UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

ELEMENTOS DE LA TEORIA DEL CALCULO LOGICO
(CALCULO PROPOSICIONAL)

Trabajo de investigación presentado para optar al grado de

LICENCIADO EN FILOSOFIA

*

JORGE ALBERTO BLANCO GALLO

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, C A 1978

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

ELEMENTOS DE LA TEORIA DEL CALCULO LOGICO
(CALCULO PROPOSICIONAL)

Trabajo de investigación presentado para optar al grado de

LICENCIADO EN FILOSOFIA

*

JORGE ALBERTO BLANCO GALLO

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, C.A 1978

I N D I C E

I. INTRODUCCION

A- El objeto de la Lógica;

B- Referencia a los sistemas parciales deductivos de la Lógica;

C- Características de un sistema deductivo lógico.

A.- En el proyecto del presente trabajo de investigación he afirmado que el objeto de la lógica es el estudio de las leyes de la razón manifestadas en expresiones linguísticas.

Por leyes de la razón vamos a entender los enlaces intelectuales necesarios, los cuales en virtud de sus elementos y condiciones determinados conducen invariablemente a resultados únicos.

Y cuando complementé la expresión "estudio de las leyes de la razón" con esta otra " manifestadas en expresiones linguísticas", estaba reconociendo que esas leyes sólo es posible estudiarlas a nivel linguístico ya que aunque el pensamiento genere otro tipo de conducta observable, los procesos cerebrales permanecen ocultos, en cualquier caso.Considero que la tesis de los enlaces intelectuales necesarios que sostengo para la lógica es compatible con la tesis de Galileo en Diálogos sobre los sistemas del universo acerca de la posibilidad de aplicar los métodos y los principios geométricos a los objetos de la experiencia sensible. Y, además, con la tesis de Mach expuesta en su Mecánica respecto a la aplicación de la matemática a fenómenos físicos.

La tesis de Galileo propone, en primer lugar, eliminar el supuesto dualismo entre la verdad y la realidad. Para Galileo la esfera y el plano no poseen más existencia que la verdad y la determinabilidad que emanan de sus conceptos; sería un error oponer a este ser de la definición pura una forma de existencia y concreta. El que una forma empírica existente "sea" una determinada figura, no puede significar otra cosa sino que se ajusta a todas las condiciones y relaciones sintetizadas en el concepto de esta forma matemática. La ciencia consiste en un sistema de condiciones puras, cuya validez nada tiene que ver con el problema de si en el mundo de nuestras percepciones existen o no sujetos en los que se den esas condiciones. Podemos negar la existencia de tales sujetos, sin que ello afecte en lo más mínimo la concepción del carácter y el valor de conocimiento de las condiciones puras de que se trate. Tampoco en este caso se admite, ni mucho menos, la existencia de un abismo entre lo "abstracto" y lo "concreto", sino que lo que se hace es formular el postulado de que los principios abstractos deben desarrollarse y completarse mediante la adición de nuevos y nuevos momentos conceptuales, de tal modo que abarquen el caso empíricamente dado que al principio parece escapar a la determinación de sus leyes. La falta de consonancia allí donde se dé, "no se debe ni a lo abstracto ni a lo concreto, a la geometría ni a la física, sino que debe cargársele en cuenta al autor del cálculo, que no acierta a hacerlo debidamente". [1]

Mach, por su parte, expresa: "aunque representamos las vibraciones mediante la fórmula armónica, los fenómenos de enfriamiento mediante exponenciales, las caídas por cuadrados de tiempo, etc, a nadie se le ocurriría imaginar que las vibraciones en sí mismas tienen nada que ver con las funciones circulares, o el movimiento de los cuerpos en caída con los cuadrados. Simplemente, se ha observado que las relaciones entre cantidades investigadas eran similares a ciertas relaciones obtenidas entre funciones matemáticas familiares, y estas ideas más familiares se emplean como medios fáciles para complementar la experiencia". [2]

---

[1] cf CASSIRER, Ernst: El problema del conocimiento, tomo I: 2a. Fondo de Cultura Económica, México, D.F. México, 1965, pp 351. Cita a Galileo

[2] NAGEL, Ernest Simbolismo y ciencia. Ediciones Nueva Visión, Buenos Aires, Argentina, 1972, pp 52-53. Cita a Mach.

Precisamente por el carácter de necesidad de las relaciones conceptuales es que la lógica está constituida por leyes que son siempre verdaderas racionalmente.

Se puede pensar que al decir esto se está creyendo en la preexistencia de relaciones conceptuales únicas trascendentes al hombre que son las que hay que alcanzar mediante la lógica, la geometría, etc. No lo que yo sostengo es que son conceptos y relaciones definidos racionalmente los que constituyen las leyes lógicas.

B.- En lo fundamental el cometido de la lógica es el estudio de las conexiones o vínculos necesarios entre las proposiciones (como aserciones verdaderas o falsas), pero esos nexos necesarios entre algunas de éstas no pueden establecerse tomándolas como unidades, hay que considerarlas, entonces, en la relación de sus elementos y vínculos constituyentes. En el primer caso tenemos una lógica de proposiciones y en el último, una lógica de clases y una lógica de relaciones.

C.- Ahora bien, para que un sistema deductivo lógico pueda considerarse como una ciencia demostrativa (como un sistema teórico en el cual sus inferencias válidas son de tal naturaleza que partiendo de datos verdaderos necesariamente tiene que llegarse a conclusiones verdaderas dentro de su universo) se exige que cumpla las características siguientes de manera general, ha de comportarse como un cálculo; y, en cuanto tal, expresarse mediante los recursos de simbolización, axiomatización y su respectivo metalenguaje.

Con respecto a lo que se entiende por cálculo, creo que la interpretación de Boole en su Mathematical Analysis of Logic es lo suficientemente clara "Quienes se hallan familiarizados con el estado actual de la teoría del Algebra Simbólica saben bien que la validez de los procesos de análisis no dependen de la interpretación de los símbolos empleados, sino tan sólo de las leyes que regulan su combinación. Todos los sistemas de interpretación que dejen intacta la verdad de las relaciones supuestas resultan igualmente admisibles, y así es como un mismo procedimiento podría representar, bajo un esquema dado de interpretación, la solución a una cuestión acerca de las propiedades de los números, bajo otro la de un problema geométrico y bajo un tercero la de un problema de dinámica o de óptica... El rasgo distintivo de un auténtico Cálculo lo podríamos hacerlo consistir precisamente en el hecho de ser un método que descanse en el empleo de Símbolos cuyas leyes de combinación sean conocidas y generales y cuyos resultados admitan una interpretación coherente. La asignación de una interpretación cuantitativa a las formas de Análisis actualmente existentes no es sino el fruto de circunstancias que han determinado la imposición de dichas formas, por lo que no cabe erigirla en una condición universal del Análisis. El Cálculo de la Lógica que me propongo elaborar tiene por fundamento este principio general, sobre el que me baso para recabar a su favor un puesto entre las formas reconocidas del Análisis Matemático, con independencia de que por el momento haya de ser clasificada por separado en razón de sus objetos e instrumentos."[1]

Y, la simbolización consiste en sustituir cada signo relevante de

[1] KNEALE, William y Martha El desarrollo de la lógica. Editorial Tecnos, S.A., Madrid, España, 1972, pp 375. Citan a Boole.

un lenguaje determinado por un símbolo.[1]

"Formalizar un lenguaje no consiste tan sólo en dotarlo de un vocabulario artificial, sino también, y sobre todo, en reconstruir su sintaxis en hacer que las reglas de su sintaxis, en lugar de implícitas y vagas, como las de los lenguajes naturales, sean explícitas y precisas. Un lenguaje está formalizado cuando su sintaxis no tiene secretos."[2]

Por último, axiomatizar una teoría no es sino organizar su conjunto de enunciados de tal forma que, partiendo de algunos de sus miembros (los axiomas) y mediante la aplicación de una serie de reglas de transformación, se pueden enunciar los restantes enunciados de la teoría (los teoremas). Los axiomas y los teoremas son expresiones del cálculo, fórmulas redactadas en el lenguaje del cálculo. Las reglas de transformación, no· en cuanto reglas para inferir unas expresiones de otras, han de hacer mención de esas expresiones, y esto sólo es posible desde un metalenguaje. Las reglas, pertenecen al metalenguaje del cálculo.[3]

En cuanto a la axiomatización hay que tomar en cuenta algo más· la consistencia, completitud e independencia de un sistema axiomático.

