UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CCNN Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA

TRABAJO DE GRADO:

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE FOURIER EN GRUPOS.

PRESENTADO POR:

BETZAIDA GLORIBEL GÓMEZ ALVARADO

KARLA MARCELA MEJÍA ROSALES

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

DOCENTE DIRECTOR:

MSC. JORGE ALBERTO MARTÍNEZ GUTIÉRREZ

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, DICIEMBRE DE 2020

SAN MIGUEL EL SALVADOR CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

MSC. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

RECTOR

DR. RAÚL ERNESTO AZCÚNAGA LÓPEZ

VICE-RECTOR ACADÉMICO

ING. AGRO. JUAN ROSA QUINTAILLA QUINTANILLA

VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO

ING. FRANCISCO ANTONIO ALARCÓN SANDOVAL

SECRETARIO GENERAL

LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN

FISCAL GENERAL

LIC. LUIS ANTONIO MEJÍA LIPE

DEFENSOR DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

LIC. CRISTÓBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ

DECANO

LIC. OSCAR VILLALOBOS

VICE-DECANO

LIC. ISRAEL LÓPEZ MIRANDA

SECRETARIO INTERINO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

SECCIÓN DE MATEMÁTICA

AUTORIDADES

MTRA. KARLA MARÍA MEJÍA ORTÍZ

JEFA DEL DEPARTAMENTO Y COORDINADORA EN FUNCIONES DE PROCESOS DE GRADUACIÓN

LICDA. MARÍA OLGA QUINTANILLA DE LOVO

COORDINADORA DE LA CARRERA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

AGRADECIMIENTOS

***Por Betzaida Gloribel Gómez Alvarado*:**

El camino no ha sido fácil, pero he llegado al final y quiero agradecer primeramente a **Dios** por brindarme fortaleza durante este trayecto y por poner en mi vida excelentes compañeros/as de carrera.

A mi madre **Virginia Gómez** quien es el pilar de mi vida, la persona a la que le debo todo por el enorme apoyo y sacrificio que ha hecho por mi siempre, brindándome su amor, consejos y apoyo incondicional en todo momento.

A toda **mi familia**, especialmente a mis abuelos que siempre estuvieron pendiente de mi cada domingo que partía para San Miguel y cada viernes que regresaba a casa. Me han motivado muchísimo e inculcado valores desde siempre y han estado para mí cuando más lo he necesitado.
A mi novio **Francy Ventura**, con quien hice todo el proceso de ingreso a la Universidad y que ha estado apoyándome todos estos años para lograr cumplir mis metas.

Al **Licenciado Mario Francisco Hernández Hernández**, por haber sido incondicional de principio a fin en el desarrollo de nuestra tesis, sin duda es un excelente profesional y amigo a quien admiro demasiado por su humildad y calidad de persona.
Al licenciado **Santiago Alberto Ulloa Campos** por sus consejos, orientación y enseñanza durante la carrera.

A mi compañera de tesis y gran amiga **Karla Marcela Mejía Rosales**, he aprendido muchísimo de ella y hemos pasado demasiadas cosas durante la carrera que siempre voy a recordar, gracias por confiar en mí para que juntas lográramos sacar adelante este trabajo de grado.

A todos mis compañeros y amigos con quienes tuve la oportunidad de cursar mis cinco años de carrera, gracias por haber estado siempre apoyándome en todo y brindarme su linda amistad. De igual forma agradezco a todos los docentes de la sección de Matemática de la Facultad Multidisciplinaria Oriental que han sido parte de mi formación académica.

***Por Karla Marcela Mejía Rosales*:**

Agradezco a **Dios** primeramente, por darme sabiduría e inteligencia durante toda mi carrera que aunque no ha sido fácil he podido salir adelante, por darme fuerzas cada día para poder cumplir mis metas.

Agradezco especialmente a mi querido padre **Marcelino Mejía**, quien fue mi inspiración, mi modelo a seguir y el matemático que mas he admirado. Le agradezco por todo su apoyo en los primeros tres años de la carrera, así por todos sus consejos y toda la ayuda que me brindó. Aunque no esta presente conmigo su legado y su recuerdo siempre viven en mi corazón.

A mi madre **Sara de Mejía**, por todo el apoyo incondicional que me ha dado, por todo su amor y sus consejos; por todo el sacrificio que ha hecho por mi y estar siempre pendiente. Ella ha sido la persona que me motiva cada día a salir adelante.
De igual manera agradezco a mis tres hermanas: **Margarita, Sarita y Helen** quienes me dan alegría día tras día, gracias por todo su apoyo en cada momento difícil que he pasado.
A mi novio **Rosmel Cedillos**, por darme ánimos cuando me faltaron e impulsarme a seguir adelante, apoyándome en todo momento.

A toda mi **familia** que con sus oraciones, consejos y palabras de aliento me ayudaron a ser una mejor persona y poder lograr mis sueños.

Agradecer de manera especial al **Lic. Mario Francisco Hernández Hernández**, quien ha sido un pilar fundamental en la elaboración de este trabajo, gracias por su paciencia y dedicación, por todas las correcciones y consejos que nos dio. Mas que un licenciado, un gran amigo a quien admiro mucho.

Al **Lic. Tobías Humberto Martínez** y al **Lic. Santiago Alberto Ulloa** por su apoyo en todo momento y haberme orientado en los momentos que necesité sus consejos.

Agradezco a todos los **docentes** de la sección de matemática que fueron parte de mi formación académica, gracias por su apoyo para desarrollarme profesionalmente. A todos los buenos **amigos** que hice durante estos 5 años, tanto compañeros de estudio y docentes, quienes me brindaron todo su apoyo.

A mi compañera y gran amiga **Betzaida Gloribel Gómez Alvarado**, por compartir buenos momentos juntas y extenderme su mano en momentos difíciles, gracias porque juntas logramos terminar con éxito este trabajo, gracias por tu linda amistad.

AGRADECIMIENTOS ESPECIALES

Damos gracias a **Dios** por permitirnos finalizar este trabajo de grado, así mismo a todas las personas que siempre estuvieron pendientes durante el desarrollo de nuestra tesis, tanto amigos de la carrera como también personas externas a la Universidad.

A nuestro docente asesor el **MSc. Jorge Alberto Martínez Gutiérrez**, por haber confiado en nosotras y ayudarnos de la mejor manera con sus observaciones, correcciones y aportes. También por haber estado pendiente sin importar la modalidad y ocupaciones que tuviera, brindándonos su tiempo y dedicación.

Agradecemos de manera muy especial al **licenciado Mario Francisco Hernández Hernández**, por su enseñanza durante la carrera y también por su gran aporte a nuestro trabajo, por la dedicación y esmero que siempre tuvo para nosotras. Nuestra más sincera admiración y respeto hacia él, por su excelente desempeño en el área profesional y también por ser un gran amigo.

DEDICATORIA

En memoria de MSc. Marcelino Mejía González, por dejar un gran legado en la sección de Matemática de la Facultad Multidisciplinaria Oriental y en toda la Universidad de El Salvador, siendo un buen maestro y un gran amigo para muchos estudiantes; por compartir sus grandes conocimientos en matemática a los demás; por ser un ejemplo de superación, quien a pesar de las limitaciones económicas logró superarse y llegar a altos e importantes rangos en la Universidad de El Salvador.

Índice general

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo principal introducir la teoría del Análisis de Fourier o Análisis Armónico a grupos. Para tener una mayor comprensión de la parte fundamental de este trabajo, nos apoyamos de conceptos introductorios previamente estudiados a lo largo de la carrera, entre ellos están: Topología, Grupos Topológicos, Espacios de Banach, Álgebras de Banach y Teoría de la Medida; haciendo un resumen con las propiedades necesarias y básicas de cada uno. El Capítulo 2 constituye el núcleo de nuestro trabajo ya que en este se demuestran los Teoremas básicos del análisis de Fourier, para ello introducimos los fundamentos de la teoría abstracta de la medida Haar y la transformada de Fourier sobre grupos abelianos localmente compactos. Entre los teoremas de importancia destacan: El Teorema de Inversión, El Teorema de Plancherel, El Teorema de Dualidad de Pontryagin y la Compactificación de Bohr; y por último el Capítulo 3 contiene la teoría de estructura de los grupos abelianos localmente compactos, estudiando la dualidad entre subgrupos y mapeos cocientes, la suma directa y grupos monotéticos; y finalizando con la demostración del Teorema de Estructura Principal.

Palabras claves: Medida de Haar, Convolución, Transformada de Fourier, Transformadas de Fourier-Stieltjes, Grupo Dual, Compactificación de Bohr, Suma Directa y Grupos Monotéticos.

ABSTRACT

The main objective of this work is to introduce the theory of Fourier Analysis or Harmonic Analysis to groups. To have a better understanding of the fundamental part of this work, we rely on introductory concepts previously studied throughout the career, concepts such as Topology, Topological Groups, Banach Spaces, Banach Algebras, and Measurement Theory. We then summarize the necessary and basic properties of each concept. Chapter 2 constitutes the core of our work as it demonstrates the basic theorems of Fourier Analysis. For this we introduce the foundations of the abstract theory of the Haar measure and the Fourier transform on locally compact abelian groups. Among the theorems of importance are The Investment Theorem, Plancherel´s Theorem, Pontryangin´s Duallity Theorem, and Bohr´s Compactification. Finally Chapter 3 contains the structure theory of locally compact abelian gropus, analyzing the duality of subgroups and quotient mappings, direct sum and monothetic groups, and the demonstration of Principal Structure Theorem.

Keywords: Haar Measure, Convolution, Fourier Transform, Fourier-Stieltjes Transforms, Dual Group, Bohr Compactification, Direct Sum and Monothetic Groups.

INTRODUCCIÓN

El análisis de Fourier o análisis armónico clásico se desarrolla sobre el círculo unitario, la recta real y los enteros. Pero durante los últimos años se ha considerado que un escenario propicio para el estudio y desarrollo del Análisis de Fourier es la clase de los grupos abelianos localmente compactos.
Para facilitar la comprensión del texto, haremos una breve descripción de cada capítulo y como están estructurados.

En el **capítulo I** desbozamos toda la teoría básica sobre topología general, grupos topológicos, espacios de Banach, álgebras de Banach ya que gran parte del trabajo inicial sobre estas fué estimulado por el análisis de Fourier y también teoría de la medida incluyendo en esta conceptos generales y teoremas fundamentales, entre ellos el Teorema de Radon-Nikodym, Teorema de Representacion de Riesz y el Teorema de Fubini.

El **capítulo II** está constituido por los teoremas básicos del análisis de Fourier, definimos la medida de Haar y que es única salvo una constante positiva $\lambda > 0$, también definimos el grupo dual como $\Gamma = \{\gamma : G \to \mathbb{C} \mid \gamma \text{ es un caracter continuo}\}$, si la suma se define por $(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x) \quad (x \in G;\ \gamma_1,\ \gamma_2 \in \Gamma)$. Así mismo, definimos la transformada de Fourier-Stieltjes y funciones definidas positivas. Estudiamos principalmente las álgebras de grupo $L^1(G)$ y $M(G)$; donde $L^1(G)$ consiste en el conjunto de todas las funciones complejas en el grupo G que son integrables con respecto a la medida de Haar, $M(G)$ es el conjunto de todas las medidas de Borel que son acotadas y regulares y la multiplicación en ambos casos está definida por la convolución.

En el **capítulo III** desarrollamos la teoría de estructura de grupos abelianos localmente compactos, iniciando con la sección de Dualidad entre entre subgrupos y mapeos cocientes, donde definimos al anulador Λ de H como $\Lambda = \{\gamma \in \Gamma : (x, \gamma) = 1, \forall\ x \in H\}$. Luego, tenemos la suma directa, recordando que el toro $\mathbb{T}$ de dimensión n se define como: $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{T} \oplus \cdots \oplus \mathbb{T}}_{n-\text{veces}} = \underbrace{\mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \cdots \times \mathbb{T}}_{n-\text{veces}}$. y posteriormente continuamos con grupos monotéticos, que son aquellos grupos topológicos que tienen un subgrupo denso cíclico, y por último demostramos el Teorema de Estructura Principal.

OBJETIVOS

Objetivo General:

1. Introducir la teoría del Análisis de Fourier o Análisis Armónico a grupos.

Objetivos Específicos:

1.1 Establecer conceptos básicos del Análisis de Fourier generalizados a grupos.

1.2 Desarrollar a detalle demostraciones de teoremas importantes en el estudio del Análisis de Fourier a grupos.

NOTACIONES

$A \subset B$	El conjunto A es subconjunto de B.
$A \cap B$	La intersección del conjunto A y B.
$A \cup B$	La unión del conjunto A y B.
$\bar{A}$	La clausura del conjunto A.
$f : A \to B$	f es una función del conjunto A al conjunto B.
$f\|_A$	La función f restringida sobre el conjunto A.
$f(X)$	Conjunto de imágenes de X.
$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$	Denota una sucesión.
$\mathbb{T}$	El grupo circular toro.
$\mathbb{S}^1$	La esfera unitaria.
$\mathbb{R}$	Los números reales.
$\mathbb{C}$	Los números complejos.
$\mathbb{Z}$	Los números enteros.
$\|\|x\|\|$	La norma de x.
$\|\mu\|$	La variación total de μ.
$\mu \ll m$	μ es absolutamente continua con respecto a m.

$L^p(m)$	El conjunto de funciones de Borel con norma finita.
$L^\infty(m)$	El conjunto de funciones de Borel acotadas.
$C(X)$	El conjunto de todas las funciones continuas.
$C_c(X)$	El conjunto de todas las funciones continuas con soporte compacto.
$C_0(X)$	El conjunto de todas las funciones continuas que se desvanecen en el infinito.
$\oplus_{i=1}$	Representa la suma directa.
$\mathbb{T}^n$	Denota la suma directa de $\mathbb{T}$ n-veces.
$f * g$	La convolución de f y g.
$\hat{f}$	Denota la transformada de Fourier de f.
$\hat{\mu}$	Denota la transformada de Fourier-Stieltjes de μ.
$B(\Gamma)$	El conjunto de todas las funciones $\hat{\mu}$.
Γ	El conjunto de caracteres continuos.
$A(\Gamma)$	El conjunto de todas las $\hat{f}$.
$\Delta(L^1(G))$	El espacio ideal máximal de $L^1(G)$.
f_x	La traslación de f.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo introducimos la teoría básica concerniente a topología general, álgebras de Banach y teoría de la medida que son la base para el desarrollo de los siguientes capítulos.

1.1. Topología

Las demostraciones de proposiciones, teoremas y corolarios en esta sección se encuentran en [4].

Definición 1.1.1. *Una topología sobre el conjunto potencia X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

(a) *X y el conjunto vacío pertenecen a τ;*

(b) *τ es cerrado bajo la formación de intersecciones finitas y uniones arbitrarias.*

Definición 1.1.2. *Si una topología τ está definida sobre X, entonces X es llamado un Espacio Topológico (Sería más exacto reservar este nombre para el par ordenado (X, τ); pero ignoraremos esta distinción, así como otras similares que ocurran después, si no hay riesgo de confusión), y los miembros de τ son llamados conjuntos abiertos, sus complementos cerrados.*

Definición 1.1.3. *El conjunto abierto más grande contenido en un conjunto* $A \subset X$ *es el interior de A.*

Definición 1.1.4. *El conjunto cerrado más pequeño que contiene a A es la clausura* $\overline{A}$ *de A.*

Definición 1.1.5. *Si B es el complemento de A, entonces* $\overline{A} \cap \overline{B}$ *es la frontera de A.*

Definición 1.1.6. *Si* $\overline{A} = X$*, A es denso en X.*

Definición 1.1.7. *Si X tiene un subconjunto denso y numerable, se dice que X es separable.*

Definición 1.1.8. *Un entorno de un punto p en* (X, τ)*, es un subconjunto* $N \subset X$ *tal que existe un abierto* $U \in \tau$*, verificando que* $p \in U \subset N$*.*

Definición 1.1.9. *El conjunto cuyo único elemento es p se escribe* $\{p\}$*.*

Definición 1.1.10. *Si* $\{p\}$ *es abierto, entonces p es un punto aislado de X. Si* $\{p\}$ *es abierto para cada* $p \in X$*, entonces X es un espacio discreto.*

Definición 1.1.11. *Una familia* Ω *de subconjuntos abiertos de un espacio topológico X es una base si cada subconjunto de X es una unión de conjuntos pertenecientes a* Ω*. Una familia* Ω_p *de vecindades de un punto* $p \in X$ *es una base de vecindad en p si cada entorno de p contiene un miembro de* Ω_p*.*

Definición 1.1.12. *Si a cada par de distintos puntos* p_1, p_2 *de X, existen entornos* N_1, N_2 *de* p_1, p_2 *disjuntos (es decir; cuya intersección es vacía), entonces X es llamado un espacio de Hausdorff.*

Definición 1.1.13. *Un subconjunto A de un espacio topológico X es en sí un espacio topológico si los conjuntos abiertos de A se definen como las intersecciones de los conjuntos abiertos de X con A. Esta topología es la Topología Relativa Inducida en A por X.*

Definición 1.1.14. *Un subconjunto A de X (El caso* $A = X$ *no está excluido) es llamado Compacto si cada familia de conjuntos abiertos cuya unión contiene a A tiene una subfamilia finita cuya unión contiene a A.*

Definición 1.1.15. *Si cada punto de X tiene un entorno compacto, entonces X es localmente compacto.*

Teorema 1.1.16. *Un espacio de Hausdorff X es localmente compacto si y solo si para cada $p \in X$ y cada vecindad V de p existe una vecindad U de p tal que $\overline{U}$ es compacto y $\overline{U} \subseteq V$.*

Proposición 1.1.17. *Cada subconjunto cerrado de un espacio compacto, es compacto.*

Demostración.

Sea X un espacio compacto y sea $A \subset X$ cerrado.

Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de A, entonces

$$X = A \cup (X - A) = \left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i\right) \cup (X - A).$$

Como $(X - A)$ es abierto, entonces es un cubrimiento por abiertos de X. Pero X es compacto, entonces existen $i_1, \ldots, i_n$, $n < \infty$ tal que

$$X = A \cup (X - A) = \left(\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{i_j}\right) \cup (X - A),$$

luego $A = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{i_j}$, por lo tanto A es compacto. ■

Proposición 1.1.18. *Cada subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Proposición 1.1.19. *En un espacio de Hausdorff localmente compacto cada punto tiene una base de vecindades que son conjuntos compactos.*

Teorema 1.1.20. *Si Ω es una familia de conjuntos compactos con la propiedad de intersecciones finitas (es decir; cada subfamilia finita de Ω tiene intersección no vacía), entonces la intersección de todos los miembros de Ω es no vacía.*

Definición 1.1.21. *Si X es un espacio Topológico, ∞ denota un punto que no está en X, sea $S_\infty = S \cup \{\infty\}$, y llamamos un subconjunto A de X_∞ abierto cualquiera si A es un subconjunto abierto de X o si el complemento de A es un subconjunto compacto de X. Entonces X_∞ es un espacio compacto, y es llamado Compactificación de un punto de X.*

Teorema 1.1.22. *Si X es compacto, ∞ es un punto aislado de X_∞.*

Teorema 1.1.23. *Si X es un espacio Hausdorff localmente compacto, entonces X_∞ es un espacio Hausdorff compacto.*

Definición 1.1.24. *Un mapeo f de un espacio topológico X a un espacio topológico Y es llamado continuo si $f^{-1}(E)$ es abierto en X para cada conjunto abierto E en Y; aquí $f^{-1}(E)$ denota el conjunto de todos los $p \in X$ tal que $f(p) \in E$.*

Teorema 1.1.25. *Si K es compacto, $K \subset X$ y f es continua, entonces $f(K)$ es compacto.*

Demostración.

Sea $f\colon X \to Y$ continua y $K \subset X$ compacto.

Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de $f(K)$ por abiertos de Y, entonces $f(K) \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$. Luego, como f es continua $\forall i \in I$ $f^{-1}(\mathcal{U}_i)$ es abierto en X.

Así,

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(\mathcal{U}_i).$$

Como K es compacto $\exists f^{-1}(\mathcal{U}_{i_j}), \quad k = 1, \ldots, n$ tal que

$$\begin{aligned}
& K && \subset \textstyle\bigcup_{j=1}^n f^{-1}(\mathcal{U}_{i_j}) \\
\Longrightarrow\ & f(K) && \subset f\left(\textstyle\bigcup_{j=1}^n f^{-1}(\mathcal{U}_{i_j})\right) \\
\Longrightarrow\ & f(K) && \subset \textstyle\bigcup_{j=1}^n f(f^{-1}(\mathcal{U}_{i_j})) \subset \bigcup_{j=1}^n \mathcal{U}_{i_j} \\
\Longrightarrow\ & f(K) && \subset \textstyle\bigcup_{j=1}^n \mathcal{U}_{i_j}
\end{aligned}$$

$\therefore$ $f(K)$ es compacto. ■

Definición 1.1.26. *Si $f(E)$ es un subconjunto abierto de Y siempre que E es un conjunto abierto en X, entonces f es llamado un mapeo abierto.*

Definición 1.1.27. *Si f es uno a uno, si $f(X) = Y$, y si ambas f y f^{-1} son continuas, entonces f es un homeomorfismo de X a Y.*

Teorema 1.1.28. *Si f es un mapeo abierto continuo de un espacio Hausdorff localmente compacto X a un espacio Hausdorff Y, y si K es un subconjunto compacto de Y, entonces existe un subconjunto compacto C de X tal que $K = f(C)$.*

Definición 1.1.29. *Un conjunto A en un espacio Topológico X es conexo si no es la unión de dos conjuntos no vacíos disjuntos que son abiertos en la topología relativa inducida en A por X.*

Definición 1.1.30. *La componente de un punto $p \in X$ es la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a p.*

Teorema 1.1.31. *Las componentes son conjuntos cerrados.*

Definición 1.1.32. *Si no hay componentes de X que contengan más de un punto, X es llamado Totalmente Disconexo.*

Proposición 1.1.33. *En un espacio de Hausdorff totalmente disconexo y localmente compacto, los conjuntos abiertos compactos forman una base.*

Definición 1.1.34. *Si τ y τ_1 son dos topologías sobre un cojunto X y si $\tau \subset \tau_1$, entonces τ se dice que es más débil que τ_1.*
Esta terminología no excluye el caso cuando $\tau = \tau_1$.

Si F es una familia de mapeos de X a un espacio topológico Y, la colección de todas las intersecciones finitas de conjuntos de la forma $f^{-1}(V)$ ($f \in F, V$ abierto en Y) forman una base para una topología τ_F en X. Cada $f \in F$ es evidentemente continua con respecto a τ_F, y τ_F es la topología más débil en X con esta propiedad, τ_F es llamada la topología débil inducida en X por F. De particular importancia es el caso en el cual F es una colección de funciones de valor-complejo (es decir, Y es el plano complejo).

Definición 1.1.35. *F se dice que separa puntos en X si para cada par de puntos distintos p_1, p_2 en X corresponde un $f \in F$ tal que $f(p_1) \neq f(p_2)$.*

Proposición 1.1.36. *Si F separa puntos y si Y es un espacio Hausdorff, entonces la topología débil inducida por F en X es también una topología Hausdorff.*

Definición 1.1.37. *Sea X un espacio topológico y sea*

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid \ f \text{ es continua } \}.$$

El soporte de una función compleja f en X es la clausura de el conjunto de todos los puntos p en el cual $f(p) \neq 0$, es decir el soporte es el siguiente conjunto:

$$\text{Soporte}(f) = \overline{\{p \in X : f(p) \neq 0\}}.$$

Se define

$$C_c(X) = \{f \in C(X) \mid \ \text{Soporte(f) es compacto } \}.$$

Definición 1.1.38. *Si para cada $\epsilon > 0$, la desigualdad $|f(p)| < \epsilon$ es cierta para todo p en el complemento de algún conjunto compacto, entonces f se dice que se desvanece en el infinito.*

Definición 1.1.39. *Sea*

$$C_0(X) = \{f \in C(X) \mid f \text{ se desvanece en el infinito}\}.$$

El conjunto de todas las $f \in C(X)$ que se desvanecen en el infinito.

Teorema 1.1.40. *Cada f en $C_0(X)$ puede ser extendido a una función continua en X_∞ definido por $f(\infty) = 0$. Si S es compacto, entonces $C(X) = C_0(X) = C_c(X)$.*

Los espacios $C(X)$, $C_0(X)$, $C_c(X)$ son cerrados bajo adición puntual, multiplicación y multiplicación escalar:

1) $(f+g)(p) = f(p) + g(p)$,

2) $(fg)(p) = f(p)g(p)$,

3) $(\alpha f)(p) = \alpha f(p)$.

Ya que la conmutatividad, asociatividad y distributividad, son leyes que se mantienen, estos espacios son álgebras (sobre el campo complejo). Si introducimos una norma en $C(X)$ que se define por:

$$\|f\|_\infty = \sup_{p\in X} |f(p)|,\ (f \in C(X)),$$

la métrica $\|f-g\|_\infty$ convierte a $C(X)$ y a $C_0(X)$ en espacios métricos completos, ya que también son cerrados bajo la formación de límites de sucesiones uniformemente convergentes. De hecho, $C(X)$ y $C_0(X)$ son ejemplos simples de Álgebras de Banach.

Teorema 1.1.41. *Si X es un espacio Hausdorff localmente compacto, entonces $C_c(X)$ es denso en $C_0(X)$.*

Definición 1.1.42. *Sea $\mathcal{A}$ una colección de funciones complejas en un conjunto X. Entonces $\mathcal{A}$ se desvanece en un punto x en X, si para todas las funciones f en $\mathcal{A}$, $f(x) = 0$. Si no existe tal punto, entonces decimos que $\mathcal{A}$ se desvanece en ningún punto de X.*

Lema 1.1.43. *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de funciones complejas en un conjunto X tal que separa puntos y se desvanece en ningún punto de X. Supongamos que existen puntos distintos x_1 y x_2 de X y sean c_1 y c_2 constantes complejas (o constantes reales si $\mathcal{A}$ consiste solamente de funciones reales). Entonces existe una función f en $\mathcal{A}$ tal que $f(x_1) = c_1$ y $f(x_2) = c_2$.*

Teorema 1.1.44. *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de funciones continuas acotadas reales sobre un conjunto compacto X tal que separa puntos y se desvanece en ningún punto de X. Entonces $\mathcal{A}$ es denso en $C_{\mathbb{R}}(X)$.*

Teorema 1.1.45 (Teorema fuerte de Stone-Weierstrass)**.** *Sea X un espacio topológico compacto y sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X)$ que separa puntos en X, que es autoadjunto (es decir, $f \in \mathcal{A}$ implica que $\overline{f} \in \mathcal{A}$, donde $\overline{f}$ es el conjugado complejo de f), y se desvanece en ningún punto de X. Entonces $\mathcal{A}$ es denso en $C(X)$.*

Demostración.

Sea $\mathcal{A}_R$ el conjunto de todas las funciones reales en $\mathcal{A}$.

Si f está en $\mathcal{A}$, entonces $f = g + ih$, donde f y g son funciones reales. Entonces

$$f + \overline{f} = g + ih + g - ih$$
$$f + \overline{f} = 2g,$$

y

$$i\overline{f} - if = i(g - ih) - i(g + ih)$$
$$i\overline{f} - if = ig + h - ig + h$$
$$i\overline{f} - if = 2h.$$

Así $f + \overline{f} = 2g$ y $i\overline{f} - if = 2h$. Ya que $\mathcal{A}$ es una álgebra autoadjunta, g y h están en $\mathcal{A}_R$.

Si $x_1 \neq x_2$, entonces por Lema 1.1.43, existe una función f en $\mathcal{A}$ tal que $f(x_1) = 1$ y

$f(x_2) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
2g(x_1) &= (f + \overline{f})(x_1)\\
2g(x_1) &= f(x_1) + \overline{f}(x_1)\\
2g(x_1) &= 1 + 1\\
g(x_1) &= 1,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
2g(x_2) &= (f + \overline{f})(x_2)\\
2g(x_2) &= f(x_2) + \overline{f}(x_2)\\
2g(x_2) &= 0\\
g(x_2) &= 0.
\end{aligned}$$

Así $g(x_1) = 1 \neq 0 = g(x_2)$, entonces $\mathcal{A}_R$ separa puntos.

Como $\mathcal{A}$ se desvanece en ningún punto de X, entonces para cualquier x en X existe f en $\mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq 0$. Entonces f también tiene una componente real g tal que $g(x) \neq 0$ o f tiene una componente imaginaria h distinta de cero tal que $ih(x) \neq 0$, entonces $h \neq 0$. De cualquier manera, para todo x en X, existe una función g o una función h en $\mathcal{A}_R$ tal que g o h no son cero en x. Entonces $\mathcal{A}_R$ se desvanece en ningún punto en X.

Así $\mathcal{A}_R$ cumple los requerimientos del Teorema 1.1.44, entonces $\mathcal{A}_R$ es denso en el conjunto de todas las funciones continuas en X.
Así f esta en $C(X)$, ya que $f = g + ih$ y g y h están en $\overline{\mathcal{A}_R}$, entonces f esta en $\overline{\mathcal{A}}$.

$\therefore$ $\mathcal{A}$ es denso en $C(X)$. $\blacksquare$

Corolario 1.1.46 (Teorema de Stone-Weierstrass). *Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto y sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C_0(X)$ que separa puntos en X, que es autoadjunto, y que contiene para cada $p_0 \in X$ una función f, tal que $f(p_0) \neq 0$. Entonces $\mathcal{A}$ es denso en $C_0(X)$.*

Definición 1.1.47. *Supongamos que A es un conjunto de índices, y X_α, es un conjunto para cada $\alpha \in A$. El producto cartesiano $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es el conjunto de todos los p que son funciones en A tal que $p(\alpha) \in X_\alpha$, para toda $\alpha \in A$, $p(\alpha)$ puede ser considerado como la α-ésima coordenada del punto p. Si A es finito, decimos que $A = 1, 2, \cdots, n$, la notación usada para $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ es también usada para X, y los puntos de X pueden ser considerados como n-tuplas $p = (p_1, \cdots, p_n)$ con $p_\alpha \in X_\alpha$.*

Teorema 1.1.48 (El Teorema de Tychonoff). *El producto de cualquier colección de espacios compactos es un espacio compacto con la topología producto.*

Proposición 1.1.49. *Un espacio métrico es metrizable si su topología es inducida por una métrica. Para un espacio Hausdorff compacto X, las siguientes tres propiedades son equivalentes:*

(a) *X es metrizable;*

(b) *X tiene una base contable;*

(c) *$C(X)$ es separable.*

Si X es un espacio Hausdorff localmente compacto o si X es un espacio métrico completo, el Teorema de Baire sostiene que: X no es la unión contable de cerrados, a menos que uno de ellos contiene un conjunto abierto no vacío.

1.2. Grupos topológicos

Definición 1.2.1. *Un grupo abeliano es un conjunto G en el cual una operación binaria, $+$, está definida con las propiedades siguientes :*

(a) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in G$;

(b) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall x, y, z \in G$;

(c) *G contiene un elemento* 0 *tal que* $x + 0 = 0$, $\forall x \in G$;

(d) *Para cada $x \in G$ corresponde un elemento $-x \in G$ tal que $x - x = 0$ (escribimos $x - x = 0$ en lugar de $x + (-x)$).*

Si A y B son subconjuntos de G, $A + B$ denota el conjunto de todos los elementos de la forma $a + b$, con $a \in A, b \in B$.
Similarmente, $-A$ es el conjunto de todos los elementos $-a$, donde a se extiende sobre A, y $A - B = A + (-B)$.
Si $x \in G$, es costumbre escribir $A + x$ en vez de $A + \{x\}$. Llamemos $A + x$ la traslación de A por x.

Si un subconjunto H de G es en sí mismo un grupo, con respecto a la misma operación de grupo, es entonces un subgrupo de G. Para esto es necesario y suficiente que $H - H \subset H$. Si $H \neq G$, entonces H es un subgrupo propio de G.

Si $H = \{0\}$, entonces H es el grupo trivial.

Definición 1.2.2. *Un homomorfismo de un grupo G a un grupo G_1 es un mapeo ϕ de G a G_1 tal que*

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \quad (x,\ y \in G).$$

Definición 1.2.3. *Un homomorfismo que es uno-a-uno y es sobreyectivo, es un isomorfismo. Si existe un isomorfismo de G sobre G_1, entonces G y G_1 son grupos isomorfos, y para muchos propósitos no necesitamos distinguir entre ellos.*

El núcleo de un homomorfismo ϕ es el conjunto $\phi^{-1}(0)$; el núcleo es siempre un subgrupo.

Si H es un subgrupo de G, los conjuntos $H + x$, $(x \in G)$ son clases de H.
Dos clases $H + x$ y $H + y$ son idénticos si y solo si $x - y \in H$, por otra parte, $H + x$ y $H + y$ son disjuntos.
El conjunto de todos las clases de H es denotado por G/H, y G/H se convierte en un grupo abeliano (el grupo cociente de G módulo H) si definimos

$$(H + x) + (H + y) = H + x + y \quad x,\ y \in G.$$

El mapeo $x \mapsto H + x$ es un homomorfismo de G sobre G/H, con núcleo H. Se llama el homorfismo natural de G sobre G/H.
Recíprocamente, si ϕ es cualquier homomorfismo de G, el grupo $\phi(G)$ puede ser considerado como un grupo cociente de G :

$$\phi(G) = G/\phi^{-1}(0).$$

El índice de un subgrupo H de G es el número de elementos de G/H, es un entero positivo o infinito.

Definición 1.2.4. *Si $x \in G$ y n es un entero positivo , nx es el elemento $x + x + ... + x$ (n sumandos). Si $nx = 0$ para algún n, el entero positivo más pequeño con esta propiedad es el orden de x; si $nx \neq 0\ \forall n > 0$, entonces x tiene orden infinito. Si existe un entero q tal que $qx = 0$ para todo $x \in G$, entonces G se dice que es de orden acotado.*

Definición 1.2.5. *Si $E \subset G$ y si no hay un subgrupo propio de G que contiene E, decimos que G es generado por E, o que E es un subconjunto de generadores. Un grupo generado por un solo elemento es cíclico.*

Definición 1.2.6. *Un grupo abeliano topológico es un espacio de Hausdorff G el cual es también un grupo abeliano, siempre que el mapeo $(x, y) \mapsto x - y$ es un mapeo continuo de el espacio* *producto $G \times G$ sobre G. Si G es un espacio topológico localmente compacto, entonces G es un grupo abeliano localmente compacto.*

Se sigue que el mapeo traslación t_x, definido por $t_x(y) = x + y$, es un homeomorfismo de G sobre G para cada $x \in G$, y también lo es el mapeo $x \mapsto -x$. Si A es un conjunto abierto de G y $B \subset G$, entonces $A + B$ es una unión de traslaciones de A y es por lo tanto abierto.

Si A y B son compactos, entonces $A + B$ es compacto, siendo la imagen del conjunto $A \times B$ bajo el mapeo continuo $(x, y) \mapsto x + y$.

Definición 1.2.7. *Un conjunto $E \subset G$ es **simétrico** si $E = -E$.*

Ya que $E \cap (-E)$ es simétrico se sigue que en cada grupo abeliano localmente compacto G existe una base de entornos de 0 que consiste en grupos simétricos compactos. Además la continuidad de la adición prueba que para cada vecindad W de 0 en G corresponde un entorno V de 0 (que puede ser tomado compacto y simétrico) tal que $V + V \subset W$.

Teorema 1.2.8. (a) *La clausura de cualquier subgrupo de G es también un subgrupo de G.*

(b) *Cada subgrupo cerrado de un grupo abeliano localmente compacto es abeliano localmente compacto.*

Cada subgrupo abierto es cerrado, esto es así ya que cada clase de un subgrupo abierto H es abierto, y ya que H es el complemento de la unión de todos menos una de sus clases.

Teorema 1.2.9. *Supongamos que G es abeliano localmente compacto, ϕ es el homomorfismo natural de G sobre G/H, donde H es un subgrupo cerrado de G, y un subconjunto de G/H es abierto si y solo si es la imagen bajo ϕ de un subconjunto abierto de G. Entonces G/H es un grupo abeliano localmente compacto.*

Definición 1.2.10. *Si G_α es una colección de grupos abelianos, su suma directa completa es el grupo G definido como sigue: G, como un conjunto es el grupo cartesiano de los conjuntos G_α,* *y la suma se realiza de forma coordenada : Si $x \in G$ y $y \in G$, $x + y$ es el elemento de G cuya α-ésima coordenada es $x(\alpha) + y(\alpha)$.*

La suma directa de los grupos G_α es el subgrupo de su suma directa completa que consiste de todos los x que tienen $x(\alpha) \neq 0$ sólo para finitos α.

Si ahora introducimos topologías productos, surgen los siguientes hechos, por el Teorema de Tychonoff:

La suma directa de cualquier colección de grupos abelianos localmente compactos es un grupo abeliano localmente compacto. La suma directa completa de cualquier colección de grupos abelianos compactos es un grupo abeliano compacto.

Si $G = H_1 + H_2$, donde H_1 y H_2 son subgrupos de G, entonces G es (isomorfo a) la suma directa $H_1 \oplus H_2$ de estos dos subgrupos si y solo si $H_1 \cap H_2 = 0$.

Teorema 1.2.11. *Si G es un grupo abeliano de orden acotado, entonces G es una suma directa de grupos cíclicos.*

Ya que la topología de un grupo abeliano topológico G es invariante bajo traslación, es fácil para introducir la noción de continuidad uniforme:

Definición 1.2.12. *Un mapeo f de un subconjunto E de G a un espacio métrico con métrica d, es uniformemente continuo en E, si para cada $\epsilon > 0$, existe un entorno V de 0 en G tal que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ siempre que $x \in E$, $y \in E$ y $y - x \in V$.*

Teorema 1.2.13. *Si f es un mapeo continuo de el conjunto compacto E en G a un espacio métrico, entonces f es uniformemente continua en E.*

Demostración.

Dado $\epsilon > 0$, corresponde a cada $x \in E$ un entorno W_x de 0 tal que $d(f(x), f(y) < \epsilon/2$ si $y \in E \cap (x + W_x)$, existen entornos abiertos simétricos V_x de 0 tal que $V_x + V_x \subset W_x$. Ya que

E es compacto, hay un conjunto finito de puntos $x_1, x_2, .., x_n$ en E tal que la unión de los conjuntos $x_i + V_{x_i}$ cubre a E.

Si V es la intersección de estos V_{x_i}, y $y - x \in V$, $x \in E, y \in E$, entonces $x \in x_i + V_{x_i}$ para algún i, y $y \in x + V \subset x_i + V_{x_i} + V \subset x_i + W_{x_i}$, por lo tanto

$$d(f(x), f(y)) < d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f(y)) < \epsilon.$$

■

Teorema 1.2.14. *Cada $f \in C_0(G)$ es uniformemente continua en G si G es abeliano localmente compacto.*

1.3. Espacios de Banach

Las demostraciones de teoremas y proposiciones de esta sección se encuentran en [2].

Definición 1.3.1. *Un espacio normado X es un espacio vectorial con una norma definida sobre él.*

Definición 1.3.2. *Una norma sobre un espacio vectorial X (real o complejo) es una función real-evaluada sobre X cuyo valor en un $x \in X$ se denota por $||x||$ (se lee "norma de x") y tiene las siguientes propiedades:*

- $||x|| \geq 0$.
- $||x|| = 0$ *si y solo si* $x = 0$.
- $||\alpha x|| = |\alpha|\, ||x|| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$).
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall\ x,\ y \in X$.

Una norma sobre X define una métrica d sobre X dada por $d(x, y) = ||x - y|| \quad \forall x, y \in X$ y es llamada la métrica inducida por la norma.

La topología inducida por la métrica anterior es la topología normada de X.
El conjunto de todos los $x \in X$ con $||x|| \leq 1$ es la bola unitaria de X.

Definición 1.3.3. *Un espacio de Banach es un espacio normado que es completo, es decir si cada sucesión de Cauchy en X converge (bajo la métrica inducida por la norma).*

Definición 1.3.4. *Si M es un subespacio lineal cerrado de un espacio normado X, el espacio cociente X/M se convierte en un espacio lineal normado si introducimos la norma cociente:*

$$||x + M|| = \inf_{y \in M} ||x + y|| \quad (x \in X).$$

Si X es un espacio de Banach X/M también lo será.

Definición 1.3.5. *Un mapeo T de un espacio lineal normado X en un espacio lineal normado Y es una transformación lineal si:*

- $T(x + y) = Tx + Ty$.
- $T(\alpha x) = \alpha T x \quad \forall x, y \in X, \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

En otras palabras las transformaciones lineales son homomorfismos de espacios vectoriales.

