

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL  
DEPARTAMENTO DE CC.NN. Y MATEMÁTICA  
SECCIÓN DE MATEMÁTICA**



**TRABAJO DE GRADO:**  
GEOMETRÍA COMPUTACIONAL: DIAGRAMAS DE VORONOI.

**PRESENTADO POR:**  
EDWIN HIDALDO NOLASCO MACHADO.  
ELENA JACKELINNE VILLEGAS NOLASCO.

**PARA OPTAR AL GRADO DE:**  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA.

**DOCENTE ASESOR:**  
LIC. WILLIAM NOÉ MERLOS JUÁREZ.

**CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, DICIEMBRE DE 2020.**

**SAN MIGUEL**

**EL SALVADOR**

**CENTROAMÉRICA**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**

**AUTORIDADES**

**MSC. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO**  
**RECTOR**

**PHD. RAÚL ERNESTO AZCÚNAGA LÓPEZ**  
**VICE-RECTOR ACADÉMICO**

**ING. JUAN ROSA QUINTANILLA**  
**VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO**

**ING. FRANCISCO ALARCÓN**  
**SECRETARIO GENERAL**

**LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN**  
**FISCAL GENERAL**

**LIC. LUIS ANTONIO MEJÍA LIPE**  
**DEFENSOR DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL**

**AUTORIDADES**

**LIC. CRISTÓBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ  
DECANO**

**DR. OSCAR VILLALOBOS  
VICE-DECANO**

**LIC. ISRAEL LÓPEZ MIRANDA  
SECRETARIO INTERINO**

# Agradecimientos.

Primeramente le doy gracias a Dios por permitirme obtener este triunfo tan grande para mi que es culminar mi carrera profesional, por iluminarme y guiarme en este largo proceso de formación profesional.

Grandemente agradezco a nuestro asesor: **Lic. William Noé Merlos Juárez**, por ser nuestro guía, por su paciencia, sus consejos y por su tiempo brindado.

A mis padres queridos, **Rubén de Jesús Villegas Ulloa** y **Santos Elena Nolasco de Villegas**, por haberme forjado como la persona que soy en la actualidad; muchos de mis logros se los debo a ustedes entre los que se incluye este. Gracias por ser ustedes mis padres mi mayor fuente de inspiración y motivación para seguir adelante, por brindarme su apoyo económico, su amor y su apoyo incondicional en todo momento.

A mi hermana, **Bety Jhovana Villegas Nolasco**, por apoyarme, motivarme a seguir adelante a pesar de cualquier problema o circunstancia. Y a mi hermano, **Rubén Alexander Villegas Nolasco**, por ser mis entusiastas a lo largo de mi carrera profesional.

A mis abuelos, por sus sabios consejos se que desde el cielo me cuidan y están muy orgullosos de mi por este logro. A mis familiares que también me han motivado a salir adelante que siempre de todo mi esfuerzo para lograr mis sueños.

A mis amigos y compañeros, por compartir juntos muchos momentos de alegría, tristeza, sueños, historias y aventuras en nuestro proceso de formación profesional; no encuentro palabras para agradecerles pero a cada uno de ustedes los llevo siempre en mi mente y corazón.

*Elena Jackelinne Villegas Nolasco.*

## Agradecimientos.

En la vida nos enfrentamos a muchos obstáculos, pero he aprendido que es mucho más fácil enfrentarlos junto a las personas que amamos que cuando lo hacemos solos. Agradezco grandemente a mi madre **CLAUDIA MARLENI MACHADO** por ser la persona que me ha apoyado desde el principio de mi carrera hasta el final, gracias a su amor, sacrificio y esfuerzo hacia mí, lo complicado de alcanzar este sueño de graduarme ha sido menos duro.

A nuestro asesor de tesis **Lic. William Noé Merlos Juárez** por todo el tiempo brindado, como asesor y docente; también, por la enseñanza brindada a lo largo de la carrera.

Mi gratitud hacia mi familia que me ha apoyado y en especial a mi esposa **María Teresa Martínez Díaz** por ser de gran ayuda e inspiración para enfrentar los nuevos desafíos, metas y sueños que se vienen a nuestras vidas.

*Edwin Hidalgo Nolasco Machado.*

# Índice general.

	Pág.
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>VIII</b>
<b>Introducción</b>	<b>x</b>
<b>Justificación</b>	<b>XI</b>
<b>Objetivos</b>	<b>XIII</b>
<b>Simbología</b>	<b>XIV</b>
<b>1. Preliminares.</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos Básicos de la Teoría de Grafos. . . . .	1
1.2. Adyacencia de Vértices, Incidencia de Aristas y Grado de Vértices. . . . .	5
1.3. Representaciones de los Grafos. . . . .	10
1.4. Isomorfismo de Grafos. . . . .	12
1.5. Caminos y Ciclos. . . . .	14
1.6. Conexidad. . . . .	18
1.7. Fórmula de Euler. . . . .	25
1.8. Teorema de Kuratowski. . . . .	32
<b>2. Introducción a la Geometría Computacional.</b>	<b>34</b>
2.1. ¿Qué es la Geometría Computacional? . . . . .	34

2.2.	Área de un Triángulo. . . . .	36
2.3.	La Envolvente Convexa. . . . .	41
2.4.	Polígonos. . . . .	51
2.5.	Complejidad. . . . .	57
2.6.	El Problema del Robot. . . . .	59
2.7.	Problemas de Localización de Servicios. . . . .	61
2.7.1.	<i>Un Problema Muy Viejo.</i> . . . . .	62
2.8.	El Problema del Círculo Mínimo. . . . .	64
<b>3.</b>	<b>Diagramas de Voronoi.</b>	<b>67</b>
3.1.	¿Qué es el Diagrama de Voronoi? . . . . .	67
3.2.	Conceptos Básicos. . . . .	68
3.3.	Propiedades del Diagrama de Voronoi. . . . .	77
3.4.	Diagrama de Voronoi y la Envolvente Convexa. . . . .	87
3.5.	Construcción del Diagrama de Voronoi. . . . .	89
3.5.1.	<i>Concatenación: Aspectos Claves.</i> . . . . .	90
3.5.2.	<i>El Grafo Frontera.</i> . . . . .	91
3.6.	Principales Algoritmos de Construcción del Diagrama de Voronoi. . . . .	102
3.6.1.	<i>Intersección de Semiplanos.</i> . . . . .	102
3.6.2.	<i>Algoritmo Incremental.</i> . . . . .	103
3.6.3.	<i>Algoritmo de Fortune.</i> . . . . .	105
3.7.	Aplicaciones de los Diagramas de Voronoi. . . . .	107
3.7.1.	<i>Brote de Cólera de 1854 en Londres.</i> . . . . .	108
3.7.2.	<i>Estudio de la Estructura de los Huesos.</i> . . . . .	110

3.7.3. <i>Aplicaciones en Deporte.</i> . . . . .	111
3.7.4. <i>Modelización de Bosques.</i> . . . . .	114
3.7.5. <i>Triangulación de Delaunay.</i> . . . . .	116
<b>Recomendaciones</b>	<b>120</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>121</b>



# Resumen.

En el presente trabajo hacemos una introducción al estudio de los diagramas de Voronoi. Para ello primeramente presentamos conceptos básicos de la teoría de grafos y algunos teoremas importantes como los son: Formula de Euler y teorema de Kuratowski. Posteriormente definimos conceptos de geometría computacional, se presentan ejemplos clásicos de geometría computacional, con sus respectivos algoritmos, además, se define la envolvente convexa de un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano que es de gran importancia en la geometría computacional. Luego, en el último capítulo se presentan las propiedades de los diagramas de Voronoi y algunos de los teoremas más importantes de este tema; también se brinda una descripción detallada sobre los principales algoritmos para la construcción de dichos diagramas y por último se presentan algunas aplicaciones de los diagramas de Voronoi para resolver problemas.

**Palabras clave:** Teoría de grafos, isomorfismos de grafos, fórmula de Euler, teorema de Kuratowski, geometría computacional, envolvente convexa y diagramas de Voronoi.

## Abstract.

In the present work we make an introduction to the study of Voronoi diagrams. To do this, we first present basic concepts of graph theory and some theorems important as they are: Euler's formula and Kuratowski's theorem. Later we define concepts of computational geometry, classical examples of computational geometry are presented, with their respective algorithms, in addition, the convex envelope of a set  $S$  of  $n$  points in the plane is defined, which is of great importance in computational geometry. Then, in the last chapter, the properties of Voronoi diagrams and some of the most important theorems on this subject; A description of the main algorithms for the construction of said diagrams is also provided and finally some applications of Voronoi diagrams are presented to solve problems.

**Keywords:** Graph theory, graph isomorphisms, Euler's formula, Kuratowski's theorem, computational geometry, convex envelope and Voronoi diagrams.

# Introducción.

A continuación se presenta el informe final del trabajo de investigación titulado: **Geometría Computacional: Diagramas de Voronoi**. Damos a conocer la justificación del estudio, los objetivos que se perseguirán a lo largo del proceso y la simbología principal. Para ello, el presente trabajo consta de tres capítulos, los cuales detallamos a continuación:

## Capítulo 1: Preliminares.

En este capítulo se mencionarán algunos conceptos básicos de la teoría de grafos. Como también se estudiará la adyacencia de vértices, incidencia de aristas y grado de vértices, representaciones, isomorfismo, caminos y ciclos, conexidad, fórmula de Euler y el Teorema de Kuratowski.

## Capítulo 2: Introducción a la Geometría Computacional.

Seguidamente estudiaremos la geometría computacional, primero definiremos ¿Qué es la geometría computacional?. Luego abordaremos algunos ejemplos importantes de la geometría computacional: área de un triángulo, la envolvente convexa, polígonos, complejidad, el problema del robot, problemas de localización de servicios y el problema del círculo mínimo.

## Capítulo 3: Diagramas de Voronoi.

Empezaremos definiendo ¿Qué es el diagrama de Voronoi?. Luego abordaremos conceptos básicos, propiedades del diagrama de Voronoi, construcción del diagrama de Voronoi, principales algoritmos de construcción del diagrama de Voronoi y algunas aplicaciones.

Al final del documento aparecen algunas recomendaciones y la bibliografía.

# Justificación.

La Geometría Computacional surgió a finales de los 70 del área de diseño y análisis de algoritmos. Reúne problemas matemáticos y de ciencias de la computación. Aplicaciones a numerosas áreas como: gráficos por computadora, sistemas de información geográficos, robótica, visión por computadora, etc.

Uno de los temas clásicos del área matemática de la geometría computacional son los diagramas de Voronoi, unas estructuras geométricas que aparecen con frecuencia en la naturaleza. Los diagramas de Voronoi consisten en subdividir un plano, por ejemplo el mapa de una ciudad, en zonas de proximidad a unos ciertos puntos importantes o especiales con los que se generan los diagramas. La primera aplicación conocida del concepto de Diagrama de Voronoi aparece en un mapa del médico John Snow, incluido en el reporte sobre el brote de Cólera en Londres, durante el otoño de 1854.

En la actualidad sus aplicaciones son innumerables en campos tan diversos como la meteorología, las matemáticas, la medicina, la geografía, la biología, el diseño asistido por ordenador, sistemas de posición global, robótica, sistemas de detección de errores, modelado digital del terreno y su utilización en la reconstrucción de superficies, reconocimiento de patrones, e incluso en el mundo del deporte, donde se efectúan diagramas para visualizar las áreas de influencia de los jugadores y establecer cuál de ellos tiene una mejor disposición táctica y conexión entre sus integrantes.

Hay muchos campos donde aparece esta idea o la necesidad de subdividir un espacio en zonas de proximidad a determinados puntos con los que se generan los diagramas. Es por ello que captó nuestro especial interés el hecho de que hay una infinidad de investigaciones en ésta área de la geometría computacional: Diagramas de Voronoi; nuestro trabajo pretende que este sea un documento auto-suficiente, para que cualquier curioso con los conocimientos

básicos de teoría de grafos, geometría y computación sea capaz de interpretar y comprender lo que aquí se ha desarrollado.

Las aplicaciones son muchas y por eso se han desarrollado tanto aunque aún hay mucho trabajo por hacer en este terreno, es un campo muy activo de investigación.

# Objetivos.

## Objetivo General:

- Estudiar las propiedades de los Diagramas de Voronoi y sus aplicaciones.

## Objetivos Específicos:

- Proporcionar conceptos y propiedades básicas de la teoría de grafos.
- Definir que es un Diagrama de Voronoi para un conjunto  $P$  de  $n$  puntos en el plano y sus propiedades.
- Presentar algunos algoritmos para la construcción de Diagramas de Voronoi de un conjunto  $P$  del plano de  $n$  puntos.
- Mostrar algunos ejemplos de las aplicaciones de los Diagramas de Voronoi.

# Simbología.

$\mathbb{R}$  : Números reales.

$\mathbb{N}$  : Números naturales.

$\mathbb{Q}$  : Números racionales.

$G = (V, E)$  : Grafo.

$V(G)$  : Conjunto de vértices del grafo  $G$ .

$E(G)$  : Conjunto de aristas del grafo  $G$ .

$v(G)$  : El número de vértices de  $G$ .

$\epsilon(G)$  : El número de aristas de  $G$ .

$\{x, y\}$  o  $xy$  : Denotación de una arista.

$\sigma(u)$  : El grado de un vértice  $u$ .

$\sum_{v \in V} \sigma(v)$  : La suma de los grados de los vértices.

$M(G)$  : Matriz de incidencia de  $G$ .

$A(G)$  : Matriz de adyacencia de  $G$ .

$d(u, v)$  : Denotación de la distancia entre dos vértices  $u$  y  $v$ .

$exc(v)$  : Excentricidad de un vértice  $v$ .

$rad(G)$  : El radio de un grafo  $G$ .

$diam(G)$  : El diámetro de un grafo  $G$ .

$r(G)$  : El número de regiones de una representación plana de  $G$ .

$B(f)$  : El número de aristas por las cuales  $f$  está encerrada.

$CAD$  : Diseño asistido por computadora.

$CAM$  : Fabricación asistida por computadora.

$\Delta_{abc}$  : Área de un triángulo  $abc$ .

$DET(A, B, C)$  : El valor del determinante de  $A, B$  y  $C$ .

$fr(S)$  : La frontera de  $S$ .

$int(X)$  : El interior de  $X$ .

$V(p_i)$  : El polígono de Voronoi de  $p_i$ .

$d(p, p_i)$  : Distancia Euclidiana.

$V_{or}(P)$  : El diagrama de Voronoi de  $P$ .

$fr(V(p_i))$  : La frontera de un polígono de Voronoi.

$l_i$  : Una arista de Voronoi.

$q_i$  : Un vértice de Voronoi.

$V_{or}(P) \cap S$  : El diagrama de Voronoi acotado por  $S$ .

$b(p_i, p_j)$  : La mediatriz entre  $p_i$  y  $p_j$ .

$H(p_i, p_j)$  : Región dominio de  $p_i$  sobre  $p_j$ .

$n_{q_i}$  : El número de vértices del diagrama de Voronoi.

$n_{l_i}$  : El número de aristas del diagrama de Voronoi.

$n_{r_i}$  : El número de regiones del diagrama de Voronoi.



$C(q_i)$  : El círculo con centro en  $q_i$ .

$q_\infty$  : Vértice al infinito.

$\delta$  : Grafo frontera.

*Event Queue* : Cola de eventos.

*DCEL* : Lista de aristas doblemente conectadas.

# Capítulo 1

## Preliminares.

### 1.1. Conceptos Básicos de la Teoría de Grafos.

Los grafos son estructuras discretas que constan de vértices y de aristas que conectan entre si esos vértices.

**Definición 1.1.1 (Grafo).** *Un grafo  $G$  es un par  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto finito de vértices (nodos) y  $E$  es un conjunto de pares no ordenados de vértices, denotados por  $\{x, y\}$  o  $xy$  (ambas denotaciones por conveniencia), que se denominan aristas (lados). Como se muestra en la Figura (1.1).*

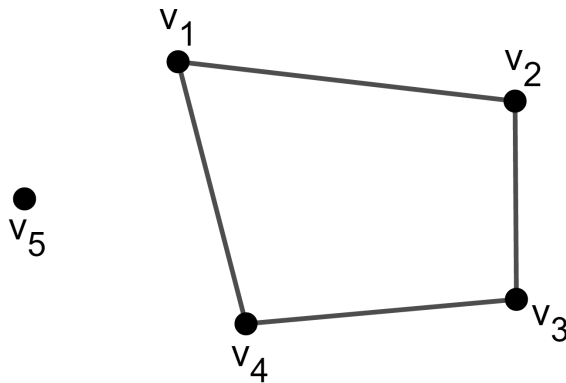


Figura 1.1: Grafo  $G = (V, E)$  con  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  y  $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4\}$ .

**Definición 1.1.2 (Subgrafo).** *Sea  $G = (V, E)$  un grafo, si  $H = (W, F)$  es un grafo tal que  $W \subset V$  y  $F \subset E$  decimos que  $H$  es un subgrafo de  $G$ .*

**Ejemplo 1.1.3.** *Sea  $G$  el grafo del conjunto  $V = \{a, b, c, d, e, f, h, g\}$ , con aristas  $E = \{ab, bc, bd, bf, be, bh, cg, dg, df, de, eh, hg, fe, fg\}$ . Sea el grafo  $H$  del conjunto  $W = \{a, b, d, e, f\}$*

y sea  $F = \{ab, bd, bf, be, df, de, ef\}$  las aristas del grafo  $H$ . Como  $W \subset V$  y  $F \subset E$ , entonces  $H$  es subgrafo de  $G$ . Como se observa en la Figura (1.2).

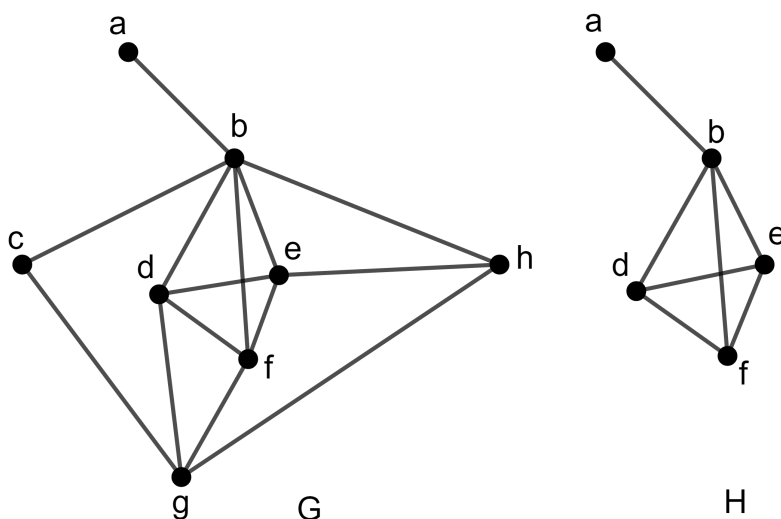


Figura 1.2: Representación de los grafos  $G = (V, E)$  y  $H = (W, F)$ .

Decimos que  $x$  y  $y$  son extremos de  $\{x, y\}$ . Denotamos  $V(G)$  el conjunto de vértices del grafo  $G$  y por  $E(G)$  el conjunto de aristas del grafo  $G$ . Además  $v(G)$  y  $\epsilon(G)$  denotan el número de vértices y el número de aristas de  $G$  respectivamente.

**Definición 1.1.4 (Grafo simple).** Un grafo simple  $G = (V, E)$  consta de  $V$ , un conjunto no vacío de vértices, y de  $E$ , un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de  $V$ , a esos pares se les llama aristas o lados. Como se muestra en la Figura (1.3).

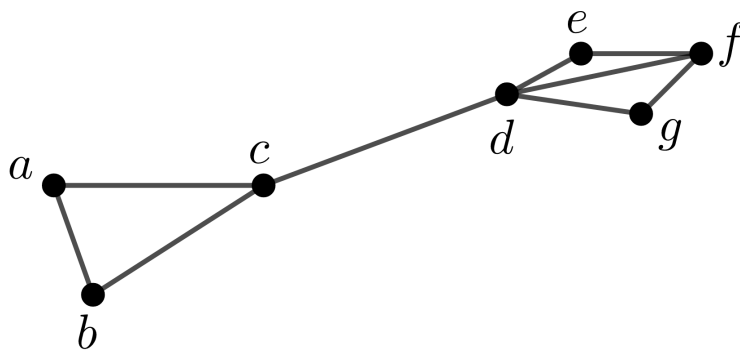


Figura 1.3: Grafo simple.

**Definición 1.1.5 (Bucle).** Arista que conectan un vértice consigo mismo. En la Figura (1.4) se muestra un grafo con los bucles:  $\{a, a\}$ ,  $\{c, c\}$ .

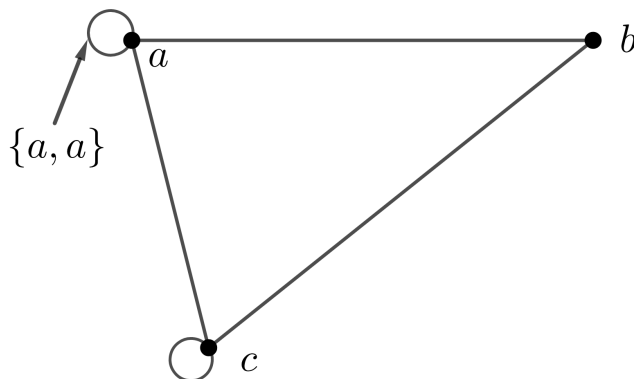


Figura 1.4: Grafo con bucles.

**Definición 1.1.6 (Multigrafo).** Un multigrafo  $G = (V, E)$  consta de un conjunto  $V$  de vértices, un conjunto  $E$  de aristas y una función  $f$  de  $E$  en  $\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ . Se dice que las aristas  $e_1$  y  $e_2$  son aristas múltiples o paralelas si  $f(e_1) = f(e_2)$ .

**Ejemplo 1.1.7.** Sea  $G = (V, E)$  con  $V(G) = \{a, b, c\}$  y  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  el multigrafo representado en la Figura (1.5). Definamos una función  $f$  tal que  $f(e_1) = \{a, b\}$ ,  $f(e_2) = \{a, b\}$ ,  $f(e_3) = \{a, c\}$ ,  $f(e_4) = \{c, b\}$ . Como  $f(e_1) = \{a, b\} = f(e_2)$ , entonces  $e_1$  y  $e_2$  son aristas paralelas.

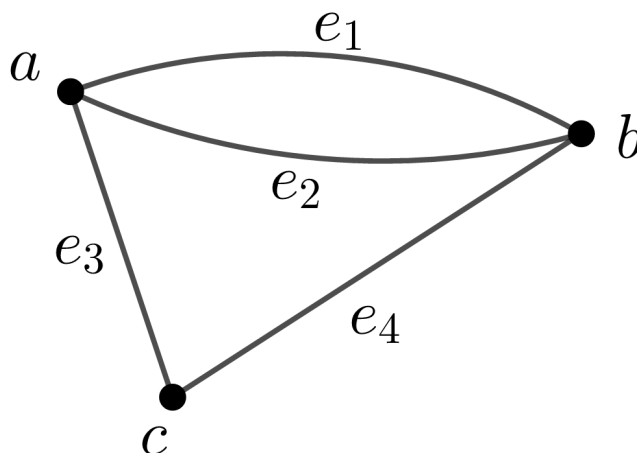


Figura 1.5: Multigrafo.

Cuando hay mucho tráfico de información, puede haber líneas telefónicas múltiples entre los ordenadores de la red, como se muestra en la Figura (1.5). Los grafos simples no bastan para modelar esta situación. En lugar de grafos simples, emplearemos multigrafos, que constan de vértices y de aristas no dirigidas entre esos vértices, pero admitiendo la existencia de aristas múltiples entre pares de vértices. Todo grafo simple es un multigrafo con  $f = I$ , donde  $I$  es la función identidad. Sin embargo, no todos los multigrafos son grafos simples, puesto que en un multigrafo puede haber dos o más aristas conectando un mismo par de vértices.

Observar que las aristas múltiples en un multigrafo están asociadas a un mismo par de vértices. No obstante, diremos que  $\{u, v\}$  es una arista del grafo  $G = (V, E)$  si hay al menos una arista  $e$  con  $f(e) = \{u, v\}$ . No haremos distinciones entre la arista  $e$  y el conjunto  $\{u, v\}$  asociado a no ser que la identidad de alguna de las aristas múltiples en concreto sea importante.

**Definición 1.1.8 (Dígrafo).** *Un grafo dirigido o dígrafo  $G = (V, E)$  consta de un conjunto  $V$  de vértices y un conjunto  $E$  de aristas que son pares ordenados de elementos de  $V$ . Como se muestra en la Figura (1.6).*

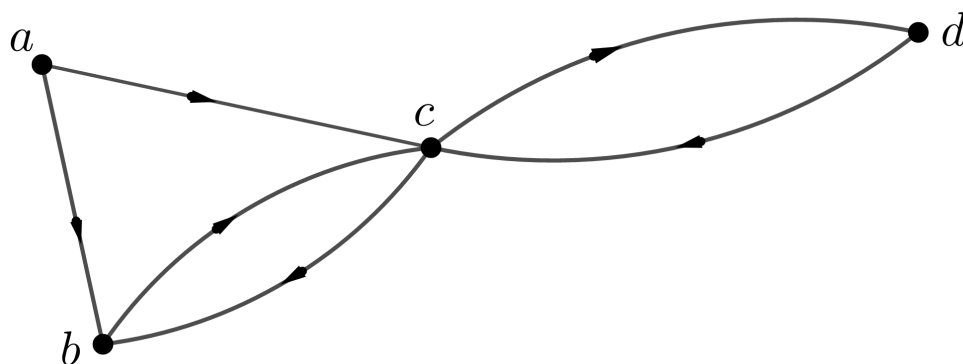


Figura 1.6: Grafo dirigido (dígrafo).

La diferencia entre grafo y dígrafo es que el último tiene aristas dirigidas y se entiende como un grafo dirigido.

Cuando no se consideran las direcciones de las aristas en  $G$ , el grafo que se obtiene se llama grafo subyacente de  $G$ .

**Definición 1.1.9 (Multigrafo dirigido).** *Un multigrafo dirigido  $G = (V, E)$  consta de un conjunto  $V$  de vértices, un conjunto  $E$  de aristas y una función  $f$  de  $E$  en  $\{(u, v) \mid u, v \in V, u \neq v\}$ . Se dice que las aristas  $e_1$  y  $e_2$  son aristas múltiples o paralelas si  $f(e_1) = f(e_2)$ . Ver Figura (1.7).*

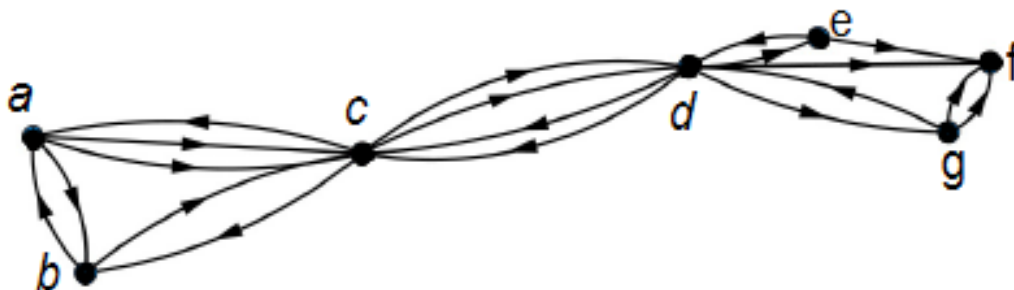


Figura 1.7: Multigrafo dirigido.

## 1.2. Adyacencia de Vértices, Incidencia de Aristas y Grado de Vértices.

**Definición 1.2.1.** *Dos vértices  $u, v$  de un grafo no dirigido  $G = (V, E)$  son adyacentes (vecinos) en  $G$  si  $\{u, v\}$  es una arista de  $G$ . Si  $e = \{u, v\}$ , se dice que la arista  $e$  es incidente con los vértices  $u$  y  $v$  (la arista  $e$  conecta  $u$  y  $v$ ). Los vértices  $u$  y  $v$  son extremos de la arista  $e$ .*

**Definición 1.2.2.** *El grado de un vértice de un grafo no dirigido es el número de aristas incidentes con él. El grado de un vértice  $u$  se denota  $\sigma(u)$ .*

**Ejemplo 1.2.3.** *En la Figura (1.2) podemos observar que en el grafo  $G$ , el grado del vértice  $d$  es  $\sigma(d) = 4$ , porque las aristas incidentes al vértice son 4:  $\{db, de, df, dg\}$ .*

Los vértices de grado cero son vértices aislados, puede verse que un vértice aislado no es adyacente a ningún otro vértice. En la Figura (1.1) el vértice  $v_5$  es un vértice aislado.

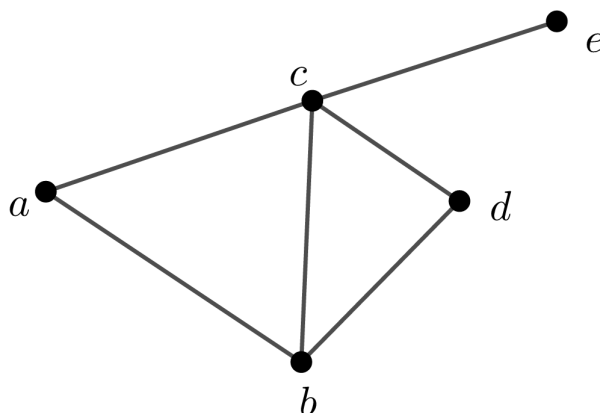


Figura 1.8: El vértice  $e$  es un vértice hoja.

Se dice que un vértice es colgante (hoja) si y sólo si tiene grado uno, entonces un vértice hoja es adyacente a un solo vértice distinto de él. La Figura (1.8) tiene un vértice hoja.

**Teorema 1.2.4 (Teorema del apretón de manos).** Sea  $G = (V, E)$  un grafo no dirigido con  $\epsilon(G)$  aristas. Entonces

$$2(\epsilon(G)) = \sum_{v \in V} \sigma(v)$$

*Es decir, la suma de los grados de los vértices es el doble que el número de aristas (notar que esto es cierto incluso cuando existen aristas múltiples y bucles en el grafo). También se sigue que la suma de los grados de los vértices de un grafo no dirigido es un número par.*

**Demostración:**

Como cada arista contribuye con dos unidades a la suma de los grados de los vértices, ya que cada arista es incidente a dos vértices (posiblemente iguales). Esto significa que la suma de los grados de los vértices es el doble del número de aristas. ■

**Ejemplo 1.2.5.** Sea el grafo  $G = (V, E)$ , donde  $V = \{u_1, u_2, \dots, u_6\}$  y  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_9\}$ , como se muestra en la Figura (1.9). Comprobaremos con este ejemplo que se cumple el Teorema (1.2.4).

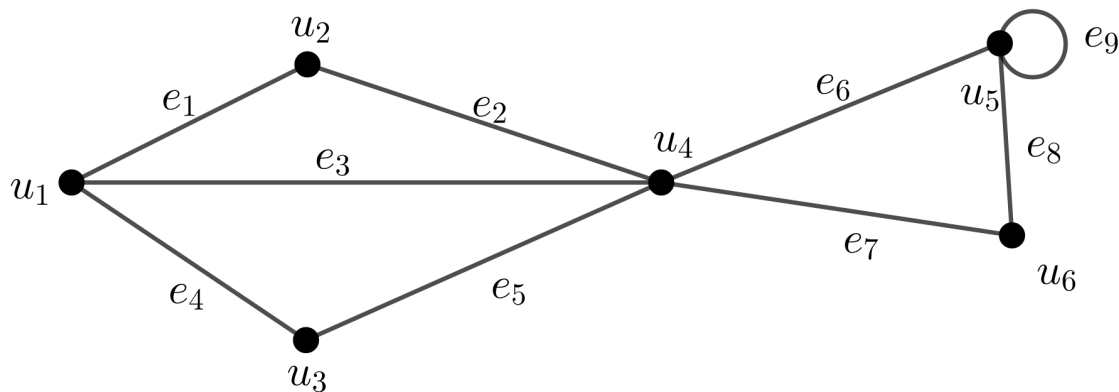


Figura 1.9: Un grafo  $G$  no dirigido formado por 6 vértices y 9 aristas.

**Solución:**

Tenemos que los grados de cada uno de los vértices es:

$$\sigma(u_1) = 3, \sigma(u_2) = 2, \sigma(u_3) = 2, \sigma(u_4) = 5, \sigma(u_5) = 4, \sigma(u_6) = 2$$

Así, la sumatoria de los grados de cada uno de los vértices de  $G$  es:

$$\sum_{i=1}^6 \sigma(u_i) = 3 + 2 + 2 + 5 + 4 + 2 = 18$$

Por otra parte tenemos que  $\epsilon(G) = 9$ , porque hay 9 aristas. Por tanto

$$18 = 2(9) = 2\epsilon(G) = \sum_{i=1}^6 \sigma(u_i) = 18$$

■

**Teorema 1.2.6.** Todo grafo no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar.



**Demostración:**

Sean  $V_1$  y  $V_2$  el conjunto de vértices de grado par y el conjunto de vértices de grado impar, respectivamente, de un grafo no dirigido  $G = (V, E)$ . Entonces,

$$2(\epsilon(G)) = \sum_{v \in V(G)} \sigma(v) = \sum_{v \in V_1} \sigma(v) + \sum_{v \in V_2} \sigma(v)$$

Como  $\sigma(v)$  es par si  $v \in V_1$ , el primer sumando del término de la derecha de la última igualdad es par. Además, la suma de los dos sumandos de dicho término es par, puesto que esa suma es  $2(\epsilon(G))$ . Por tanto, el segundo sumando es también par. Como todos los términos que se suman en ese segundo sumando son impares, tiene que haber un número par de ellos. Por tanto, hay un número par de vértices de grado impar. ■

**Ejemplo 1.2.7.** *Sea el grafo  $G$  del Ejemplo (1.2.5), verificar que tiene un número par de vértices de grado impar.*

**Solución:**

En la Figura (1.9) podemos observar que los vértices con grado impar son  $u_1$  y  $u_4$  ya que  $\sigma(u_1) = 3$  y  $\sigma(u_4) = 5$ , lo que nos dice que hay un número par de vértices de grado impar. ■

**Definición 1.2.8.** *Si  $\{u, v\}$  es una arista del grafo dirigido  $G = (V, E)$ ; se dice que  $u$ , conocido como vértice inicial es adyacente a  $v$ , vértice final o terminal, o también que  $v$  es adyacente desde  $u$ . En un bucle el vértice inicial siempre coincide con el final.*

**Definición 1.2.9.** *En un grafo dirigido, el grado de entrada de un vértice  $v$ , denotado por  $\sigma^-(v)$ , es el número de aristas que tienen a  $v$  como vértice final. El grado de salida de un vértice  $v$ , denotado por  $\sigma^+(v)$ , es el número de aristas que tienen a  $v$  como vértice inicial. Un bucle contribuye en una unidad tanto al grado de entrada como al grado de salida del vértice correspondiente.*

**Teorema 1.2.10.** *Sea  $G = (V, E)$  un grafo dirigido. Entonces,*

$$\sum_{v \in V} \sigma^-(v) = \sum_{v \in V} \sigma^+(v) = \epsilon(G)$$

**Demostración:**

Como cada arista tiene un vértice inicial y un vértice final, la suma de los grados de entrada y la suma de los grados de salida de todos los vértices del grafo dirigido coinciden. Ambas sumas son iguales al número de aristas que tiene el grafo. ■

**Ejemplo 1.2.11.** *Sea el grafo dirigido  $G = (V, E)$ , donde  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  y  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_8\}$ , como se observa en la Figura (1.10) con este ejemplo comprobaremos que se cumple el Teorema (1.2.10).*

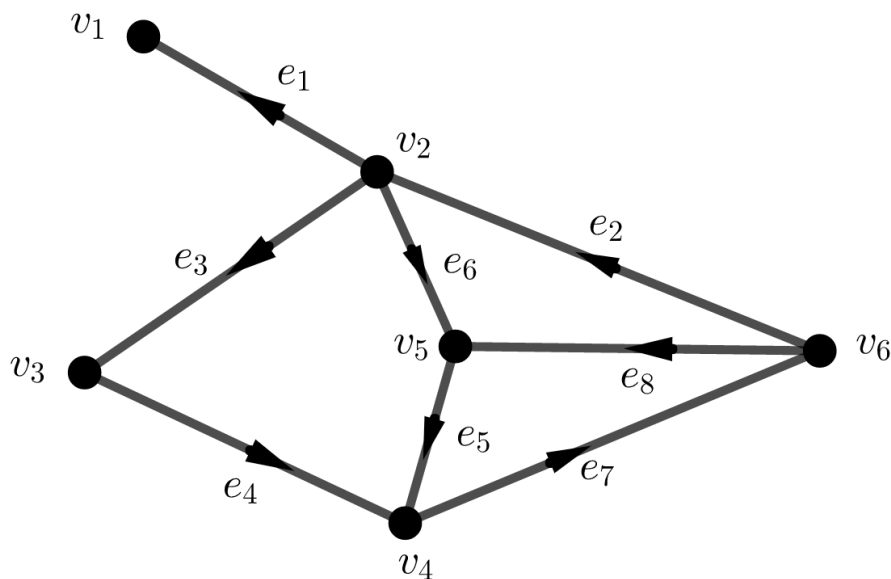


Figura 1.10: Un grafo  $G$  dirigido formado por 6 vértices y 8 aristas.