Previo al entendimiento de los conceptos de consistencia, completitud e independencia, hay que distinguir la axiomatización en sentido tradicional (de contenido) y en sentido moderno (pura). "El método axiomático, utilizado con éxito en Algebra como en Geometría, exhumaba el ideal griego del conocimiento científico. Pero, en tanto que la antigua

[1] cf DEAÑO, Alfredo: Introducción a la lógica formal (La Lógica de enunciados). Alianza Universidad (Alianza Editorial, S.A) Madrid, España, 1974, pp 118.

[2] Ibid· pp 119

[3] Ibid: pp 120

axiomática es una axiomática de contenido en que se utilizaban conceptos fundamentales cuyo sentido está dado intuitivamente y se afirman proposiciones consideradas como evidentes a propósito de estos conceptos, la axiomática moderna es una axiomática pura los conceptos que utiliza se introducen todos explícitamente v son definidos únicamente por las relaciones que se establecen entre ellos, sin que jamás se haga referencia a propiedades que se hayan enunciado explícitamente en los axiomas, y, finalmente, éstas no se consideran como evidentes por sí mismos, sino que se hipotetiza su validez para ver lo que es posible deducir de ellas. Las teorías axiomatizadas toman el alcance de sistemas hipotético-deductivos."[1]

Los conceptos de consistencia y completitud admiten tanto el enfoque sintáctico (relación de las expresiones entre sí) como el semántico (relaciones de las expresiones con lo que expresan).

De la consistencia sintáctica existen dos definiciones. La primera un sistema es sintácticamente consistente, cuando en él es imposible derivar una expresión determinada y su negación (ya aplicada en la axiomática tradicional). Esta definición presenta dos inconvenientes a) no es aplicable a los sistemas desprovistos del operador negación, b) no es del todo sintáctica, puesto que da interpretación por lo menos a un operador.

La segunda un sistema axiomático es sintácticamente consistente cuando una expresión cualquiera no es en él derivable.

En el sentido semántico un sistema es consistente si admite un modelo, es decir, si admite la sustitución de variables por constantes.

[1] LADRIERE, Jean. Limitaciones internas de los formalismos. Editorial Tecnos, S.A., Madrid, España, 1969, pp 34 y 35.

En cuanto a la completitud sintáctica también existen dos definiciones. La primera un sistema es completo cuando cualquier expresión cerrada resulta en él derivable o refutable (o sea cuando, dada una expresión cerrada cualquiera p, es derivable en él p o no-p). Esta definición presenta siempre el inconveniente que no responde a los sistemas desprovistos del operador negación.

La otra definición de completitud sintáctica un sistema de axiomas es sintácticamente completo cuando se hace inconsistente al añadirle una expresión no demostrable en él.

En el plano semántico, la completitud de un sistema se da cuando cada una de sus expresiones verdaderas es siempre en él demostrable.

La independencia de los axiomas de un sistema se da, si ninguno de ellos puede ser obtenido como teorema a partir de los restantes.[1]

---

[1] cf AGAZZI, Evandro· La lógica simbólica. 2a. Editorial Herder, Barcelona, España, 1973, pp 240 y 241.

II. CALCULO PROPOSICIONAL: A- Proposiciones,

B- Operadores y tablas de verdad;

C- Tautologías (leyes de la lógica proposicional);

D- La prueba en la lógica proposicional mediante reglas de deducción natural, y,

E- Un sistema de cálculo proposicional.

A.- Ya se ha afirmado que la lógica proposicional es la que trabaja considerando las proposiciones como unidades, sin tomar en cuenta la estructura interna de éstas. Y que las proposiciones son aserciones que tienen la característica de ser verdaderas o falsas.

Ahora bien. Una proposición es elemental, simple o atómica si no es descomponible en otras; y, compuesta, compleja o molecular si es descomponible en otras proposiciones.

Las posibilidades de valor de verdad de una proposición elemental 'p' son necesariamente dos o es verdadera o es falsa.

p
V
F

Para dos proposiciones elementales 'p, q' hay $2^2 = 4$ combinaciones de sus posibilidades de verdad. Así

	p	q
(a)	V	V
(b)	F	V
(c)	V	F
(d)	F	F

Los valores de verdad posibles (verdad o falsedad) de las combinaciones a,b,c,d de los valores (p, q) son $2^{2^2} = 16$. [1]

	p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a	V	V	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
b	F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
c	V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
d	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F

B. Si advertimos que la tabla anterior desempeña en la lógica proposicional un papel descriptivo, debemos admitir que los valores de verdad de cada columna de la 1 a la 16 describen el operador o los operadores de la respectiva función de verdad.

Así en la columna 1 a1=V, b1=V, c1=V, d1=V. En los cuatro casos el valor de verdad es 'verdadera', esto sólo es posible si las proposiciones p, q son independientes entre sí (Si p, entonces p; y si q, entonces q) $[(p \rightarrow p) \; . \; (q \rightarrow q)]$. Ejemplo 'Si los árboles florecen, entonces florecen; y si los pájaros cantan, entonces cantan'. *

En la columna 2 a2=F, b2=V, c2=V, d2=V. Lo que nos muestra que la proposición compuesta p, q sólo es falsa cuando ambas proposiciones componentes sean verdaderas. No conjuntamente p y q, $-(p \; . \; q)$. Ejemplo: 'No

---

[1] cf WITTGENSTEIN, Ludwing Tractatus logico-philosophicus. Alianza Editorial, S.A, Madrid, España, 1973, pp 115.

* Los operadores básicos descritos en la tabla, serán aclarados a continuación de la exposición de la tabla.

es el caso que el sol sea cuadrado y cúbico'.

En la columna 3 a3=V, b3=F, c3=V, d3=V. La proposición compuesta q, p es verdadera si y sólo si 'p' es verdadera o 'q' es falsa. Si q, entonces p, $(q \rightarrow p)$. Ejemplo ''Si Sartre es el autor de la trascendencia del ego 'q', entonces Sartre existía en 1934 'p''.

La proposición $(q \rightarrow p)$ se refuta si y sólo se prueba que la proposición 'q' es verdadera y 'p' es falsa. En todos los demás casos es verdadera.

En la columna 4 a4=F, b4=F, c4=V, d4=V. Si se observa los valores de verdad de esta columna son la negación de 'q'. Si p o no p, entonces no q, $(p \vee - p) \rightarrow - q$. En esta proposición se niega q independientemente del valor de p . La proposición p, q así formada es falsa si q es verdadera y verdadera si q es falsa. Ejemplo 'Si llueve o no llueve, entonces la tierra no es el centro del universo'.

En la columna 5 a5=V, b5=V, c5=F, d5=v . Este es el mismo caso de 3, únicamente que 'p' y 'q' el consecuente. Si p, entonces q, $(p \rightarrow q)$. Ejemplo. 'Si Sartre existía en 1934, entonces Sartre es el autor de La trascendencia del ego'

La proposición $(p \rightarrow q)$ se refuta si y sólo si se prueba que la proposición 'p' es verdadera y 'q' falsa. En todos los demás casos es verdadera.

En la columna 6 a6=F, b6=V, c6=F, d6=V. Este es el mismo caso de 4, sólo que aquí se ha negado p. Si q o no q, entonces no p, $(q \vee - q) \rightarrow -p$. Ejemplo 'Si crecen o no crecen las plantas, entonces París no es la capital de Francia'.

Una proposición de este tipo es falsa si p es verdadera y verdadera si p es falsa.

En la columna 7 a7=V, b7=F, c7=F, d7=V. La proposición compuesta p, q sólo es verdadera en este caso, si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. Si p, entonces q, y si q, entonces p, (p ≡ q). Ejemplo 'Venus es cuadrado si y sólo si Marte es una línea recta'.

En la columna 8 a8=F, b8=F, c8=F, d8=V. Sólo es verdadera si ambas proposiciones son falsas. Ni p ni q, (- p . - q). Ejemplo 'La luna no es satélite y las plantas no son seres vivientes'.

En la columna 9: a9=V, b9=V, c9=V, d9=F. Sólo es falsa en el caso de que ambas componentes sean falsas. P o q, (p v q). Ejemplo 'Llueve o truena'.