Proposición 1.3.6. *El núcleo de una Transformación lineal T es un subespacio lineal.*

Definición 1.3.7. *Sean X e Y espacios normados y sea $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ una transformación lineal, donde $\mathcal{D}(T) \subset X$. La transformación T se dice que es acotado si existe un número real $C > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{D}(T)$, $||Tx|| \leq C||x||$.*

Si T es acotado, entonces existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $||Tx|| \leq C||x||$ así $\dfrac{||Tx||}{||x||} \leq C$.

Se define la norma de la transformación lineal T por:

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Teorema 1.3.8. *Una transformación lineal T es acotada si y solo sí es continua.*

Definición 1.3.9. *Sean X e Y espacios normados y sea* $B(X,Y) = \{T : X \to Y|\ T \text{ es lineal y acotado}\}$*,* $B(X,Y)$ *se convierte en espacio vectorial con las siguientes operaciones.*

Si $T, T_1, T_2 \in B(X,Y)$ *y* $\alpha \in \mathbb{C}$*, entonces:*

- $T_1 + T_2 : X \to Y$ *tal que mapea* $x \mapsto (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$.
- $\alpha T : X \to Y$ *tal que mapea* $x \mapsto (\alpha T)(x) = \alpha T(x)$.

Teorema 1.3.10. *Si Y es un espacio de Banach, entonces* $B(X,Y)$ *es un espacio de Banach.*

Si $T \in B(X_0, Y)$, donde X_0 es un subespacio lineal denso de un espacio normado X y Y es un espacio de Banach, entonces T tiene una única extensión a un elemento de $B(X,Y)$ con la misma norma. Este es un caso especial del Teorema general de Espacios Métricos, el cual establece que cualquier mapeo uniformemente continuo en un espacio completo tiene una extensión continua para completar su dominio.

Definición 1.3.11. *Un funcional es una función donde el rango vive en* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$.

Definición 1.3.12. *Un funcional lineal es un operador lineal f con dominio en un espacio vectorial X y rango en el campo escalar* $\mathbb{K}$ *de X; por lo tanto* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ *donde* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *si X es real y* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *si X es complejo.*

Definición 1.3.13. *Un funcional lineal acotado f es un operador lineal acotado con rango en el campo escalar del espacio normado X en el cual* $\mathcal{D}(f)$ *está contenido.*

Por lo tanto existe un número real c tal que para todo $x \in \mathcal{D}(f)$, $|f| \leq c\|x\|$. *Más aún la norma de f es*

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|\,.$$

Teorema 1.3.14. *Un funcional f con dominio $\mathcal{D}(f)$ en un espacio normado es continuo si y solo sí es acotado.*

Definición 1.3.15. *Sea X un espacio normado. Entonces el conjunto de todos los funcionales lineales acotados en X constituye un espacio normado con norma definida por*

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

el cual es llamado el espacio dual de X y se denota por X^*, es decir X^* es el siguiente conjunto:

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{K} : f \textit{ es un funcional lineal acotado}\}.$$

En otras palabras $X^* = B(X, \mathbb{K})$.

Teorema 1.3.16. *El espacio dual X^* de un espacio normado X es un espacio de Banach.*

Demostración.

Sabemos que $X^* = B(X, \mathbb{K})$, luego por Teorema 1.3.10, $B(X, \mathbb{K})$ es un espacio de Banach ya que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ es un espacio de Banach. ■

Teorema 1.3.17 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Si M es un subespacio lineal (no necesariamente cerrado) del espacio normado X y si S es un funcional lineal acotado en M, entonces existe $T \in X^*$ tal que $Tx = Sx$ para todo $x \in M$ y tal que $\|T\| = \|S\|$.*

Corolario 1.3.18. *Si $x_0 \in X$ y $x \notin \overline{M}$, entonces existe $T \in X^*$ tal que $Tx = 0\ \forall x \in M$, pero $Tx_0 \neq 0$.*

Teorema 1.3.19 (Teorema del Inverso Continuo)**.** *Supongamos que $X,\ Y$ son espacios de Banach. $T \in B(X, Y)$, T es uno a uno y $TX = Y$, entonces $T^{-1} \in B(X, Y)$.*

Corolario 1.3.20. *Si un espacio vectorial X es un espacio de Banach, con respecto a dos normas digamos $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_0$, y si existe una constante c tal que $\|x\|_0 \leq c\|x\|\ \forall x \in X$, entonces existe una constante c' tal que $\|x\| \leq c'\|x\|_0\ \forall x \in X$.*

Si estas dos desigualdades se mantienen, las dos normas son llamadas equivalentes.

Teorema 1.3.21 (Teorema del gráfico cerrado)**.** *Si X e Y son espacios de Banach, si T es una transformación de X en Y, y si las relaciones*

$$\lim_{n\to 0}\|x_n - x\| = 0 \quad y \quad \lim_{n\to 0}\|Tx_n - y\| = 0$$

implica que $y = Tx$, entonces T es acotado.

Solo es necesario aplicar el corolario anterior al mapeo $x \mapsto (x, Tx)$ de X en la gráfica de T que es un espacio de Banach con norma $\|x\| + \|Tx\|$.
Cada $x \in X$ puede ser considerado como una función en X^* cuyo valor en un punto $T \in X^*$ es Tx, entonces X es una familia de funciones separables en X.
La topología débil inducida en X^* por X es llamada la topología débil* de X^*.

Teorema 1.3.22. *Para cualquier espacio normado X la bola unitaria S^* de X^* es un espacio de Hausdorff compacto en la topología débil* de X^*.*

Proposición 1.3.23. *Si X es separable, entonces un subconjunto contable de X separa puntos en X^*.*

Proposición 1.3.24. *Si X es separable, entonces la topología débil* de la bola unitaria S^* de X^* es metrizable.*

El siguiente análogo del Corolario del Teorema de Hahn-Banach es una consecuencia directa de la definición de la topología débil*.

Corolario 1.3.25. *Si M es un subespacio lineal cerrado débil* de X^* y si $T_0 \notin M$, entonces existe $x \in X$ tal que $T_0x \neq 0$, pero $Tx = 0$ para todo $T \in M$.*

Definición 1.3.26. *Supongamos que X e Y son espacios de Banach, X^* e Y^* son sus duales respectivamente, $T \in B(X, Y)$. Para cualquier $y^* \in Y^*$, el mapeo $x \mapsto y^*(Tx)$ es un funcional lineal acotado* *en X; por lo tanto existe un elemento de X^* el cual escribiremos T^*y^*, tal que $(T^*y^*)(x) = y^*(Tx)$, para todo $x \in X$.*

El mapeo T^* de Y^* en X^* así definido es llamado el adjunto de T es fácil ver que $T^* \in B(X^*, Y^*)$.

Teorema 1.3.27. *Supongamos que X, Y son espacios de Banach, $T \in B(X, Y)$, T es uno a uno y TX es denso en Y, entonces cada una de las siguientes 3 propiedades implica las otras 2.*

(a) $TX = Y$.

(b) *Existe* $\delta > 0$ *tal que* $\|T^*y^*\| \geq \delta\|y^*\| \quad \forall y^* \in Y^*$.

(c) $T^*Y^* = X^*$.

Definición 1.3.28. *Sea H un espacio vectorial bajo el campo de los números complejos y supongamos que cada par ordenado $x,\ y \in H$ está asociado a un número (x, y) llamado el producto interno de x e y, con las siguientes propiedades*

(a) $(x_1 + x_2, y) = (x_1 + y) + (x_2 + y)$.

(b) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

(c) $(y, x) = \overline{(x, y)}$.

(d) $(x, x) \geq 0$.

(e) $(x, x) = 0$ *si y solo sí* $x = 0$.

Si definimos $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, entonces H se convierte en un espacio normado.

Si H es completo con esta norma, H es llamado un Espacio de Hilbert.

La desigualdad de Schwarz $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ es una consecuencia de las propiedades (a), (b), (c) y (d) del producto interno.

Definición 1.3.29. *Un conjunto K en H es convexo si $\alpha x + (1 - \alpha)y \in K$, cuando $x,\ y \in K$ y $0 < \alpha < 1$.*

Cada conjunto convexo cerrado K en un espacio de Hilbert H tiene un único elemento x_0, de una norma minimal.

Si $x_0 + M \subset K$ para algún subespacio M de H, entonces $(x_0, y) = 0$ para todo $y \in M$, en otras palabras, x_0 es ortogonal a M.

Si 0 es el único elemento en H el cual es ortogonal a un subespacio lineal M, entonces M es denso en H, por el Teorema de Hahn-Banach y la caracterización anterior de H^*.

1.4. Álgebras de Banach

Las demostraciones de teoremas y proposiciones de esta sección se encuentran en [7].

Definición 1.4.1. *Una álgebra A sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial A sobre $\mathbb{K}$ tal que existe una función*

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & A \times A & \to & A \\ & (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

tal que

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
2. *a)* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

   b) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.
3. $\alpha \cdot (x \cdot y) = (\alpha \cdot x) \cdot y = x \cdot (\alpha \cdot y)$.

$\forall x, y, z \in A,\ \alpha \in \mathbb{K}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, entonces A se dice que es real o complejo.

A se dice que es conmutativo o abeliano si la multiplicación es conmutativa, es decir, $\forall x, y \in A\ x \cdot y = y \cdot x$.

A se dice que es un álgebra con identidad o unidad si existe $e \in A$ *tal que* $ex = xe = x$. *Este elemento e es llamado identidad de A.*

Definición 1.4.2. *Una álgebra normada A es un espacio normado, el cual es álgebra tal que* $\forall x, y \in A$, $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. *Además, si A tiene identidad* $e \in A$, $\|e\| = 1$.

Definición 1.4.3. *Un álgebra de Banach es una álgebra normada la cual es completa, considerada como espacio normado.*

En esta sección, el símbolo A siempre denotará una Álgebra de Banach conmutativa.

Definición 1.4.4. *Sea A una álgebra con identidad, un elemento* $x \in A$ *es invertible si tiene inverso en A, es decir, existe* $x^{-1} \in A$ *tal que* $x^{-1}x = e = xx^{-1}$.

Definición 1.4.5. *Una subálgebra I de A es un ideal en A si* $xy \in I$, *cuando* $x \in A$ *y* $y \in I$.
Si $I \neq A$, *I es un ideal propio.*

Definición 1.4.6. *Los ideales maximales son ideales propios que no están contenidos en ideales propios más grandes.*

Teorema 1.4.7. *Si A tiene identidad, entonces cada ideal propio en A está contenido en un ideal maximal y cada ideal maximal es cerrado.*

Si I es un ideal en A, se puede definir una multiplicación en el espacio cociente A/I por

$$(x + I)(y + I) = xy + I \quad (x, y \in A).$$

Esto convierte a A/I en un álgebra, llamada cociente de A módulo I.

Si I es cerrado y si A/I se le da una norma cociente (ver Definición 1.3.4), entonces A/I es un Álgebra de Banach.

Un ideal I en A es llamado regular si A/I tiene identidad (si A tiene identidad, cada ideal es regular).

El Teorema 1.4.7 tiene el siguiente reemplazo si A no tiene identidad:

Teorema 1.4.8. *Cada ideal regular propio en A está contenido en un ideal regular maximal y cada ideal regular maximal es cerrado.*

Definición 1.4.9. *Un homomorfismo complejo h de A es un funcional en A que también es multiplicativo: $h(xy) = h(x)h(y)$.*

Definición 1.4.10. *Se define el **Espacio Ideal Maximal** de A como*

$$\Delta = \{h \colon A \to \mathbb{C} \mid \ h \textit{ es homomorfismo complejo no idénticamente 0}\} .$$

Proposición 1.4.11. *Se cumplen las siguientes declaraciones:*

(a) *Si I es un ideal maximal regular en A, entonces A/I es (isométricamente isomorfo a) el campo complejo, y entonces el homomorfismo canónico de A sobre A/I pertenece a Δ.*

(b) *Recíprocamente, si $h \in \Delta$, el Kernel o núcleo de h es un ideal maximal regular en A.*

(c) *Si A tiene identidad, entonces $x \in A$ es invertible si y solo sí $h(x) \neq 0$ para todo $h \in \Delta$. En cualquier caso, la ecuación $xy = x + y$ es soluble en A si y solo sí $h(x) \neq 1$ para todo $h \in \Delta$.*

(d) *Cada $h \in \Delta$ es un funcional lineal acotado en A de norma 1.*
Así Δ es un subconjunto de la bola unitaria S^* en el espacio dual A^* del espacio de Banach A.

(e) *Cada $x \in A$ define una función $\hat{x}$ en Δ dada por*

$$\hat{x}(h) = h(x) \quad h \in \Delta.$$

La topología débil inducida en Δ por la colección de todas las funciones $\hat{x}$ es llamada la ***Topología de Gelfand*** *de Δ.*

La topología relativa en la que Δ tiene un subconjunto de A^* si a A^* se le da la topología débil*, coincide con la tolopogia de Gelfand.

Ya que $\Delta \subset S^*$, S^* es compacto con la topología débil* (Ver Teorema 1.3.22) y que $\Delta \cup \{0\}$ se ve fácilmente como un subconjunto cerrado de S^*, resulta que Δ es un espacio de Hausdorff localmente compacto y que cada $\hat{x}$ es un miembro de $C_0(\Delta)$ (ver Definición 1.1.39).

(f) *El mapeo $x \mapsto \hat{x}$ es un homomorfismo de A sobre una subálgebra $\hat{A}$ de $C_0(\Delta)$, ya que*

$$(\hat{x}\hat{y})(h) = h(xy) = h(x)h(y) = \hat{x}(h)\hat{y}(h) \quad (x, y \in A;\ h \in \Delta).$$

Y así similarmente para la adición y multiplicación por escalar ya que $\|h\| \leq 1$ la desigualdad importante $\|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\|$ se mantiene.

Llamamos a $\hat{x}$ la ***transformada de Gelfand*** *de x.*

(g) *Si A tiene una identidad e, entonces Δ es compacto, ya que $\hat{e}(h) = h(e) = 1$ y $1 \in C_0(\Delta)$ solo sí Δ es compacto.*

Definición 1.4.12. *Si la transformada de Gelfand es un isomorfismo, es decir, si $x \neq 0$ implica $\hat{x} \neq 0$ (o, $h(x) \neq 0$ para algún $h \in \Delta$), entonces se dice que A es semi-simple.*

Teorema 1.4.13. *Si A y B son Álgebras de Banach conmutativas, B es semi-simple y si* Ψ *es un homomorfismo de A sobre B, entonces* Ψ *es continua (es decir,* $\Psi \in B(X, Y)$*). Si* $\Psi \neq 0$*, entonces* $\|\Psi\| \geq 1$.

Definición 1.4.14. *El espectro de un elemento* $x \in A$ *se define como el rango de la función* $\hat{x}$ *(uniendo al cero). Si A no tiene identidad, de modo que el espectro siempre es un subconjunto compacto del plano complejo.*

El número $\|\hat{x}\|_\infty$ es la norma espectral o radio espectral de X.
La ecuación

$$\lim_{n\to 0} \|x^n\|^{1/n} = \|\hat{x}\|_\infty \quad (x \in A)$$

es conocida como **la fórmula del radio espectral**.

Una aplicación similar de la fórmula de Cauchy muestra que las funciones analíticas operan en Álgebras de Banach:

Teorema 1.4.15. *Supongamos que A es un Álgebra de Banach semi-simple conmutativa en un conjunto abierto el cual contiene el espectro de X; si A no tiene identidad, requerimos que* $F(0) = 0$*. Entonces, existe un único* $y \in A$ *tal que* $\hat{y}(h) = F(\hat{x}(h))$ *para todo* $h \in \Delta$.

1.5. Teoría de la Medida

En esta parte se limitará a medidas e integrales en espacios de Hausdorff localmente compactos X.
Las demostraciones de teoremas y proposiciones se encuentran en [6].

Definición 1.5.1. (a) *Una colección* $\mathcal{M}$ *de subconjuntos de un conjunto X es una* σ*-álgebra en X si:*

(i) $X \in \mathcal{M}$.

(ii) *Si $A \in \mathcal{M}$, entonces $X - A \in \mathcal{M}$.*

(iii) *Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y si $A_n \in \mathcal{M}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $A \in \mathcal{M}$.*

(b) *Si $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en X, entonces el par $(X, \mathcal{M})$ es llamado un **espacio medible**, y los miembros de $\mathcal{M}$ se denominan **conjuntos medibles** en X.*

(c) *Si X es un espacio medible, Y es un espacio topológico, y si f es un mapeo de X en Y, entonces se dice que f es **medible** siempre que $f^{-1}(V)$ es un conjunto medible en X para cada conjunto abierto V en Y.*

Definición 1.5.2. *Sea $\mathscr{B}$ la familia más pequeña de subconjuntos de un espacio topológico X tal que:*

(a) *Contiene todos los subconjuntos cerrados de X.*

(b) *Es cerrado bajo la formación de uniones contables.*

(c) *Es cerrado bajo la complementación, entonces $\mathscr{B}$ es también cerrado bajo la formación de intersecciones contables.*

Los miembros de $\mathscr{B}$ son llamados conjuntos de Borel de X.

$\mathscr{B}(X)$ definirán todos los subconjuntos de X que son de Borel.

Definición 1.5.3. *Sea $\mathcal{M}$ una σ-álgebra en un conjunto X. Llamamos a una colección contable $\{E_i\}$ de miembros de $\mathcal{M}$ una partición de E si $E_i \cap E_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$, y si $E = \cup E_i$.*
*Una **medida compleja** μ en $\mathcal{M}$ es entonces una función compleja en $\mathcal{M}$ tal que*

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \quad (E \in \mathcal{M})$$

para cada partición $\{E_i\}$ de E.

Definición 1.5.4. *Llamaremos **espacio de medida** a la terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$, donde X es un conjunto, $\mathcal{M}$ una σ-álgebra y μ una medida.*

Definición 1.5.5. *Con cada medida μ en X hay asociada una función establecida |μ|, la variación total de μ está definida por*

$$|\mu|(E) = \sup \sum |\mu(E_i)|\,.$$

El supremo es tomado en todas las colecciones finitas de conjuntos de Borel E_i disjuntos por pares cuya unión es E. Entonces |μ| es una medida en X.

Definición 1.5.6. *Si*

$$|\mu|(E) = \sup |\mu|(K) = \text{ínf}\, |\mu|(V)$$

para cada conjunto de Borel E, donde K varía sobre los subconjuntos compactos de E y V varía sobre los superconjuntos abiertos de E. Entonces μ es llamada ***regular****.*

Definición 1.5.7. *Un conjunto E en un espacio topológico es llamado σ-compacto si E es la unión contable de conjuntos compactos.*
Un conjunto E en un espacio de medida (con medida μ) tiene una medida σ−finita si E es la unión contable de conjuntos E_i con $\mu(E_i) \leq \infty$

Definición 1.5.8. *Sea*

$$\|\mu\| = |\mu|(X)$$

y definamos a

$$M(X) = \{\mu \colon \mathscr{B}(X) \to \mathbb{C} \mid \ \mu \textit{ es regular y } \ \|\mu\| < \infty\}\,.$$

Está claro que $M(X)$ es un espacio normado si la adición y multiplicación escalar se define por:

$$(\mu_1 + \mu_2)(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E), \quad (\alpha\mu)(E) = \alpha\mu(E).$$

Para cada conjunto de Borel E y cada número complejo α.

Consideramos también medidas regulares no-negativas en X, para ello, $+\infty$ es un valor admisible.

Definición 1.5.9. *Si μ es una medida en X y A es un conjunto de Borel, la restricción μ_A de μ a A es la medida definida por:*

$$\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$$

si $\mu = \mu_A$, entonces se dice que μ se concentra en A.

Si dos medidas μ_1 y μ_2 están concentradas en conjuntos disjuntos, se dice que el par (μ_1, μ_2) es mutuamente singular, en este caso

$$||\mu_1 + \mu_2|| = ||\mu_1|| + ||\mu_2||.$$

Teorema 1.5.10. *Si $\mu \in M(X)$, entonces μ se concentra en un subconjunto σ-compacto de X (es decir, en un conjunto que es unión contable de conjuntos compactos) y entre todos los subconjuntos cerrados de X existe uno más pequeño, el soporte de μ en el que μ se concentra.*

Definición 1.5.11. *Sea μ una medida real en una σ-álgebra $\mathcal{M}$. Definimos $|\mu|$ como en la definición 1.5.8, y definimos*

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu). \tag{1}$$

Entonces ambas μ^+ y μ^- son medidas positivas en $\mathcal{M}$ y son acotadas.
Además,

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-. \tag{2}$$

Las medidas μ^+ y μ^- son llamadas variaciones positiva y negativa de μ, respectivamente. Esta representación de μ como la diferencia de las medidas positivas μ^+ y μ^- es conocida como la ***descomposición de Jordan*** *de μ.*

Teorema 1.5.12 (Teorema de descomposición de Hahn)**.** *Sea μ una medida real en una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en un conjunto X. Entonces existen conjuntos A y B en $\mathcal{M}$ tales que $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$ y tal que las variaciones positiva y negativa μ^+ y μ^- de μ satisfacen*

$$\mu^+(E) = \mu(A \cap E), \quad \mu^-(E) = -\mu(B \cap E) \ \ (E \in \mathcal{M}). \tag{3}$$

Teorema 1.5.13 (Teorema de descomposición de Jordan)**.** *Si $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$, donde λ_1 y λ_2 son medidas positivas, entonces $\lambda_1 \geq \mu^+$ y $\lambda_2 \geq \mu^-$.*

Demostración.

Sean A y B en $\mathcal{M}$.

Como $\mu \leq \lambda_1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mu^+(E) &= \mu(A \cap E), \text{ por Teorema 1.5.12} \\ &\leq \lambda_1(A \cap E) \\ &\leq \lambda_1(E)\end{aligned}$$

$\therefore \lambda_1 \geq \mu^+$.

$$\begin{aligned}\mu^-(E) &= -\mu(B \cap E), \text{ por Teorema 1.5.12} \\ &\leq -\lambda_2(B \cap E) \\ &\leq -\lambda_2(E)\end{aligned}$$

$\therefore \lambda_2 \geq \mu^-$. ■

Como μ es una medida que tiene una parte real y una parte compleja, así el Teorema de descomposición de Jordan se cumple también para medidas complejas:

Teorema 1.5.14. *Cada $\mu \in M(X)$ tiene una única descomposición de la forma*

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$$

donde $\mu_i \geq 0$, $\mu_i \in M(X)$ y los pares (μ_1, μ_2) y (μ_3, μ_4) son mutuamente singulares.

Definición 1.5.15. *Una medida $\mu \in M(X)$ es llamada* ***discreta*** *si se concentra en un conjunto contable; μ es* ***continua*** *si $\mu(E) = 0$ para cada conjunto contable E.*

Proposición 1.5.16. *Cada $\mu \in M(X)$ tiene una única descomposición $\mu_d + \mu_c$, donde μ_d es discreta y μ_c es continua.*

Definición 1.5.17. *Sea $\mu \in M(X)$, si m es una medida no negativa en X y $\mu(E) = 0$ cuando $m(E) = 0$, entonces se dice que μ es absolutamente continua con respecto a m.*
Y se denota por

$$\mu \ll m.$$

Teorema 1.5.18 (Teorema de Descomposición de Lebesgue)**.** *Si $\mu \in M(X)$ y $m \geq 0$, entonces μ tiene una única descomposición $\mu = \mu_a + \mu_s$, donde μ_a es absolutamente continua con respecto a m y μ_s es singular con respecto a m.*

Definición 1.5.19. *Una función compleja f definida en X es llamada función de Borel si $f^{-1}(V)$ es un conjunto de Borel para cada conjunto abierto V en el plano complejo.*

Proposición 1.5.20. *Si $\mu \in M(X)$, todas las funciones de Borel acotadas en X son integrables con respecto a μ, y se cumple la siguiente desigualdad:*

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \|\mu\| \cdot \sup_{x \in X} |f(x)| \, .$$

Definición 1.5.21. *Si m es una medida no negativa en X y si $0 < p < \infty$. Sea*

$$L^p(m) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \mid \ f \text{ es función de Borel con } \|f\|_p < \infty \right\}.$$

La norma está definida por:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, dm \right)^{1/p} . \tag{4}$$

Si identificamos funciones que difieren sólo en un conjunto E con $m(E) = 0$, $L^p(m)$ se convierte en un espacio de Banach, normado por (4), si $1 \leq p < \infty$, $L^2(m)$ es un espacio de Hilbert, con producto interno

$$(f, g) = \int f \overline{g} dm.$$

Definición 1.5.22. *Sea*

$$L^\infty(m) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ es una función de Borel acotada}\},$$

normada por

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

El supremo fundamental de $|f|$ es, por definición, el número más pequeño λ tal que $m(\{x : f(x) > \lambda\}) = 0$. Además identificamos cualesquiera dos miembros f, g de $L^\infty(G)$ para la cual $\|f - g\|_\infty = 0$.

Teorema 1.5.23. *Sea μ una medida compleja en una σ-álgebra $\mathcal{M}$. Entonces existe una función medible h tal que $|h(x)| = 1$ para todo $x \in X$ tal que*

$$d\mu = hd\,|\mu|. \tag{5}$$

Teorema 1.5.24 (El Teorema de Radon-Nikodym)**.** *Si $\mu \in M(X)$, si m es una medida no negativa en X, y si μ es absolutamente continua con respecto a m, entonces existe $f \in L^1(m)$ tal que*

$$\mu(E) = \int_E f dm$$

para todos los conjuntos de Borel E en X.

Además,

$$\|\mu\| = \int_X |f|\, dm = \|f\|_1.$$

Proposición 1.5.25 (Recíproco del Teorema de Radon-Nikodym)**.** *Si $f \in L^1(m)$, la medida definida por $\mu(E) = \int_E f dm$ pertenece a $M(X)$ y es absolutamente continua con respecto a m.*

Proposición 1.5.26. *Si m es regular, entonces $C_c(X)$ es denso en $L^1(m)$ y en $L^p(m), 1 \leq p \leq \infty$.*

Teorema 1.5.27. *Supongamos que $m \geq 0, 1 < p < \infty$, y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Los funcionales lineales acotados T en $L^p(m)$ están en correspondencia uno-a-uno con los miembros de g de $L^q(m)$: Cada $T \in (L^p)^*$ es de la forma

$$Tf = \int fg\, dm \quad (f \in L^p(m)),$$

y $\|T\| = \|g\|_q$. *Así* $L^q = (L^p)^*$.

Teorema 1.5.28 (Teorema de representación de Riesz (Caso real))**.** *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, y sea Λ un funcional lineal positivo en $C_c(X)$. Entonces existe una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en X que contiene todos los conjuntos de Borel en X, y existe una única medida positiva μ en $\mathcal{M}$ que representa Λ en el sentido que*

(a) $\Lambda f = \int_X f d\mu$, *para cada* $f \in C_c(X)$,

y que tiene las siguientes propiedades adicionales:

(b) $\mu(K) < \infty$, *para cada conjunto compacto* $K \subset X$.

(c) Para cada E en $\mathcal{M}$, tenemos

$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(V) \colon E \subset V, V \text{ abierto}\}.$$

(d) La relación

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \colon K \subset E, K \text{ compacto}\},$$

se cumple para cada conjunto abierto E en $\mathcal{M}$ con $\mu(E) < \infty$.

(e) Si $E \in \mathcal{M}$, $A \subset E$ y $\mu(E) = 0$,entonces $A \in \mathcal{M}$.

Proposición 1.5.29. *Si $\mu \in M(x)$, el mapeo $f \mapsto \int_X f d\mu$ es un funcional acotado en el espacio de Banach $C_0(X)$ (ver Definición 1.1.39).*

El recíproco de este resultado es:

Teorema 1.5.30 (Teorema de representación de Riesz (Caso complejo))**.** *Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces cada funcional lineal acotado T en $C_0(X)$ es representado por una única medida $\mu \in M(X)$, tal que*

$$Tf = \int_X f d\mu \quad (f \in C_0(X)). \tag{6}$$

Además, la norma de T es la variación total de μ:

$$\|T\| = |\mu|(X). \tag{7}$$

Demostración.

Primero establecemos la unicidad. Supongamos que $\mu \in M(X)$ sobre X y que $\int_G f d\mu = 0$ para todo $f \in C_0(X)$, Por Teorema 1.5.23 existe una función de Borel h, con $|h| = 1$, tal que $d\mu = h\,|\mu|$. Para cualquier sucesión $\{f_n\}$ en $C_0(X)$ tenemos que

$$|\mu|(X) = \int_X (\bar{h} - f_n)hd\,|\mu| \leq \int_X \left|\bar{h} - f_n\right| d\,|\mu|\,, \tag{8}$$

y como $C_c(X)$ es denso en $L^1(|\mu|)$ (Proposición 1.5.26), f_n puede ser elegida tal que la última expresión en (8) tienda a 0 cuando $n \to \infty$. Así $|\mu|(X) = 0$, y $\mu = 0$. Luego, la diferencia de dos medidas de Borel regulares complejas en X es regular. Esto prueba que como máximo una medida μ corresponde a cada T.

Ahora consideremos un funcional lineal acotado T en $C_0(X)$. Sin perdida de generalidad supongamos que $\|T\| = 1$. Debemos construir un funcional lineal positivo Λ en $C_c(X)$, tal que

$$|T(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \|f\| \quad (f \in C_c(X)), \tag{9}$$

donde $\|f\|$ denota la norma del supremo.

Una vez que tenemos este Λ, lo asociamos con una medida de Borel λ, como en el Teorema 1.5.28. La conclusión del Teorema 1.5.28 prueba que λ es regular si $\lambda(X) < \infty$. Como

$$\lambda(X) = \sup\{\Lambda f \colon 0 \leq f \leq 1, f \in C_c(X)\},$$

y como $|\Lambda f| \leq 1$ si $\|f\| \leq 1$, vemos que $\lambda(X) \leq 1$.

También deducimos de (9) que

$$|T(f)| \leq \Lambda(|f|) = \int_X |f|\, d\lambda = \|f\|_1 \quad (f \in C_c(X)). \tag{10}$$

La última norma se refiere al espacio $L^1(\lambda)$. Así T es un funcional lineal en $\in C_c(X)$ de norma a lo sumo 1, con respecto a la $L^1(\lambda)$-norma en $C_c(X)$. Existe una extensión que preserva normas de T a un funcional lineal en $L^1(\lambda)$, y por lo tanto el Teorema 1.5.27 (caso $p = 1$) da una función de Borel g, con $|g| \leq 1$, tal que

$$T(f) = \int_X fg d\lambda \quad (f \in C_c(X)). \tag{11}$$

Cada miembro de (11) es un funcional continuo en $C_c(X)$, y $C_c(X)$ es denso en $C_0(X)$. Por lo tanto (11) se cumple para todo $f \in C_0(X)$ y obtenemos la representación (6) con $d\mu = gd\lambda$.

Como $\|T\| = 1$, (11) prueba que

$$\int_X |g|\, d\lambda \geq \sup\{|T(f)| : f \in C_0(X), \|f\| \leq 1\} = 1. \tag{12}$$

También sabemos que $\lambda(X) \leq 1$ y $|g| \leq 1$. Estos hechos son compatibles sólo si $\lambda(X) = 1$ y $|g| = 1$ casi en todas partes $[\lambda]$. Así $d\,|\mu| = |g|\, d\lambda = d\lambda$, por Teorema 1.5.24, y

$$|\mu|\,(X) = \lambda(X) = 1 = \|T\|, \tag{13}$$

Por lo tanto

$$|\mu|(X) = \|T\|.$$

Así, todo depende de encontrar un funcional lineal positivo Λ que satisfaga (9).

Si $f \in C_c^+(X)$ (la clase de todos los miembros reales no negativos de $C_c(X)$), definimos

$$\Lambda f = \sup\{|T(h)| : h \in C_c(X), h \leq f\}. \tag{14}$$

Entonces $\Lambda f \geq 0$, Λ satisface (9), $1 \leq f_1 \leq f_2$ entonces $\Lambda f_1 \leq \Lambda f_2$ y $\Lambda(cf) = c\Lambda f$ si c es una constante positiva. Debemos probar que

$$\Lambda(f+g) = \Lambda f + \Lambda g \quad (f, g \in C_c^+(X)), \tag{15}$$

y luego tenemos que extender Λ a un funcional lineal en $C_c(X)$.

Sean f y g en $C_c^+(X)$. Si $\epsilon > 0$, existen h_1 y h_2 en $C_c(X)$ tal que $|h_1| \leq f$, $|h_2| \leq g$ y

$$\Lambda f \leq |T(h_1)| + \epsilon, \quad \Lambda g \leq |T(h_2)| + \epsilon. \tag{16}$$

Existen número complejos γ_i, $\gamma_i = 1$, de modo que $\gamma_i T(h_i) = |T(h_i)|$, $i = 1, 2$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\Lambda f + \Lambda g &\leq |T(h_1 + T(h_2))| + 2\epsilon \\
&= T(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + 2\epsilon \\
&\leq \Lambda(|h_1| + |h_2|) + 2\epsilon \\
&\leq \Lambda(f+g) + 2\epsilon,
\end{aligned}$$

así que la desigualdad $\geq$ se cumple en (15).

Sea $h \in C_c(X)$, sujeto solo a la condición $h \leq f + g$, sea $V = \{x\colon f(x) + g(x) > 0\}$, y definamos

$$h_1(x) = \frac{f(x)h(x)}{f(x) + g(x)}, \quad h_2(x) = \frac{g(x)h(x)}{f(x) + g(x)} \quad (x \in V),$$

$$h_1(x) = h_2(x) = 0 \quad (x \notin V). \tag{17}$$

Es claro que h_1 es continua en cada punto de V. Si $x_0 \notin V$, entonces $h(x_0) = 0$; como h es continua y ya que $|h_1(x)| \leq |h(x)|$ para todo $x \in X$, se sigue que x_0 es un punto de continuidad de h_1. Así $h_1 \in C_c(X)$, y lo mismo se cumple para h_2.

Como $h = h_1 + h_2$ y $|h_1| \leq f,\ |h_2| \leq g$, tenemos que

$$|T(h)| = |T(h_1) + T(h_2)| \leq |T(h_1)| + |T(h_2)| \leq \Lambda f + \Lambda g.$$

Por lo tanto, $\Lambda(f + g) \leq \Lambda f + \Lambda g$.

$\therefore\ \Lambda(f + g) = \Lambda f + \Lambda g$.

Si f es ahora una función real, $f \in C_c(X)$, entonces $2f^+ = |f| + g$, así que $f^+ \in C_c^+(X)$; igualmente, $f^- \in C_c^+(X)$; y como $f = f^+ - f^-$, es natural definir

$$\Lambda f = \Lambda f^+ - \Lambda f^- \quad (f \in C_c(X), f \text{ real}) \tag{18}$$

y

$$\Lambda(u + iv) = \Lambda u + i\Lambda v. \tag{19}$$

Por lo tanto el funcional extendido Λ es lineal en $C_c(X)$. ■

Otra versión útil de Teorema de Representación de Riesz es como sigue:

Teorema 1.5.31. *A cada funcional T en $C_c(X)$ tal que $Tf \geq 0$ si $f \geq 0$, le corresponde una única* *medida regular no negativa m en X tal que*

$$Tf = \int_X f dm \quad (f \in C_c(X)).$$

Definición 1.5.32. *Supongamos μ y λ son medidas regulares en espacios de Hausdorff compactos X y Y. Para cualquier conjunto $A \times B$ en $X \times Y$ donde A y B son conjuntos de Borel en X y Y, respectivamente definimos*

$$(\mu \times \lambda)(A \times B) = \mu(A)\lambda(B).$$

La función de conjunto $\mu \times \lambda$ así definida en "rectángulos" tiene una única extensión para una medida regular $\mu \times \lambda$ en el producto espacio $X \times Y$.

Teorema 1.5.33 (Teorema de Convergencia Monótona de Lebesgue)**.** *Sea $\{f_n\}$ una sucesion de funciones medibles en X,y supongamos que*

(a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq \infty$ *para cada* $x \in X$.

(b) $f_n(x) \to f(x)$ *cuando* $n \to \infty$, *para cada* $x \in X$.

Entonces f es medible y

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Definición 1.5.34. *Con cada f en $X \times Y$ y con cada $x \in X$, asociamos una función f_x definida en Y por $f_x(y) = f(x, y)$.*

Similarmente, si $y \in Y$, f^y es la función definida en X por $f^y(x) = f(x, y)$.

Teorema 1.5.35. *Sea f una función $(\mathscr{S}, \mathscr{T})$-medible en $X \times Y$. Entonces*

(a) *Para cada $x \in X$, f_x es una función $\mathscr{T}$-medible.*

(b) *Para cada $y \in Y$, f^y es una función $\mathscr{S}$-medible.*

Teorema 1.5.36. *Sean* $(X, \mathscr{S}, \mu)$ *y* $(Y, \mathscr{T}, \lambda)$ *espacios de medida* σ*-finitos. Supongamos que* $Q \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$. *Si*

$$\varphi(x) = \lambda(Q_x), \quad \psi(y) = \mu(Q^y)$$

para cada $x \in X$ *y* $y \in Y$, *entonces* φ *es* $\mathscr{S}$*-medible,* ψ *es* $\mathscr{T}$*-medible y*

$$\int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\lambda.$$

Definición 1.5.37. *Si* $(X, \mathscr{S}, \mu)$ *y* $(Y, \mathscr{T}, \lambda)$ *son como en el Teorema 1.5.36, y si* $Q \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$, *definimos*

$$(\mu \times \lambda)(Q) = \int_X \lambda(Q_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y) d\lambda(y).$$

Teorema 1.5.38 (Teorema de Fubini)**.** *Sea* $(X, \mathscr{S}, \mu)$ *y* $(Y, \mathscr{T}, \lambda)$ *espacios de medida* σ*-finita y sea* f *una función* $(\mathscr{S}, \mathscr{T})$*-medible en* $X \times Y$.

(a) *Si* $0 \leq f \leq \infty$ *y si*

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\lambda, \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu \quad (x \in X, \ y \in Y) \tag{20}$$

entonces φ *es* $\mathscr{S}$*-medible,* ψ *es* $\mathscr{T}$*-medible y*

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi d\lambda. \tag{21}$$

(b) *Si* f *es compleja y si*

$$\varphi^*(x) = \int_Y |f|_x \, d\lambda \text{ y } \int_X \varphi^* d\mu < \infty,$$

entonces $f \in L^1(\mu \times \lambda)$.

(c) *Si* $f \in L^1(\mu \times \lambda)$, *entonces* $f_x \in L^1(\lambda)$ *para casi todos los* $y \in Y$, *las funciones* φ *y* ψ, *definidos por (20) casi en todas partes, están en* $L^1(\mu)$ *y* $L^1(\lambda)$, *respectivamente y (21) se cumple.*

Demostración.

(a) Por Teorema 1.5.35, las definiciones de φ y ψ tienen sentido.

Supongamos que $Q \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$ y $f = \chi_Q$. Por Definición 1.5.37, (21) es exactamente la conclusión del Teorema 1.5.36. Por lo tanto, (a) se cumple para todas las funciones $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$-medibles simples no negativas s.

En el caso general, existe una sucesión de funciones s_n, tal que $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots$ y $s_n(x, y) \to f(x, y)$ en cada punto de $X \times Y$. Si φ_n está asociada con s_n de la misma manera en que φ se asoció a f, tenemos

$$\int_X \varphi_n d\mu = \int_{X \times Y} s_n d(\mu \times \lambda) \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \tag{22}$$

El Teorema de convergencia monótona 1.5.33 aplicado a $(Y, \mathscr{T}, \lambda)$, prueba que $\varphi_n(x)$ aumenta a φ, para cada x en X, cuando $n \to \infty$. Por lo tanto el Teorema de convergencia monótona, aplicado de nuevo a las dos integrales en (22), y se obtiene la primera igualdad de (21). La segunda igualdad de (21) se obtiene intercambiando los roles de x y y. Esto completa (a).

(b) Si aplicamos (a) a $|f|$, vemos que es cierto (b).

(c) Para probar este literal es suficiente probar para $L^1(\mu \times \lambda)$ real, entonces se seguiría el caso complejo . Si f es real (a) se aplica a f^+ y a f^-.

Sea φ_1 y φ_2 que corresponden a f^+ y f^- como φ corresponde a f en (20).

Ya que $f \in L^1(\mu \times \lambda)$ y $f^+ \leq |f|$, y ya que (a) se cumple para f^+, vemos que $\varphi_1 \in L^1(\mu)$. Similarmente $\varphi_2 \in L^1(\mu)$.

Ya que

$$f_x = (f^+)_x - (f^-)_x$$

tenemos $f_x \in L^1(\lambda)$, para cada x en el cual $\varphi_1(x) < \infty$ y $\varphi_2 < \infty$; ya que φ_1 y φ_2 están en $L^1(\mu)$, esto sucede para casi todos los x, y en cualquiera de esos x tenemos $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$. Por lo tanto $\varphi \in L^1(\mu)$.

