

Solución:

Usando [67], tenemos:

$$P_{25} = \frac{M_{25} - M_{25+15}}{N_{25} - N_{25+15}}$$

$$P_{25} = \frac{M_{25} - M_{40}}{N_{25} - N_{40}}$$

$$P_{25} = \frac{54343.01 - 49456.34}{8198202.93 - 3953464.84}$$

$$P_{25} = \frac{54343.01 - 49456.34}{8198202.93 - 3953464.84}$$

$$P_{25} = 0.001151$$

Ejemplo de vida mixto:

Utilizando las tablas de mortalidad CSO-2001 y a un interés técnico del 4%, calcular las primas de riesgo a 15 años para una persona de edad $x = 25$, si la suma asegurada es de $25,000.00.

<u>Solución:</u>

Usando [68], tenemos:

$$P_{25} = \frac{M_{25} - M_{25+15} + D_{25+15}}{N_{25} - N_{25+15}}$$

$$P_{25} = \frac{M_{25} - M_{40} + D_{40}}{N_{25} - N_{40}}$$

$$P_{25} = \frac{54343.01 - 49456.34 + 201594.85}{8198202.93 - 3953464.84}$$

$$P_{25} = \frac{54343.01 - 49456.34 + 201594.85}{8198202.93 - 3953464.84}$$

$$P_{25} = 0.05$$

CONCLUSIONES

- La matemática juega un rol importante en los seguros, se observó que se emplean diversos modelos matemáticos para poder calcular los diferentes datos que se necesitan a la hora de adquirir un seguro, ya sea de vida, de muerte o mixto.

- También podemos decir que los valores conmutados facilitan el cálculo de estos.

RECOMENDACIONES

- Ampliar la investigación para otros tipos de seguro
- Investigar con cuál tabla de vida trabajan las aseguradoras de El Salvador.
- Agregar alguna materia relacionada a las ciencias actuariales en la carrera de Licenciatura en Matemática.

BIBLIOGRAFÍA

[1] F. Sandoya, Matemáticas Actuariales y Operaciones de Seguro

[2] Fórmulas para el cálculo de vida, Curso de demografía, tema: Análisis de mortalidad recuperado de: https://apuntesdedemografia.com/curso-de-demografia/temario/tema-4-analisis-de-la-mortalidad/formula-para-el-calculo-de-la-esperanza-de-vida

[3] LA ASAMBLEA LEGISLATIVA, DECRETO LEGISLATIVO No. 844, 2001, EL SALVADOR, C.A.

[4] Marco Sinchi, Matemática Actuarial Para Todos

[5] Nieto Ranero, Armando, Método del Calculo Tradicional: El seguro de vida como variable aleatoria. Cómo calcular su función de distribución. Dirigido por University of Valencia Recuperado de: https://www.actuaires.org/EVENTS/Congresses/Paris/Papers/391.pdf

[6] Sonia de Paz Cobo, Matemática y Teoría de la Utilidad

[7] SUPERINTENDENCIA DEL SISTEMA FINANCIERO SSF. Art. 15, EL SALVADOR, C.A.

[8] Superintendencia de Sistema Financiero, recuperado de: https://ssf.gob.sv/wpcontent/uploads//ssf2018/Normas_Contables_Seguros/NCS-011.pdf

[9] Tabla de mortalidad commisioner standard ordinary 2001, Recuperado de: http://www.melpel.com.ar/wp-content/uploads/2013/01/TablasCSO2.xlsx

[10] Valor actuarial, cuidado de salud. www.cuidadodesalud.gov, Recuperado de: https://www.cuidadodesalud.gov/es/glossary/actuarial-value/