En la columna 10 a10=F, b10=V, c10=V, d10=F. Es verdadera en el caso de que una y sólo una sea verdadera . P o q no ambas, (p w q). Ejemplo "El oro es un metal o un metaloide'.

En la columna 11 a11=V, b11=F, c11=V, d11=F. Al comparar los valores de esta columna con los de p, apreciamos que son iguales. Es el mismo caso de 4 y de 6, sólo que aquí se afirma p. Si q o no q, entonces p, (q v - q) → p. Ejemplo 'Si navegan o no navegan los barcos, entonces el mar es salado'.

En la columna 12: a12=F, b12=F, c12=V, d12=F. Aquí cabe hacer una observación que no se había hecho por considerarla innecesaria anteriormente. Y es que de la columna 16 a la 9, cada una de ellas es la respectiva negación de la columna 1 a la 8. Para el caso de la columna 12 es la negación de la columna 5 'p → q' que es traducible a 'no es el caso de p y no q' , -(p . - q) . De ahí que la columna 12 se interpreta como 'p y no q', (p . - q). Ejemplo: 'Truena y no llueve'.

En la columna 13 a13=V, b13=V, c13=F, d13=F. Lo que la tabla nos describe es la independencia del valor de q, cualquiera sea el valor de p. 'P o no p, entonces q' , $(p \vee - p) \rightarrow q$. Ejemplo: 'Hayan o no hayan seres vivientes, entonces la tierra gira sobre sí misma'.

En la columna 14 a14=F, b14=V, c14=F, d14=F. Es la negación de 3, es 'q y no p', $q . - p$. Ejemplo 'Hace calor y no crecen las plantas'.

En la columna 15 a15=V, b15=F, c15=F, d15=F. Esto es la aserción conjunta, la conjunción de p, q. Y es verdadera sólo en el caso de que ambas proposiciones componentes lo sean. P y q, $p . q$. Ejemplo: 'Newton fue físico y matemático'. Como puede apreciarse esta proposición sólo es verdadera en el caso en Newton haya sido físico y a la vez matemático.

En la columna 16: a16=F, b16=F, c16=F, d16=F. Todos los casos falsos. Esto sólo es posible si hay una violación del principio de contradicción o de no contradicción. 'P y no p; y q y no q'', $[(p . - p).(q . - q)]$. Ejemplo: 'Francia está y no está en Europa; y Argentina está y no está en América'.

La descripción de la tabla queda como sigue:

	p	q	1 (Si p, entonces p; y si q, entonces q) $\{(p \rightarrow p) \cdot (q \rightarrow q)\}$	2 (No conjuntamente p y q) $-(p \cdot q)$	3 (Si q, entonces p) $(q \rightarrow p)$	4 (Si p o no p, entonces no q) $\{(p \vee -p) \rightarrow -q\}$	5 (Si p, entonces q) $(p \rightarrow q)$	6 (Si q o no q, entonces no p) $\{(q \vee -q) \rightarrow -p\}$	7 (Si p, entonces q; y si q, entonces p) $(p \equiv q)$	8 (Ni p ni q) $(-p \cdot -q)$	9 (p o q) $(p \vee q)$	10 (p o q, no ambas) $(p \mathbin{w} q)$	11 (Si q o no q, entonces p) $\{(q \vee -q) \rightarrow p\}$	12 (p y no q) $(p \cdot -q)$	13 (p o no p, entonces q) $\{(p \vee -p) \rightarrow q\}$	14 (q y no p) $(q \cdot -p)$	15 (p y q) $(p \cdot q)$	16 (p y no p; y q y no q) $\{(p \cdot -p) \cdot (q \cdot -q)\}$
a	V	V	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
b	F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
c	V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
d	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F

No obstante la descripción anterior, vamos a explicar los operadores básicos de la lógica proposicional.

Comencemos por considerar los ejemplos de proposiciones siguientes

Dos más dos son cuatro.

Dos por dos son cuatro.

El Sena es un río de Inglaterra.

Dieciseis es el cuadrado de ocho.

José Martí es un héroe cubano.

Todas son proposiciones elementales por no ser descomponibles en otras aserciones, y por otra parte, cada una de ellas sólo tiene dos valores de verdad posibles (o es verdadera o es falsa). A esto hay que agregar que cualquier proposición puede representarse simbólicamente por las letras p, q, r, s, ..., etc. Teniendo en cuenta que en un caso específico la representación simbólica debe conservarse para cada proposición, salvo que se aclare la sustitución.

Con proposiciones elementales se constituyen proposiciones complejas, con un número limitado de conexiones (operadores). Y particularmente yo entiendo que un operador sólo relaciona dos proposiciones, por complejas que éstas sean.

El valor de verdad de una proposición compuesta no sólo depende de los valores de verdad de las proposiciones simples componentes sino también de las conexiones (operadores) establecidos entre éstas.

Así:

Dos por dos son cuatro (p) y José Martí es un héroe cubano (q),

Simbólicamente· (p . q).

Puede descomponerse en las dos proposiciones simples que la componen.

Dos más dos son cuatro (p).

José Martí es un héroe cubano (q).

El valor de verdad de la proposición compuesta

Dos más dos son cuatro y José Martí es un héroe cubano.

Depende de los valores de verdad de las proposiciones simples componentes y del operador '.' que las relaciona.

Este tipo de operación se llama aserción conjunta, conjunción o producto lógico.Y la proposición resultante solamente es verdadera en el caso de que ambas proposiciones sean verdaderas, en todos los demás casos el valor de verdad de la proposición compuesta será falso.

Por qué?

Porque sólo si es verdad que, dos más dos son cuatro y que, José Martí es un héroe cubano. La proposición compuesta es verdadera. Que es el presente caso. Pero si fuese falso que, dos más dos son cuatro, y verdad que, José Martí es un héroe cubano. La proposición compuesta sería falsa. Lo mismo que si fuese verdad que, dos más dos son cuatro. pero falso que, José Martí es un héroe cubano. Así también la proposición compuesta sería falsa, si es falso que dos más dos son cuatro y falso que José Martí es un héroe cubano.

La tabla de verdad de la conjunción queda así.

p	q	(p . q)
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

Ahora formemos otra proposición compuesta

Dos por dos son cuatro (p) o el Sena es un río de Inglaterra (q).

Las proposiciones simples componentes son

Dos por dos son cuatro (p).

El Sena es un río de Inglaterra (q).

El valor de verdad de la proposición compuesta

Dos por dos son cuatro o el Sena es un río de Inglaterra; simbólicamente (p v q). Depende de los valores de verdad de las proposiciones elementales y del operador 'v' que las relaciona.

Este tipo de operación se llama <u>disyunción inclusiva o suma lógica</u>. Y la proposición resultante solamente es falsa, en el caso de que ambas proposiciones componentes sean falsas, en todos los demás casos el valor de verdad de la proposición compuesta es verdadero.

Porque si es verdad que, dos por dos son cuatro y que, el Sena es un río de Inglaterra. La proposición compuesta es verdadera.

Lo mismo que, si es falso que dos por dos son cuatro y verdad que, el Sena es un río de Inglaterra. Así también la proposición compuesta es verdadera, si es verdad que dos por dos son cuatro y falso que el Sena es un río de Inglaterra. Que es el presente caso.

Unicamente será falsa la proposición compuesta, si es falso que dos por dos son cuatro y falso que el Sena es un río de Inglaterra.

La tabla de verdad de la disyunción inclusiva queda así:

p	q	(p v q)
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

la negación. La negación es otra operación lógica. Al aplicarle el operador 'no', '-' a una proposición verdadera se hace una proposición falsa. Y si se aplica a una proposición falsa la hacemos verdadera. Ejemplo:

José Martí es un héroe cubano. (V)

Negación:

José Martí no es un héroe cubano. (F)

O bien

No es cierto que José Martí es un héroe cubano. (F)

Demos un ejemplo con una proposición falsa

Dieciseis es el cuadrado de ocho. (F)

Negación

Dieciseis no es el cuadrado de ocho. (V)

O bien.

No es cierto que dieciseis es el cuadrado de ocho. (V)

La tabla de verdad de la negación es

p	-p
V	F
F	V

Refiriéndose a la negación, Tarski expone. "Cuando enunciamos la negación de una proposición, expresamos con ello la idea de que dicha proposición es falsa."[1] Pero el hecho de negar una proposición no la hace por sí mismo falsa, sino que depende del valor de verdad de la proposi-

[1]TARSKI, Alfred: Introducción a la Lógica y a la metodología de las ciencias deductivas. 2a. Espasa-Calpe, S.A., Madrid, España, 1968, pp. 43

ción negada. Lógicamente lo que ocurre es que al aplicarle el operador '-' a una proposición verdadera, la hacemos falsa; y al aplicárselo a una falsa, la hacemos verdadera.