Ahora (21) se cumple con φ_1 y f^+ y con φ_2 y f^-, en lugar de φ y f, si restamos las ecuaciones resultantes obtenemos la mitad de (c), la otra mitad se prueba de la misma manera con f^y y ψ en lugar de f_x y φ. ■

Nota. La primera y última integral en (21) también se pueden escribir en la forma más habitual

$$\int_X \int_Y f(x,y)d\lambda(y)d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)d\mu(x)d\lambda(y). \tag{23}$$

Son las llamadas "integrales iteradas" de f. La integral del centro en (21) se refiere a menudo como una integral doble.

La combinacion de los literales (b) y (c) da el siguiente resultado: Si f es $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$-medible y si

$$\int_X \int_Y |f(x,y)|\, d\lambda(y)d\mu(x) < \infty, \tag{24}$$

entonces las dos integrales en (23) son finitas e iguales.

En otras palabras "el orden de integración puede invertirse" para funciones f $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$-medibles cuando $f \geq 0$ y también cuando una de las integrales iteradas de $|f|$ es finita.

Teorema 1.5.39. *Sea f una función medible, ya sea real-evaluada o compleja-evaluada, en un espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Entonces existen funciones simples ϕ_k tal que*

(a) *$\phi_k \to f$ puntualmente cuando $k \to \infty$.*

(b) *$|\phi_k(x)| \leq |f(x)|$ para cada k y x.*

(c) *La convergencia es uniforme en todos los conjuntos en los que f esta acotada.*

Teorema 1.5.40. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medible y f una función medible en X y supongamos que para todo $E \in \mathcal{M}$ tenemos que $\int_E f = 0$. Entonces $f = 0$ casi en todas partes.*

Demostración.

Realizaremos esta prueba en dos casos, cuando f sea una función real-evaluada y cuando f sea una función compleja-evaluada.

Caso I: Sea f una función real-evaluada.

Razonando por contradicción.

Sea $\mu(\{x : f(x) \neq 0\}) > 0$.

Entonces tenemos

$$\{x : f(x) \neq 0\} = \{x : f(x) > 0\} \cup \{x : f(x) < 0\},$$

por lo que debemos tener uno de estos dos conjuntos con medida positiva.
Digamos que es el primero (el argumento para el segundo es análogo).

Entonces

$$\{x : f(x) > 0\} = \bigcup \left\{x : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\} = \bigcup E_n, \text{ donde } E_n = \left\{x : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

entonces nuevamente uno de estos conjuntos E_n tiene medida positiva.

Digamos que E_k tiene medida positiva y como $f(x) \geq \frac{1}{k}$ en E_k, entonces se cumple

$$\int_{E_k} f\mu \geq \int_{E_k} \frac{1}{k}\mu = \mu(E_k)\frac{1}{k} > 0$$

Por lo tanto tenemos una contradicción ya que $\int_{E_k} f = 0$.

$\therefore$ $f = 0$ casi en todas partes.

Caso II: Sea f una función compleja-evaluada.

Entonces

$$f = f_1 + i f_2, \quad \text{donde } f_1 \text{ y } f_2 \text{ son funciones real-evaludas}$$
$$\int_E f = \int_E f_1 + i \int_E f_2.$$

Supongamos que $\int_E f = 0$.

Entonces

$$\int_E f = \int_E f_1 + i \int_E f_2 = 0.$$

Así

$$\int_E f_1 = 0,$$
$$\int_E f_2 = 0.$$

Por lo tanto, aplicando el Caso I tenemos que $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$ casi en todas partes.

Luego como $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$ casi en todas partes, entonces $f = f_1 + if_2 = 0$ casi en todas partes. ■

Capítulo 2

TEOREMAS BÁSICOS DEL ANÁLISIS DE FOURIER

El material contenido en este capítulo constituye el núcleo de nuestro tema.

A menos que se indique lo contrario, cualquier grupo en este trabajo será abeliano y localmente compacto, con la suma como operación de grupo y el 0 como elemento identidad. La abreviatura ALC se utilizará para denotar Abeliano Localmente Compacto.

2.1. Medida de Haar y Convolución

Definición 2.1.1. *En cada grupo ALC G, existe una medida no-negativa regular, llamada medida de Haar de G, que no es idénticamente 0 y que es invariante bajo traslación. Es decir*

$$m(E + x) = m(E) \tag{1}$$

para cada $x \in G$ y cada conjunto de Borel E en G.

La idea para probar que existe una medida de Haar, es construir un funcional lineal T invariante bajo traslación de todas las funciones complejas continuas en G con soporte compacto

(Halmos, P.R. [1]). Esto significa que $Tf \geq 0$ si $f \geq 0$ y $T(f_x) = Tf$, donde f_x es la traslación de f definida por

$$f_x(y) = f(y - x) \quad (y \in G). \tag{2}$$

Tan pronto como se hace esto, el Teorema de Representación de Riesz muestra que hay una medida m con las propiedades requeridas tal que

$$Tf = \int_G f dm \quad (f \in C_c(G)). \tag{3}$$

Proposición 2.1.2. *Si V es un conjunto abierto no vacío de G, entonces $m(V) > 0$.*

Demostración.

Queremos probar que $m(V) > 0$, pero por ser m medida de Haar es no negativa así se sabe que $m(V) \geq 0$.

Razonando por contradicción supongamos que $m(V) = 0$.
Sea K un conjunto compacto de G cualquiera.
Sea $x_0 \in V$.
Luego por ser V abierto, así $V + (x - x_0)$ es abierto (ya que estamos trabajando en un grupo Topológico G) para todo $x \in K$.
Como $x = x_0 + (x - x_0) \in V + (x - x_0)$, luego

$$F = \{V + (x - x_0) : \ x \in K\}$$

es una cubierta de K y por ser K compacto existe una subcubierta finita de F digamos

$$\{V + (x_1 - x_0),\ V + (x_2 - x_0), \ldots,\ V + (x_n - x_0)\}.$$

Luego, $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V + (x_j - x_0)$ así,

$$m(K) \leq \sum_{j=1}^{n} m(V + (x_j - x_0)) = \sum_{j=1}^{n} m(V),$$

ya que m es invariante por ser medida de Haar.

Luego $m(K) \leq 0$, así $m(K) = 0$.

$\therefore m(K) = 0$, $\forall K$ compacto en G.

Sea E un conjunto de Borel en G. Por ser m una medida regular se tiene por definición que

$$|m|(E) = \sup |m|(K),$$

donde K varia sobre los conjuntos compactos K de E.

Como $|m|(K) = \sup \sum |\mu(E_i)|$ donde el supremo se toma sobre todas las colecciones finitas de conjuntos de Borel disjuntos por pares E_i cuya unión es K y como m es no negativa, así $m(E_i) \leq m(K) = 0$, entonces $m(E_i) = 0 \ \ \forall i$, de donde $|m|(K) = 0$ para todo subconjunto compacto K de E.

Luego, $|m|(E) = \sup |m|(K) = 0$, así $0 \leq m(E) \leq |m|(E) = 0$.

Entonces $m(E) = 0$.

Por lo tanto, la medida de Haar es la medida cero ya que para todo E Borel, $m(E) = 0$ lo cual es absurdo porque no es idénticamente cero.

$\therefore m(V) > 0$. ■

Hemos hablado de la medida de Haar de G. Esto se justifica por el siguiente Teorema de Unicidad:

Teorema 2.1.3. *Si m y m' son dos medidas de Haar en G, entonces $m' = \lambda m$, donde λ es una* *constante positiva.*

Demostración.

Sea $g \in C_c(G)$ fijo, de modo que $\int_G gdm = 1$. Definimos λ por $\int_G g(-x)dm'(x) = \lambda$.

Para cualquier $f \in C_c(G)$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\int_G fdm' &= \int_G g(y)dm(y) \int_G f(x)dm'(x) \\
&= \int_G g(y)dm(y) \int_G f(x+y)dm'(x), \quad \text{ya que la medida de Haar es invariante bajo traslación} \\
&= \int_G \int_G g(y)f(x+y)dm'(x)dm(y), \quad \text{por, Teorema 1.5.38 de Fubini} \\
&= \int_G \int_G g(y-x)f(y)dm'(x)dm(y), \quad \text{ya que la medida de Haar es invariante bajo traslación} \\
&= \int_G f(y) \int_G g(y-x)dm'(x)dm(y) \\
&= \lambda \int_G fdm.
\end{aligned}$$

Como $Tf = \int_G fdm$ donde m es única, así hemos probado que

$$\begin{aligned}
Tf &= \int_G fdm \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_G fdm' \\
&= \int_G fd(\frac{m'}{\lambda}) \\
&= \int_G fd\mu; \quad \mu = \frac{m'}{\lambda}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Luego por la unicidad de la medida en el Teorema de Representación de Riesz se sigue que $m = \mu$, esto es, $m = \frac{m'}{\lambda}$, obteniendo $m' = \lambda m$.

$\therefore m' = \lambda m$.

Note que el uso del Teorema de Fubini era posible usarlo en el cálculo anterior ya que los integrandos $g(y)f(x+y)$ y $g(y-x)f(y)$ están en $C_c(G \times G)$.

Así la medida de Haar es única, salvo una constante positiva multiplicativa. ■

Definición 2.1.4. *Si G es compacto, se acostumbrará normalizar m para que $m(G) = 1$. Si G es discreto, cualquier conjunto que consista de un solo punto se le asigna la medida 1. Estos requerimientos son por supuesto contradictorios si G es un grupo finito, pero estos no nos causará ninguna dificultad.*

Habiendo establecido la unicidad de m, ahora cambiaremos nuestra notación, y escribiremos $\int_G f(x)dx$ en lugar de $\int_G f dm$. Así $dx, dy, \ldots$ siempre denotarán integración con respecto a la medida de Haar.

Proposición 2.1.5. *Para cualquier conjunto de Borel E en G $m(-E) = m(E)$.*

Demostración.

Tomemos $m'(E) = m(-E)$, entonces m' es una medida de Haar en G, y entonces hay una constante λ tal que por Teorema 2.1.3 tenemos que $m(-E) = \lambda m(E)$ para todos los conjuntos de Borel E. Tomando E, de modo que $-E = E$, vemos que $\lambda = 1$.

$\therefore \quad m(-E) = m(E).$ ■

Definición 2.1.6. ***Traslación en*** $L^p(G)$***.*** *Si G es un grupo ALC y $1 \leq p \leq \infty$, escribiremos $L^p(G)$ en lugar de $L^p(m)$ (ver definición 1.5.21).*

Está claro que las L^p-normas son invariantes bajo traslación, es decir,

$$\|f_x\|_p = \|f\|_p \quad (x \in G), \tag{5}$$

donde, recordemos, f_x es la traslación de f definida por

$$f_x(y) = f(y - x) \quad (y \in G). \tag{6}$$

Teorema 2.1.7. *Supongamos que $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(G)$. El mapeo*

$$x \mapsto f_x \tag{7}$$

es un mapeo uniformemente continuo de G en $L^p(G)$.

Demostración.

Sea $\epsilon > 0$.

Ya que $C_c(G)$ es denso en $L^p(G)$ existe $g \in C_c(G)$, con soporte compacto K, tal que $||g - f||_p < \frac{\epsilon}{3}$ y la continuidad uniforme de g implica que existe una vecindad V de 0 en G, tal que

$$||g - g_x||_\infty < \frac{\epsilon}{3}[m(K)]^{\frac{-1}{p}}, \tag{8}$$

para todo $x \in V$. Por lo tanto $||g - g_x||_p < \frac{\epsilon}{3}$, y entonces

$$||f - f_x||_p \leq ||f - g||_p + ||g - g_x||_p + ||g_x - f_x||_p < \epsilon$$

si $x \in V$. Finalmente, $f_x - f_y = (f - f_{y-x})_x$, así que $||f_x - f_y||_p < \epsilon$ si $y - x \in V$, y la prueba está completa. ■

Note que el mismo Teorema (con la misma prueba) es verdadero con $C_0(G)$ en lugar de $L^p(G)$, pero es falso para $L^\infty(G)$, a no ser que G sea discreto.

Definición 2.1.8. ***Convoluciones***. *Para cualquier par de funciones de Borel f y g en el grupo ALC*

G definimos su convolución $f * g$ por la fórmula

$$(f * g)(x) = \int_G f(x - y)g(y)dy \tag{9}$$

siempre que

$$\int_G |f(x - y)g(y)|\, dy < \infty. \tag{10}$$

Note que la integral (9) puede también ser escrita en la forma

$$\int_G f_y(x)g(y)dy. \tag{11}$$

Teorema 2.1.9. (a) *Si la desigualdad (10) se cumple para algún $x \in G$, entonces*

$$(f * g)(x) = (g * f)(x).$$

(b) *Si $f \in L^1(G)$ y $g \in L^\infty(G)$, entonces $f * g$ es acotada y uniformemente continua.*

(c) *Si f y g están en $C_c(G)$, con soportes compactos A y B, entonces el soporte de $f * g$ se encuentra en $A + B$, de modo que $f * g \in C_c(G)$.*

(d) *Si $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(G)$ y $g \in L^q(G)$, entonces $f * g \in C_0(G)$.*

(e) *Si f y g están en $L^1(G)$, entonces la desigualdad (10) se mantiene para casi todos los $x \in G$, $f * g \in L^1(G)$ y la desigualdad*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

se cumple.

(f) *Si f, g, h están en $L^1(G)$, entonces $(f * g) * h = f * (g * h)$.*

Demostración.

Reemplazando y por $y + x$ en la ecuación (9) y aplicando la Proposición 2.1.5 obtenemos

$$(f * g)(x) = \int_G f(-y)g(y + x)dy = \int_G f(y)g(-y + x)dy = (g * f)(x)$$

y el literal (a) está probado.

Bajo las hipótesis de (b), tenemos

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x)| &= |(g * f)(x)| \\
&= \left|\int_G g(x - y)f(y)dy\right| \\
&\leq \int_G |g(x - y)f(y)|\, dy \\
&= \int_G |g(x - y)|\, |f(y)|\, dy \\
&\leq \int_G ||g||_\infty\, |f(y)|\, dy; \qquad \text{ya que } ||g||_\infty \geq |g(x - y)| \\
&= ||g||_\infty \int_G |f(y)|\, dy \\
&= ||g||_\infty ||f||_1 \\
&= ||f||_1 ||g||_\infty.
\end{aligned} \tag{12}$$

$\therefore\ |(f * g)(x)| \leq ||f||_1 ||g||_\infty \quad (x \in G)$, de modo que $f * g$ es acotado.

Para $x \in G$, $z \in G$. tenemos

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x) - (f * g)(z)| &\leq \int_G |f(x - y) - f(z - y)|\, |g(y)|\, dy \\
&\leq ||f_{-x} - f_{-z}||_1 ||g||_\infty.
\end{aligned}$$

El Teorema 2.1.7 muestra que la última expresión puede hacerse arbitrariamente pequeña restringiendo $x - z$ para que se encuentre en una vecindad adecuadamente elegida de 0 y así se prueba (b).

Si f se desvanece fuera de A y g se desvanece fuera de B, entonces $f(x-y)g(y) = 0$ a menos que $y \in B$ y $x - y \in A$, es decir, a menos que $x \in A + B$. Así $f * g$ se desvanece fuera de $A + B$ y se prueba el literal (c).

Para probar (d), escogemos las sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ en $C_c(G)$ tal que $\|f_n - f\|_p \to 0$ y $\|g_n - g\|_q \to 0$ cuando $n \to 0$. La desigualdad de *Hölder* muestra que $f_n * g_n \to f * g$ uniformemente. Por (c), $f_n * g_n \in C_c(G)$. Por lo tanto $f * g \in C_0(G)$, y se prueba (d).

La prueba de (e) dependerá del Teorema de Fubini; y primero tenemos que demostrar que el integrando en (9) es una función de Borel en $G \times G$. Fijando un conjunto abierto V en el plano, ponemos $E = f^{-1}(V)$, $E' = E \times G$, y sea $E'' = \{(x, y) :\ x - y \in E\}$. Entonces E' es un conjunto de Borel en $G \times G$ y ya que el homeomorfismo de $G \times G$ sobre sí mismo que lleva (x, y) a $(x + y, y)$ mapea E' sobre E'', E'' es también un conjunto de Borel. Ya que $f(x-y) \in V$ si y solo sí $(x, y) \in E''$, vemos que $f(x - y)$ es una función de Borel en $G \times G$ y también lo es el producto $f(x - y)g(y)$. Por el Teorema de Fubini,

$$\int_G \int_G |f(x-y)g(y)|\, dxdy = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Si denotamos a $\phi(x) = \int_G |f|\,(x - y)g(y)dy$, se sigue que $\phi \in L^1(G)$. En particular, $\phi(x) < \infty$ para casi todos los x, y entonces $(f * g)(x)$ existe para casi todos los x. Finalmente

$$
\begin{aligned}
|(f * g)(x)| &\leq \phi(x) \\
\int_G |(f * g)(x)|\, dx &\leq \int_G \phi(x) dx \\
\|f * g\|_1 &\leq \int_G \int_G |f(x-y)g(y)|\, dydx \\
\|f * g\|_1 &\leq \int_G \int_G |f(x-y)|\, |g(y)|\, dydx \\
\|f * g\|_1 &\leq \|f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}
$$

Así la prueba de (e) está completa.

La prueba de (f) es también una aplicación del Teorema de Fubini, justificada por (e) para casi todos los x:

$$
\begin{aligned}
(f * (g * h))(x) &= \int_G f(x-z)(g * h)(z)dz \\
&= \int_G \int_G f(x-z)g(z-y)h(y)dydz \\
&= \int_G \int_G f(x-z-y)g(z)h(y)dydz \\
&= \int_G (f * g)(x-y)h(y)dy \\
&= ((f * g) * h)(x).
\end{aligned}
$$

■

Teorema 2.1.10. *Para cualquier grupo ALC G, $L^1(G)$ es un álgebra de Banach conmutativa, si la multiplicación está definida por la convolución. Si G es discreto, $L^1(G)$ tiene identidad.*

Demostración.

La primera declaración se sigue de las partes (e), (f) y (a) del Teorema 2.1.9, ya que la ley distributiva: $f * (g + h) = f * g + f * h$ es cierta. Si G es discreto y la medida de Haar es normalizada como se indica en la definición 2.1.4.

$G = \bigcup_{z \in G}\{z\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
(f * g)(x) &= \int_G f(x-y)g(y)dy \\
&= \int_{\bigcup_{z\in G}} f(x-y)g(y)dy \\
&= \sum_{z\in G} \int_{\{z\}} f(x-y)g(y)dy \\
&= \sum_{z\in G} f(x-y)g(y)dy \int_{\{z\}} 1dy \\
&= \sum_{z\in G} f(x-y)g(y)dym(\{z\}) \\
&= \sum_{z\in G} f(x-y)g(y)dy.
\end{aligned}$$

Y si $e(0) = 1$, pero $e(x) = 0$ para todo $x \neq 0$, entonces $\|e\|_1 = \int_G |e(x)|\, dx = \int_G |0|\, dx = 0 < \infty,\ \forall x \neq 0$, entonces $e \in L^1(G)$.

$$\begin{aligned}
(f * e)(x) &= \sum_{y\in G} f(x-y)e(y) \\
&= \sum_{0\in G} f(x-0)e(0) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

$\therefore (f * e) = f$.

Así e es la identidad de $L^1(G)$. ∎

Si G no es discreto, entonces $L^1(G)$ no tiene identidad, pero las unidades aproximadas están disponibles.

Teorema 2.1.11. *Dado $f \in L^1(G)$ y $\epsilon > 0$, existe una vecindad V de 0 en G, con la siguiente propiedad: Si u es una función no negativa de Borel que se desvanece fuera de V, y si $\int_G u(x)dx = 1$, entonces*

$$\|f - f * u\|_1 < \epsilon.$$

Demostración.

Por el Teorema 2.1.7 podemos escoger V de modo que $\|f - f_y\|_1 < \epsilon \quad \forall y \in V$. Si u satisface las hipótesis, tenemos

$$(f * u)(x) - f(x) = \int_G [f(x-y) - f(x)]u(y)dy$$

así que

$$\begin{aligned}
\|f * u - f\|_1 &= \int_G |(f * u)(x) - f(x)|\, dx \\
&= \int_G \left| \int_G [f(x-y) - f(x)]\, u(y)dy \right| dx \\
&\leq \int_G \int_G |f(x-y) - f(x)|\, |u(y)|\, dydx \\
&= \int_G \left(\int_G |f(x-y) - f(x)|\, |u(y)|\, dx \right) dy \\
&= \int_G \left(|u(y)| \int_G |f(x-y) - f(x)|\, dx \right) dy \\
&= \int_G |u(y)|\, \|f_y - f\|_1 dy \\
&= \int_{G-V} |u(y)|\, \|f_y - f\|_1 dy + \int_V |u(y)|\, \|f_y - f\|_1 dy \\
&= 0 + \int_V |u(y)|\, \|f_y - f\|_1 dy; \quad \text{ya que } u \text{ se desvanece fuera de } V \\
&< \int_V |u(y)|\, \epsilon dy; \quad \text{ya que } \|f_y - f\|_1 < \epsilon \text{ para } y \in V \\
&= \epsilon \int_V |u(y)|\, dy \\
&= \epsilon \int_V u(y)dy; \quad \text{ya que } u \text{ es no negativo} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

$\therefore \|f * u - f\|_1 < \epsilon.$ ■

2.2. El Grupo Dual y la Transformada de Fourier

Definición 2.2.1. ***Caracteres.*** *Una función compleja γ en un grupo ALC G, es llamada un caracter de G si $|\gamma(x)| = 1$ para todo $x \in G$ y si se cumple la ecuación funcional*

$$\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y) \quad (x,\ y \in G). \tag{13}$$

Definición 2.2.2. *Sea G un grupo ALC, se define el grupo dual de G como*

$$\Gamma = \{\gamma\colon G \to \mathbb{C} \mid \gamma \textit{ es un caracter continuo}\}.$$

La suma se define por $\gamma_1 + \gamma_2$, donde

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x) \quad (x \in G;\ \gamma_1,\ \gamma_2 \in \Gamma). \tag{14}$$

Probemos que Γ es un grupo con respecto a la suma antes definida:

Demostración.

Cerradura:

Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$.

$$\begin{aligned}
(\gamma_1 + \gamma_2)(x) &= \gamma_1(x)\gamma_2(x) \\
|(\gamma_1 + \gamma_2)(x)| &= |\gamma_1(x)\gamma_2(x)| \\
&= |\gamma_1(x)|\,|\gamma_2(x)| \\
&= (1) \cdot (1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como el producto de funciones continuas es continua así $\gamma_1 + \gamma_2$ es continua.

$$
\begin{aligned}
(\gamma_1 + \gamma_2)(x + y) &= \gamma_1(x + y)\gamma_2(x + y) \\
&= \gamma_1(x)\gamma_1(y)\gamma_2(x)\gamma_2(y) \\
&= [\gamma_1(x)\gamma_2(x)][\gamma_1(y)\gamma_2(y)] \\
&= [(\gamma_1 + \gamma_2)(x)][(\gamma_1 + \gamma_2)(y)].
\end{aligned}
$$

$\therefore \gamma_1 + \gamma_2 \in \Gamma$.

Asociatividad:

Sean $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$.

$$
\begin{aligned}
((\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3)(x) &= (\gamma_1 + \gamma_2)(x)\gamma_3(x) \\
&= \gamma_1(x)\gamma_2(x)\gamma_3(x) \\
&= \gamma_1(x)(\gamma_2(x)\gamma_3(x)) \\
&= \gamma_1(x)((\gamma_2 + \gamma_3)(x)) \\
&= (\gamma_1 + (\gamma_2 + \gamma_3))(x).
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad (\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3 = \gamma_1 + (\gamma_2 + \gamma_3)$.

Identidad:

Sea

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} : G &\to \mathbb{C} \\
x &\mapsto \mathbf{0}(x) = 1.
\end{aligned}
$$

$\mathbf{0}$ es continua por ser constante y $|\mathbf{0}(x)| = 1$, además $\mathbf{0}(x + y) = 1 = \mathbf{0}(x)\mathbf{0}(y)$.

$\therefore \mathbf{0} \in \Gamma$.

Sea $\gamma \in \Gamma$

$$\begin{aligned}(\gamma + \mathbf{0})(x) &= \gamma(x)\mathbf{0}(x)\\ &= \gamma(x)\cdot 1\\ &= \gamma(x).\end{aligned}$$

$\therefore \gamma + \mathbf{0} = \gamma$.

Aanálogamente $\mathbf{0} + \gamma = \gamma$.

Inverso:

Sea $\gamma \in \Gamma$.

$$\begin{aligned}-\gamma : G &\rightarrow \mathbb{C}\\ x &\mapsto (-\gamma)(x) = \gamma(-x).\end{aligned}$$

$-\gamma$ es continuo ya que γ es continuo.

$$\begin{aligned}(-\gamma)(x) &= \gamma(-x)\\ |(-\gamma)(x)| &= |\gamma(-x)|\\ &= 1; \quad \gamma \in \Gamma.\end{aligned}$$

$\therefore\ |(-\gamma)(x)| = 1.$

$$\begin{aligned}(-\gamma)(x+y) &= \gamma(-(x+y))\\ &= \gamma((-x)+(-y))\\ &= \gamma(-x)\gamma(-y)\\ &= [(-\gamma)(x)][(-\gamma)(y)].\end{aligned}$$

$\therefore -\gamma \in \Gamma$.

$$[\gamma + (-\gamma)](x) = \gamma(x)\gamma(-x) = \gamma(0).$$

Tenemos que $\gamma(0) = \gamma(0)\gamma(0)$ y como $|\gamma(x)| = 1 \forall x \in G$, así $|\gamma(0)| = 1$, de donde $\gamma(0) \neq 0$ luego al dividir por $\gamma(0)$ se tiene que

$$\gamma(0) = 1. \tag{15}$$

$$[\gamma + (-\gamma)](x) = 1 = \mathbf{0}(x). \tag{16}$$

$\therefore \gamma + (-\gamma) = \mathbf{0}$.

$\therefore \Gamma$ es grupo bajo la suma.

El cero en realidad es la función constante 1. ■

En vista de la dualidad entre G y Γ que se establecerá en la sección 2.8 es costumbre escribir

$$(x, \gamma) \tag{17}$$

en lugar de $\gamma(x)$. Con esta notación las ecuaciones (13) y (14) se convierten en

$$(x + y, \gamma) = (x, \gamma)(y, \gamma) \quad y \quad (x, \gamma_1 + \gamma_2) = (x, \gamma_1)(x, \gamma_2). \tag{18}$$

Proposición 2.2.3. *Sea $x \in G$ y $\gamma \in \Gamma$*

(a)

$$(0, \gamma) = (x, \boldsymbol{0}) = 1 \quad (x \in G,\ \gamma \in \Gamma); \tag{19}$$

(b)

$$(-x, \gamma) = (x, -\gamma) = (x, \gamma)^{-1} = \overline{(x, \gamma)}. \tag{20}$$

Demostración.

Sea $x \in G$ y $\gamma \in \Gamma$.

(a) Igualando las ecuaciones (15) y (16) tenemos que

$$(0,\gamma) = (x,\mathbf{0}) = 1.$$

(b)

$$\begin{aligned}
\gamma(-x) &= \gamma(0-x)\\
&= \gamma(0)\gamma(-x)\\
&= \mathbf{0}(x)(-\gamma)(x),\ \text{por (19)}\\
&= (\mathbf{0}-\gamma)(x)\\
&= (-\gamma)(x)
\end{aligned}$$

$\therefore\ (-x,\gamma) = (x,-\gamma).$

$$\begin{aligned}
(\gamma(x))^{-1} &= \frac{1}{\gamma(x)}\\
&= \frac{\gamma(0)}{\gamma(x)};\ \text{por (19)}\\
&= \frac{\gamma(x-x)}{\gamma(x)}\\
&= \frac{\gamma(x)\gamma(-x)}{\gamma(x)}\\
&= \gamma(-x).
\end{aligned}$$

$\therefore\ (-x,\gamma) = (x,-\gamma) = (x,\gamma)^{-1}.$

$$\begin{aligned}
\gamma(x)\overline{\gamma(x)} &= |\gamma(x)|^2\\
\overline{\gamma(x)} &= \frac{|\gamma(x)|^2}{\gamma(x)}\\
&= \frac{1^2}{\gamma(x)};\ \ \text{pues}\ \ |\gamma(x)| = 1\\
&= (\gamma(x))^{-1}.
\end{aligned}$$

$\therefore\ (-x,\gamma) = (x,-\gamma) = (x,\gamma)^{-1} = \overline{(x,\gamma)}.$ ■

Dotaremos actualmente a Γ con una topología con respecto a la cual Γ será un grupo ALC. Pero primero identificamos Γ con el espacio ideal maximal de $L^1(G)$.

Teorema 2.2.4. *Sea* $\Delta(L^1(G)) = \{h : L^1(G) \to \mathbb{C} \mid h$ *es un homomorfismo complejo no idénticamente 0*$\}$ *el espacio ideal maximal de* $L^1(G)$ *definido en (1.4.10) del Capítulo 1 de los preliminares.*
Definamos

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \Gamma & \to & \Delta(L^1(G)) \\ & \gamma & \mapsto & \psi(\gamma) \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rccl} \psi(\gamma): & L^1(G) & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & [\psi(\gamma)](f) = \hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x,\gamma)dx. \end{array}$$

Entonces ψ *es una biyección.*

Demostración.

Primero Probaremos que $\psi(\gamma) \in \Delta(L^1(G))$.

Para ello probaremos que $\psi(\gamma)$ es un homomorfismo complejo no idénticamente 0.

Sean $f, g \in L^1(G)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
[\psi(\gamma)](\alpha f + g) &= (\widehat{\alpha f + g})(\gamma) \\
&= \int_G (\alpha f + g)(x)(-x, \gamma) dx \\
&= \int_G [(\alpha f)(x) + g(x)](-x, \gamma) dx \\
&= \int_G [\alpha f(x) + g(x)](-x, \gamma) dx \\
&= \int_G \alpha f(x)(-x, \gamma) dx + \int_G g(x)(-x, \gamma) dx \\
&= \alpha \int_G f(x)(-x, \gamma) dx + \int_G g(x)(-x, \gamma) dx \\
&= \alpha \hat{f}(\gamma) + \hat{g}(\gamma) \\
&= \alpha[\psi(\gamma)](f) + [\psi(\gamma)](g).
\end{aligned}$$

$\therefore$ $\psi(\gamma)$ es un funcional lineal.

Supongamos que $f,\ g \in L^1(G)$ y $k = f * g$. Entonces

$$\begin{aligned}
\hat{k}(\gamma) &= \int_G (f * g)(x)(-x,\gamma)dx \\
&= \int_G \left[\int_G f(x-y)g(y)dy\right](-x,\gamma)dx \\
&= \int_G \int_G f(x-y)(-x,\gamma)g(y)dydx \\
&= \int_G \int_G f(x-y)(-x+y,\gamma)(-y,\gamma)g(y)dydx; \quad \text{ya que } \gamma(-x) = \gamma(-x+y-y) = \gamma(-x+y)\gamma(-y) \\
&= \int_G \int_G [g(y)(-y,\gamma)]f(x-y)(-x+y,\gamma)dxdy \\
&= \int_G \left(\int_G [g(y)(-y,\gamma)]f(x-y)(-x+y,\gamma)dx\right)dy \\
&= \int_G g(y)(-y,\gamma)\left(\int_G f(x-y)(-x+y,\gamma)dx\right)dy \\
&= \int_G (g(y)(-y,\gamma))\hat{f}(\gamma)dy \\
&= \hat{f}(\gamma)\int_G g(y)(-y,\gamma)dy \\
&= \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma).
\end{aligned}$$

Así $\psi(\gamma)$ es multiplicativo en el álgebra de Banach $L^1(G)$, y como es lineal, es un homomorfismo complejo.

Ya que $|(-x,\gamma)| = 1$, $[\psi(\gamma)](f) = \hat{f}(\gamma) \neq 0$ para algún $f \in L^1(G)$.
Probemos este hecho. Razonando por contradicción.
Supongamos que para todo f en $L^1(G)$ se tiene que $\hat{f}(\gamma) = 0$.

Sea $f \neq 0$ en $L^1(G)$, así $|f| \in L^1(G)$.
Sea $g(x) = |f(x)|\overline{(-x,\gamma)}$, como $|f| \in L^1(G)$ y como γ, es continua, así $\overline{\gamma}$ también lo es, por el cual

es una función de Borel, de donde $g(x)$ es una función de Borel y

$$\begin{aligned}
\|g\|_1 &= \int_G |g(x)|\, dx \\
&= \int_G |f(x)| \left|\overline{(-x,\gamma)}\right| dx \\
&= \int_G |f(x)|\, dx; \quad \left|\overline{(-x,\gamma)}\right| = |(-x,\gamma)| = 1 \\
&= \|f\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

$\therefore\, g \in L^1(G)$.

Por suposición $\hat{g}(\gamma) = 0$, así $\int_G g(x)(-x,\gamma)dx = 0$ esto es,

$$\begin{aligned}
\int_G |f(x)|\, \overline{(-x,\gamma)}(-x,\gamma)dx &= 0 \\
\int_G |f(x)|\, |(-x,\gamma)|^2\, dx &= 0, \quad z\bar{z} = |z|^2\,, \ \forall\, z \in \mathbb{C}. \\
\int_G |f(x)|\, dx &= 0
\end{aligned}$$

y como $|f|$ es no negativa, así $|f| = 0$ casi en todas partes por lo cual $f = 0$, pero entonces $f = 0$ en $L^1(G)$, lo cual es una contradicción.

$\therefore\ [\psi(\gamma)](f) = \hat{f}(\gamma) \neq 0.$

$\therefore\ [\psi(\gamma)] \in \Delta(L^1(G)).$

Ahora probemos que ψ es una biyección.

Probemos que ψ está bien definido.

Sean $\gamma_1,\ \gamma_2 \in \Gamma$ tal que $\gamma_1 = \gamma_2$.

Sea $f \in L^1(G)$.

$$\gamma_1(-x) = \gamma_2(-x)$$
$$(-x, \gamma_1) = (-x, \gamma_2)$$
$$f(x)(-x, \gamma_1) = f(x)(-x, \gamma_2)$$
$$\int_G f(x)(-x, \gamma_1)dx = \int_G f(x)(-x, \gamma_2)dx$$
$$\hat{f}(\gamma_1) = \hat{f}(\gamma_2)$$
$$[\psi(\gamma_1)](f) = [\psi(\gamma_2)](f).$$

$\therefore\ [\psi(\gamma_1)] = [\psi(\gamma_2)]$.

Por lo tanto ψ está bien definida.

Sobreyectividad.

Supongamos que h es un homomorfismo complejo de $L^1(G)$, $h \neq 0$. Entonces h es un funcional lineal acotado de norma 1 (Ver Proposición 1.4.11 literal (d)), de modo que

$$h(f) = \int_G f(x)\phi(x)dx \quad (f \in L^1(G)), \tag{21}$$

para algún $\phi \in L^\infty(G)$ con $\|\phi\|_\infty = 1$ por definición 1.5.27. Si f y g están en $L^1(G)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_G h(f)g(y)\phi(y)dy &= h(f)h(g) \\
&= h(f * g), \qquad \text{ya que } h \text{ es multiplicativo} \\
&= \int_G (f * g)(x)\phi(x)dx \\
&= \int_G g(y)dy \int_G f(x-y)\phi(x)dx \\
&= \int_G g(y)h(f_y)dy,
\end{aligned}$$

de modo que

$$h(f)\phi(y) = h(f_y) \tag{22}$$

para casi todos los $y \in G$. Por Teorema 2.1.7 y la continuidad de h, el lado derecho de la ecuación (22) es una función continua en G, para cada $f \in L^1(G)$.

Escogiendo f tal que $h(f) \neq 0$, (22) prueba que $\phi(y)$ coincide con una función continua casi en todas partes, y por lo tanto, podemos asumir que ϕ es continua, sin afectar la ecuación (21). Entonces la ecuación (22) se cumple para todos los $y \in G$.

Si reemplazamos y por $x + y$ y también f por f_x en (22), obtenemos

$$h(f)\phi(x+y) = h(f_{x+y}) = h((f_x)_y) = h(f_x)\phi(y) = h(f)\phi(x)\phi(y)$$

de modo que

$$\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y) \quad (x,\ y \in G). \tag{23}$$

Ya que $|\phi(x)| \leq 1$ para todo x, esto es cierto porque $||\phi|| = 1$ en L^∞ y como la ecuación (23) implica que $\phi(-x) = \phi(x)^{-1}$, se sigue que $|\phi(x)| = 1$. Por lo tanto $\phi \in \Gamma$.

Sea $\gamma = -\phi$.

Así la ecuacion (21) se convierte en

$$\begin{aligned} h(f) &= \int_G f(x)(x, -\gamma)dx \\ &= \int_G f(x)(-x, \gamma)dx; \quad \text{por Proposición 2.2.3.} \end{aligned}$$

$\therefore$ ψ es sobreyectiva.

Inyectividad.

Sean $\gamma_1,\ \gamma_2 \in \Gamma$ tal que $\psi(\gamma_1) = \psi(\gamma_2)$.

Sea $f \in L^1(G)$. Entonces

$$\begin{aligned}
[\psi(\gamma_1)](f) &= [\psi(\gamma_2)](f) \\
\hat{f}(\gamma_1) &= \hat{f}(\gamma_2) \\
\int_G f(x)(-x, \gamma_1)dx &= \int_G f(x)(-x, \gamma_2)dx \\
f(x)(-x, \gamma_1) &= f(x)(-x, \gamma_2); \quad \text{casi en todas partes por Teorema 1.5.40} \\
(-x, \gamma_1) &= (-x\gamma_2).
\end{aligned}$$

Como γ_1 y γ_2 son continuas, la Proposición 2.1.2 prueba que la igualdad se cumple para todo $x \in G$, entonces $\gamma_1 = \gamma_2$.

$\therefore$ ψ es una biyección. ■

Definición 2.2.5. ***La transformada de Fourier.*** *Para todo $f \in L^1(G)$, la función $\hat{f}$ definida en Γ por*

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x, \gamma)dx \quad (\gamma \in \Gamma)$$

es llamada la Transformada de Fourier de f.
Se define

$$A(\Gamma) = \{\hat{f} : \Gamma \to \mathbb{C} \mid \hat{f} \text{ es la transformada de Fourier de } f \in L^1(G)\}.$$

Por Teorema 2.2.4, $\hat{f}$ es precisamente la transformada de Gelfand de f. Si le damos a Γ la topología débil inducida por $A(\Gamma)$, los hechos básicos de la teoría de Gelfand muestran que $A(\Gamma)$ es una subálgebra separadora de $C_0(\Gamma)$. Resumimos algunas de las propiedades de $A(\Gamma)$.

Teorema 2.2.6. (a) $A(\Gamma)$ *es una subálgebra separadora auto-adjunta de* $C_0(\Gamma)$*, de modo que* $A(\Gamma)$ *es denso en* $C_0(\Gamma)$*, por el Teorema de Stone-Weierstrass.*

(b) *La transformada de Fourier de $f * g$ es $\hat{f}\hat{g}$.*

(c) $A(\Gamma)$ *es invariante bajo traslación y bajo la multiplicación por* (x, γ)*, para cualquier* $x \in G$*.*

(d) *La transformada de Fourier, considerada como un mapeo de* $L^1(G)$ *en* $C_0(\Gamma)$*, es de norma decreciente y por lo tanto, es continuo:* $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

(e) *Para* $f \in L^1(G)$ *y* $\gamma \in \Gamma$*,* $(f * \gamma)(x) = (x, \gamma)\hat{f}(\gamma)$*.*

Demostración.

(a) Sea $\hat{f} \in A(\Gamma)$. Entonces $f \in L^1(G)$, definamos $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, como $f \in L^1(G)$ así f es una función de Borel, como la función $x \mapsto -x$ es continua ya que G es un grupo topológico y también la función $z \mapsto \bar{z}$ es continua para $z \in \mathbb{C}$ así $\tilde{f}$ es una función de Borel, además

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}\|_1 &= \int_G \left|\tilde{f}(x)\right| dx \\
&= \int_G \left|\overline{f(-x)}\right| dx \\
&= \int_G |f(-x)|\, dx \\
&= \int_G |f(x)|\, dx, \qquad \text{por Proposición 2.1.5} \\
&= \|f\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

$\therefore \tilde{f} \in L^1(G)$

Ahora probemos que $\hat{\hat{f}} = \overline{\hat{f}}$.

$$\begin{aligned}
\hat{\tilde{f}}(\gamma) &= \int_G \tilde{f}(x)(-x,\gamma)dx \\
&= \int_G \overline{f(-x)}(-x,\gamma)dx \\
&= \int_G \overline{f(-x)}\ \overline{(x,\gamma)}dx; \qquad \text{por ecuación (20)} \\
&= \int_G \overline{f(-x)(x,\gamma)}dx \\
&= \overline{\int_G f(-x)(x,\gamma)dx} \\
&= \overline{\int_G f(x)(-x,\gamma)dx}; \qquad \text{por Proposición 2.1.5} \\
&= \overline{\hat{f}(\gamma)} \\
&= \overline{\hat{f}}(\gamma).
\end{aligned}$$

$\therefore\ \hat{\tilde{f}}(\gamma) = \overline{\hat{f}}(\gamma)$ y como $\tilde{f} \in L^1(G)$, así $\hat{\tilde{f}} \in A(\Gamma)$ de donde $\overline{\hat{f}} \in A(\Gamma)$.