ANEXOS

Tabla 8

Cálculos de Valores Conmutados

										$V = \frac{1}{(1+i)}$		0.961538462			
											$i = 0.04$				
	$l_x = l_x\text{-}d_x$	$d_x = l_x * q_x$	$p_x = (1\text{-}q_x)$	Ya establecido	$m_x = \frac{1}{2[In(l_x-1) - In(l_x+1)]}$	$S(x) = \frac{l_x}{l_0}$	$F(x) = 1\text{-}S(x)$	$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$	$T_x = T_{x\text{-}1}\text{-}L_{x\text{-}1}$	$e_x = \frac{T_x}{l_x}$	$C_x = V^{x+1} * d_x$	$PD = V^x * l_x$	$M_x = \sum_{t=1}^{\infty} C_{x+t}$	$N_x = \sum_{t=0}^{\omega} \frac{D_{x+t}}{D_x}$	$V^x = \frac{1}{(1+i)^x}$
Edad	Personas Vivas	Personas Muertas	Probabilidad de Supervivencia	Probabilidad de Fallecimiento	Fuerza de Mortalidad	Funcion de Supervivencia	Funcion de Dsitribucion	Promedio de Supervivencia	Tiempo Futuro de Supervivencia	Esperanza de Vida Completa	Personas Vivas Descontadas a Valor Presente	Personas Muertas Descontadas a Valor Presente	Suma Hasta al Final de la Tabla de las Cx	Suma Hasta al Final de la Tabla de las Dx	Valor Presente
x	l_x	d_x	p_x	q_x	m_x		F_x	L_x	T_x	e_x	C_x	D_x	M_x	N_x	V^x
0	1000000	970	0.99903	0.00097	-	1	0	999515	7701333	7.7013	932.69	1000000	62403.41	24375374.76	1
1	999030	559	0.99944	0.00056	0.0007653	0.99903	0.00097	998750.3	6701818	6.7083	517.25	960605.77	61470.72	23375374.76	0.961538462
2	998471	389	0.99961	0.00039	0.0004751	0.99847	0.00153	998275.8	5703068	5.7118	346.18	923142.14	60953.47	22414768.99	0.924556213
3	998081	269	0.99973	0.00027	0.0003301	0.99808	0.00192	997946.4	4704792	4.7138	230.35	887290.50	60607.29	21491626.85	0.888996359
4	997812	210	0.99979	0.00021	0.0002400	0.99781	0.00219	997706.9	3706845	3.7150	172.23	852933.59	60376.94	20604336.35	0.854804191
5	997602	209	0.99979	0.00021	0.0002100	0.99760	0.00240	997497.4	2709139	2.7157	165.57	819956.22	60204.71	19751402.76	0.821927107
6	997393	219	0.99978	0.00022	0.0002150	0.99739	0.00261	997282.9	1711641	1.7161	166.75	788253.88	60039.14	18931446.54	0.790314526
7	997173	219	0.99978	0.00022	0.0002200	0.99717	0.00283	997063.5	714358	0.7164	160.30	757769.67	59872.40	18143192.66	0.759917813
8	996954	219	0.99978	0.00022	0.0002200	0.99695	0.00305	996844.2	-282705	-0.2836	154.10	728464.39	59712.10	17385422.99	0.730690205
9	996734	229	0.99977	0.00023	0.0002250	0.99673	0.00327	996619.9	-1279549	-1.2837	154.87	700292.43	59558.00	16656958.60	0.702586736
10	996505	229	0.99977	0.00023	0.0002300	0.99651	0.00349	996390.6	-2276169	-2.2842	148.88	673203.23	59403.13	15956666.17	0.675564169
11	996276	269	0.99973	0.00027	0.0002500	0.99628	0.00372	996141.5	-3272560	-3.2848	168.01	647161.92	59254.25	15283462.94	0.649580932