**Solución:**

Tenemos que los grados de entrada de los vértices de  $G$  son:

$$\sigma^-(v_1) = 1, \sigma^-(v_2) = 1, \sigma^-(v_3) = 1, \sigma^-(v_4) = 2, \sigma^-(v_5) = 2, \sigma^-(v_6) = 1$$

Y los grados de salida de los vértices son:

$$\sigma^+(v_1) = 0, \sigma^+(v_2) = 3, \sigma^+(v_3) = 1, \sigma^+(v_4) = 1, \sigma^+(v_5) = 1, \sigma^+(v_6) = 2$$

Ahora sumamos los grados de entrada de cada vértice

$$\sum_{i=1}^6 \sigma^-(v_i) = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 = 8$$

Y sumamos los grados de salida de cada vértice

$$\sum_{i=1}^6 \sigma^+(v_i) = 0 + 3 + 1 + 1 + 1 + 2 = 8$$

Luego, como

$$8 = \sum_{i=1}^6 \sigma^-(v_i) = \sum_{i=1}^6 \sigma^+(v_i) = \epsilon(G) = 8$$

Por lo tanto, se cumple el teorema anterior. ■

### 1.3. Representaciones de los Grafos.

Para representar un grafo en una computadora se puede usar:

- La matriz de incidencia denotada por:  $M(G)$ .
- La matriz de adyacencia denotada por:  $A(G)$ .

Sea  $G = (V, E)$  un grafo con  $v(G)$  vértices y  $\epsilon(G)$  aristas, entonces, le corresponde

una matriz  $v \times \epsilon$  denominada **matriz de incidencia** de  $G$ . Denotamos los vértices de  $G$  por  $u_1, u_2, \dots, u_v$  y las aristas por  $e_1, e_2, \dots, e_\epsilon$ . Entonces la matriz de incidencia de  $G$  es la matriz  $M(G) = [m_{ij}]$ , donde  $m_{ij}$  es el número de veces que la arista  $e_j$  incide en el vértice  $u_i$ , dada por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{si } e_j \text{ es incidente con } u_i \\ 0; & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Otra matriz asociada a  $G$  es la **matriz de adyacencia**, la cual es una matriz  $v \times v$ . Entonces la matriz de adyacencia de  $G$  es la matriz  $A(G) = [a_{ij}]$ , donde  $a_{ij}$  es el número de aristas que van de  $u_i$  hasta  $u_j$ , dada por:

$$a_{ij} = \begin{cases} n; & n \text{ número de aristas entre } u_i \text{ y } u_j \\ 0; & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (1.2)$$

En la Figura (1.11) se muestra un ejemplo de un grafo con su respectiva matriz de incidencia y su matriz de adyacencia.

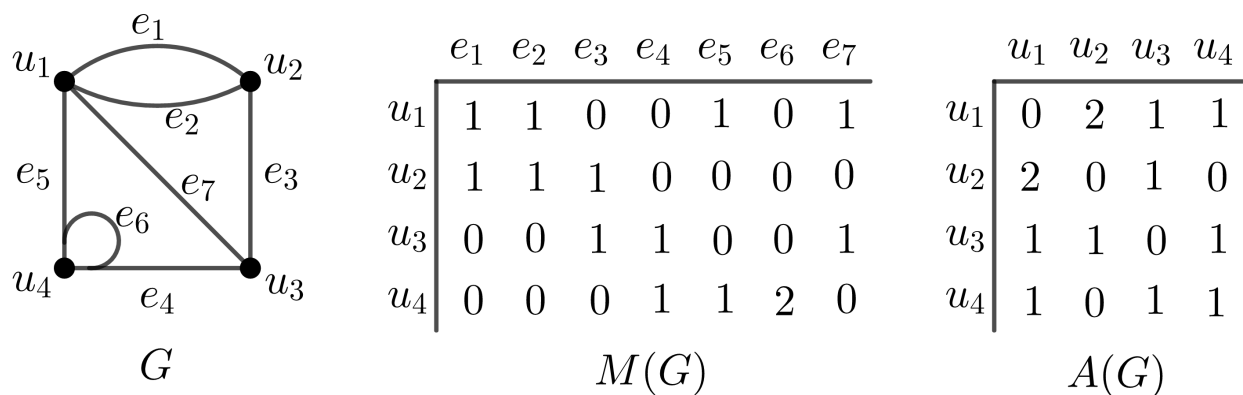


Figura 1.11: Matriz de incidencia y de adyacencia de  $G$ .

La matriz de adyacencia de un grafo depende del orden elegido para los vértices. Por lo tanto hay  $v(G)!$  para un grafo de  $v(G)$  vértices, puesto que hay  $v(G)!$  ordenaciones distintas de los  $v(G)$  vértices.

El grado de un vértice para la matriz de adyacencia se obtiene sumando la fila o la columna correspondiente (solo para grafos no dirigidos) como se muestra en la Figura (1.11).

En general cuando no se especifica si un grafo  $G$  es o no dirigido se supone que es no dirigido. Si no contiene bucles se denomina grafo sin bucles y un grafo sin bucles para la matriz de incidencia, la suma de una fila da el grado de vértice identificado con esa fila. Si la arista es un bucle entonces se suma 2 en vez de 1.

## 1.4. Isomorfismo de Grafos.

A menudo se requiere conocer si es posible representar dos grafos de la misma forma. Por ejemplo, en Química, se utilizan los grafos para representar compuestos. Diferentes compuestos pueden tener la misma fórmula molecular, pero distinta estructura.

**Definición 1.4.1 (Isomorfismo de grafos).** *Los grafos simples  $G_1 = (V_1, E)$  y  $G_2 = (V_2, E)$  son isomorfos si existe una función biyectiva  $f$  de  $V_1$  en  $V_2$  con la propiedad de que, para cada par de vértices  $u, v \in V_1$ ,  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $G_1$  si y sólo si  $f(u)$  y  $f(v)$  son adyacentes en  $G_2$ . Se dice que la función  $f$  es un isomorfismo.*

Es decir, cuando dos grafos simples son isomorfos, hay una relación biyectiva entre los vértices de los grafos que preserva la relación de adyacencia.

**Ejemplo 1.4.2.** *Determine si los grafos  $G$  y  $H$  de la Figura (1.12) son isomorfismos.*

### Solución:

Los grafos  $G$  y  $H$  de la Figura (1.12) son isomorfos, pues un posible isomorfismo es:

$$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_4, f(u_3) = v_3, f(u_4) = v_2$$

■

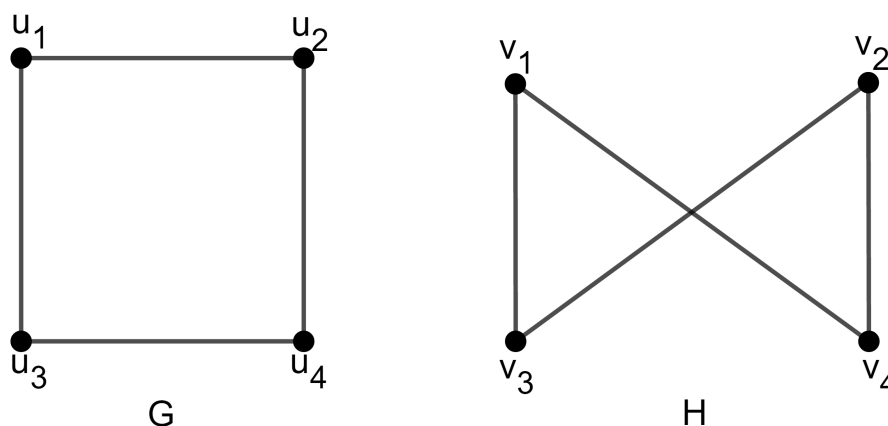


Figura 1.12: Grafos simples isomorfos.

Con frecuencia es difícil determinar si dos grafos simples son isomorfos, puesto que existen  $v(G)!$  posibles biyecciones entre los conjuntos de vértices de dos grafos simples de  $v(G)$  vértices.

No obstante, se puede demostrar que dos grafos no son isomorfos si no comparten alguna propiedad que dos grafos isomorfos deberían tener en común. A tales propiedades se les llama invariantes bajo isomorfismo de grafos simples.

Para mostrar que dos grafos no son isomorfos podemos mostrar que sus invariantes no son iguales. Por ejemplo:

- **El número de vértices:** Dos grafos isomorfos deberían tener el mismo número de vértices (puesto que hay una biyección entre los conjuntos de vértices de los grafos).
- **El número de aristas:** Dos grafos isomorfos deberían tener el mismo número de aristas (ya que la biyección entre los vértices establece una biyección entre las aristas).
- **El grado de los vértices:** Dos grafos simples isomorfos deben coincidir.

El mejor algoritmo en la práctica, conocido como *NAUTY* (véase [1]), puede usarse para determinar, en menos de un segundo, si dos grafos con menos de cien vértices son isomorfos.

## 1.5. Caminos y Ciclos.

Hay muchos problemas que se pueden representar por medio de caminos que se forman al ir recorriendo las aristas de un grafo.

A continuación se presentan algunas definiciones de caminos y circuitos en la teoría de grafos.

**Definición 1.5.1.** Sea  $n$  un entero no negativo y sea  $G$  un multigrafo no dirigido. Un camino de longitud  $n$  de  $u$  a  $v$  en  $G$  es una secuencia de  $n$  aristas  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$  de  $G$  tal que  $f(e_1) = \{v_0, v_1\}, \dots, f(e_n) = \{v_{n-1}, v_n\}$ , donde  $v_0 = u$  y  $v_n = v$ . Si el grafo es simple, se denota este camino por su secuencia de vértices  $v_0, \dots, v_n$ . El camino es un circuito si comienza y termina en el mismo vértice, es decir, si  $u = v$  y tiene longitud mayor que cero. Se dice que el camino o circuito pasa por los vértices  $v_1, \dots, v_{n-1}$ , o también, que recorre las aristas  $e_1, \dots, e_n$ . Un camino o circuito es simple si no contiene la misma arista más de una vez.

**Ejemplo 1.5.2.** Todos estos conceptos se ilustran en la Figura (1.13).

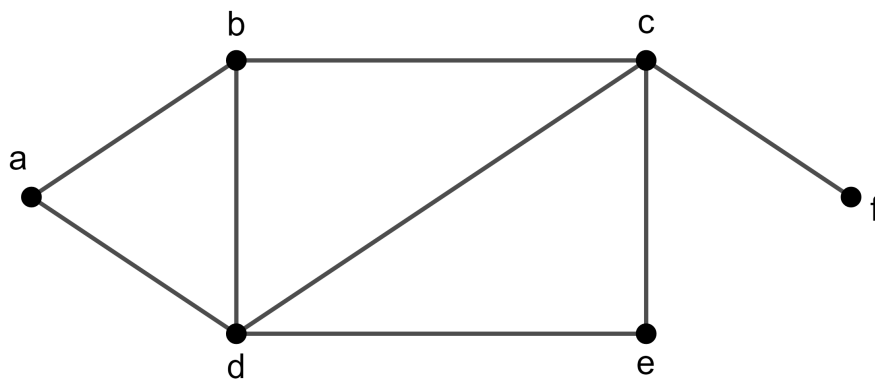


Figura 1.13: Caminos y circuitos en un grafo no dirigido.

*Un camino simple de a a f es:  $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, f\}$ . Ya que no se repite ninguna*

arista.

**Un camino no simple de  $a$  a  $f$  es:**  $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \{e, d\}, \{d, b\}, \{b, c\}, \{c, f\}$ .

Ya que se repite la arista  $\{b, c\}$ .

**Un circuito simple:**  $\{a, b\}, \{b, d\}, \{d, a\}$ . Ya que no se repite ninguna arista en su recorrido.

**Un circuito no simple:**  $\{a, b\}, \{b, d\}, \{d, c\}, \{c, b\}, \{b, d\}, \{d, a\}$ . Ya que se repite la arista  $\{b, d\}$  mas de una vez en su recorrido.

**Definición 1.5.3.** Sea  $n$  un entero no negativo y sea  $G$  un multigrafo dirigido. Un camino de longitud  $n$  de  $u$  a  $v$  en  $G$  es una secuencia de  $n$  aristas  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$  de  $G$  tal que  $f(e_1) = (v_0, v_1), \dots, f(e_n) = (v_{n-1}, v_n)$ , donde  $v_0 = u$  y  $v_n = v$ . Si no hay aristas múltiples en el grafo dirigido, denotamos este camino por su secuencia de vértices  $v_0, \dots, v_n$ . Un camino de longitud mayor que cero que comienza y termina en el mismo vértice es un circuito. Se dice que un camino o circuito es simple si no contiene la misma arista más de una vez.

**Ejemplo 1.5.4.** La Definición (1.5.3) se ilustra en la Figura (1.14).

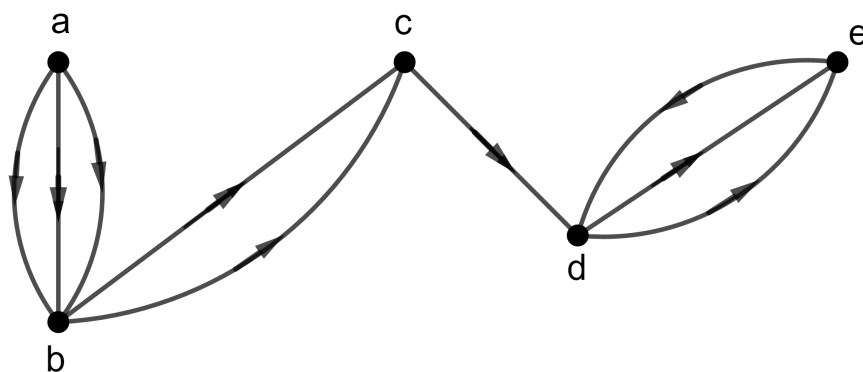


Figura 1.14: Caminos y circuitos de un multigrafo dirigido.

**Camino y circuito:** La arista  $(e, d)$  y cualquiera de las aristas  $(d, e)$  forman un circuito simple dirigido de longitud 2 en el multigrafo. En las dos definiciones notamos que el vértice final de una arista, es el vértice inicial de la siguiente arista del camino.



**Ejemplo 1.5.5.** En el grafo simple que se muestra en la Figura (1.15), podemos observar que el camino  $a, d, c, f, e$  es un camino simple de longitud 4, ya que  $\{a, d\}$ ,  $\{d, c\}$ ,  $\{c, f\}$  y  $\{f, e\}$  son aristas. Sin embargo, el camino  $d, e, c, a$  no existe, ya que  $\{e, c\}$  no es una arista.

Notar que el camino  $b, c, f, e, b$  es un circuito de longitud 4, ya que  $\{b, c\}$ ,  $\{c, f\}$ ,  $\{f, e\}$  y  $\{e, b\}$  son aristas, además este camino comienza y termina en  $b$ . El camino  $a, b, e, d, a, b$ , que tiene longitud 5, no es simple, ya que contiene dos veces la arista  $\{a, b\}$ .

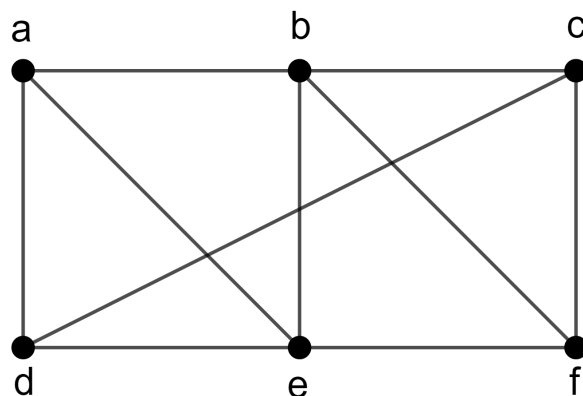


Figura 1.15: Caminos en un grafo simple.

**Definición 1.5.6 (Distancia).** La distancia, conocida como geodésica, entre dos vértices distintos, es igual a la longitud del camino más corto entre ellos; si no hay camino entre ellos la distancia no está definida; y la distancia es cero si los vértices son iguales.

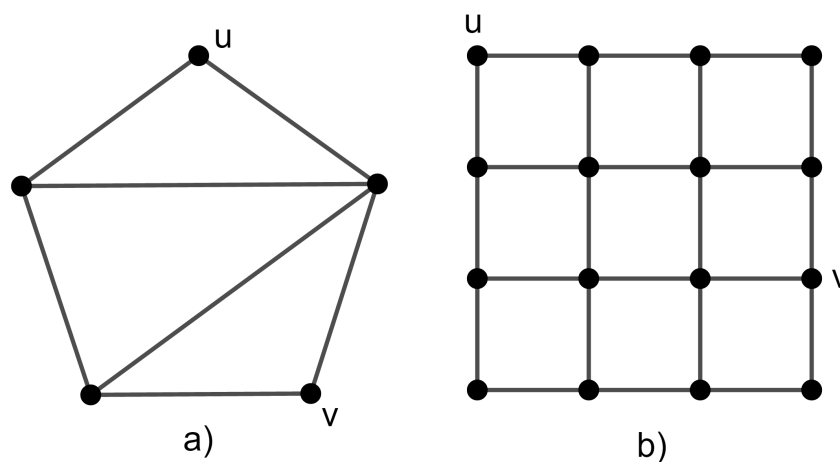


Figura 1.16: Distancia entre dos vértices.

**Ejemplo 1.5.7.** En la Figura (1.16) literal a) podemos observar que la distancia  $d(u, v) = 2$  y en la Figura (1.16) literal b) la distancia  $d(u, v) = 5$ .

**Definición 1.5.8 (Excentricidad).** Se define la excentricidad de un vértice  $v \in V(G)$  como la distancia máxima desde  $v$  a cualquier otro vértice del grafo  $G$  siguiendo caminos de longitud mínima. Se denotará por:  $exc(v) = \max\{d(v, s) : s \in V(G)\}$ . Ver Figura (1.17).

**Definición 1.5.9 (Radio).** El radio de un grafo  $G$  se define como el mínimo de las excentricidades de todos los vértices del grafo. Lo denotaremos por:  $rad(G) = \min\{exc(v) : v \in V(G)\}$ . Ver Figura (1.17).

**Definición 1.5.10 (Diámetro).** El diámetro de un grafo es la longitud del camino más corto para unir los dos vértices más alejados. También puede ser entendido como el máximo de las excentricidades de todos los vértices del grafo. A partir de ahora lo denotaremos por:  $diam(G) = \max\{exc(v) : v \in V(G)\}$ . Como se observa en la Figura (1.17).

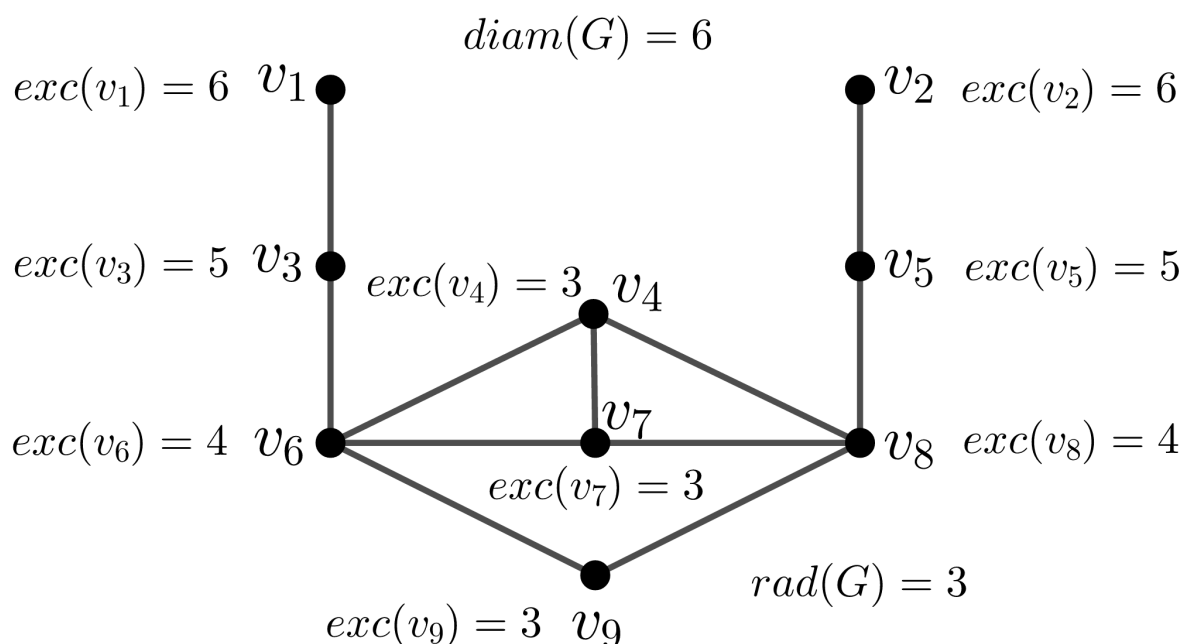


Figura 1.17: Excentricidad, Radio y Diámetro de un grafo.

## 1.6. Conexidad.

Un grafo  $G$  es conexo si existe un camino entre cualquier par de vértices. Veremos primero la conexidad en grafos no dirigidos.

**Definición 1.6.1.** *Un grafo no dirigido  $G$  es conexo si hay un camino entre cada par de vértices distintos de  $G$ .*

El grafo  $G_1$  de la Figura (1.18) es conexo, ya que para cada par de vértices distintos hay un camino entre ellos. Sin embargo, el grafo  $G_2$  no lo es, por ejemplo, no hay algún camino entre  $a$  y  $d$ .

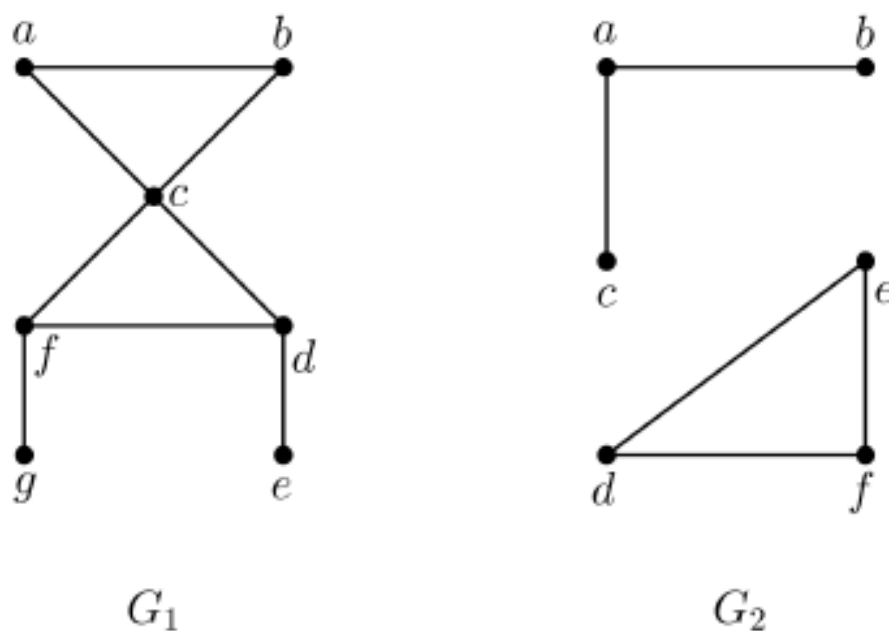


Figura 1.18: El grafo  $G_1$  es conexo y el grafo  $G_2$  no lo es.

Un grafo que no es conexo es la unión de dos o más subgrafos conexos que dos a dos tienen ningún vértice común. A estos subgrafos conexos disjuntos se les llama **componentes conexas** del grafo. Como podemos observar en la Figura (1.19).

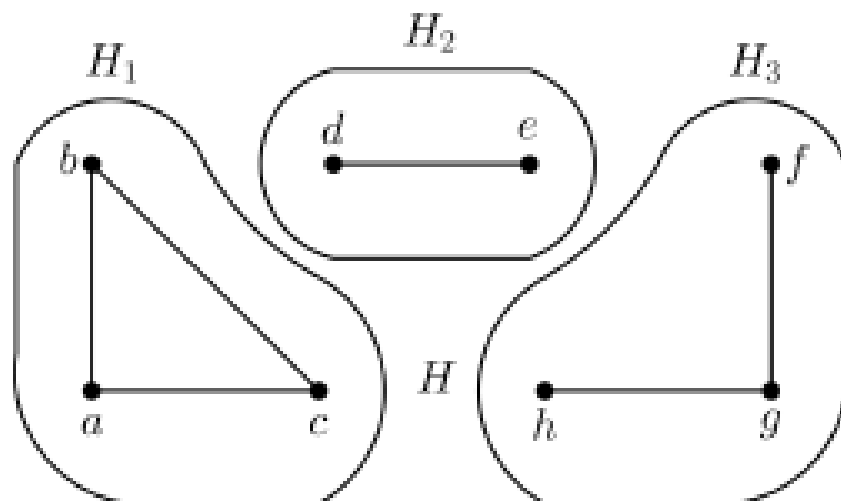


Figura 1.19: El grafo  $H$  y sus componentes conexas  $H_1, H_2$  y  $H_3$ .

**Definición 1.6.2.** Un grafo  $G = (V, E)$  es bipartito si  $V(G)$  se puede dividir en dos conjuntos no vacíos  $A$  y  $B$ , tales que:

1.  $A \cup B = V(G)$ .
2.  $A \cap B = \phi$ .
3. Si  $\{u, v\} \in E(G)$ , entonces  $u \in A$  y  $v \in B$ .

El grafo formado por un solo vértice no es bipartito por el simple motivo que no puede separarse en dos conjuntos y los grafos bipartitos no pueden tener bucles.

**Ejemplo 1.6.3.** Sea el grafo  $G = (V, E)$ , con  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  y  $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_1, v_2v_5, v_1v_4\}$  como se muestra en la Figura (1.20). Determinar si es un grafo bipartito.

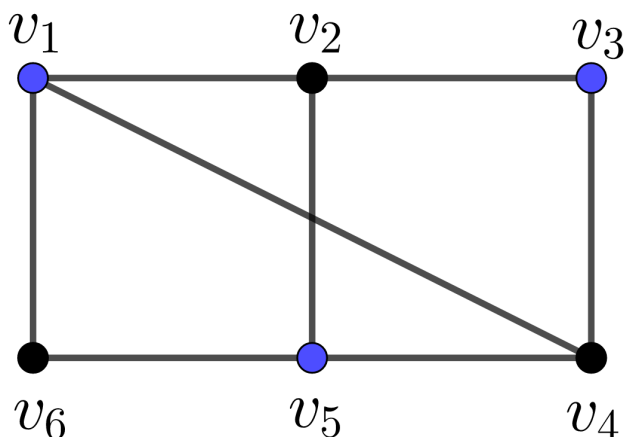


Figura 1.20: Grafo bipartito con partición  $A = \{v_1, v_3, v_5\}$  y  $B = \{v_2, v_4, v_6\}$ .

**Solución:**

Primero determinaremos si  $V(G)$  se puede dividir en dos conjuntos no vacíos  $A$  y  $B$  tales que cumplan las condiciones de la Definición (1.6.2).

Supongamos que el vértice  $v_1 \in A$  y lo pintamos de color azul como se muestra en la Figura (1.20). Los vértices  $v_2, v_4$  y  $v_6$  son adyacentes al vértice  $v_1$  y los pintamos de color negro como se muestra en la Figura (1.20), estos vértices adyacentes al vértice  $v_1$  pertenecen al conjunto  $B$ . Ahora los vértices adyacentes a  $v_2, v_4$  y  $v_6$  se pintan de color azul como observamos en la Figura (1.20). Los vértices de color azul pertenecen al conjunto  $A$  y los vértices de color negro pertenecen a  $B$ .

Así,  $V(G)$  se puede dividir en dos conjuntos no vacíos  $A = \{v_1, v_3, v_5\}$  y  $B = \{v_2, v_4, v_6\}$ . Claramente  $A \cup B = V(G)$  y  $A \cap B \neq \phi$

Luego, como cada arista que pertenece al conjunto de aristas, conecta a dos vértices que no pertenecen al mismo conjunto. En la Figura (1.20) se observa claramente que las aristas no conectan a dos vértices del mismo color.

Así, que el grafo de la Figura (1.20) cumple las condiciones de la Definición (1.6.2) por lo tanto es un grafo bipartito. ■

**Teorema 1.6.4.** *Un grafo  $G$  es bipartito si y sólo si cada una de sus componentes conexas es bipartita.*

**Demostración:**

“ $\implies$ ”

Supongamos que  $G$  es bipartito. Si  $G$  es conexo, entonces  $G$  es la única componente conexa y por lo tanto ya es bipartito.

Si  $G$  es no conexo, entonces  $G$  es la unión de dos o más subgrafos conexos que dos a dos no tienen ningún vértice común. Sean  $G_1, G_2, \dots, G_n$  las componentes conexas de  $G$ . Como  $G$  es bipartito por hipótesis, entonces existen dos conjuntos  $A$  y  $B$  que cumplen las condiciones de la Definición (1.6.2). Sin pérdida de generalidad probaremos que  $G_1$  es bipartito, la prueba es similar para todas las componentes conexas de  $G$ .

Definamos los conjuntos  $A_1 = V(G_1) \cap A$  y  $B_1 = V(G_1) \cap B$ . Vamos a demostrar que estos conjuntos cumplen las condiciones de la Definición (1.6.2) para la componente conexa  $G_1$ .

Primero probaremos que los conjuntos  $A_1$  y  $B_1$  son distintos de vacío. Supongamos que  $A_1 = \phi$ .

$$\begin{aligned} A_1 = \phi &\implies V(G_1) \cap A = \phi \\ &\implies V(G_1) \cap B = V(G_1) \\ &\implies \text{Si } \{u, v\} \in E(G_1) \text{ tal que } u, v \in B \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, por lo tanto  $A_1 \neq \phi$ . De manera análoga se demuestra para  $B_1$ .

Luego,

$$\begin{aligned}
 A_1 \cap B_1 &= (V(G_1) \cap A) \cap (V(G_1) \cap B) \\
 &= V(G_1) \cap (A \cap B) \\
 &= V(G_1) \cap \phi \\
 &= \phi
 \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
 A_1 \cup B_1 &= (V(G_1) \cap A) \cup (V(G_1) \cap B) \\
 &= V(G_1) \cap (A \cup B) \\
 &= V(G_1) \cap V(G) \\
 &= V(G_1)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto los conjuntos  $A_1$  y  $B_1$  cumplen las condiciones 1 y 2 de la Definición (1.6.2).

Sea  $\{u, v\} \in E(G_1)$ , como  $u, v \in V(G_1)$ , entonces  $u, v \in V(G)$ , así  $\{u, v\} \in E(G)$ , pero como  $G$  es bipartito, se sigue que  $u \in A$  y  $v \in B$ .

Así,  $u \in V(G_1) \cap A = A_1$  y  $v \in V(G_1) \cap B = B_1$

Lo que demuestra que estos conjuntos  $A_1$  y  $B_1$  cumplen la tercera condición de la definición de grafo bipartito. Por tanto  $G_1$  es bipartito.

“ $\Leftarrow$ ”

Supongamos que cada una de las componentes conexas de  $G$  son bipartitas. Queremos probar que un grafo  $G$  es bipartito.

Si  $G$  solo tiene una componente conexa bipartita no hay nada que probar, ya que esta

única componente conexa sería el grafo  $G$  y por hipótesis ya sería bipartito. Supongamos que  $G$  tiene  $n$  componentes conexas bipartias y sean estas componentes conexas  $G_1, G_2, \dots, G_n$ .

Sean los subconjuntos  $A_i, B_i$  de  $G_i$  que cumplen con las condiciones de la Definición (1.6.2), para  $1 \leq i \leq n$ .

Luego, definamos los conjuntos  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  y  $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ . Probaremos que estos conjuntos  $A$  y  $B$  satisfacen las condiciones de la Definición (1.6.2).

Como  $A_i$  y  $B_i$  son distintos de vacío, entonces  $A$  y  $B$  son distintos de vacío. Y por como se definieron los conjuntos  $A$  y  $B$  tenemos que  $A \cup B = V(G)$  y  $A \cap B = \phi$ .

Sea  $\{u, v\} \in E(G)$ , entonces  $u \in A_i$  y  $v \in B_i$ , para algún  $i$ . Así,  $u \in A$  y  $v \in B$ .

Como los conjuntos  $A$  y  $B$  satisfacen las condiciones de la Definición (1.6.2). Por lo tanto  $G$  es bipartito. ■

Al analizar la longitud de los circuitos del grafo de la Figura (1.20) se puede ver que todos los circuitos tienen longitud par.

El siguiente teorema es una caracterización de los grafos bipartitos en términos de la longitud de los circuitos.

**Teorema 1.6.5.** *Un grafo  $G$  es bipartito si y sólo si  $G$  no contiene circuitos de longitud impar.*

**Demostración:**

“ $\implies$ ”

Supongamos que  $G$  es un grafo bipartito. Sea  $\{A, B\}$  una partición de los vértices de  $G$  que cumple con las condiciones de la Definición (1.6.2). Sea  $C = \{v_1, v_2, \dots, v_k, v_1\}$  un circuito en  $G$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $v_1 \in A$ . Entonces  $v_2 \in B, v_3 \in A, v_4 \in B$  y así sucesivamente. Es decir,  $v_i \in A$  si y sólo si  $i$  es impar y  $v_j \in B$  si y sólo si  $j$  es par.

Como  $v_k \in B$  (pues  $\{v_1, v_k\} \in E(G)$ ), entonces se sigue que  $k$  es un número par y



por lo tanto la longitud de  $C$  es par.

“ $\Leftarrow$ ”

Ahora supongamos que  $G$  no contiene circuitos de longitud impar. Como sabemos que un grafo es bipartito si y sólo si cada una de sus componentes conexas es bipartita, podemos suponer que  $G$  es conexa. Sea  $u$  un vértice de  $G$  y consideremos la siguiente pareja de conjuntos de  $V(G)$

$$A = \{v \in V(G) : \text{existe un camino de longitud impar entre } u \text{ y } v\} \text{ y } B = V(G) - A.$$

Claramente no puede existir una arista entre dos vértices de  $A$  o dos vértices de  $B$ , pues en caso de existir  $G$  tendría un circuito de longitud impar, lo cual es una contradicción con nuestras hipótesis. Por lo tanto la pareja  $(A, B)$  cumple con las condiciones de la Definición (1.6.2) y  $G$  es un grafo bipartito. ■

Hay dos ideas de conexión en grafos dirigidos, depende si se considera o no la dirección de las aristas.

**Definición 1.6.6.** *Se dice que un grafo dirigido  $G$  es fuertemente conexo si hay un camino de  $u$  a  $v$  y un camino de  $v$  a  $u$  para cualesquiera dos vértices  $u, v$  de  $G$ .*

Para que un grafo dirigido sea fuertemente conexo tiene que haber una secuencia de aristas dirigidas desde cualquier vértice del grafo a cualquier otro vértice. Un grafo dirigido puede no ser fuertemente conexo, pero estar formado de una sola pieza.

**Definición 1.6.7.** *Se dice que un grafo dirigido  $G$  es débilmente conexo si hay un camino entre cada dos vértices del grafo subyacente a  $G$ .*

Es decir, un grafo dirigido es débilmente conexo si y sólo si hay siempre un camino entre dos vértices cuando se ignoran las direcciones de las aristas. Notar que cualquier grafo dirigido fuertemente conexo también es débilmente conexo.

El grafo dirigido  $G$  de la Figura (1.21) es fuertemente conexo porque hay un camino entre cualesquiera dos vértices (por lo que es débilmente conexo). Mientras, el grafo dirigido  $H$  no es fuertemente conexo, ya que no hay algún camino de  $a$  a  $b$ ; no obstante es débilmente conexo, puesto que hay un camino entre cada dos vértices en el grafo subyacente a  $H$ .

Aquellos subgrafos de un grafo dirigido  $G$  que son fuertemente conexos, pero que no están contenidos en algún subgrafo fuertemente conexo mayor, se les llama componentes fuertemente conexas o componentes fuertes de  $G$ .