$\therefore\ \hat{f} \in A(\Gamma) \Rightarrow \overline{\hat{f}} \in A(\Gamma)$.

$\therefore\ A(\Gamma)$ es autoadjunto.

$\therefore\ A(\Gamma)$ es denso por el Teorema de Stone-Weierstrass.

El literal (b) está implicito en el Teorema 2.2.4.

(c) Sea $\gamma_0 \in \Gamma$ y $f \in L^1(G)$.

Definamos $g(x) = (x,\gamma_0)f(x)$.

Como (x,γ_0) es continua, así es una función de Borel, y como f es una función de Borel, g es el producto de funciones medibles, entonces g es medible, por lo tanto es una función de Borel.

Además,

$$\begin{aligned}
\|g\|_1 &= \int_G |(x,\gamma_0)f(x)|\,dx \\
&= \int_G |(x,\gamma_0)|\,|f(x)|\,dx \\
&= \int_G f(x)dx; \quad |(-x,\gamma)| = 1 \\
&= \|f\|_1 \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

$\therefore\ \|g\|_1 < \infty.$

$\therefore\ g \in L^1(G).$

Luego $\hat{g} \in A(\Gamma)$, además

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\gamma) &= \int_G (x,\gamma_0)f(x)(-x,\gamma)dx \\
&= \int_G f(x)(-(-x),\gamma_0)(-x,\gamma)dx \\
&= \int_G f(x)(-x,-\gamma_0)(-x,\gamma)dx, \quad \text{por Proposición 2.2.3} \\
&= \int_G f(x)(-x,\gamma-\gamma_0)dx \\
&= \hat{f}(\gamma-\gamma_0).
\end{aligned}$$

$\therefore\ \hat{g} = \hat{f}(\gamma-\gamma_0) \in A(\Gamma)$. De modo que $A(\Gamma)$ es invariante bajo traslación.

Sea $h = f_z$.

Como $f_z^{-1}(V) = f^{-1}(V) + \{z\}$ para V abierto en los Complejos, es un conjunto de Borel ya que las traslaciones de un conjunto de Borel es un conjunto de Borel. Entonces $h = f_z$ es un función de Borel.

Además,

$$
\begin{aligned}
\|h\|_1 &= \|f_z\|_1 \\
&= \int_G |f_z(y)|\, dy \\
&= \int_G |f(y-z)|\, dy \\
&= \int_G |f(y)|\, dy, \qquad \text{ya que la medida de Haar es invariante bajo traslación} \\
&= \|f\|_1 \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \|h\|_1 < \infty.$

$\therefore\ h \in L^1(G).$

Entonces $\hat{h} \in A(\Gamma)$. Luego

$$
\begin{aligned}
\hat{h}(\gamma) &= \int_G f_z(y)(-y,\gamma)dy \\
&= \int_G f(y-z)(-y,\gamma)dy \\
&= \int_G f(y-z)(-z+z-y,\gamma)dy \\
&= \int_G f(y-z)(-z,\gamma)(z-y,\gamma)dy \\
&= (-z,\gamma)\int_G f(y-z)(z-y,\gamma)dy \\
&= (-z,\gamma)\hat{f}(\gamma).
\end{aligned}
$$

Sea $z = -x$, entonces

$$\hat{h}(\gamma) = (x,\gamma)\hat{f}(\gamma).$$

Por lo tanto $A(\Gamma)$ es invariante bajo la multiplicación por (x,γ).

Así el literal (c) está probado.

(d) Por el Teorema 2.2.4 $\hat{f}$ es la transformada de Gelfand de f, así por la Proposición 1.4.11 literal (f) de los preliminares del Capítulo I se tiene que

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

(e)

$$\begin{aligned}
(f * \gamma)(x) &= \int_G f(x-y)\gamma(y)dy \\
&= \int_G f(x-y)(y,\gamma)dy \\
&= \int_G f(x-(y+x))(y+x,\gamma)dy; \quad \text{ya que la medida de Haar es invariante} \\
&= \int_G f(-y)(y+x,\gamma)dy \\
&= \int_G f(-y)(y,\gamma)(x,\gamma)dy \\
&= (x,\gamma)\int_G f(y)(-y,\gamma); \quad \text{por Proposición 2.1.5} \\
&= (x,\gamma)\hat{f}(\gamma).
\end{aligned}$$

$\therefore\ (f * \gamma)(x) = (x,\gamma)\hat{f}(\gamma).$ ■

Observación 1. *Cuando se trabaje con $\tilde{f}$ (es decir cuando se le ponga $\{\sim\}$ a una función) nos estaremos refiriendo a la función definida por: $\tilde{f}(x) = \overline{f}(-x)$.*

Teorema 2.2.7. *Si G es discreto, Γ es compacto. Si G es compacto, Γ es discreto.*

Demostración.

Si G es discreto, entonces $L^1(G)$ tiene identidad por el Teorema 2.1.10 y su espacio ideal maximal

Γ es, por lo tanto compacto por Proposición 1.4.11 literal (g).

Si G es compacto y su medida de Haar es normalizada de modo que $m(G) = 1$, las relaciones de ortogonalidad

$$\int_G (x,\gamma)dx = \begin{cases} 1 & si \quad \gamma = 0 \\ \\ 0 & si \quad \gamma \neq 0 \end{cases} \tag{24}$$

se cumplen.

Si $\gamma = 0$, entonces $\gamma(x) = 1 \quad \forall x \in G$ ya que esta es la identidad aditiva en Γ.

$$\int_G (x,\gamma)dx = \int_G 1dx = \int_G = m(G) = 1.$$

Si $\gamma \neq 0$, entonces $\gamma(x_0) \neq 1$ para algún $x_0 \in G$, y

$$\begin{aligned} \int_G (x,\gamma)dx &= (x_0,\gamma)\int_G (x - x_0,\gamma)dx \\ &= (x_0,\gamma)\int_G (x,\gamma)dx, \quad \text{por Proposición 2.1.5.} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[1 - (x_0,\gamma)]\int_G (x,\gamma)dx = 0.$$

Así $1 = (x_0,\gamma)$ ó $\int_G (x,\gamma)dx = 0$, pero $1 \neq (x_0,\gamma)$ por lo cual

$$\int_G (x,\gamma)dx = 0.$$

Si $f(x) = 1$ para todo $x \in G$, entonces $m(G)$ es finita y se puede decir que $m(G) = 1$ ya que G es compacto. Por lo tanto se cumplen las relaciones de la ecuación (24). Y por ser m una medida regular, así la medida de cualquier conjunto compacto es finita.

Además f es una función constante, así f es continua, por lo cual es una función de Borel, luego

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)|\,dx = \int_G dx = m(G) = 1 < \infty$$

así $f \in L^1(G)$.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(0) &= \int_G f(x)(-x,0)dx \\
&= \int_G (-x,0)dx \\
&= \int_G (x,0)dx \\
&= 1, \quad \text{por ecuación (24).}
\end{aligned}$$

Para $\gamma \neq 0$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\gamma) &= \int_G f(x)(-x,\gamma)dx \\
&= \int_G (-x,\gamma)dx \qquad (25)\\
&= 0, \quad \text{por ecuación (24)}
\end{aligned}$$

por Teorema 2.2.6-(d), $\hat{f}$ es continua, así $\hat{f}^{-1}(\mathbb{C} - \{0\})$ es abierto ya que $\mathbb{C} - \{0\}$ es abierto, (pues $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{C}$), luego $\{0\} = \hat{f}^{-1}(\mathbb{C} - \{0\})$ es abierto en Γ. Por lo tanto los conjuntos de un solo elemento son conjuntos abiertos en Γ.

$\therefore \Gamma$ es discreto. ■

2.2.1. La topología de Γ.

Hasta ahora, Γ es un grupo y un espacio localmente compacto de Hausdorff ya que Γ es el espacio ideal maximal. Ahora demostraremos que estas dos estructuras se unen para hacer de Γ un grupo ALC. Nuestra prueba depende de una descripción alternativa de la topología de Γ:

Teorema 2.2.8. (a) (x, γ) *es una función continua en* $G \times \Gamma$.

(b) *Sean K y C subconjuntos compactos de G y Γ, respectivamente, sea U_r el conjunto de todos los números complejos z con $|1 - z| < r$, definamos*

$$N(K, r) = \{\gamma : \ (x, \gamma) \in U_r \ \textit{para todo} \ x \in K\},$$

$$N(C, r) = \{x : \ (x, \gamma) \in U_r \ \textit{para todo} \ \gamma \in C\}.$$

Entonces $N(K, r)$ y $N(C, r)$ son subconjuntos abiertos de Γ y G, respectivamente.

(c) *La familia de todos los conjuntos $N(K, r)$ y sus traslaciones son una base para la topología de* Γ.

(d) Γ *es un grupo ALC.*

Demostración.

La ecuación (22) de la prueba de el Teorema 2.2.4, la reescribimos en la forma

$$\hat{f}(\gamma)(x, \gamma) = \hat{f}_x(\gamma) \quad (x \in G, \ \gamma \in \Gamma) \tag{26}$$

implicará el literal (a), tan pronto como se pruebe que $\hat{f}_x(\gamma)$ es una función continua en $G \times \Gamma$, para cada $f \in L^1(G)$.

Fijando $x_0, \ \gamma_0$, y $\epsilon > 0$. Hay vecindades V de x_0 y W de γ_0 tal que

$$\|f_x - f_{x_0}\|_1 < \epsilon \quad y \quad \left|\hat{f}_{x_0}(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma_0)\right| < \epsilon \tag{27}$$

para todo $x \in V$, $\gamma \in W$, por Teorema 2.1.7 y la continuidad de $\hat{f}_{x_0}$.
Ya que $\left|\hat{f}_x(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma)\right| \leq \|f_x - f_{x_0}\|_1$, se sigue que $\left|\hat{f}_x(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma_0)\right| < 2\epsilon$ si $x \in V$ y $\gamma \in W$, entonces $\hat{f}_x(\gamma)$ es continua en $G \times \Gamma$.
Luego en la ecuación (26) despejamos a (x, γ) como sigue

$$(x, \gamma) = \frac{\hat{f}_x(\gamma)}{\hat{f}(\gamma)} \tag{28}$$

y como $\hat{f}_x(\gamma)$ y $\hat{f}(\gamma)$ son continuas, entonces sería el cociente de funciones continuas. Por tanto (x, γ) es continua y el literal (a) está probado.

(b) Escogemos un conjunto compacto K en G, también escogemos $r > 0$, y fijamos $\gamma_0 \in N(K, r)$. A cada $x_0 \in K$ corresponden vecindades V de x_0 y W de γ_0 tal que $(x, \gamma) \in U_r$, si $x \in V$ y $\gamma \in W$; esto se sigue de (a).
Como K es compacto, entonces un número finito de estos conjuntos V cubren a K y si W^* es la intersección de los conjuntos correspondientes W, entonces $W^* \subset N(K, r)$. Ya que W^* es una vecindad de γ_0 ya que W^* es intersección finita de conjunto abiertos, entonces $N(K, r)$ es abierto en Γ.

Escogemos ahora un conjunto compacto C en Γ, también escogemos $r > 0$, y fijamos $x_0 \in N(C, r)$. A cada $\gamma_0 \in \Gamma$ corresponden vecindades W de γ_0 y V de x_0 tal que $(x, \gamma) \in U_r$, si $x \in V$ y $\gamma \in W$; esto se sigue de (a).
Como C es compacto, entonces un número finito de estos conjuntos W cubren a C y si V^* es la intersección de los conjuntos correspondientes V, entonces $V^* \subset N(C, r)$. Ya que V^* es una vecindad de X_0 ya que V^* es intersección finita de conjunto abiertos, entonces $N(C, r)$ es abierto en G.

Para probar (c), asumamos que V es una vecindad de γ_0. Tenemos que probar que $\gamma_0 + N(K, r) \subset V$ para alguna elección de K y r. Tomando $\gamma_0 = 0$, sin pérdida de generalidad. La definición de la topología de Gelfand en Γ prueba que existen funciones $f_1, \cdots, f_n \in L^1(G)$ y $\epsilon > 0$

de modo que

$$\bigcap_{i=1}^{n}\left\{\gamma: \ \left|\hat{f}_i(\gamma)-\hat{f}_i(0)\right|<\epsilon\right\}\subset V. \tag{29}$$

Ya que $C_c(G)$ es denso en $L^1(G)$, podemos asumir que $f_1, \cdots, f_n$ se desvanece fuera de un conjunto compacto K en G. Si

$$r<\frac{\epsilon}{\text{máx}_i\|f_i\|_1} \tag{30}$$

y si $\gamma \in N(K, r)$, entonces

$$\left|\hat{f}_i(\gamma)-\hat{f}_i(0)\right| \leq \int_K |(-x,\gamma)-1|\,|f_i(x)|\,dx \leq r\|f_i\|_1 < \epsilon. \tag{31}$$

Por lo tanto $N(K, r) \subset V$, y el literal (c) está probado.

Dado $\gamma',\ \gamma'' \in \Gamma$ y $N(K, r)$, la relación

$$\left[\gamma' + N\left(K, \frac{r}{2}\right)\right] - \left[\gamma'' + N\left(K, \frac{r}{2}\right)\right] \subset \gamma' - \gamma'' + N(K, r) \tag{32}$$

prueba, por (b) y (c), que el mapeo $(\gamma', \gamma'') \mapsto \gamma' - \gamma''$ de $\Gamma \times \Gamma$ sobre Γ es continua. Esto completa el Teorema. ■

Los "grupos clásicos"del análisis de Fourier.

Ejemplo 2.2.1. ***El grupo aditivo $\mathbb{R}$ de los números reales con la topología natural de la recta real.***

Supongamos que $G = \mathbb{R}$ y fijamos $\gamma \in \Gamma$. Escribimos $\gamma(x)$ en lugar de (x, γ), por el momento; existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_0^{\delta} \gamma(t)dt = \alpha \neq 0. \tag{33}$$

La ecuación funcional

$$\gamma(x+t) = \gamma(x)\gamma(t) \quad (x,\ t \in \mathbb{R}) \tag{34}$$

entonces implica que

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \gamma(x) &= \gamma(x)\int_0^\delta \gamma(t)dt \\ &= \int_0^\delta \gamma(x)\gamma(t)dt \\ &= \int_0^\delta \gamma(x+t)dt \\ &= \int_x^{x+\delta} \gamma(t)dt.\end{aligned} \tag{35}$$

Ya que γ *es continua, la última expresión es diferenciable, por lo que* γ *tiene una derivada continua* γ'. *Diferenciando la ecuación (34) con respecto a* t *y luego establecemos* $t = 0$. *El resultado es la ecuación diferencial*

$$\gamma'(x) = A\gamma(x), \quad A = \gamma'(0). \tag{36}$$

Ya que $\gamma(0) = 1$ *y* γ *es acotado, la ecuación (36) implica que*

$$\gamma(x) = e^{iyx} \tag{37}$$

para algún $y \in \mathbb{R}$. *La correspondencia* $\gamma \leftrightarrow y$ *es un isomorfismo entre* Γ *y* $\mathbb{R}$. *Así: El dual de* $\mathbb{R}$ *es* $\mathbb{R}$.

Todavía tenemos que comprobar que la topología natural de $\mathbb{R}$ *es la misma que la topología de Gelfand del grupo dual. Para* $r > 0$ *y* $n = 1, 2, 3, \cdots$, *sea* $V(n, r)$ *el conjunto de todos los* y *tal que* $\left|1 - e^{ixy}\right| < r$ *si* $|x| \leq n$. *Por el Teorema 2.2.8, los conjuntos* $V(n, r)$ *forman una base de vecindad en 0 con respecto a la topología de Gelfand. Pero* $y \in V(n, r)$ *si y solo sí* $|y| < \left(\frac{2}{n}\right)\arcsin\left(\frac{r}{2}\right)$. *Así las dos topologías coinciden.*

Ejemplo 2.2.2. ***El grupo aditivo de los reales módulo*** 2π**,** *o, equivalentemente, el grupo circular* $\mathbb{T}$, *el grupo multiplicativo de todos los números complejos de valor absoluto 1.*

Si $G = \mathbb{T}$, el mismo cálculo anterior muestra que todos los caracteres de $\mathbb{T}$ deben tener la forma de la ecuación (37), pero ahora también debemos tener $\gamma(x+2\pi) = \gamma(x)$. Por lo tanto y debe ser un número entero y Γ se identifica como el grupo discreto $\mathbb{Z}$ (comparar el Teorema 2.2.7).

Ejemplo 2.2.3. ***El grupo aditivo $\mathbb{Z}$ de los enteros.***

El grupo circular es de particular importancia para nosotros, ya que los caracteres no son más que homomorfismos en $\mathbb{T}$.

Si $G = \mathbb{Z}$ y $\gamma \in \Gamma$, entonces $(1, \gamma) = e^{i\alpha}$ para algún real α, y se sigue que $(n, \gamma) = e^{in\alpha}$. La correspondencia $\gamma \leftrightarrow e^{i\alpha}$ es un isomorfismo entre Γ y $\mathbb{T}$, y concluimos que $\mathbb{T}$ es el grupo dual de $\mathbb{Z}$ (las dos topologías coinciden como en el caso $G = \mathbb{R}$).

La transformada de Fourier, en estos tres casos tiene las siguientes formas:

$$\begin{array}{lllll} G = & \mathbb{R} & : & \hat{f}(y) & = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}dx \qquad (y \in \mathbb{R}), \\ G = & \mathbb{T} & : & \hat{f}(n) & = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta \qquad (n \in \mathbb{Z}), \\ G = & \mathbb{Z} & : & \hat{f}(e^{ix}) & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\alpha}dx \qquad (e^{ix} \in \mathbb{T}). \end{array}$$

2.3. Transformadas de Fourier-Stieltjes

Definición 2.3.1. ***Convoluciones de medidas.*** *Supongamos que G es un grupo ALC, y μ, λ son medidas de $M(G)$ (ver definición 1.5.8), es decir, medidas regulares complejas evaluadas en G. Sea $\mu \times \lambda$ el producto de medidas en el espacio producto $G^2 = G \times G$, y asociamos con cada conjunto de Borel E en G el conjunto*

$$E_{(2)} = \left\{(x, y) \in G^2 : x + y \in E\right\}. \tag{38}$$

Entonces $E_{(2)}$ es un conjunto de Borel en G^2 (ver la prueba del Teorema 2.1.9 (e)) y definamos $\mu * \lambda$ por

$$(\mu * \lambda)(E) = (\mu \times \lambda)(E_{(2)}). \tag{39}$$

*La función de conjuntos $\mu * \lambda$ así definida se llama la **convolución** de μ y λ.*

Teorema 2.3.2. (a) *Si $\mu \in M(G)$ y $\lambda \in M(G)$, entonces $\mu * \lambda \in M(G)$.*

(b) *La convolución es conmutativa y asociativa.*

(c) $\|\mu * \lambda\| \leq \|\mu\| \cdot \|\lambda\|$.

Demostración.

El Teorema de descomposición de Jordan prueba que en (a) es suficiente considerar medidas no negativas.

Ya que $\mu \times \lambda$ es una medida en G^2, es claro que $(\mu * \lambda)(E) = \sum(\mu * \lambda)(E_i)$ si E es la unión de los conjuntos disjuntos de Borel $E_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$. Si E es un conjunto de Borel en G y si $\epsilon > 0$, la regularidad de $\mu \times \lambda$ prueba que existe un conjunto compacto $K \subset E_{(2)}$ tal que

$$(\mu \times \lambda)(K) > (\mu \times \lambda)(E_{(2)}) - \epsilon.$$

Si C es la imagen de K bajo el mapeo $(x, y) \mapsto x + y$, entonces C es un subconjunto compacto de E, $K \subset C_{(2)}$, y por lo tanto,

$$(\mu * \lambda)(C) = (\mu \times \lambda)(C_{(2)}) \geq (\mu \times \lambda)(K) > (\mu * \lambda)(E) - \epsilon.$$

Esto establece la mitad del requisito de que $\mu * \lambda$ sea regular. La otra mitad se sigue por complementación y así el literal (a) está probado.

(b) Como G es conmutativo, la condición $x + y \in E$ es la misma condición $y + x \in E$, y por lo tanto, $\mu * \lambda = \lambda * \mu$.

Sea $f = \chi_E$ la función característica sobre un conjunto de Borel E en G.

$$
\begin{aligned}
\int_G f d(\mu * \lambda) &= \int_G \chi_E d(\mu * \lambda) \\
&= (\mu * \lambda)(E); \quad \text{por definición de integral} \\
&= (\mu \times \lambda)(E_2); \quad \text{por definición de convolución} \\
&= \int_G \chi_{E_2} d(\mu \times \lambda); \quad \text{por defınción de integral} \\
&= \int_G \int_G \chi_{E_2}(x, y) d\mu(x) d\lambda(y); \quad \text{por Teorema de Fubini} \\
&= \int_G \int_G f(x + y) d\mu(x) d\lambda(y).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\int_G f d(\mu * \lambda) = \int_G \int_G f(x + y) d\mu(x) d\lambda(y). \tag{40}$$

Sea f una función simple, así $f = a_1\chi_{E_1} + \cdots + a_n\chi_{E_n}$ donde $a_1, \ldots, a_n$ son escalares y $E_1, \ldots, E_n$ son conjuntos de Borel en G.

$$
\begin{aligned}
\int_G f d(\mu * \lambda) &= \int_G a_1\chi_{E_1} + \cdots + a_n\chi_{E_n} d(\mu * \lambda) \\
&= a_1 \int_G \chi_{E_1} d(\mu * \lambda) + \cdots + a_n \int_G \chi_{E_n} d(\mu * \lambda) \\
&= a_1 \int_G \int_G \chi_{E_1}(x + y) d\mu(x) d\lambda(y) + \cdots + a_n \int_G \int_G \chi_{E_n}(x + y) d\mu(x) d\lambda(y) \qquad (41) \\
&= \int_G \int_G (a_1\chi_{E_1}(x + y) + \cdots) + a_n\chi_{E_n}(x + y) d\mu(x) d\lambda(y) \\
&= \int_G \int_G f(x + y) d\mu(x) d\lambda(y).
\end{aligned}
$$

Sea ahora f una función de Borel acotada en G. Entonces existe una sucesión de funciones simples $\{\varphi_n\}$ que converge uniformemente a f esto debido al Teorema 1.5.39.

$$\begin{aligned}
\int_G f d(\mu * \lambda) &= \int_G \lim_{n\to\infty} \varphi_n d(\mu * \lambda) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_G \varphi_n d(\mu * \lambda) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_G \int_G \varphi_n(x+y) d\mu(x) d\lambda(y) \\
&= \int_G \int_G \left(\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x+y) \right) d\mu(x) d\lambda(y) \\
&= \int_G \int_G f(x+y) d\mu(x) d\lambda(y).
\end{aligned}$$

$\therefore$ Para toda función de Borel acotada en G se tiene que

$$\int_G f d(\mu * \lambda) = \int_G \int_G f(x+y) d\mu(x) d\lambda(y). \tag{42}$$

Ahora probemos la asociatividad.

Sean $\mu, \nu, \lambda \in M(G)$.

Sea $E \subseteq G$ un conjunto de Borel

$$
\begin{aligned}
(\mu * (\nu * \lambda))(E) &= (\mu \times (\nu * \lambda))(E_{(2)}) \\
&= \int_G \chi_{E_{(2)}} d(\mu \times (\nu * \lambda)); \quad \text{por definición de integral} \\
&= \int_G \int_G \chi_{E_{(2)}}(x, w) d\mu(x) d(\nu * \lambda)(w), \quad \text{Por Teorema de Fubini} \\
&= \int_G \int_G \chi_E(x + w) d\mu(x) d(\nu * \lambda)(w) \\
&= \int_G f(w) d(\nu * \lambda)(w); \quad f(w) = \int_G \chi_E(x + w) d\mu(x) \\
&= \int_G \int_G f(y + z) d\nu(y) d\lambda(z); \quad \text{por (42)} \\
&= \int_G \int_G \int_G \chi_E(x + y + z) d\mu(x) d\nu(y) d\lambda(y) \\
&= \int_G \int_G \chi_E(w + z) d(\mu * \nu)(w) d\lambda(z); \quad \text{por (42)} \\
&= \int_G \chi_E d((\mu * \nu) * \lambda); \quad \text{por (42)} \\
&= ((\mu * \nu) * \lambda)(E).
\end{aligned}
$$

$\therefore (\mu * \nu) * \lambda = \mu * (\nu * \lambda).$

(c)

$$
\begin{aligned}
\|\mu * \lambda\| &= |\mu * \lambda|\,(G); && \text{por definición de norma de una medida}\\
&= (\mu * \lambda)(G); && \text{Como } \mu \text{ y } \lambda \text{ son medidas no negativas}\\
&= \int_G d(\mu * \lambda)\\
&= \int_G \int_G d\mu d\lambda; && \text{por (42); para } f = 1\\
&= \int_G \int_G d\mu d\lambda\\
&= \int_G \mu(G) d\lambda\\
&= \int_G \|\mu\| d\lambda\\
&= \|\mu\| \int_G d\lambda\\
&= \|\mu\|\|\lambda\|.
\end{aligned}
$$

$\therefore \|\mu * \lambda\| \leq \|\mu\|\|\lambda\|.$ ∎

Corolario 2.3.3. *$M(G)$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad, si la multiplicación es definida por la convolución.*

Demostración.

Solo quedaría por demostrar que $M(G)$ tiene una identidad, lo demás se sigue por el Teorema anterior.

Sea δ_0 la unidad concentrada en el punto $x = 0$, es decir, $\delta_0(E) = 1$, si $0 \in E$ y $\delta_0(E) = 0$ en otro caso.

En otras palabras

$$\delta_0(E) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \in E \\ \\ 0 & si \quad 0 \notin E \end{cases}$$

y sea $\mu \in M(G)$.

Sea E un conjunto de Borel en G.

$$\begin{aligned}
(\mu * \delta_0)(E) &= (\mu \times \delta_0)(E_{(2)}) \\
&= \int_G \int_G \chi_E(x+y) d\mu(x) d\delta_0(y) \\
&= \int_G \left(\int_G \chi_E(x+y) d\delta_0(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_G \delta_0(E-x) d\mu(x) \\
&= \int_E \delta_0(E-x) d\mu(x); \qquad \text{ya que si } x \notin E; \text{ así } 0 \notin E-x \text{ y de donde } \delta_0(E-x) = 0 \\
&= \int_E 1 d\mu(x) = \mu(E); \qquad \text{pues } 0 \in E-x \text{ así } \delta_0(E-x) = 1.
\end{aligned}$$

■

Definición 2.3.4. ***Transformadas de Fourier-Stieltjes.*** *Si $\mu \in M(G)$, la función $\hat{\mu}$ definida en Γ por*

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G (-x, \gamma) d\mu(x) \quad (\gamma \in \Gamma) \tag{43}$$

es llamada la transformada de Fourier-Stieltjes de μ. El conjunto de todas las funciones $\hat{\mu}$ será denotado por $B(\Gamma)$.

Teorema 2.3.5. (a) *Cada $\hat{\mu} \in B(\Gamma)$ es acotada y uniformemente continua.*

(b) *Si $\sigma = \mu * \lambda$, entonces $\hat{\sigma} = \hat{\mu} \cdot \hat{\lambda}$. Por lo tanto, el mapeo $\mu \mapsto \hat{\mu}(\gamma)$ es, para cada $\gamma \in \Gamma$, un homomorfismo complejo de $M(G)$.*

(c) *$B(\Gamma)$ es invariante bajo traslación, bajo multiplicación por (x, γ) para cualquier $x \in G$ y* *bajo conjugación compleja.*

Demostración.

(a) Sea $\gamma \in \Gamma$

$$\begin{aligned}
|\hat{\mu}(\gamma)| &= \left| \int_G (-x, \gamma) d\mu(x) \right| \\
&\leq \int_G |(-x, \gamma)| \, d\,|\mu|\,(x) \\
&= \int_G 1 d\,|\mu|\,(x); \qquad \text{por definición } |\gamma(x)| = 1 \forall \gamma \in \Gamma \\
&= |\mu|\,(G) \\
&= ||\mu||.
\end{aligned}$$

$\therefore \forall \gamma \in \Gamma$, $|\hat{\mu}(\gamma)| \leq ||\mu||$, así $\hat{\mu}$ está acotada.

Ahora probemos que $\hat{\mu}$ es uniformemente continua.

Sea $\epsilon > 0$, por la regularidad de $|\mu|$ existe un conjunto compacto K en G tal que $|\mu|\,(K') < \epsilon/4$, donde $K' = G - K$.

Para $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ se tiene

$$\begin{aligned}
|\hat{\mu}(\gamma_1) - \hat{\mu}(\gamma_2)| &= \left| \int_G (-x, \gamma_1) d\mu(x) - \int_G (-x, \gamma_2) d\mu(x) \right| \\
&= \left| \int_G (-x, \gamma) - (-x, \gamma_2) d\mu(x) \right| \\
&= \left| \int_G (x, \gamma_1)^{-1} - (x, \gamma_2)^{-1} d\mu(x) \right| \qquad \text{por ecuación (20)} \\
&\leq \int_G \left| (x, \gamma_1)^{-1} - (x, \gamma_2)^{-1} \right| d\,|\mu|\,(x) \\
&= \int_G |(x, \gamma_1)| \left| (x, \gamma_1)^{-1} - (x, \gamma_2)^{-1} \right| d\,|\mu|\,(x); \qquad \text{ya que } |(x, \gamma_1)| = 1 \\
&= \int_G \left| 1 - (x, \gamma_1)(x, \gamma_2)^{-1} \right| d\,|\mu|\,(x) \\
&= \int_G |1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)|\, d\,|\mu|\,(x) \\
&= \int_K |1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)|\, d\,|\mu|\,(x) + \int_{K'} |1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)|\, d\,|\mu|\,(x) \\
&\leq \int_K |1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)|\, d\,|\mu|\,(x) + \int_{K'} 1 d\,|\mu|\,(x) \\
&\quad + \int_{K'} |(x, \gamma_1 - \gamma_2)|\, d\,|\mu|\,(x); \qquad \text{por desigualdad del triángulo} \\
&= \int_K |1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)|\, d\,|\mu|\,(x) + 2 \int_{K'} d\,|\mu|\,(x); \qquad \text{ya que } |(x, \gamma_1 - \gamma_2)| = 1 \\
&= \int_K |1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)|\, d\,|\mu|\,(x) + 2\,|\mu|\,(K') \\
&< \int_K |1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)|\, d\,|\mu|\,(x) + 2(\epsilon/4) \\
&= \int_K |1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)|\, d\,|\mu|\,(x) + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Si $\gamma_1 - \gamma_2 \in N\left(K, \dfrac{\epsilon}{2\|\mu\|}\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_K |1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)|\, d\,|\mu|\,(x) &< \int_K \frac{\epsilon}{2\|\mu\|} d\,|\mu|\,(x) \\
&= \frac{\epsilon}{2\|\mu\|} \int_K d\,|\mu|\,(x) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2\|\mu\|} \int_G d\,|\mu|\,(x) \\
&= \frac{\epsilon}{2\|\mu\|}(\|\mu\|) \\
&= \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

$\therefore$ Si $\gamma_1 - \gamma_2 \in N\left(K, \dfrac{\epsilon}{2\|\mu\|}\right)$ se tiene

$$\begin{aligned}
|\hat{\mu}(\gamma_1) - \hat{\mu}(\gamma_2)| &< \int_K |1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)|\, d\,|\mu|\,(x) + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

$\therefore$ $\hat{\mu}$ es uniformemente continua.

Supongamos que $\sigma = \mu * \lambda$. La fórmula (40) en la prueba del Teorema 2.3.2 implica que

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}(\gamma) &= \int_G (-z, \gamma) d(\mu * \lambda)(z) \\
&= \int_G \int_G (-x - y, \gamma) d\mu(x) d\lambda(y) \\
&= \int_G (-x, \gamma) d\mu(x) \int_G (-y, \gamma) d\lambda(y) \\
&= \hat{\mu}(\gamma)\hat{\lambda}(\gamma)
\end{aligned}$$

y el literal (b) está probado.

(c) i) **Traslación invariante**

Sea $\hat{\mu} \in B(\Gamma)$, debemos probar que $\hat{\lambda} \in B(\Gamma)$ donde $\hat{\lambda}(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma - \gamma_0)$ para $\gamma_0 \in \Gamma$ fijo pero arbitrario.

Definamos $\lambda(E) = \int_G \chi_E(x)(x, \gamma_0) d\mu(x)$ para todo conjunto de Borel E como $\chi_E(x)(x, \gamma_0) \in L^1(G)$, así λ es una medida regular esto se debe a la Proposición 1.5.25 EL Recíproco del Teorema de Radon Nikodym de los preliminares del Capítulo 1.

También

$$\begin{aligned} |\lambda|(G) &\leq \int_G |\chi_G(x)| \, |(x, \gamma_0)| \, d\,|\mu|(x) \\ &= \int_G d\,|\mu|(x); \quad \text{ya que } \chi_G(x) = 1 \ \forall x \in G \text{ y } |(x, \gamma_0)| = 1 \text{ ya que } \gamma_0 \in \Gamma. \\ &= |\mu|(G) \\ &= \|\mu\| < \infty. \end{aligned} \tag{44}$$

$\therefore \|\lambda\| = |\lambda|(E) \leq \|\mu\| < \infty.$

$\therefore \lambda \in M(G).$

Luego $\hat{\lambda} \in B(\Gamma)$.

$\hat{\lambda}(\gamma) = \int_G (-x,\gamma) d\lambda(x)$, pero por construcción de λ, se tiene que $d\lambda(x) = (x,\gamma_0)$ así

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}(\gamma) &= \int_G (-x,\gamma) d\lambda(x) \\
&= \int_G (-x,\gamma)(x,\gamma_0) d\mu(x) \\
&= \int_G \frac{(x,\gamma_0)}{(x,\gamma)} d\mu(x); \quad \text{por ecuación (20)} \\
&= \int_G (x,\gamma_0-\gamma) d\mu(x), \quad \text{por ecuación (18)} \\
&= \int_G (-x,\gamma-\gamma_0) d\mu(x); \quad \text{por ecuación (20)} \\
&= \hat{\mu}(\gamma-\gamma_0).
\end{aligned} \tag{45}$$

$\therefore$ $\hat{\lambda}$ es la traslación por γ_0 de $\hat{\mu}$, así $B(\Gamma)$ es cerrado bajo traslaciones.

ii) Cerradura bajo multiplicación por (x,γ) para cualquier $x \in G$.

Queremos probar que si $\hat{\mu} \in B(\Gamma)$, entonces $(x,\gamma)\hat{\mu} \in B(\Gamma)$.

Sea $\lambda(E) = \mu(E-x)$, donde $x \in G$ fijo.
Como $\mu \in M(G)$, así $\lambda \in M(G)$.
Luego $\hat{\lambda} \in B(\Gamma)$.

$\hat{\lambda}(\gamma) = \int_G (-z,\gamma) d\lambda(z)$.

Como $\lambda(E) = \int_G \chi_E = \int_G \chi_E d\lambda$ y $\mu(E-x) = \int_G \chi_{E-x} d\mu$, entonces $\mu(E-x) = \int_G \chi_E(u+x) d\mu(u)$, de donde

$$\int_G \chi_E(u) d\lambda(u) = \int_G \chi_E(u+x) d\mu(u),$$

luego,

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}(\gamma) &= \int_G (-z,\gamma)d\lambda(z) \\
&= \int_G (-z+x,\gamma)d\mu(z) \\
&= \int_G (-z,\gamma)(x,\gamma)d\mu(z); \quad \text{por ecuación (18)} \\
&= (x,\gamma)\int_G (-z,\gamma)d\mu(z) \\
&= (x,\gamma)\hat{\mu}(\gamma).
\end{aligned} \tag{46}$$

$\therefore$ $\hat{\lambda}$ es la multiplicación de $\hat{\mu}$ por (x,γ), así $B(\Gamma)$ es cerrado bajo la multiplicación por (x,γ) para todo $x \in G$.

iii) Cerradura de $B(\Gamma)$ bajo conjugación compleja.

Queremos probar que si $\hat{\mu} \in B(\Gamma)$, entonces $\overline{\hat{\mu}} \in B(\Gamma)$.

Sea $\hat{\mu} \in B(\Gamma)$.

Definamos $\lambda(E) = \overline{\mu(-E)}$ para todo conjunto de Borel $E \subseteq G$.

Como $\mu \in M(G)$, así $\lambda \in M(G)$, de donde $\hat{\lambda} \in B(\Gamma)$.

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}(\gamma) &= \int_G (-x,\gamma)d\lambda(x) \\
&= \int_G (-x,\gamma)d\overline{\mu}(-x) \\
&= \int_G (x,\gamma)d\overline{\mu}(x) \\
&= \int_G \overline{(-x,\gamma)}d\overline{\mu}(x) \\
&= \overline{\int_G (-x,\gamma)d\mu(x)} \\
&= \overline{\hat{\mu}(\gamma)}.
\end{aligned} \tag{47}$$

$\therefore\ \hat{\lambda} = \overline{\hat{\mu}}$, de donde $\overline{\hat{\mu}} \in B(\Gamma)$. ■

2.3.1. $L^1(G)$ como una subálgebra de $M(G)$.

Sea

$$\begin{aligned}
T:\ L^1(G) &\rightarrow M(G) \\
f &\mapsto \mu_f
\end{aligned}$$

donde

$$\mu_f(E) = \int_E f(x)dx. \tag{48}$$

Probaremos que Im $(T) = \{\mu \in M(G) \mid \mu \ll m\}$. Donde m es la medida de Haar.

Recordemos que Im $(T) = \{\mu_f \in M(G) \mid \exists\, f \in L^1(G) \colon Tf = \mu_f\}$.

Demostración.

"$\subset$"

Sea $\mu_f \in \mathrm{Im}\,(T)$.

$$\begin{aligned}\mu_f \in \mathrm{Im}\,(T) &\Rightarrow \exists\, f \in L^1(G) \text{ tal que} Tf = \mu_f \\ &\Rightarrow \mu_f(E) = \int_E f(x)dx \text{ para algún } f \in L^1(G) \quad \text{por la ecuación (48).}\end{aligned}$$

Luego por el Recíproco del Teorema de Radon-Nikodym $\mu_f \in M(G)$ y es absolutamente continua con respecto a la medida de Haar.

$\therefore\ \mu_f \in \{\mu \in M(G) \mid \mu \ll m\}$.

$\therefore\ \mathrm{Im}\,(T) \subset \{\mu \in M(G) \mid \mu \ll m\}$.

"$\supset$"

Sea $\mu \in \{\mu \in M(G) \mid \mu \ll m\}$.

Luego por el Teorema de Radon-Nikodym existe $f \in L^1(G)$ tal que $\mu(E) = \int_E (x)dx = \mu_f(E)$, para todo $E \in \mathscr{B}(G)$.

Así $\mu = \mu_f = Tf$.

$\therefore\ \mu \in \mathrm{Im}\,(T)$.

$\therefore\ \mathrm{Im}\,(T) \supset \{\mu \in M(G) \mid \mu \ll m\}$.

Por lo tanto

$$\mathrm{Im}\,(T) = \{\mu \in M(G) \mid \mu \ll m\}.$$

■

Ahora debemos probar que Im (T) es un grupo bajo la suma, para ello bastaría probar que el conjunto

$$\{\mu \in M(G) \mid \mu \ll \lambda\},$$

es un grupo bajo la suma en $M(G)$, donde λ es una medida no negativa cualquiera.

Demostración.

Cerradura:

Sean $\mu_1,\ \mu_2 \in \{\mu \in M(G) \mid \mu \ll \lambda\}$.

Queremos probar que

$$\mu_1 + \mu_2 \in \{\mu \in M(G) \mid \mu \ll \lambda\}.$$

Sea $E \subset \mathscr{B}(G)$ tal que $\lambda(E) = 0$.

$$(\mu_1 + \mu_2)(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E)$$

$$(\mu_1 + \mu_2)(E) = 0 + 0, \quad \text{pues } \mu_1(E) = 0 \text{ y } \mu_2(E) = 0, \text{ cuando } \lambda(E) = 0.$$

$\therefore$ Cuando E es un conjunto de Borel en G tal que $\lambda(E) = 0$, entonces $(\mu_1 + \mu_2)(E) = 0$.