12	996007	329	0.99967	0.00033	0.0003000	0.99601	0.00399	995842.7	-4268701	-4.2858	197.40	622103.06	59086.23	14636301.02	0.62459705
13	995678	388	0.99961	0.00039	0.0003601	0.99568	0.00432	995484.2	-5264544	-5.2874	224.24	597978.62	58888.83	14014197.96	0.600574086
14	995290	468	0.99953	0.00047	0.0004301	0.99529	0.00471	995056.2	-6260028	-6.2897	259.75	574755.20	58664.59	13416219.33	0.577475083
15	994822	607	0.99939	0.00061	0.0005401	0.99482	0.00518	994518.8	-7255084	-7.2928	324.00	552389.49	58404.85	12841464.13	0.555264503
16	994215	736	0.99926	0.00074	0.0006752	0.99422	0.00578	993847.6	-8249603	-8.2976	377.70	530819.74	58080.85	12289074.64	0.533908176
17	993480	864	0.99913	0.00087	0.0008053	0.99348	0.00652	993047.5	-9243451	-9.3041	426.66	510025.90	57703.15	11758254.90	0.513373246
18	992615	933	0.99906	0.00094	0.0009054	0.99262	0.00738	992148.8	-10236498	-10.3127	442.87	489982.86	57276.49	11248229.00	0.493628121
19	991682	972	0.99902	0.00098	0.0009605	0.99168	0.00832	991196.4	-11228647	-11.3228	443.54	470694.50	56833.63	10758246.14	0.474642424
20	990710	991	0.999	0.001	0.0009905	0.99071	0.00929	990215.1	-12219844	-12.3344	434.76	452147.33	56390.09	10287551.64	0.456386946
21	989720	990	0.999	0.001	0.0010005	0.98972	0.01028	989224.9	-13210059	-13.3473	417.62	434322.29	55955.33	9835404.31	0.438833602
22	988730	1009	0.99898	0.00102	0.0010105	0.98873	0.01127	988225.8	-14199284	-14.3611	409.18	417199.97	55537.71	9401082.03	0.421955387
23	987722	1017	0.99897	0.00103	0.0010255	0.98772	0.01228	987212.9	-15187509	-15.3763	396.89	400744.64	55128.53	8983882.06	0.405726333
24	986704	1036	0.99895	0.00105	0.0010405	0.98670	0.01330	986186.2	-16174722	-16.3927	388.64	384934.49	54731.64	8583137.42	0.390121474
25	985668	1055	0.99893	0.00107	0.0010606	0.98567	0.01433	985140.8	-17160908	-17.4104	380.41	369740.68	54343.01	8198202.93	0.375116802
26	984613	1103	0.99888	0.00112	0.0010956	0.98461	0.01539	984062.1	-18146049	-18.4296	382.46	355139.48	53962.60	7828462.25	0.360689233
27	983511	1151	0.99883	0.00117	0.0011457	0.98351	0.01649	982935.4	-19130111	-19.4508	383.74	341097.81	53580.14	7473322.77	0.34681657
28	982360	1149	0.99883	0.00117	0.0011707	0.98236	0.01764	981785.3	-20113047	-20.4742	368.54	327594.93	53196.41	7132224.96	0.333477471
29	981211	1128	0.99885	0.00115	0.0011607	0.98121	0.01879	980646.4	-21094832	-21.4988	347.90	314626.58	52827.86	6804630.03	0.320651415
30	980082	1117	0.99886	0.00114	0.0011457	0.98008	0.01992	979523.6	-22075478	-22.5241	331.23	302177.65	52479.96	6490003.45	0.308318668