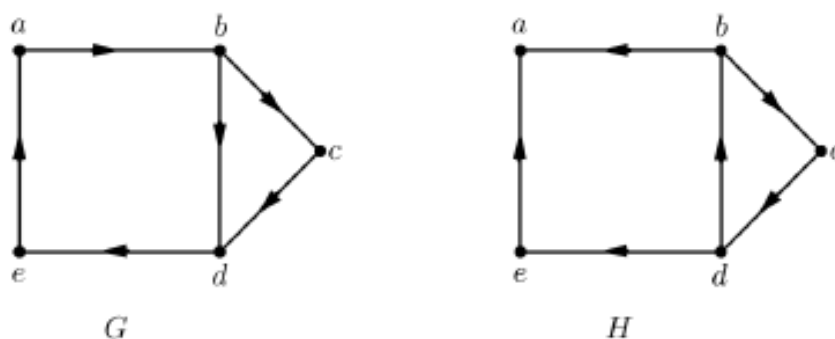


Figura 1.21: El grafo  $G$  es fuertemente conexo, el grafo  $H$  es débilmente conexo.

## 1.7. Fórmula de Euler.

**Definición 1.7.1.** Si un grafo se puede dibujar de modo que no se corten sus aristas excepto en los vértices se dice que es un grafo plano.

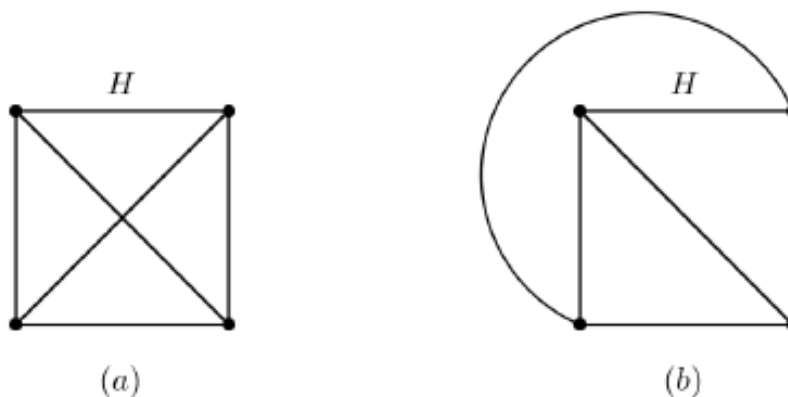


Figura 1.22: a) El grafo  $H$ , con dos cortes de aristas. b) El grafo  $H$ , sin cortes de aristas.

El grafo de la Figura (1.22) es un grafo plano, porque, aunque en la figura de la izquierda hay aristas que se cortan en puntos distintos de los vértices, se puede encontrar un grafo isomorfo a él, el de la derecha, en el que las aristas no se cortan. Cuando esté así dibujado, diremos que está representado apropiadamente.

Una representación plana de un grafo divide el plano en regiones, incluyendo una región no acotada.

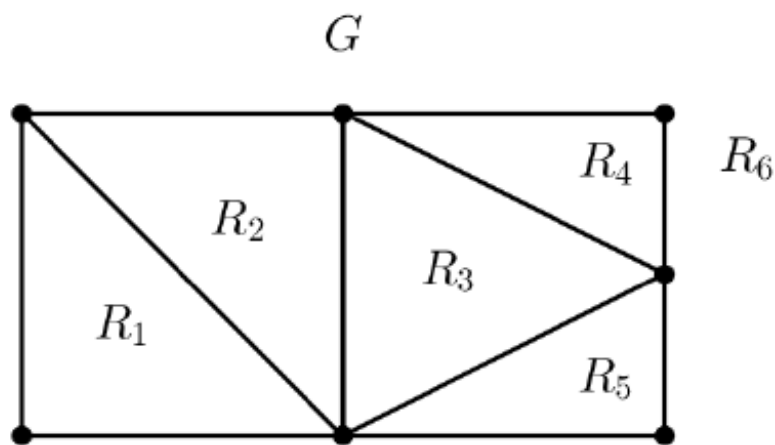


Figura 1.23: Regiones de la representación plana del grafo  $G$ .

Por ejemplo, la representación plana del grafo  $G$  que se muestra en la Figura (1.23) divide el plano en seis regiones, que están etiquetadas. Euler demostró que “todas las representaciones planas de un mismo grafo dividen al plano en igual número de regiones”. Para lo cual halló una relación entre el número de regiones, el número de vértices y el número de aristas de un grafo plano. A continuación se presenta este resultado.

**Teorema 1.7.2 (Fórmula de Euler).** *Sea  $G$  un grafo simple conexo con  $\epsilon(G)$  aristas y  $v(G)$  vértices. Sea  $r(G)$  el número de regiones de una representación plana de  $G$ . Entonces,*

$$r(G) = \epsilon(G) - v(G) + 2 \quad (1.3)$$

Para probar este teorema, debemos considerar una propiedad importante de un grafo acíclico.

**Definición 1.7.3.** *Un grafo acíclico simple conexo es un grafo que no contiene circuitos simples, también conocido como árbol libre.*

**Lema 1.7.4.** *Para un grafo acíclico simple conexo  $G$  con  $v(G)$  vértices,  $\epsilon(G) = v(G) - 1$ .*

**Demostración:**

Probaremos este lema por inducción en el número de vértices. Claramente, cuando  $v(G) = 1$  no puede haber aristas y se ve que el lema se mantiene. Ahora supongamos que el lema se cumple para todos los grafos simples acíclicos con menos de  $v(G)$  vértices.

Sea  $G$  un grafo simple acíclico con  $v(G) \geq 2$  vértices y arista  $\{u, v\} \in E(G)$ . Si quitamos esta arista, el resultado será dos subgrafos separados  $G_1$  y  $G_2$ , porque de lo contrario,  $\{u, v\}$  era parte de un circuito. Ambos subgrafos son acíclicos, cada uno con menos de  $v(G)$  vértices, de modo que  $\epsilon(G_1) = v(G_1) - 1$  y  $\epsilon(G_2) = v(G_2) - 1$ . Debido a que no hemos quitado ningún vértice, nosotros sabemos que:

$$\epsilon(G) = \epsilon(G_1) + \epsilon(G_2) + 1 = v(G_1) - 1 + v(G_2) - 1 + 1 = v(G) - 1$$

■

Usando este lema, ahora podemos completar nuestra prueba de la fórmula de Euler, de nuevo por inducción.

**Demostración:**

Del Teorema (1.7.2). La demostración es por inducción en  $r(G)$ , el número de regiones. Si  $r(G) = 1$ , entonces existe una sola región, lo que significa que no puede haber una región encerrada por las aristas de  $G$ . En otras palabras,  $G$  debe ser acíclico, en cuyo caso  $\epsilon(G) = v(G) - 1$  y por lo tanto  $v(G) - \epsilon(G) + r(G) = v(G) - (v(G) - 1) + 1 = 2$ . Para

$r(G) = 1$  la fórmula se cumple.

Ahora supongamos que la fórmula es verdadera para todos los grafos planos con menos de  $r(G)$  regiones, y sea  $G$  un grafo plano con  $r(G) > 1$  regiones.

Elegimos una arista  $e$  (que no es una arista de corte) y consideramos el subgrafo  $G' = G - e$ . Como  $e$  era parte de un circuito, habremos fusionado dos regiones, reduciendo el número total de regiones por 1. En ese caso, sabemos que la fórmula de Euler es verdadera, y como consecuencia,  $v(G') - \epsilon(G') + (r(G) - 1) = 2$ .

Teniendo en cuenta que  $v(G') = v(G)$  y  $\epsilon(G') = \epsilon(G) - 1$ , ahora obtenemos  $v(G) - (\epsilon(G) - 1) + r(G) - 1 = v(G) - \epsilon(G) + r(G) = 2$ .

$$\text{Así, } r(G) = \epsilon(G) - v(G) + 2 \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 1.7.5.** *Supongamos que un grafo  $G$  simple conexo tiene 20 vértices, cada uno de los cuales tiene grado 3. Veamos en cuántas regiones divide al plano una representación plana de ese grafo.*

**Solución:**

El grafo tiene 20 vértices, cada uno de grado 3, es decir,  $v(G) = 20$ . Como la suma de los grados de los vértices,  $3(v(G)) = 3(20) = 60$ , es igual al doble  $2(\epsilon(G))$  del número de aristas, se tiene que  $2(\epsilon(G)) = 60$ , o que  $\epsilon(G) = 30$ . Por tanto, el número de regiones, según la fórmula de Euler, es  $r(G) = \epsilon(G) - v(G) + 2 = 30 - 20 + 2 = 12$ . ■

La fórmula de Euler es importante ya que nos permite derivar una serie de propiedades por el cual podemos determinar más fácilmente si un grafo dado es plano o no.

La fórmula de Euler se puede utilizar para establecer desigualdades que tiene que cumplir cualquier grafo plano. Una de estas desigualdades es la que se da en el siguiente corolario.

**Corolario 1.7.6.** *Sea  $G$  un grafo plano simple y conexo con  $\epsilon(G)$  aristas y  $v(G) \geq 3$  vértices. Entonces,*

$$\epsilon(G) \leq 3(v(G)) - 6$$

**Demostración:**

Consideremos una región  $f$  en cualquier grafo plano de  $G$ . Para cualquier región interior, sea  $B(f)$  que denota el número de aristas por las cuales  $f$  está encerrada, es decir, la longitud de su frontera. Obviamente,  $B(f) \geq 3$  para cualquier región interior. Sin embargo, con  $v(G) \geq 3$  también tenemos que la región exterior está acotada por al menos 3 aristas.

Por lo tanto, si hay un total de  $r(G)$  regiones, entonces claramente  $\sum B(f) \geq 3(r(G))$ . Por otra parte, no es difícil ver que  $\sum B(f)$  cuenta cada arista en  $G$  una o dos veces, y por lo tanto  $\sum B(f) \leq 2(\epsilon(G))$ , por lo que obtenemos que  $3(r(G)) \leq \sum B(f) \leq 2(\epsilon(G))$ , y por lo tanto  $r(G) \leq \frac{2}{3}(\epsilon(G))$ . Del Teorema (1.7.2) tenemos que  $\epsilon(G) = v(G) + r(G) - 2 \leq v(G) + \frac{2}{3}(\epsilon(G)) - 2$ , de modo que  $\epsilon(G) \leq 3(v(G)) - 6$ . ■

**Corolario 1.7.7.** *Sea  $G$  un grafo plano simple y conexo. Entonces  $G$  tiene un vértice de grado menor o igual que cinco.*

**Demostración:**

Sea  $G$  un grafo plano con  $v(G)$  vértices y  $\epsilon(G)$  aristas. Procederemos por contradicción suponiendo que para todo  $v \in V(G)$ , y  $\sigma(v) \geq 6$ . Por el Corolario (1.7.6) sabemos que:

$$\epsilon(G) \leq 3(v(G)) - 6$$

. Por otra parte, gracias al Teorema (1.2.4) de los apretones de mano sabemos que:

$$2(\epsilon(G)) = \sum_{v \in V} \sigma(v) \geq 6(v(G))$$

Por lo tanto  $2(\epsilon(G)) \geq 6(v(G))$ . Es decir, que  $\epsilon(G) \geq 3(v(G))$ , así, por esta desigualdad y por la desigualdad del Corolario (1.7.6) obtenemos  $3(v(G)) \leq \epsilon(G) \leq 3(v(G)) - 6$ , lo cual es una contradicción. ■

**Corolario 1.7.8.** *Sea  $G$  un grafo plano simple y conexo con  $\epsilon(G)$  aristas y  $v(G) \geq 3$  vértices y que no tiene circuitos de longitud 3. Entonces,*

$$\epsilon(G) \leq 2(v(G)) - 4$$

**Demostración:**

Sea  $G$  un grafo conexo plano con  $r(G)$  regiones y denotemos por  $\mathcal{R}$  al conjunto de todas las regiones de  $G$ . Para cada región  $R$  de  $G$  contamos el número de aristas que hay en la frontera de  $R$ . Siguiendo la notación utilizada en el Corolario (1.7.6) sea  $N = \sum B(R)$ .

Como  $G$  no tiene circuitos de longitud tres, entonces cada región está acotada por al menos 4 aristas, entonces se sigue  $N \geq 4(r(G))$ . Por otra parte, como cada arista de  $G$  está en a lo más dos regiones tenemos  $N \leq 2(\epsilon(G))$ . Entonces podemos establecer la siguiente cadena de desigualdades:

$$4(r(G)) \leq N \leq 2(\epsilon(G)).$$

De donde se deduce que  $4(r(G)) \leq 2(\epsilon(G))$ . Por lo tanto  $r(G) \leq \frac{1}{2}(\epsilon(G))$ , es decir, que  $-r(G) \geq -\frac{1}{2}(\epsilon(G))$ .

Despejando  $v(G)$  del Teorema (1.7.2) de la fórmula de Euler y utilizando la desigualdad anterior tenemos:

$$v(G) = \epsilon(G) - r(G) + 2 \geq \epsilon(G) - \frac{\epsilon(G)}{2} + 2 = \frac{\epsilon(G)}{2} + 2$$

Así,  $v(G) \geq \frac{\epsilon(G)}{2} + 2$ . Despejando  $\epsilon(G)$  tenemos que  $\epsilon(G) \leq 2(v(G)) - 4$  ■

A continuación demostraremos, usando el Corolario (1.7.6) y (1.7.8), dos resultados que serán de utilidad más adelante. El grafo  $K_5$  mostrado en la Figura (1.24) literal a) no es plano, así como el grafo  $K_{3,3}$  presentado en la Figura (1.24) literal b).

**Ejemplo 1.7.9.** *El grafo  $K_5$  no es plano.*

**Demostración:**

El grafo  $K_5$  tiene 5 vértices y 10 aristas. Si  $K_5$  fuera plano, por el Corolario (1.7.6) se tiene que cumplir:

$$10 \leq 3(5) - 6 = 9$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $K_5$  no es plano. ■

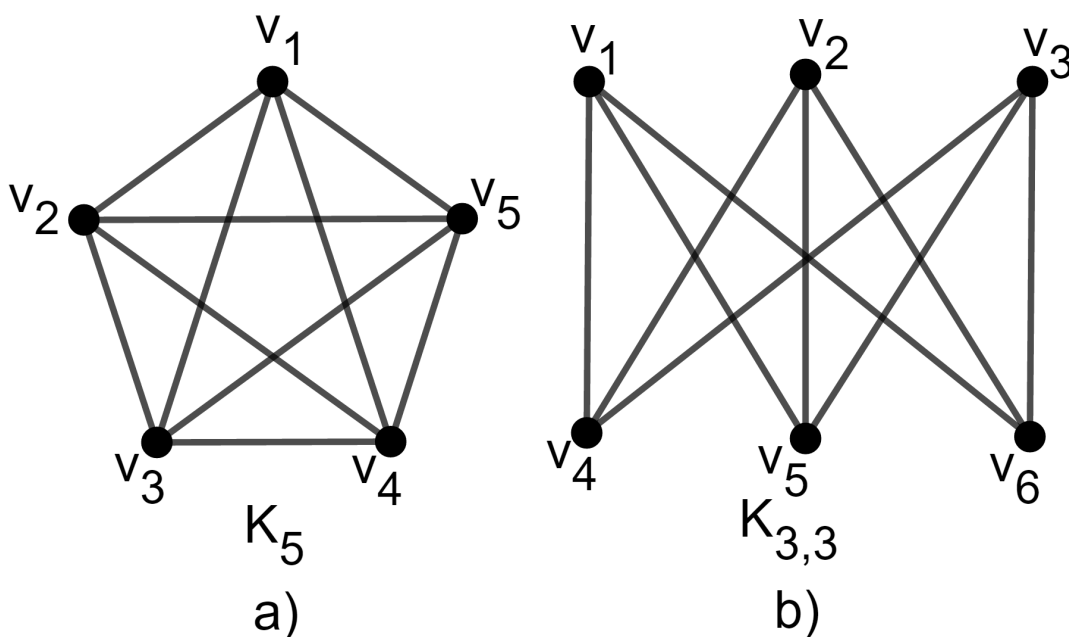


Figura 1.24: a) Grafo  $K_5$ . b) Grafo  $K_{3,3}$ .



**Ejemplo 1.7.10.** *El grafo  $K_{3,3}$  no es plano.*

**Demostración:**

Como  $K_{3,3}$  es un grafo bipartito, ver Definición (1.6.2), no tiene circuitos de longitud impar esto por Teorema (1.6.5) y en particular no tiene circuitos de longitud 3. Por otra parte,  $K_{3,3}$  tiene 6 vértices, 9 aristas. Utilizando el Corolario (1.7.8) tenemos que:

$$9 \leq 2(6) - 4 = 8$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $K_{3,3}$  no es plano. ■

## 1.8. Teorema de Kuratowski.

Si un grafo es plano, también lo será cualquier grafo que se obtenga de él, eliminando una arista  $\{u, v\}$  y añadiendo un vértice  $w$  junto con las aristas  $\{u, w\}$  y  $\{w, v\}$ . Se dice que esta operación es una subdivisión elemental. También que los grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  son homeomorfos si se pueden obtener a partir de un mismo grafo por medio de una secuencia de subdivisiones elementales.

Un subgrafo de Kuratowski de  $G$  es un subgrafo de  $G$  que es una subdivisión de  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .

Un grafo minimalmente no planar es un grafo no planar tal que todo subgrafo propio es planar.

**Definición 1.8.1.** *Un conjunto separador o corte por vértices de un grafo  $G$  es un conjunto  $S$  tal que  $G - S$  es desconexo.*

**Definición 1.8.2.** *Un grafo  $G$  es 3-conexo si tiene mas de tres vértices y ademas si no existe un conjunto separador de vértices de tamaño  $3 - 1 = 2$ . En otras palabras si no existen 2*

vértices en el,  $v_1, v_2$ , tales que el grafo  $G^{v_1, v_2}$  obtenido quitando los vértices  $v_1$  y  $v_2$  y todas las aristas incidentes en estos vértices es no conexa. Es decir, necesitamos al menos 3 vértices para desconectar a  $G$ .

**Teorema 1.8.3 (Teorema de Kuratowski).** *Un grafo es plano si y sólo si no contiene ningún subgrafo homeomorfo a  $K_5$  o a  $K_{3,3}$ .*

**Demostración:**

“ $\implies$ ”

Todo subgrafo de un grafo plano es plano. La subdivisión de aristas no altera la condición de ser plano. Los grafos  $K_5$  y  $K_{3,3}$  son no planos, este resultado ya se demostró en los Ejemplos (1.7.9) y (1.7.10), luego  $G$  no tiene subdivisiones de  $K_5$  ni de  $K_{3,3}$ .

“ $\impliedby$ ”

Si  $G$  sin subgrafo de Kuratowski, fuera no planar, consideremos  $H$  un subgrafo de  $G$  mínimamente no planar ( $H$  es no planar, pero todo subgrafo obtenido por borrado de cualquier arista, es planar). Como la operación de borrar aristas no genera subgrafos de Kuratowski,  $H$  tampoco tiene subgrafos de Kuratowski. Por lo tanto  $H$  es 3-conexo y todo grafo 3-conexo, sin subgrafos de Kuratowski, es planar, lo cual es una contradicción. ■

## Capítulo 2

# Introducción a la Geometría Computacional.

La geometría computacional surgió a finales de los 70 del área de diseño y análisis de algoritmos. Reúne problemas matemáticos y de ciencias de la computación.

El tema de la geometría computacional es de data reciente. Los orígenes se encuentran en la tesis doctoral de M. I. Shamos (1975). Desde entonces el campo se ha expandido considerablemente con una cantidad apreciable de resultados. La investigación en esta área ha encontrado muchas aplicaciones en la vida real: robótica, reconocimiento de voz y de patrones, diseño gráfico, sistemas de información geográfica, etc.

### 2.1. ¿Qué es la Geometría Computacional?

La geometría computacional es una rama de las ciencias computacionales que se encarga del diseño y análisis sistemático de algoritmos y estructuras de datos necesarios para la solución eficiente de problemas que implican como entrada y salida objetos geométricos. Sus orígenes nos pueden remontar en siglos (hay quien dice que el primer algoritmo de geometría computacional nace cuando una serie de pasos correctos no ambiguos y con un final resuelven un problema geométrico, el precursor: Euclides), pero a principios de 1970, Michael Shamos comienza un estudio sistematizado de problemas con la idea de crear una nueva disciplina de las ciencias de computación, a la cual llamó Geometría Computacional.

Es una disciplina constructiva, de carácter abstracto, que utiliza técnicas de la geometría clásica, la topología, la teoría de grafos, la teoría de conjuntos y el álgebra lineal.

Partiendo de la abstracción de problemas de otras áreas, se trata de desarrollar herra-

mientas y técnicas para resolver problemas de naturaleza, principalmente, geométrica, con especial énfasis en el diseño eficiente de algoritmos y estructura de datos.

El principal impulso para el desarrollo de la geometría computacional se lo dio el avance de diseño asistido por computadora y la fabricación asistida por computadora (CAD/CAM, estas siglas vienen de una abreviación en inglés Computer Aided Design y Computer Aided Manufacturing), que hacen uso intensivo de las técnicas de esta disciplina.

En esta investigación vamos a introducirnos especialmente en una aplicación de la geometría computacional, los diagramas de Voronoi.

En las secciones siguientes, a menos que se diga lo contrario, los problemas geométricos se refieren al plano de dos dimensiones. La clase de objetos estudiados, serán los puntos del plano, definidos mediante un par de coordenadas cartesianas, las rectas, los triángulos, polígonos y círculos.

En este capítulo estudiaremos algunos algoritmos de geometría computacional también llamada geometría algorítmica. Todo algoritmo debe obedecer a la estructura básica de un sistema, es decir: entrada, proceso y salida. A continuación se define de forma breve esta estructura básica:

- **Entrada:** Es la introducción de datos para ser transformados por ejemplo podemos introducir puntos, segmentos de recta, vértices de polígonos, etc.

- **Proceso:** Es el conjunto de operaciones o pasos a realizar para dar solución al problema.

- **Salida:** Son los resultados obtenidos a través del proceso, por ejemplo si un par de segmentos de rectas se intersectan, al finalizar el algoritmo nos dará como resultado el número de intersecciones o el nuevo objeto geométrico obtenido al hacer las intersecciones de los segmentos de recta a través del proceso.

## 2.2. Área de un Triángulo.

Un primer problema bastante simple es el siguiente. Consideremos una recta  $\ell$  en el plano y un punto  $p$  fuera de ella. El problema es responder a la pregunta: ¿El punto  $p$  se encuentra a la derecha o a la izquierda de  $\ell$ ? ver la Figura (2.1).

Supongamos que  $p$  tiene coordenadas  $p(x_0, y_0)$  y la recta viene dada por la ecuación  $y = ax + b$ .

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la recta no es horizontal ni vertical, esto es,  $a \neq 0, \infty$ .

Una forma de resolver este problema es la siguiente:

1. Trazamos una recta horizontal pasando por el punto  $p$ .
2. Hallamos el punto  $q$  de intersección de  $\ell$  con esta recta horizontal, (Esto se hace sustituyendo  $y = y_0$  en la ecuación de la recta y luego se despeja la coordenada  $x$ ). Sea  $q = (x_1, y_1)$  el punto en cuestión. (Nótese que  $y_1 = y_0$ ).
3. Comparamos la coordenada  $x = x_0$  del punto  $p$  con la coordenada  $x = x_1$  del punto  $q$ .

Entonces:

- Si  $x_0 = x_1$ ,  $p$  está en  $\ell$ .
- Si  $x_0 > x_1$ ,  $p$  está a la derecha de  $\ell$ .
- Si  $x_0 < x_1$ ,  $p$  está a la izquierda de  $\ell$ .

De esta manera, el problema queda resuelto.

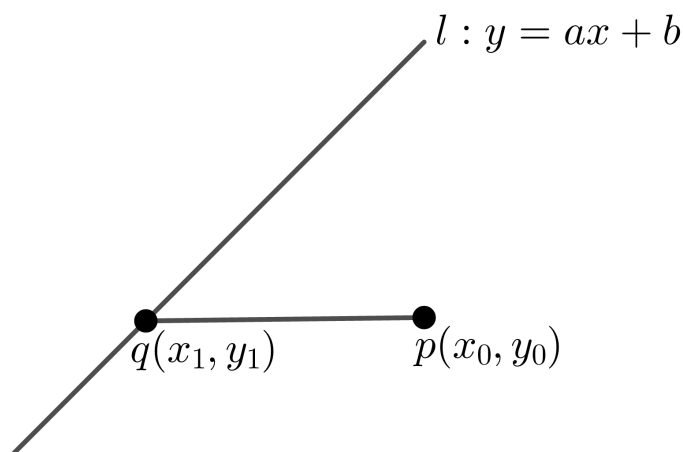


Figura 2.1: El punto  $p$  se halla a la derecha de  $\ell$ .

El lector podría darse por satisfecho con esta manera de trabajar. Sin embargo, desde el punto de vista computacional, este algoritmo presenta algunas debilidades. En primer lugar, hay que hacer consideraciones sobre funciones. En segundo lugar podríamos dividir entre números muy pequeños, lo cual es un serio inconveniente a la hora de redondear. Pero alguien un poco más curioso, podría preguntarse: ¿Existe otra forma de resolver el mismo problema?.

La respuesta es positiva. Afortunadamente, existe una fórmula para calcular el área de un triángulo con vértices  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$  y  $c = (c_1, c_2)$  dada por:

$$\Delta_{abc} = \frac{1}{2} [a_1 (b_2 - c_2) + b_1 (c_2 - a_2) + c_1 (a_2 - b_2)] \quad (2.1)$$

Dicha fórmula se obtiene al aplicar el producto vectorial a los vectores:  $\vec{A} = b - a = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$  y  $\vec{B} = c - a = (c_1 - a_1, c_2 - a_2)$ . Denotaremos con una flecha sobre las letras mayúsculas a los vectores y a los puntos los denotaremos por letras mayúsculas o minúsculas.

Recordemos que el producto vectorial de dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es otro vector  $\vec{A} \times \vec{B}$  cuyo módulo es igual al área del paralelogramo de lados  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .

Siendo el área positiva si el ángulo entre ellos está dado en sentido contrario a las agujas del reloj, o negativa si el ángulo está en el sentido de las agujas del reloj.

El área asignada es la mitad del determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Vemos entonces, en la Figura (2.2), que si el punto  $b$  se encuentra a la derecha de la recta que pasa por  $a$  y  $c$ , entonces el área es positiva. Si por el contrario, el punto  $b$  está a la izquierda de la recta entonces el área será negativa.

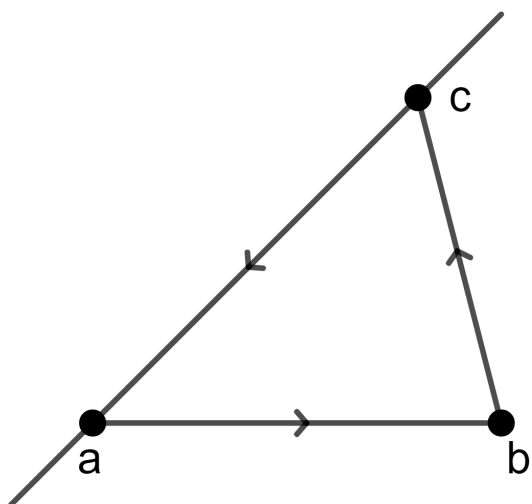


Figura 2.2: Triángulo formado por tres puntos.

Hemos obtenido otro método para resolver el problema: Para determinar si un punto  $b$  está a la derecha o a la izquierda de una línea recta, basta con tomar dos puntos de la recta  $a$  y  $c$ , y entonces calculamos el signo del área del triángulo  $\Delta_{abc}$ .

**Ejemplo 2.2.1.** Sean los puntos  $a = (-2, 4)$ ,  $b = (8, -1)$  y  $c = (5, 8)$ . Determine si el punto  $b$  se encuentra a la derecha o a la izquierda del segmento  $\overline{ac}$ .

**Solución:**

Para determinar si el punto  $b$  se encuentra a la derecha o a la izquierda del segmento  $\overline{ac}$  necesitamos primero calcular el área del triángulo dado los vértices  $a = (-2, 4)$ ,  $b = (8, -1)$  y  $c = (5, 8)$  para ello utilizaremos la Ecuación (2.1) por lo que tenemos:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{abc} &= \frac{1}{2} [-2(-1 - 8) + 8(8 - 4) + 5(4 - (-1))] \\
 &= \frac{1}{2} [-2(-9) + 8(4) + 5(5)] \\
 &= \frac{1}{2} [18 + 32 + 25] \\
 &= \frac{1}{2} [75] \\
 &= \frac{75}{2} \\
 &= 37,5u^2
 \end{aligned}$$

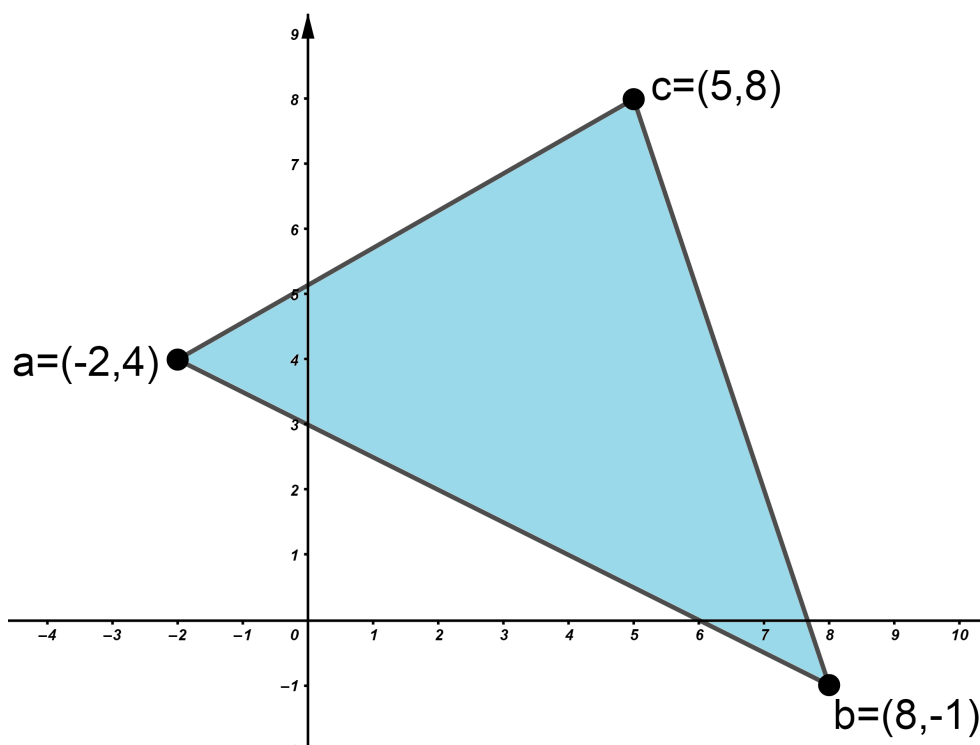


Figura 2.3: Área positiva de un triángulo.



Podemos observar que el punto  $b = (8, -1)$  está a la derecha del segmento  $\overline{ac}$  por lo que el área del triángulo es positiva, ya que el problema se resolvió en sentido contrario a las manecillas del reloj. ■

En el ejemplo que acabamos de ver podemos observar en la Figura (2.3) que si tomamos las mismas coordenadas pero al punto  $b$  le llamamos  $a$  y al punto  $a$  le llamamos  $b$  de tal manera que  $b$  estuviera a la izquierda de segmento  $\overline{ac}$  y resolviéramos el mismo problema pero ahora en el sentido de las manecillas del reloj, el resultado será el mismo pero con signo negativo.

**Ejemplo 2.2.2.** *Dados tres puntos en el plano  $a, b$  y  $c$ . Verificar si los tres puntos dados en el plano forman un triángulo o son colineales.*

**Solución:**

Hay muchas formas de resolver este ejemplo. A continuación lo resolveremos haciendo uso del producto cruz por lo que tenemos:

1.  $\vec{V} = b - a$

2.  $\vec{W} = c - a$

3.  $m = |\vec{V} \times \vec{W}| = \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$

4. Si  $m = 0$ , entonces  $a, b$  y  $c$  son colineales.

5. Si  $m \neq 0$ , entonces  $a, b$  y  $c$  forman un triángulo. Como se observa en la Figura (2.4). ■

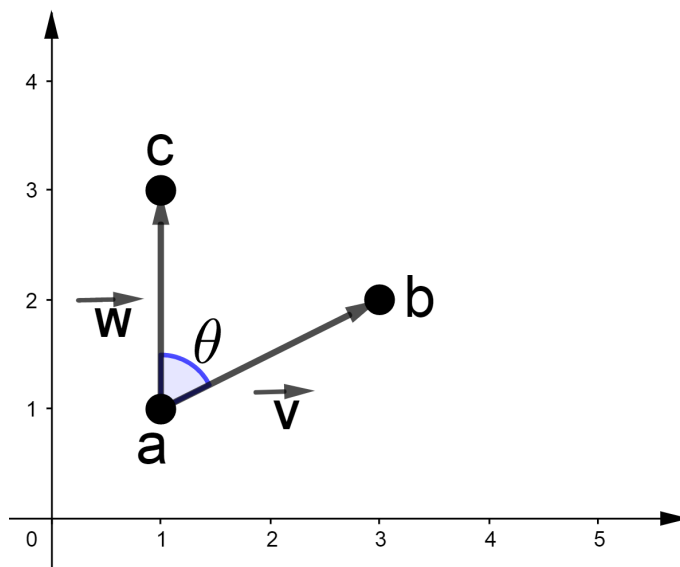


Figura 2.4: Solución por producto cruz.

## 2.3. La Envolverte Convexa.

Veamos ahora un conjunto geométrico de gran importancia dentro de la geometría computacional, como es la envolvente convexa o cierre convexo de un conjunto de puntos (CONVEX HULL).

**Definición 2.3.1 (Convexo).** *Un conjunto de puntos del plano es convexo si el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera del conjunto está totalmente contenido en el conjunto. Ver Figura (2.5).*

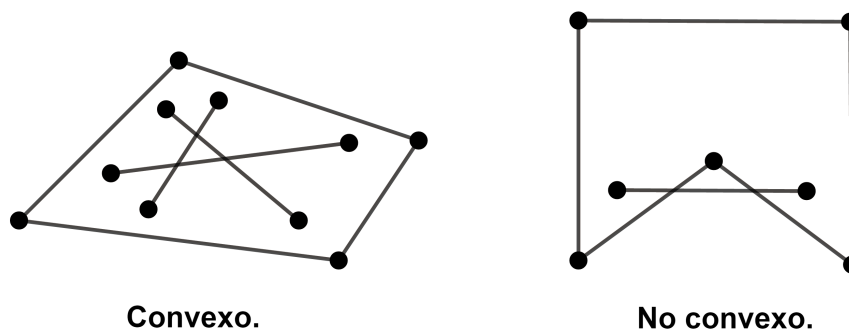


Figura 2.5: Conjunto convexo y no convexo.

**Definición 2.3.2 (La envolvente convexa).** Se llama *envolvente convexa* de un conjunto  $S$  formado por  $n$  puntos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  a la frontera del conjunto convexo de menor área que contiene a  $S$  (a éste se le denomina *cierre convexo* de  $S$ ). Ver Figura (2.6).

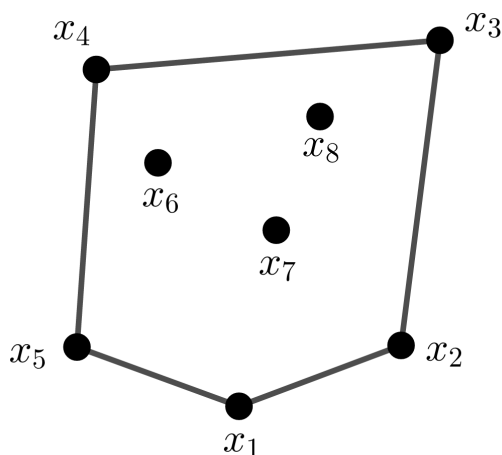


Figura 2.6: Las aristas  $\{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_1\}$  forman el cierre convexo de  $S$ .

Si el conjunto  $S$  tiene  $n$  puntos, basta con a lo sumo  $n$  intersecciones de semiplanos para obtener el mismo conjunto. Estos semiplanos son determinados por parejas de puntos de  $S$  tales que el resto de los puntos están contenidos en el semiplano. Es decir, dado un par de puntos del conjunto trazamos la recta que los une, verificamos si todos los demás puntos están del mismo lado de la recta. Si es así, entonces el segmento de recta que une a esos dos puntos, forma parte de la envolvente convexa, y si no, no.