$\therefore\ \mu_1 + \mu_2 \in \{\mu \in M(G) \mid \mu \ll \lambda\}$.

Asociatividad:

Sean $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3 \in \{\mu \in M(G) \mid \mu \ll \lambda\}$.

$$\begin{aligned}((\mu_1+\mu_2)+\mu_3)(E) &= (\mu_1+\mu_2)(E)+\mu_3(E)\\ &= \mu_1(E)+\mu_2(E)+\mu_3(E)\\ &= \mu_1(E)+(\mu_2+\mu_3)(E)\\ &= (\mu_1+((\mu_2+\mu_3))(E).\end{aligned}$$

$\therefore\ (\mu_1+\mu_2)+\mu_3 = \mu_1+(\mu_2+\mu_3)$

Identidad:

$$\begin{aligned}\mathbf{0}:\quad \mathscr{B}(G) &\to \mathbb{C}\\ E &\mapsto \mathbf{0}(E)=0.\end{aligned}$$

Si $E \subset G$ es tal que $\lambda(E)=0$, entonces $\mathbf{0}(E)=0$.

Sea $\mu \in \{\mu \in M(G) \mid \mu \ll \lambda\}$.

$$\begin{aligned}(\mu+\mathbf{0})(E) &= \mu(E)+\mathbf{0}(E)\\ &= \mu(E)+0\\ &= \mu(E).\end{aligned}$$

$\therefore \mu+\mathbf{0}=\mu$.

Análogamente se prueba para $\mathbf{0}+\mu=\mu$.

Inverso:

Definamos

$$\begin{array}{rccl} -\mu\colon & \mathscr{B}(G) & \to & \mathbb{C} \\ & E & \mapsto & (-\mu)(E) = -\mu(E) \end{array}$$

donde μ es absolutamente continua con respecto a λ.

Como μ es una medida, $-\mu$ también lo es.

Sea $E \subset \mathscr{B}(G)$ tal que $\lambda(E) = 0$.

Luego,

$$\begin{aligned} (-\mu)(E) &= -\mu(E) \\ &= -0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\therefore\ (-\mu)(E) = 0$ cuando $\lambda(E) = 0$

$\therefore\ -\mu \in \{\mu \in M(G) \mid \mu \ll \lambda\}$.

$$\begin{aligned} (\mu + (-\mu))(E) &= \mu(E) + (-\mu)(E) \\ &= \mu(E) - \mu(E) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{\mu \in M(G) \mid \mu \ll \lambda\}$ es un grupo bajo la suma. ∎

Luego como probamos que $\{\mu \in M(G) \mid \mu \ll \lambda\}$ es un grupo para cualquier medida no negativa λ se cumple para la medida de Haar.

Por lo tanto,

$$\text{Im }(T) = \{\mu \in M(G) \mid \mu \ll m\}$$

es un grupo bajo la suma.

Denotemos Im $(T) = L^1_M(G)$, y probaremos que existe un isomorfismo entre $L^1(G)$ y $L^1_M(G)$.

Demostración.

Sea

$$\begin{array}{rccc} S: & L^1(G) & \to & L^1_M(G) \\ & f & \mapsto & \mu_f \end{array}$$

donde

$$\mu_f(E) = \int_E f(x)dx.$$

Probemos que S es un homomorfismo bajo la suma.

Sean $f,\ g \in L^1(G)$.

$$\begin{aligned}
(S(f+g))(E) &= \mu_{(f+g)}(E) \\
&= \int_E (f+g)(x)dx \\
&= \int_E (f(x)+g(x))dx \\
&= \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx \\
&= \mu_f(E) + \mu_g(E) \\
&= (Sf)(E) + (Sg)(E) \\
&= (Sf + Sg)(E).
\end{aligned}$$

$\therefore\ S(f+g) = Sf + Sg.$

$\therefore$ S es un homomorfismo bajo la suma.

Sea $f, g \in L^1(G)$ tal que $Sf = Sg$.

$Sf = Sg$, entonces

$$
\begin{aligned}
(Sf)(E) &= (Sg)(E)\\
\mu_f(E) &= \mu_g(E)\\
\int_E f(x)dx &= \int_E g(x)dx\\
\int_E f(x)dx - \int_E g(x)dx &= 0\\
\int_E (f(x) - g(x))dx &= 0\\
f(x) - g(x) &= 0, \text{ casi en todas partes por Teorema 1.5.40}\\
f(x) &= g(x).
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $f = g$ casi en todas partes.

Por lo tanto S es inyectiva.

$\therefore$ S es un isomorfismo.

$\therefore$ $L^1(G)$ es un grupo isomorfo a $L^1_M(G)$. ■

Definición 2.3.6. *Sean $M_c(G)$ y $M_d(G)$ que denoten los conjuntos de todas las medidas continuas y discretas de $M(G)$, respectivamente.*

Teorema 2.3.7. (a) *$L^1_M(G)$ y $M_c(G)$ son ideales cerrados en $M(G)$.*

(b) *$M_d(G)$ es una subálgebra cerrada de $M(G)$.*

Demostración.

(a) i) Probemos que $L^1_M(G)$ es un ideal en $M(G)$.

Ya se sabe que $L^1_M(G)$ es un grupo bajo la suma, así que solo se probará que absorbe el producto.

Sea $f \in L^1(G)$.

Sea $\lambda \in M(G)$.

$$\begin{aligned}(f * \lambda)(E) &= (\mu_f * \lambda)(E)\\ &= \int_G \int_G \chi_E(x+y) d\mu_f(x) d\lambda(y)\\ &= \int_G \left(\int_G \chi_{E-y}(x) d\mu_f(x) \right) d\lambda(y)\\ &= \int_G \mu_f(E-y) d\lambda(y).\end{aligned}$$

Como $f \in L^1(G)$, así μ_f es absolutamente continua con respecto a la medida de Haar m. Probemos que $f * \lambda$ es también absolutamente continua con respecto a la medida de Haar.

Si $E \subseteq G$ es tal que $m(E) = 0$, entonces $m(E-y) = 0$ para todo y en G, ya que la medida de Haar es invariante bajo traslación. Luego $\mu_f(E-y) = 0$ ya que μ_f es absolutamente continua con respecto a m pues $f \in L^1(G)$.

Entonces

$$(f * \lambda)(E) = \int_G \mu_f(E-y) dy = \int_G 0 dy = 0.$$

$\therefore f * \lambda$ es absolutamente continua con respecto a m, así por la identificación que se hizo de $L^1(G)$ contenido en $M(G)$ se tiene que existe $g \in L^1(G)$ tal que $f * \lambda = \mu_g$.

$\therefore f * \lambda = \mu_g = g \in L^1(G)$.

(Esta igualdad $\mu_g = g$ no es igualdad de funciones sino que μ_g se identifica con g).

ii) Probemos que $L^1(G)$ es cerrado en $M(G)$.

Como $L^1(G)$ es completo, entonces $L^1(G)$ es un conjunto cerrado, ya que todo espacio métrico completo es cerrado de donde $L^1(G)$ es cerrado en $M(G)$.

iii) Probemos que $M_c(G)$ es ideal.

Que $M_c(G)$ es grupo bajo la suma no es difícil de probarlo.

Sea $\mu \in M_c(G)$, así μ es continua por definición de $M_c(G)$ de donde $\mu(E) = 0$ para todo conjunto E numerable.

Sea $\lambda \in M(G)$, debemos probar que $\mu * \lambda \in M_c(E)$.

Sea E un conjunto contable en G.

$$(\mu * \lambda)(E) = \int_G \mu(E - y) d\lambda(y)$$

como E es contable, así $E - y = \{x - y : x \in E\}$ también es contable, así $\mu(E - y) = 0$ por tanto

$$(\mu * \lambda)(E) = \int_G 0 d\lambda(y) = 0.$$

$\therefore$ $(\mu * \lambda)(E) = 0$ $\forall E \subseteq G$ contable.

$\therefore$ $\mu * \lambda \in M_c(G)$, así $M_c(G)$ absorbe el producto.

iv) Probemos que $M_c(G)$ es cerrado en $M(G)$.

Sea $\mu \in \overline{M_c(G)}$.

$$\begin{aligned}\mu \in \overline{M_C(G)} &\Rightarrow \exists(\mu_n) \subset M_C(G) : \mu_n \to \mu \\ &\Rightarrow \exists(\mu_n) \subset M_C(G) : \|\mu - \mu_n\| \to 0.\end{aligned}$$

Sea $E \subseteq G$ contable y E un conjunto de Borel.

$$\begin{aligned}|\mu(E)| &= |(\mu - \mu_n)(E)|, \quad \text{ya que } \mu_n(E) = 0, \text{ pues } \mu_n \in M_c(G) \\ &\leq |\mu - \mu_n|(E) \\ &\leq |\mu - \mu_n|(G), \quad \text{ya que } E \subseteq G \\ &= \|\mu - \mu_n\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Aplicando límite cuando $n \to \infty$, se tiene que $|\mu(E)| = 0$ ya que $\|\mu - \mu_n\| \to 0$, luego $\mu(E) = 0$ $\forall E \subseteq G$ contable con E un conjunto de Borel.

$\therefore$ μ es continua, así $\mu \in M_c(G)$.

$\therefore$ $M_c(G)$ es cerrado.

(b) i) Probemos que $M_d(G)$ es cerrado bajo el producto.

Sea $\mu, \lambda \in M_d(G)$.

Entonces por definición de medida discreta, existen conjuntos contables $A, B \subseteq G$ de Borel tales que $\mu = \mu_A$ y $\lambda = \lambda_B$.

$$\begin{aligned}(\mu * \lambda)(E) &= (\mu \times \lambda)(E_{(2)})\\ &= (\mu_A \times \lambda_B)(E_{(2)})\\ &= (\mu \times \lambda)(E_{(2)} \cap (A \times B))\\ &= (\mu * \lambda)(E \cap (A + B))\\ &= (\mu * \lambda)_{(A+B)}(E).\end{aligned}$$

Como A y B son contables así $A + B$ también lo es, así $\mu * \lambda$ está concentrado en un conjunto $A + B$, por lo cual $\mu * \lambda$ es discreta, esto es $\mu * \lambda \in M_d(G)$.

ii) Probemos que $M_d(G)$ es un conjunto cerrado en $M(G)$.

Sea $\mu \in \overline{M_d(G)}$

$$\begin{aligned}\mu \in \overline{M_d(G)} &\Rightarrow \exists(\mu_n) \subset M_d(G) : \|\mu_n - \mu\| \to 0\\ &\Rightarrow \exists(A_n) \subset G : \mu_{n_{A_n}}\ y\ \|\mu_n - \mu\| \to 0\ con\ A_n \text{ contable.}\end{aligned}$$

Sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, así A es contable, probemos que $\mu = \mu_A$.

Sea $E \subseteq G$ Borel.

$$\mu(E) = \mu(E \cap A \cup (E - A)) = \mu(E \cap A) + \mu(E - A).$$

Luego $E - A \subseteq E - A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\mu_n(E \cap A_n) + \mu_n(E - A_n) = \mu_n(E \cap A_n)$, de donde $\mu_n(E - A_n) = 0$.

Como $E - A \subseteq E - A_n$, así

$$0 \leq |\mu_n|(E - A) \leq |\mu_n|(E - A_n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\|\mu_n - \mu\| \to 0$, así

$$|\mu|(E-A) = \lim_{n\to\infty} |\mu_n|(E-A) = 0.$$

$\therefore 0 \leq |\mu|(E-A) \leq \mu(E-A) = 0.$

$\therefore \mu(E-A) = 0.$

Luego

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu(E\cap A) + \mu(E-A)\\ &= \mu(E\cap A)\\ &= \mu_A(E).\end{aligned}$$

$\therefore\ \mu = \mu_A$ donde A es contable.

$\therefore\ \mu \in M_d(G).$

$\therefore\ M_d(G)$ es cerrado. ■

Un teorema de Unicidad. Veremos luego que $\hat{\mu}$ determina μ, es decir, si $\mu \in M(G)$ y $\hat{\mu} = 0$, entonces $\mu = 0$. Por el momento podemos probar esto para el Teorema inverso:

Teorema 2.3.8. *Si $\mu \in M(\Gamma)$ y si*

$$\int_\Gamma (x,\gamma)d\mu(\gamma) = 0 \tag{49}$$

para cada $x \in G$, entonces $\mu = 0$.

Demostración.

Para cada $f \in L^1(G)$,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \hat{f}(\gamma)d\mu(\gamma) &= \int_\Gamma \int_G f(x)(-x,\gamma)dxd\mu(\gamma) \\
&= \int_G \int_\Gamma f(x)(-x,\gamma)d\mu(\gamma)dx; \quad \text{por Teorema de Fubini} \\
&= \int_G f(x) \int_\Gamma (-x,\gamma)d\mu(\gamma)dx \\
&= \int_G f(x) \cdot 0dx; \quad \text{por ecuación (49)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ya que $A(\Gamma)$ es denso en $C_0(\Gamma)$ (ver Teorema 2.2.6), resulta que $\int_\Gamma \phi d\mu = 0$ para cada $\phi \in C_0(\Gamma)$ y por lo tanto $\mu = 0$ por el Teorema de Representación de Riesz. ■

2.4. Funciones Definidas Positivas

Definición 2.4.1. *Una función ϕ, definida en G, se dice que es definida-positiva si la desigualdad*

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}\phi(x_n - x_m) \geq 0 \tag{50}$$

se satisface para cada elección de $x_1, x_2, \cdots, x_N$ en G y para cada elección de números complejos $c_1, \cdots, c_N$.

Si ϕ es definida-positiva, se mantienen las siguientes relaciones:

Proposición 2.4.2.

$$\phi(-x) = \overline{\phi(x)}; \tag{51}$$

$$|\phi(x)| \leq \phi(0); \tag{52}$$

$$|\phi(x) - \phi(y)|^2 \leq 2\phi(0)Re[\phi(0) - \phi(x-y)]. \tag{53}$$

De la desigualdad (52) concluimos que $\phi(0) \geq 0$ y que ϕ es acotada, la desigualdad (53) implica que ϕ es uniformemente continua si ϕ es continua en 0.

Demostración.

Para probar estas relaciones, tome $N = 2$ en la desigualdad (50); $x_1 = 0$, $x_2 = x$; $c_1 = 1$, $c_2 = c$. Esto da

$$\left(1 + |c|^2\right)\phi(0) + c\phi(x) + \overline{c}\phi(-x) \geq 0. \tag{54}$$

Tomando $c = 1$, tenemos

$$2\phi(0) + \phi(x) + \phi(-x) \geq 0,$$

entonces $\phi(x) + \phi(-x)$ es real.

Así

$$\begin{aligned} \text{Im }(\phi(x) + \phi(-x)) &= 0 \\ \text{Im }(\phi(x)) + \text{Im }(\phi(-x)) &= 0 \\ \text{Im }(\phi(-x)) &= -\text{Im }(\phi(x)). \end{aligned}$$

Tomando $c = i$ tenemos

$$2\phi(0) + i\phi(x) - i\phi(-x) \geq 0,$$

entonces $i(\phi(x) - \phi(-x))$ es real.

Así

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\phi(x) - \phi(-x)) &= 0 \\
\mathrm{Re}(\phi(x)) - \mathrm{Re}(\phi(-x)) &= 0 \\
\mathrm{Re}(\phi(-x)) &= \mathrm{Re}(\phi(x)).
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \phi(-x) = \overline{\phi(x)}.$

Si se elige c tal que $c\phi(x) = -|\phi(x)|$, luego apartir de la expresión (54) sustituyendo el c que elegimos tenemos:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left(1 + \left|\frac{-|\phi(x)|}{\phi(x)}\right|^2\right)\phi(0) + \left(\frac{-|\phi(x)|}{\phi(x)}\right)\phi(x) + \overline{\left(\frac{-|\phi(x)|}{\phi(x)}\right)}\phi(-x) \\
0 &\leq \left(1 + \left(\frac{-|\phi(x)|}{\phi(x)}\right)\overline{\left(\frac{-|\phi(x)|}{\phi(x)}\right)}\right)\phi(0) - |\phi(x)| + \left(\frac{\overline{-|\phi(x)|}}{\overline{\phi(x)}}\right)\phi(-x) \\
0 &\leq \left(1 + \left(\frac{-|\phi(x)|}{\phi(x)}\right)\left(\frac{\overline{-|\phi(x)|}}{\overline{\phi(x)}}\right)\right)\phi(0) - \phi(x) + \left(\frac{\overline{-|\phi(x)|}}{\phi(-x)}\right)\phi(-x) \\
0 &\leq \phi(0) + \phi(0)\left(\frac{|\phi(x)|\,\overline{|\phi(x)|}}{\phi(x)\phi(-x)}\right) - |\phi(x)| - \overline{|\phi(x)|} \\
0 &\leq \phi(0) + \phi(0)\left(\frac{|\phi(x)|^2}{\phi(x)\phi(-x)}\right) - |\phi(x)| - |\phi(x)| \\
0 &\leq \phi(0) + \phi(0)\left(\frac{\phi(x)\overline{\phi(x)}}{\phi(x)\phi(-x)}\right) - 2\,|\phi(x)| \\
0 &\leq \phi(0) + \phi(0)\left(\frac{\phi(x)\phi(-x)}{\phi(x)\phi(-x)}\right) - 2\,|\phi(x)| \\
0 &\leq \phi(0) + \phi(0) - 2\,|\phi(x)| \\
0 &\leq 2\phi(0) - 2\,|\phi(x)| \\
0 &\leq 2\phi(0) - 2\,|\phi(x)| \\
2\,|\phi(x)| &\leq 2\phi(0) \\
|\phi(x)| &\leq \phi(0).
\end{aligned}
$$

$\therefore\ |\phi(x)| \leq \phi(0)$, hemos probado (52).

Para probar la desigualdad (53), Tomamos $N = 3$ en (50); $x_1 = 0$, $x_2 = x$; $x_3 = y$, $c_1 = 1$ λ real,

$$c_2 = \frac{\lambda\,|\phi(x) - \phi(y)|}{\phi(x) - \phi(y)},$$

y $c_3 = -c_2$. Entonces la desigualdad (50) se simplifica a

$$\phi(0)(1 + 2\lambda^2) + 2\lambda\,|\phi(x) - \phi(y)| - 2\lambda^2\mathrm{Re}(\phi(x - y)) \geq 0.$$

Reordenando el polinomio cuadrático tenemos

$$[2(\phi(0) - \mathrm{Re}(\phi(x-y)))]\,\lambda^2 + [2\,|\phi(x) - \phi(y)|]\,\lambda + \phi(0) \geq 0. \tag{55}$$

El discriminante del polinomio cuadrático (55) en λ es

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac\\
\Delta &= (2\,|\phi(x) - \phi(y)|)^2 - 4\,[2(\phi(0) - \mathrm{Re}(\phi(x-y)))]\,\phi(0)\\
\Delta &= 4\,|\phi(x) - \phi(y)|^2 - 4\,[2\phi(0)(\phi(0) - \mathrm{Re}(\phi(x-y)))]\\
\Delta &= 4\left[|\phi(x) - \phi(y)|^2 - 2\phi(0)(\phi(0) - \mathrm{Re}(\phi(x-y)))\right].
\end{aligned}$$

El discriminante no puede ser positivo, ya que la ecuación cuadrática es no negativa, por lo tanto no tiene raíces o solo tiene una solución lo que significa que es menor o igual a 0.

Y así,

$$\begin{aligned}
4\left[|\phi(x) - \phi(y)|^2 - 2\phi(0)(\phi(0) - \mathrm{Re}(\phi(x-y)))\right] &\leq 0\\
|\phi(x) - \phi(y)|^2 - 2\phi(0)(\phi(0) - \mathrm{Re}(\phi(x-y))) &\leq 0\\
|\phi(x) - \phi(y)|^2 &\leq 2\phi(0)(\phi(0) - \mathrm{Re}(\phi(x-y)))\\
|\phi(x) - \phi(y)|^2 &\leq 2\phi(0)\mathrm{Re}(\phi(0) - \phi(x-y)), \quad \text{pues } \phi(0) \geq 0.
\end{aligned}$$

$$\therefore\ |\phi(x) - \phi(y)|^2 \leq 2\phi(0)\mathrm{Re}(\phi(0) - \phi(x-y)).$$ ■

Ejemplo 2.4.1. ***Ejemplos de funciones definidas positivas.***

Supongamos que $f \in L^2(G)$ y $\phi = f * \tilde{f}$. Entonces ϕ es definida positiva y continua en G.

La convolución de cualesquiera dos funciones en $L^2(G)$ es continua (Ver Teorema 2.1.9 (d)) y

$$\begin{aligned}\sum c_n\overline{c_m}\phi(x_n - x_m) &= \sum c_n\overline{c_m}\int_G f(x_n - x_m - y)\overline{f(-y)}dy \\ &= \sum c_n\overline{c_m}\int_G f(x_n - y)\overline{f(x_m - y)}dy \\ &= \int_G \left|\sum c_n f(x_n - y)\right|^2 dy \geq 0.\end{aligned}$$

Teorema 2.4.3 (Teorema de Bochner)**.** *Una función continua $\phi \in G$ es definida positiva si y solo sí existe una medida no-negativa $\mu \in M(\Gamma)$ tal que*

$$\phi(x) = \int_\Gamma (x, \gamma)d\mu(\gamma) \quad (x \in G). \tag{56}$$

Demostración.

"$\Rightarrow$"

Supongamos que ϕ es continua y definida-positiva. Por la desigualdad (52), podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\phi(0) = 1$.

Si $f \in C_c(G)$ y tiene soporte K, entonces $f(x)\overline{f(y)}\phi(x - y)$ es uniformemente continua en $K \times K$, y K se puede dividir en conjuntos disjuntos $E_1, \cdots, E_n$ tal que la suma

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i)\overline{f(x_j)}\phi(x_i - x_j)m(E_i)m(E_j) \quad (x_i \in E_i) \tag{57}$$

difiere de la integral

$$\int_G\int_G f(x)\overline{f(y)}\phi(x - y)dxdy \tag{58}$$

por tan poco como queramos. Ya que ϕ es definida positiva, la expresión (57) siempre es no negativa y por lo tanto, lo es (58). Ya que $C_c(G)$ es denso en $L^1(G)$, se deduce que la expresión (58) es no negativa para cada $f \in L^1(G)$.

Definimos un funcional T_ϕ por

$$T_\phi(f) = \int_G f(x)\phi(x)dx \quad (f \in L^1(G)) \tag{59}$$

y ponemos

$$[f, g] = T_\phi(f * \tilde{g}) \quad (f,\ g \in L^1(G)). \tag{60}$$

Recordemos que $\tilde{g}(x) = \overline{g(-x)}$ de modo que

$$[f, g] = \int_G \int_G f(x)\overline{g(y)}\phi(x-y)dxdy. \tag{61}$$

Por lo tanto, $[f, g]$ es lineal en f, $[g, f]$ es el conjugado complejo de $[f, g]$, y $[f, f] \geq 0$. Estas son las propiedades del producto interno del espacio de Hilbert que se necesitan para la prueba estándar de la desigualdad de Schwarz. En nuestro caso, la desigualdad es

$$|[f, g]|^2 \leq [f, f][g, g]. \tag{62}$$

Tomemos a g la función caracteristica de una vecindad simétrica V de 0, dividida por $m(V)$. Por la ecuación (61),

$$[f, g] - T_\phi(f) = \int_G f(x)\frac{1}{m(V)}\int_V [\phi(x-y) - \phi(x)]dydx$$

y

$$[g, g] - 1 = \frac{1}{m(V)^2}\int_V \int_V [\phi(x-y) - 1]dxdy.$$

Ya que ϕ es uniformemente continua estas expresiones pueden hacerse arbitrariamente pequeñas tomando V lo suficientemente pequeño, y luego la desigualdad (62) produce la desigualdad

$$\left|T_\phi(f)\right|^2 \leq [f, f] = T_\phi(f * \tilde{f}) \quad (f \in L^1(G)). \tag{63}$$

Tomemos $h = f * \tilde{f}$ y $h^n = h^{n-1} * h \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$. Ya que $\|\phi\|_\infty = 1$, tenemos $\|T_\phi\| = 1$, y si aplicamos la desigualdad (63) con $h,\ h^2,\ h^4, \ldots$ en lugar de f, obtenemos

$$\left|T_\phi(f)\right|^2 \leq T_\phi(h) \leq \left[T_\phi(h^2)\right]^{\frac{1}{2}} \leq \cdots \leq \left[T_\phi\left(h^{2^n}\right)\right]^{2^{-n}} \leq \|h^{2^n}\|_1^{2^{-n}}.$$

Como $n \to 0$, la última expresión converge a el radio espectral de h, es decir, $\|\hat{h}\|_\infty$. Por lo tanto

$$\left|T_\phi(f)\right|^2 \leq \|\hat{h}\|_\infty = \|\hat{f}\|_\infty^2, \quad \text{o} \quad \left|T_\phi(f)\right| \leq \|\hat{f}\|_\infty \quad (f \in L^1(G)). \tag{64}$$

Esto significa que T puede considerarse como un funcional lineal acotado en $A(\Gamma)$ con respecto a la norma del supremo. (Aún no hemos demostrado que $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ implica $f_1 = f_2$, pero la desigualdad (64) prueba que $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ implica $T_\phi(f_1) = T_\phi(f_2)$, y esto es suficiente). Por Teorema de Hahn-Banach podemos extender a T_ϕ a un funcional lineal acotado en $C_0(\Gamma)$, preservando esta norma y el Teorema de Representación de Riesz, entonces implica que existe un $\mu \in M(\Gamma)$ con $\|\mu\| \leq 1$, tal que

$$T_\phi(f) = \int_\Gamma \hat{f}(-\gamma) d\mu(\gamma) = \int_G f(x) \int_\Gamma (x, \gamma) d\mu(\gamma) dx. \tag{65}$$

Por (59) tenemos $T_\phi(f) = \int_G f(x)\phi(x)dx$.
Por (65) tenemos $T_\phi(f) = \int_G f(x) \int_\Gamma (x, \gamma) d\mu(\gamma) dx$.

Luego

$$\int_G f(x)\phi(x)dx = T_\phi(f) = \int_G f(x) \int_\Gamma (x, \gamma) d\mu(\gamma) dx.$$

Entonces para casi todo $x \in G$, se tiene

$$f(x)\phi(x) = f(x) \int_\Gamma (x, \gamma) d\mu(\gamma)$$

$$\phi(x) = \int_\Gamma (x, \gamma) d\mu(x),$$

muestra que la ecuación (56) se cumple para casi todo $x \in G$, y entonces para todos los x

en G, ya que ambos lados de (56) son continuos.

Finalmente, tomando $x = 0$ en la ecuación (56), tenemos

$$1 = \phi(0) = \int_{\Gamma} d\mu(\gamma) = \mu(\Gamma) \leq \|\mu\| = 1;$$

por lo tanto $\mu(\Gamma) = \|\mu\|$ y esto implica que $\mu \geq 0$.

"$\Leftarrow$"

Cada caracter es definido-positivo, por lo tanto, también lo es cada combinación lineal finita de caracteres si los coeficientes son positivos.

Más generalmente, con $\mu \in M(G)$, si $\mu \geq 0$ y si

$$\phi(x) = \int_{\Gamma} (x, \gamma) d\mu(\gamma) \quad (x \in G), \tag{66}$$

entonces ϕ es continua y definida positiva.

En efecto, la ecuación (66) muestra que

$$\begin{aligned} \sum c_n \overline{c_m} \phi(x_n - x_m) &= \int_{\Gamma} \sum_{n,m} c_n \overline{c_m} (x_n - x_m, \lambda) d\mu(\gamma) \\ &= \int_{\Gamma} \left| \sum_{n} c_n (x_n, \gamma) \right|^2 d\mu(\gamma) \geq 0 \end{aligned}$$

de modo que ϕ es definida positiva. Ya que los conjuntos $N(C, r)$ del Teorema 2.2.8 son abiertos en G, nuestra prueba de la continuidad de $\hat{\mu}$ (Teorema 2.3.5) muestra igualmente que ϕ es continua si ϕ es definida por la ecuación (66). ■

2.5. Teorema de Inversión

Definición 2.5.1. *Sea $B(G)$ el conjunto de todas las funciones f en G que se representan de la forma*

$$f(x) = \int_{\Gamma} (x,\gamma) d\lambda_f(\gamma) \quad (x \in G), \tag{67}$$

donde λ_f es una medida en $M(G)$.

El Teorema de Bochner implica una combinación del Teorema de descomposición de Jordan, en que $B(G)$ es exactamente el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de funciones definidas positivas continuas en G.

Teorema 2.5.2. a) *Si $f \in L^1(G) \cap B(G)$, entonces $\hat{f} \in L^1(\Gamma)$.*

b) *Si la medida de Haar de G es fija, la medida de Haar de Γ se puede normalizar de forma que se cumpla la fórmula de inversión*

$$f(x) = \int_{\Gamma} \hat{f}(\gamma)(x,\gamma) d\gamma \quad (x \in G) \tag{68}$$

para cada $f \in L^1(G) \cap B(G)$.

Demostración.

(a) Escribamos B^1 en lugar de $L^1(G) \cap B(G)$, denotaremos por λ_f a la medida correspondiente, tal que se cumpla (67).

Si $f \in B^1$ y $h \in L^1(G)$, entonces

$$(h * f)(0) = \int_G h(-x) f(x) dx = \int_{\Gamma} \left(\int_G h(-x)(x,\gamma) dx \right) d\lambda_f(\gamma) = \int_{\Gamma} \hat{h}(\gamma) d\lambda_f(\gamma). \tag{69}$$

Si $g \in B^1$, aplicando (69) tenemos que

$$\int_\Gamma \hat{h}\hat{g}d\lambda_f = ((h * g) * f)(0) = ((h * f) * g)(0) = \int_\Gamma \hat{h}\hat{f}d\lambda_g.$$

Como $A(\Gamma)$ es denso en $C_0(\Gamma)$, se cumple

$$\hat{g}d\lambda_f = \hat{f}d\lambda_g, \quad (f, g \in B^1). \tag{70}$$

Ahora definamos un funcional lineal positivo T en $C_c(\Gamma)$. Supongamos que K es el soporte de algún ψ en $C_c(\Gamma)$. Para cada $\gamma_0 \in K$ corresponde una función $u \in C_c(G)$ con $\hat{u} \neq 0$, ya que $C_c(G)$ es denso en $L^1(G)$, la transformada de Fourier de $u * \tilde{u}$ es positiva en γ_0, y es negativa en ninguna parte. Como K es compacto, existe un número finito de tales funciones $u_1, \cdots, u_n$ tal que la función $g = u_1 * \tilde{u}_1 + \cdots + u_n * \tilde{u}_n$ tiene $g > 0$ en K. Como $g \in C_c(G)$, en el ejemplo 2.4.1 probamos que $g \in B^1$.

Definamos

$$T\psi = \int_\Gamma \left(\frac{\psi}{\hat{g}}\right) d\lambda_g. \tag{71}$$

Comprobemos algunas propiedades de T

- T está bien definido.

  Si sustituimos g por otra función $f \in B^1$ tal que $\hat{f} \neq 0$ en K, no cambia el valor de $T\psi$, ya que (70) implica que

$$\int_\Gamma \frac{\psi}{\hat{f}\hat{g}}\hat{f}d\lambda_g = \int_\Gamma \frac{\psi}{\hat{f}\hat{g}}\hat{g}d\lambda_f. \tag{72}$$

- T es lineal por la linealidad de la integral.
- La función g en (71) es definida positiva, entonces $\lambda_g \geq 0$, y se sigue que $T\psi \geq 0$ si $\psi \geq 0$.

- T no es identicamente nulo.

  Existe una función ψ y una medida λ_f tales que $\int_\Gamma \psi d\lambda_f \neq 0$, y si g es como en (71), tenemos

$$T(\psi\hat{f}) = \int_\Gamma \left(\frac{\psi\hat{f}}{\hat{g}}\right) d\lambda_g = \int_\Gamma \psi d\lambda_f \neq 0. \tag{73}$$

  Así, $T \neq 0$.

- T es invariante por traslaciones.

  Sean $\psi \in C_c(\Gamma)$ y γ_0 en Γ. Construir g como anteriormente, de manera que $\hat{g} > 0$ en K y también en $K + \gamma_0$. Definamos la función f dada por $f(x) = (-x, \gamma_0)g(x)$, tenemos $\hat{f}(\gamma) = \hat{g}(\gamma + \gamma_0)$ y $\lambda_f(E) = \lambda_g(E - \gamma_0)$. Si $\psi_0(\gamma) = \psi(\gamma - \gamma_0)$, entonces

$$T\psi_0 = \int_\Gamma \frac{\psi(\gamma - \gamma_0)}{\hat{g}(\gamma)} d\lambda_g(\gamma) = \int_\Gamma \frac{\psi(\gamma)}{\hat{f}(\gamma)} d\lambda_f(\gamma) = T\psi.$$

  Así, T es invariante por traslaciones, y se sigue por el Teorema de Representación de Riesz que

$$T\psi = \int_\Gamma \psi(\gamma) d(\gamma) \quad (\psi \in C_c(\Gamma)), \tag{74}$$

  donde $d\gamma$ denota una medida de Haar en Γ.

Si tomamos $f \in B^1$ y $\psi \in C_c(\Gamma)$, (73) y (74) prueban que

$$\int_\Gamma \psi d\lambda_f = T(\psi\hat{f}) = \int_\Gamma \psi\hat{f} d\gamma. \tag{75}$$

Como (75) se cumple para todo $\psi \in C_c(\Gamma)$, deducimos que

$$\hat{f} d\gamma = d\lambda_f \quad (f \in B^1). \tag{76}$$

Ya que λ_f es una medida finita, se sigue que $\hat{f} \in L^1(\Gamma)$.

(b) Sustiyuyendo (76) en (67) obtenemos la fórmula del enunciado (68)

$$f(x) = \int_\Gamma (x, \gamma) d\lambda_f(\gamma) = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)(x, \gamma) d\gamma.$$

■

2.5.1. Resultados del Teorema de Inversión

Proposición 2.5.3. *La familia de todos los conjuntos $N(C,r)$ y sus trasladados son una base para la topología de G.*

Demostración.

Sea V un entorno de 0 en G, escojamos un entorno compacto W de 0 tal que $W - W \subset V$, sea f la función característica de W dividida por $m(W)^{\frac{1}{2}}$, y sea $g = f * \tilde{f}$ y por ejemplo 2.4.1 g es continua definida positiva, y 0 fuera de $W - W$. Por lo tanto, el Teorema de Inversión 2.5.2 se aplica a g, por consiguiente, $\hat{g} = \left|\hat{f}\right|^2$,

$$\int_{\Gamma} \hat{g}(\gamma) d\gamma = g(0) = 1. \tag{77}$$

Por el recíproco del Teorema de Radon-Nikodym la medida definida a partir de una integral es una medida regular por tanto debe existir un compacto C en Γ tal que

$$\int_{C} \hat{g}(\gamma) d\gamma > \frac{2}{3}. \tag{78}$$

Si $x \in N(C, 1/3)$ (en la notación del Teorema 2.2.8), definimos

$$g(x) = \left(\int_{C} + \int_{C'}\right) \hat{g}(\gamma)(x,\gamma) d\gamma \tag{79}$$

para γ en C, $|1 - (x,\gamma)| < \frac{1}{3}$, por lo tanto $Re(x,\gamma) > \frac{2}{3}$, y la integral sobre C es al menos $\frac{2}{3}\int_C \hat{g} > \frac{4}{9}$. Ya que $\left|\int_{C'}\right| < \frac{1}{3}$, vemos que $g(x) > \frac{1}{9}$.

Si $x \in N(C, 1/3)$ y como g se anula fuera de $W - W$, $x \in V$, es decir $N(C, 1/3) \subset V$. ■

Como resultado de esto último, obtenemos una propiedad importante de los caracteres.

Corolario 2.5.4. Γ *separa puntos en G.*

Demostración.

Debemos probar que si $x_1 \neq x_2$ en G, entonces $(x_1,\gamma) \neq (x_2,\gamma)$ para algún $\gamma \in \Gamma$.

Sean $x_1 \neq x_2$ en G,

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow x_1 - x_2 \neq 0$$

Como G es Hausdorff así existe un abierto W que contiene a 0 tal que $x_1 - x_2 \notin W$. Pero por la Proposición 2.5.3 se sabe que existe un entorno $V = N(C, r)$ tal que $V \subset W$, así $x_1 - x_2 \notin V$. Entonces $x_1 - x_2 \notin N(C, r)$, pero

$$N(C, r) = \{x \in G : |1 - (x, \gamma)| < r,\ \forall \gamma \in C\}.$$

Así, existe $\gamma \in C \subseteq \Gamma$ tal que $|1 - (x_1 - x_2, \gamma)| \geq r > 0$.

$$|1 - (x_1 - x_2, \gamma)| \neq 0$$

esto es,

$$\begin{aligned}
(x_1 - x_2, \gamma) &\neq 1 \\
\gamma(x_1 - x_2) &\neq 1 \\
\frac{\gamma(x_1)}{\gamma(x_2)} &\neq 1 \\
\gamma(x_1) &\neq \gamma(x_2) \\
(x_1, \gamma) &\neq (x_2, \gamma).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x_1 \neq x_2$ en G, entonces existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $(x_1, \gamma) \neq (x_2, \gamma)$.

$\therefore \Gamma$ separa puntos en G.

■

Cualquier función de la forma

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x, \gamma_j) \quad (x \in G)$$

es llamada *un polinomio trigonométrico en* G. El conjunto de todos los polinomios trigonométricos en G es un álgebra sobre el campo complejo, con respecto a la multiplicación puntual, y es cerrado bajo conjugación compleja. Como Γ separa puntos en G, el Teorema Stone-Weierstrass da el siguiente resultado:

Proposición 2.5.5. *Si G es compacto, los polinomios trigonométricos en G, forman una subálgebra densa de $C(G)$.*

Se sigue que los polinomios trigonométricos son también densos en $L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, si G es compacto. (ver Proposición 1.5.26).

2.6. Normalización de la medida de Haar

Dada una medida de Haar, el Teorema de Inversión destaca una medida específica de Haar en Γ de manera que la fórmula de Inversión se cumple (68). En la definición 2.1.4 introducimos la normalización estándar para la medida de Haar de grupos compactos y discretos. Como Γ es compacto si G es discreto (Teorema 2.2.7) surge la pregunta de si estas normalizaciones son correctas, es decir, si la fórmula de inversión se cumple para ello. Primero establecemos un resultado general, y luego, algunos resultados particulares.

Proposición 2.6.1. *Si G es compacto y tomamos la medida de Haar en G de forma que $m(G) = 1$, la medida dual en γ es la medida del cardinal. Si G es discreto y elegimos la medida del cardinal, entonces la medida de Γ satisface $m(\Gamma) = 1$.*

Demostración.

Sea G compacto y $m(G) = 1$, tomemos $f(x) = 1$. Por la demostración del Teorema 2.2.7 $\hat{f}(0) = 1$ y $\hat{f}(\gamma) = 0$ si $\gamma \neq 0$. Si m_Γ es la medida de Haar en Γ, de acuerdo con el Teorema de Inversión 2.5.2, entonces

$$1 = f(0) = \int_{\Gamma} \hat{f}(\gamma) d\gamma = m_{\Gamma}(\{0\}) \tag{80}$$

y así, m_{Γ} asigna medida 1 a cada punto de Γ.

Recíprocamente, si G es discreto y cada punto tiene medida 1, tomar $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ si $x \neq 0$. Entonces $\hat{f}(\gamma) = 1$, y

$$m(\Gamma) = \int_{\Gamma} \hat{f}(\gamma) d\gamma = f(0) = 1 \tag{81}$$

si el Teorema de Inversión se cumple. ■

Consideremos un caso no trivial, tomando $G = \mathbb{R}$ (ver ejemplo 2.2.1) así que $\Gamma = \mathbb{R}$, y sean αdx, βdt medidas de Haar en G y Γ; dx y dt denotan medidas de Lebesgue ordinarias en la recta real. Como $e^{-|t|} > 0$, la fórmula

$$\frac{2\beta}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{ixt} \beta dt \tag{82}$$

prueba que $(1+x^2)^{-1}$ es definida positiva, y la unicidad de la transformada inversa, combinada con el Teorema de Inversión prueba que

$$e^{-|t|} = 2\alpha\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{1+x^2} dx \tag{83}$$

con $t = 0$, (83) se convierte en

$$1 = 2\alpha\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi\alpha\beta, \tag{84}$$

y esta es la condición de normalización que α y β deben satisfacer.

Dos de las posibles elecciones que son frecuentemente usadas:

$\alpha = \frac{1}{2\pi}$, $\beta = 1$ o $\alpha = \beta = (2\pi)^{\frac{-1}{2}}$.