31	978965	1106	0.99887	0.00113	0.0011356	0.97896	0.02104	978411.8	-23055002	-23.5504	315.34	290224.20	52148.73	6187825.80	0.296460258
32	977859	1105	0.99887	0.00113	0.0011306	0.97786	0.02214	977306.2	-24033414	-24.5776	302.87	278746.39	51833.39	5897601.60	0.28505794
33	976754	1123	0.99885	0.00115	0.0011407	0.97675	0.02325	976192.1	-25010720	-25.6060	296.04	267722.51	51530.52	5618855.21	0.274094173
34	975630	1151	0.99882	0.00118	0.0011657	0.97563	0.02437	975054.9	-25986912	-26.6360	291.74	257129.45	51234.48	5351132.70	0.26355209
35	974479	1179	0.99879	0.00121	0.0011957	0.97448	0.02552	973889.7	-26961967	-27.6681	287.31	246948.11	50942.74	5094003.24	0.253415471
36	973300	1246	0.99872	0.00128	0.0012458	0.97330	0.02670	972677.2	-27935857	-28.7022	291.89	237162.79	50655.42	4847055.13	0.243668722
37	972054	1303	0.99866	0.00134	0.0013109	0.97205	0.02795	971403.0	-28908534	-29.7396	293.45	227749.26	50363.53	4609892.34	0.234296848
38	970752	1398	0.99856	0.00144	0.0013910	0.97075	0.02925	970052.8	-29879937	-30.7802	302.81	218696.22	50070.08	4382143.08	0.225285431
39	969354	1493	0.99846	0.00154	0.0014911	0.96935	0.03065	968607.5	-30849990	-31.8253	310.93	209982.02	49767.27	4163446.86	0.216620606
40	967861	1597	0.99835	0.00165	0.0015963	0.96786	0.03214	967062.6	-31818597	-32.8752	319.84	201594.85	49456.34	3953464.84	0.208289045
41	966264	1730	0.99821	0.00179	0.0017215	0.96626	0.03374	965399.3	-32785660	-33.9303	333.08	193521.37	49136.50	3751869.99	0.200277928
42	964534	1890	0.99804	0.00196	0.0018768	0.96453	0.03547	963589.2	-33751059	-34.9921	350.06	185745.16	48803.42	3558348.62	0.19257493
43	962644	2070	0.99785	0.00215	0.0020571	0.96264	0.03736	961609.1	-34714648	-36.0618	368.50	178251.05	48453.36	3372603.46	0.185168202
44	960574	2296	0.99761	0.00239	0.0022726	0.96057	0.03943	959426.4	-35676257	-37.1405	393.03	171026.75	48084.86	3194352.41	0.178046348
45	958279	2539	0.99735	0.00265	0.0025232	0.95828	0.04172	957008.8	-36635684	-38.2307	418.03	164055.76	47691.83	3023325.66	0.171198412
46	955739	2772	0.9971	0.0029	0.0027789	0.95574	0.04426	954353.3	-37592693	-39.3336	438.70	157327.90	47273.80	2859269.90	0.164613858
47	952967	3021	0.99683	0.00317	0.0030396	0.95297	0.04703	951457.0	-38547046	-40.4495	459.77	150838.12	46835.10	2701942.00	0.158282555
48	949947	3163	0.99667	0.00333	0.0032553	0.94995	0.05005	948364.9	-39498503	-41.5797	462.92	144576.89	46375.33	2551103.88	0.152194765
49	946783	3333	0.99648	0.00352	0.0034309	0.94678	0.05322	945116.9	-40446868	-42.7203	468.95	138553.32	45912.41	2406526.99	0.14634112
50	943451	3547	0.99624	0.00376	0.0036466	0.94345	0.05655	941676.8	-41391985	-43.8730	479.96	132755.39	45443.46	2267973.68	0.140712615
51	939903	3816	0.99594	0.00406	0.0039177	0.93990	0.06010	937995.2	-42333661	-45.0405	496.45	127169.45	44963.50	2135218.29	0.135300592