En la Figura (2.7) del literal *a*) tenemos un conjunto de puntos, donde el segmento de recta que une los puntos  $k$  y  $h$  que se observan de color azul, no forman parte de la envolvente convexa, ya que no todos los puntos del conjunto están del mismo lado de la recta. Lo mismo sucede con la Figura (2.7) del literal *b*) porque el punto  $g$  no está contenido en el semiplano determinado por la pareja de puntos  $f$  y  $a$ . Pero los puntos  $f$  y  $a$  si forman parte de la envolvente convexa.

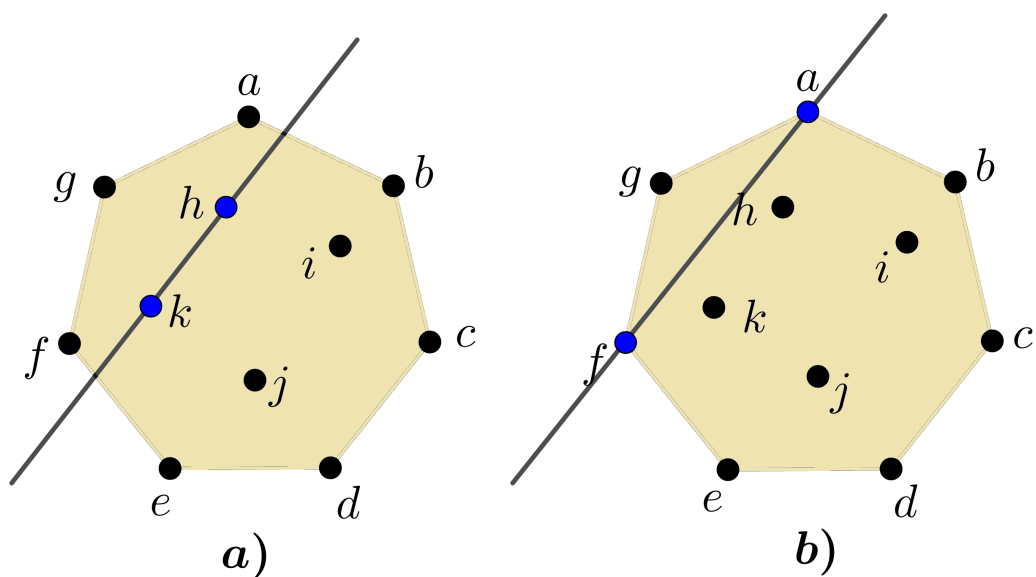


Figura 2.7: Segmentos de rectas que no forman parte de la envolvente convexa.

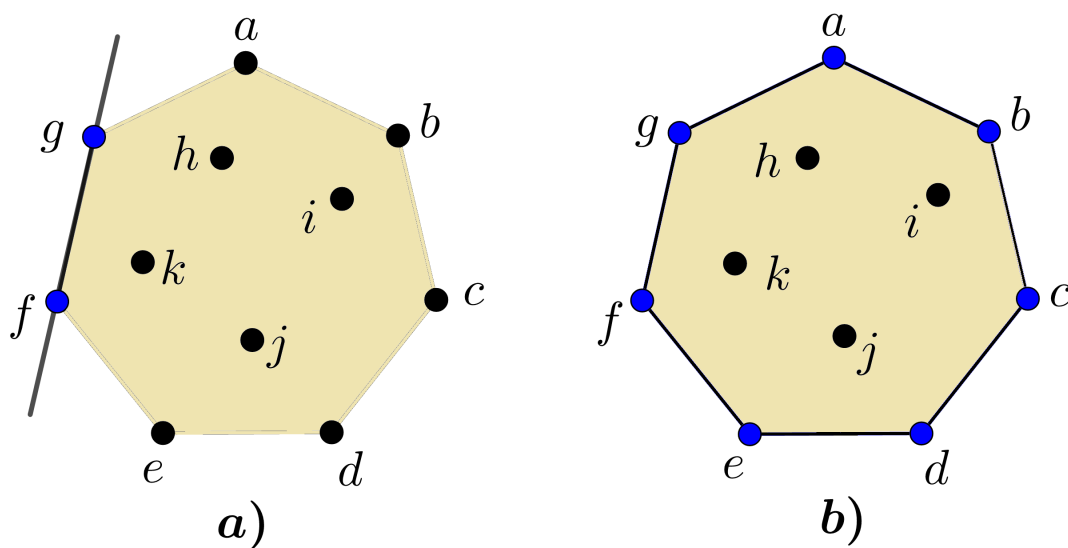


Figura 2.8: Segmentos de rectas que forman parte de la envolvente convexa.

En la Figura (2.8) del literal *a*) podemos observar que el segmento de recta que une los puntos *f* y *g* forma parte de la envolvente convexa, ya que todos los puntos del conjunto están del mismo lado de la recta, y así, sucesivamente se verifica para cada pareja de puntos hasta obtener la envolvente convexa como se muestra en la Figura (2.8) del literal *b*).

De manera intuitiva podemos observar en la Figura (2.9) que los puntos *a*, *c* y *d* que

están sobre las líneas horizontales y los puntos  $b$  y  $e$  que están sobre las líneas verticales formarán parte de la envolvente convexa buscada, por lo que son puntos ideales para comenzar la búsqueda de la envolvente convexa.

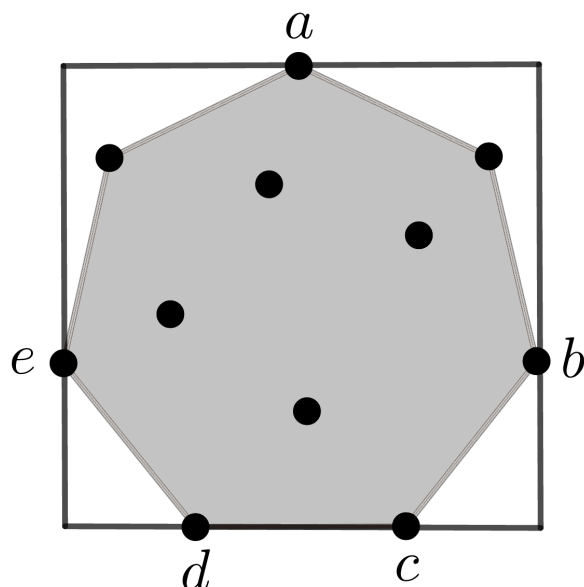


Figura 2.9: Los puntos  $a, b, c, d$  y  $e$  forman parte de la envolvente convexa.

En consecuencia, la envolvente convexa de  $n$  puntos es un polígono convexo cuyos vértices son puntos del conjunto.

La envolvente de una nube de puntos divide a éstos en dos clases: los interiores y los exteriores. Los puntos exteriores son los vértices de la envolvente convexa y a los puntos restantes son los puntos interiores.

En lo que sigue supondremos que los puntos de  $M$  están en posición genérica (es decir, que no hay tres de ellos alineados). Esta hipótesis no supone modificación en la complejidad de los algoritmos. Para calcular los puntos interiores de  $M$  podemos emplear la siguiente definición que los caracteriza.

**Definición 2.3.3.** *Si  $M$  tiene al menos tres elementos, un punto  $p_m$  es interior si y sólo si existen tres puntos  $p_1, p_2, p_3 \in M$  tales que  $p_m$  depende convexamente de  $\{p_1, p_2, p_3\}$ . Es*

decir, un punto de  $M$  es interior; si es interior a un triángulo determinado por tres puntos de  $M$ . Empleando esta definición podemos obtener el siguiente algoritmo para calcular los puntos interiores de  $M$ .

**Algoritmo Puntos Interiores ( $M$ ).**

- **Entrada:** El conjunto  $M = \{p_1, \dots, p_n\}$ .

Para cada terna  $\{A, B, C\}$  de puntos de  $M$ .

Para cada uno de los restantes puntos  $p_m \in M - \{A, B, C\}$ .

Averiguar si el punto  $p_m$  es interior al triángulo  $ABC$ . En caso afirmativo incluirlo en la lista de puntos interiores.

- **Salida:** La lista de puntos interiores de  $M$ .

La orientación de un triángulo es la misma que la orientación de sus tres vértices, así que se puede establecer un algoritmo sencillo para decidir si un punto está o no en el interior de un triángulo.

Considerando el triángulo  $ABC$  y el punto  $P$ , el algoritmo queda como se muestra a continuación:

1. Calcular la orientación del triángulo  $ABC$ . El cálculo de la orientación de un triángulo se puede realizar según la siguiente fórmula:

$$(A_x - C_x)(B_y - C_y) - (A_y - C_y)(B_x - C_x)$$

Dicha fórmula se obtiene al aplicar el producto vectorial a los vectores:  $\overrightarrow{CA} = \vec{A} - \vec{C} = (A_x - C_x, A_y - C_y)$  y  $\overrightarrow{CB} = \vec{B} - \vec{C} = (B_x - C_x, B_y - C_y)$ . Si el resultado es mayor o igual que 0, la orientación del triángulo será positiva. En caso contrario, la orientación del triángulo será negativa.

2. Calcular la orientación de los triángulos que forma el punto  $P$  con los vértices del triángulo  $ABC$ . Se calcula la orientación de los triángulos  $ABP, BCP, CAP$ , con el método explicado en el punto 1.
3. En el caso de que la orientación del triángulo  $ABC$  sea positiva y si las orientaciones de los tres triángulos que tienen como vértice el punto  $P$ , calculadas en el punto 2, son positivas el punto está dentro del triángulo. Ver Figura (2.10). En caso contrario el punto está situado fuera del triángulo.
4. En el caso de que la orientación del triángulo  $ABC$  sea negativa y si las orientaciones de los tres triángulos que tienen como vértice el punto  $P$  son negativas, el punto está dentro del triángulo. Ver Figura (2.10). En caso contrario el punto está situado fuera del triángulo.

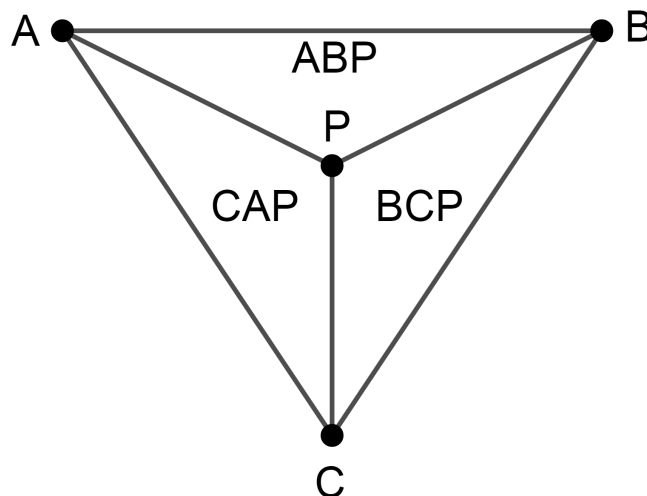


Figura 2.10: Punto interior a un triángulo.

Si en lugar de anotar los puntos interiores en una lista los vamos eliminando del conjunto  $M$ , lo que obtendremos al final será el conjunto de los vértices de la envolvente convexa. Obsérvese, que disponer de los vértices de la envolvente convexa no significa haber determinado ésta. Para determinarla es preciso conocer sus aristas, es decir los pares de vértices adyacentes.

Hay varios algoritmos para calcular el cierre convexo de un conjunto de puntos en el plano, dos de ellos son el algoritmo de Graham y algoritmo de Jarvis.

El siguiente algoritmo de cálculo de la envolvente convexa es debido a Jarvis.

**Algoritmo de Jarvis.**

- **Entrada:** El conjunto  $M$  con  $n$  puntos.

**Paso 1:** Hallar el punto  $p_m$  de menor ordenada de  $M$ , siendo  $p_m = p_1$ , e incluirlo en una lista  $T$ .

**Paso 2:** Hallar el punto  $p_2$  de  $M - p_1$  tal que el ángulo  $\alpha$  entre la semirecta horizontal con origen en  $p_1$  hacia  $+\infty$  y el segmento  $\overline{p_1 p_2}$  medido en sentido positivo sea mínimo e incluirlo en  $T$ .

**Paso 3:** Hallar el punto  $p_3$  de  $M - \{p_1, p_2\}$  tal que el ángulo formado entre la recta que determina la arista  $\{p_1 p_2\}$  y el segmento  $\overline{p_2 p_3}$  medido en sentido positivo sea mínimo e incluirlo en  $T$ .

**Paso 4:** Si el punto obtenido es  $p_1$  finaliza.

- **Salida:** La lista  $T$ .

En la Figura (2.11) podemos observar una idea gráfica del algoritmo de Jarvis.

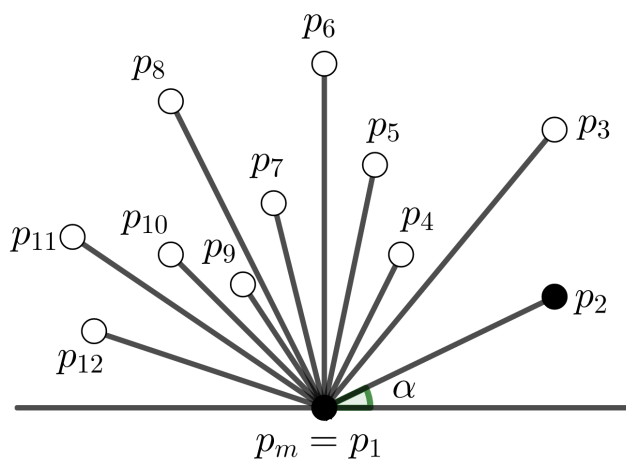


Figura 2.11: Algoritmo de Jarvis.



La idea intuitiva del algoritmo consiste en simular el siguiente proceso:

1. Deslizar una recta horizontal desde  $-\infty$  hacia arriba hasta que toque al primer punto de menor ordenada que le hemos llamado  $p_1$  de  $M$ .
2. Girar la recta apoyándose en  $p_1$  en sentido positivo hasta que toque a un segundo punto  $p_2$ , tal que el ángulo formado entre la semirecta horizontal con origen en  $p_1$  hacia  $+\infty$  y el segmento  $\overline{p_1 p_2}$  medido en sentido positivo sea mínimo e incluirlo en una lista.
3. Girar la recta apoyándose en  $p_2$  hasta encontrar un nuevo punto.
4. Si el nuevo punto encontrado no es un punto que hemos encontrado previamente, continuamos realizando este mismo proceso. En caso contrario finaliza.

Esta idea intuitiva la podemos observar en la Figura (2.12).

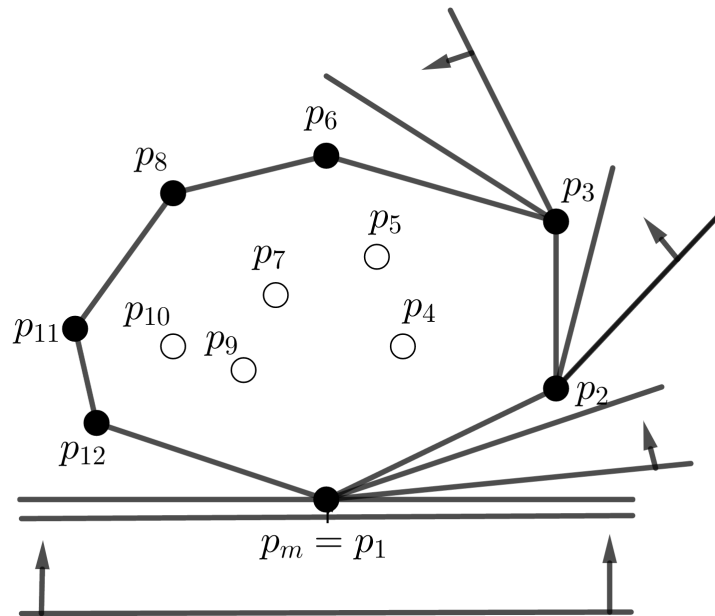


Figura 2.12: Idea del algoritmo de Jarvis.

En consecuencia, desde cada vértices de la envolvente convexa, para hallar el siguiente debemos realizar un proceso lineal ( $O(n)$ ). La complejidad del algoritmo es por tanto  $(n \times k)$ , siendo  $k$  el número de vértices que tenga la envolvente convexa.

Si el número de puntos de la envolvente convexa es grande (muy cerca a  $n$ ), entonces el algoritmo es muy lento. En el peor de los casos, cuando  $k = n$ , entonces el tiempo de ejecución es de orden  $O(n^2)$ . Este tipo de algoritmo, cuya velocidad depende del resultado buscado, se llama de salida sensitiva.

Ahora veamos un algoritmo óptimo debido a Graham cuya complejidad es  $O(n \log n)$ .

***Algoritmo de Graham.***

- **Entrada:** La lista de los puntos  $M = \{p_1, \dots, p_n\}$ .
  1. Hallar el punto de menor ordenada  $p_1$  de  $M$ .
  2. Ordenar angularmente respecto de  $p_1$  los restantes  $n - 1$  puntos.
  3. Si  $M = \{p_1, \dots, p_n\}$ , es la lista ya ordenada en el paso 2:
    - a) Asignar a la variable  $i$  el valor de 1, ( $i = 1$ ).
    - b) Si  $i = n - 2$ , finaliza.
    - c) Si  $DET(p_i, p_{i+1}, p_{i+2}) < 0$  :
      - 1) Eliminar  $p_{i+1}$  de la lista  $M$ .
      - 2) Si  $i > 1$  asignar  $i = i - 1$ .
      - 3) Volver a b).
    - d) Si  $DET(p_i, p_{i+1}, p_{i+2}) > 0$  :
      - 1) Asignar  $i = i + 1$ .
      - 2) Volver a b).
- **Salida:** La lista  $M$  obtenida al finalizar el proceso pero ahora la lista  $M$  contiene menos puntos.

$DET(A, B, C)$  es el valor del determinante cuya primera fila son tres unos, la segunda las abscisas de  $A, B, C$  y la tercera las ordenadas de  $A, B, C$ .

La idea de este algoritmo, como el algoritmo de Jarvis, es ir eliminando los puntos interiores de  $M$ .

El paso 1 puede realizarse en tiempo lineal ( $O(n)$ ). El segundo paso, en esencia, consiste en ordenar una lista de números y, por tanto, puede hacerse en tiempo  $O(n \log n)$ . El tercer paso, conocido como el scan de Graham, requiere tiempo lineal ya que, aunque hay avances y retrocesos en la lista, cada vez que hay un retroceso se elimina definitivamente un punto. En consecuencia el número de retrocesos no puede ser mayor de  $n - 3$ .

La idea intuitiva del algoritmo consiste en simular el siguiente proceso:

1. Sea  $M = \{p_1, \dots, p_n\}$ . Hallar el punto de menor ordenada de  $M$ .
2. Ordenar los demás puntos angularmente con respecto a dicho punto de  $M$ .
3. A los tres primeros puntos les ponemos las etiquetas  $A, B, C$ . Como se observa en la Figura (2.13) literal a).
4. Si el ángulo  $ABC$  es positivo:
  - a) A= Siguiente.
  - b) B= Siguiente.
  - c) C= Siguiente.
 Ver Figura (2.13) literal b).
5. Si el ángulo  $ABC$  es negativo, borramos a  $B$  de  $M$ . Como podemos ver en la Figura (2.14) literal a) y b):
  - a) B= A.
  - b) A= Anterior (A).
  - c) C= C.

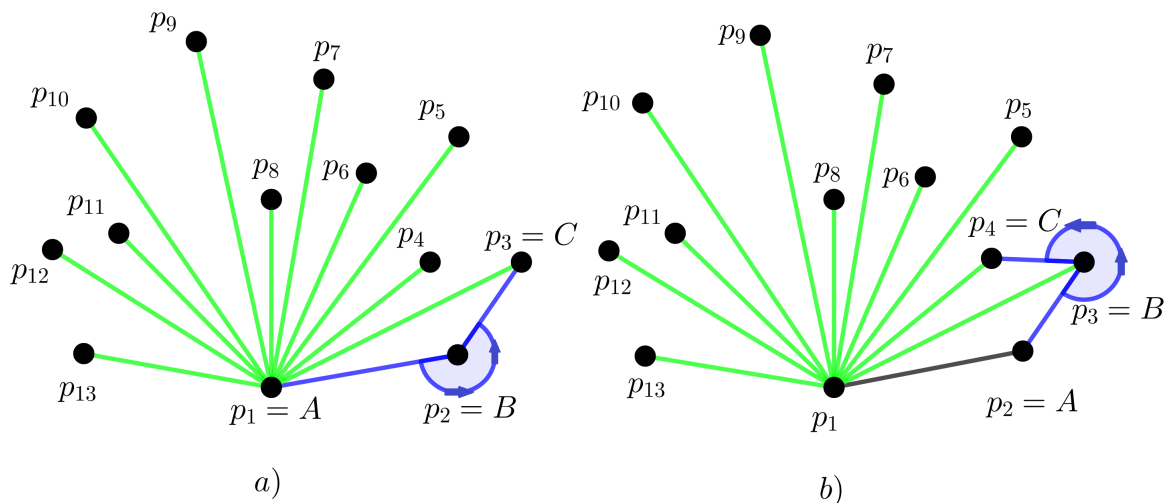


Figura 2.13: Idea del algoritmo de Graham.

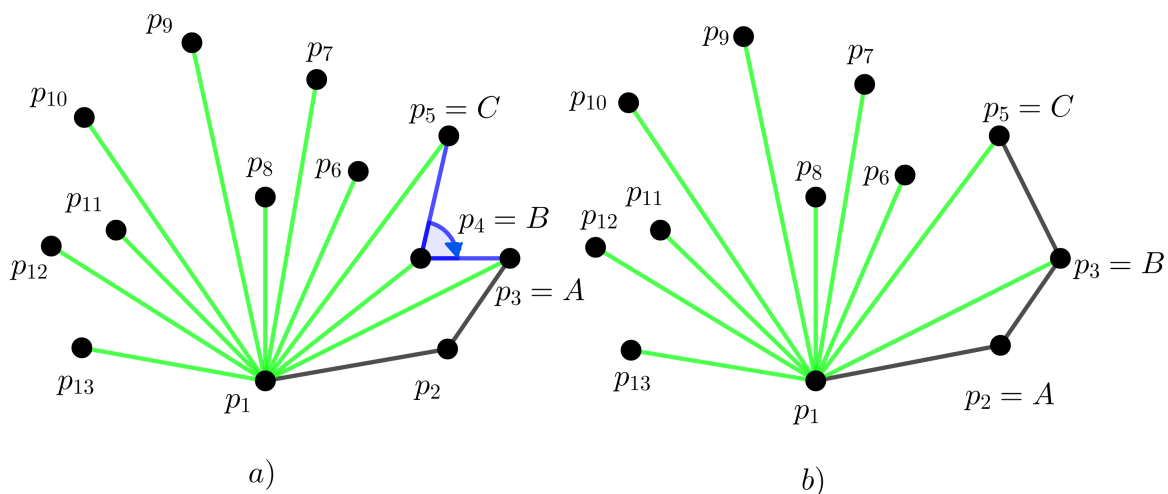


Figura 2.14: Algoritmo de Graham.

## 2.4. Polígonos.

**Definición 2.4.1 (Polígono).** *Un polígono  $P$  en el plano es un conjunto de  $n$  puntos  $\{p_1, \dots, p_n\}$  llamados vértices, y  $n$  segmentos de rectas  $\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$  llamados lados tales que:*

1. Los puntos extremos de los lados son vértices del polígono.
2. Todo vértice del polígono está en la intersección de exactamente dos lados.

**Definición 2.4.2.** Dos lados que se intersectan en un vértice  $v$ , se llaman lados consecutivos.

**Definición 2.4.3.** Un polígono  $P$  se llama polígono simple si dos lados no consecutivos no se intersectan. Como se observa en la Figura (2.15) literal a).

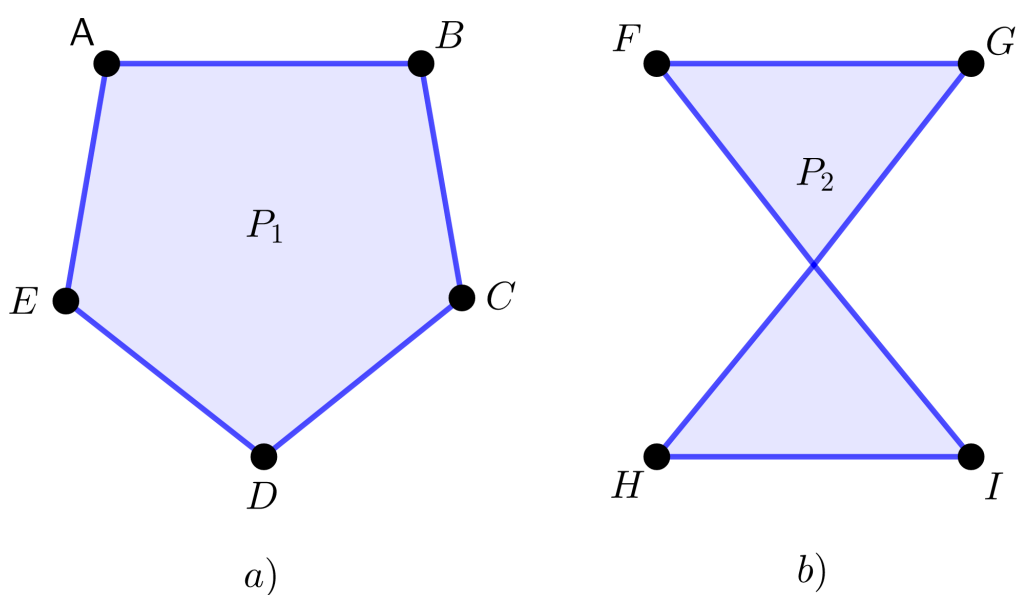


Figura 2.15: Polígono simple  $P_1$  y polígono no simple  $P_2$ .

En la Figura (2.15) literal b) podemos observar como se vería un polígono no simple.

Se acostumbra también definir al polígono  $P$  en función de una región cerrada  $S$  del plano constituida por rectas, dado por  $S$  y el interior de  $S$ . Cuando se procede de esta manera, entonces se dice que el polígono es la frontera de  $S$  y se denota por  $P = fr(S)$ .

El siguiente lema es un resultado de topología general muy conocido.

**Lema 2.4.4.** Sea  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces se tiene la descomposición disjunta

$$\mathbb{R}^2 = int(X) \cup fr(X) \cup int(X^c)$$

**Demostración:**

La demostración es por doble inclusión.

“ $\supset$ ”

$\mathbb{R}^2 \supset \text{int}(X) \cup \text{fr}(X) \cup \text{int}(X^c)$  es inmediata.

“ $\subset$ ”

Sea  $x \in \mathbb{R}^2$ . Supongamos que  $x \notin \text{int}(X) \cup \text{fr}(X)$ , entonces existe una vecindad de  $x$  contenida en  $X^c$ , así  $x \in \text{int}(X) \cup \text{fr}(X) \cup \text{int}(X^c)$ .

Por lo tanto,  $\mathbb{R}^2 \subset \text{int}(X) \cup \text{fr}(X) \cup \text{int}(X^c)$ .

Así,  $\mathbb{R}^2 = \text{int}(X) \cup \text{fr}(X) \cup \text{int}(X^c)$ . ■

En un polígono simple, al recorrer los vértices siguiendo cada uno de los lados, llegamos al punto inicial del recorrido. Por lo tanto la trayectoria es cíclica o cerrada. Se acostumbra tomar a  $v_1$  como el vértice inicial y hacer el recorrido en el sentido contrario de las agujas de reloj. Como se observa en la Figura (2.16).

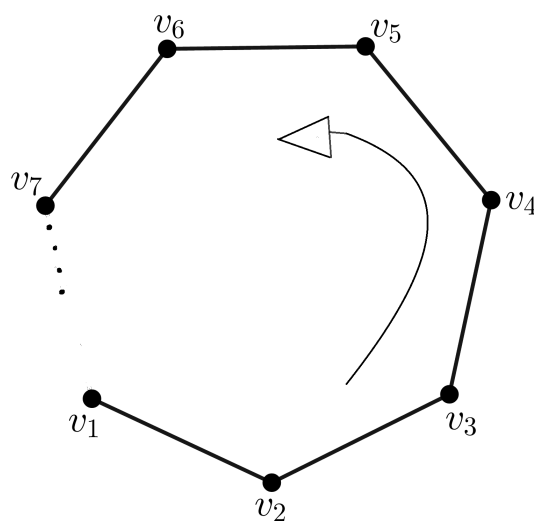


Figura 2.16: Recorriendo los vértices.

Cuando hacemos el recorrido de esta manera siempre, tenemos el interior de  $P$  a nuestra izquierda.

**Definición 2.4.5.** *Un polígono  $P$  se dice convexo, si la región acotada por  $P$  es un conjunto convexo del plano.*

A continuación daremos un par de propiedades importantes de los conjuntos convexos.

**Lema 2.4.6.** *Si  $A$  y  $B$  son conjuntos convexos del plano, entonces  $A \cap B$  es convexo.*

**Demostración:**

Consideraremos dos casos:

**Caso 1:** Si  $A \cap B = \phi$ , o consta de un solo punto,  $A \cap B$  es convexo.

**Caso 2:** Supongamos que  $A \cap B \neq \phi$  y que tiene más de un punto.

Sean  $x, y \in A \cap B$ . Probaremos que  $\overline{xy} \subset A \cap B$ .

Sea  $z \in \overline{xy}$ , esto es:  $z = x$  ó  $z = y$  ó  $z$  está entre  $x$  y  $y$ .

Si  $z = x$  ó  $z = y$ , entonces  $z \in A \cap B$ .

Si  $z$  está entre  $x$  y  $y$ , como  $x, y \in A \cap B$ ,  $x, y \in A$ . Luego,  $\overline{xy} \subset A$  ya que  $A$  es convexo por hipótesis; en consecuencia  $z \in A$ . En forma análoga podemos concluir que  $z \in B$ . Luego,  $z \in A \cap B$ , por lo tanto  $\overline{xy} \subset A \cap B$ .

Así,  $A \cap B$  es convexo. ■

**Lema 2.4.7.** *Si  $S$  es un conjunto finito de puntos, entonces la frontera de su envolvente convexa es un polígono simple.*

**Demostración:**

Sea  $P$  la frontera de la envolvente de  $S$ . En primer lugar necesitamos probar que  $P$  es convexo. En efecto, la región acotada por  $P$  es la envolvente convexa de  $S$  y por lo tanto un conjunto convexo. Luego  $P$  es convexo.

En segundo lugar probaremos que  $P$  es un polígono cuyos vértices son puntos de  $S$ . Si todos los puntos de  $S$  son colineales, entonces  $P$  es un segmento de recta. Supongamos entonces, que no todos los puntos de  $S$  son colineales.

Como  $S$  es finito, existe un punto  $x_1 \in S$  y una recta  $L$  tal que todos los puntos de  $S$  que no están sobre  $L$  se encuentran de un lado. Entonces  $x_1$  está en la frontera de  $S$  y por lo tanto  $x_1 \in S \cap P$ . Si sobre dicha recta hay otros puntos de  $S$ , entonces elegimos  $x_1$  y  $x_2$  en  $L \cap S$  de tal forma que el segmento  $\overline{x_1x_2}$  tenga longitud máxima. Esto nos da el primer lado de  $P$ . Ver Figura (2.17).

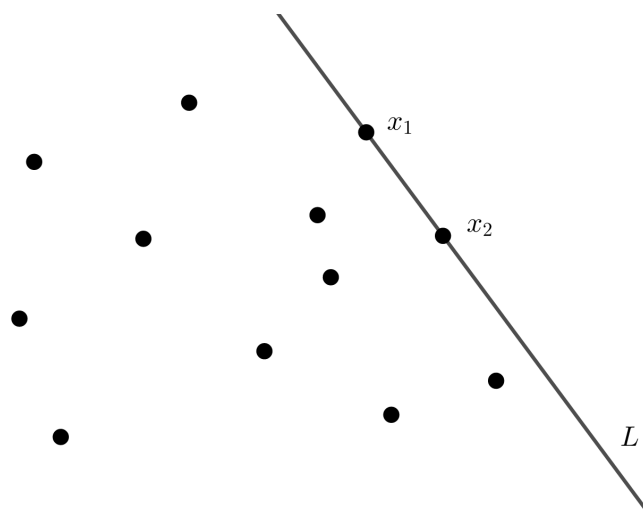


Figura 2.17: Recta que pasa por los vértices  $x_1$  y  $x_2$ .

Caso contrario, podemos girar la recta  $L$  en sentido antihorario, manteniendo el punto  $x_1$  fijo como eje de rotación, hasta encontrar el primer punto de  $S$ , el cual denotaremos por  $x_2$ . Ver Figura (2.18). Luego el segmento  $\overline{x_1x_2}$  pertenece a  $P$ . En efecto, existe un punto  $q$  en  $S$  tal que el triángulo  $\triangle(x_1, x_2, q)$  tiene interior no vacío y está dentro de la envolvente de  $S$ . Entonces el segmento  $\overline{x_1x_2}$  es un lado del triángulo. Si  $p$  es un punto cualquiera del segmento, entonces cualquier círculo centrado en  $p$  contiene puntos tanto del exterior de la envolvente, como del interior. Por lo tanto  $p$  es un punto frontera y de esta manera queda demostrado que  $\overline{x_1x_2} \subseteq P$ .



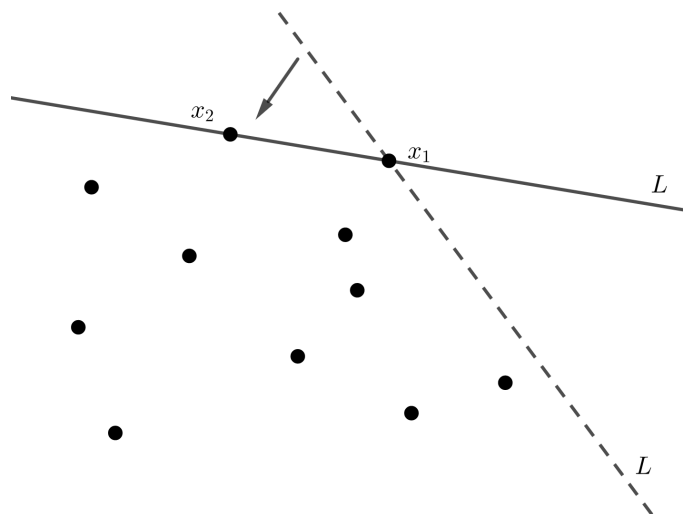


Figura 2.18: Rotación de la recta  $L$ .

Continuando de esta manera, usamos ahora el punto  $x_2$  como pivote y podemos hallar otra recta  $L'$  y un punto  $x_3$  en  $S$  tal que  $\overline{x_2x_3} \subseteq P$ . Como  $S$  es finito, después de un número finito  $k$  de pasos, se completa el polígono frontera  $P$  hasta que el último punto  $x_k$  sea igual a  $x_1$  y se complete el ciclo.

Finalmente, probaremos que  $P$  es simple. Si suponemos lo contrario, hay dos lados no consecutivos que se cortan. Sean  $e_i$  y  $e_j$  lados de  $P$  tal que:

$$e_i \cap e_j = \{p\}$$

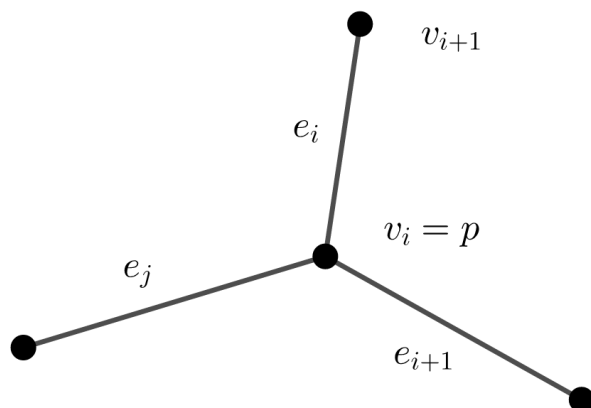


Figura 2.19: En el vértice  $v_i$  concurren tres lados.

Sea  $e_i$  el lado que une los vértices  $v_i, v_{i+1}$ , entonces el punto  $p$  debe ser igual a alguno de ellos. Supongamos que  $v_i = p$ . Entonces en  $v_i$  concurren tres lados de  $P$  a saber:  $e_i, e_{i+1}$  y  $e_j$ , supongamos que  $e_{i+1}$  está a la derecha de  $e_i$  y  $e_j$  está a la izquierda. Como se observa en la Figura (2.19). Entonces  $e_i$  no es un lado de  $P$ . ■

## 2.5. Complejidad.

En la demostración del Lema (2.4.7) se da una idea intuitiva del algoritmo para calcular la envolvente convexa, es bastante simple de entender y puede ser implementado fácilmente en el computador, con cualquier lenguaje de programación. Sin embargo el número de operaciones básicas necesario para completarlo, puede ser muy alto cuando el número de puntos  $n$  sea bastante grande. ¿Qué tal si  $n$  es 1000 o un millón?. ¿Cuántas operaciones debemos realizar?.