De ahora en adelante, siempre se asumirá que la medida de Haar en G y Γ son tomadas de tal forma que cumplen el Teorema de Inversión.

2.7. El Teorema de Plancherel

Teorema 2.7.1. *La Transformada de Fourier restringida a* $(L^1 \cap L^2)(G)$ *es una isometría (con respecto a la* L^2*-norma) sobre un subespacio lineal denso de* $L^2(\Gamma)$*. Por lo tanto, puede extenderse de manera única a una isometría de* $L^2(G)$ *sobre* $L^2(\Gamma)$*.*

Demostración.

Definamos $T : (L^1 \cap L^2)(G) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ por $T(f) = \hat{f}$.

Sea $\Phi = (L^1 \cap L^2)(G) = \{f \in A(\Gamma) : f \in (L^1 \cap L^2)(G)\}$.

Por Teorema 2.1.9 (e) y Teorema 2.2.6 (b) se puede probar que Φ es una subálgebra de $A(\Gamma)$, también $(L^1 \cap L^2)(G)$ es subálgebra de $L^2(G)$.
También

$$T(f+g) = \widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$$
$$T(f*g) = \widehat{f*g} = \hat{f} * \hat{g}; \quad \text{por Teorema 2.2.6-(b)}$$

$\therefore$ T es un homomorfismo.

Sea $f \in (L^1 \cap L^2)(G)$.
Definamos $g = f * \tilde{f}$, entonces $g \in L^1(G)$ por Teorema 2.1.9, y por ejemplo 2.4.1 g es continua y definida positiva.
También $\hat{g} = \widehat{f * \tilde{f}} = \hat{f} * \hat{\tilde{f}} = \hat{f} * \overline{\hat{f}} = \left|\hat{f}\right|^2$, y luego

$$
\begin{aligned}
\|f\|_2^2 = \int_G |f(x)|^2\, dx = \int_G f(x)\tilde{f}(-x)dx;\ \text{ya que} \tilde{f}(-x) = \overline{f(x)} \\
&= g(0),\ \text{por definición de } g = f * \tilde{f} \\
&= \int_\Gamma \hat{g}(\gamma)d\gamma,\ \text{por Teorema de Inversión literal (b)} \\
&= \int_\Gamma \left|\hat{f}\right|^2 d\gamma \\
&= \|\hat{f}\|_2^2.
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \|Tf\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

$\therefore\ T$ es isometría.

Ahora probemos que Φ es denso en $L^2(\Gamma)$.

Sea $\psi \in L^2(\Gamma)$, tal que $\langle \phi, \psi \rangle_2 = 0,\ \forall\ \phi \in \Phi$.

$$
\langle \phi, \psi \rangle_2 = 0 \Longrightarrow \int_\Gamma \phi\overline{\psi}d\gamma = 0.
$$

$\therefore\ \forall\ \phi \in \Phi,\ \int_\Gamma \phi\overline{\psi}d\gamma = 0.$

Si reemplazamos ϕ por $\phi(x, \gamma)$ lo cual es posible gracias al Teorema 2.2.6 (c), entonces se tiene

$$
\forall\ \phi \in \Phi,\ \int_\Gamma \phi\overline{\psi}(x, \gamma)d\gamma = 0,\ \forall\ x \in G. \tag{85}
$$

Como $\phi \in \Phi$, así $\phi = \hat{f}$ para algún $f \in (L^1 \cap L^2)(G)$, de donde $f \in L^2(G)$, y por ejemplo 2.4.1 se tendría que $f * \tilde{f}$ es una función definida positiva continua, así por Teorema de Bochner 2.4.3 se tiene que $f * \tilde{f} \in B(G)$ y también por Teorema 2.1.9 $f * \tilde{f} \in L^1(G)$, por lo cual $f * \tilde{f} \in L^1(G) \cap B(G)$, así

$$\widehat{f * \tilde{f}} \in L^1(\Gamma),$$

por el Teorema de Inversión 2.5.2-(a), pero

$$\widehat{f * \tilde{f}} = |\phi|^2 .$$

Así, $|\phi|^2 \in L^1(\Gamma)$, de donde $\phi \in L^2(\Gamma)$.
Luego, al usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz se prueba que $\phi\overline{\psi} \in L^1(\Gamma)$, ya que $\phi, \overline{\psi} \in L^2(\Gamma)$.

Definimos $\mu(C) = \int_C \phi\overline{\psi} d\gamma$, y como $\phi, \overline{\psi} \in L^2(\Gamma)$, entonces por el recíproco del Teorema de Radon-Nikodym se tiene que $\mu \in M(\Gamma)$.
Entonces por (85) se tiene que

$$\int_\Gamma (x, \gamma) d\mu = \int_\Gamma \phi\overline{\psi}(x, \gamma) d\gamma = 0$$

para todo $x \in G$.

Entonces por el Teorema de unicidad 2.3.8 se tiene que $\mu = 0$, así

$$0 = \mu(\Gamma) = \int_\Gamma \phi\overline{\psi} d\gamma.$$

Por lo tanto

$$\phi\overline{\psi} = 0 \text{ casi en todas partes para todo } \phi \in \Phi. \tag{86}$$

Sea $\gamma_0 \in \Gamma$.

Como $C_c(G)$ es denso en $L^1(G)$, así existe $u \in C_c(G)$ tal que $\hat{u}(0) \neq 0$.

Sea $v = u * \tilde{u}$, así $\hat{v} = |\hat{u}|^2 \geq 0$ y como $\hat{u}(0) \neq 0$, así $\hat{v}(0) > 0$ y como $\hat{v}$ es una función continua por ser $A(\Gamma) \subset C_0(\Gamma)$ en el Teorema 2.2.6 (a), así existe un conjunto abierto $W \subset \Gamma$ tal que $\hat{v} > 0$ en W y es no negativa fuera de W, donde $0 \in W$.

También por Teorema 2.2.6 Φ es cerrado bajo traslaciones, así $\hat{v}(\gamma - \gamma_0) \in \Phi$ y $\hat{v}(\gamma - \gamma_0) > 0$ en $W - \gamma_0$. Que $\hat{v}(\gamma - \gamma_0) \in \Phi$ se sigue del hecho que $\hat{v} \in \Phi$ ya que $v \in C_c(G)$ por Teorema 2.1.9 c) y $C_c(G) \subseteq (L^1 \cap L^2)(G)$ por Capítulo 1.

Pero por (86) se tiene

$$\hat{v}(\gamma - \gamma_0)\overline{\psi}(\gamma) = 0, \quad \forall\, \gamma \in \Gamma.$$

Luego $\hat{v}(\gamma_0 - \gamma_0)\overline{\psi}(\gamma_0) = 0$ y como $\hat{v}(0) > 0$, así $\overline{\psi}(\gamma_0) = 0$ de donde $\psi(\gamma_0) = 0$.

$\therefore \psi(\gamma_0) = 0, \quad \forall \gamma_0 \in \Gamma.$

$\therefore \psi = 0.$

Luego el único elemento ortogonal a Φ en $L^2(\Gamma)$ es 0, así Φ es denso en $L^2(\Gamma)$.

Pero también $(L^1 \cap L^2)(G)$ es denso en $L^2(G)$, así T se puede extender de la siguiente forma:

Sea $f \in L^2(G)$, así existe una sucesión $(f_n) \subset (L^1 \cap L^2)(G)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ en la norma de $L^2(G)$.

Luego, (f_n) es de Cauchy en $L^2(\Gamma)$ y como $L^2(\Gamma)$ es completo entonces $(T(f_n))$ converge en $L^2(\Gamma)$.

Definimos la extensión de T por

$$\tilde{T}(f) = \lim_{n \longrightarrow \infty} T(f_n).$$

Probemos la unicidad.

Sea $S : L^2(G) \to L^2(\Gamma)$ isometría que extienda a T.

Se debe probar que $S = \tilde{T}$.

Sea $f \in L^2(G)$, así existe $(f_n) \subseteq (L^1 \cap L^2)(G)$ tal que $f_n \to f$.

$$\begin{aligned}
S(f) &= S(\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n) \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} S(f_n); \text{ ya que } S \text{ es isometría y por tanto es continua} \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} T(f_n); \text{ ya que } S|_{(L^1\cap L^2)(G)} = T \\
&= \tilde{T}(f).
\end{aligned}$$

$\therefore S = \tilde{T}$.

Por lo tanto, T puede extenderse de manera única a una isometría de $L^2(G)$ sobre $L^2(\Gamma)$. ■

Observación 2. *La extensión anterior de la Transformada de Fourier a $L^2(G)$ se le conoce como **Transformada de Plancherel**, y se denotará también con el símbolo $\hat{f}$. Una parte importante del Teorema es la afirmación que cada función en $L^2(\Gamma)$ es la transformada de Plancherel de alguna $f \in L^2(G)$. Para G compacto este es un caso especial del Teorema de Riesz-Fischer sobre sistemas ortogonales de funciones.*

Identidad de Polarización.

$$4f\overline{g} = |f + g|^2 - |f - g|^2 + i\,|f + ig|^2 - i\,|f - ig|^2\,. \tag{87}$$

Demostración.

Probemos que Re $f\overline{g} = \frac{1}{4}[|f+g|^2 - |f-g|^2]$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left[|f+g|^2 - |f-g|^2\right] &= \frac{1}{4}\left[(f+g)\overline{f+g} - (f-g)\overline{f-g}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[f(\overline{f+g}) + g(\overline{f+g}) - (f(\overline{f-g}) - g(\overline{f-g}))\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[f(\overline{f}+\overline{g}) + g(\overline{f}+\overline{g}) - (f(\overline{f}-\overline{g}) - g(\overline{f}-\overline{g}))\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[f\overline{f} + f\overline{g} + g\overline{f} + g\overline{g} - (f\overline{f} - f\overline{g} - g\overline{f} + g\overline{g})\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[f\overline{g} + g\overline{f} + f\overline{g} + g\overline{f}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[2f\overline{g} + 2g\overline{f}\right] \\
&= \frac{1}{4}(2)\left[f\overline{g} + g\overline{f}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[f\overline{g} + \overline{(f\overline{g})}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2\mathrm{Re} f\overline{g}\right] \\
&= \mathrm{Re} f\overline{g}.
\end{aligned}$$

Probemos que Im $f\overline{g} = \frac{1}{4}[i\,|f+ig|^2 - i\,|f-ig|^2]$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left[|f+ig|^2 - |f-ig|^2\right] &= \frac{1}{4}\left[(f+ig)\overline{f+ig} - (f-ig)\overline{f-ig}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[f(\overline{f+ig}) + ig(\overline{f+ig}) - (f(\overline{f-ig}) - ig(\overline{f-ig}))\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[f(\overline{f}+\overline{ig}) + ig(\overline{f}+\overline{ig}) - (f(\overline{f}-\overline{ig}) - ig(\overline{f}-\overline{ig}))\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[f\overline{f} + \bar{i}f\overline{g} + ig\overline{f} + i\bar{i}g\overline{g} - (f\overline{f} - \bar{i}f\overline{g} - ig\overline{f} + i\bar{i}g\overline{g})\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[f\overline{f} + \bar{i}f\overline{g} + ig\overline{f} + i\bar{i}g\overline{g} - f\overline{f} + \bar{i}f\overline{g} + ig\overline{f} - i\bar{i}g\overline{g}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[-if\overline{g} + ig\overline{f} - if\overline{g} + ig\overline{f}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[-2if\overline{g} + 2ig\overline{f}\right] \\
&= \frac{1}{4}(2i)\left[g\overline{f} - f\overline{g}\right] \\
&= \frac{i}{2}\left[\overline{(f\overline{g})} - f\overline{g}\right] \\
&= \frac{i}{2}\left[-2\ \mathrm{Im}\ f\overline{g}i\right] \\
&= (i)^2\left[-\ \mathrm{Im}\ f\overline{g}\right] \\
&= (-1)\left[-\ \mathrm{Im}\ f\overline{g}\right] \\
&= \mathrm{Im}\ f\overline{g}.
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
f\overline{g} &= \mathrm{Re} f\overline{g} + i\mathrm{Im}\ f\overline{g} \\
f\overline{g} &= \frac{1}{4}\left[|f+g|^2 - |f-g|^2\right] + i\frac{1}{4}\left[|f+ig|^2 - |f-ig|^2\right] \\
f\overline{g} &= \frac{1}{4}\left[|f+g|^2 - |f-g|^2 + i\,|f+ig|^2 - i\,|f-ig|^2\right] \\
4f\overline{g} &= |f+g|^2 - |f-g|^2 + i\,|f+ig|^2 - i\,|f-ig|^2\,.
\end{aligned}
$$

■

Si $f, g \in L^2(G)$, la identidad (87) combinada con la transformada de Plancherel, da la

Fórmula de Parseval.

$$\int_G f(x)\overline{g(x)}dx = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)}d\gamma. \tag{88}$$

Demostración.

Partiendo de la identidad (87), tenemos que

$$\begin{aligned}
4f\overline{g} &= |f+g|^2 - |f-g|^2 + i\,|f+ig|^2 - i\,|f-ig|^2\\
4\int_G f(x)\overline{g(x)}dx &= \int_G \left(|f(x)+g(x)|^2 - |f(x)-g(x)|^2 + i\,|f(x)+ig(x)|^2 - i\,|f(x)-ig(x)|^2\right)dx\\
4\int_G f(x)\overline{g(x)}dx &= \int_G (|f(x)+g(x)|^2)dx - \int_G (|f(x)-g(x)|^2)dx\\
&\quad + i\int_G (|f(x)+ig(x)|^2)dx - i\int_G (|f(x)-ig(x)|^2)dx.
\end{aligned}$$

Recordemos que para toda función f, $|f| = \left|\hat{f}\right|$. Así

$$\begin{aligned}
4\int_G f(x)\overline{g(x)}dx &= \int_\Gamma (\left|\hat{f}(\gamma)+\hat{g}(\gamma)\right|^2)d\gamma - \int_\Gamma (\left|\hat{f}(\gamma)-\hat{g}(\gamma)\right|^2)d\gamma\\
&\quad + \int_\Gamma (i\left|\hat{f}(\gamma)+i\hat{g}(\gamma)\right|^2)d\gamma - \int_\Gamma (i\left|\hat{f}(\gamma)-i\hat{g}(\gamma)\right|^2)d\gamma\\
4\int_G f(x)\overline{g(x)}dx &= 4\int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)}d\gamma\\
\int_G f(x)\overline{g(x)}dx &= \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_G f(x)\overline{g(x)}dx = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)}d\gamma.$$

■

Teorema 2.7.2. $A(\Gamma)$ *es el conjunto de convoluciones* $F_1 * F_2$*, con* F_1 *y* F_2 *en* $L^2(\Gamma)$.

Demostración.

Sean $f, g \in L^2(G)$. Sustituyendo g por $\overline{g}$ en (88), la fórmula de Parseval asume la forma

$$\int_G f(x)g(x)dx = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\hat{g}(-\gamma)d\gamma, \tag{89}$$

y si reemplazamos $g(x)$ por $(-x, \gamma_0)g(x)$ en (89), obtenemos

$$\widehat{f * g}(\gamma_0) = \int_G f(x)g(x)(-x, \gamma_0)dx = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma_0 - \gamma)d\gamma = (\hat{f} * \hat{g})(\gamma_0). \tag{90}$$

Probemos por doble inclusión que $A(\Gamma) = \left\{F_1 * F_2 \colon F_1, F_2 \in L^2(\Gamma)\right\}$.

"$\subset$"

Sea $\hat{h}$ en $A(\Gamma)$, entonces $h \in L^1(G)$.

Pero cada elemento en $L^1(G)$ se puede expresar como el producto de dos elementos en $L^2(G)$, por lo tanto $h = fg$, con $f, g \in L^2(G)$, y (90) prueba que $\hat{h} = \hat{f} * \hat{g}$, con $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\Gamma)$, por el Teorema de Plancherel.

$\therefore\ \hat{h} \in \left\{F_1 * F_2 \colon F_1, F_2 \in L^2(\Gamma)\right\}$.

$\therefore\ A(\Gamma) \subset \left\{F_1 * F_2 \colon F_1, F_2 \in L^2(\Gamma)\right\}$.

"$\supset$"

Sean $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\Gamma)$.

Como $f, g \in L^2(G)$, entonces el producto $fg \in L^1(G)$.

Luego, $\widehat{f * g} \in A(\Gamma)$ ya que $fg \in L^1(G)$. Pero por (90) $\widehat{f * g} = \hat{f} * \hat{g}$, así $\hat{f} * \hat{g} \in A(\Gamma)$.

$$\therefore \ \left\{F_1 * F_2 : F_1, F_2 \in L^2(\Gamma)\right\} \subset A(\Gamma).$$

$$\therefore \ A(\Gamma) = \left\{F_1 * F_2 : F_1, F_2 \in L^2(\Gamma)\right\}.$$

■

Teorema 2.7.3. *Si E es un conjunto abierto no vacío en Γ, existe $\hat{f} \in A(\Gamma)$ no nula, tal que $\hat{f}(\gamma) = 0$ fuera de E.*

Demostración.

Sea K un subconjunto compacto de E, con $m(K) > 0$, sea V un entorno compacto de 0 tal que $K + V \subset E$ y sea $\hat{f} = \hat{g} * \hat{h}$, donde $\hat{g}$ y $\hat{h}$ son las funciones características de K y V respectivamente.

Entonces $\hat{f}(\gamma) = 0$ fuera de $K + V$, $\hat{f} \in A(\Gamma)$ por Teorema 2.7.2, y $\int_\Gamma \hat{f}(\gamma)d\gamma = m(K)m(V) > 0$ lo cual probaremos a continuación:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \hat{f}(\gamma)d\gamma &= \int_\Gamma (\hat{g} * \hat{h})(\gamma)d\gamma \\
&= \int_\Gamma \left(\int_\Gamma \hat{g}(\gamma - \gamma_0)\hat{h}(\gamma_0)d\gamma_0 \right) d\gamma \\
&= \int_\Gamma \left(\int_\Gamma X_K(\gamma - \gamma_0)X_V(\gamma_0)d\gamma_0 \right) d\gamma \\
&= \int_\Gamma \left(\int_\Gamma X_K(\gamma - \gamma_0)X_V(\gamma_0)d\gamma \right) d\gamma_0 \\
&= \int_\Gamma X_V(\gamma_0) \left(\int_\Gamma X_K(\gamma - \gamma_0)d\gamma \right) d\gamma_0 \\
&= \int_\Gamma X_V(\gamma_0) \left(\int_\Gamma X_{K+\gamma_0}(\gamma)d\gamma \right) d\gamma_0 \\
&= \int_\Gamma X_V(\gamma_0)m(K + \gamma_0)d\gamma_0 \\
&= \int_\Gamma X_V(\gamma_0)m(K)d\gamma_0; \text{ la medida de Haar es invariante bajo traslación} \\
&= m(K) \int_\Gamma X_V(\gamma_0)d\gamma_0 \\
&= m(K)m(V) > 0.
\end{aligned}$$

Así $\hat{f}$ no es identicamente a 0. ■

2.8. Teorema de Dualidad de Pontryagin

Si G es un grupo abeliano localmente compacto, hemos visto (Teorema 2.2.8) que su dual Γ es también un grupo abeliano localmente compacto. Por lo tanto, Γ tiene un grupo dual, llamado $\hat{\Gamma}$, y todo lo que hemos demostrado hasta ahora para el par ordenado (G, Γ) se cumple también igualmente para el par $(\Gamma, \hat{\Gamma})$. El valor de un caracter $\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma}$ en el punto $\gamma \in \Gamma$ será escrito $(\gamma, \hat{\gamma})$ (esta notación será temporal, la dejaremos de usar tan pronto probemos que $\hat{\Gamma} = G$).

Por Teorema 2.2.8-(a) cada $x \in G$ puede ser considerado como un caracter continuo en Γ, y así existe un mapeo natural α de G a $\hat{\Gamma}$, definido por:

Sea $\alpha \in G$

$$\begin{array}{rccl} \alpha : & G & \to & \hat{\Gamma} \\ & x & \mapsto & \alpha(x), \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rccl} \alpha(x) : & \Gamma & \to & \mathbb{C} \\ & \gamma & \mapsto & [\alpha(x)](\gamma) = \gamma(x) \end{array}$$

en otras palabras

$$(x, \gamma) = (\gamma, \alpha(x)) \quad (x \in G,\ \gamma \in \Gamma). \tag{91}$$

Probemos que $\alpha(x)$ es un caracter.

(a) Probemos que $|[\alpha(x)](\gamma)| = 1$.

$$
\begin{aligned}
|[\alpha(x)](\gamma)| &= |\gamma(x)|\,, \; x \in G, \; \gamma \in \Gamma. \\
&= |1|\,; \text{ ya que } \gamma \text{ es caracter.} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

(b) Probemos que $[\alpha(x)](\gamma_1 + \gamma_2) = [\alpha(x)](\gamma_1)[\alpha(x)](\gamma_2)$.

$$
\begin{aligned}
[\alpha(x)](\gamma_1 + \gamma_2) &= (\gamma_1 + \gamma_2)(x) \\
&= [\gamma_1(x)][\gamma_2(x)]; \; \gamma \text{ es un caracter.} \\
&= [\alpha(x)](\gamma_1)[\alpha(x)](\gamma_2).
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $\alpha(x)$ es un caracter.

Proposición 2.8.1. *Si X es un espacio de Hausdorff e Y es denso en X y Y es localmente compacto con la topología relativa, entonces Y es abierto en X.*

Demostración.

Sea y en Y. Como Y es localmente compacto con la topología relativa, así existe un entorno en X, V de Y tal que $\overline{Y \cap V}$ es compacto en X.

Como $\overline{Y \cap V}$ es compacto, así $K = Y \cap \overline{Y \cap V}$ también es compacto en Y y por tanto en X.

Sea $W = V - K$.

$$
\begin{aligned}
W = V - K &\Longrightarrow W \subseteq V \\
&\Longrightarrow W \cap Y \subseteq V \cap Y \subseteq K.
\end{aligned}
$$

Pero $W \cap K = \emptyset$ y como $W \cap Y \subseteq K$, entonces $W \cap Y \subseteq K = \emptyset$, pero W es abierto en X ya que K es compacto y en espacios de Husdorff los conjuntos compactos son cerrados.
Luego por ser Y denso en X se tendría que $Y \cap W \neq \emptyset$ si $W \neq \emptyset$, pero hemos probado que $Y \cap W = \emptyset$, por lo cual $W = \emptyset$.

$$
\begin{aligned}
W = \emptyset &\Longrightarrow V - K = \emptyset \\
&\Longrightarrow V \subseteq K \subseteq Y.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, para todo y existe V abierto tal que $y \in V \subseteq Y$.

$\therefore$ Y es abierto en X. ■

Proposición 2.8.2. *Si H es un subgrupo de un grupo topológico G y H es localmente compacto con la topología relativa, entonces H es cerrado en G.*

Demostración.
Tomando $Y = H$, $X = \overline{H}$ en la Proposición anterior se demuestra que H es subgrupo abierto de $\overline{H}$.

Probemos que

$$\overline{H} - H = \bigcup_{x \in \overline{H} - H} (H + x).$$

“ $\subset$”

Sea $x \in \overline{H} - H$.

$$\begin{aligned} x \in \overline{H} - H &\Longrightarrow x \notin H \\ &\Longrightarrow x \in x + H; \text{ya que } 0 \in H. \\ &\Longrightarrow x \in \bigcup_{z \in \overline{H} - H} (H + z). \end{aligned}$$

$\therefore \overline{H} - H \subseteq \bigcup_{x \in \overline{H} - H} (H + x)$

" $\supseteq$"

Sea $z \in \bigcup_{x \in \overline{H} - H} (H + x)$.

Entonces $z \in H + x$, para algún $x \in \overline{H} - H$.

Luego,

$$z - x \in H \subseteq \overline{H}$$

y como $x \in \overline{H}$, así $z - x + x \in x + \overline{H} = \overline{H}$, por tanto $z \in \overline{H}$.

Si $z \in H$, entonces por el hecho de que $z \in H + x$ con $x \in \overline{H} - H$, se tendría que $x \in H$ lo cual no es cierto, por lo tanto $z \notin H$.

$\therefore \ \overline{H} - H = \bigcup_{x \in \overline{H} - H} (H + x)$.

Como H es abierto en $\overline{H}$, así $H + x$ es abierto, por lo tanto $\bigcup_{x \in \overline{H} - H} (H + x)$ es abierto, de donde se sigue que $\overline{H} - H$ es abierto en $\overline{H}$, pero esto implica que H es cerrado en $\overline{H}$, así $H = \overline{H}$.

$\therefore$ H es cerrado. ∎

Teorema 2.8.3 (Teorema de Dualidad de Pontryagin)**.** *El mapeo α es un isomorfismo y un homeomorfismo de G a $\hat{\Gamma}$.*

Así $\hat{\Gamma}$ puede ser identificado con G, y una declaración más informal del resultado sería:

Cada grupo abeliano localmente compacto es el grupo dual de su grupo dual.

Demostración.

Primero demostraremos que es un homomorfismo inyectivo.

Sean $x, y \in G$ y $\gamma \in \Gamma$, entonces

$$(\gamma, \alpha(x + y)) = (x + y, \gamma) = (x, \gamma)(y, \gamma) = (\gamma, \alpha(x))(\gamma, \alpha(y)) = (\gamma, \alpha(x) + \alpha(y)).$$

Por lo tanto $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$, y α es un homomorfismo. Como Γ separa puntos en G (Corolario 2.5.4) α es inyectiva, por lo que es un homomorfismo inyectivo.

El resto de la prueba puede ser dividido en 3 pasos:

(a) α es un homeomorfismo de G a $\alpha(G)$.

(b) $\alpha(G)$ es cerrado en $\hat{\Gamma}$.

(c) $\alpha(G)$ es denso en $\hat{\Gamma}$.

(a) Sea C un compacto en Γ, sea $r > 0$ y definamos

$$V = \{x \in G : |1 - (x, \gamma)| < r, \quad \forall\, \gamma \in C\};$$

$$W = \{\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma} : |1 - (\gamma, \hat{\gamma})| < r, \quad \forall\, \gamma \in C\}.$$

Por Proposición 2.5.3 y Teorema 2.2.8 (c), estos conjuntos V forman una base de entorno de 0 en G, y los conjuntos W constituyen una base de entornos de 0 en $\hat{\Gamma}$.

Probemos que α y α^{-1} son continuas.

Probemos primero que α es una función abierta de G a $\alpha(G)$.

Sea V la base de entorno de 0 en G.

$$\begin{aligned}
\alpha(V) &= \{\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma} \mid \exists x \in V,\ \alpha(x) = \hat{\gamma}\} \\
&= \{\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma} \mid |1 - (x, \gamma)| < r \ \ \forall\gamma \in C \wedge \alpha(x) = \hat{\gamma} \ \text{ p.a } x \in V\} \\
&= \{\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma} \mid |1 - (\gamma, \alpha(x))| < r \ \ \forall\gamma \in C \wedge \alpha(x) = \hat{\gamma} \ \text{ p.a } x \in V\}; \qquad \text{por definición de } \alpha \\
&= \{\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma} \mid |1 - (\gamma, \hat{\gamma})| < r \ \ \forall\gamma \in C \wedge \alpha(x) = \hat{\gamma} \ \text{ p.a } x \in V\} \\
&= \{\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma} \mid |1 - (\gamma, \hat{\gamma})| < r \ \ \forall\gamma \in C\} \cap \{\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma} \mid \alpha(x) = \hat{\gamma} \ \text{ p.a } x \in V \subset G\} \\
&= W \cap \alpha(G).
\end{aligned}$$

Por tanto $\alpha(V)$ es abierto en la topología relativa inducida en $\alpha(G)$ por $\hat{\Gamma}$.

Así α es una función abierta de G a $\alpha(G)$.

Probemos que α^{-1} es continua.

Queremos probar que $(\alpha^{-1})^{-1}(V)$ es abierto en $\alpha(G)$.

Sea V la base de entorno de 0 en G.

Luego

$$(\alpha^{-1})^{-1}(V) = \alpha(V).$$

Así $\alpha(V)$ es abierto en $\alpha(G)$, por ser α una función abierta de G a $\alpha(G)$.

Por lo tanto α^{-1} es continua.

Probemos que α es continua.

Sea $Z = W \cap \alpha(G)$.

$$\begin{aligned}(\alpha)^{-1}(Z) &= \{x \in G \mid \alpha(x) \in W \cap \alpha(G)\}\\ &= \{x \in G \mid \alpha(x) \in W \wedge \alpha(x) \in \alpha(G)\}\\ &= \{x \in G \mid \ |1 - (\gamma, \alpha(x))| < r \ \ \forall \gamma \in C \wedge \alpha(x) \in \alpha(G)\}\\ &= \{x \in G \mid \ |1 - (x, \gamma)| < r \ \ \forall \gamma \in C \wedge \alpha(x) \in \alpha(G)\}\\ &= V\end{aligned}$$

Así $(\alpha)^{-1}(Z) = V$, un abierto en G.

Por lo tanto α es continua.

$\therefore$ α es un homomorfismo de G a $\alpha(G)$.

(b) Por (a), $\alpha(G)$ es localmente compacto con la topología relativa que $\alpha(G)$ tiene como un subconjunto de $\hat{\Gamma}$.

Como $\alpha(G)$ es localmente compacto y es subgrupo de $\hat{\Gamma}$, así por la Proposición 2.8.2, $\alpha(G)$ es cerrado en $\hat{\Gamma}$.

(c) Queremos probar que $\alpha(G)$ es denso en $\hat{\Gamma}$.

Razonemos por contradicción.

Supongamos que $\alpha(G)$ no es denso en $\hat{\Gamma}$.

Si $\alpha(G)$ no es denso en $\hat{\Gamma}$, existe una función $F \in A(\hat{\Gamma})$ que es 0 en cada punto de $\alpha(G)$ pero no es idénticamente 0 (Teorema 2.7.3) (es decir, $F(\alpha(x)) = 0 \ \ \forall \ x \in G$; pero F no es idénticamente 0).

Para algún $\phi \in L^1(\Gamma)$, tenemos

$$F(\hat{\gamma}) = \int_\Gamma \phi(\gamma)(-\gamma, \hat{\gamma})d\gamma \quad (\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma}). \tag{92}$$

Como $F(\alpha(x)) = 0$ para todo $x \in G$, se sigue que

$$\int_\Gamma \phi(\gamma)(-x, \gamma)d\gamma = \int_\Gamma \phi(\gamma)(-\gamma, \alpha(x))d\gamma = F(\alpha(x)) = 0 \quad (x \in G). \tag{93}$$

Y así, $\phi = 0$, por el Teorema de Unicidad 2.3.8. Por lo tanto $F = 0$, por (92), y esto es una contradicción ya que F no es idénticamente a 0.

En resumen, α es un homomorfismo inyectivo, y es un homeomorfismo entre G y $\alpha(G)$, que por ser denso y cerrado, coincide con $\hat{\Gamma}$. ■

2.8.1. Algunos resultados del Teorema de Dualidad

La simetría entre G y Γ que está ahora establecida prueba que cada teorema demostrado por el par ordenado (G, Γ) también se cumple para (Γ, G) y esto nos permite completar algunos resultados que fueron previamente establecidos solo de forma provisional.

(a) Todo grupo abeliano compacto es el dual de un grupo abeliano discreto, y todo grupo abeliano discreto es el dual de un grupo abeliano compacto. Esto se sigue del Teorema 2.2.7

(b) **Teorema de Unicidad**: Si $\mu \in M(G)$ y $\hat{\mu}(\gamma) = 0,$ para todo $\gamma \in \Gamma$, entonces $\mu = 0$. Esto es el dual del Teorema 2.3.8

(c) $M(G)$ y $L^1(G)$ son álgebras de Banach semisimples. Como el mapeo $\mu \longrightarrow \hat{\mu}(\gamma)$ es un homomorfismo complejo de $M(G)$, para cada $\gamma \in \Gamma$, la semi-simplicidad de $M(G)$ se sigue de el Teorema de unicidad del literal (b). El mismo Teorema de unicidad se cumple para $L^1(G)$, y así $L^1(G)$ es semi-simple.

(d) Si G no es discreto, entonces $L^1(G)$ no tiene identidad. Por lo tanto $L^1(G) = M(G)$ si y solo si G es discreto. Porque si G no es discreto, entonces Γ no es compacto, por (a) y como $A(\Gamma) \subset C_0(\Gamma)$, $A(\Gamma)$ no contiene constantes distintas de cero, por lo tanto no tiene unidad. Ya que $A(\Gamma)$ es isomorfo, como un álgebra a $L^1(G)$, la prueba está completa.

(e) Si $\mu \in M(G)$ y $\hat{\mu} \in L^1(\Gamma)$, existe $f \in L^1(G)$ tal que $d\mu(x) = f(x)dx$ y

$$f(x) = \int_\Gamma \hat{\mu}(\gamma)(x,\gamma)d\gamma \quad (x \in G). \tag{94}$$

Por hipótesis, $\hat{\mu} \in L^1(\Gamma) \cap B(\Gamma)$; por lo tanto si f está definida por (94), el Teorema de Inversión (aplicado para el par (Γ, G) en vez de (G, Γ)) prueba que $f \in L^1(G)$ y

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G f(x)(-x,\gamma)dx \quad (\gamma \in \Gamma). \tag{95}$$

Como $\hat{\mu}(\gamma) = \int_G (-x,\gamma)d\mu(x)$, el Teorema de Unicidad ahora implica que $d\mu = fdx$, y la prueba está completa.

2.9. La Compactificación de Bohr

Definición 2.9.1. *Sea Γ el dual del grupo abeliano localmente compacto G, sea Γ_d igual al grupo Γ provisto con la topología discreta, y $\overline{G}$ el dual de Γ_d, entonces $\overline{G}$ es un grupo abeliano compacto que llamamos* ***La Compactificación de Bohr de G****.*

Consideremos el mapeo $\beta : G \longrightarrow \overline{G}$, definido por

$$(x,\gamma) = (\gamma, \beta(x)) \quad (x \in G,\ \gamma \in \Gamma). \tag{96}$$

Teorema 2.9.2. *El mapeo $\beta : G \longrightarrow \overline{G}$ es un isomorfismo continuo de G a un subgrupo denso $\beta(G)$ de $\overline{G}$.*

Demostración.

Como Γ separa puntos en G, note que la función β está definida de la misma forma que la función α en el Teorema de Pontryagin, y así β es un isomorfismo.

Ahora veamos que β es continua. Sea W un entorno de 0 en $\overline{G}$. Como un subconjunto de Γ_d es compacto si y solo si es finito, el Teorema 2.2.8 prueba que existe $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma$ y $r > 0$ tal que W contiene al conjunto

$$\{\overline{x} \in \overline{G} : |1 - (\gamma_i, \overline{x})| < r; \;\; i < 1, \cdots, n\}$$

que es un entorno de 0 en $\overline{G}$. Sea

$$V = \{x \in G : |1 - (x, \gamma_i)| < r; \; i < 1, \cdots, n\},$$

entonces V es un entorno de 0 en G, y $x \in V$ implica que $\beta(x) \in W$. Así β es continuo en 0, y por lo tanto en todo punto de G, por traslación.

Finalmente, sea $H = \overline{\beta(G)}$, la clausura en $\overline{G}$ de $\beta(G)$.
Razonando por contradicción, supongamos que $H \neq \overline{G}$.

Entonces el cociente $\overline{G}/H$ no es trivial y es compacto ya que sabe por topología que el cociente de un compacto es compacto.

Como $\overline{G}/H$ es no trivial, así su dual tampoco es trivial por lo cual existe un caracter

$$\phi : \; \overline{G}/H \; \longrightarrow \mathbb{C}$$

no trivial, esto es,

$$\phi(\overline{x} + H) \neq 1,$$

para algún $\overline{x} \in \overline{G}$.

Definimos

$$\begin{aligned} \psi : \overline{G} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \overline{x} &\longrightarrow \psi(\overline{x}) = \phi(\overline{x} + H). \end{aligned}$$

Esta función ψ es un caracter de $\overline{G}$, es decir, ψ está en el dual de $\overline{G}$.

Si $\overline{x} \in H$, entonces $\overline{x} + H = H$, pero H es el cero en $\overline{G}/H$ y como ϕ es un caracter en $\overline{G}/H$, entonces

$$\phi(\overline{x} + H) = \phi(H) = 1$$

ya que todo caracter mapea el cero en el $1 \in \mathbb{C}$.

$\therefore\ \psi(\overline{x}) = \phi(\overline{x} + H) = 1,\ \forall\ \overline{x} \in H.$

Pero como ϕ no es trivial, así existe $\overline{x} \in \overline{G}$ tal que $\psi(\overline{x}) \neq 1$.

Por el Teorema de Dualidad de Pontryagin se sabe que $\alpha : G \longrightarrow \hat{\Gamma}$ es biyección, donde en nuestro caso tomaríamos

$$\begin{aligned} G &= \Gamma_d. \\ \Gamma &= \widehat{\Gamma_d} = \overline{G}. \\ \hat{\Gamma} &= \widehat{\overline{G}}. \end{aligned}$$

Como $\psi \in \widehat{\overline{G}}$, así existe $\gamma_0 \in \Gamma_d = \Gamma$ tal que $\alpha(\gamma_0) = \psi$, pero ψ no es trivial y por ser α

isomorfismo, entonces γ_0 no es trivial.

Sea $x \in G$, así $\beta(x) \in H$, de donde

$$\begin{aligned}
\psi(\beta(x)) &= 1\\
(\alpha(\gamma_0))(\beta(x)) &= 1\\
(\beta(x), \alpha(\gamma_0)) &= 1, \text{ por ser } \alpha(\gamma_0) \text{ un caracter.}\\
(\gamma_0, \beta(x)) &= 1; \text{ por definición de } \alpha.\\
(x, \gamma_0) &= 1; \text{ por definición de } \beta.
\end{aligned}$$

Como x es arbitrario en G, se tiene que $\gamma_0(x) = 1$ para todo $x \in G$, así $\gamma_0 = 0$ el cero en Γ, lo cual es absurdo, pues antes habíamos deducido que $\gamma_0 \neq 0$.

Por lo tanto $\overline{G} = H = \overline{\beta(G)}$.

$\therefore$ $\beta(G)$ es denso en $\overline{G}$. ■

Podemos interpretar el Teorema de la siguiente manera:

Dados G y Γ, G es el grupo de todos los caracteres continuos en Γ, $\overline{G}$ es el grupo de todos los caracteres en Γ, y el hecho que G o $\beta(G)$ es denso en $\overline{G}$ lleva a un teorema de aproximación.

Teorema 2.9.3. *Dados $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma$, sea $\epsilon > 0$. Dado un caracter ϕ en Γ, existe un caracter continuo ψ definido en Γ tal que*

$$|\psi(\gamma_i) - \phi(\gamma_i)| < \epsilon \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{97}$$

Demostración.

Sea $\phi \in \overline{G}$. El conjunto de toda las $\psi \in \overline{G}$ que satisfacen (97), es abierto en $\overline{G}$, por tanto interseca a $\beta(G)$. ■

2.10. Una caracterización de $B(\Gamma)$

Recordemos que $B(\Gamma)$ es el conjunto de todas las funciones $\hat{\mu}$ en Γ que son transformadas de Fourier-Stieltjes de medidas μ en $M(G)$. Normamos $B(\Gamma)$ de la siguiente forma $\|\hat{\mu}\| = \|\mu\|$.

Teorema 2.10.1. *Sea ϕ una función definida en Γ, las siguientes declaraciones son equivalentes:*

(a) $\phi \in B(\Gamma)$ *y* $\|\phi\| \leqq A$.

(b) ϕ *es continua y*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i \phi(\gamma_i)\right| \leqq A\|f\|_\infty \tag{98}$$

para cada polinomio trigonométrico f en G, de la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x, \gamma_i). \tag{99}$$

Demostración.

(a) $\Longrightarrow$ (b)

Si (a) se cumple, entonces $\phi = \hat{\mu}$, y

$$\sum c_i \phi(\gamma_i) = \sum c_i \int_G (-x, \gamma_i) d\mu(x) = \int_G f(-x) d\mu(x). \tag{100}$$

$\therefore$ (a) implica (b).