A continuación expondremos el condicional· éste representa el operador más difícilmente inteligible. Pero yo considero que existe un recurso, y es que en lógica hay que atenerse a lo que estrictamente puede derivarse de una expresión. Así para entender el condicional, hay que limitarse a lo que expresa dice que si un antecedente es verdadero, también debe serlo el consecuente, y no dice otra cosa.

El único caso que no cumple esa condición es cuando el antecedente es verdadero v el consecuente falso. Los casos en los cuales el antecedente es falso están comprendidos en el sentido del condicional, por no ser verdad el antecedente.

Por otra parte, como sostiene Irving M. Copi un enunciado hipotético (condicional) Si p, entonces q es falso, en caso de que la conjunción p . - q sea verdadera, es decir, en el caso que su antecente sea verdadero y su consecuente falso. Para que sea verdadero un enunciado hipotético, pues, debe ser falsa la conjunción indicada, esto es, debe ser verdadera su negación -(p . - q). En otras palabras, para que un enunciado hipotético Si p, entonces q sea verdadero, debe ser también verdadera -(p . - q), la negación de la conjunción de su antecedente con la negación de su consecuente. Por lo tanto, podemos considerar a - (p . - q) como parte del significado de Si p, entonces q.

El significado de todo enunciado hipotético incluye la negación de que su antecedente sea verdadero y su consecuente falso, pero éste no tiene por qué ser todo su significado. Ya que un enunciado hipotético, puede expresar. a) una conexión lógica (Ej Si todo número par es divisible por dos y cuatro es un número par,entonces cuatro es divisible por dos), b) una conexión por definición (Ej Si Nietzsche fue ateo, entonces Nietzsche no fue religioso); una conexión causal (Ej Si un metal se calienta, entonces se dilata), una conexión de decisión práctica (Ej Si una persona a quien se le imputa un delito demuestra su inocencia, entonces será absuelta) . Pero sea cual fuere el tipo de condición afirmada por un enunciado hipotético, parte de su significado es la negación de la conjunción de su antecedente con la negación de su consecuente.

La tabla de verdad de condicional '→' queda así·

p	q	- q	-(p . - q)		p → q
V	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	V *

Pasamos a la <u>disyunción exclusiva</u>. En lenguaje corriente ' p o q, no ambas';en símbolos. (p w q). Aquí suponemos la verdad de una y sólo una de las proposiciones. Es aplicable a proposiciones disyuntivas, pero mutuamente excluyentes por alguna justificación. Así, en la proposición 'Holanda está en Europa o en América'. Que es descomponible en

p) Holanda está en Europa

q) Holanda está en América.

* cf COPI, Irving M. <u>Introducción a lógica</u>. 7a. Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, 1969, pp 230 y 231

Si p es verdadera y q es verdadera. Es falsa (p w q)

Si p es falsa y q es verdadera. Es verdadera (p w q)

Si p es verdadera v q es falsa. Es verdadera (p w q)

Si p es falsa y q es falsa. Es falsa (p w q)

En la tabla

p	q	(p w q)
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	F

El bicondicional. Este operador es traducible como la conjunción de dos condicionales inversos. Como 'Si p, entonces q, y si q, entonces p', 'p si y sólo si q'. Simbólicamente $[(p \rightarrow q) \; . \; (q \rightarrow p)]$ $p \equiv q$.

El bicondicional es verdadero en el caso en que ambos componentes tengan el mismo valor de verdad. Esto puede comprenderse por lo menos por las dos vías siguientes

La primera es aplicar tablas de verdad a la expresión $[(p \rightarrow q) \; . \; (q \rightarrow p)]$, y reconocer que dicha conjunción sólo es verdadera en los casos de que p y q sean ambas falsas o ambas verdaderas.

Y la otra vía es reconocer que sólo cuando ambos componentes del bicondicional tienen el mismo valor de verdad no se viola la definición del condicional, ya que los otros dos casos representan ejemplos en una y otra oportunidad de que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, por tanto, resultan falsos.

En la tabla

p	q	[($p \rightarrow q$)	.	($q \rightarrow p$)]	($p \equiv q$)
V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V

La <u>negación alternativa</u> o <u>incompatibilidad</u>. En lenguaje corriente 'No--- y - - a la vez', o 'No conjuntamente p v q'. Simbólicamente $(p \mid q)$, $-(p \cdot q)$. Una proposición compuesta mediante este operador es falsa si y sólo si las dos proposiciones componentes son verdaderas.[1]

Tomemos la proposición. No es verdad que las aguas de los mares sean dulces y saladas.

Se entiende que·

a) Si es verdad que las aguas de los mares son dulces y es verdad que las aguas de los mares son saladas. La proposición $(p \mid q)$ es falsa.

b) Si es falso que las aguas de los mares son dulces y es verdad que las aguas de los mares son saladas. La proposición $(p \mid q)$ es verdadera.

c) Si es verdad que las aguas de los mares son dulces y es falso que las aguas de los mares son saladas. La proposición $(p \mid q)$ es verdadera.

d) Si es falso que las aguas de los mares son dulces y es falso que

[1] cf QUINE, Willard Van Orman: <u>Desde un punto de vista lógico</u>. Ediciones Ariel, Barcelona, España, 1962, pp 126 y 127.

las aguas de los mares son saladas. La proposición (p | q) es verdadera.

En la tabla

p	q	(p | q)
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	V

Y por último, la negación conjunta. En lenguaje corriente 'ni p ni q'. En símbolos (p ↓ q), es traducible a (- p . - q).

Una proposición compuesta mediante el operador (p ↓ q) es verdadera cuando sus dos proposiciones componentes son falsas.[1]

Así, la proposición 'Carter ni es católico ni musulmán' es verdadera sólo en el caso de que sea falso de que Carter es católico y falso que sea musulmán. En todos los demás casos será falsa.

En la tabla:

p	q	(p ↓ q)
V	V	F
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Una vez expuestos los operadores lógicos, podemos pasar a simbolizar proposiciones más complejas

1. Si todos los alumnos de Etica obtienen al menos 6 de nota final

p

[1] cf QUINE, Willard Van Orman Lógica Matemática. Revista de Occidente, S.A, Madrid, España, 1972, pp 61

entonces,

aprobarán la asignatura

q

y

ganarán 4 U.V

r

Simbólicamente se traduce $p \to (q \cdot r)$

2. Si soy mayor de edad entonces, soy mayor de edad o estudiante.

p p q

Simbólicamente se traduce así $p \to (p \vee q)$

En el consecuente de esta proposición condicional puede apreciarse que el criterio establecido para diferenciar una proposición simple de una compleja es lo suficientemente claro; ya que la proposición 'soy mayor de edad o estudiante' es descomponible en

a) Soy mayor de edad

b) Soy estudiante

3. Si el aparato es bueno y barato entonces, lo compro.

p q r

Simbólicamente se traduce $(p \cdot q) \to r$

En esta proposición el antecedente también permite reconocer el criterio de distinción mencionado, ya que la proposición 'el aparato es bueno y barato' es descomponible en

a) El aparato es bueno

b) El aparato es barato

4. Ni hay vegetación en Marte ni vida inteligente en Mercurio y no existen figuras geométricas que sean planas y esféricas a la vez.

p q r s

Simbólicamente: $[(p \downarrow q) \;.\; (r \mid s)]$

5. El mundo es movimiento y no es movimiento, y,

p $\qquad\qquad$ $-p$

los hombres mueren y no mueren.

q $\qquad\qquad$ $-q$

Simbólicamente $[(p \;.\; -p) \;.\; (q \;.\; -q)]$

6. La luna es cilíndrica o cónica, si y sólo si,

p $\qquad\qquad$ q

New York está en Africa o en Asia.

r $\qquad\qquad$ s

Simbólicamente $[(p \; w \; q) \equiv (r \; w \; s)]$

Luego que hemos simbolizado correctamente una proposición, le aplicamos tablas de verdad para conocer si es una tautología, una contradicción, o una contingencia.