Esto nos conduce al problema de calcular el tiempo de ejecución de un algoritmo o lo que es lo mismo estudiar la complejidad.

Supongamos que para aplicar la fórmula del área del triángulo, se requiere de  $k$  operaciones básicas, donde  $k$  es una constante. Entonces el algoritmo para construir la envolvente convexa de un conjunto de  $n$  puntos emplea un tiempo total de operaciones básicas denotado por  $C(n)$ , el cual viene dado por:

$$C(n) = \left[ \frac{n(n-1)}{2} \right] \times [(n-2)k] \quad (2.2)$$

En efecto, hay  $\frac{n(n-1)}{2}$  posibles parejas de puntos en  $S$ . Cada pareja origina una recta.

Por otro lado, para cada una de estas rectas, hay que aplicar el primer algoritmo con

cada uno de los  $(n - 2)$  puntos restantes. Luego el primer algoritmo se aplica un total de  $\frac{n(n - 1)}{2} \times (n - 2)$  veces.

Expandiendo y reordenando la expresión (2.2) se obtiene:

$$C(n) = c_1n^3 + c_2n^2 + c_3n + c_4$$

donde las  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , son constantes.

Por lo tanto, la complejidad del algoritmo descrito se expresa mediante un polinomio de grado 3. Podemos hallar otro algoritmo distinto y entonces la complejidad nos dará otro polinomio con diferentes constantes. A fin de comparar la complejidad de los distintos algoritmos, nos olvidamos de las constantes y sólo consideramos el término principal del polinomio. Este tipo de notación se llama notación de orden “ $O$ ”. Luego el algoritmo tiene una complejidad  $O(n^3)$ .

Cuando  $n$  es grande, entonces  $n^3$  es gigantesco. En la sección de la envolvente convexa vimos el algoritmo de Graham, el cual es un algoritmo más eficiente, en el paso 1 se ejecuta comparando todas las coordenadas de los  $n$  puntos, hasta hallar el punto de menor ordenada este paso se realiza en un tiempo lineal  $O(n)$ . En el paso 2, el proceso de ordenar los  $n - 1$  puntos tiene una complejidad de  $O(n \log n)$ . El paso 3, conocido como el scan de Graham, requiere tiempo lineal de  $O(n)$ .

Así, si sumamos el orden de cada paso del algoritmo de Graham para calcular la envolvente convexa obtenemos que:

$$\begin{aligned} O(n) + O(n \log n) + O(n) &= O(n + n \log n + n) \\ &= O(n \log n), \text{ ya que } O(n) \subset O(n \log n). \end{aligned}$$

Por lo tanto la complejidad del algoritmo de Graham es:  $O(n \log n)$ .

## 2.6. El Problema del Robot.

La bella robot Robotina desea salir de la casa, pero se ha presentado un pequeño problema que debe resolver. La salida se encuentra al final de un pasillo que tiene 60 c.m. de ancho. Así pues, la robot debe calcular su anchura para evitar una colisión con las paredes. Si la anchura de ella es de 58 c.m. o menos, entonces ella podrá pasar a través del pasillo y salir. Si la anchura de robotina es mayor de 58 c.m. su computadora le dará una orden para no salir.

El robot está compuesto por una serie de partes mecánicas como brazos, antenas, ruedas y otras piezas móviles cuyas posiciones se determinan mediante puntos con coordenadas en el espacio. Podemos representar un robot en el plano como un conjunto finito de puntos  $S$ .

¿Cuál es la anchura del robot?

La anchura es la menor distancia entre dos rectas paralelas que sean líneas de soporte de  $S$ . Una **Línea de soporte** de  $S$  es una recta que contiene al menos un punto de  $S$  y tal que los elementos de  $S$  que no se encuentran sobre  $L$ , están todos de un mismo lado del plano dividido por  $L$ . Como se puede observar en la Figura (2.20).

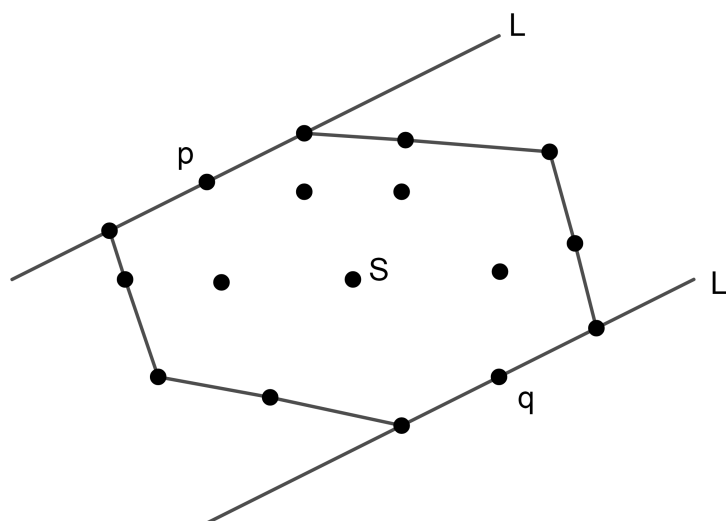


Figura 2.20:  $L$  y  $L'$  son líneas de soporte de  $S$ .

Este par de rectas se llaman también **Paralelas de soporte**. Dos puntos de  $S$  situados sobre un par de paralelas de soporte se llaman **Puntos antipodales**. En base a estas consideraciones, tenemos las observaciones siguientes:

- Para hallar la anchura de  $S$ , hay que considerar la mínima distancia entre paralelas de soporte.
- Las paralelas pasan por los puntos antipodales.
- Los puntos antipodales están sobre la envolvente convexa de  $S$ .

Sabemos que si  $p$  es un punto de la envolvente convexa de  $S$ , entonces por  $p$  debe pasar al menos una línea de soporte  $L$ . Si  $q$  es un antipodal entonces por  $q$  pasa otra línea de soporte  $L'$ , paralela a  $L$ .

¿Cómo se determinan las ecuaciones de  $L$  y  $L'$ ?

Si hay otros puntos de la envolvente sobre  $L$ , digamos  $p'$ , entonces  $L$  queda determinada como la única recta que pasa por  $p$  y  $p'$ . Luego,  $L'$  será la única recta paralela a  $L$  y que pasa por  $q$ .

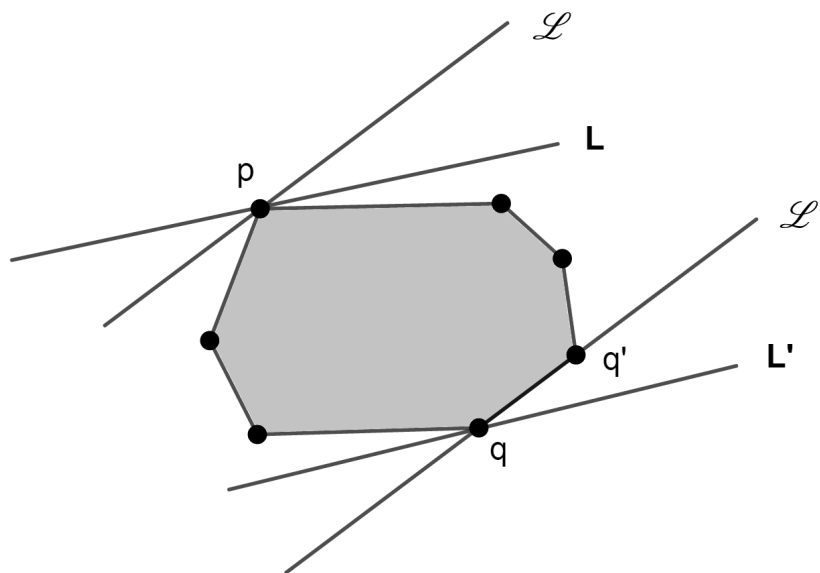


Figura 2.21: Rotación de las líneas de soporte.

Posiblemente  $p$  y  $q$  son los únicos puntos de la envolvente sobre las rectas  $L$  y  $L'$  respectivamente. Entonces en esta situación debemos girar las dos rectas, manteniéndolas paralelas y a la misma distancia, hasta que alguna de ellas toque dos o más puntos de la envolvente. Ver Figura (2.21).

En definitiva, para hallar todas las líneas paralelas de soporte de  $S$  hay que considerar pares consecutivos de vértices sobre la envolvente y sus respectivos antipodales. Podemos hacer esta búsqueda eficiente con el siguiente algoritmo:

***Algoritmo Anchura de  $S$ .***

- **Entrada:** Un conjunto  $S$  de  $n$  puntos.
  - **Salida:** La anchura de  $S$ .
1. Construya la envolvente de  $S$ ,  $CH(S)$ .
  2. Ordene los vértices de  $S$  en sentido antihorario.
  3. Considere el par de vértices consecutivos  $v_1$  y  $v_2$  sobre la envolvente.
  4. Buscar un antipodal de  $v_1, v_2$ , avanzando en sentido antihorario. Sea  $v_i$  el antipodal.
  5. Calcule la distancia entre las líneas de soporte  $L$  y  $L'$ : haga  $A = d(L, L')$
  6. Para  $i = 1, \dots, n$  hacer  $v_i = v_{i+1}$  y volver al paso 4.
  7. Hacer anchura =  $\min A$  en el paso 5.

## 2.7. Problemas de Localización de Servicios.

La localización de los servicios es parte importante de las ciencias gerenciales y de transporte. Algunos problemas de esta área, se pueden resolver usando matemáticas elementales, como en el ejemplo siguiente.

### 2.7.1. *Un Problema Muy Viejo.*

Supongamos que tenemos dos pueblos  $a$  y  $b$  cercanos a una autopista recta, y una compañía de tiendas de ferretería (servicios) quiere instalar una sucursal para atender la demanda de ambos pueblos. ¿En que punto  $p$  de la autopista debe instalarse la tienda, de tal manera que las distancias de cada pueblo a la tienda sea mínima?. Ver Figura (2.22).

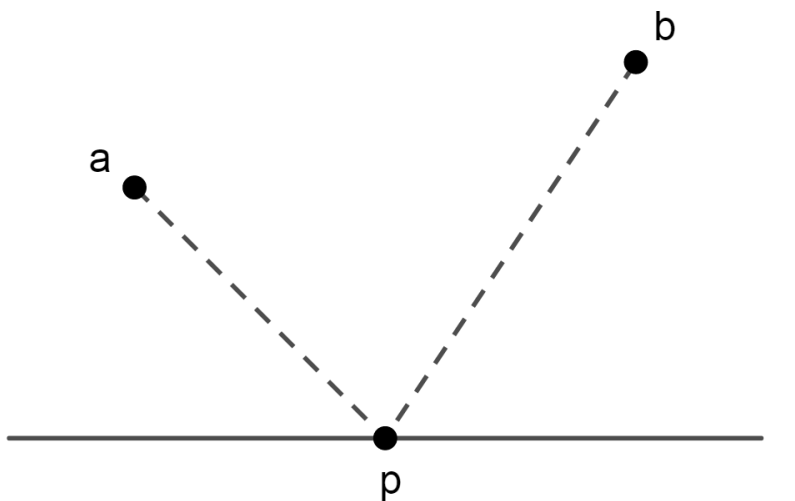


Figura 2.22: Problema de la autopista.

El problema, desde el punto de vista geométrico, consiste en hallar un punto  $p$  sobre la recta  $l$ , tal que minimice la expresión:

$$d(a, p) + d(b, p)$$

Donde  $d(x, y)$  denota la distancia euclidiana entre dos puntos.

Este problema era conocido desde hace varios milenios, y fue resuelto por el matemático Herón de Alejandría (en el año 100 D.C).

Herón no hizo mas que emplear las leyes de reflexión de la luz sobre un espejo, establecidas por Euclides en su libro *Catoptrica*. Las dos leyes establecen lo siguiente:

1. El ángulo de incidencia de la luz está sobre el mismo plano que el ángulo de refracción.
2. La medida del ángulo de incidencia es igual a la del ángulo de refracción.

Inspirados en este principio, veremos que la localización del punto  $p$ , debe ajustarse a estas leyes y de esta manera probaremos también que la luz se propaga siguiendo el camino más corto.

Entonces elegimos un punto  $p$  sobre  $l$ , tal que  $\alpha = \beta$ . Ver la Figura (2.23).

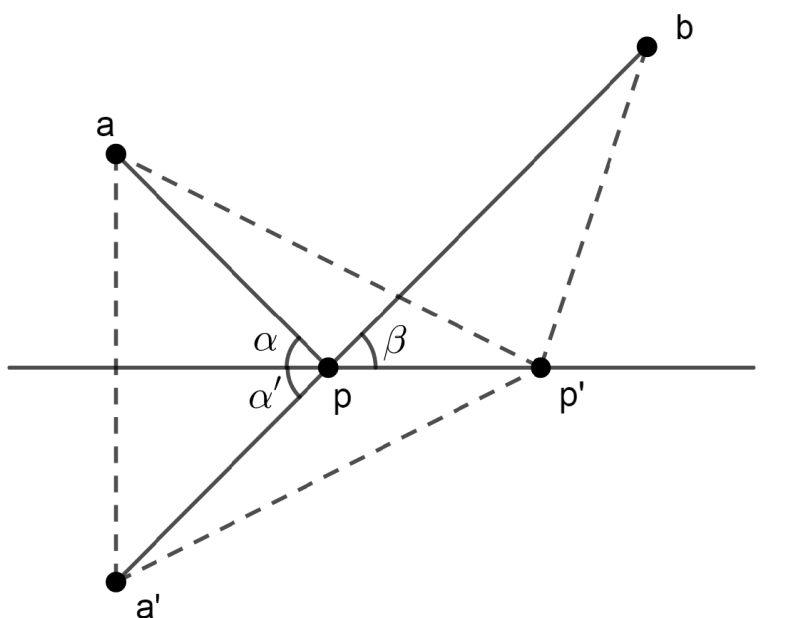


Figura 2.23: Suma de distancias.

Sea  $p'$  la otra posible localización, con  $p' \neq p$ . Probaremos entonces que la suma de las distancias  $d(a, p') + d(p', b)$  es mayor que  $d(a, p) + d(p, b)$ .

Sea  $a'$  la reflexión de  $a$  sobre  $l$ . Entonces  $\alpha' = \alpha$  y como  $\alpha = \beta$ , se tiene  $\alpha' = \beta$  por lo tanto  $a', p$  y  $b$  están sobre una misma recta. Luego:

$$d(a, p') + d(p', b) = d(a', p') + d(p', b) > d(a', p) + d(p, b) = d(a, p) + d(p, b) \quad (2.3)$$



Por lo tanto la longitud de la trayectoria  $ap'b$  es mayor que  $apb$ . Luego el punto  $p$  es la mejor ubicación de la tienda sobre la autopista.

## 2.8. El Problema del Círculo Mínimo.

Este es un problema del área de geometría, cuya versión clásica se puede plantear de la manera siguiente: Supongamos que tenemos  $n$  puntos en el plano representando clientes, plantas de producción para ser abastecidas, escuelas, hospitales, mercados, pueblos o cualquier otro tipo de institución. El problema consiste en ubicar un punto  $X$  en el plano representando un servicio (proveedor, transmisor o despachados) de tal forma que la distancia desde  $X$  hasta el punto mas alejado sea mínima. Este criterio es de gran utilidad para ubicar hospitales, estaciones de policía, bomberos, etc. donde es necesario minimizar el peor de los casos en cuanto a tiempo de respuesta.

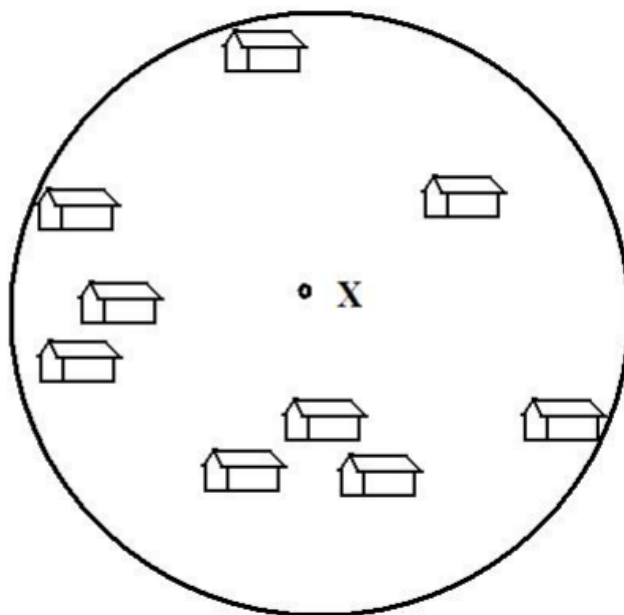


Figura 2.24: El círculo mínimo.

El problema se enuncia de manera muy breve y elegante en el área de la geometría.

*Hallar el menor círculo que encierra un conjunto de puntos.*

Un algoritmo intuitivo como el que veremos a continuación, nos da la solución en tiempo  $O(n^4)$ . En 1972, Elzinga y Hearn hallaron un algoritmo más rápido en tiempo  $O(n^2)$ . Posteriormente, Shamos desarrolló un algoritmo más rápido aún, en tiempo  $O(n \log n)$ .

Después de una larga búsqueda por parte de los investigadores de algoritmos cada vez más eficientes, finalmente, en 1983, N. Meggido dio un algoritmo de complejidad  $O(n)$ .

Podemos resolver este problema usando un algoritmo de fuerza bruta inspirados en la siguiente idea.

1. Para todo par de puntos  $a$  y  $b$  determinamos el círculo diametral, es decir, aquel cuyo diámetro es igual a la distancia desde  $a$  hasta  $b$ , centrado en el punto medio del segmento.
2. Si con esto no cubrimos todos los puntos, para cada tres puntos buscamos el círculo circunscrito del triángulo cuyos vértices son los tres puntos, (círculo triangular).
3. Revisamos si todos los puntos están dentro del círculo (1) o (2) y nos quedamos con el menor.

A continuación damos el algoritmo círculo mínimo.

***Algoritmo Círculo Mínimo.***

- **Entrada:** Un conjunto  $S$  de  $n$  puntos del plano.

- **Salida:** El círculo mínimo que cubre  $S$ .

1. Si  $S$  contiene menos de 4 puntos construya el círculo mínimo directamente.
2. Sean  $p_1$  y  $p_2$  dos puntos de  $S$ . Sea  $C$  el círculo de diámetro  $p_1p_2$  y centro en el punto medio de  $p_1$  y  $p_2$ , el cual denotamos por  $c$ .

3. Para  $i = 1, \dots, n$  calcule la distancia  $d_i = d(c, p_i)$
4. Si  $d_i \leq (p_1, p_2)/2$  para todo  $i$ ,  $C =$  círculo mínimo. De lo contrario volvemos al paso 2.
5. Sean  $p_1, p_2$  y  $p_3$  tres puntos de  $S$ . Sea  $C$  el círculo determinado por esos tres puntos con centro  $c$  y radio  $r$ .
6. Para  $i = 1, \dots, n$  calculamos  $d_i = d(p_i, c)$ .
7. Si  $d_i \leq r$ ,  $C =$  círculo mínimo. De lo contrario volvemos al paso 5.
8. Círculo mínimo = menor de los círculos en el paso 7.

# Capítulo 3

## Diagramas de Voronoi.

El diagrama de Voronoi (que debe su nombre al matemático ruso Georgy Voronoi) apareció por primera vez en el siglo XVII, en un libro de R. Descartes. El diagrama de Voronoi a sido redescubierto varias veces en distintos campos científicos como la astronomía, meteorología, física, matemática, etc. En el siglo XIX John Snow utilizó el diagrama de Voronoi para determinar la fuente de una epidemia de cólera en Londres.

Los diagramas de Voronoi se encuentran entre las más importantes estructuras en geometría computacional. Un diagrama de Voronoi codifica la información de proximidad entre elementos.

### 3.1. ¿Qué es el Diagrama de Voronoi?

**Definición 3.1.1 (Diagrama de Voronoi).** *Un diagrama de Voronoi para un conjunto  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  de puntos del plano es una partición del plano en  $n$  regiones poligonales convexas  $V(p_1), \dots, V(p_n)$ , tal que para cada  $i$  todos los puntos de la región  $V(p_i)$  están más cercanos a  $p_i$  que a cualquier otro punto de  $P - \{p_i\}$ .*

El polígono convexo  $V(p_i)$  que contiene al punto  $p_i$  se llama **polígono de Voronoi** del punto  $p_i$ , como se observa en la Figura (3.1). Los vértices del diagrama se llaman **vértices de Voronoi**. Los rayos y los segmentos de recta del diagrama se llaman **aristas de Voronoi**.

Una primera observación al diagrama de Voronoi nos permite llegar a las siguientes conclusiones:

1. Si tenemos un punto  $p_i$  en  $P$ , entonces su vecino más próximo se halla en alguno de los polígonos de Voronoi adyacentes a  $V(p_i)$ .
2. Si ordenamos en una lista cada punto  $p_i$  con su vecino más cercano, entonces podemos buscar en dicha lista el par de elementos de  $P$  más cercanos.

**Ejemplo 3.1.2.** En la Figura (3.1) mostramos un diagrama de Voronoi para un conjunto  $P$  de 8 puntos.

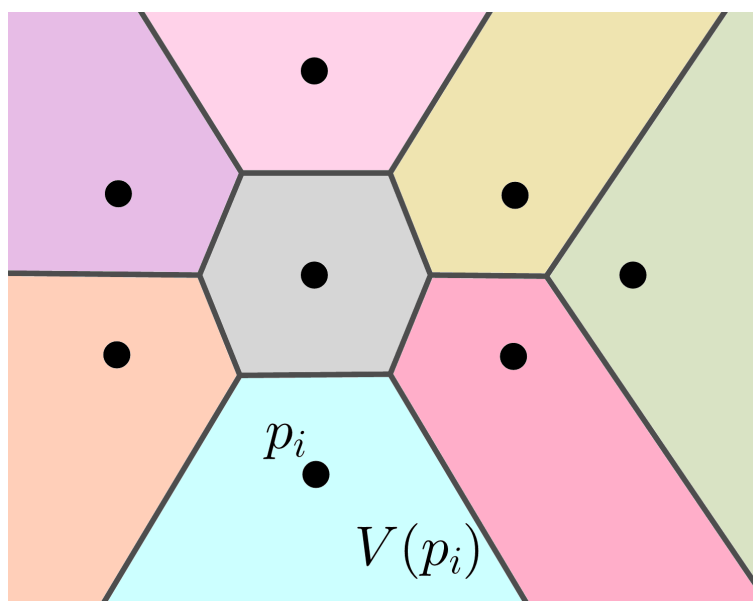


Figura 3.1: Diagrama de Voronoi.

## 3.2. Conceptos Básicos.

En esta sección denotaremos como  $P$  al conjunto de  $n \geq 2$  puntos  $\{p_1, \dots, p_n\}$  en el plano Euclidiano. Los  $n$  puntos son distintos en el sentido de que  $p_i \neq p_j$  para  $j \neq i$ ;  $i, j \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Definición 3.2.1 (Distancia Euclidiana).** Sea  $p = (x, y)$  un punto arbitrario en el plano Euclidiano. Entonces, la distancia Euclidiana entre  $p = (x, y)$  y  $p_i = (x_i, y_i) \in P$  está dada

por:

$$d(p, p_i) = \|p - p_i\| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (3.1)$$

Si  $p_i$  es el punto más cercano a  $p$  se tiene la relación  $d(p, p_i) \leq d(p, p_j)$  para  $j \neq i$ ;  $i, j \in I_n$ . En este caso, se dice que  $p$  está asignado a  $p_i$ .

**Nota:** Se considerará a partir de ahora que se trabaja en el espacio Euclidiano con la métrica Euclidiana.

**Definición 3.2.2 (Diagrama de Voronoi ordinario planar).** Sea el conjunto  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$  con  $2 \leq n < \infty$  y  $p_i \neq p_j$  para  $j \neq i$ ;  $i, j \in I_n$ . Llamamos la región dada por:

$$V(p_i) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, p_i) \leq d(p, p_j), j \neq i; i, j \in I_n\} \quad (3.2)$$

como el polígono de Voronoi ordinario planar asociado a  $p_i$  (o el polígono de Voronoi de  $p_i$ ) y al conjunto dado por:

$$V_{or}(P) = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\} \quad (3.3)$$

el diagrama de Voronoi ordinario planar generado por  $P$  (o el diagrama de Voronoi de  $P$ ). Llamamos a  $p_i$  de  $V(p_i)$  como el punto generador o generador del  $i$ -ésimo polígono de Voronoi y al conjunto  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$  como el conjunto generador del diagrama de Voronoi  $V_{or}(P)$ .

En la Definición (3.2.2) notamos que la relación en la Ecuación (3.2) está definida en términos de  $\leq$  pero no de  $<$ . Un polígono de Voronoi por lo tanto es un conjunto cerrado, ya que contiene a su frontera. Esta podrá estar formada por segmentos de rectas, rayos o rectas infinitas. Alternativamente, podemos definir un polígono de Voronoi como:

$$V^0(p_i) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, p_i) < d(p, p_j), j \neq i; i, j \in I_n\} \quad (3.4)$$

el cual es un conjunto abierto porque no contiene a su frontera. Ambas definiciones se aceptan,

pero en este estudio definiremos un polígono de Voronoi como un conjunto cerrado.

**Definición 3.2.3 (Arista de Voronoi).** *Puesto que un polígono de Voronoi es un conjunto cerrado, contiene a su frontera, que será denotada como  $fr(V(p_i))$ . Ésta puede consistir en segmentos de recta, rayos o rectas infinitas, las cuales llamamos aristas de Voronoi. Denotamos una arista de Voronoi como  $l_i$ .*

Notar que un diagrama de Voronoi a veces es definido por la unión de aristas de Voronoi, es decir,  $\bigcup_{i=1}^n fr(V(p_i))$  en lugar del conjunto  $\{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$ . Puesto que la unión de aristas de Voronoi puede ser considerada como una red (malla), a veces es llamada red de Voronoi.

Al percatarnos que el operador de relación igual es incluido en la relación de la Ecuación (3.2), podemos definir, alternativamente, una arista de Voronoi como un segmento de recta, rayo o recta infinita compartida por dos polígonos de Voronoi con sus puntos extremos. Matemáticamente, si  $V(p_i) \cap V(p_j) \neq \phi$ , el conjunto  $V(p_i) \cap V(p_j)$  genera una arista de Voronoi o un vértice de Voronoi. Usamos  $l(p_i, p_j)$  para denotar la intersección  $V(p_i) \cap V(p_j)$ , la arista de Voronoi generado por  $p_i$  y  $p_j$  (ver Figura (3.2)). Notar que  $l(p_i, p_j)$  puede ser vacío. Si  $l(p_i, p_j)$  no es vacío ni un punto, decimos que los polígonos de Voronoi  $V(p_i)$  y  $V(p_j)$  son contiguos o adyacentes.

**Definición 3.2.4 (Vértice de Voronoi).** *Un punto extremo de una arista de Voronoi se conoce como vértice de Voronoi. También un vértice de Voronoi puede definirse como un punto compartido por tres o más polígonos de Voronoi. Denotamos un vértice de Voronoi como  $q_i$ . En la Figura (3.2) podemos observar que el punto de color azul  $q_i$  es un vértice de Voronoi.*

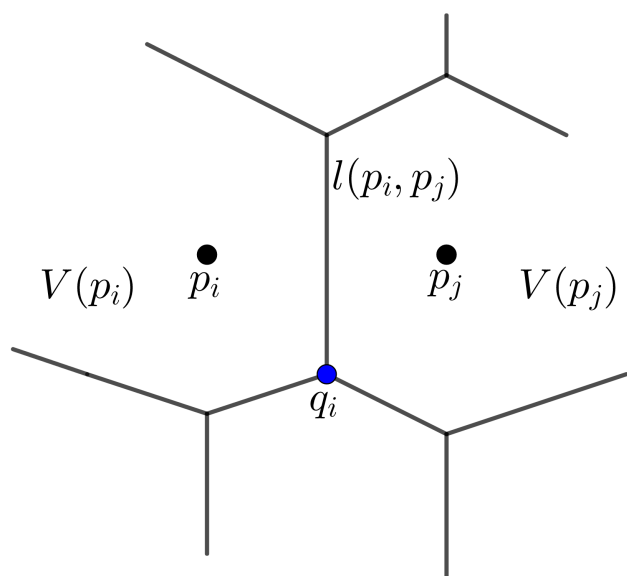


Figura 3.2: Arista de Voronoi  $l(p_i, p_j)$  y vértice de Voronoi  $q_i$ .

Cuando existe al menos un vértice de Voronoi en el que cuatro o más aristas de Voronoi inciden en el (como podemos ver los círculos de color azul en la Figura (3.3)), decimos que  $V_{or}(P)$  es degenerado; de otra manera decimos que  $V_{or}(P)$  es no degenerado.

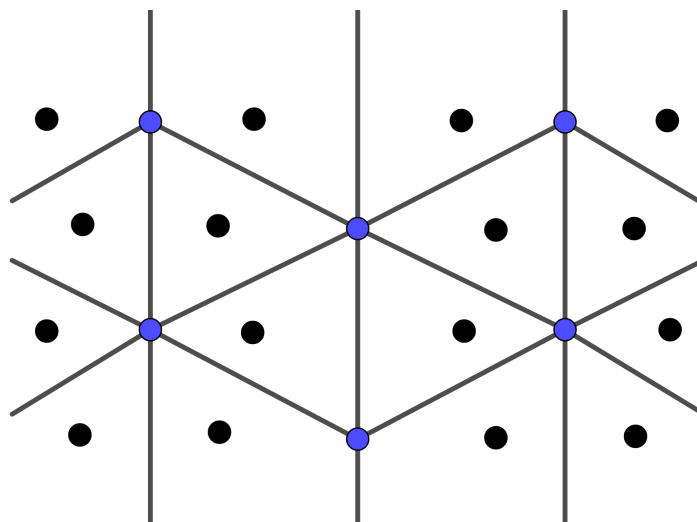


Figura 3.3: Diagrama de Voronoi degenerado.

En algunos resultados, un diagrama de Voronoi degenerado necesita tratamientos especiales prolongados que no siempre son indispensables. Para evitar esta dificultad, a menudo se hace la siguiente hipótesis.



**Hipótesis (No degeneración).** Cada vértice de Voronoi en un diagrama de Voronoi tiene exactamente tres aristas de Voronoi. Como se observa en la Figura (3.4).

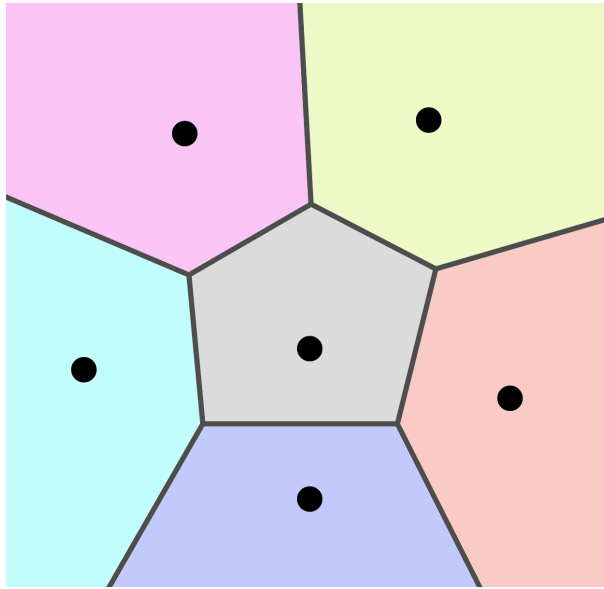


Figura 3.4: Diagrama de Voronoi no degenerado.

Después de la Definición (3.2.2) definimos un diagrama de Voronoi en un plano abierto. En aplicaciones prácticas, frecuentemente se trata con una región acotada  $S$  donde se encuentran los puntos generadores (como se observa en las líneas de color azul en las Figuras (3.5) y (3.6)). En este caso, consideramos el conjunto  $V_{or}(P) \cap S$ , dado por:

$$V_{or}(P) \cap S = \{V(p_1) \cap S, \dots, V(p_n) \cap S\} \quad (3.5)$$

Lo llamamos diagrama de Voronoi acotado o el diagrama de Voronoi acotado por  $S$ . Si un polígono de Voronoi  $V(p_i)$  comparte la frontera de  $S$ , llamamos a la región  $V(p_i) \cap S$  frontera del polígono de Voronoi o región (el término región se usa cuando  $fr(S)$  es curva o cuando  $V(p_i) \cap S$  es no convexa).

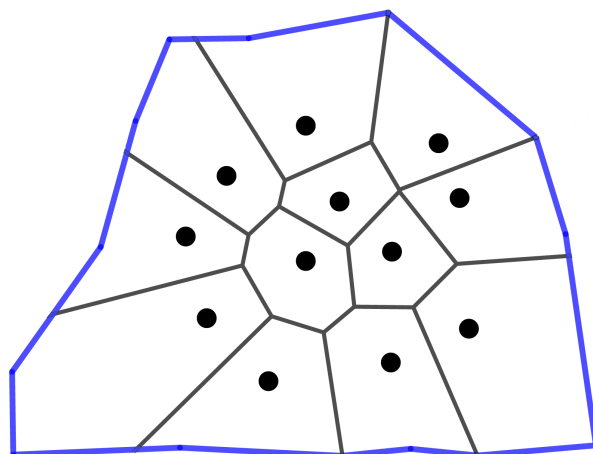


Figura 3.5: Diagrama de Voronoi acotado y convexo.

En la práctica, generalmente se tratan diagramas de Voronoi acotados bien definidos, como en la Figura (3.5), cuya frontera del polígono de Voronoi es convexa.

Una región de la frontera de Voronoi no convexa se muestra en la Figura (3.6) (zona sombreada).

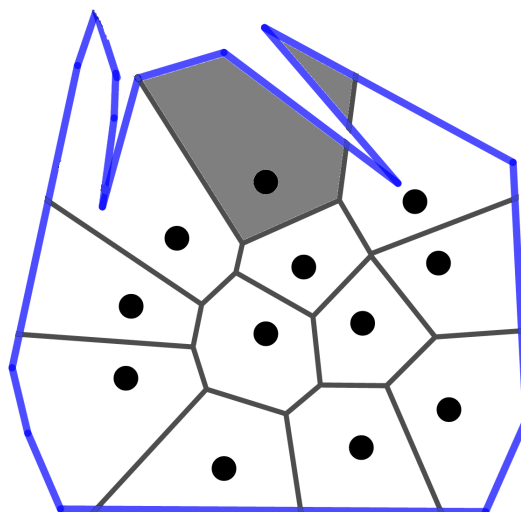


Figura 3.6: Diagrama de Voronoi acotado y con dos regiones no convexas.

Como podemos observar en las Figuras (3.5) y (3.6), el diagrama de Voronoi ordinario se compone de polígonos. Recordando que un polígono está definido en términos de semipla-

nos, se puede presentar una definición alternativa de un diagrama de Voronoi, en términos de semiplanos. Para ello primero debemos considerar la recta perpendicular que biseca al segmento  $\overline{p_i p_j}$  que une dos puntos generadores  $p_i$  y  $p_j$  (ver Figura (3.7)). Llamamos a esta línea la mediatriz entre  $p_i$  y  $p_j$  y se denota como  $b(p_i, p_j)$ . Como un punto en la mediatriz  $b(p_i, p_j)$  es equidistante de los puntos generadores  $p_i$  y  $p_j$ , entonces podemos escribirla como:

$$b(p_i, p_j) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, p_i) = d(p, p_j), j \neq i; i, j \in I_n\} \quad (3.6)$$

La mediatriz divide el plano en dos semiplanos y genera:

$$H(p_i, p_j) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, p_i) \leq d(p, p_j), j \neq i; i, j \in I_n\} \quad (3.7)$$

Llamamos a  $H(p_i, p_j)$  como región dominio de  $p_i$  sobre  $p_j$ . Como se observa en la Figura (3.7).

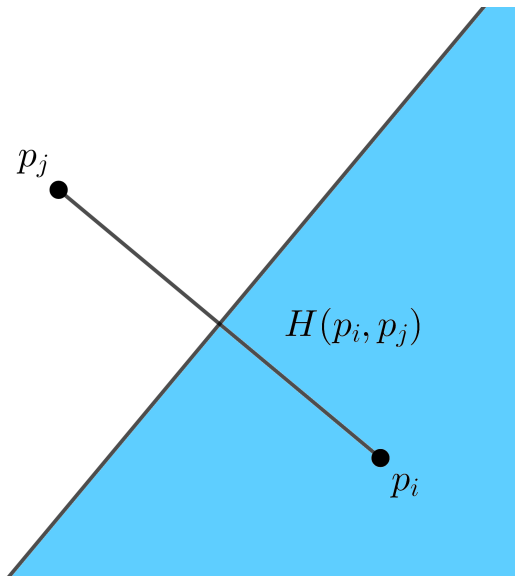


Figura 3.7: Semiplano determinado por la mediatriz del segmento  $\overline{p_i p_j}$ .