52	936087	4184	0.99553	0.00447	0.0042741	0.93609	0.06391	933995.0	-43271657	-46.2261	523.43	121781.87	44467.05	2008048.83	0.130096723
53	931903	4594	0.99507	0.00493	0.0047111	0.93190	0.06810	929605.7	-44205652	-47.4359	552.61	116574.52	43943.62	1886266.96	0.125093003
54	927309	5100	0.9945	0.0055	0.0052287	0.92731	0.07269	924758.5	-45135257	-48.6734	589.87	111538.28	43391.01	1769692.44	0.120281733
55	922208	5690	0.99383	0.00617	0.0058521	0.92221	0.07779	919363.4	-46060016	-49.9453	632.77	106658.48	42801.15	1658154.16	0.115655513
56	916518	6306	0.99312	0.00688	0.0065464	0.91652	0.08348	913365.5	-46979379	-51.2585	674.26	101923.46	42168.37	1551495.67	0.111207224
57	910213	6954	0.99236	0.00764	0.0072866	0.91021	0.08979	906735.7	-47892745	-52.6171	714.99	97329.06	41494.11	1449572.21	0.106930023
58	903259	7470	0.99173	0.00827	0.0079869	0.90326	0.09674	899523.7	-48799480	-54.0260	738.50	92870.64	40779.12	1352243.15	0.10281733
59	895789	8053	0.99101	0.00899	0.0086675	0.89579	0.10421	891762.1	-49699004	-55.4807	765.53	88560.20	40040.62	1259372.51	0.098862817
60	887736	8753	0.99014	0.00986	0.0094698	0.88774	0.11226	883359.0	-50590766	-56.9886	800.07	84388.50	39275.08	1170812.31	0.095060401
61	878983	9616	0.98906	0.01094	0.0104546	0.87898	0.12102	874174.5	-51474125	-58.5610	845.14	80342.72	38475.01	1086423.81	0.091404232
62	869366	10650	0.98775	0.01225	0.0116630	0.86937	0.13063	864041.6	-52348300	-60.2143	899.99	76407.47	37629.87	1006081.09	0.087888684
63	858717	11773	0.98629	0.01371	0.0130652	0.85872	0.14128	852830.2	-53212341	-61.9673	956.65	72568.73	36729.88	929673.62	0.08450835
64	846944	12907	0.98476	0.01524	0.0145811	0.84694	0.15306	840490.0	-54065171	-63.8356	1008.49	68820.98	35773.23	857104.88	0.081258029
65	834036	14054	0.98315	0.01685	0.0161754	0.83404	0.16596	827009.5	-54905661	-65.8313	1055.81	65165.52	34764.73	788283.91	0.07813272
66	819983	15145	0.98153	0.01847	0.0178181	0.81998	0.18002	812410.2	-55732671	-67.9681	1094.05	61603.35	33708.93	723118.39	0.075127616
67	804838	16169	0.97991	0.02009	0.0194686	0.80484	0.19516	796753.1	-56545081	-70.2565	1123.11	58139.94	32614.88	661515.04	0.072238092
68	788668	17232	0.97815	0.02185	0.0211934	0.78867	0.21133	780052.3	-57341834	-72.7071	1150.92	54780.68	31491.77	603375.10	0.069459704
69	771436	18237	0.97636	0.02364	0.0230081	0.77144	0.22856	762317.7	-58121887	-75.3425	1171.15	51522.81	30340.85	548594.42	0.066788177
70	753199	19410	0.97423	0.02577	0.0250159	0.75320	0.24680	743494.4	-58884204	-78.1788	1198.55	48370.01	29169.70	497071.61	0.064219401
71	733789	20656	0.97185	0.02815	0.0273308	0.73379	0.26621	723461.3	-59627699	-81.2600	1226.45	45311.07	27971.14	448701.60	0.061749424
72	713133	22335	0.96868	0.03132	0.0301874	0.71313	0.28687	701965.5	-60351160	-84.6282	1275.14	42341.89	26744.69	403390.53	0.059374446
73	690798	23915	0.96538	0.03462	0.0335272	0.69080	0.30920	678840.2	-61053125	-88.3806	1312.84	39438.21	25469.55	361048.64	0.057090813