Para probar (b) $\Longrightarrow$ (a), pasamos a la compactificación de Bohr $\overline{G}$ de G. En la notación de la sección 2.9, la fórmula

$$f(\overline{x}) = \sum_{k=1}^{n} c_k(\gamma_k, \overline{x}) \quad (\overline{x} \in \overline{G}) \tag{101}$$

extiende cada polinomio trigonométrico f en G a un polinomio trigonométrico en $\overline{G}$, ya que G es denso en $\overline{G}$, la norma $\|f\|_\infty$ no es alterada por esta extensión. La función lineal T definida en el espacio de todos los polinomios trigonométricos f de la forma (101) por

$$Tf = \sum c_k \phi(\gamma_k) \tag{102}$$

satisface la desigualdad

$$|Tf| \leqq A\|f\|_\infty. \tag{103}$$

Por Teorema de Hahn–Banach T puede ser extendido a un funcional lineal acotado en $C(\overline{G})$, de norma que no exceda A, y el Teorema de Representación de Riesz implica que existe una medida $\mu \in M(\overline{G})$ tal que $\|\mu\| \leqq A$ y

$$\sum c_k \phi(\gamma_k) = \int_{\overline{G}} f(-\overline{x}) d\mu(\overline{x}) \tag{104}$$

para toda f de la forma (101). Tomando $f(\overline{x}) = (\gamma, \overline{x})$, para algún $\gamma \in \Gamma$, obtenemos

$$\phi(\gamma) = \int_{\overline{G}} (-\gamma, \overline{x}) d\mu(\overline{x}) \quad (\gamma \in \Gamma). \tag{105}$$

Para completar la prueba, debemos probar que μ está concentrado en G (más precisamente en $\beta(G)$, en la notación de la sección 2.9).

Se sigue del Teorema de Radon-Nikodym que existe una función de Borel g en G, de valor absoluto 1, tal que $gd\mu = d\,|\mu|$, y como $C(\overline{G})$ es denso en $L^1(|\mu|)$ existe una sucesión de polinomios trigonométricos f_n en $\overline{G}$ tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{\overline{G}}|f_n-g|\,d\,|\mu|=0. \tag{106}$$

Por (105) la transformada

$$\phi_n(\gamma)=\int_{\overline{G}}(-\gamma,\overline{x})f_n(\overline{x})d\mu(\overline{x}) \quad (\gamma\in\Gamma) \tag{107}$$

son combinaciones lineales finitas de traslaciones de ϕ y por lo tanto son continuas en Γ , por (106), $\{\phi_n\}$ converge uniformemente a

$$\Phi(\gamma)=\int_{\overline{G}}(-\gamma,\overline{x})d\,|\mu|\,(\overline{x}), \quad (\gamma\in\Gamma) \tag{108}$$

y Φ es continua en Γ. La representación (108) prueba que, Φ es definida positiva, y así por el Teorema de Bochner 2.4.3, Φ es la transformada de Fourier-Stieltjes de una medida σ en el grupo dual G de Γ. El Teorema de unicidad para transformadas de Fourier-Stieltjes ahora implica que $\sigma=|\mu|$, por lo tanto $|\mu|$ está concentrada en G, y también lo es μ. ■

Corolario 2.10.2. *Si $\phi_n\in B(\Gamma)$ y $\|\phi_n\|\leqq A$ para $n=1,2,\cdots$, si $\phi\in C(\Gamma)$ y si*

$$\phi(\gamma)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\phi_n(\gamma) \quad (\gamma\in\Gamma), \tag{109}$$

entonces $\phi\in B(\Gamma)$ y $\|\phi\|\leqq A$.

Este es un Corolario del Teorema 2.10.1

Demostración.

Queremos probar que $\phi\in B(\Gamma)$ y $\|\phi\|\leq A$, entonces para ello debemos probar que ϕ cumple el literal (b) del Teorema 2.10.1.

Sea f un polinomio trigonométrico en G de la forma

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}c_i(x,\gamma_i).$$

Como $\phi_n \in B(\Gamma)$ y $\|\phi_n\| \leq A$, entonces por el Teorema 2.10.1 se tiene que ϕ_n cumple el inciso (b) del teorema 2.10.1.

Luego

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{m} c_i\phi(\gamma_i)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{m} c_i \lim_{n\longrightarrow\infty} \phi_n(\gamma_i)\right| \\
&= \left|\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{m} c_i\phi_n(\gamma_i)\right| \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\sum_{i=1}^{m} c_i\phi_n(\gamma_i)\right| \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} A\|f\|_\infty, \quad \text{ya que } \phi_n \text{ cumple el inciso (b) del Teorema 2.10.1.} \\
&= A\|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left|\sum_{i=1}^{m} c_i\phi(\gamma_i)\right| \leq A\|f\|_\infty.$$

Así por el Teorema 2.10.1, $\phi \in B(\Gamma)$ y $\|\phi\| \leq A$. ■

Capítulo 3

LA ESTRUCTURA DE GRUPOS ABELIANOS LOCALMENTE COMPACTOS

Este capítulo contiene la teoría de estructura de grupos abelianos localmente compactos.

3.1. La Dualidad entre subgrupos y mapeos cocientes

Definición 3.1.1. *Sea H un subgrupo cerrado del grupo ALC G y sea Λ el conjunto de todo $\gamma \in \Gamma$ (el grupo dual de G) tal que $(x, \gamma) = 1$ para todo $x \in H$, es decir $\Lambda = \{\gamma \in \Gamma : (x, \gamma) = 1, \forall\ x \in H\}$.* ***Llamamos a** Λ **el anulador de** H.*

Proposición 3.1.2. *Λ es un subgrupo cerrado de Γ.*

Demostración.

Probemos que Λ es cerrado.

Probaremos que $\Lambda = \overline{\Lambda}$.

"$\subset$"

$\Lambda \subset \overline{\Lambda}$, por definición 1.1.4.

"$\supset$"

Sea $\gamma \in \overline{\Lambda}$.

Sea $z \in H$.

Por Teorema 2.2.8 (a) la función

$$\begin{array}{rccl} \phi : & G \times G & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & (x, \gamma\prime) & \mapsto & \phi(x, \gamma\prime) = \gamma\prime(x) \end{array}$$

es continua.

Como la restricción de toda función continua es continua, así

$$\psi = \phi|_{\{z\}\times\Gamma :\ \{z\}\times\Gamma\rightarrow\mathbb{C}}$$

dada por $\psi(z, \gamma\prime) = \gamma\prime(z)$, para todo $\gamma\prime \in \Gamma$ es continua.

Sea $\epsilon > 0$.

Sea $U_\epsilon = B(1, \epsilon)$ (la bola en $\mathbb{C}$ centrada en 1 y de radio $\epsilon > 0$). Entonces U_ϵ es abierto en $\mathbb{C}$, así $\psi^{-1}(U_\epsilon)$ es abierto en $\{z\} \times \Gamma$, pero

$$\psi^{-1}(U_\epsilon) = \{(z, \gamma\prime) \in \{z\} \times \Gamma :\ |1 - \gamma\prime(z)| < \epsilon\}.$$

Pero $\{z\} \times \Gamma$ es homeomorfo a Γ bajo el homeomorfismo

$$\begin{array}{rccl} h : & \{z\} \times \Gamma & \rightarrow & \Gamma \\ & (z, \gamma\prime) & \mapsto & h(z, \gamma\prime) = \gamma\prime, \end{array}$$

entonces

$$W_\epsilon = h(\psi^{-1}(U_\epsilon)) = \{\gamma\prime \in \Gamma : \ |1 - \gamma\prime(z)| < \epsilon\}$$

es abierto en Γ.

Como el caracter $\mathbf{0} \in W_\epsilon$, ya que $|1 - \mathbf{0}(z)| = |1 - 1| = 0 < \epsilon$, entonces $W_\epsilon + \gamma$ es un abierto que contiene a γ y como $\gamma \in \overline{\Lambda}$, así $(W_\epsilon + \gamma) \cap \Lambda \neq \emptyset$.

Por lo tanto existe $\gamma_\epsilon \in \Lambda$ tal que $\gamma_\epsilon \in W_\epsilon + \gamma$, así $\gamma_\epsilon - \gamma \in W_\epsilon$, es decir,

$$\begin{aligned}
|1 - (\gamma_\epsilon - \gamma)(z)| &< \epsilon \\
\left|1 - \frac{\gamma_\epsilon(z)}{\gamma(z)}\right| &< \epsilon; \text{ ya que } (\gamma_\epsilon - \gamma)(x) = \frac{\gamma_\epsilon(x)}{\gamma(x)} \\
\left|1 - \frac{1}{\gamma(z)}\right| &< \epsilon; \text{ ya que } \gamma_\epsilon(z) = 1, \text{ pues } \gamma_\epsilon \in \Lambda \text{ y } z \in H. \\
|\gamma(z)|\left|1 - \frac{1}{\gamma(z)}\right| &< |\gamma(z)|\,\epsilon, \text{ multiplicación por } |\gamma(z)| \\
|\gamma(z) - 1| &< \epsilon, \text{ ya que } |\gamma(z)| = 1, \text{ pues } \gamma \in \Gamma.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$, $|\gamma(z) - 1| < \epsilon$.

$\therefore \ |\gamma(z) - 1| = 0$.

$\therefore \ \gamma(z) = 1$.

Como z es arbitrario en H, se concluye que $\gamma(z) = 1$, para todo $z \in H$.

$\therefore \ \gamma \in \Lambda$.

$\therefore \ \overline{\Lambda} = \Lambda$, es decir, Λ es cerrado.

Probemos que Λ es un subgrupo.

Cerradura:

Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda$.

Sea $x \in H$.

$$\begin{aligned} x \in H &\Rightarrow (x, \gamma_1) = 1 \text{ y } (x, \gamma_2) = 1 \\ &\Rightarrow (x, \gamma_1 + \gamma_2) = (x, \gamma_1)(x, \gamma_2) = (1)(1) = 1. \end{aligned}$$

$\therefore (x, \gamma_1 + \gamma_2) = 1$

$\therefore\ \gamma_1 + \gamma_2 \in \Lambda$.

$\therefore\ \Lambda$ es cerrado bajo la suma.

Inverso:

Sea $\gamma \in \Lambda$, entonces $\gamma \in \Gamma$.

Sea $x \in H$.

Como $\gamma \in \Gamma$, y Γ ya es un grupo, entonces $-\gamma \in \Gamma$.

Luego

$$(x, -\gamma) = (-x, \gamma),$$

como $x \in H$, y H es un subgrupo de G, entonces $-x \in H$.

Así

$$\begin{aligned} (x, -\gamma) &= (-x, \gamma) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\therefore -\gamma \in \Lambda$.

$\therefore \Lambda$ es subgrupo bajo la suma.

Por lo tanto concluimos que Λ es un subgrupo cerrado de Γ. ■

Lema 3.1.3. *Si Λ es el anulador de H, entonces H es el anulador de Λ.*

Demostración.

Sea $\hat{\Lambda}$ el anulador de Λ, es decir,

$$\hat{\Lambda} = \left\{\phi \in \hat{\Gamma} \colon \phi(\gamma) = 1, \forall \gamma \in \Lambda\right\}.$$

Por Teorema 2.8.3 el mapeo

$$\begin{array}{rccl} \alpha : & G & \to & \hat{\Gamma} \\ & x & \mapsto & \alpha(x), \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rccl} \alpha(x) : & \Gamma & \to & \mathbb{C} \\ & \gamma & \mapsto & [\alpha(x)](\gamma) = \gamma(x) \end{array}$$

es un isomorfismo y homeomorfismo.

Probemos que $\hat{\Lambda} = \alpha(H)$ y así $H \cong \hat{\Lambda}$, es decir que H será el anulador de Λ.

Sea $x \in H$.

Sea $\gamma \in \Lambda$.

$$[\alpha(x)](\gamma) = \gamma(x) = 1 \text{ (ya que } \gamma \in \Lambda \text{ y } x \in H).$$

$\therefore\ [\alpha(x)](\gamma) = 1,\ \forall\ \gamma \in \Lambda.$

$\therefore\ \alpha(x) \in \hat{\Lambda}.$

Sea $\phi \in \hat{\Lambda}$.

Entonces $\phi\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ es un caracter continuo tal que $\phi(\gamma) = 1$, para todo $\gamma \in \Gamma$.

Por ser α sobreyectiva, existe $x \in G$ tal que $\alpha(x) = \phi$.

Si $x \notin H$, entonces por la última parte de la demostración del Teorema 2.9.2 existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $\gamma(x) \neq 1$, así $[\alpha(x)](\gamma) = \gamma(x) \neq 1$, lo cual es una contradicción, ya que

$$1 = \phi(\gamma) = [\alpha(x)](\gamma) = \gamma(x) \neq 1.$$

$\therefore\ x \in H$.

$\therefore\ \hat{\Lambda} = \alpha(H) \cong H$, así H es el anulador de Λ.

■

Observación 3. *En G/H se considera la topología cociente inducida por el mapeo h.*

$\tau_{G/H} = \{W \subseteq G/H : h^{-1}(W)$ *es abierto en* $G\}$, *es decir, la topología cociente en G/H inducida por h.*

Teorema 3.1.4. Λ *y* Γ/Λ *son los grupos duales de G/H y H, respectivamente.*

Demostración.

Sea

$$\begin{array}{rccc} h: & G & \to & G/H \\ & x & \mapsto & x+H, \end{array}$$

el mapeo canónico de G sobre G/H.

Sea $\widehat{(G/H)}$ el dual de G/H, es decir

$$\widehat{(G/H)} = \{\phi\colon G/H \to \mathbb{C} \mid \phi \text{ es caracter continuo}\}.$$

Sea

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \Lambda & \to & \widehat{(G/H)} \\ & \gamma & \mapsto & \psi(\gamma), \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rccc} \psi(\gamma): & G/H & \to & \mathbb{C} \\ & h(x) & \mapsto & [\psi(\gamma)](h(x)) = \gamma(x). \end{array}$$

- Probemos que ψ es función.

  Sean $\gamma_1,\ \gamma_2 \in \Lambda$ tal que $\gamma_1 = \gamma_2$.

  Entonces para todo x en G,

$$\gamma_1(x) = \gamma_2(x)$$

$$[\psi(\gamma_1)](h(x)) = [\psi(\gamma_2)](h(x))$$

  $\therefore\ \psi(\gamma_1) = \psi(\gamma_2)$.

  Sea U abierto en $\mathbb{C}$.

  Deseamos demostrar que $\psi(\gamma)^{-1}(U) = \{x + H : [\psi(\gamma)](h(x)) = \gamma(x) \in U\}$ es abierto en G/H,

$$\begin{aligned} h^{-1}(\psi(\gamma)^{-1}(U)) &= \{x \in G : h(x) = x + H \in \psi(\gamma)^{-1}(U)\} \\ &= \{x \in G : \gamma(x) \in U\} \\ &= \gamma^{-1}(U). \end{aligned}$$

  Como γ es continua y U es abierto, entonces $\gamma^{-1}(U)$ es abierto en G. En consecuencia $\psi(\gamma)^{-1}(U)$ es abierto en G/H.

  Por lo tanto ψ es función.

- Probemos que ψ es biyectiva.

Inyectividad.

Sean $\gamma_1,\ \gamma_2 \in \Lambda$ tal que $\psi(\gamma_1) = \psi(\gamma_2)$.

Entonces para todo x en G,

$$[\psi(\gamma_1)](h(x)) = [\psi(\gamma_2)](h(x))$$
$$\gamma_1(x) = \gamma_2(x)$$

$\therefore\ \gamma_1 = \gamma_2$.

Por lo tanto ψ es inyectiva.

Sobreyectividad.

Sea $\phi \in \widehat{G/H}$.

Sea $\gamma = \phi \circ h : G \to \mathbb{C}$, aquí debemos probar que $\gamma \in \Lambda$.

Como ϕ es caracter, así es función continua, y como h es el mapeo canónico de G sobre G/H, entonces es continua.

Por lo tanto γ es continua por ser composición de funciones continuas.

Sea $x \in G$. Entonces

$$|\gamma(x)| = |\phi(h(x))| = 1 \text{ (ya que } \phi \text{ es caracter).}$$

Además

$$\gamma(x + y) = \phi(h(x + y)) = \psi(h(x) + h(y)) = [\phi(h(x))][\phi(h(y))] = \gamma(x)\gamma(y).$$

Por lo tanto $\gamma \in \Gamma$.

Por otra parte para todo $x \in H$, $x + H = H = h(0)$, así

$$\gamma(x) = \phi(h(0)) = \phi(\bar{0}) = 1.$$

$\therefore \gamma \in \Lambda$.

Sea $x + H \in G/H$. Entonces

$$\begin{aligned} [\psi(\gamma)](h(x)) &= \gamma(x) \\ &= (\phi \circ h)(x) \\ &= \phi(h(x)) \\ &= \phi(x + H) \end{aligned}$$

$\therefore [\psi(\gamma)](x + H) = \phi(x + H)$, $\forall x + H \in G/H$.

$\therefore \psi(\gamma) = \phi$.

Por lo tanto ψ es sobreyectiva.

- Probemos que ψ es un homomorfismo de grupos.

  Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda$ y $h(x) \in G/H$.

$$\begin{aligned} [\psi(\gamma_1 + \gamma_2)](h(x)) &= (\gamma_1 + \gamma_2)(x) \\ &= \gamma_1(x)\gamma_2(x) \\ &= [\psi(\gamma_1)](h(x))[\psi(\gamma_2)](h(x)) \\ &= [\psi(\gamma_1)](h(x)) + [\psi(\gamma_2)](h(x)) \\ &= [\psi(\gamma_1) + \psi(\gamma_2)](h(x)) \end{aligned}$$

$\therefore\ \psi(\gamma_1 + \gamma_2) = \psi(\gamma_1) + \psi(\gamma_2)$.

$\therefore$ ψ es homomorfismo de grupos.

- Probemos que ψ es homeomorfismo de espacios topológicos.

Debemos probar que ψ y ψ^{-1} son continuas.

Probemos primero que ψ es continua.

A cada conjunto compacto C_1 en G/H le corresponde un conjunto compacto C_2 en G tal que $C_1 = h(C_2)$, ya que h es un mapeo abierto continuo.

Sea $N(C_1, r) = \{\phi \ : \ |1 - (h(x), \phi)| < r \ \forall h(x) \in C_1\}$ un abierto en $\widehat{(G/H)}$.

Debemos probar que $\psi^{-1}(N(C_1, r))$ es abierto en Λ.

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}(N(C_1, r)) &= \{\gamma \in \Lambda : \psi(\gamma) \in N(C_1, r)\} \\
&= \{\gamma \in \Lambda : |1 - (h(x), \psi(\gamma))| < r \ \ \forall h(x) \in C_1\} \\
&= \{\gamma \in \Lambda : |1 - (x, \gamma)| < r \ \ \forall x \in C_2\} \\
&= \{\gamma : |1 - (x, \gamma)| < r \ \ \forall x \in C_2\} \cap \Lambda \\
&= N(C_2, r) \cap \Lambda.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\psi^{-1}(N(C_1, r))$ es la intersección de un conjunto abierto de Λ y el mismo Λ.

$\therefore$ $\psi^{-1}(N(C_1, r))$ es abierto en Λ.

$\therefore$ ψ es continua.

Probemos que ψ^{-1} es continua.

Sea $U = N(C_2, r) \cap \Lambda$ un abierto en Λ.

Queremos probar que $(\psi^{-1})^{-1}(U)$ es abierto en $\widehat{(G/H)}$.

$$
\begin{aligned}
(\psi^{-1})^{-1}(U) &= \{\phi \in \widehat{(G/H)} : \psi^{-1}(\phi) \in N(C_2, r) \cap \Lambda\} \\
&= \{\phi \in \widehat{(G/H)} : \psi^{-1}(\phi) \in N(C_2, r) \wedge \psi^{-1}(\phi) \in \Lambda\} \\
&= \{\phi \in \widehat{(G/H)} : \left|1 - (x, \psi^{-1}(\phi))\right| < r \ \forall x \in C_2 \ \wedge \ \psi^{-1}(\phi) \in \Gamma\} \\
&= \{\phi \in \widehat{(G/H)} : |1 - (x, \gamma)| < r \ \ \forall \ x \in C_2 \ \wedge \ \gamma \in \Gamma\} \\
&= \{\phi \in \widehat{(G/H)} : |1 - (h(x), \psi(\gamma)| < r \ \ \forall \ h(x) \in C_1\} \\
&= \{\phi \in \widehat{(G/H)} : |1 - (h(x), \phi)| < r \ \ \forall \ h(x) \in C_1\} \\
&= N(C_1, r) \text{ abierto en } \widehat{(G/H)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(\psi^{-1})^{-1}(U)$ es abierto en $\widehat{(G/H)}$.

$\therefore \psi^{-1}$ es continua.

$\therefore \psi$ es un homeomorfismo.

$\therefore$ Λ es isomorfo y homeomorfo al dual de G/H.

$\therefore$ Λ es el dual de G/H.

Probemos que Γ/Λ es el dual de H.

Si $G_0 = \Gamma$ y $H_0 = \Lambda$, y si Λ_0 es el anulador de H_0 y Γ_0 el dual de G_0, entonces por lo que ya probamos Λ_0 es el dual de G_0/H_0, pero por el Lema 3.1.3 se tiene que $\Lambda_0 = H$, pues Λ_0 es el anulador de $H_0 = \Lambda$.

Por lo tanto H es el dual $G_0/H_0 = \Gamma/\Lambda$.

Por lo tanto $G_0/H_0 = \Gamma/\Lambda$ es el dual de H por el Teorema de Dualidad de Pontryagin 2.8.3.

■

Teorema 3.1.5. *Si H es un subgrupo cerrado de G, cada caracter continuo en H puede ser extendido a un caracter continuo en G.*

Demostración.

Sea ϕ un caracter continuo en H, entonces $\phi \in \widehat{H}$, pero por Teorema anterior 3.1.4, Γ/Λ es el dual de H, es decir, la función $\psi : \Gamma/\Lambda \to \widehat{H}$ dada por $\psi(\gamma' + \Lambda) = \gamma'|_H$ es isomorfismo y homeomorfismo. Entonces existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $\psi(\gamma + \Lambda) = \phi$, es decir, $\gamma_H = \phi$.

En consecuencia γ sería la extensión de ϕ. ■

3.2. Suma Directa

Recordemos que el toro $\mathbb{T}$ se define como:

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

donde su relación de equivalencia está dada por:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x - y = 2\pi k.$$

Entonces los elementos del toro $\mathbb{T}$ tienen forma

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} : y = x + 2\pi k\} = x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Así, **el toro $\mathbb{T}$ de dimensión n** se define como:

$$\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{T} \oplus \cdots \oplus \mathbb{T}}_{n-\text{veces}} = \underbrace{\mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \cdots \times \mathbb{T}}_{n-\text{veces}}.$$

Sabemos que el toro $\mathbb{T}$ es isomorfo a la 1-esfera; es decir,

$$\mathbb{T} \cong \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Definición 3.2.1. *Las nociones de suma directa y suma directa completa de grupos ALC están definidas en 1.2.10. La suma directa de G_1 y G_2 será denotada por $G_1 \oplus G_2$, y la suma directa de n veces G será denotada por G^n, En particular, $\mathbb{T}^n$ es el toro n-dimensional, y $\mathbb{Z}^n$ es el grupo de todos los puntos retículo en $\mathbb{R}^n$, es decir, el grupo de todos los puntos en $\mathbb{R}^n$ con coordenadas integrales.*

Teorema 3.2.2. *Si $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$ y si Γ_i es el grupo dual de G_i $(1 \leq i \leq n)$, entonces $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_n$.*

Demostración.

Sea $\gamma \in \Gamma$.

Entonces $\gamma : G \to \mathbb{C}$ es un caracter continuo.

Sea $x \in G = G_1 \oplus G_2$, entonces $x = (x_1, x_2)$. Definamos $\gamma_1 : G_1 \to \mathbb{C}$ por $\gamma_1(x_1) = \gamma((x_1, 0))$ y definamos $\gamma_2 : G_2 \to \mathbb{C}$ por $\gamma_2(x_2) = \gamma((0, x_2))$.

Probemos que $\gamma_1 \in \Gamma_1$.

Sea x_1 en G_1.

Como γ es continua, así γ_1 es continua.

$$\begin{aligned} |\gamma_1(x_1)| &= |\gamma(x_1, 0)| \\ &= 1; \text{ ya que } \gamma \text{ es un caracter.} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\gamma_1(x_1 + y_1) &= \gamma(x_1 + y_1, 0).\\ &= \gamma[(x_1, 0) + (y_1, 0)].\\ &= \gamma(x_1, 0)\gamma(y_1, 0);\ \text{ ya que } \gamma \text{ es caracter}\\ &= \gamma_1(x_1)\gamma_1(y_1)\end{aligned}$$

$\therefore\ \gamma_1 \in \Gamma_1$.

Probemos que $\gamma_2 \in \Gamma_2$.

Sea x_2 en G_2.

Como γ es continua, así γ_2 es continua.

$$\begin{aligned}|\gamma_2(x_2)| &= |\gamma(0, x_2)|\\ &= 1;\ \text{ ya que } \gamma \text{ es un caracter.}\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\gamma_2(x_2 + y_2) &= \gamma(0, x_2 + y_2).\\ &= \gamma[(0, x_2) + (0, y_2)].\\ &= \gamma(0, x_2)\gamma(0, y_2);\ \text{ ya que } \gamma \text{ es caracter}\\ &= \gamma_2(x_2)\gamma_2(y_2)\end{aligned}$$

$\therefore\ \gamma_2 \in \Gamma_2$.

Así,

$$\gamma(x) = \gamma(x_1, x_2) = \gamma[(x_1, 0) + (0, x_2)] = \gamma(x_1, 0)\gamma(0, x_2) = \gamma_1(x_1)\gamma_2(x_2) = (\gamma_1 + \gamma_2)(x_1, x_2). \quad (1)$$

$\therefore \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

$\therefore \Gamma \subseteq \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Sean $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$.

Entonces $\gamma_1 : G_1 \to \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : G_2 \to \mathbb{C}$. Estas funciones se pueden considerar de la forma $\gamma_1 : G \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_1(x_1, x_2) = \gamma_1(x_1)$, y $\gamma_2 : G \to \mathbb{C}$ dado por $\gamma_2(x_1, x_2) = \gamma_2(x_2)$.

Se debe demostrar que $\gamma_1 + \gamma_2 : G \to \mathbb{C}$ dado por

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x_1, x_2) = \gamma_1(x_1)\gamma_2(x_2),$$

es caracter en G, es decir, $\gamma_1 + \gamma_2 \in \Gamma$.

Sea $x \in G$.

Como γ_1 y γ_2 son continuas, así $\gamma_1 + \gamma_2$ es continua.

$$\begin{aligned} |(\gamma_1 + \gamma_2)(x_1, x_2)| &= |\gamma_1(x_1)\gamma_2(x_2)| \\ &= |(1)(1)| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Sean $x, y \in G$, donde $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$.

$$\begin{aligned}
[\gamma_1 + \gamma_2](x + y) &= [\gamma_1 + \gamma_2]((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\
&= [\gamma_1 + \gamma_2]((x_1 + y_1, x_2 + y_2)) \\
&= \gamma_1(x_1 + y_1)\gamma_2(x_2 + y_2) \\
&= \gamma_1(x_1)\gamma_1(y_1)\gamma_2(x_2)\gamma_2(y_2) \\
&= [\gamma_1(x_1)\gamma_2(x_2)][\gamma_1(y_1) + \gamma_2(y_2)] \\
&= (\gamma_1 + \gamma_2)(x_1, x_2)(\gamma_1 + \gamma_2)(y_1, y_2) \\
&= (\gamma_1 + \gamma_2)(x)(\gamma_1 + \gamma_2)(y).
\end{aligned}$$

Así $\gamma_1 + \gamma_2 \in \Gamma$.

$\therefore \Gamma_1 + \Gamma_2 \subseteq \Gamma$.

$\therefore \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Probemos que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Sea $\gamma \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Como $\gamma \in \Gamma_1$, así $\gamma((x_1, x_2)) = \gamma(x_1)$ pero como también $\gamma \in \Gamma_2$, entonces $\gamma((x_1, x_2)) = \gamma(x_2)$. Por otra parte al ser γ un caracter, se tiene que $\gamma((x_1, x_2)) = \gamma(x_1)\gamma(x_2)$, entonces $\gamma(x_1) = 1$ y $\gamma(x_2) = 1$.

$\therefore \gamma((x_1, x_2)) = 1$ para todo $x_1 \in G_1$ y todo $x_2 \in G_2$.

$\therefore \gamma = \mathbf{0}$.

$\therefore \Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$.

Como cada $\gamma \in \Gamma$ está determinado por su acción en los subgrupos G_1 y G_2, (1) prueba que Γ es algebraicamemte la suma directa de Γ_1 y Γ_2. Ya que Γ_1 y Γ_2 son los anuladores de G_2 y G_1, ellos son subgrupos cerrados de Γ, y como Γ es así algebraicamente la suma directa de dos de sus subgrupos cerrados, la topología de Γ es idéntica con la topología producto de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. ■

Corolario 3.2.3. $\mathbb{R}^n$ *es su propio dual;* $\mathbb{T}^n$ *y* $\mathbb{Z}^n$ *son los duales el uno del otro.*

Demostración.

Probemos que $\mathbb{R}^n$ es su propio dual.

Por Ejemplo 2.2.1 tenemos que $\mathbb{R}$ es su propio dual, además por el Teorema anterior 3.2.2 concluimos que $\mathbb{R}^n$ es su propio dual.

Probemos que $\mathbb{T}^n$ es el dual de $\mathbb{Z}^n$.

Por Ejemplo 2.2.3 sabemos que $\mathbb{T}$ es el dual de $\mathbb{Z}$ y por el Teorema anterior 3.2.2 concluimos que $\mathbb{T}^n$ es el dual de $\mathbb{Z}^n$.

Probemos que $\mathbb{Z}^n$ es el dual de $\mathbb{T}^n$.

Por Ejemplo 2.2.2 sabemos que $\mathbb{Z}$ es el dual de $\mathbb{T}$, luego por el Teorema anterior 3.2.2 concluimos que $\mathbb{Z}^n$ es el dual de $\mathbb{T}^n$. ■

Teorema 3.2.4. *Si G es la suma directa completa de una familia $\{G_\alpha\}$ de grupos abelianos compactos, entonces Γ es la suma directa de los grupos duales correspondientes Γ_α.*

Demostración.

Cada $x \in G$ puede ser considerado como una cadena

$$x = (\cdots, x_\alpha, \cdots), \tag{2}$$

el grupo que opera es la adición de componentes puntuales. Si

$$\gamma = (\cdots, \gamma_\alpha, \cdots), \tag{3}$$

con un número finito $\gamma_\alpha \neq 0$, entonces γ es un caracter continuo en G, definido por

$$(x, \gamma) = \prod_\alpha (x_\alpha, \gamma_\alpha), \tag{4}$$

ya que cada factor en este producto es un caracter continuo en G y solo un número finito de factores son diferentes de 1.

Por el contrario, para cada índice α, Γ_α es el dual del subgrupo G_α de G que consiste en todos los elementos de la forma $(\cdots, 0, 0, x_\alpha, 0, 0, \cdots)$. Se sigue que cada $\gamma \in \Gamma$ es de la forma (3), y que (x, γ) está dado por (4). Queda por demostrar que sólo un número finito γ_α puede ser diferente de $\mathbf{0}$ para cualquier γ.

Supongamos que hay infinitos γ_α diferentes de $\mathbf{0}$ en (3), y sea V un entorno de 0 en G. La definición de la topología producto prueba que V restringe sólo un número finito de las coordenadas de x_α. Por lo tanto, existe α tal que $\gamma_\alpha \neq 0$ y $V \supset G_\alpha$. Entonces

$$\gamma(V) \supset \gamma(G_\alpha) = \gamma_\alpha(G_\alpha),$$

que es un subgrupo no trivial de el círculo $\mathbb{T}$, ya que $\gamma_\alpha \colon G_\alpha \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo de grupos tal que $|\gamma_\alpha(x_\alpha)| = 1$, porque es subgrupo no trivial.

Se sigue que $\gamma(G_\alpha)$ no está contenido en $\{z : |1 - z| < 1\}$, así $\gamma(V)$ tampoco estaría contenido.

Para todo $V \in \tau_G$, tal que $0 \in V$, $\gamma(V) \nsubseteq B(1, 1)$, como $\gamma : G \to \mathbb{C}$ es continua y $B(1, 1)$ es abierto en $\mathbb{C}$. Entonces $V = \gamma^{-1}(B(1, 1))$ es abierto en G.

$\gamma(0) = 1 \in B(1,1)$, así $0 \in \gamma^{-1}(B(1,1)) = V$, pero

$$\gamma(V) = \gamma(\gamma^{-1}(B(1,1))) \subseteq B(1,1)$$

lo cual es una contradicción y como V fué tomado arbitrariamente, se contradice la continuidad de γ. ■

Definición 3.2.5. *Sea q un entero, $q \geq 2$, y sea Γ la suma directa de un número contable de copias del grupo cíclico $\mathbb{Z}_q$ de orden q. Su dual G es compacto, es la suma completa de un número contable de copias de $\mathbb{Z}_q$, por Teorema 3.2.4 (ya que $\mathbb{Z}_q$ es su propio dual), y es homeomorfo al conjunto de Cantor. Denotaremos este grupo G por D_q*

Ejemplo 3.2.1. *Un ejemplo interesante es el toro infinito-dimensional $\mathbb{T}^\omega$, la suma directa completa de un número contable de copias de $\mathbb{T}$. Su dual es la suma directa $\mathbb{Z}^\infty$ de un número contable de copias de $\mathbb{Z}$.*
Las funciones en $\mathbb{T}^\omega$ pueden ser consideradas como funciones periódicas en un número contable de variables.
Si $f \in L^1(\mathbb{T}^\omega)$, entonces

$$\hat{f}(n_1, n_2, \cdots) = \int_{\mathbb{T}^\omega} f(x_1, x_2, \cdots) e^{(-i \sum n_k x_k)} dx,$$

donde sólo un número finito de los enteros n_k son diferentes de 0, y los x_k son números reales módulo 2π. La fórmula de inversión tiene la forma

$$f(x_1, x_2, \cdots) = \sum \hat{f}(n_1, n_2, \cdots) e^{(i \sum n_k x_k)}.$$

$\mathbb{T}^\omega$ es metrizable , y es, en efecto un grupo abeliano compacto metrizable universal:

Teorema 3.2.6. *En la clase de todos los grupos abelianos compactos G, las tres propiedades siguientes son equivalentes:*

(a) G es metrizable.

(b) Γ es contable.

(c) G es un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}^{\omega}$.

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Si G es metrizable, entonces $C(G)$ es separable (Proposición 1.1.49).

Razonemos por contradicción.

Sea Γ no contable.

Sea $B\left(\gamma_i, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ la colección de bolas centradas en γ_i y de radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$, con γ_i en Γ.

Sea M un conjunto denso en $C(G)$.

Si $\gamma_1 \neq \gamma_2$ $\ (\gamma_i \in \Gamma)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty^2 \geq \int_G |\gamma_1(x) - \gamma_2(x)|^2 dx &= \int_G (\gamma_1(x) - \gamma_2(x))\overline{(\gamma_1(x) - \gamma_2(x))} dx \\
&= \int_G |\gamma_1(x)|^2 dx - 2\int_G \mathrm{Re}(\gamma_1(x)\overline{\gamma_2(x)}) dx + \int_G |\gamma_2(x)|^2 dx \\
&= 2 + 2\mathrm{Re}\int_G \gamma_1(x)\overline{\gamma_2(x)} dx \\
&= 2 + 2\mathrm{Re}\int_G \gamma_1(x)[-\gamma_2(x)] dx \\
&= 2 + 2\mathrm{Re}\int_G (\gamma_1 + (-\gamma_2))(x) dx \\
&= 2 + 2\mathrm{Re}\int_G (\gamma_1 - \gamma_2)(x) dx \\
&= 2 + 2\mathrm{Re}\int_G 0\, dx, \ \text{por (24)} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Hemos probado que la distancia entre γ_1 y γ_2 es mayor o igual que 2, entonces las bolas $B\left(\gamma_i, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ son disjuntas. Como M es denso, entonces M interseca a las bolas con centro en γ_i y de radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Así M contendría un elemento diferente en cada bola.

Como Γ es no contable, entonces la colección de bolitas es no contable.

Como M es un denso cualquiera, entonces M es no contable lo que contradice el hecho que $C(G)$ es separable.

Por lo tanto, si G es metrizable, entonces Γ es contable.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Sea $\mathbb{Z}^\infty = \oplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$.

$\Gamma = \{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Sea $\psi : \mathbb{Z}^\infty \to \Gamma$ definido por

$$\psi(n_1, n_2, n_3, ...) = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + n_3\gamma_3 + \cdots$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\psi((n_1, n_2, \ldots) + (m_1, m_2, \ldots)) &= \psi(n_1 + m_1, n_2 + m_2, \ldots) \\
&= (n_1 + m_1)\gamma_1 + (n_2 + m_2)\gamma_2 + \cdots \\
&= (n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \cdots) + (m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + \cdots) \\
&= \psi(n_1, n_2, ...) + \psi(m_1, m_2, ...)
\end{aligned}$$

$\Gamma = \mathbb{Z}^\infty / \ker\psi$.

Tomar a $G = \mathbb{Z}^\infty$ y $H = \ker\psi$ en el Teorema 3.1.4 y obtendríamos que Γ es el dual del $\Lambda(\ker\psi)$. Entonces $\Gamma = \widehat{\Lambda}(\ker\psi)$. Luego $G = \Lambda(\ker\psi)$, pero $\Delta(\ker\psi)$ es un subgrupo cerrado de

$\mathbb{T}^{\omega}$. Por lo tanto G es isomorfo y homeomorfo a un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}^{\omega}$, y así G es subgrupo cerrado de $\mathbb{T}^{\omega}$.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Como el dual de $\mathbb{T}^{\omega}$ es contable, por Proposición 2.5.5 los polinomios trigonométricos en $\mathbb{T}^{\omega}$ son densos en $C(\mathbb{T}^{\omega})$, y por lo tanto $C(\mathbb{T}^{\omega})$ es separable y $\mathbb{T}^{\omega}$ es metrizable por Proposición 1.1.49. Así G es metrizable por ser un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}^{\omega}$. ■

3.3. Grupos Monotéticos

Definición 3.3.1. *Un grupo topológico G es llamado* ***monotético*** *si tiene un subgrupo denso que es una imagen homomórfica de $\mathbb{Z}$. En otras palabras G es monotético si existe un homomorfismo $h : \mathbb{Z} \to G$ tal que $G = \overline{h(\mathbb{Z})}$.*

Denotemos $x_n = h(n)$. Como h es un homomorfismo, entonces

$$x_{n+m} = h(n+m) = h(n) + h(m) = x_n + x_m.$$

Luego, $G = \overline{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}}$, donde $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \{nx_1 : n \in \mathbb{Z}\}$,

$$nx_1 = \underbrace{x_1 + \cdots + x_1}_{n\ veces} = x_n.$$

Teorema 3.3.2. *Sea G un grupo ALC monotético. Si G no es compacto, entonces $G = \mathbb{Z}$.*

Demostración.

Desarrollaremos la prueba en dos pasos:

(a) Probar que G es discreto.

(b) Probar que si G es discreto, entonces $G = \mathbb{Z}$.

a) Probar que G es discreto.

Razonemos por contradicción, supongamos que G no es discreto.

Sea V un entorno simétrico abierto de 0 en G, con clausura compacta $\overline{V}$.

Si $y \in G$, entonces $y \in x_k + V$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Probemos este hecho.

$y + V$ es un abierto que contiene a $y = y + 0 \in y + V = \{y + z : z \in V\}$.

Pero $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es denso en G, así $(y + V) \cap (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \neq \emptyset$. Por lo tanto existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_k \in y + V$, entonces $x_k = y + v$, $v \in V$, luego $y = x_k - v \in x_k + V$ ya que V es simétrico, es decir, que si $v \in V$, entonces $-v \in V$.

Por lo tanto $y \in x_k + V$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Ya que $\{x_n\}$ es el subconjunto denso de G descrito en la definición 3.3.1, y por ser G un grupo ALC existe un entorno simétrico W de 0 en G tal que $y - x_k + W \subset V$.

Como G no es discreto, probemos que W contiene infinitos puntos x_n.

Razonando por contradicción, supongamos que W sólo contiene un número finito y digamos que son

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_r},$$

con $x_{n_i} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, r$.

Como G es Hausdorff, entonces existen abiertos disjuntos W_i, V_i tales que $0 \in W_i$ y $x_{n_i} \in V_i$.

Sea $U = W \cap \cap_{i=1}^r W_i$. Luego $x_{n_i} \notin U$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Entonces

$$U \cap ((x_n)_{n\in\mathbb{Z}} - \{0\}) = \emptyset.$$

$\therefore 0 \notin \overline{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}} = G$. Lo cual es absurdo.

Y ya que W es simétrico, $x_{-n} \in W$ si $x_n \in W$. Por lo tanto, existe $j < k$ tal que $x_j \in W$. Sea $i = k - j$, tenemos que $i > 0$, y

$$y - x_i = y - x_{k-j} = y - x_k + x_j \ \in y - x_k + W \subset V.$$

Esto prueba que

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i + V); \tag{5}$$

es suficiente tomar subíndices positivos en (5).