En la Figura (3.8) se indican las regiones dominio de  $p_1$  sobre  $p_2, p_3$  y  $p_4$  por las regiones rayadas horizontal, diagonal y vertical, respectivamente.

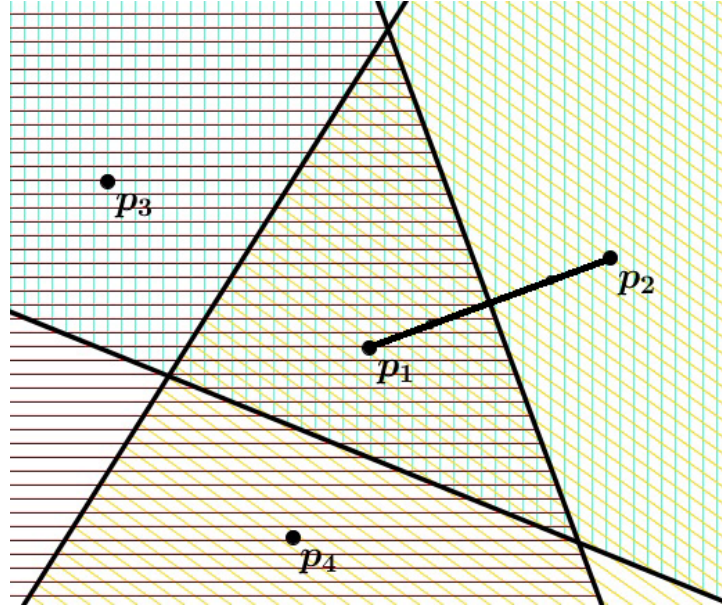


Figura 3.8: Un polígono de Voronoi obtenido a partir de semiplanos.

Notar que en la región de dominio  $H(p_1, p_2)$  la distancia al punto generador  $p_1$  es menor o igual que la distancia al punto generador  $p_2$ . Por lo tanto, la distancia de cualquier punto  $p$  en la intersección de la Figura (3.8) al punto generador  $p_1$  es menor o igual que la distancia de  $p$  al punto generador  $p_j, j = 2, 3, 4$ . Esta relación es equivalente a la Ecuación (3.2) y así la intersección  $H(p_1, p_2) \cap H(p_1, p_3) \cap H(p_1, p_4)$  genera el polígono de Voronoi asociado a  $p_1$ . De este ejemplo, se entiende que la siguiente definición es alternativa a la Definición (3.2.2).

**Definición 3.2.5 (Diagrama de Voronoi ordinario planar definido con semiplanos).**

Sea  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ , donde  $2 \leq n < \infty$  y  $p_i \neq p_j$  para  $j \neq i; i, j \in I_n$ . Llamamos a la región dada por:

$$V(p_i) = \bigcap_{j \in I_n, j \neq i} H(p_i, p_j) \quad (3.8)$$

como el polígono de Voronoi ordinario asociado a  $p_i$  y al conjunto  $V_{or}(P) = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$  como el diagrama de Voronoi ordinario planar generado por  $P$ .

Se puede extender la definición anterior al espacio Euclidiano n-dimensional.

**Definición 3.2.6 (Diagrama de Voronoi ordinario en  $\mathbb{R}^n$ ).** Sea un conjunto  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^n$ , donde  $2 \leq n < \infty$  y  $p_i \neq p_j$  para  $j \neq i$ ;  $i, j \in I_n$ . Llamamos a la región dada por:

$$V(p_i) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, p_i) \leq d(p, p_j), j \neq i; i, j \in I_n\} \quad (3.9)$$

$$= \bigcap_{j \in I_n, j \neq i} H(p_i, p_j) \quad (3.10)$$

como el poliedro de Voronoi ordinario  $n$ -dimensional asociado a  $p_i$  y al conjunto  $V_{or}(P) = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$  se le conoce como el diagrama de Voronoi ordinario  $n$ -dimensional generado por  $P$ , donde  $H(p_i, p_j)$  es dado por la Ecuación (3.7) para  $p_i, p_j \in \mathbb{R}^n$ .

Cuando se sobreentienda que se trabaja en  $\mathbb{R}^n$ , simplemente podemos llamar a  $V_{or}(P)$  como diagrama de Voronoi ordinario o sólo diagrama de Voronoi y a los poliedros (polígonos) de Voronoi serán denominados como Celdas de Voronoi.

El diagrama de Voronoi 1-dimensional, o diagrama de Voronoi en línea (como se observa en la Figura (3.9)) es un rayo o segmento de recta llamada recta de Voronoi y los vértices de Voronoi son los puntos extremos de las rectas de Voronoi. Podemos notar que el punto frontera entre dos rectas de Voronoi adyacentes es el punto medio de los puntos generadores de aquellas rectas de Voronoi; el número de rectas de Voronoi no delimitadas siempre es dos; el número de rectas de Voronoi adyacentes a una recta de Voronoi es uno o dos.

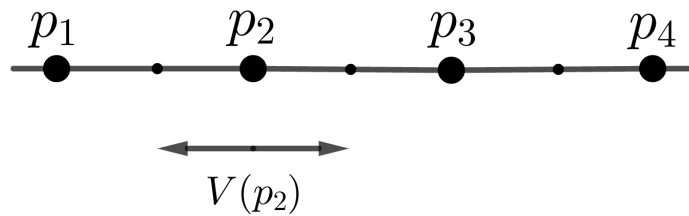


Figura 3.9: Diagrama de Voronoi 1-dimensional.

### 3.3. Propiedades del Diagrama de Voronoi.

En esta sección damos una serie de propiedades sobre los vértices, regiones y aristas de los diagramas de Voronoi.

**Lema 3.3.1.** *Si los cuatro puntos de un conjunto  $P$  están sobre un círculo  $C$ , entonces el centro del círculo es un vértice de Voronoi de grado 4.*

**Demostración:**

En efecto sean  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$  los puntos de  $P$  circulares. Entonces cada segmento de recta bisectora de  $\overline{p_i p_j}$  pasa por el centro del círculo  $C$ . Luego el punto  $q_i$  es un vértice de Voronoi, pues allí se produce una intersección de dos segmentos bisectores. Como se observa en la Figura (3.10).

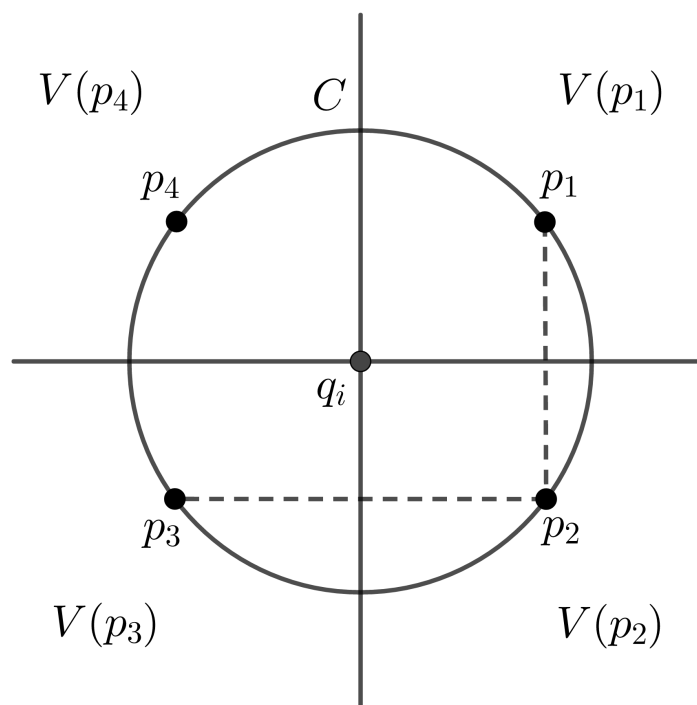


Figura 3.10: Cuatro puntos circulares.

Nótese que  $q_i$  es el único vértice en  $V_{or}(P)$  y es de grado 4, pues allí concurren las 4 rectas bisectoras. ■

De ahora en adelante, supondremos que en  $P$  no hay 4 o mas puntos circulares.

**Lema 3.3.2.** *Todo vértice de Voronoi de  $P$ , tiene grado exactamente tres.*

**Demostración:**

Sea  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  y  $q_i$  un vértice de Voronoi. Cada vértice de  $V_{or}(P)$  se obtiene como una intersección de las aristas de los polígono de Voronoi. Supongamos que las aristas de Voronoi  $\{l_1, \dots, l_k\}$  convergen en  $q_i$ , y además  $l_1$  divide a  $V(p_1)$  y  $V(p_k)$ . Ver la Figura (3.11).

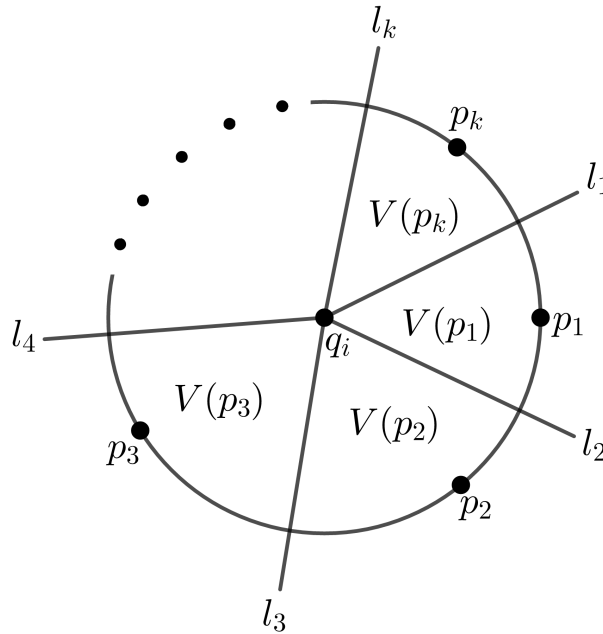


Figura 3.11: Los puntos  $p_1, \dots, p_k$  están sobre un círculo.

Entonces,  $q_i$  es equidistante de los puntos  $p_1$  y  $p_2$ , puesto que  $q_i$  está sobre  $l_2$ , la línea que divide las regiones  $V(p_1)$  y  $V(p_2)$ . De igual manera  $q_i$  es equidistante de  $p_3, \dots, p_k$ . Luego los puntos  $p_1, \dots, p_k$  están sobre un círculo, así  $\sigma(q_i) = k$ , pero como hemos supuesto que en  $P$  no hay 4 o mas punto circulares, entonces  $k \leq 3$ , por tanto  $\sigma(q_i) \leq 3$ .

Si  $\sigma(q_i) = 2$ , entonces  $l_1$  y  $l_2$  dividen a los polígonos  $V(p_1)$  y  $V(p_2)$  y por lo tanto ambos lados pertenecen a la mediatriz del segmento  $\overline{p_1p_2}$ , ver Figura (3.12). Luego  $q_i$  no es vértice de Voronoi.

En el caso que el  $\sigma(q_i) = 1$ , no tiene sentido ya que existe un solo rayo, por lo que  $q_i$  no es vértice de Voronoi.

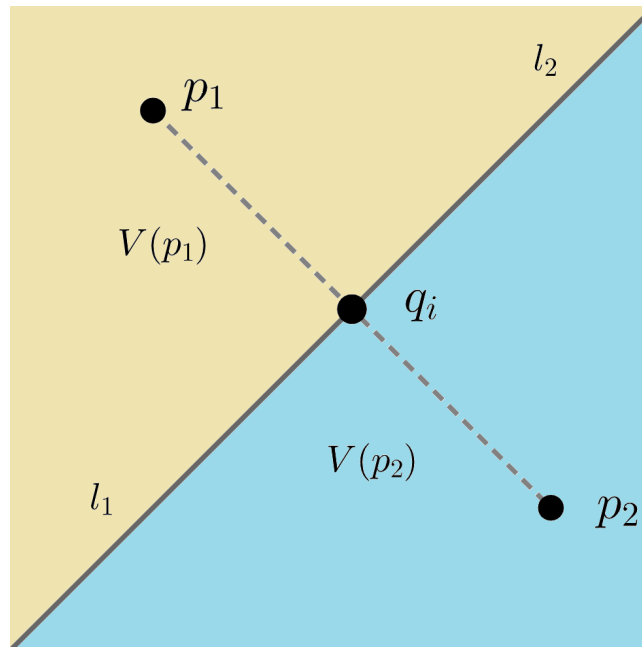


Figura 3.12: El punto  $q_i$  está en la mediatriz del segmento  $\overline{p_1p_2}$ .

Luego,  $\sigma(q_i) = 3$  así, todo vértice de  $V_{or}(P)$  tiene grado exactamente tres. ■

En el capítulo uno, Sección (1.7) se estudio la fórmula de Euler para grafos planos, la cual utilizaremos para demostrar el siguiente lema, donde  $n_{q_i}$  es el número de vértices,  $n_{l_i}$  es el número de aristas y  $n_{r_i}$  es el número de regiones.

**Lema 3.3.3.** *Sea  $V_{or}(P)$  el diagrama de Voronoi de un conjunto finito de puntos  $P$ . El diagrama de Voronoi satisface las siguientes relaciones:*

1.  $n_{q_i} \leq \frac{2}{3}(n_{l_i})$
2.  $n_{l_i} \leq 3(n_{r_i}) - 6$
3.  $n_{r_i} \leq \frac{2}{3}(n_{l_i})$
4.  $n_{q_i} \leq 2(n_{r_i}) - 4$



**Demostración:**

Podemos suponer que todas las aristas infinitas del diagrama de Voronoi, se conectan con un punto al infinito. Luego la fórmula de Euler vale, bajo esta consideración. Sabemos que cada vértice de Voronoi es de grado 3. Para el vértice al infinito el grado es mayor o igual a 3.

Para demostrar la primera desigualdad usamos el Teorema (1.2.4) del apretón de manos y el hecho de que cada vértice tiene grado mayor o igual a 3.

$$\begin{aligned} 2(n_{l_i}) &= \sum_{q_j \in V(V_{or}(P))} \sigma(q_j) \geq 3(n_{q_i}) \\ 2(n_{l_i}) &\geq 3(n_{q_i}) \\ \frac{2}{3}(n_{l_i}) &\geq n_{q_i} \end{aligned}$$

Así, se cumple la primera desigualdad  $n_{q_i} \leq \frac{2}{3}(n_{l_i})$ .

Ahora para la segunda desigualdad hacemos uso de la primera desigualdad y de la fórmula de Euler por lo que tenemos:  $n_{l_i} - n_{r_i} + 2 = n_{q_i} \leq \frac{2}{3}(n_{l_i})$ .

Luego,

$$\begin{aligned} n_{l_i} - n_{r_i} + 2 &\leq \frac{2}{3}(n_{l_i}) \\ -n_{r_i} + 2 &\leq \frac{2}{3}(n_{l_i}) - n_{l_i} \\ -n_{r_i} + 2 &\leq -\frac{1}{3}(n_{l_i}) \\ -3(n_{r_i}) + 6 &\leq -n_{l_i} \\ 3(n_{r_i}) - 6 &\geq n_{l_i} \end{aligned}$$

Así, se cumple la segunda desigualdad  $n_{l_i} \leq 3(n_{r_i}) - 6$ .

Para la tercera desigualdad, se utiliza el mismo argumento utilizado en la demostración del Corolario (1.7.6) del capítulo 1, por tanto  $n_{r_i} \leq \frac{2}{3}(n_{l_i})$ .

Ahora para la cuarta desigualdad utilizamos la desigualdad dos y siempre la fórmula de Euler por lo que tenemos:  $n_{q_i} + n_{r_i} - 2 = n_{l_i} \leq 3(n_{r_i}) - 6$ .

Luego,

$$\begin{aligned} n_{q_i} + n_{r_i} - 2 &\leq 3(n_{r_i}) - 6 \\ n_{q_i} + n_{r_i} &\leq 3(n_{r_i}) - 6 + 2 \\ n_{q_i} + n_{r_i} &\leq 3(n_{r_i}) - 4 \\ n_{q_i} &\leq 2(n_{r_i}) - 4 \end{aligned}$$

Así,  $n_{q_i} \leq 2(n_{r_i}) - 4$  ■

Sea  $q_i$  un vértice de Voronoi. Entonces por el Lema (3.3.2) hay tres polígonos de Voronoi que concurren en  $q_i$ . Sean  $p_1, p_2$  y  $p_3$  los puntos de  $P$  que definen estos tres polígonos. Entonces el punto  $q_i$  equidista de estos tres puntos.

**Definición 3.3.4 (Círculo de Voronoi tangente en  $q_i$ ).** *El círculo de Voronoi tangente en  $q_i$ , denotado por  $C(q_i)$ , es el círculo con centro en  $q_i$  y tangente a cada uno de los puntos  $p_1, p_2$  y  $p_3$ . Como se observa en la Figura (3.13).*

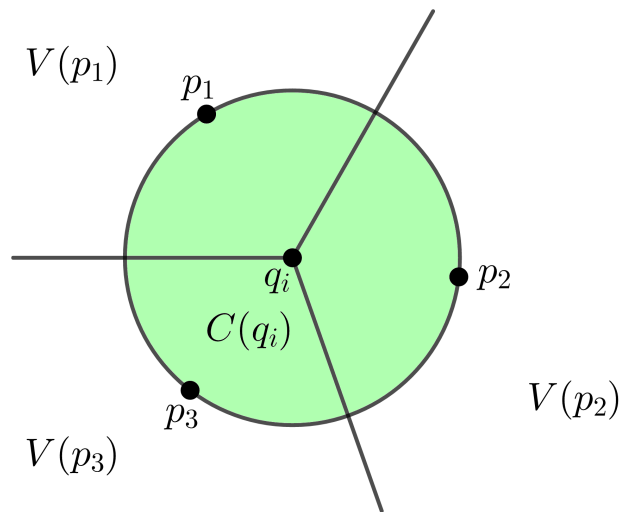


Figura 3.13: Círculo de Voronoi.

**Lema 3.3.5.** *Sea  $q_i$  un vértice de Voronoi. Entonces el círculo  $C(q_i)$  no contiene puntos de  $P$  en su interior.*

**Demostración:**

Sean  $V(p_1), V(p_2)$  y  $V(p_3)$  los polígonos que coinciden en  $q_i$ . Estos vienen determinados por los puntos de  $P$ ,  $p_1, p_2$  y  $p_3$ . Como se observa en la Figura (3.13). Si  $p_4$  es otro punto de  $P$  dentro de  $C(q_i)$ , entonces  $q_i$  estaría más cerca de  $p_4$  que a cualquiera de los puntos  $p_1, p_2$  o  $p_3$  y por lo tanto el polígono de Voronoi  $V(p_4)$  debe incidir en  $q_i$ , lo cual es imposible, ya que  $q_i$  es común a  $V(p_1), V(p_2)$  y  $V(p_3)$ .

Así, no hay puntos de  $P$  dentro de  $C(q_i)$ . ■

**Lema 3.3.6.** *Sea  $p_i$  un punto en  $P$ , y  $p_j$  el punto en  $P$  más cercano. Entonces las correspondientes regiones de Voronoi  $V(p_i)$  y  $V(p_j)$  comparten una arista o lado en común.*

**Demostración:**

Sea  $v$  el punto medio del segmento  $\overline{p_i p_j}$ . Sea  $C$  el círculo de radio  $r = \frac{|p_i p_j|}{2}$  y con centro en  $p_i$ . Entonces este círculo  $C$  debe estar contenido en el polígono de Voronoi  $V(p_i)$ , que contiene a  $p_i$ . En efecto si el círculo se sale de  $V(p_i)$ , es cortado por alguna arista de Voronoi  $l_i$ . Ver la Figura (3.14).

Luego existe un punto  $u$  de  $l_i$ , contenido en el interior de  $C$ . Por otro lado  $l_i$  es parte de la recta mediatriz del segmento  $\overline{p_k p_i}$ , donde  $p_k$  es un punto de  $P$ , y  $p_k \neq p_j$ .

Entonces  $p_k$  está más cercano a  $p_i$  que  $p_j$ , pues:

$$\begin{aligned} d(p_i, p_k) &\leq d(p_i, u) + d(u, p_k) \\ &= 2d(p_i, u) < 2d(p_i, v) = d(p_i, p_j) \end{aligned}$$

Esto es una contradicción, y por lo tanto  $C \subseteq V(p_i)$ .

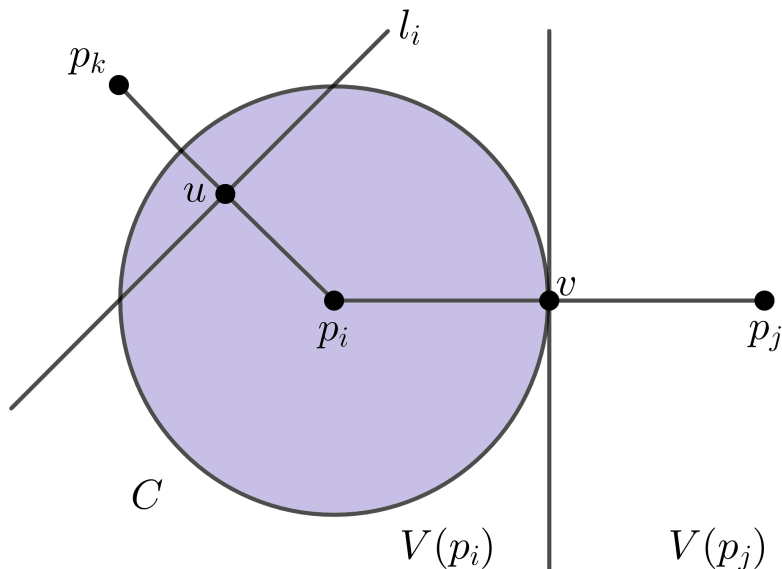


Figura 3.14: El vecino más cercano.

Como el punto  $v$  está a igual distancia de  $p_i$  y  $p_j$ ,  $v$  pertenece a la frontera de  $V(p_i)$ . Es decir,  $v$  pertenece a una arista de Voronoi.

Probaremos que  $v$  es un punto de una arista. Si suponemos que  $v$  está en el extremo de una arista, entonces es un vértice de Voronoi. Sean  $l_1$  y  $l_2$  dos aristas, en la frontera de  $V(p_i)$ , incidentes a  $v$ . Como  $V(p_i)$  es convexo, el ángulo entre  $l_1$  y  $l_2$  debe ser menor de  $180^\circ$  y por lo tanto alguna de las dos arista intersecta a  $C$ . Esto es imposible por lo visto anteriormente.

Luego  $v$  es un punto de alguna arista de Voronoi que divide los polígonos  $V(p_i)$  y  $V(p_j)$ . ■

**Teorema 3.3.7.** *Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano. Si todos los puntos son colineales, entonces  $V_{or}(P)$  consiste en  $n - 1$  rectas paralelas. De lo contrario,  $V_{or}(P)$  es conexo y sus aristas podrían ser segmentos de recta o rayos.*

### Demostración:

La primera parte del teorema es fácil de probar, así que supongamos que no todos los puntos

en  $P$  son colineales.

Primero mostramos que las aristas de  $V_{or}(P)$  son segmentos de recta o rayos. Ya sabemos que las aristas de  $V_{or}(P)$  son partes de líneas rectas, es decir, partes de las mediatrices entre pares de puntos. Ahora supongamos, por contradicción, que existe una arista  $l_i$  de  $V_{or}(P)$  que es una recta infinita. Sea  $l_i$  la frontera de las regiones de Voronoi  $V(p_i)$  y  $V(p_j)$ . Sea  $p_k \in P$  un punto que no sea colineal con  $p_i$  y  $p_j$ . La mediatriz de  $p_j$  y  $p_k$  no es paralela a  $l_i$  y, por lo tanto, se intersecta con  $l_i$ . Ver Figura (3.15). Pero entonces la parte de  $l_i$  que se encuentra en el interior de  $H(p_k, p_j)$  no puede estar en la frontera de  $V(p_j)$ , porque está más cerca de  $p_k$  que de  $p_j$ , lo cual es una contradicción.

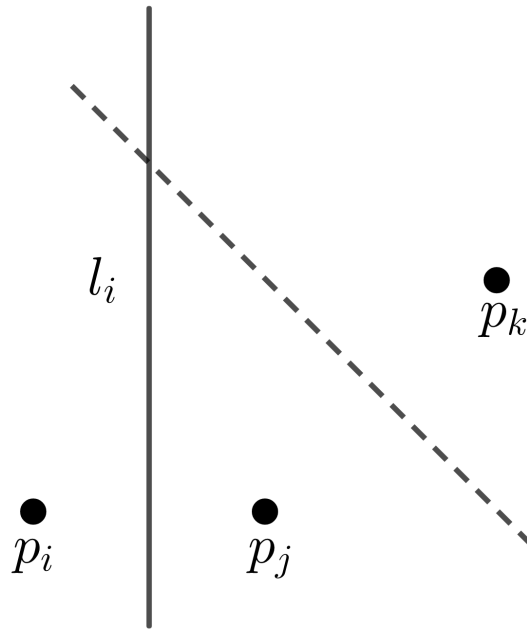


Figura 3.15: Semiplano que contiene a  $p_k$ .

Queda por demostrar que el  $V_{or}(P)$  es conexo, esto se refiere a que todas las aristas del grafo generado por el  $V_{or}(P)$  deben estar conectadas. Si este no fuera el caso, entonces habría una región de Voronoi  $V(p_i)$  que dividiría el plano en dos. Debido a que las regiones de Voronoi son convexas,  $V(p_i)$  consistiría en una franja acotada por dos rectas infinitas paralelas. Pero acabamos de demostrar que las aristas del diagrama de Voronoi no pueden ser rectas infinitas, lo cual es una contradicción. Por lo tanto el grafo del  $V_{or}(P)$  es conexo. ■

En la Figura (1.18) de la Sección (1.6) del capítulo uno podemos observar dos grafos, uno conexo y el otro no conexo. Esta figura nos da una idea de como se vería un diagrama de Voronoi  $V_{or}(P)$  no conexo.

**Teorema 3.3.8.** *Para  $n \geq 3$ , el número de vértices en el diagrama de Voronoi de un conjunto de  $n$  puntos en el plano es como máximo  $2n - 5$  y el número de aristas es como máximo  $3n - 6$ .*

**Demostración:**

Si todos los puntos son colineales, el teorema se deduce inmediatamente del Teorema (3.3.7), así que supongamos que este no es el caso. Probamos el teorema usando la fórmula de Euler, que establece que para cualquier grafo plano simple conexo con  $n_{q_i}$  vértices,  $n_{l_i}$  aristas y  $n_{r_i}$  regiones, se cumple la siguiente relación:

$$n_{q_i} - n_{l_i} + n_{r_i} = 2.$$

No podemos aplicar la fórmula de Euler directamente a  $V_{or}(P)$ , porque  $V_{or}(P)$  tiene aristas llamadas rayos y por lo tanto no es un grafo adecuado. Para remediar la situación agregamos un vértice adicional  $q_\infty$  al infinito al conjunto de vértices y conectamos todos los rayos de  $V_{or}(P)$  a este vértice como se observa en la Figura (3.16). Ahora tenemos un plano conexo al que podemos aplicar la fórmula de Euler. Obtenemos la siguiente relación entre  $n_{q_i}$  el número de vértices de  $V_{or}(P)$ ,  $n_{l_i}$ , el número de aristas de  $V_{or}(P)$ , y  $n_{r_i} = n$ , el número de regiones:

$$(n_{q_i} + 1) - n_{l_i} + n = 2. \tag{3.11}$$

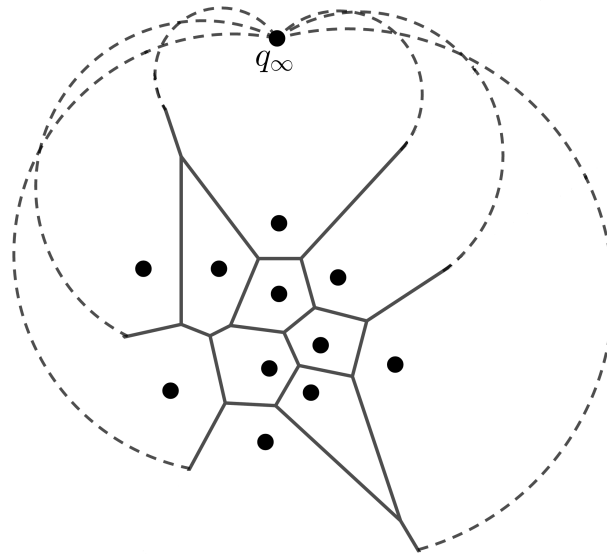


Figura 3.16: Vértice  $q_\infty$  al infinito.

Además, cada arista en el gráfico aumentado tiene exactamente dos vértices, así que si sumamos los grados de todos los vértices y obtenemos el doble de aristas. Porque cada vértice, incluido, tiene un grado de al menos tres que obtenemos:

$$2(n_{l_i}) \geq 3(n_{q_i} + 1). \quad (3.12)$$

Ahora utilizaremos las Ecuaciones (3.11) y (3.12) para encontrar el número de vértices de el diagrama de Voronoi por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} 2(n_{l_i}) &\geq 3(n_{q_i} + 1) \\ 2((n_{q_i} + 1) + n - 2) &\geq 3(n_{q_i} + 1) \\ 2(n_{q_i} + 1) + 2n - 4 &\geq 3(n_{q_i} + 1) \\ 2n - 4 &\geq n_{q_i} + 1 \\ 2n - 5 &\geq n_{q_i} \end{aligned}$$

Así, el número de vértices es como máximo  $2n - 5$ .

De igual forma para encontrar el número de aristas utilizaremos las Ecuaciones (3.11) y (3.12) por lo que tenemos:

$$2(n_{l_i}) \geq 3(n_{q_i} + 1)$$

$$2(n_{l_i}) \geq 3(2 + n_{l_i} - n)$$

$$2(n_{l_i}) \geq 6 + 3n_{l_i} - 3n$$

$$-n_{l_i} \geq 6 - 3n$$

$$n_{l_i} \leq 3n - 6$$

Así, el número de aristas es como máximo  $3n - 6$ . ■

### 3.4. Diagrama de Voronoi y la Envoltente Convexa.

Veamos ahora la relación que existe entre el diagrama de Voronoi y la envoltente convexa de un conjunto  $P$  finito.

**Lema 3.4.1.** *Dos puntos  $p_1$  y  $p_2$  son vértices consecutivos de la envoltente de  $P$  si y sólo si sus correspondientes polígonos de Voronoi  $V(p_1)$  y  $V(p_2)$  están separados por una arista infinita.*

#### Demostración:

“ $\implies$ ”

Sean  $p_1$  y  $p_2$  dos puntos consecutivos de la envoltente convexa de  $P$ . Entonces, si  $L$  es una recta que contiene al segmento  $\overline{p_1 p_2}$ , todos los puntos de  $P$  estarán a un lado de  $L$ . Sea  $L'$  la línea perpendicular a  $L$  y que pasa por el punto medio entre  $p_1$  y  $p_2$ . Es claro que  $L'$  es la mediatriz del segmento  $\overline{p_1 p_2}$ . Luego  $L'$  contiene parte de una arista de Voronoi  $l_i$  de  $V_{or}(P)$ , que separa los polígonos  $V(p_1)$  y  $V(p_2)$ . Ver la Figura (3.17).



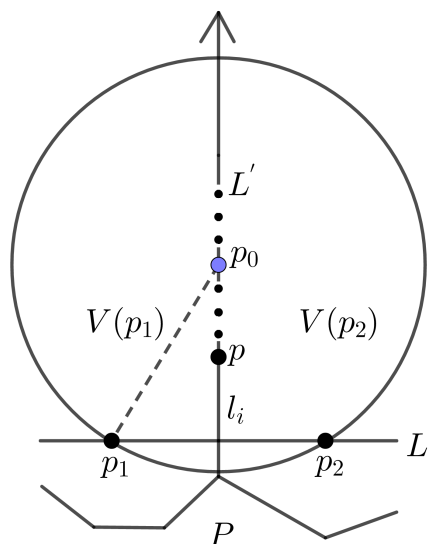


Figura 3.17: La arista  $l_i$  es infinita.

Si  $p$  es un punto que se mueve arbitrariamente sobre  $L'$ , se tendrá siempre  $d(p_1, p) = d(p_2, p)$ , no importando que tan lejos se separe el punto  $p$  del conjunto  $P$ . Es más, podemos escoger  $p_0$  suficientemente alto, de tal manera que el círculo de radio  $r = d(p_0, p_1)$  no contenga puntos de  $P$  en su interior. Entonces el rayo infinito que corre desde  $p_0$  hacia arriba, dentro de la recta  $L'$ , estará contenida dentro de la arista de Voronoi que divide los polígonos  $V(p_1)$  y  $V(p_2)$ .

“ $\Leftarrow$ ”

Recíprocamente, sean  $p_1$  y  $p_2$  dos puntos de  $P$ , tales que la arista de Voronoi  $l_i$ , que divide los polígonos  $V(p_1)$  y  $V(p_2)$  es infinito y sea  $L$  la recta que pasa por los puntos  $p_1$  y  $p_2$ . Entonces, estos polígonos no son acotados.

En particular, como  $V(p_1)$  no es acotado, para todo  $r > 0$ , existe un punto  $p$ , dentro de  $V(p_1)$ , tal que  $d(p, p_1) > r$  y  $p$  está más cerca de  $p_1$ , que cualquier otro punto de  $P$ .

Entonces, para  $r$  muy grande el arco del círculo  $C$  es casi una recta. Se tendrá entonces que ningún punto de  $P$  está del lado de  $L$  donde se encuentra  $p$ , lo cual implica que  $p$  es un punto de la envolvente convexa. ■

### 3.5. Construcción del Diagrama de Voronoi.

Una aproximación unitaria para los diagramas de Voronoi fue descrita por Klein. El no usa el concepto de distancia como noción básica, sino mas bien el concepto de curvas mediatrices, es decir, él asume para cada segmento de recta entre  $p_i, p_j$ , la existencia de una curva mediatriz  $b(p_i, p_j)$  que divide el plano en una  $p_i$ -región y una  $p_j$ -región.

La intersección de todas las  $p_i$ -regiones para diferentes  $p_j$  es entonces la región de Voronoi del punto  $p_i$ , como se muestra en la Figura (3.8). El también postuló que las regiones de Voronoi están conectadas simplemente (simples conexas) y particionan el plano.

En esta sección presentaremos algunos de los principales algoritmos para la construcción de los diagramas de Voronoi para un conjunto  $P$  del plano con  $n$  puntos, basados en la técnica de divide y vencerás descrita por Shamos y Hoey.

El método aquí empleado nos da un algoritmo con una complejidad de  $O(n \log n)$ . La idea del algoritmo consiste en dividir al conjunto  $P$  en dos partes  $P_1$  y  $P_2$ , mediante una línea vertical  $L$ , de tal forma que ambos conjuntos tengan casi el mismo número de puntos (si  $n$  es par se tiene exactamente la mitad). Supondremos en todo el trabajo que  $P_1$  está a la izquierda de  $L$  y  $P_2$  está a la derecha de  $L$ .

Supongamos que hemos construido recursivamente los respectivos diagramas de Voronoi tanto para  $P_1$ , como para  $P_2$ , los cuales serán denotados por  $V_{or}(P_1)$  y  $V_{or}(P_2)$ .

La gran pregunta es: ¿Cómo hacemos para concatenarlos de alguna manera, para obtener el diagrama de Voronoi del conjunto  $P$ ?

Cuando se unen los dos diagramas hay que eliminar algunos segmentos y también se deben reponer partes. De allí pues surgen las dificultades. Sin embargo, daremos unos procedimientos claros sobre como solventarlas, basados en las propiedades geométricas de los grafos.

### 3.5.1. Concatenación: Aspectos Claves.

Veamos el proceso de concatenación en sentido inverso. Es decir partimos del diagrama de Voronoi de  $P$  y luego a  $P$  lo separamos en dos partes  $P_1$  y  $P_2$ .

Sea  $l_i$  una arista del diagrama de Voronoi de  $P$ , definido por los puntos  $p_i$  y  $p_j$ . Esto es,  $l_i$  se encuentra sobre la recta mediatriz determinada por los dos puntos y, además, divide las regiones de Voronoi  $V(p_i)$  y  $V(p_j)$ . Como se observa en la Figura (3.18).

