UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

Facultad de Ciencias y Humanidades

PSEUDOCOMPLEMENTOS EN CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

TRABAJO DE INVESTIGACION

PRESENTADO POR

JOAQUIN ANTONIO SERMEÑO LIMA

PREVIO A LA OPCION DEL TITULO DE

Licenciado en Matemática

— ENERO 1976 —

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
INSTITUTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Para Silvia con
el cariño de
Joaquin

S.S. - 29-II-76

"PSEUDOCOMPLEMENTOS EN CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS"

TRABAJO PRESENTADO POR:

JOAQUIN ANTONIO SERMEÑO LIMA

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

ENERO DE 1976

SAN SALVADOR EL SALVADOR CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR EN FUNCIONES

DR. CARLOS ALFARO CASTILLO

SECRETARIO GENERAL

DR. MANUEL ATILIO HASBUN

FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DECANO

LIC. RENE VAQUERANO

SECRETARIO

LIC. SALVADOR ALBERTO VALDIVIESO

TRIBUNAL DE TESIS

ING. FRANCISCO MARROQUIN

LIC. MARIO MORALES BURGOS

LIC. JAVIER RIVERA LAZO

A MIS PADRES

CON AGRADECIMIENTO

INTRODUCCION

Con el presente trabajo perseguimos alcanzar una idea central: ayudar, en la medida de nuestras posibilidades, a la divulgación de temas relacionados con estructuras de orden, las cuales se han encontrado un tanto relegadas del trabajo matemático en nuestro medio.

Con esta idea en mente planeamos el trabajo ha realizar en dos sentidos. El primero de ellos, encaminado a un estudio general de los Conjuntos Parcialmente Ordenados, fundamentalmente al caso más importante de éstos: las redes. En segundo lugar, se presenta un estudio particular de ciertos elementos especiales: los pseudocomplementos.

Para el primer aspecto, hemos dedicado los dos primeros capítulos del trabajo. En el primer capítulo no se pretende conseguir nada más que familiarizarnos con los conceptos básicos necesarios para trabajar nuestras estructuras de orden. En el segundo capítulo se tratan las redes presentándolas como una estructura algebraico-ordenada y se estudian a la vez casos importantes de éstas: redes distributivas, redes complementadas y algebras Booleanas.

El estudio particular de los pseudocomplementos se ha hecho en dos niveles. Una primera presentación de ellos en la estructura de red, y después, generalizamos su estudio a los Conjuntos Parcialmente Ordenados. Para ello, se han utilizado ideales y semi-ideales; se construye el Conjunto de los ideales y de los semi-ideales de un Conjunto Parcialmente Ordenado y se muestra que ellos forman una red (con variadas propiedades) bajo la inclusión de conjuntos como relación de orden. Se finaliza el estudio presentando las Algebras Booleanas mediante diversos tipos de redes auxiliadas por pseudocomplementos.

En la parte medular del trabajo, se ha seguido el artículo del Profesor P. V. Venkatanarasimhan: "PSEUDO-COMPLEMENTS IN POSETS", el cual constituyó la motivación para esta modesta investigación bibliográfica.

I N D I C E

CAPITULO PRIMERO
CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

1.1 DEFINICIONES. SIMBOLOGIA A UTILIZAR

En el presente trabajo, nos referiremos a los Conjuntos Parcialmente Ordenados mediante la abreviatura COPO. Si en un conjunto $\mathbb{E}$ está definida una relación de orden ϕ, diremos que "$\mathbb{E}$ es un copo respecto a ϕ". Cuando el orden se halla puesto en evidencia, o si no hay lugar a confusión, diremos sencillamente, por abuso de lenguaje, que "$\mathbb{E}$ es un copo".

La relación de orden en un copo $\mathbb{E}$, la representaremos por el signo convencional "$x \leq y$" para elementos x, y de $\mathbb{E}$. La relación "$x < y$" será equivalente a la relación "$x \leq y \;\wedge\; x \neq y$". Por otro lado la relación "$x \leq y$" (respect. "$x < y$") se podrá denotar por "$y \geq x$" (respect. $y > x$).

Si la relación "$x \leq y \;\vee\; y \leq x$" es verdadera, diremos que los elementos x e y del copo $\mathbb{E}$ son "comparables", en caso contrario se dirá que ellos son "no comparables".

Siempre que en un copo $\mathbb{E}$, la relación:

$(\forall x)(\forall y)\ (((x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}) \Longrightarrow (x \leq y \;\vee\; y \leq x))$

sea verdadera, diremos que $\mathbb{E}$ es un conjunto completamente ordenado respecto al orden en $\mathbb{E}$ (o sencillamente, que $\mathbb{E}$ es una CADENA).

Algunos ejemplos de Copos y Cadenas son los siguientes:

E1: En $\mathbb{R}$, la relación:

$$"x \leq y \iff (y - x) \in \mathbb{R}^+"$$

lo ordena completamente.

En lo sucesivo, nos referiremos a ésta relación bajo el nombre de "orden usual en $\mathbb{R}$". (Lo mismo que para los subconjuntos de $\mathbb{R}$ ordenados bajo ésta relación).