Como $\overline{V}$ es compacto, (5) prueba que

$$\overline{V} \subset \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + V), \tag{6}$$

para algún entero N. Para $y \in G$, sea $n = n(y)$ el entero positivo más pequeño tal que $y \in x_n + \overline{V}$. Entonces $x_n - y \in x_i + V$ para algún i $(1 \leq i \leq N)$, por (6), así que $y \in x_{n-i} + V$. Como $i > 0$, $n - i < n$, y así $n - i \leq 0$, por nuestra elección de n. Así $n \leq i \leq N$ para todo $y \in G$, y así

$$G = \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + \overline{V}), \tag{7}$$

es una unión de conjuntos compactos.

Por lo tanto G es compacto, lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto, lo supuesto es falso y así G debe ser discreto.

(b) Probar que si G es discreto, entonces $G = \mathbb{Z}$.

Supongamos que G es discreto. Entonces $G = \overline{h(\mathbb{Z})} = h(\mathbb{Z}) = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, ya que en un espacio topológico discreto todo conjunto es abierto y cerrado. Sólo debemos probar que h es inyectiva, entonces tendríamos que $\mathbb{Z}$ es isomorfo a G.

Probemos que h es inyectiva.

Supongamos que h no es inyectiva. Entonces existen $n, m \in \mathbb{Z}$ con $n \neq m$ tales que $h(n) = h(m)$, así $x_n = x_m$. Pero $nx_1 = mx_1$, así $|n - m|x_1 = 0$.

Sea $N = \text{mín}\{n > 0 : nx_1 = 0\} = Orden(x_1)$. Entonces

$$h(\mathbb{Z}) = \{0, x_1, x_2, ..., x_{N-1}\}.$$

Por lo tanto $G = \{0, x_1, x_2, ..., x_{N-1}\}$, así G es compacto, lo cual contradice la hipótesis general que G no es compacto.

Por lo tanto h es inyectiva y así h es un isomorfismo entre $\mathbb{Z}$ y G.

También h es homeomorfismo entre $\mathbb{Z}$ y G, ya que G y $\mathbb{Z}$ son discretos.

Por lo tanto h es un isomorfismo y homeomorfismo entre $\mathbb{Z}$ y G, es decir, $G = \mathbb{Z}$ ■

Los grupos monotéticos compactos tienen una caracterización simple en términos de sus duales:

Teorema 3.3.3. *Un grupo abeliano compacto G es monotético si y solo si su dual* Γ *es un subgrupo de* $\mathbb{T}_d$*, el grupo circular con la topología discreta.*

Demostración.

“ $\Rightarrow$”

Sea $\psi : \Gamma \to \mathbb{T} = \mathbb{S}^1$ definido por

$$\psi(\gamma) = \gamma(x_1).$$

Probemos que ψ es homomorfismo.

Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$.

$$\begin{aligned}\psi(\gamma_1 + \gamma_2) &= (\gamma_1 + \gamma_2)(x_1)\\ &= \gamma_1(x_1)\gamma_2(x_1)\\ &= \psi(\gamma_1)\psi(\gamma_2)\end{aligned}$$

$\therefore$ ψ es un homomorfismo.

Probemos que ψ es inyectivo.

Sea $\gamma \in \ker\psi$. Entonces $\gamma(x_1) = 1$, pero

$$\gamma(x_n) = \gamma(\underbrace{x_1 + \cdots + x_1}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{\gamma(x_1)\cdots\gamma(x_1)}_{n \text{ veces}} = 1.$$

Luego la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \{x \in G : \gamma(x) = 1\}$.

Probemos que $C = \{x \in G : \gamma(x) = 1\}$ es cerrado en G.

Como $C = \{x \in G : \gamma(x) = 1\} = \gamma^{-1}(\{1\})$ y γ es continua, así γ^{-1} es cerrado, ya que la imagen inversa de cualquier cerrado, es cerrado.

Por lo tanto C es cerrado en G.

Se sigue que $G = \overline{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}} \subseteq \overline{C} = C$, así $G = C$ y entonces $\gamma(x) = 1$ para todo $x \in G$.

$\therefore$ $\gamma = \mathbf{0}$.

$\therefore$ $\ker\psi = \{\mathbf{0}\}$, así ψ es inyectiva y por lo tanto $\Gamma \cong \psi(\Gamma)$, pero $\psi(\Gamma)$ es un subgrupo de $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1$.

En conclusión Γ es subgrupo de $\mathbb{T}$.

Como G es compacto, entonces Γ es discreto por Teorema 2.2.7, así Γ es subgrupo de $\mathbb{T}_d$.

“ $\Leftarrow$”

Si Γ es un subgrupo de $\mathbb{T}_d$, entonces G es un subgrupo cociente del dual de $\mathbb{T}_d$ (por Teorema 3.1.4), es decir, de la Compactificación de Bohr $\overline{\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Z}$. Como $\overline{\mathbb{Z}}$ es monotético, así también lo es su imagen homomórfica continua en G. ■

3.4. El Teorema de Estructura Principal

Lema 3.4.1. *Si G es generado por un entorno compacto V de 0, entonces G contiene un subgrupo cerrado (isomorfo a) $\mathbb{Z}^n$, para algún $n \geq 0$, tal que $G/\mathbb{Z}^n$ es compacto, y tal que $V \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$.*

Demostración.

Sin perdida de generalidad, asumamos que V es simétrico.

Sean $V_1 = V, \;\; V_{n+1} = V_n + V$.

Probemos que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

Debemos probar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ es un subgrupo de G que contiene a V,

Probemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ es cerrado bajo la suma.

Sea $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Entonces $x \in V_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, así $x = v_1 + \cdots + v_m$, donde $v_i \in V$, para todo $i = 1, ..., m$.

Si $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$, entonces $y \in V_s$, $y = v_1' + \cdots + v_s'$, donde $v_i' \in V$.

Luego $x + y = v_1 + \cdots + v_m + v_1' + \cdots + v_s' \in V_{m+s} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

Por lo tanto $x + y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

$\therefore \; \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ es cerrado bajo la suma.

Probemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ tiene inverso.

Como V es simétrico, si $x \in V$, entonces $-x \in V$.

Si $-x \in V$, entonces $-x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

$\therefore \; \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ tiene inverso.

Por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ es un subgrupo de G, pero como G es generado por V, entonces por definición de grupo generado no hay un subgrupo propio de G que contenga a V, entonces $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

Notemos que $V \subset V_2$.
Como $V_2 = V + V$, con V compacto, entonces $V + V$ es compacto por definición 1.2.6.
Como V_2 es compacto, existen $x_1, \cdots, x_p \in G$ tal que $V_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + V)$. Sea H el grupo generado por $x_1, \cdots, x_p$. Asumiendo que $V_n \subset V + H$ (que es trivial para $n = 1$ y valido para $n = 2$, por nuestra elección de $x_1, \cdots, x_p$), tenemos

$$V_{n+1} \subset V + V + H = V_2 + H \subset V + H + H = V + H;$$

por inducción, $V_n \subset V + H, \ \forall\, n \geq 1$, y así $G = V + H$.

Como H_i es el generado por x_i, y H es el generado por $x_1, ..., x_p$, entonces

$$H = H_1 + H_2 + \cdots + H_p.$$

Además, si cada $\overline{H_i}$ es compacto, entonces $\overline{H_1} + \cdots + \overline{H_p}$ sería compacto y como G es un espacio de Hausdorff, entonces $\overline{H_1} + \cdots + \overline{H_p}$ es un conjunto cerrado que contiene a $H_1 + \cdots + H_p = H$, por Proposición 1.1.18.
Luego $\overline{H} \subseteq \overline{H_1} + \cdots + \overline{H_p}$.
Por lo tanto $\overline{H}$ es un conjunto cerrado contenido en el compacto $\overline{H_1} + \cdots + \overline{H_p}$, así $\overline{H}$ sería compacto, por Proposición 1.1.17, por lo tanto $G = V + \overline{H}$ es compacto.
Entonces el conjunto $\{0\}$ sería un subgrupo cerrado de G que es isomorfo a $\mathbb{Z}^0 = \{0\}$. Además $G/\mathbb{Z}^0 = G/\{0\} = G$ es compacto, además $V \cap \mathbb{Z}^0 = V \cap \{0\} = \{0\}$.
Por lo tanto el Lema es cierto para $n = 0$.
Si G no es compacto, entonces $\overline{H_i}$ no es compacto para algún $i = 1, ..., p$. Como H_i es generado por

x_i, así

$$H_i = \{\ldots, -2x_i, -x_i, 0, x_i, 2x_i, 3x_i, ...\} = \{nx_i : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Definamos un homomorfismo $h : \mathbb{Z} \to \overline{H_i}$ por $h(n) = nx_i$, y como $H_i = h(\mathbb{Z})$, así $\overline{H_i} = \overline{h(\mathbb{Z})}$ y por lo tanto $\overline{H_i}$ es un grupo monotético.

Como G es ALC, así $\overline{H_i}$ es ALC porque es un subconjunto cerrado de G. Luego por Teorema 3.3.2 se tiene que $\overline{H_i} = \mathbb{Z}$. Luego $\overline{H_i} = H_i$ y así H_i sería un subgrupo cerrado cíclico infinito de G y por lo tanto se ha demostrado lo siguiente:

$(*)\left\{\right.$ *Si $G = V + H$, donde H es un grupo finitamente generado, y si G no es compacto, entonces H contiene un subgrupo cerrado cíclico infinito de G. En otras palabras H contiene un subgrupo homeomorfo e isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Como H es finitamente generado y cada subgrupo de un grupo con p generadores es generado por un número de generadores menor o igual a p, entonces por $(*)$ sabemos que existe un subgrupo cerrado de H que es isomorfo y también a homeomorfo a $\mathbb{Z}^n$ para $n = 1$. Tomemos el n más grande tal que H posee un subgrupo cerrado que es isomorfo y también homeomorfo a $\mathbb{Z}^n$, este número n sería menor o igual a p ya que los subgrupos de H tendría un número de generadores menor o igual a p. Sea H' el subgrupo cerrado de H que es isomorfo y homeomorfo a $\mathbb{Z}^n$.

Como H' es discreto y V es compacto, entonces V es cerrado. Entonces $H' \cap V$ es cerrado ya que H' es cerrado, pero todo cerrado contenido en un compacto es compacto y como $H' \cap V$ es cerrado contenido en el compacto V, así $H' \cap V$ es compacto. Por otra parte, $H' \cap V$ está contenido en el espacio discreto H', y como los únicos conjuntos compactos en un espacio topológico discreto son los conjuntos finitos, así $H' \cap V$ es finito.

Supongamos que $H' \cap V = \{a_1, ..., a_t\}$ para algún $t \in \mathbb{N}$. Como H' es finitamente generado, supongamos que es generado por $x_1, ..., x_n$ con $n \leq p$. Entonces

$$\begin{aligned}
a_1 &= m_1^{(1)} x_1 + m_2^{(1)} x_2 + \cdots + m_n^{(1)} x_n \\
a_2 &= m_1^{(2)} x_1 + m_2^{(2)} x_2 + \cdots + m_n^{(2)} x_n \\
&\vdots \\
a_t &= m_1^{(t)} x_1 + m_2^{(t)} x_2 + \cdots + m_s^{(t)} x_n
\end{aligned}$$

donde $m_j^{(i)} \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 1, ..., t$ y todo $j = 1, ..., n$.

Sea $N = \text{máx}\{|m_j^{(i)}| : i = 1, ..., t;\ \ j = 1, ..., n\}$. Sea $R = N + 1$, entonces $-(R-1) \leq m_j^{(i)} \leq R - 1$, así

$$H' \cap V \subset \{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n : -(R-1) \leq k_i \leq R - 1,\ i = 1, ..., n\}.$$

Sea H'' el generado por $Rx_1, Rx_2, ..., Rx_n$, de esta forma $H'' \cap V = \{0\}$ y H'' sería también isomorfo y homeomorfo a $\mathbb{Z}^n$.

Sea $f : G \to G/H''$ la proyección canónica, es decir, $f(x) = x + H''$.

Luego $G/H'' = f(V) + f(H)$ ya que $G = V + H$.

Probemos que $f(H)$ no posee un subgrupo cerrado que sea isomorfo y también homeomorfo a $\mathbb{Z}$.

Razonando por contradicción, supongamos que sí existe un subgrupo K de $f(H)$ que sea isomorfo y también homeomorfo a $\mathbb{Z}$.

Entonces $f^{-1}(K)$ sería un subgrupo de H que es isomorfo y homeomorfo a $\mathbb{Z}^{n+1}$ lo cual sería absurdo por como se eligió a n.

Por lo tanto $f(H)$ no posee un subgrupo cerrado que sea isomorfo y también homeomorfo a $\mathbb{Z}$. Luego por $(*)$ se tendría que G/H'' es compacto.

Por lo tanto H'' es un subgrupo cerrado de G isomorfo y homeomorfo a $\mathbb{Z}^n$ tal que $G/\mathbb{Z}^n = G/H''$ es compacto y $V \cap \mathbb{Z}^n = V \cap H'' = \{0\}$. ■

Teorema 3.4.2. *Todo subgrupo generado por un entorno de* 0 *es abierto.*

Demostración.

Sea V un entorno de 0. Sea H el subgrupo generado por V.

Sea $x \in H$.

Como V es entorno de 0, así existe un abierto V' en G tal que $0 \in V' \subset V$.

Sea $v \in V'$. Entonces $v \in H$ ya que H es el subgrupo generado por V, así $x + v \in H$.

Por lo tanto $x + V' \subseteq H$.

Luego para todo $x \in H$, existe un abierto $x + V'$ en G tal que $x \in x + V' \subseteq H$.

En consecuencia H es abierto. ■

Lema 3.4.3. *Supongamos que E es un conjunto abierto compacto en G.*

(a) *Existe un entorno simétrico W de 0 en G tal que $E + W = E$.*

(b) *Si $0 \in E$, entonces E contiene un subgrupo abierto compacto de G.*

(c) *E es una unión finita de clases de subgrupos abiertos de G.*

Demostración.

(a) Sea $x \in E$. Entonces $-x + E$ es un conjunto abierto ya que la traslación de cualquier conjunto abierto es un conjunto abierto.

Como $0 = -x + x$, y $x \in E$, entonces $0 \in -x + E$. Luego $-x + E$ es un entorno de 0, así por definición 1.2.6 existe un entorno V_x de 0 tal que $V_x + V_x \subset -x + E$, es decir, $x + V_x + V_x \subset E$. Como $E = \bigcup_{x \in E}(x + V_x)$ y E es compacto, entonces existen $x_1, x_2, ..., x_n \in E$ tales que $E = \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + V_{x_i})$.

Sea $W = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$.

Probemos que W es entorno simétrico de 0.

Como la intersección finita de entornos es un entorno, así W es un entorno de 0, ya que los V_{x_i} son entornos de 0.

Sea $x \in W$.

Como $x \in W$, entonces $x \in V_{x_i}$, para algún i, así $-x \in V_{x_i}$ por ser V_{x_i} simétrico.

Luego, $-x \in \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$.

Por lo tanto W es entorno simétrico de 0.

Probemos que $E + W = E$.

"$\subset$"

Si $x \in E$ y $w \in W$, entonces $x \in x_i + V_{x_i}$, para algún i, y así

$$x + w \in x_i + V_{x_i} + W \subset x_i + V_{x_i} + V_{x_i} \subset E.$$

Por lo tanto $E + W \subset E$.

"$\supset$"

Sea $y \in E$.

Como $y = y + 0$, entonces $y \in E + W$, con 0 en W.

Por lo tanto $E \subset E + W$.

$\therefore E + W = E$.

(b) Supongamos que $0 \in E$.

Luego por inciso (a) existe un entorno simétrico W de 0 tal que $E + W = E$.

Sea H el subgrupo de G generado por W, es decir, $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$, donde $W_1 = W$ y $W_m = W_{m-1} + W$ para $m \geq 2$.

Sea $w \in W$. Entonces $w = 0 + w \in E + W$ ya que $0 \in E$ por hipótesis, pero $E + W = E$ de donde $w \in E$.

Por lo tanto $W \subset E$.

$W_2 = W + W \subset E + W = E$.

Supóngase que $W_n \subset E$, entonces

$$W_{n+1} = W_n + W \subset E + W = E.$$

Luego por inducción $W_n \subset E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n \subset E.$$

Además H es abierto, por Teorema 3.4.2. Pero como H es un subgrupo de G, entonces H es cerrado, por Teorema 1.2.8.
Por otra parte $H \subset E$ y E es compacto, entonces H es compacto.

(c) Sea $x \in E$, y sea $F_x = -x + E$, entonces F_x es un conjunto abierto compacto que contiene a 0 ya que es la traslación del abierto compacto E. Entonces por (b) F_x contiene un subgrupo abierto compacto H_x de G.
Sea $z \in E$, entonces $z \in z + H_z$, luego

$$E \subseteq \bigcup_{z \in E} (z + H_z).$$

Sea $y \in \bigcup_{z \in E} (z + H_z)$, entonces $y \in z + H_z$ para algún $z \in E$, luego

$$y - z \in H_z \subseteq F_z = -z + E,$$

así $y - z \in -z + E$, de donde $y \in E$.
Por tanto $\cup_{z \in E} (z + H_z) \subset E$.

Por lo tanto $E = \bigcup_{z \in E} (z + H_z)$.

Luego por ser E compacto existen $x_1, ..., x_k$ en E tales que $E = \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + H_{x_i})$, es decir, E es la unión finita de clases de subgrupos abiertos de G. ■

Corolario 3.4.4. *Si G es totalmente disconexo, entonces cada entorno de 0 contiene un subgrupo abierto compacto de G.*

Demostración.

Sea W un entorno de 0.

Por Proposición 1.1.33 los conjuntos abiertos y compactos forman una base para la topología de G, así existe un conjunto abierto compacto E tal que $0 \in E \subset W$.

Pero por el Lema anterior 3.4.3 (b), E contiene un subgrupo abierto compacto H de G. Entonces W contiene un subgrupo abierto compacto de G. ■

Definición 3.4.5. *Los grupos topológicos G y H son llamados localmente isomorfos si existen entornos V de 0 en G y U de 0 en H y un homeomorfismo f de V sobre U, tal que si x, y y $x + y \in V$, entonces $f(x + y) = f(x) + f(y)$.*

Lema 3.4.6. *Sea G conexo, localmente isomorfo a $\mathbb{R}^k$, para algún $k \geq 0$, y G no contiene ningún subgrupo compacto infinito. Entonces $G = \mathbb{R}^k$.*

Demostración.

Que G es localmente isomorfo a $\mathbb{R}^k$ significa que exite un entorno Q de 0 en $\mathbb{R}^k$, un entorno V de 0 en G y un homeomorfismo $\phi\colon Q \to V$ tal que $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$, donde $x, y \in Q$ y $x + y \in Q$.

Como Q es un entorno de 0 en $\mathbb{R}^k$, así existe $\epsilon > 0$ tal que $B(0, \epsilon) \subset Q$, donde

$$B(0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^k \colon ||x|| < \epsilon\},$$

es la bola centrada en 0 de radio ϵ, donde $||x||$ representa la norma euclidiana de la k-tupla x.

Extendemos ϕ a todo $\mathbb{R}^k$ como sigue :

Sea $x \in \mathbb{R}^k - Q$. Entonces $x \neq 0$, luego por Propiedad Arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{||x||}$, entonces $||\frac{x}{n}|| < \epsilon$, así $\frac{x}{n} \in Q$.

Sea

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathbb{R}^k & \to & G \\ & x & \mapsto & \psi(x) = n\phi\left(\frac{x}{n}\right), \text{ donde } \frac{x}{n} \in Q \text{ para algún } n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Probemos que ψ es función.

Sean $x = y$ en $\mathbb{R}^k$. Entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{x}{n} \in Q$, $\frac{y}{m} \in Q$.

$$\begin{aligned}
\psi(x) = n\phi\left(\frac{x}{n}\right) &= n\phi\left(\frac{mx}{mn}\right) \\
&= n\phi\left(\underbrace{\frac{x}{nm} + \cdots + \frac{x}{mn}}_{m-\text{veces}}\right) \\
&= n\left[\underbrace{\phi\left(\frac{x}{nm}\right) + \cdots + \phi\left(\frac{x}{mn}\right)}_{m-\text{veces}}\right] \\
&= nm\phi\left(\frac{x}{mn}\right) \\
&= m\left[n\phi\left(\frac{x}{mn}\right)\right] \\
&= m\phi\left(\frac{nx}{mn}\right) \\
&= m\phi\left(\frac{x}{m}\right).
\end{aligned}$$

Como $x = y$, así $\frac{x}{m} = \frac{y}{m}$ y como ϕ es función , entonces

$$\psi(x) = m\phi\left(\frac{x}{m}\right) = m\phi\left(\frac{y}{m}\right) = \psi(y).$$

$\therefore$ ψ está bien definida.

Además $\psi|_Q = \phi$.

Probemos que ψ es homomorfismo de grupos aditivos.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^k$, así para n suficientemente grande se tiene que $\frac{x+y}{n}, \frac{x}{n}, \frac{y}{n} \in Q$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\psi(x+y) &= n\phi\left(\frac{x+y}{n}\right)\\
&= n\phi\left(\frac{x}{n}+\frac{y}{n}\right)\\
&= n\left[\phi\left(\frac{x}{n}\right)+\phi\left(\frac{y}{n}\right)\right]\\
&= n\phi\left(\frac{x}{n}\right)+n\phi\left(\frac{y}{n}\right)\\
&= \psi(x)+\psi(y).
\end{aligned}$$

$\therefore$ ψ es homomorfismo de grupos aditivos.

Probemos que $\psi(\mathbb{R}^k)$ es el subgrupo generado por V.

Sea H el subgrupo de G generado por V.

Como $\psi(\mathbb{R}^k)$ es la imagen homomorfa de un grupo, entonces $\psi(\mathbb{R}^k)$ es subgrupo de G.

Además $V = \phi(Q) \subset \psi(\mathbb{R}^k)$, entonces $\psi(\mathbb{R}^k)$ contiene a V, así $H \subseteq \psi(\mathbb{R}^k)$.

Sea $z \in \psi(\mathbb{R}^k)$.

Entonces $z = \psi(x)$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x}{n} \in Q$, luego $\phi\left(\frac{x}{n}\right) \in V \subset H$, entonces $n\phi\left(\frac{x}{n}\right) \in H$, ya que H es cerrado bajo la suma, luego

$$z = \psi(x) = n\phi\left(\frac{x}{n}\right) \in H.$$

$\therefore \psi(\mathbb{R}^k) \subset H$.

$\therefore \psi(\mathbb{R}^k) = H$.

Luego H es abierto porque es el subgrupo generado por un entorno de 0, por Teorema 3.4.2.

Probemos que ψ es continua.

Sea $(x_n) \subset \mathbb{R}^k$ una sucesión que converge a $x \in \mathbb{R}^k$.

Como (x_n) converge, entonces es acotada, así existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n\| < N$ y $\|x\| < N$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Por Propiedad Arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{N}{m} < \epsilon$, así $\|\frac{x_n}{m}\| < \epsilon$ y $\|\frac{x}{m}\| < \epsilon$, así $\frac{x_n}{m} \in Q$ y $\frac{x}{m} \in Q$.

Como $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$, entonces $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{x_n}{m} = \frac{x}{m}$ y como ϕ es continua , entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \phi\left(\frac{x_n}{m}\right) = \phi\left(\frac{x}{m}\right),$$

de donde

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} \psi(x_n) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} m\phi\left(\frac{x_n}{m}\right) \\
&= m \lim_{n\longrightarrow\infty} \phi\left(\frac{x_n}{m}\right) \\
&= m\phi\left(\frac{x}{m}\right) \\
&= \psi(x)
\end{aligned}$$

$\therefore\ \psi\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \psi\,(x_n)$, así ψ es continua.

Sea $K = \ker\psi = \psi^{-1}(\{0\})$.

Como $\{0\}$ es el cerrado en G ya que G es Hausdorff, así K es cerrado ya que ψ es continua. Pero el núcleo de todo homomorfismo es un subgrupo del dominio del homomorfismo, así K es un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}^k$.

Probemos que $K = \{0\}$.

Por contradicción supongamos que $K \neq \{0\}$, así K es un subgrupo cerrado no trivial de $\mathbb{R}^k$, entonces $K = \mathbb{R}^a \oplus \mathbb{Z}^b$ (Morris, S.A. [3], pág. 33) con $b \geq 1,\ a + b \leq k$.

Como $\psi\colon \mathbb{R}^k \to H$ es un homomorfismo sobreyectivo, así $\frac{\mathbb{R}^k}{K} = H$, pero entonces

$$\begin{aligned}
H = \frac{\mathbb{R}^k}{\mathbb{R}^a \oplus \mathbb{Z}^b} &= \frac{\mathbb{R}^{k-a}}{\mathbb{Z}^b} \\
&= \mathbb{R}^{k-(a+b)} \oplus \frac{\mathbb{R}^b}{\mathbb{Z}^b} \\
&= \mathbb{R}^{k-(a+b)} \oplus \mathbb{T}^b,\ \text{con } b \geq 1.
\end{aligned}$$

Pero $\mathbb{T}$ es subgrupo topológico de $\mathbb{R}^{k-(a+b)} \oplus \mathbb{T}^b = H$, así $\mathbb{T}$ es subgrupo topológico de H y por tanto $\mathbb{T}$ es subgrupo topológico de G. Pero $\mathbb{T}$ es compacto y también infinito, pues $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1$, así G posee un subgrupo compacto infinito, lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto $K = \ker\psi = \{0\}$, así
$$H = \frac{\mathbb{R}^k}{K} = \frac{\mathbb{R}^k}{\{0\}} = \mathbb{R}^k.$$

Ahora probemos que $H = G$. Como H es subgrupo abierto de G, entonces H es cerrado, pues por el Teorema 1.2.8 todo subgrupo abierto es también cerrado. Pero como G es conexo , entonces los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de G son $\emptyset$ y G, por lo cual $H = G$.

$\therefore G = \mathbb{R}^k$. ■

Lema 3.4.7. *Si C es la componente conexa de 0 en G, entonces C es un subgrupo cerrado de G.*

Demostración.

Por Teorema 1.1.31 se sabe que toda componente conexa es un conjunto cerrado, así C es cerrado.

Ahora probemos que C es subgrupo de G.

Sea $x \in G$.

Entonces $x - C$ es conexo (porque es la imagen continua del grupo conexo C bajo el mapeo continuo $z \to x - z$). Por lo tanto $x - C$ es un conexo que contiene a 0, pero como C es la unión de todos los conexos que contienen a 0, así $x - C \subseteq C$.

Por lo tanto
$$\bigcup_{x \in C} x - C \subseteq C.$$

Si $x, y \in C$, entonces $x - y \in x - C \subseteq C$.

Por lo tanto C es subgrupo de G.

$\therefore C$ es un subgrupo cerrado de G. ■

Lema 3.4.8. *Si C es la componente de 0 en G. Entonces G/C es totalmente disconexo.*

Demostración.

Sea $H \subseteq G/H$ una componente conexa.

Debemos probar que H sólo posee un elemento.

Razonando por contradicción, supongamos que H tiene al menos dos elementos.

Es decir, $x + C,\ y + C \in H$, con $x + C \neq y + C$.

Como H es componente conexa, así H es cerrado y entonces $P^{-1}(H)$ es cerrado en G, donde $P\colon G \to G/H$ es la proyección canónica.

Como $x+C, y+C \in H$, así $x+C, y+C \subseteq P^{-1}(H)$. Pero $(x+C)\cap(y+C) = \emptyset$, ya que $x+C \neq y+C$.

Por lo tanto $P^{-1}(H)$ no es conexo, pues contiene dos componentes conexas diferentes.

Así, existen dos conjuntos abiertos no vacíos U y V disjuntos en G tales que $P^{-1}(H) = U \cup V$.

Probemos que $P(U) \cap P(V) = \emptyset$.

Por contradicción, supongamos que $P(U) \cap P(V) \neq \emptyset$.

Entonces existen $x' \in U, y' \in V$, tales que $x' + C = y' + C$, pero entonces x' y y' están en la misma componente conexa $x' + C$.

Como $x' + C = ((x' + C) \cap U) \cup ((x' + C) \cap V)$, donde la unión es disjunta y como $x' + C$ es conexo, entonces $(x' + C) \cap U = \emptyset$ o $(x' + C) \cap V = \emptyset$, como $x' \in U$ y $x' \in x' + C$, entonces $(x' + C) \cap U \neq \emptyset$ así $(x' + C) \cap V = \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues $x' + C = y' + C$ y $y' \in V$.

Por lo tanto, $P(U) \cap P(V) = \emptyset$ y como P es un mapeo abierto, así $P(U)$ y $P(V)$ son conjuntos abiertos disjuntos no vacíos tales que $H = P(U) \cup P(V)$ y esto contradice el hecho de que H es conexo.

Por lo tanto H sólo tiene un elemento.

$\therefore G/C$ es totalmente disconexo. $\blacksquare$

Lema 3.4.9. *Si D es un subgrupo discreto de G. Entonces G y G/D son localmente isomorfos.*

Demostración.

Sea $U = (G \setminus D) \cup \{0\}$.

Como $G \setminus U = D \setminus \{0\} \subseteq D$ así $D \setminus \{0\}$ es cerrado en D ya que D es discreto, luego $D \setminus \{0\}$ es cerrado en G, pues D es cerrado en G al ser discreto.

Por lo tanto, U es abierto en G que contiene al 0 en G.

Luego, existe un abierto V simétrico tal que $V + V \subseteq U$ y $0 \in V$.

Sea $P\colon G \to G/D$ la proyección canónica.

Sea $W = P(V)$, como la proyección canónica es un mapeo abierto, así W es abierto en G/D.

Sea

$$\begin{aligned} \phi\colon V &\to W \\ x &\to \phi(x) = P(x). \end{aligned}$$

Obviamente ϕ es una sobreyección.

Probemos que ϕ es inyectiva.

Sean $x, y \in V$ tal que $\phi(x) = \phi(y)$.

$$\begin{aligned} \phi(x) = \phi(y) &\Rightarrow x + D = y + D \\ &\Rightarrow x - y \in D. \end{aligned}$$

Como $x, y \in V$ y V es simétrico, así

$$x - y \in V - V = V + V \subseteq U = (G \setminus D) \cup \{0\}.$$

Entonces $x - y = 0$.

Por lo tanto $x = y$.

$\therefore\ \phi$ es inyectiva.

Sean $x, y \in V$ tales que $x + y \in V$.

$$\phi(x + y) = P(x + y) = P(x) + P(y) = \phi(x) + \phi(y).$$

Además P es un mapeo abierto, así $\phi = P|_V$ es un mapeo abierto, ya que V es abierto en G y es una función continua, por ser restricción de una función continua.
Por lo tanto ϕ es una función continua , biyectiva y abierta de V sobre W.
Así, ϕ es un homeomorfismo de V sobre W.
$\therefore G$ es localmente isomorfo a G/D. ■

Teorema 3.4.10 (El Teorema de Estructura Principal)**.** *Cada grupo ALC G tiene un subgrupo abierto G_1 que es la suma directa de un grupo compacto H y un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$* $(n \geq 0)$.

Demostración.
Sea G_0 la componente de 0 en G, es decir, G_0 es el subconjunto conexo más grande de G que contiene a 0.
Por Lema 3.4.7, G_0 es un subgrupo cerrado de G.
Por Lema 3.4.8, G/G_0 es un grupo ALC totalmente disconexo, entonces por Corolario 3.4.4 contiene un subgrupo abierto compacto K.

Sea $\phi\colon G \to G/G_0$ el homomorfismo natural de G sobre G/G_0 y sea $G_1 = \phi^{-1}(K)$.

Como K es abierto, así G_1 es un subgrupo abierto de G.

Como K es compacto, así K no contiene un subgrupo abierto de índice infinito, porque de lo contrario K sería la unión infinita de conjuntos abiertos disjuntos y como la unión sería disjunta, entonces la colección de dichos abiertos no tendría subcubierta propia, porque están formando una partición y entonces K no sería compacto.

Por lo tanto G_1 no tendría ningún subgrupo abierto de índice infinito, pues de lo contrario habría un abierto con índice infinito y como contendría a G_0, entonces la imagen bajo ϕ sería un subgrupo abierto de K de índice infinito, lo cual es imposible, por lo que ya deducimos.

Por Teorema 1.1.28, existe un entorno compacto V de G_1 tal que $\phi(V) = K$.
Sea H el subgrupo de G_1 generado por V, así por Teorema 3.4.2, V es abierto y por lo tanto es cerrado.

Probemos que H interseca a cada clase de G_0 en G_1, es decir, $H \cap (x + G_0) \neq \emptyset$, para todo $x \in G_1$.
Sea $x \in G_1$.
Entonces $\phi(x) \in K = \phi(V)$, por tanto, existe $v \in V$ tal que $\phi(v) = \phi(x)$, así $v + G_0 = x + G_0$.
Como $v \in V \subseteq H$, así $v \in H \cap (v + G_0)$, pues $v = v + 0 \in v + G_0 = x + G_0$.
Por lo tanto
$$H \cap (x + G_0) \neq \emptyset. \tag{8}$$
Ahora probemos que $H = G_1$.
Razonando por contradicción, supongamos que $H \neq G_1$, así existe $x \in G_1$ tal que $x \notin H$.
Como $H \cap (x + G_1) \neq \emptyset$ por (8), y como $x \in x + G_1$, pero $x \notin H$, así $(G_1 \setminus H) \cap (x + G_1) \neq \emptyset$.
Por lo tanto
$$x + G_0 = [H \cap (x + G_0)] \cup [(G_1 \setminus H) \cap (x + G_0)],$$
así $x + G_0$ es la unión disjunta de abiertos no vacíos, pues H es abierto y cerrado en G_1. Pero esto último dice que $x + G_0$ no es conexo, lo cual es absurdo ya que G_0 es conexo y por tanto $x + G_0$ es conexo.

Por lo tanto, $H = G_1$ y como H es generado por un entorno compacto V de 0, así por Lema 3.4.1 se tiene que G_1 contiene un subgrupo cerrado $\mathbb{Z}^n$ para algún $n \geq 0$, tal que $G_1/\mathbb{Z}^n$ es compacto.

Sea Γ_1 el dual de G_1.

Sea D el dual de $G_1/\mathbb{Z}^n$ y como $G_1/\mathbb{Z}^n$ es compacto, así D es discreto por Teorema 2.2.7. Entonces por Teorema 3.1.4, Γ_1/D es el dual de $\mathbb{Z}^n$, pero el dual de $\mathbb{Z}^n$ es $\mathbb{T}^n$ por Corolario 3.2.3, así $\Gamma_1/D = \mathbb{T}^n$.

Si tomamos el abierto

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^n = \prod_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \subseteq \mathbb{R}^n$$

es abierto en $\mathbb{R}^n$ tal que $(0, 0, \ldots, 0) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^n$.

Si definimos

$$\begin{array}{cccc} h: & V & \longrightarrow & \mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ veces}} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (e^{2\pi i x_1}, \cdots, e^{2\pi i x_n}) \end{array}$$

es un isomorfismo local entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{T}^n$ y así $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{T}^n$ son localmente isomorfos.

Por Lema 3.4.9, se tiene que Γ_1 es localmente isomorfo a Γ_1/D ya que D es discreto y como $\Gamma_1/D = \mathbb{T}^n$ es localmente isomorfo a $\mathbb{R}^n$, así Γ_1 es localmente isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Sea Γ_0 la componente de 0 en Γ_1.
Como Γ_1 es localmente isomorfo a $\mathbb{R}^n$, así Γ_1 es localmente conexo y por lo tanto toda componente conexa es un conjunto abierto, así Γ_0 es abierto y entonces Γ_0 es localmente isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Como G_1 no tiene subgrupos de índice finito, así el Teorema 3.1.4 implica que Γ_1 no tiene subgrupos compactos infinitos y por lo tanto Γ_0 no tendría subgrupos compactos infinitos ya que Γ_0 es subgrupo por ser la componente conexa de 0 en Γ_1 y por Lema 3.4.7.
Luego por Lema 3.4.6 aplicado a Γ_0 se tiene que $\Gamma_0 = \mathbb{R}^n$.

Hasta el momento hemos demostrado que Γ_1 posee a $\mathbb{R}^n$ como un subgrupo abierto. Si demostramos que Γ_1 es la suma directa de $\mathbb{R}^n$ y un grupo discreto Λ, entonces G_1 será la suma directa de $\mathbb{R}^n$ y el compacto dual de Λ por Teorema 3.2.2 y la prueba estaría completa.

Sea Λ un subgrupo de Γ_1, maximal con respecto a la propiedad:

$$\Lambda \cap \mathbb{R}^n = \{0\}. \tag{9}$$

Sea $\gamma \in \Lambda$.
Como $\gamma + \mathbb{R}^n$ es una clase de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n$ es subconjunto abierto de Γ_1, así $\gamma + \mathbb{R}^n$ es abierto, por tanto $\Lambda \cap (\gamma + \mathbb{R}^n)$ es abierto en Λ. Pero $\Lambda \cap (\gamma + \mathbb{R}^n) = \{\gamma\}$.
Así los conjuntos de un solo elemento son abiertos en Λ. Por lo tanto Λ es discreto.

Además la suma $\mathbb{R}^n + \Lambda$ es directa ya que $\mathbb{R}^n \cap \Lambda = \{0\}$.

Probemos que $\Gamma_1 = \mathbb{R}^n + \Lambda$.
Por contradicción supongamos que $\Gamma_1 \neq \mathbb{R}^n + \Lambda$.
Entonces existe $\gamma \in \Gamma_1$ tal que $\gamma \notin \mathbb{R}^n + \Lambda$. Luego $\gamma \notin \Lambda$, sea Λ_2 el subgrupo generado por $\Lambda \cup \{\gamma\}$ y como Λ es maximal tal que cumple (9) entonces $\Lambda_2 \cap \mathbb{R}^n \neq \{0\}$.

Así existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tal que $x \in \Lambda_2$, pero como Λ_2 es el subgrupo generado por $\Lambda \cup \{\gamma\}$, así $x = \gamma_0 + k\gamma$, donde $\gamma_0 \in \Lambda$ y $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Si $y = x/k$ y $\gamma_1 = \gamma - y$, entonces $k\gamma_1 = k\gamma - ky = k\gamma - x = -\gamma_0 \in \Lambda$ y $\gamma_1 \notin \mathbb{R}^n + \Lambda$, (pues de lo contrario $\gamma_1 \in \mathbb{R}^n + \Lambda$ y como $y \in \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n + \Lambda$; así $\gamma_1 + y = \gamma \in \mathbb{R}^n + \Lambda$, lo cual es absurdo).

Tomando Λ_2 como el subgrupo generado por $\Lambda \cup \{\gamma_1\}$, así por la maximalidad de Λ en (8) se tiene que $\Lambda_2 \cap \mathbb{R}^n \neq \{0\}$.

Por lo tanto existe $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$ tal que $z \in \Lambda_2$, es decir, $z = \gamma_2 + m\gamma_1$, donde $\gamma_2 \in \Lambda$ y $m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0$.
Luego

$$k\gamma_2 + km\gamma_1 = k(\gamma_2 + m\gamma_1) = kz \neq 0 \ \ \text{(ya que } k \neq 0,\ z \neq 0).$$

Como $k\gamma_1 \in \Lambda$ y $\gamma_2 \in \Lambda$, y por ser Λ grupo, se tiene que $kz = k\gamma_2 + km\gamma_1 \in \Lambda$, luego $0 \neq kz \in \Lambda \cap \mathbb{R}^n = \{0\}$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto lo supuesto es falso y lo cierto es que $\Gamma_1 = \mathbb{R}^n \oplus \Lambda$, así por Teorema 3.2.2, $G_1 = \widehat{\mathbb{R}^n} \oplus \hat{\Lambda}$, pero el dual de $\mathbb{R}^n$ es $\mathbb{R}^n$, es decir, $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$ y como Λ es discreto su dual es compacto por Teorema 2.2.7, así $G_1 = \mathbb{R}^n \oplus H$; donde $H = \hat{\Lambda}$ es un subgrupo compacto de G. ■

Bibliografía

[1] Halmos, P.R. (1950). *Measure Theory*. Princeton, N.J. : Van Nostrand.

[2] Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons Inc.

[3] Morris, S.A. (1977). *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups.* Cambridge: Cambridge University Press.

[4] Patty, C. W. (1993). *Foundations of Topology*. Boston: PWS-Kent Publishing Company.

[5] Rudin, W. (1962). *Fourier Analysis on Groups*. New York: Interscience Publishers, Inc.

[6] Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis*. (3rd ed). New York: McGraw-Hill Book Company.

[7] Rudin, W. (1991). *Functional Analysis*. (2nd ed). New York: McGraw-Hill Book Company.