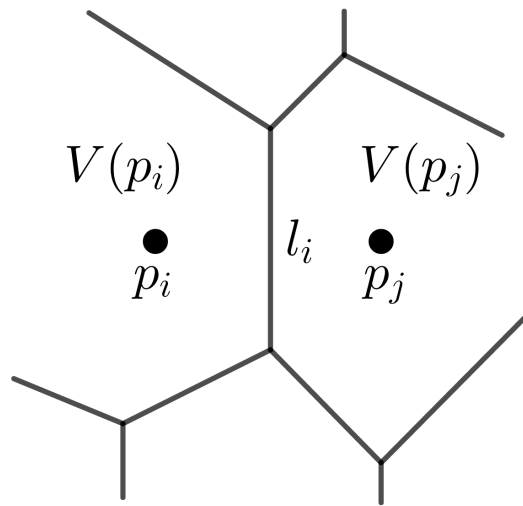


Figura 3.18: La arista  $l_i$  divide dos polígonos de Voronoi.

Nos interesa saber que puede ocurrir con esta arista al desmembrar los dos diagramas. La respuesta depende de donde se encuentren los puntos al momento de dividir a  $P$ . Entonces tenemos:

1. Si  $p_i$  y  $p_j$  están en  $P_1$ , entonces  $l_i \in V_{or}(P_1)$  y no desaparece.
2. Si  $p_i$  y  $p_j$  están en  $P_2$ , entonces  $l_i \in V_{or}(P_2)$  y no desaparece.
3. Si  $p_i$  está en un conjunto y  $p_j$  está en el otro entonces  $l_i$  desaparece.

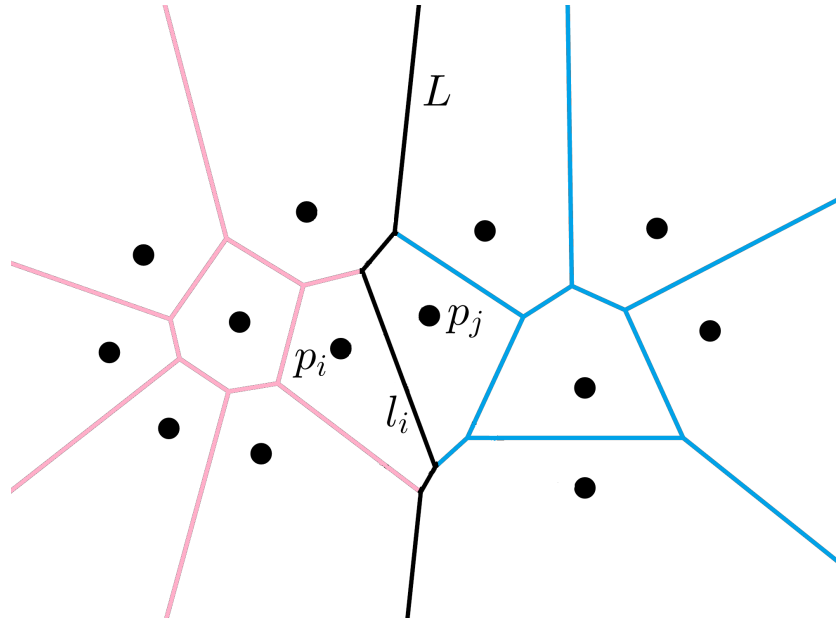


Figura 3.19: Línea divisora  $L$ .

La arista  $l_i$  desaparece, cuando los puntos  $p_i$  y  $p_j$  están en lados distintos de la línea divisora  $L$ , pues al separar los conjuntos  $P_1$  y  $P_2$  entonces los puntos dejan de ser vecinos. Entonces al reunir los dos diagramas nuevamente, habrá que incluir a  $l_i$  como parte de una nueva frontera, ver Figura (3.19).

### 3.5.2. *El Grafo Frontera.*

Denotaremos por  $\delta$  el subgrafo de Voronoi de  $P$ , tal que las aristas de  $\delta$  están determinados por parejas de puntos  $p_i$  y  $p_j$  tales que  $p_i \in P_1$  y  $p_j \in P_2$ . Este  $\delta$  será llamado el **grafo frontera**. Como podemos observar en la Figura (3.19) la línea divisora  $L = \delta$ . Seguidamente daremos una serie de resultados teóricos sobre este grafo.

**Lema 3.5.3.** *Cada vértice de  $\delta$  tiene grado exactamente igual a dos.*

#### Demostración:

Sea  $v$  un vértice de  $\delta$ . Como cada  $\delta$  es un subgrafo de  $V_{or}(P)$ , entonces  $v$  es también un vértice de Voronoi y por lo tanto tiene grado menor o igual a 3.

Si el grado de  $\sigma(v) = 3$ , entonces existen aristas  $l_1, l_2$  y  $l_3$  de  $\delta$  incidentes en  $v$ . Dichas aristas delimitan polígonos  $V(p_1), V(p_2)$  y  $V(p_3)$ . Podemos suponer que  $l_1$  está en la frontera entre  $V(p_1)$  y  $V(p_2)$ ,  $l_2$  está en la frontera entre  $V(p_3)$  y  $V(p_2)$  y  $l_3$  está en la frontera entre  $V(p_1)$  y  $V(p_3)$ . Como se observa en la Figura (3.20).

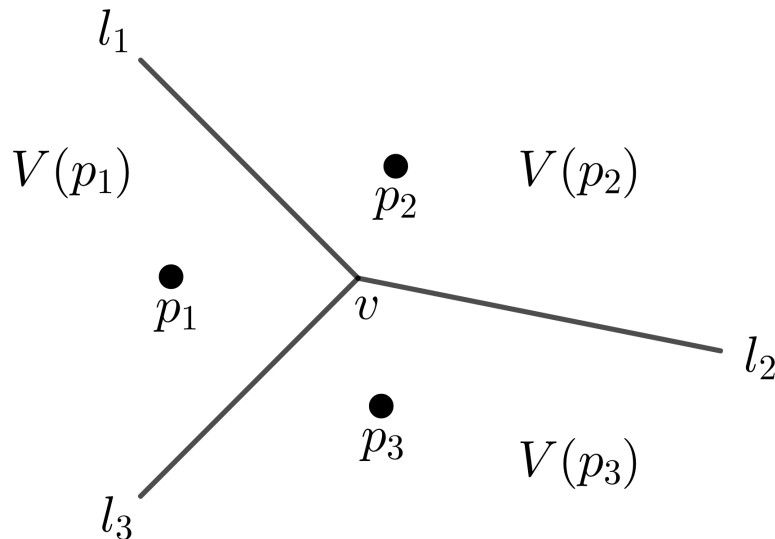


Figura 3.20: Un vértice de grado 3.

Supóngase que  $p_1 \in P_1$  y  $p_2 \in P_2$ . Entonces como  $l_3 \in \delta$  se tiene que  $p_3 \in P_2$ . Y también como  $l_2 \in \delta$  se tiene que  $p_3 \in P_1$ . Esto es una contradicción.

Si el vértice tiene grado 1, entonces  $l_1$  es la única arista de Voronoi incidente con  $v$ . Pero  $l_1$  es una arista que separa dos regiones de Voronoi  $V(p_1)$  y  $V(p_2)$ , definidas por los puntos  $p_1$  y  $p_2$ .

Supongamos que  $p_1 \in P_1$  y  $p_2 \in P_2$ . Entonces el punto  $p_3$  en la Figura (3.20), no pertenece a ninguno de los conjuntos  $P_1$  o  $P_2$ . En efecto, si asumimos que  $p_3 \in P_2$ , entonces  $l_3 \in \delta$  y  $l_3$  es incidente a  $v$ , lo cual es imposible. Si, por otra parte, suponemos que  $p_3 \in P_1$  llegamos a la misma contradicción. Luego, el grado  $\sigma(v) = 2$ . ■

Hasta el momento, conocemos muy poco acerca del grafo frontera  $\delta$ . Este puede tener

varias componentes conexas. Algunas podrán ser ciclos y otras serán cadenas. Sin embargo, si  $\delta$  tiene alguna componente cíclica, digamos  $\delta_1$ , entonces  $\delta_1$  encierra algún punto  $p$  de  $P$  y esto es imposible. Luego, no puede haber ciclos entre las componentes de  $\delta$ . Recordemos que una cadena es un tipo de grafo  $G$ , donde todos sus vértices son de grado dos y  $G$  no es cíclico.

**Definición 3.5.4.** *Un grafo  $G$  se llama **cadena monótona** si  $G$  es una cadena, y la intersección de  $G$  con cualquier recta horizontal contiene exactamente un punto.*

De acuerdo a la definición, toda cadena monótona con un número finito de vértices posee dos lados que son rayos, uno en la parte de arriba y otro abajo.

**Lema 3.5.5.** *Toda componente conexa de  $\delta$  es una cadena monótona.*

**Demostración:**

En primer lugar, notemos que en  $\delta$  no hay lados horizontales. Si  $l_i$  es un lado horizontal de  $\delta$ , entonces existen puntos  $p_1 \in P_1$  y  $p_2 \in P_2$  tales que la mediatriz del segmento  $\overline{p_1 p_2}$  contiene a  $l_i$ . Luego  $p_1$  y  $p_2$  están sobre una misma recta vertical. Esto es imposible, pues los conjuntos  $P_1$  y  $P_2$  están separados por una recta vertical.

Supongamos que tenemos una cadena  $C \in \delta$ , la cual no es monótona. Luego, existe una recta horizontal  $L$  y tres vértices  $v_1, v_2$  y  $v_3$  de  $\delta$  tal que  $v_1$  y  $v_3$  están por encima de  $L$  y  $v_2$  está por debajo. Ver Figura (3.21).

Como  $v_2$  es un vértice de Voronoi, su grado es tres y por lo tanto existe un cuarto vértice  $v_4$  adyacente a  $v_2$ . Claramente,  $v_4$  está por debajo de  $L$  pues los polígonos de Voronoi son convexos.

Tenemos entonces tres aristas de Voronoi  $v_1 v_2, v_2 v_4$  y  $v_2 v_3$ . Asociados a estas tres aristas hay tres puntos en  $P$ , los cuales son  $p_1, p_2$  y  $p_3$ . Supóngase que  $p_2 \in P_2$ . Entonces se debe tener que  $p_1 \in P_1$ . Pero como  $P_1$  y  $P_2$  están divididos por una línea vertical  $L'$ , esta debe pasar entre  $p_1$  y  $p_2$ . Luego  $p_3$  está a la derecha de  $L'$  y por lo tanto  $p_3 \in P_2$ . Esto es una contradicción. Luego, la cadena  $C$  debe ser monótona.

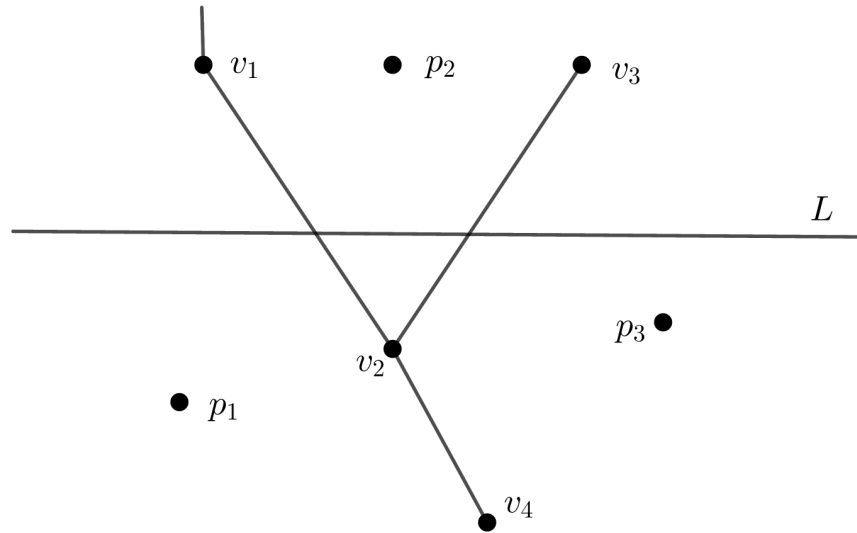


Figura 3.21: Una cadena  $C$  de  $\delta$  no monótona.

■

**Lema 3.5.6.** *El grafo frontera  $\delta$  tiene una sola componente conexa.*

**Demostración:**

En primer lugar,  $\delta$  debe tener al menos una componente conexa, pues el diagrama de Voronoi es conexo y al menos existe una arista  $l_i$  que divide dos regiones de Voronoi; una en  $P_1$  y la otra en  $P_2$  y por lo tanto  $l_i \in \delta$ .

Supongamos que  $\delta$  tenga mas de una componente conexa. Por los dos lemas anteriores ellas son cadenas monótonas, de longitud infinita, que no se intersectan. Cada cadena divide al plano en dos regiones disjuntas: una a la derecha y otra a la izquierda. Supóngase que  $C_1$  y  $C_2$  son dos cadenas de  $\delta$  que están una al lado de la otra, es decir, no hay otra cadena entre ellas. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $C_1$  está a la izquierda de  $C_2$ . Véase la Figura(3.22).

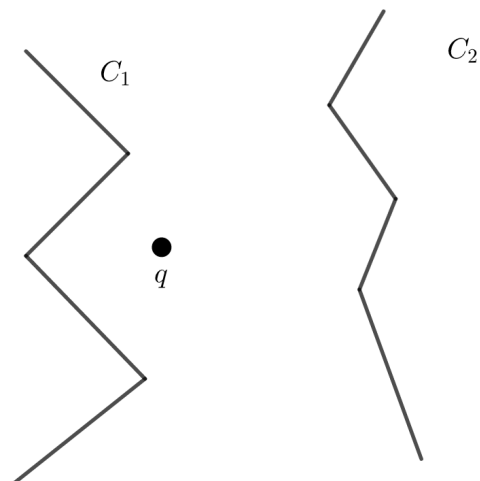


Figura 3.22: Dos cadenas de  $\delta$  consecutivas.

Entonces todos los polígonos de Voronoi que están a la izquierda de  $C_1$  pertenecen a  $V_{or}(P_1)$  y los polígonos que están a la derecha pertenecen a  $V_{or}(P_2)$ . Sea  $q$  un punto intermedio entre ambas cadenas. Entonces, por estar a la derecha de  $C_1$  se tiene que  $q \in P_2$ . Por otro lado el punto  $q$  se halla a la izquierda de la cadena  $C_2$  y por lo tanto  $q \in P_1$ . Esto es una contradicción. Por lo tanto no hay puntos intermedios entre ambas cadenas. Esto implica que el diagrama de Voronoi de  $P$  no es conexo, lo cual es falso. Por lo tanto no hay más de una cadena en  $\delta$ . ■

### *Un Algoritmo para Construir la Frontera.*

Daremos un algoritmo de concatenación para dos envolventes. La clave en este proceso, será construir una línea tangente a ambos conjuntos, por la parte de arriba y otra por debajo, que nos sirvan de puente para empalmar. Estas líneas serán llamadas **Puente superior** y **Puente inferior** respectivamente. Daremos en detalle la construcción del puente inferior. El puente superior se construye en forma parecida.

Comenzamos con una primera aproximación del puente considerando la línea que une a  $x$  (el punto más a la derecha de  $P_1$ ) con  $y$  (el punto más a la izquierda de  $P_2$ ). La idea es ir bajando hasta llegar a la línea tangente a ambos polígonos.



Recordemos que los vértices de cada uno de los polígonos están ordenados por subíndices en sentido contrario a las agujas del reloj. A medida que vamos bajando, recorriendo los vértices del lado derecho de  $P_1$ , los índices disminuyen. Para los vértices del lado izquierdo de  $P_2$ , los índices van aumentando.

**Algoritmo Línea Puente Inferior.**

■ **Entrada:** Las envolventes convexas de  $P_1$  y  $P_2$ .

■ **Salida:** La línea puente inferior.

1. Calcule  $x_i = x$ , el punto más a la derecha de  $P_1$ .

2. Calcule  $y_j = y$ , el punto más a la izquierda de  $P_2$ .

3. **Mientras**  $L = \overline{xy}$  no sea una tangente doble para  $P_1$  y  $P_2$ . **Hacer:**

4. **Mientras**  $L$  no sea una tangente para  $P_1$ . **Hacer:**

$x := x_{j-1}$ , los índices van disminuyendo puesto que  $x$  va bajando en sentido de las manecillas del reloj.

5. **Mientras**  $L$  no sea una tangente para  $P_2$ . **Hacer:**

$y := y_{j+1}$ , los índices van aumentando puesto que  $y$  va bajando en sentido contrario a las manecillas del reloj.

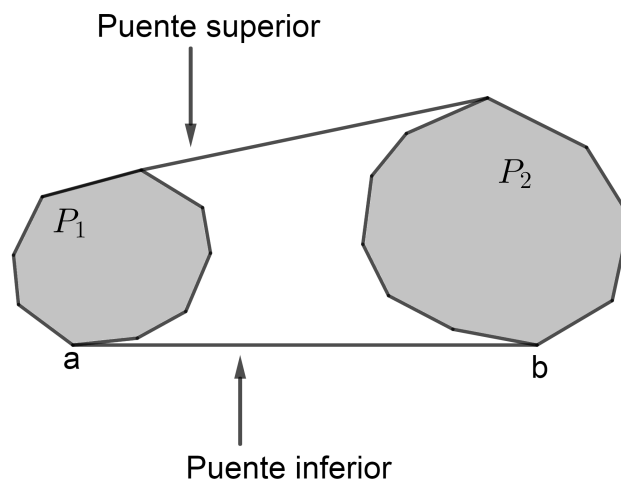


Figura 3.23: Puentes de empalme.

Estamos ahora en condiciones de dar un algoritmo para construir la cadena de la frontera  $\delta$  que concatenará los dos diagramas de Voronoi  $V_{or}(P_1)$  y  $V_{or}(P_2)$ . Sabemos que  $\delta$  posee dos lados que son rayos: Uno en la parte alta, denotado por  $L_u$  y otro en la parte baja, denotado por  $L_d$ . Como se observa en la Figura (3.24).

En primer lugar, calculamos las envolventes convexas de  $P_1$  y  $P_2$ . Luego hallamos las dos líneas de puentes para empalmar ambas envolvente. La línea del puente superior contiene un punto  $p$  en  $P_1$  y un punto  $q$  en  $P_2$  que son los puntos de contacto. El rayo  $L_u$  está contenida en la mediatriz que une los puntos  $p$  y  $q$ .

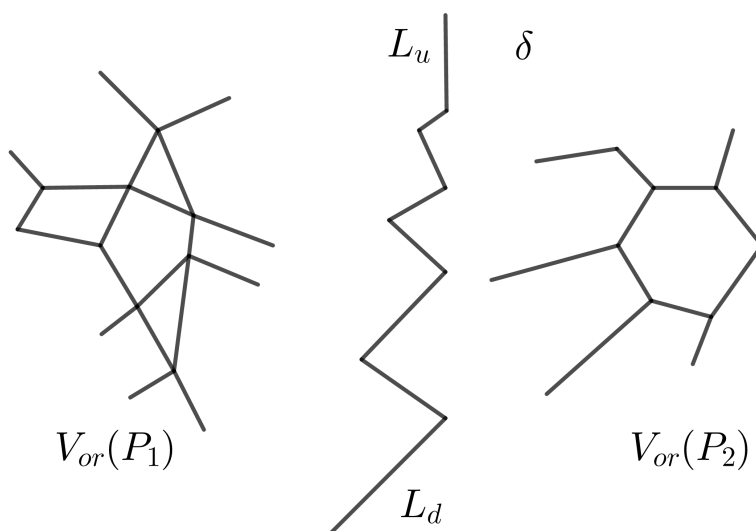


Figura 3.24: Construyendo la frontera de  $\delta$ .

Comenzamos a recorrer la cadena  $\delta$  desde la parte de arriba bajando por el rayo  $L_u$  hasta que se consiga con la primera arista de Voronoi de alguno de los dos diagramas. Supongamos que esta línea se corte con una arista  $l_i$  perteneciente a  $V_{or}(P_2)$ . Entonces esta arista divide dos regiones de Voronoi  $V(q)$  y  $V(q')$ , determinadas por los puntos  $q$  y  $q'$ .

Entonces debemos cambiar de dirección en el punto de corte. La nueva dirección viene dada por la mediatriz que une el segmento  $\overline{pq'}$ . Tenemos entonces que hacer un giro a la derecha. Continuamos bajando por esta mediatriz hasta que cortemos otra arista de Voronoi de alguno de los diagramas.

Si el rayo  $L_u$  hubiese cortado una arista de Voronoi de  $P_1$  desde el inicio del recorrido, entonces al entrar en un nuevo polígono de Voronoi de  $P_1$ , determinado por un punto  $p'$  cambiamos de dirección siguiendo la mediatriz del segmento  $\overline{p'q}$ . En este caso damos un giro hacia la izquierda.

De esta manera continuamos bajando, siguiendo la trayectoria de las mediatrices de los puntos de  $P_1$  y  $P_2$ , cuyos polígonos de Voronoi son finitos. Esta regla se enuncia:

*“Si usted viene bajando por una mediatriz cualquiera que une los puntos  $a$  y  $b$ , con  $a \in P_1$  y  $b \in P_2$  y se consigue con una arista de Voronoi y entra a una nueva región determinada por el punto  $c$ , entonces haga un cambio de dirección siguiendo la mediatriz del segmento  $\overline{ac}$  si  $c \in P_2$  o  $\overline{cb}$ , si  $c \in P_1$ ”.*

Al final, nos conseguiremos con la línea infinita  $L_d$  y aquí termina el proceso.

***Algoritmo Concatenamiento.***

- **Entrada:** Conjuntos de Voronoi  $P_1$  y  $P_2$  de tamaño  $\frac{n}{2}$  cada uno.
- **Salida:** La línea de frontera que los divide.
  1. Construya la envolvente convexa de  $P_1$  y  $P_2$ .
  2. Construya los puentes de unión entre ambas envolventes, usando los algoritmos *PUENTE SUPERIOR* y *PUENTE INFERIOR*. Ver Figura (3.23).
  3. Construya  $\delta$  siguiendo las reglas establecidas. Hallar las mediatrices  $L_u$  del puente superior y  $L_d$  del puente inferior.
  4. Comience en un punto suficientemente alto de  $L_u$  y comience a bajar disminuyendo la coordenada  $y$  de los puntos.
  5. Continúe bajando, siguiendo la trayectoria de las mediatrices determinadas por los puntos a la derecha de la envolvente de  $P_1$  y los punto a la izquierda de la envolvente de  $P_2$ .
  6. Determínese cuando se intersecte el rayo de  $L_d$ .

7. Elimínesese aquellas partes de los vértices de Voronoi que intersectan a  $\delta$ .

A continuación tenemos el algoritmo de Voronoi, para la construcción de este algoritmo se hace uso del algoritmo de concatenamiento.

***Algoritmo Voronoi.***

- **Entrada:** Un conjunto  $P$  de  $n$  puntos del plano.
  - **Salida:** El diagrama de Voronoi de  $P$ .
1. Usando el algoritmo de las medianas, divida el conjunto  $P$  en dos partes iguales  $P_1$  y  $P_2$  mediante una línea vertical.
  2. Recursivamente aplique el algoritmo de concatenamiento a  $P_1$  y  $P_2$ .
  3. Hacer  $V_{or}(P) = V_{or}(P_1) \cup V_{or}(P_2) \cup \delta$ .

**Ejemplo 3.5.7.** Sea  $P$  un conjunto de 8 puntos en el plano, encuentre el diagrama de Voronoi  $V_{or}(P)$  utilizando la concatenación y el grafo frontera.

**Solución:**

Primeramente dividimos al conjunto  $P$  en dos subconjuntos  $P_1$  y  $P_2$  mediante una línea vertical como se observa en la Figura (3.25).

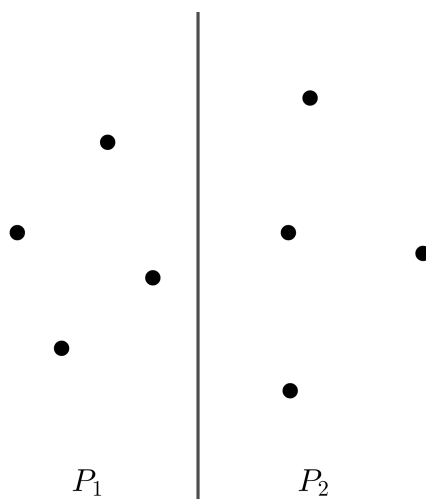


Figura 3.25: El conjunto  $P$  dividido en dos subconjuntos.

Seguidamente calculamos el diagrama de Voronoi  $V_{or}(P_1)$  que se encuentra a la izquierda de la línea vertical, ver Figura (3.26).

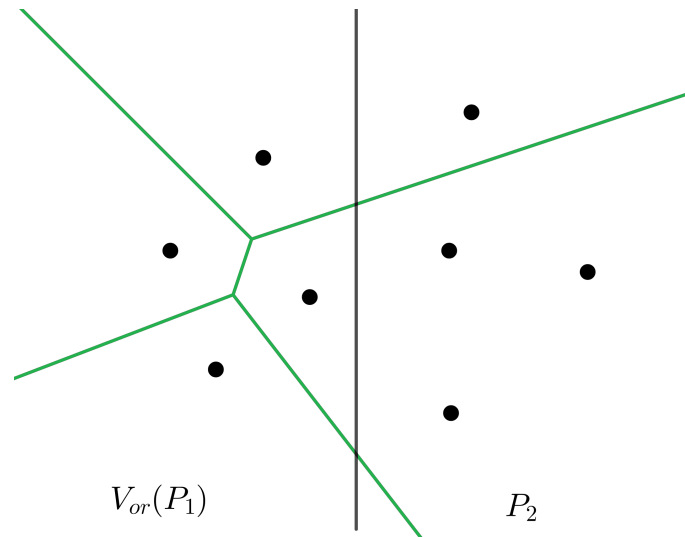


Figura 3.26: Diagrama de Voronoi  $V_{or}(P_1)$ .

De igual manera calculamos el diagrama de Voronoi  $V_{or}(P_2)$  que se encuentra a la derecha de la línea vertical, ver Figura (3.27).

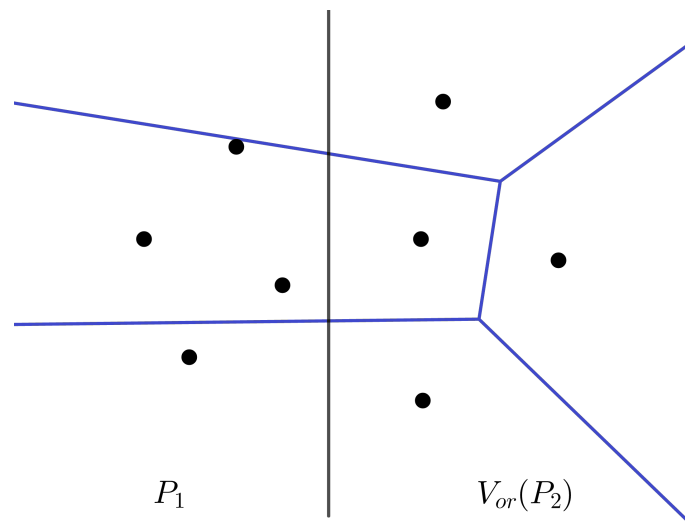


Figura 3.27: Diagrama de Voronoi  $V_{or}(P_2)$ .

Ahora se construye la cadena del grafo frontera  $\delta$  que concatenará los dos diagramas de Voronoi  $V_{or}(P_1)$  y  $V_{or}(P_2)$ . Como se observa en la Figura (3.28).

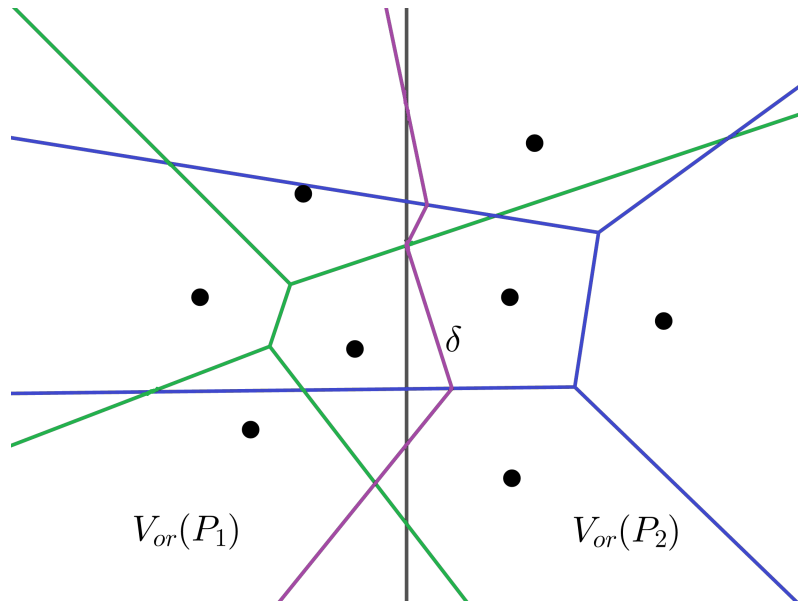


Figura 3.28: El grafo frontera  $\delta$ .

Luego, se eliminan todas las líneas de cada diagrama de Voronoi que no caen a su lado de la línea divisora. Así, el diagrama de Voronoi  $V_{or}(P) = V_{or}(P_1) \cup V_{or}(P_2) \cup \delta$ . Ver Figura (3.29).

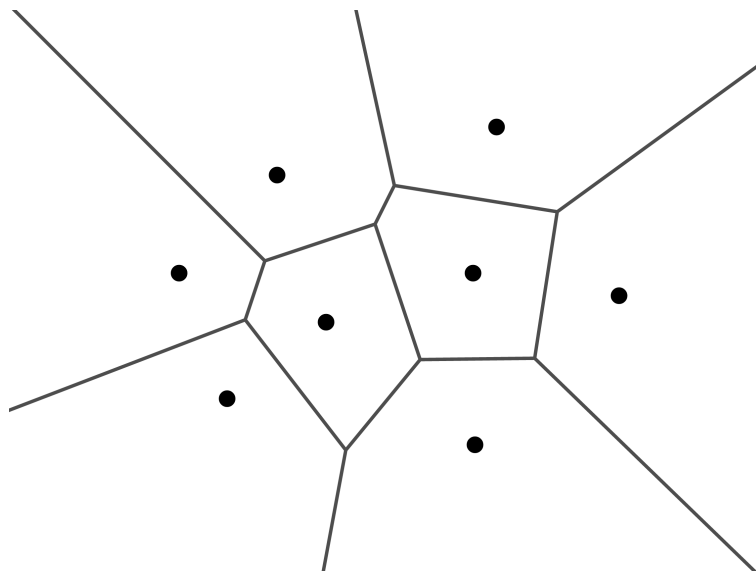


Figura 3.29: Diagrama de Voronoi  $V_{or}(P)$ .

■

## 3.6. Principales Algoritmos de Construcción del Diagrama de Voronoi.

### 3.6.1. *Intersección de Semiplanos.*

Recordando la Definición (3.2.5), un polígono de Voronoi ordinario asociado a  $p_i$ ,

$$V(p_i) = \bigcap_{j \in I_n, j \neq i} H(p_i, p_j)$$

ésta sugiere un método para la construcción inmediata de un diagrama de Voronoi, de hecho, sugiere que cualquier celda de Voronoi se da al conjunto de puntos en común entre los semiplanos  $H(p_i, p_j)$ , con  $j \neq i$ . La estrategia nos sugiere una construcción del diagrama celda por celda, o para cada punto se calcula la celda correspondiente como la intersección de semiplanos. Ver Figura (3.30).

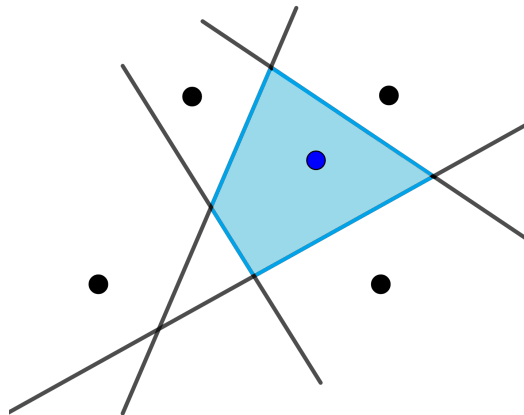


Figura 3.30: Intersección de semiplanos.

Para llevar a cabo esta intersección se puede utilizar un algoritmo de la siguiente manera:

**Algoritmo: *Intersecta Semiplanos* ( $\mathcal{H}$ ).**

- **Entrada:** Un conjunto  $\mathcal{H}$  de semiplanos.
- **Salida:** La región poligonal convexa.

$$V := \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$$

1. **Si**  $\text{card}(\mathcal{H}) = 1$ , **entonces**

$V :=$  el único semiplano  $H \in \mathcal{H}$ .

2. **De otro modo.**

Dividir  $\mathcal{H}$  en dos subconjuntos  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  de magnitud  $\frac{n}{2}$  cada uno.

3. **Terminar si.**

- $V_1 :=$  Intersecta Semiplano ( $\mathcal{H}_1$ ).

- $V_2 :=$  Intersecta Semiplano ( $\mathcal{H}_2$ ).

4. **El retorno**  $V :=$  Intersecta regiones convexas  $V_1$  y  $V_2$ .

Este es un algoritmo general para intersectar cualquier conjunto de semiplanos pero para hallar el polígono de Voronoi para un  $p_i$  debemos intersectar los semiplanos de la forma  $H(p_i, p_j)$ , con  $i \neq j$ .

### 3.6.2. *Algoritmo Incremental.*

La idea es generar celdas de forma incremental. En lugar de hallar la intersección de cada celda con respecto a todas las demás, se llevan a cabo los respectivos cálculos sólo con aquellas que son afectadas por una nueva celda que se inserte. En la técnica de barrido de plano, esto puede verse como: una vez que se define un ordenamiento de puntos en el plano, se toman uno a uno y se añaden al diagrama. Ver Figuras (3.31) y (3.32).



El diagrama final se construye punto por punto, un primer algoritmo podría ser el siguiente, colocando los eventos en una cola **Event Queue**: fila (cola) de eventos que están esperando a ser procesados por un programa receptor.

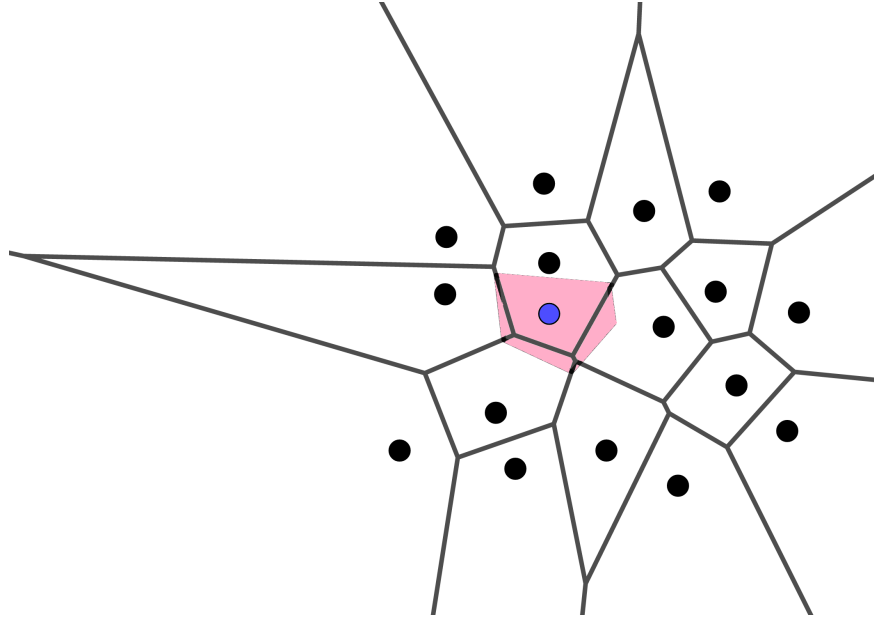


Figura 3.31: Idea intuitiva del algoritmo incremental.

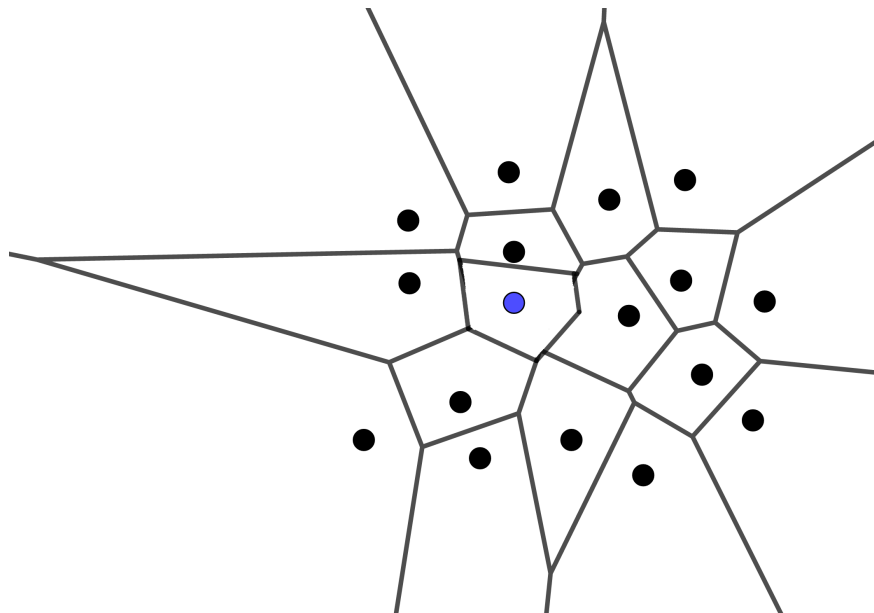


Figura 3.32: Algoritmo incremental.