Para realizar una tabla de verdad lo primero que se constituye son las combinaciones posibles de los valores de verdad de las variables proposicionales. El número de combinaciones depende precisamente del número de variables proposicionales componentes y se calcula por la fórmula 2^n. Donde n = número de variables proposicionales componentes. Así: para n= 2, $2^2 = 4$; para n = 3, $2^3 = 8$, para n= 4, $2^4 = 16$, etc,...

Hay dos maneras (que nos garantizan contra un probable error) como podemos distribuir las combinaciones de los valores de verdad. La primera es asignando valores alternantes (V, F) de uno en uno a la variable proposicional inicial, comenzando por el valor 'V' y duplicando este valor para la siguiente, de tal modo que siempre queda para la última, la mitad 'V' y la mitad 'F'. La segunda manera es dividiendo entre 2 el número resultante de la fórmula 2^n y asignando a la variable inicial la primera mitad 'V' y la segunda mitad 'F' El número que resulta en esta división se vuelve a dividir entre 2, y así sucesivamente, de tal modo que a la última variable le corresponden valores alternantes (V, F) de uno en uno.

Ej de la elaboración de las combinaciones de referencia·

Para n = 2, $2^2 = 4$

(a)

p	q	
V	V	
F	V	
V	F	
F	F	

(b)

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Para n = 3, $2^3 = 8$

(a)

p	q	r	
V	V	V	
F	V	V	
V	F	V	
F	F	V	
V	V	F	
F	V	F	
V	F	F	
F	F	F	

(b)

p	q	r	
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Para n = 4, $2^4 = 16$

(a)

p	q	r	s
V	V	V	V
F	V	V	V
V	F	V	V
F	F	V	V
V	V	F	V
F	V	F	V
V	F	F	V
F	F	F	V
V	V	V	F
F	V	V	F
V	F	V	F
F	F	V	F
V	V	F	F
F	V	F	F
V	F	F	F
F	F	F	F

(b)

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	V	F
V	V	F	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	V	F
V	F	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	V	F
F	F	F	V
F	F	F	F

A continuación vamos a resolver los 6 ejemplos de proposiciones que hemos expuesto. Pero antes vamos a aclarar los conceptos a que ya se ha hecho referencia tautología, contradicción y contingencia.

C.- Una proposición es una tautología si en la columna que representa el resultado final de su tabla de verdad todos sus valores son 'V'. Y toda tautología es una ley lógica, es decir es una proposición lógicamente verdadera.

Una proposición es una contradicción si en el resultado final de su tabla de verdad, da todos 'F' Una contradicción es una falsedad lógica, o sea que no es válida lógicamente.

Y una proposición es una contingencia si es verdadera en unos casos (con la combinación de determinados valores de verdad de sus componentes) y falsa en otros.

Si una proposición es una ley o una falsedad en lógica proposicional, lo será también a su vez en lógica de clases y lógica de relaciones.

Las inferencias de clases o de relaciones que por su propia estrutura son válidas en lógica de clases o de relaciones, al aplicarles la lógica proposicional, si bien no resultan tautológicas, si no son leyes en lógica proposicional, tampoco resultan contradictorias.[1]

---

[1] cf AGAZZI, Evandro: La lógica simbólica. 2a. Editorial Herder, Barcelona, España, 1973, pp 155.

Resolviendo

1. $p \rightarrow (q \cdot r)$

p	q	r	p →	(q . r)
V	V	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	F	V	V	F
V	V	F	F	F
F	V	F	V	F
V	F	F	F	F
F	F	F	V	F

Contingencia

2. $p \rightarrow (p \vee q)$

p	q	p →	(p v q)
V	V	V	V
F	V	V	V
V	F	V	V
F	F	V	F

Tautología

3. $(p \cdot q) \rightarrow r$

p	q	r	$(p \cdot q)$	$\rightarrow r$
V	V	V	V	V
F	V	V	F	V
V	F	V	F	V
F	F	V	F	V
V	V	F	V	F
F	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	F	F	F	V

Contingencia

4. $[(p \downarrow q) \cdot (r \mid s)]$

p	q	r	s	$[(p \downarrow q)$	$\cdot$	$(r \mid s)]$
V	V	V	V	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F
V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V
F	F	F	F	V	V	V

Contingencia

5. {(p . - p) . (q . - q)}

p	q	(p . - p)		.	(q . - q)	
V	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

Contradicción

6. {(p w q) ≡ (r w s)}

p	q	r	s	(p w q)	≡	(r w s)
V	V	V	V	F	V	F
F	V	V	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F
V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V
V	V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V
V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	V	F

Contingencia

Obtenemos el resultado

Tautología (2)

Contradicción: (5)

Contingencia· (1), (3), (4), (6)

La 2 es una ley lógica. Es una verdad en sí misma, y además, cualquier inferencia que se ajuste a su forma es una inferencia válida.

La 5 es una contradicción. Es una falsedad lógica. Es una violación a los principios lógicos. Y cualquier razonamiento que tenga esa forma, es una contradicción, y por tanto, no ès válido lógicamente.

La 1, 3, 4 y 6 son contingencias, su verdad o falsedad lógica está condicionada por las circunstancias de combinación de valores de verdad de sus variables.

Para reconocer cuando una expresión simbólica es una ley de la lógica proposicional, además de la vía de aplicación de tablas de verdad, existe otra (la de reducción al absurdo) que es mucho más corta.

Dada, por ejemplo, la expresión

$$[(p \rightarrow q) \cdot p] \rightarrow q$$

Se considera como hipótesis la contradicción de esta expresión, y, si es contradictoria, en el resultado de su operador principal tiene que dar 'F'

$$[(p \rightarrow q) \cdot p] \underset{F}{\rightarrow} q \qquad \text{(a)}$$

Pero para que este condicional sea falso: su antecedente tiene que ser verdadero y su consecuente falso

$$[(p \rightarrow q) \underset{V}{\cdot} p] \underset{F}{\rightarrow} q \qquad \text{(b)}$$

Y, para que $[(p \rightarrow q) . p]$ sea verdadera, ambos miembros de la conjunción tienen que ser verdaderos

$$\underset{V}{[(p \rightarrow q)} \;.\; \underset{V}{p]} \qquad (c)$$

Pero $(p \rightarrow q)$, si en el desarrollo de la hipótesis a p se le ha supuesto 'V' en (c) y a q se le ha supuesto 'F' en (b) entonces $(p \rightarrow q)$, es falso

$$\underset{F}{(p \rightarrow q)}$$

luego $\underset{F}{[(p \rightarrow q) . p]}$

y, siendo falso este antecedente y siendo falso el consecuente q en (b) $[(p \rightarrow q) . p] \rightarrow q$ es 'V', lo cual es contrario a la hipótesis de contradictoriedad con la que iniciamos. Luego $[(p \rightarrow q) . p] \rightarrow q$ es una tautología, una ley de la lógica proposicional.

En otro ejemplo

$p \rightarrow (p \vee q)$.

Por hipótesis es contradictoria

$$p \underset{F}{\rightarrow} (p \vee q)$$

Pero para que un condicional sea falso, el antecedente ha de ser verdadero y su consecuente falso

$$\underset{V}{p} \rightarrow \underset{F}{(p \vee q)} \qquad (a)$$

Pero $(p \vee q)$ no puede ser falsa porque en el desarrollo de la hipótesis a p la hemos supuesto verdadera en (a) y siendo $(p \vee q)$ una disyunción inclusiva, con uno de sus miembros que sea verdadero la proposición compuesta es verdadera. Luego la hipótesis de contradictoriedad de la expresión $p \rightarrow (p \vee q)$ es falsa. Por lo tanto $p \rightarrow (p \vee q)$, es una ley de la lógica proposicional.[1]

Si no se prueba que una expresión determinada es una tautología o una contradicción, es obvio que es una contingencia.

Aplicando la concepción de los operadores o recurriendo al uso de equivalencias proposicionales se pueden establecer algunas leyes lógicas.

Para expresar las equivalencias proposicionales se utiliza el bicondicional por coincidir las condiciones de verdad de éste con el concepto de equivalencia. Dos proposiciones son equivalentes si sus valores de verdad son exactamente iguales. Y un bicondicional es verdadero si los valores de verdad de las dos proposiciones son iguales. De ahí que si dos proposiciones son equivalentes al vincularlas mediante el bicondicional, se obtiene una tautología.