Tabla 9

Mortalidad Commisioner Standard Ordinary CSO 2001

	Probabilidad de fallecimiento q(x) * 1000					
		Hombres			Mujeres	
Edad	General	No Fumador	Fumador	General	No Fumador	Fumador
0	0.970			0.480		
1	0.560			0.350		
2	0.390			0.260		
3	0.270			0.200		
4	0.210			0.190		
5	0.210			0.180		
6	0.220			0.180		
7	0.220			0.210		
8	0.220			0.210		
9	0.230			0.210		
10	0.230			0.220		
11	0.270			0.230		
12	0.330			0.270		
13	0.390			0.300		
14	0.470			0.330		
15	0.610			0.350		
16	0.740	0.740	0.790	0.390	0.390	0.410
17	0.870	0.850	0.970	0.410	0.410	0.460
18	0.940	0.920	1.110	0.430	0.420	0.500
19	0.980	0.940	1.210	0.460	0.450	0.540
20	1.000	0.950	1.270	0.470	0.450	0.580
21	1.000	0.950	1.330	0.480	0.460	0.610
22	1.020	0.950	1.400	0.500	0.480	0.650

23	1.030	0.960	1.460	0.500	0.480	0.670
24	1.050	0.970	1.540	0.520	0.500	0.720
25	1.070	0.980	1.630	0.540	0.500	0.770
26	1.120	1.020	1.710	0.560	0.530	0.810
27	1.170	1.070	1.810	0.600	0.570	0.870
28	1.170	1.050	1.820	0.630	0.580	0.920
29	1.150	1.030	1.810	0.660	0.620	0.990
30	1.140	1.020	1.800	0.680	0.640	1.030
31	1.130	1.010	1.800	0.730	0.680	1.120
32	1.130	1.010	1.820	0.770	0.720	1.190
33	1.150	1.040	1.870	0.820	0.760	1.280
34	1.180	1.060	1.940	0.880	0.820	1.390
35	1.210	1.090	2.000	0.970	0.890	1.530
36	1.280	1.150	2.110	1.030	0.950	1.650
37	1.340	1.200	2.230	1.110	1.030	1.790
38	1.440	1.290	2.400	1.170	1.070	1.880
39	1.540	1.370	2.570	1.230	1.130	2.000
40	1.650	1.460	2.770	1.300	1.200	2.120
41	1.790	1.580	3.030	1.380	1.270	2.260
42	1.960	1.730	3.330	1.480	1.350	2.430
43	2.150	1.900	3.690	1.590	1.450	2.630
44	2.390	2.100	4.120	1.720	1.570	2.860
45	2.650	2.330	4.570	1.870	1.710	3.130
46	2.900	2.550	4.990	2.050	1.870	3.430
47	3.170	2.790	5.460	2.270	2.070	3.810
48	3.330	2.930	5.720	2.500	2.290	4.280
49	3.520	3.090	6.020	2.780	2.530	4.810
50	3.760	3.320	6.450	3.080	2.810	5.390
51	4.060	3.590	6.960	3.410	3.120	6.020
52	4.470	3.960	7.660	3.790	3.470	6.710
53	4.930	4.360	8.450	4.200	3.850	7.440

54	5.500	4.870	9.440	4.630	4.250	8.240
55	6.170	5.500	10.560	5.100	4.680	9.080
56	6.880	6.140	11.700	5.630	5.180	9.980
57	7.640	6.830	12.910	6.190	5.700	10.940
58	8.270	7.420	13.860	6.800	6.260	11.870
59	8.990	8.100	14.960	7.390	6.820	12.900
60	9.860	8.920	16.290	8.010	7.400	13.970
61	10.940	9.920	17.940	8.680	8.030	15.080
62	12.250	11.140	19.930	9.390	8.720	16.330
63	13.710	12.510	22.140	10.140	9.430	17.580
64	15.240	13.950	24.400	10.960	10.200	18.900
65	16.850	15.470	26.630	11.850	11.050	20.340
66	18.470	17.010	28.780	12.820	11.990	21.870
67	20.090	18.570	30.870	13.890	13.020	23.590
68	21.850	20.250	33.070	15.070	14.170	25.480
69	23.640	21.990	35.250	16.360	15.430	27.530
70	25.770	24.100	37.890	17.810	16.820	29.820
71	28.150	26.460	40.780	19.470	18.420	32.430
72	31.320	29.560	44.710	21.300	20.210	35.310
73	34.620	32.830	48.660	23.300	22.150	38.410
74	38.080	36.270	52.650	25.500	24.280	41.810
75	41.910	40.030	57.290	27.900	26.640	45.230
76	46.080	44.130	62.230	30.530	29.230	48.960
77	50.920	48.890	67.940	33.410	32.080	52.970
78	56.560	54.450	74.540	36.580	35.230	57.290
79	63.060	60.870	82.050	40.050	38.630	61.960
80	70.140	67.870	90.070	43.860	42.430	66.990
81	78.190	75.840	99.050	49.110	47.590	74.070
82	86.540	84.140	108.110	54.950	53.410	81.760
83	95.510	93.090	117.610	60.810	59.210	89.250
84	105.430	103.000	127.940	67.270	65.620	97.300

85	116.570	114.070	140.090	74.450	72.840	105.410
86	128.910	126.340	153.390	80.990	79.390	112.170
87	142.350	139.740	167.690	90.790	89.250	122.890
88	156.730	154.100	182.720	101.070	99.550	133.590
89	171.880	169.250	198.270	112.020	110.530	144.350
90	187.660	185.060	214.130	121.920	120.650	153.050
91	202.440	199.930	228.430	126.850	125.770	154.940
92	217.830	215.430	243.020	136.880	135.840	162.660
93	234.040	231.780	258.100	151.640	150.780	175.100
94	251.140	249.050	273.740	170.310	169.640	190.970
95	269.170	267.190	291.050	193.660	192.920	214.970
96	285.640	283.790	306.330	215.660	215.030	236.910
97	303.180	301.490	322.440	238.480	237.790	258.950
98	321.880	320.380	339.450	242.160	241.690	260.010
99	341.850	340.540	357.420	255.230	254.740	270.770
100	363.190	362.100	376.400	275.730	275.460	289.270