*Algoritmo: Voronoi Incremental.*

- **Entrada:** Un conjunto  $P$  de puntos en el plano.
  - **Salida:** Diagrama de Voronoi  $V_{or}(P)$ .
1. Ordenar los puntos de  $P$  con base a la coordenada  $X$  y acomodarlos en una cola de eventos.
  2. **Mientras** que la cola de eventos no está vacío, **hacer:**  
Recopilar el siguiente punto.
  3. **Si**  $p =$  primer punto, **entonces**  
 $V_{or}(P) =$  plano.
  4. **De otro modo.**  
Determinar la celda en la que está contenido. Encontrar el eje entre  $p$  y su celda contenedora. Si el eje influye en otra celda adyacente, encontrar el nuevo eje. Continuar hasta que sea necesario. Actualizar el diagrama.
  5. **Terminar si.**
  6. **Terminar mientras.**
  7. **El retorno.** Diagrama obtenido.

### 3.6.3. *Algoritmo de Fortune.*

Hasta mediados de los ochenta, la mayoría de las implementaciones para computar el diagrama de Voronoi usaban el algoritmo incremental cuadrático, admitiendo su mayor lentitud para evitar la complejidad del método divide y vencerás. En 1985, Steven Fortune inventó un inteligente algoritmo de barrido plano.

Fortune consideró que, con el método tradicional de barrido del plano, no alcanzaba y por ello utilizó un método “distorsionado”.

El problema al barrer el plano con una línea es que la parte del diagrama que cae por encima de la línea puede modificarse por puntos que están debajo. Para evitar este problema se utiliza la línea de playa que es el conjunto de puntos que equidistan de la línea de barrido y algún  $p_i$  por encima de la línea de barrido.

Para que los sitios que se encuentran por debajo de la línea de barrido no modifiquen el diagrama que se encuentra por encima de ella, solo mantendremos la parte del diagrama que no puede ser afectada por algún sitio que esté debajo de la línea de barrido.

Veamos, mediante la siguiente Figura (3.33), como se comporta el algoritmo de Fortune.

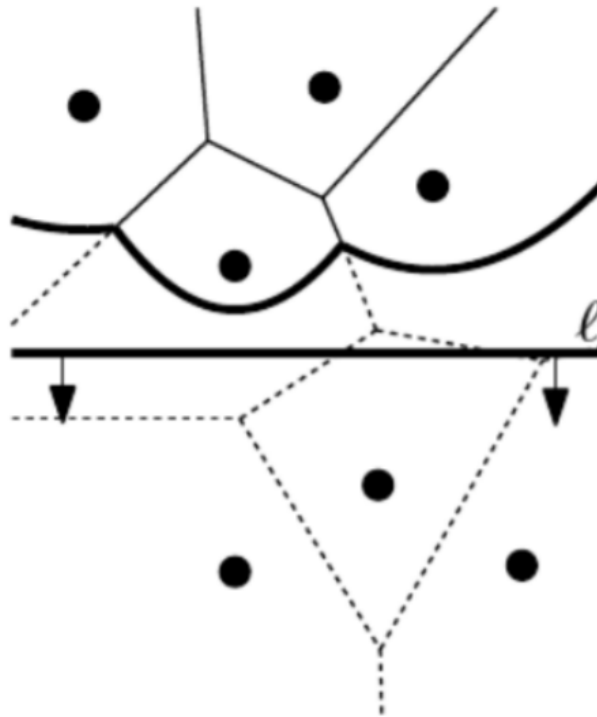


Figura 3.33: Algoritmo de Fortune.

Una vez que este diagrama distorsionado es obtenido, puede ser corregido en tiempo  $O(n)$  para producir el diagrama de Voronoi correcto dentro de un rectángulo en una estructura *DCEL* (siglas inglesas que significan lista de aristas doblemente conectadas) Doubly Connected Edge List.

*Algoritmo de Fortune.*

- **Entrada:**  $P := \{p_1, \dots, p_n\}$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano.
  - **Salida:** Diagrama de Voronoi  $V_{or}(P)$  dentro de un rectángulo en una estructura *DCEL*.
1. Inicializar la cola de eventos (Event Queue)  $Q$  con todos los eventos del sitio (Site Events).
  2. **Mientras** que la cola de eventos  $Q$  no está vacío, **hacer:**  
 Considerar el evento con mayor coordenada  $Y$  de  $Q$ .
  3. **Si** el evento es un evento del sitio del punto  $p_i$ , **entonces**  
 Tratar evento del sitio( $p_i$ ).
  4. **De otro modo.**  
 Tratar evento circular( $p_c$ ), donde  $p_c$  es el punto más bajo del círculo que causa el evento.
  5. **Termina si.**  
 Eliminar el evento de  $Q$ .
  6. **Termina mientras.**  
 Los vértices internos presentes todavía en  $W$  (el árbol binario) pertenecen a los rayos del diagrama de Voronoi. Calcular un rectángulo que contenga todos los vértices del diagrama de Voronoi en su interior, uniéndole los rayos, modificando la estructura *DCEL* apropiadamente.
  7. **El retorno.** Diagrama obtenido.

### 3.7. Aplicaciones de los Diagramas de Voronoi.

A continuación presentaremos algunas aplicaciones de los diagramas de Voronoi y como estos se utilizan para encontrar soluciones a diferentes problemas.

### 3.7.1. *Brote de Cólera de 1854 en Londres.*

En los años 1853 y 1854, Londres enfrentó una tercera epidemia de cólera. Por aquel entonces no se conocía con exactitud la etiología ni el método de transmisión del cólera, y se debatían entre dos posibilidades: el contagio por contacto con el enfermo, sus ropas y pertenencias; o la teoría miasmática que atribuían la transmisión a condiciones atmosféricas, como los vientos.

Por aquél entonces los habitantes de ciertos distritos del sur de la ciudad extraían agua del Támesis o la obtenían de bombas de uso público. Pero los desechos humanos eran vertidos en alcantarillas improvisadas o directamente al río. John Snow, médico y residente en la zona de Broad Street, sostenía que la gente, al beber agua contaminada extraída del río, ingería materia insana y de esta manera contraía el cólera.

A principios de septiembre de 1854, el sector Golden Square fue escenario de un brote epidémico de gran intensidad (500 muertes en 10 días). Snow era vecino del área y sabía que la mayoría extraía agua de una bomba en la calle Broad Street, por ello registró las direcciones de 83 personas fallecidas en el área. Pronto confirmó que la mayoría de los moradores se abastecían de la bomba mencionada, dado que calculó la distancia entre la residencia de cada víctima y la bomba más cercana.

En la Figura (3.34), los puntos identifican los domicilios de las personas fallecidas, mientras que las cruces representan las bombas, se ha resaltado la bomba de Broad Street con una cruz roja.



Figura 3.34: Análisis del brote de cólera en Londres, por John Snow, la cruz roja representa la bomba de Broad Street.

**Fuente:** U. Martínez Rodríguez (2015). Universidad Autónoma. Puebla, México.

John Snow, usó el método geográfico deduciendo que la causa de la enfermedad era el consumo de aguas contaminadas por heces. Para ello, en un mapa señaló la distribución de muertes por cólera y de las fuentes de agua potable de la ciudad, delimitando las regiones de Voronoi de cada una de esas bombas.

Snow calculó la distancia entre la residencia de cada difunto y la bomba de agua más cercana, llegando a la conclusión de que la zona más afectada por el cólera se correspondía con la región de Voronoi asociada a la bomba de Broad Street, ya que en su región se dieron 73 de 83 casos. Tras la inhabilitación de la bomba, se observó una reducción en la incidencia y mortandad por cólera. Aunque posteriormente, debido a la incredulidad de las autoridades y la presión popular, se habilitó nuevamente su uso.

Para comprobar si en verdad la bomba de Broad Street es la más cercana al domicilio de la zona con mayor número de muertes por cólera, en la Figura (3.35) se ha dibujado el diagrama de Voronoi tomando como puntos generadores cada bomba en el mapa.

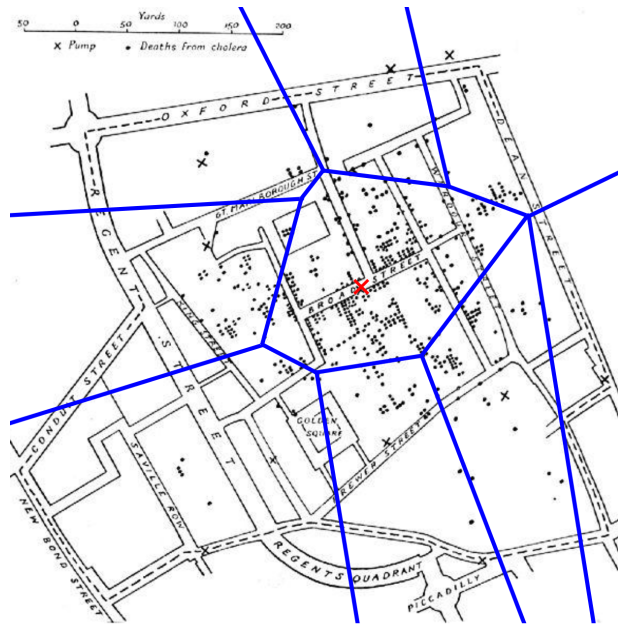


Figura 3.35: Diagrama de Voronoi del análisis de brote de cólera en Londres.

**Fuente:** U. Martínez Rodríguez (2015). Universidad Autónoma. Puebla, México.

### 3.7.2. *Estudio de la Estructura de los Huesos.*

En nuestros huesos podemos distinguir dos zonas diferenciadas: el hueso compacto y el hueso esponjoso o trabecular. Ver Figura (3.36).

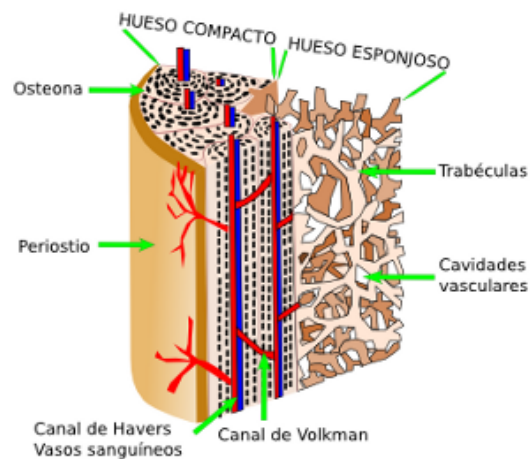


Figura 3.36: Estructura interna del hueso.

**Fuente:** <https://naukas.com/2011/12/23/cada-uno-en-su-region-y-voronoi-en-la-de-todos/>

Pues bien, existen una importante cantidad de trabajos enfocados a generar modelos en 2 dimensiones que representen la arquitectura trabecular (Estructura esponjosa en la que se intercalan huecos llenos de médula ósea roja.) de los huesos, usando diagramas de Voronoi, tomando como puntos en este caso, los centros de los poros del hueso esponjoso. Ver Figura (3.37).

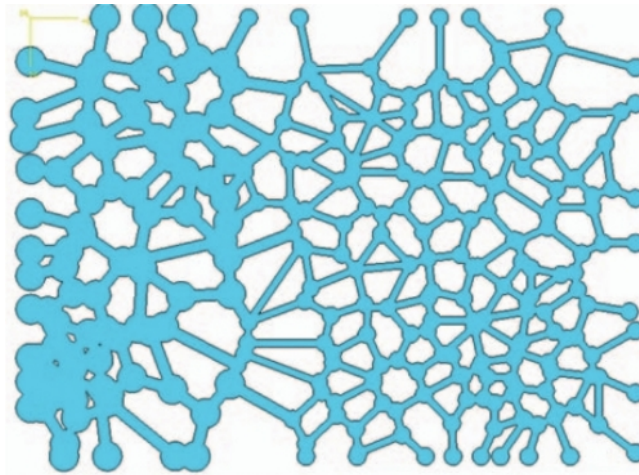


Figura 3.37: Arquitectura trabecular de los huesos usando diagramas de Voronoi.

**Fuente:** Ramírez Díaz E.I. (UDIATEM). Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

### 3.7.3. *Aplicaciones en Deporte.*

Si pensamos en los jugadores sobre el terreno de juego como puntos sobre un plano, podemos asignarle a cada uno de ellos su región de Voronoi que estará formada por los puntos del terreno de juego que están más cerca de cada jugador que del resto. Evidentemente, como los jugadores no están quietos, en general, este diagrama irá modificándose con el tiempo pero nos puede decir, en cada instante, qué equipo está mejor posicionado en el campo.

Tomemos por ejemplo dos equipos, el rojo y el azul, ver Figura (3.38).



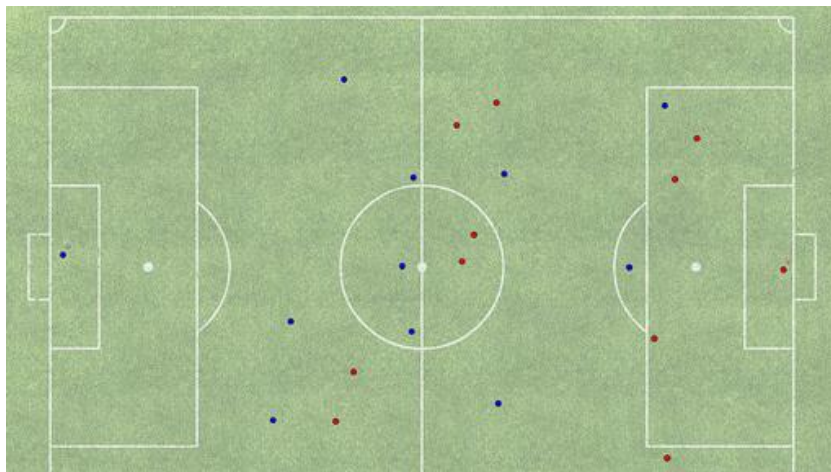


Figura 3.38: Equipos rojo y azul.

**Fuente:** Clara Grima, profesora de la Universidad de Sevilla. El diagrama de Voronoi, la forma matemática de dividir el mundo.

A simple vista la ventaja posicional de un equipo sobre el otro no esta muy clara, pero si dibujamos el diagrama de Voronoi de los jugadores, se puede observar que el equipo azul no sólo ocupa mayor región del campo, sino que sus regiones están todas conectadas, con lo cual se favorecen los pases entre los distintos jugadores de dicho equipo (cosa que no ocurre con el rojo). Ver Figura (3.39).

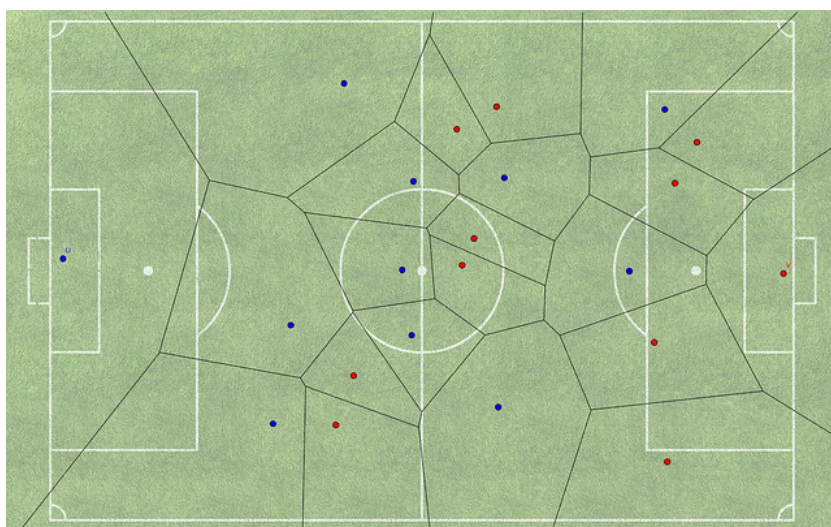


Figura 3.39: Diagrama de Voronoi de los equipos.

**Fuente:** Clara Grima, profesora de la Universidad de Sevilla. El diagrama de Voronoi, la forma matemática de dividir el mundo.

Se aprecia aún más claramente si diferenciamos con dos colores las regiones de influencia asociadas a los jugadores de cada uno de los equipos. Como se observa en la Figura (3.40).

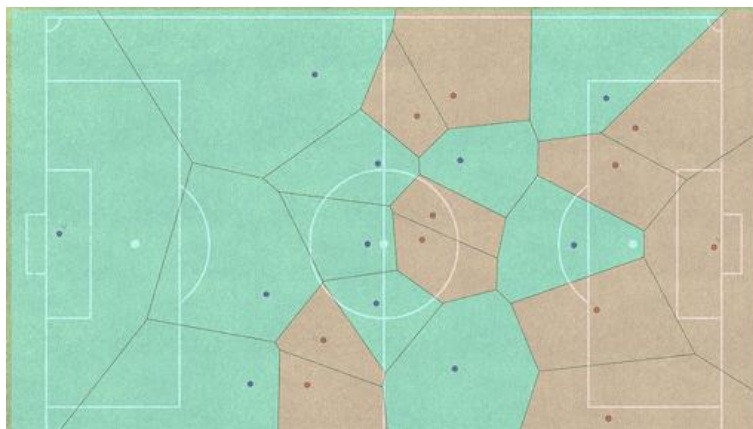


Figura 3.40: Diagrama de Voronoi de los equipos.

**Fuente:** Clara Grima, profesora de la Universidad de Sevilla. El diagrama de Voronoi, la forma matemática de dividir el mundo.

Evidentemente, este diagrama irá variando cuando se muevan los jugadores, pero existen multitud de herramientas que permiten calcular estos diagramas, asignando las regiones de influencia de cada jugador en función de su posición y de la dirección de su movimiento. Después, lo único que necesitamos es un entrenador que sepa cómo aplicarlo.

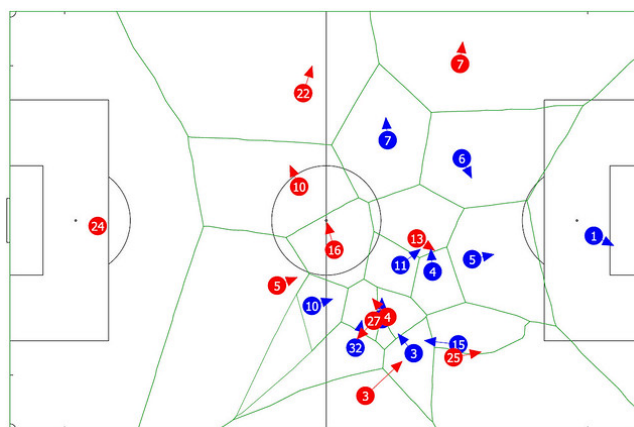


Figura 3.41: Diagrama de Voronoi de los equipos.

**Fuente:** Clara Grima, profesora de la Universidad de Sevilla. El diagrama de Voronoi, la forma matemática de dividir el mundo.

Con todo esto, si tenemos en cuenta el movimiento de los jugadores, el diagrama de Voronoi más preciso de dos equipos tendría más bien la forma de la Figura (3.41).

### 3.7.4. *Modelización de Bosques.*

El diagrama de Voronoi también se ha usado como herramienta de investigación forestal para analizar y predecir la influencia del espacio ocupado por los árboles en la evolución de un bosque.

Manuel Abellanas de la Universidad Politécnica de Madrid, junto a otros investigadores, ha desarrollado un modelo informático denominado VOREST, capaz de simular la evolución de un bosque y calcular automáticamente el área de influencia de un árbol determinado, lo que permite conseguir predicciones precisas sobre la producción de madera.

El proceso se basa en el hecho de que todo árbol tiene a su alrededor un área de influencia de mayor o menor tamaño, y que, en función de dicha área, determina el crecimiento futuro de un árbol individual.

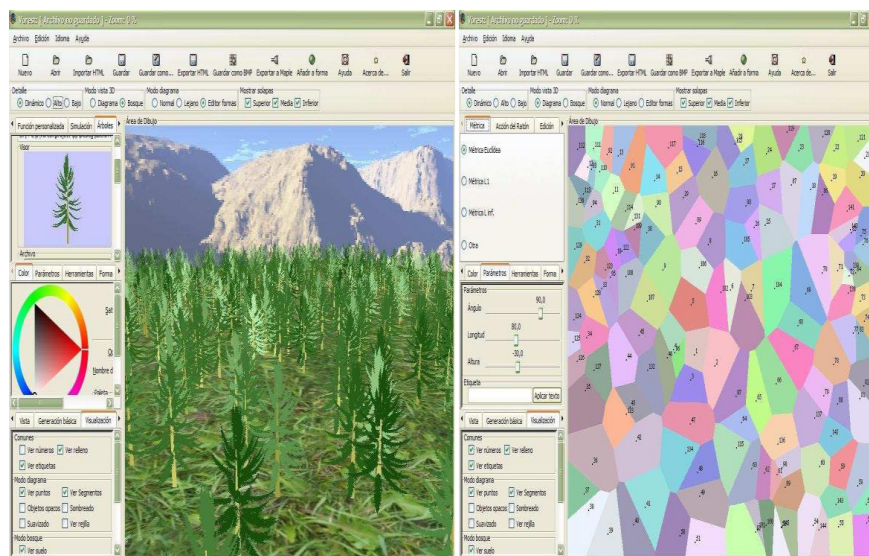


Figura 3.42: Entorno gráfico de VOREST: Modelo de bosque y su correspondiente diagrama de Voronoi.

**Fuente:** B. Abellanas, M. Abellanas, C. Vilas, VOREST: Modelización de bosques mediante diagramas de Voronoi.

La competencia que se produce entre los árboles por dominar ese espacio para poder desarrollarse hace que estos sistemas biológicos estén directamente relacionados con los diagramas de Voronoi.

La información visual que ofrece la aplicación permite representar el diagrama de Voronoi que modeliza las áreas de influencia de cada uno de los árboles cargados en el programa en un instante determinado de su crecimiento. Ver Figura (3.42).

Otra de las funcionalidades de esta herramienta es generar una representación más o menos detallada del aspecto real que podría esperarse de los árboles estudiados en su entorno natural.

De esta forma, la aplicación es capaz de generar una escena tridimensional con un grado de detalle suficientemente alto del aspecto que presenta el bosque en la realidad. Ver Figura (3.43).

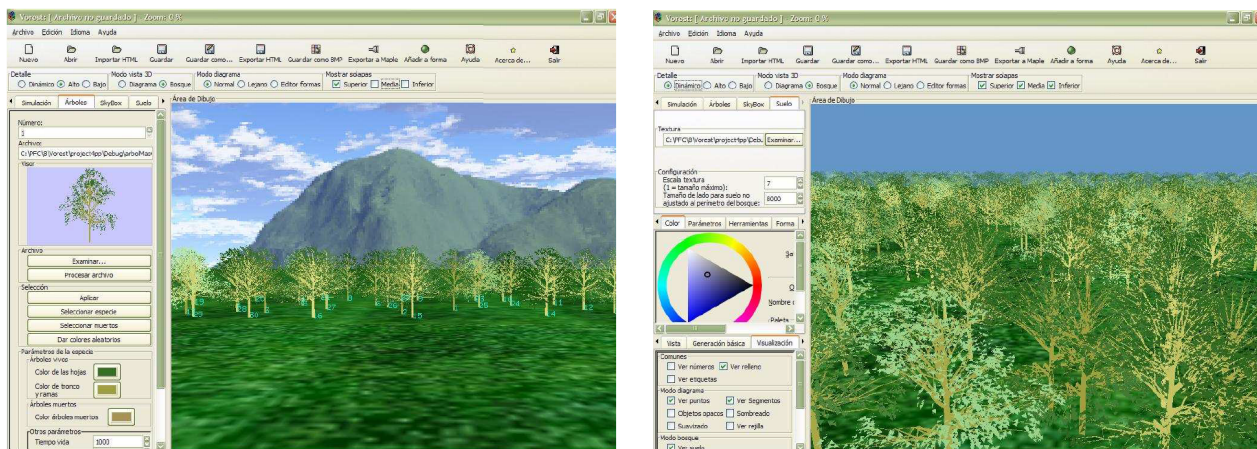


Figura 3.43: Opciones de modelado y visualización.

**Fuente:** B. Abellanas, M. Abellanas, C. Vilas, VOREST: Modelización de bosques mediante diagramas de Voronoi.

La conclusión es que la aplicación VOREST constituye una herramienta útil para la investigación en la Ingeniería Forestal y es un buen ejemplo de cómo la Geometría Computacional se aplica en problemas reales.

### 3.7.5. *Triangulación de Delaunay.*

La triangulación de Delaunay es una de las triangulaciones más interesantes por ser aplicable para la resolución de multitud de problemas aparentemente sin relación entre sí, debido a sus propiedades geométricas, y por contar con algoritmos bastante eficientes para su cálculo. Todo ello además implica que hay una gran cantidad de material escrito sobre este tipo de triangulación.

Las triangulaciones de Delaunay tienen importante relevancia en el campo de la geometría computacional, especialmente en gráficos 3D por computadora.

Una triangulación de Delaunay es una red de triángulos conexa y convexa que cumple la condición de Delaunay.

La condición de Delaunay de un triángulo establece que la circunferencia circunscrita del mismo no debe contener ningún otro vértice de la triangulación en su interior, aunque sí se admiten vértices situados sobre la circunferencia.

En la Figura (3.44) podemos observar que el vértice  $d$  se encuentra en el interior de la circunferencia circunscrita por lo que no se cumple la condición de Delaunay.

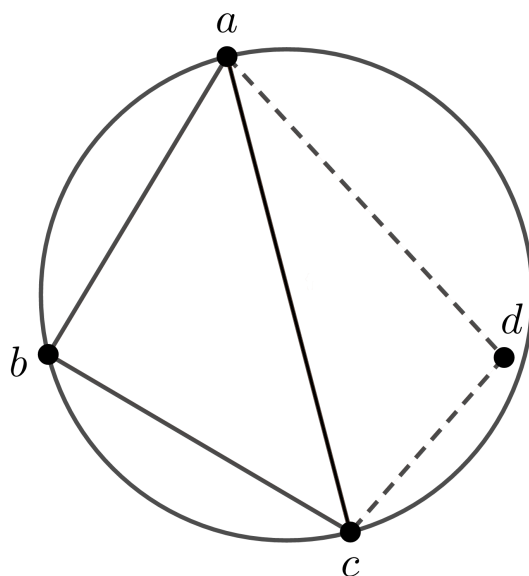


Figura 3.44: El vértice  $d$  completamente en el interior de la circunferencia circunscrita.

Se dice que una red de triángulos es una triangulación de Delaunay si todos los triángulos de la misma cumplen la condición de Delaunay. Es decir, que cada circunferencia circunscrita de cada triángulo no contiene vértices de la triangulación en su interior. Esta definición original para espacios bidimensionales se puede ampliar a espacios tridimensionales o incluso dimensiones superiores, usando la esfera circunscrita en vez de la circunferencia circunscrita.

En la Figura (3.45) podemos observar que el vértice  $d$  se encuentra en el exterior de la circunferencia circunscrita del triángulo  $abc$  por lo que cumple la condición de Delaunay.

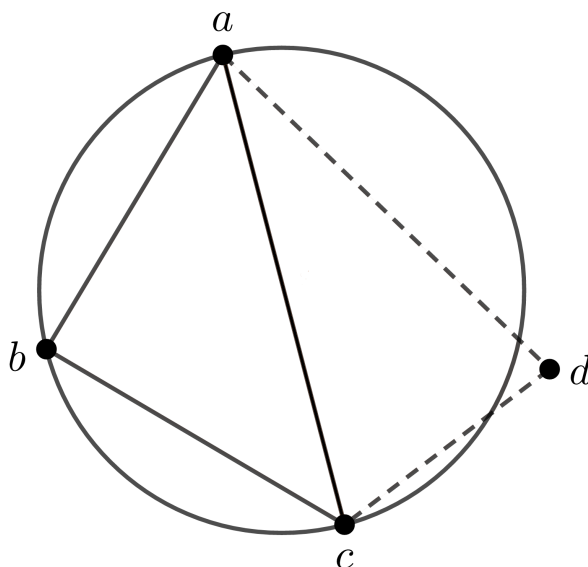


Figura 3.45: El vértice  $d$  está completamente en el exterior de la circunferencia circunscrita.

En gráficos  $3D$  por computadora se usan redes de polígonos para modelar objetos tridimensionales, juntando los polígonos para imitar la superficie del objeto. En general se usan triángulos porque son los polígonos más simples y tienen muchas propiedades favorables.

Hay dos formas de modelar un objeto de superficies: modelarlo de mano o escanearlo con un escáner de rango. Al escanearlo se produce un relieve de la superficie formado por puntos discretos. Para usar ese relieve hay que transformarlo en una red de triángulos (ver Figura (3.46)); esa transformación se llama triangulación.

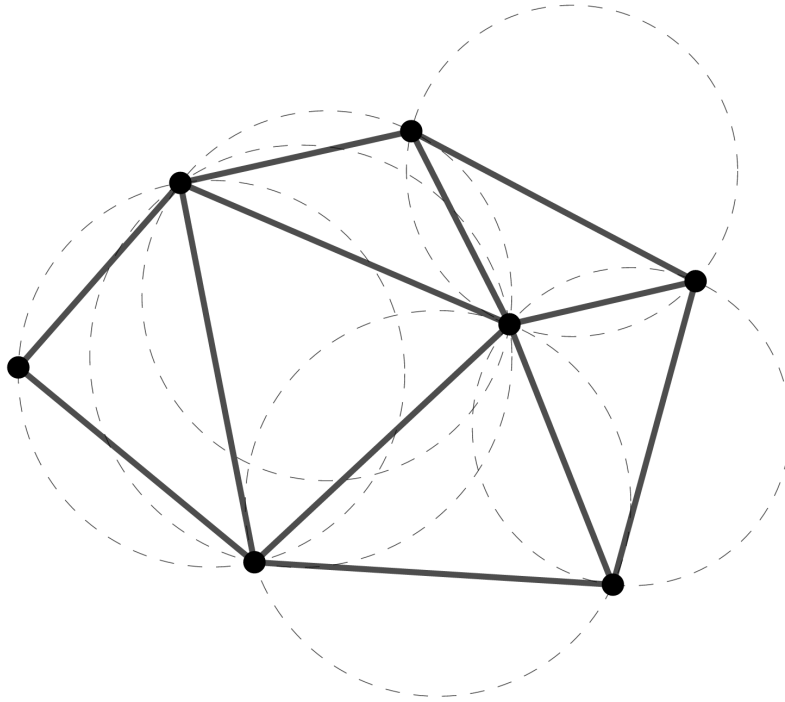


Figura 3.46: Triangulación de Delaunay.

La triangulación de Delaunay maximiza los ángulos interiores de los triángulos de la triangulación. Eso es muy práctico porque al usar la triangulación como modelo tridimensional los errores de redondeo son mínimos. Por eso, en general se usan triangulaciones de Delaunay en aplicaciones gráficas.

La triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos cumple las siguientes propiedades:

1. La frontera de la cara exterior del grafo de Delaunay es la frontera de la cubierta convexa del conjunto de puntos.
2. Dos puntos  $p_i$  y  $p_j$  están conectados por una arista en la triangulación de Delaunay si y sólo si hay un círculo vacío que pasa por  $p_i$  y  $p_j$ .
3. El ángulo mínimo dentro de todos los triángulos está maximizado, es decir, se evita obtener resultados con ángulos demasiado agudos.

4. La triangulación es unívoca si en ningún borde de la circunferencia circunscrita hay más que tres vértices.
5. La triangulación de Delaunay y el diagrama de Voronoi de una serie de puntos son grafos duales, por lo que la construcción de uno es trivial a partir del otro. En este sentido, los circuncentros de los triángulos de Delaunay coinciden con los vértices de las regiones del diagrama de Voronoi. Dos vértices del diagrama de Voronoi estarán conectados si sus triángulos de Delaunay correspondientes son vecinos entre sí (ver Figura (3.47)).

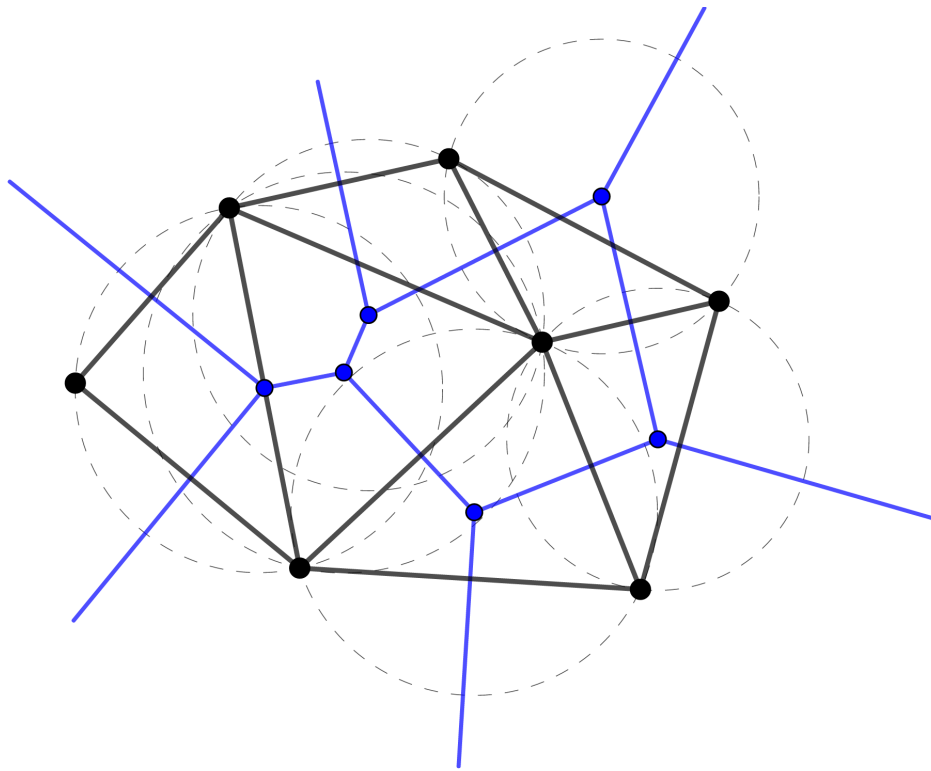


Figura 3.47: Conectando los centros de las circunferencias circunscritas obtenemos el diagrama de Voronoi.



## Recomendaciones.

Con base en la experiencia realizada en la ejecución del trabajo de grado titulado: **Geometría Computacional: Diagramas de Voronoi**, se recomienda a continuación algunos temas que pueden estudiar los docentes, estudiantes y personas interesadas.

- Triangulación de Delaunay y sus propiedades.
- La complejidad de los ordenes de algunos algoritmos. Ya que en la mayoría de los libros solo dicen la complejidad del algoritmo, pero no se da una demostración formal como se obtiene la complejidad (no hay mucha información).
- Dar continuidad al tema: Geometría Computacional: Diagramas de Voronoi. Tomando como herramienta este trabajo de grado, ya que es una base fundamental.

# Bibliografía.

- [1] Skiena, S., The Stony Brook Algorithm Repository., Stony Brook University, sitio oficial en <http://www3.cs.stonybrook.edu/~algorithm/implement/nauty/implement.shtml>
- [2] D. Antonio González. (2017). Introducción a la Teoría de las Gráficas. Universidad Autónoma Metropolitana, Cuajimalpa.
- [3] M. van Steen. (2010). An Introduction to Graph Theory and Complex Networks.
- [4] U. Martínez Rodríguez. (2015). Aplicación de la Geometría Computacional en la Reconstrucción 3D Basada en Diagramas de Voronoi (tesis de pregrado). Universidad Autónoma. Puebla, México.
- [5] F. River Mendoza. Geometría Computacional. Universidad de Los Andes. Mérida, Venezuela.
- [6] Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld y Mark Overmars. Computational Geometry (Third Edition).
- [7] E. Adam Navas. (2016). Introducción a la Geometría Computacional. Universidad de El Salvador.
- [8] A. Damián Bonivardo. (2017). Geometría Computacional.
- [9] J. L. Moreno Durán y S. Ordóñez Pérez. (2009). Diagramas de Voronoi de alcance limitado.