Así tenemos

Principio de identidad

L1a· $p \rightarrow p$

L1b $p \equiv p$

Principio de no contradicción

L_2 $-(p \quad - p)$

Principio del tercero excluído

L_3 $p \vee - p$

[1] cf DEAÑO, Alfredo: Introducción a la lógica formal (La lógica de enunciados). Alianza Universidad (Alianza Editorial, S.A), Madrid, España, 1974, pp 105 y 106.
También: Evandro Agazzi La lógica simbólica. 2a. Editorial, Herder, Barcelona, España, 1973, pp 189-191.

Ley de doble negación

L4: $p \equiv - - p$

Leyes de simplificación

L5a: $(p . q) \rightarrow p$

L5b: $p \rightarrow (p \vee q)$

Leyes de conmutación

L6a. $(p . q) \equiv (q . p)$

L6b: $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

L6c. $(p \equiv q \quad \equiv (q \equiv p)$

Leyes de asociación

L7a: $[(p . q) . r] \equiv [p . (q . r)]$

L7b: $[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$

L7c: $[(p \equiv q) \quad r] \equiv [p \equiv (q \equiv r)]$

Leyes de distribución

L8a: $[p . (q \vee r)] \equiv [(p . q) \vee (p . r)]$

L8b: $\{ p \vee (q . r)] \equiv [(p \vee q) . (p \vee r)]$

L8c: $[p \rightarrow (q . r)] \equiv [(p \rightarrow q) . (p \rightarrow r)]$

L8d: $[p \rightarrow (q \vee r)] \equiv [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$

Leyes de transitividad

L9a: $[(p \rightarrow q) . (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

L9b: $[(p \equiv q) . (q \equiv r)] \rightarrow (p \equiv r)$

Ley del dilema

L10: $\{[(p \rightarrow q) . (r \rightarrow s)] . (p \vee s)\} \rightarrow$

Ley de exportación

L11: $[(p . q) \rightarrow r] \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

Leyes de transposición

L12a: $(p \to q) \equiv (-q \to -p)$

L12b: $(p \equiv q) \equiv (-q \equiv -p)$

Ley del bicondicional

L13· $(p \equiv q) \equiv [(p \to q) \,.\, (q \to p)]$

Ley condicional-disyunción

L14. $(p \to q) \equiv (-p \vee q)$

Ley condicional-conjunción

L15: $(p \to q) \equiv -(p \,.\, -q)$

Leyes de dualidad o leyes de De Morgan

L16a· $-(p \,.\, q) \equiv (-p \vee -q)$

L16b· $-(p \vee q) \equiv (-p \,.\, -q)$

Leyes de expansión

L17a: $(p \to q) \equiv [p \equiv (p \,.\, q)$

L17b: $(p \to q) \equiv [q \equiv (p \vee q)$

Ley del modus ponens

L18· $[(p \to q) \,.\, p] \to q$

Ley del modus tollens

L19: $[(p \to q) \,.\, -q] \to -p$ *

L20a: $[(p \vee q) \,.\, -q] \to p$

L20b: $[(p \vee q) \,.\, -p] \to q$

---

* La ordenación de L1 a L19 ha sido tomada, por considerarlo adecuado, de José Ferrater Mora y Hugues Leblanc: Lógica Matemática. 2a edición (5a. reimpresión) . Fondo de Cultura Económica, México, D.F., México, 1973, pp 42-45

D.- Además, tenemos la prueba en lógica proposicional a nivel de la deducción natural (en lenguaje corriente, natural) que se da mediante la aplicación de reglas de inferencia (metalenguaje) que garantizan el paso de premisas a conclusión. La mayoría de reglas tienen su correspondencia en leyes proposicionales, pero no existe prioridad de unas a otras. Sencillamente las leyes son expresiones verdaderas de un cálculo, y en cambio, las reglas son instrumentos de construcción.

En diversos tratados de lógica existen distintas ordenaciones tanto de leyes como de reglas. Pero lo que en este caso interesa es traer a cuenta que se tienen recursos para garantizar una <u>deducción</u> en lógica proposicional a nivel del lenguaje corriente.

He aquí algunas reglas,[1]

<u>Modus Ponens</u> (MP)

Siendo A y B fórmulas

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \underline{A} \\ B \end{array}$$

Supuesta una implicación y supuesto, también, como premisa, el antecedente de la implicación, se puede afirmar de manera independiente la fórmula que hace de consecuente de la implicación. A esta regla se le conoce también como 'Regla de Eliminación del Implicador', 'EI', y 'Regla de Separación', 'RS'.

Ejemplo de deducción mediante el MP en lenguaje corriente·

Si Pedro es mayor de edad, es ciudadano

Es mayor de edad

[1] cf SERRANO, Sebastián: <u>Lógica, Linguística y matemáticas</u>. Editorial Anagrama, Barcelona, España, 1977, pp 34-47.

Por tanto, es ciudadano

En símbolos

1. $p \rightarrow q$ P*

2. p P*

3. q MP 1, 2.

<u>Modus tollens</u> (MT)

Siendo A y B fórmulas

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ -B \end{array}}{-A}$$

Tomando como premisas la afirmación de la implicación y la negación de la fórmula que hace de consecuente en la implicación, podemos negar, como conclusión, el antecedente.

Ejemplo de deducción mediante el MT en lenguaje corriente

Si el gobierno de Idí Amin es liberal, defiende los derechos humanos

No defiende los derechos humanos

Por tanto, no es liberal

En símbolos

1. $p \rightarrow q$ P

2. $- q$ P

3. $- p$ MT, 1,2.

---

* Premisa

Doble negación (DN)

Siendo A fórmula

$$\frac{- - A}{A} \qquad\qquad \frac{A}{- - A}$$

De una doble negación se concluye la afirmación de una fórmla, y viceversa.

Ejemplo de deducción mediante DN en lenguaje corriente:

(a) No ocurre que un atleta no sea deportista

Por tanto, un atleta es deportista

(b) Un poeta es un artista

Por tanto, no ocurre que un poeta no sea un artista

En símbolos:

(a) 1. $- - p$ p

2. p DN,1.

(b) 1. p P

2. $- - p$ DN, 1

Simplificación (Simp)

Siendo A y B fórmulas

$$\frac{A . B}{A} \qquad\qquad \frac{A . B}{B}$$

Si se tiene una conjunción como premisa, se puede inferir cualquiera de los miembros componentes de la conjunción.

Ejemplo de deducción mediante la Simp en lenguaje corriente:

(a) Víctor Hugo es literato y Elizabeth Taylor es actriz

Por tanto, Víctor Hugo es literato

(b) Víctor Hugo es literato y Elizabeth Taylor es actriz

Por tanto, Elizabeth Taylor es actriz

En símbolos

(a)	1. p . q	P	(b)	1. p . q	P
	2. p	Simp, 1.		2. q	Simp, 1.

Silogismo disyuntivo (SD)

Siendo A y B fórmulas

$$\frac{A \lor B \quad -A}{B} \qquad \frac{A \lor B \quad -B}{A}$$

Dadas como premisas una diyunción y la negación de uno de los miembros componenetes de dicha disyunción, la conclusión afirma el otro miembro componente.

Ejemplo de deducción mediante SD en lenguaje corriente·

(a) Van Gogh pintó por dinero o por necesidad del arte

No pintó por dinero

Por tanto, pintó por necesidad del arte

(b) El conocimiento trae el hombre.libertad o corrupción

No trae corrupción

Por tanto, trae libertad

En símbolos:

(a)	1. p v q	P	(b)	1. p v q	P
	2.-p	P		2.-p	P
	3. q	SD, 1,2.		3. p	SD1,2.

Adición (Ad)

Siendo A y B fórmulas

A

A v B

Si se tiene un enunciado como premisa, se puede concluir la disyunción de dicho enunciado con otro cualquiera.*

Ejemplo de deducción mediante Ad en lenguaje corriente

Dilthey es filósofo

Por tanto, Diltey es filósofo o químico

En símbolos

1. p P
2. ∴ p v q Ad, 1.

Dilema (Dil)

Siendo A, B, C v D fórmulas

A v B

A → C

B → D

C v D

Si las premisas son una disyunción y dos implicaciones cuyos antecedentes respectivos son los dos miembros componentes de la disyunción,

---

* Esta Regla tiene su correspondencia en una de las leyes que Ferrater Mora y Leblanc han colocado bajo el título de 'Leyes de simplificación' (L5b), y que casualmente en el presente trabajo ha sido mostrada como tautología mediante tablas de verdad.

podemos afirmar como conclusión una disyunción cuyos miembros componentes sean, respectivamente, los consecuentes de las implicaciones dadas como premisas.

Ejemplo de deducción mediante Di1 en lenguaje corriente:

El trabajo individual contribuye al bienestar público o familiar. Si contribuye al bienestar público, es fuente de progreso nacional. Si contribuye al bienestar familiar, es fuente de progreso familiar. Por tanto, el trabajo individual es fuente de progreso nacional o familiar.

En símbolos:

1. $p \vee q$	P
2. $p \rightarrow r$	P
3. $q \rightarrow s$	P
4. $r \vee s$	Di1, 1,2.3

<u>Coimplicación</u> (Coimp)

Siendo A y B fórmulas

De dos implicaciones de las cuales el antecedente de una es el consecuente de la otra, y viceversa, se puede concluir una coimplicación de las dos fórmulas que funcionan como antecedentes y consecuentes de las premisas. Inversamente, de una coimplicación se puede concluir cualquiera de las dos implicaciones.

$$\frac{\begin{array}{c}A \rightarrow B\\ B \rightarrow A\end{array}}{A \equiv B} \qquad \frac{A \equiv B}{A \rightarrow B} \qquad \frac{A \equiv B}{A \rightarrow B}$$

Ejemplo de deducción mediante Coimp en lenguaje corriente:

(a) Si puede haber inversión, hay acumulación de capital

Si hay acumulación de capital, puede haber inversión

Por lo tanto, puede haber inversión si y sólo si hay acumulación de capital

(b,i) Puede haber inversión si y sólo si hay acumulación de capital

Por lo tanto, si puede haber inversión hay acumulación de capital

(b,ii) Puede haber inversión si y sólo si hay acumulación de capital

Por lo tanto, si hay acumulación de capital, puede haber inversión

En símbolos:

(a)	1. $p \rightarrow q$	P	(b,i)	1. $p \equiv q$	P
	2. $q \rightarrow p$	P		2. $p \rightarrow q$	Coimp. 1
	3. $p \equiv q$	Coimp. 1,2	(b,ii)	1. $p \equiv q$	P
				2. $q \rightarrow p$	Coimp. 1

Además, se pueden hacer inferencias combinando dos o más de estas reglas. Como puede apreciarse en el ejemplo de Sebastián Serrano (op. cit., pp 40 y 41) que presentamos a continuación.

Si se aprueba la ley del divorcio entonces los ultras saldrán a la calle y los católicos se dividirán. Si los obispos se manifiestan entonces los católicos no se dividirán. O los obispos se manifiestan o vencerán las izquierdas. Se aprueba la ley del divorcio. Por lo tanto vencerán las izquierdas.

Simbolizando las proposiciones:

Se aprueba la ley del divorcio: p

Los ultras saldrán a la calle: q

Los católicos se dividirán: r

Los obispos se manifiestan: s

Vencerán las izquierdas: t

Las premisas son simbolizadas $p \rightarrow q \,.\, r$, $s \rightarrow - r$, $s \vee t$, p y la conclusión es t.

1. $p \rightarrow (q \,.\, r)$	P
2. $s \rightarrow - r$	P
3. $s \vee t$	P
4. p	P
5. $q \,.\, r$	MP 1,4.
6. r	Sip 5.
7. $- - r$	DN 6.
8. s	MT 2,7
9. t	SD 3,8

E.- Por último, en cuanto a lógica proposicional, presentamos un sistema deductivo fundamentado básicamente en cuatro de los cinco axiomas de la primera edición de Principia Mathematica[1] suprimiendo el cuarto axioma por haberse demostrado la posibilidad de derivarlo a partir de los otros cuatro (Bernays, 1926).

Sin embargo, por considerarlo de utilidad, presentamos dicho axioma como T2.

A) Símbolos primitivos:

1- Variables proposicionales: $p, q, r, s, t, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, \ldots p_n, q_n, r_n$ s_n, t_n.

2- Operadores de enunciados: $-$, $\vee$.

1cf DEAÑO, Alfredo: Introducción a la lógica formal (La lógica de enunciados). Alianza Universidad (Alianza Editorial, S.A), Madrid, España, 1974, pp 121-132.

cf RUSSELL, Bertrand: Introducción a la Filosofía matemática . Obras completas, tomo II. Aguilar, S.A. de Ediciones, Madrid, España, 1973, pp 1355 y 1356.

3. Signos de puntuación: ( ), [ ], { } .

B) Símbolos definidos:

(.) X . Y = Df -(- X v - Y)

(→) X → Y = Df - X v Y

(≡) X ≡ Y = Df -[- (X v Y) v - (- Y v X)].

c) Reglas de formación:

RF_1. Una variable proposicional sola es una expresión bien formada del cálculo (EBF).

RF_2. Si X es una EBF, entonces -X también lo es.

RF_3. Si X e Y son EBF, entonces X v Y también lo es.

RF_4. Estas son todas las reglas de formación del cálculo.

D) Axiomas:

A_1 (p v p)→ p

A2 q → (p v q)

A3 (p v q)→ (q v p)

A4 (q → r → [(p v q) → (p v r)]*

E) Reglas de transformación:

RT_1. Dada una tesis del cálculo, en la que aparece variables de enunciados, el resultado de sustituir una, algunas o todas esas variables por fórmulas bien formadas del cálculo será también una tesis del cálculo. Esto con una restricción imprescindible: cada variable ha de ser sustituida siempre que aparece, y siempre por el mismo sustituto.

---

* En PM este es A_5

Dicho de modo más riguroso. si X es una tesis del sistema en la que aparecen distintas variables $p_1, p_2 \ldots, p_n$, e $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ son expresiones bien formadas del cálculo, las expresiones resultantes de sustituir en X_{p_1} por Y_1, p_2 por $Y_2, \ldots, p_n$ por Y_n será asimismo una tesis del sistema.

Se llama a esta regla 'Regla de sustitución', 'RS'.

RT_2. Si 'X' es una tesis del sistema, y lo es también la expresión 'X → Y' , entonces 'Y' es una tesis del sistema.

Esta regla se llama 'Regla de Separación', 'RS'; pero, por coincidir en castellano sus iniciales con las de la anterior, para abreviarla se usan sus iniciales del inglés, RD ('Rule of Detachment')

RT_3. Si 'X → Y' es una tesis del sistema, entonces , si 'Y → Z' es una tesis del sistema, es también una tesis del sistema 'X → Z'.

Dicho de otro modo: Si 'X → Y' e 'Y → Z' son tesis del sistema, entonces 'X → Z' es una tesis del sistema.

Esta regla es una regla derivada de RT_1 y RT_2.

A esta regla se le llama 'Regla de transitividad del condicional', 'RT→'.

<u>TEOREMAS</u>

T1. $p \rightarrow (p \vee p)$

Demostración

1. $q \rightarrow (p \vee q)$	A_2
2. $p \rightarrow (p \vee p)$	RS (q/p), 1

T2. $(p \vee (q \vee r)) \to (q \vee (p \vee r))$

Demostración:

1. $q \to (p \vee q)$	A_2
2. $r \to (p \vee r)$	RS (q/r),1
3. $(q \to r) \to ((p \vee q) \to (p \vee r))$	A4.
4. $(r \to (p \vee r)) \to \{(q \vee r)\ \ q \vee (p \vee r))\}$	RS$(p/q,\ q/r,\ r/(p \vee r))$,3.
5. $(q \vee r) \to (q \vee (p \vee r))$	RD, 2,4.
6. $\{(q \vee r) \to (q \vee (p \vee r))\} \to \{(p \vee (q \vee r)) \to \langle p \vee (q \vee (p \vee r))\rangle\}$	RS$\{q/(q \vee r), r/(q \vee (p \vee r))\}$,3
7. $(p \vee (q \vee r)) \to \{p \vee (q \vee (p \vee r))\}$	RD, 5,6
8. $(p \vee q) \to (q \vee p)$	A3
9. $(r \vee p) \to (p \vee r)$	RS $(p/r,\ q/p)$,8.
10. $q \to (p \vee q)$	A2
11. $p \to (r \vee p)$	RS $(q/p,\ p/r)$,10.
12. $p \to (p \vee r)$	RT→9,11.
13. $(p \vee r) \to (q \vee (p \vee r))$	RS $(q/(p \vee r),\ p/q)$,10.
14. $p \to (q \vee (p \vee r))$	RT→ 12,13
15. $(q \to r) \to ((p \vee q) \to (p \vee r))$	A4
16. $\{p \to (q \vee (p \vee r))\} \to \{\langle (q \vee (p \vee r)) \vee p\rangle \to \langle (q \vee (p \vee r)) \vee (q \vee (p \vee r))\rangle\}$	RS$\{p/(q \vee (p \vee r)), q/p,$ $r/(q \vee (p \vee r))\}$,15
17. $\{(q \vee (p \vee r)) \vee p\} \to \{(q \vee (p \vee r)) \vee ((q \vee (p \vee r))\}$	RD, 14,16
18. $(p \vee p) \to p$	A1
19. $\{(q \vee (p \vee r)) \vee (q \vee (p \vee r))\} \to (q \vee (p \vee r))$	RS$\{p/(q \vee (p \vee r))\}$,18
20. $\{(q \vee (p \vee r)) \vee p\} \to (q \vee (p \vee r))$	RT→ , 17, 19
21. $(p \vee q) \to (q \vee p)$	A3
22. $\{p \vee (q \vee (p \vee r))\} \to \{(q \vee (p \vee r)) \vee p\}$	RS$\{q/(q \vee (q \vee r))\}$, 21

23. $\{p \vee [q \vee (p \vee r)]\} \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$ RT → 20,22

24. $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$ RT → 7, 23

T3. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$

Demostración:

1 $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$ T2

2. $[-p \vee (-q \vee r)] \rightarrow [-q \vee (-p \vee r)]$ RS (p/- p, q/-q), 1

3. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$ Def → 2

T4. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

Demostración:

1. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$ A4

2. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(-p \vee q) \rightarrow (-p \vee r)]$ RS (p/- p),1

3. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$ Def → 2

T5. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

Demostración:

1. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$ T3

2. $\{(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]\} \rightarrow \{(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]\}$

RS [p/(q→r), q/(p→ q), r/(p →r)], 1

3. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$ T4

4. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$ RD, 2,3

T6. $p \rightarrow p$

Demostración:

1. $p \rightarrow (p \vee p)$ T1
2. $(p \vee p) \rightarrow p$ A1
3. $p \rightarrow p$ RT → , 1, 2

T7. $- p \vee p$

Demostración

1. $p \to p$	T6
2. $- p \vee p$	Def $\to$ 1.

T8. $p \vee - p$

Demostración.

1. $(p \vee q) \to (q \vee p)$	A3
2. $(- p \vee p) \to (p \vee - p)$	RS $(p/- p, q/p)$, 1
3. $- p \vee p$	T7
4. $p \vee - p$	RD, 2, 3

T9. $(p \to - p) \to - p$

Demostración

1. $(p \vee p) \to p$	A1
2. $(- p \vee - p) \to - p$	RS $(p/ - p)$, 1
3. $(p \to - p) \to - p$	Def $\to$, 2

T10. $p \to - - p$

Demostración:

1. $p \vee - p$	T8
2. $- p \vee - - p$	RS $(p /- p)$, 1
3. $p \to - - p$	Def $\to$ 2

T11. $(p \to q) \to (-q \to -p)$

Demostración:

1. $(q \to r) \to [(p \to q) \to (p \to r)]$	T4
2. $(q \to --q) \to [(p \to q) \to (p \to --q)$	RS (r/- - q), 1.
3. $(p \to --p)$	T10
4. $(q \to --q)$	RS (q/p), 3.
5. $(p \to q) \to (p \to --q)$	RD, 2,4
6. $(p \vee q) \to (q \vee p)$	A3
7. $(-p \vee --q) \to (--q \vee -p)$	RS (p/- p, q/ - - q),6
8. $(p \to --q) \to (-q \to -p)$	Def $\to$ 7.
9. $(p \to q) \to (-q \to -p)$	RT $\to$ 5, 8

T12. $p \to (p \vee q)$

Demostración:

1. $q \to (p \vee q)$	A2
2. $p \to (q \vee p)$	RS (q/p, p/q), 1
3. $(p \vee q) \to (q \vee p)$	A3
4. $(q \vee p) \to (p \vee q)$	RS (p/q, q/p), 3
5. $p \to (p \vee q)$	RT $\to$ 2.4

T13. $(p \to -q) \to (q \to -p)$

Demostración

1. $(p \vee q) \to (q \vee p)$	A3
2. $(-p \vee -q) \to (-q \vee -p)$	RS (p/-p, q/- q), 1
3. $(p \to -q) \to (q \to -p)$	Def $\to$ 2

T14 $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [(p \vee q) \vee r]$

Demostración:

1. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ — A3
2. $(q \vee r) \rightarrow (r \vee q)$ — RS(p/q, q/r), 1
3. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$ — A4
4. $[(q \vee r) \rightarrow (r \vee q)] \rightarrow \{[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [p \vee (r \vee q)]\}$ — RS [q/(q v r), r/(r v q)], 3
5. $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [p \vee (r \vee q)]$ — RD, 2,4
6. $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$ — T2
7. $[p \vee (r \vee q)] \rightarrow [r \vee (p \vee q)]$ — RS (q/r, r/q, 6)
8. $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [r \vee (p \vee q)]$ — RT → 5,7
9. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ — A3
10. $[r \vee (p \vee q)] \rightarrow [(p \vee q) \vee r]$ — RS [p/r, q/(p v q)] ,9
11. $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [(p \vee q) \vee r]$ — RT → 8, 10

T15. $- - p \rightarrow p$

Demostración·

1. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$ — A4
2. $(- p \rightarrow - - - p) \rightarrow [(p \vee - p) \rightarrow (p \vee - - - p)]$ — RS (q/- p, r/ - - - p),1
3. $p \rightarrow - - p$ — T10
4. $- p \rightarrow - - - p$ — RS (p/- p), 3
5. $(p \vee - p) \rightarrow (p \vee - - - p)$ — RD, 2,4
6. $p \vee - p$ — T8
7. $p \vee - - - p$ — RD, 5,6
8. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ — A3

9.	$(p \vee - - - p) \rightarrow (- - - p \vee p)$	RS $(q/ - - - p)$, 8
10.	$- - - p \vee p$	RD 7, 9
11.	$- - p \rightarrow p$	Def $\rightarrow$ 10

BIBLIOGRAFIA

1. AGAZZI, Evandro: La Lógica simbólica. 2a. Editorial Herder, Barcelona España, 1973.

2. CASSIRER, Ernst. El problema del conocimiento, tomo I. 2a. Fondo de Cultura Económica, México, D.F., México, 1965.

3. COPI, Irving M.: Introducción a la lógica. 7a. Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, 1969.

4. DEAÑO, Alfredo: Introducción a la Lógica formal (La lógica de enunciados) Alianza Universidad (Alianza Editorial, S.A) Madrid, España, 1974.

5. FERRATER MORA, Jósé y Hugues Leblanc· Lógica matemática. 2a. Fondo de Cultura Económica, México, D.G., México 1973.

6. KNEALE, William y Martha: El desarrollo de la lógica. Editorial Tecnos, S.A., Madrid, España, 1972.

7. LADRIERE, Jean: Limitaciones internas de los formalismos. Editorial Tecnos, S.A., Madrid, España, 1969.

8. NAGEL, Ernest. Simbolismo y Ciencia. Ediciones Nueva Visión, Buenos Aires, Argentina, 1972.

9. QUINE, Willar Van Orman: Desde un punto de vista lógico. Ediciones Ariel, Barcelona, España, 1962.

10. Idem: Lógica Matemática. Revista de Occidente, S.A., Madrid, España, 1972.

11. RUSSELL, Bertrand. Introducción a la filosofía matemática, Obras completas, tomo II. Aguilar, S.A., de Ediciones Madrid, España, 1973.

12. SERRANO, Sebastián Lógica, lingüística y matemática. Editorial Anagrama, Barcelona, España, 1977.

13. TARSKI, Alfred: Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas. 2a. Espasa-Calpe, S.A. Madrid, España, 1968.

14. WITTGENSTEIN, Ludwing; Tractatus lógico-philosophicus. Alianza Universidad (Alianza Editorial, S.A) Madrid, España, 1973.