E2: El conjunto de subconjuntos del conjunto A, que lo representaremos por P(A), es parcialmente ordenado por la relación:

$$"x \leq y \iff x \subset y".$$

E3: Sea A conjunto. Llamaremos R(A) al conjunto de todas las relaciones en A. En R(A) podemos introducir un orden parcial mediante la relación:

$$\phi \leq \psi \iff (\forall x)(\forall y)(((x, y) \in A \times A \ \wedge \ x \phi y) \Longrightarrow x \psi y).$$

En efecto:

i) La relación es reflexiva, ya que para todo $\phi \in R(A)$, si "$x \phi y$" es verdadera, también lo es la relación "$x \phi y \Longrightarrow x \phi y$", con lo cual $\phi \leq \phi$.

ii) Es antisimétrica, ya que si para elementos ϕ, ψ en R(A) es cierto que "$\phi \leq \psi \ \wedge \ \psi \leq \phi$", entonces para cualesquiera $x \in A$, $y \in A$:

$$x \phi y \Longrightarrow x \psi y$$
$$x \psi y \Longrightarrow x \phi y$$

son relaciones verdaderas con lo cual "$x \phi y \iff x \psi y$" lo es. Luego $\phi = \psi$.

iii) Es transitiva, pues si ϕ, ψ, α son elementos de R(A) tales que $\phi \leq \psi \ \wedge \ \psi \leq \alpha$ entonces, para cualesquiera $x \in A$, $y \in A$ las relaciones siguientes son verdaderas:

$$x \phi y \Longrightarrow x \psi y$$
$$x \psi y \Longrightarrow x \alpha y$$

luego "$x \phi y \Longrightarrow x \alpha y$" lo es, con lo cual:

$$(\phi \leq \psi \ \wedge \ \psi \leq \alpha) \Longrightarrow \phi \leq \alpha .$$

E4: Sea $(\mathbb{E}, \leq)$ un copo. La relación:

$$"x \, \Pi \, y \iff y \leq x" .$$

Entre elementos x, y de $\mathbb{E}$, ordena parcialmente a $\mathbb{E}$. Se le llama "el dual" de la relación $\leq$.

i) Puesto que $\leq$ es un orden en $\mathbb{E}$:

$$(\forall x)(x \in \mathbb{E} \Longrightarrow x \leq x)$$

luego $(\forall x)(x \in \mathbb{E} \Longrightarrow x \, \Pi \, x)$.

ii) Supongamos que para elementos $x \in \mathbb{E}$, $y \in \mathbb{E}$ la relación "$x \, \Pi \, y \ \wedge \ y \, \Pi \, x$" es verdadera. Entonces "$y \leq x \ \wedge \ x \leq y$"

también lo es. Lo cual implica, por ser $(\mathbb{E}, \leq)$ parcialmente ordenado, $x = y$.

iii) Sean x, y, z elementos de $\mathbb{E}$ tales que la relación "$x \amalg y \ \wedge \ y \amalg z$" es verdadera. Entonces "$y \leq x \ \wedge \ z \leq y$" también lo es, luego el orden $\leq$ en $\mathbb{E}$ nos da, $z \leq x$ es decir $x \amalg z$.

E5: Sea $(E_i, R_i)_{i \in I}$ una familia de copos.

Se llama "relación producto" de las R_i a la relación R en $\prod_{i \in I} E_i$ definida como sigue:

$$(x_i)_{i \in I} \ R \ (y_i)_{i \in I} \iff (\forall i)(i \in I \implies x_i R_i y_i).$$

R es una relación de orden en $\prod_{i \in I} E_i$.

i) Puesto que en cada E_i, R_i es una relación de orden:

$$(\forall i)(i \in I \implies x_i \ R_i \ x_i)$$

es decir $(x_i) \ R \ (x_i)$.

ii) Sean $(x_i)_{i \in I}$, $(y_i)_{i \in I}$ elementos de $\prod_{i \in I} E_i$ tales que $(x_i) \ R \ (y_i) \ \wedge \ (y_i) \ R \ (x_i)$ entonces las siguientes relaciones son verdaderas:

"$(\forall i) \ (i \in I \implies x_i R_i y_i) \ \wedge \ (\forall i)(i \in I \implies y_i R_i x_i)$"

"$(\forall i)((i \in I \implies x_i R_i y_i) \ \wedge \ (i \in I \implies y_i R_i x_i))$"

"$(\forall i) \ (i \in I \implies ((x_i R_i y_i) \ \wedge \ (y_i \ R_i \ x_i)))$"

"$(\forall i) \ (i \in I \implies x_i = y_i)$"

Luego:

$$(x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I} .$$

iii) Sean $(x_i)_{i \in I}$, $(y_i)_{i \in I}$, $(z_i)_{i \in I}$ elementos de $\prod_{i \in I} E_i$ tales que la relación "$(x_i)_{i \in I} \ R \ (y_i)_{i \in I} \ \wedge \ (y_i)_{i \in I} \ R \ (z_i)_{i \in I}$" es verdadera. Las siguientes relaciones también lo serán:

$(\forall\, i)(i \in I \Longrightarrow x_i\, R_i\, y_i) \;\wedge\; (\forall i)\,(i \in I \Longrightarrow y_i\, R_i\, z_i)$

$(\forall\, i)(i \in I \Longrightarrow ((x_i\, R_i\, y_i) \;\wedge\; (y_i\, R_i\, z_i))$

$(\forall\, i)(i \in I \Longrightarrow x_i\, R_i\, z_i)$

Luego:

$$(x_i)_{i \in I} \; R \; (z_i)_{i \in I} \;.$$

1.2 COTAS SUPERIORES E INFERIORES. ELEMENTO MAXIMAL Y MINIMAL. ELEMENTO MAYOR Y MENOR. SUPREMO E INFIMO.

En un copo S:

a) Llamaremos elemento maximal de S (respect. elemento minimal) al elemento $s \in S$ que hace verdadera la relación:

$(\forall\, x)((x \in S \;\wedge\; s \leq x) \Longrightarrow x = s)$

(respect. $(\forall\, x)((x \in S \;\wedge\; x \leq s) \Longrightarrow x = s)$.

b) Llamaremos elemento mayor de S (respect. elemento menor) al elemento $a \in S$ tal que hace verdadera la relación:

$(\forall\, x)(x \in S \Longrightarrow x \leq a)$

(respect. $(\forall\, x)(x \in S \Longrightarrow a \leq x)$).

El elemento mayor (respect. menor) del copo $\mathbb{C}$, cuando existe, será denotado por 1 (respect. 0).

Sea S un copo, $X \subset S$.

Diremos que:

a) El elemento $s \in S$ es una "cota superior de X en S" (respect. "cota inferior") si:

$(\forall\, x)(x \in X \Longrightarrow x \leq s)$

(respect. $(\forall\, x)(x \in X \Longrightarrow s \leq x)$).

b) Un elemento $a \in S$ es llamado el "Supremo de X en S" (respect. el ínfimo), si es el elemento menor (respect. mayor) del conjunto de cotas superiores (respect. inferiores) de X en S.

Cuando el supremo de X en S exista (respect. el ínfimo) será denotado por SupS X (respect. Inf_S X); si no hay lugar a confusión se escribirá sencillamente Sup X (respect. Inf X).

E J E M P L O S

E1: Sea $\mathbb{N}$ ordenado mediante el orden usual. Sea X el intervalo natural $[5, 8]$.

El conjunto de cotas superiores de X en $\mathbb{N}$ será $\{x: x \geq 8\}$

El conjunto de cotas inferiores de X en $\mathbb{N}$ será $\{x : 0 \leq x \leq 5\}$

El elemento maximal de X es 8.

El elemento minimal de X es 5.

El elemento mayor de X es 8.

El elemento menor de X es 5.

$\mathrm{Sup}_{\mathbb{N}} X = 8$; $\mathrm{Inf}_{\mathbb{N}} X = 5$.

El ejemplo anterior corre el riesgo de llevarnos a confundir los elementos maximales con el elemento mayor (o los minimales con el elemento menor).

Un elemento maximal no es necesariamente el elemento mayor del conjunto; como también un elemento minimal no es necesaria-- mente el elemento menor. Lo que sí podemos afirmar, es que si un copo$\mathbb{E}$ posee elemento mayor (respect. menor), éste es el único elemento maximal (respect. minimal) de $\mathbb{E}$; ésto lo probaremos en breve.

Por ahora ilustraremos el caso en el cual un elemento maximal no es elemento mayor de un conjunto:

E2: Sea $Z^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ordenado mediante la relación: "$x \leq y \iff x|y$". Formemos $X \subset Z^+$ como sigue:

$$X = \{x : x = 2n+1, \quad n \in Z^+\} \cup \{2, 4\}.$$

En X, 4 es un elemento maximal ya que si existiera $x \in X$ tal que $4|x$ entonces $x = 4$. Sin embargo, 4 no es elemento mayor de X, es más X no tiene elemento mayor.

Los elementos minimales de X son todos los números primos de ése conjunto, sin embargo X no tiene elemento menor.

E3: En P(E) ordenado por la relación: "$X \leq Y \iff X \subset Y$".

ϕ es el elemento menor de P(E); E es el elemento mayor de P(E).

También ϕ es el único elemento minimal y E es el único elemento maximal.

Por otro lado, para cualquier subconjunto $\mathcal{H}$ de P(E),

$$\mathrm{Sup}_{P(E)}\, \mathcal{H} = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H \quad \text{y}$$

$$\mathrm{Inf}_{P(E)}\, \mathcal{H} = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$$

ya que:

i) Para todo $H \in \mathcal{H}$, $H \subset \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$

ii) Si existiera $H_1 \in P(E)$ tal que $H \subset H_1$ para todo H en $\mathcal{H}$, entonces:

$$\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H \subset H_1$$

con lo cual

$$\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H = \mathrm{Sup}_{P(E)}\, \mathcal{H}\,.$$

Para la segunda afirmación, veamos que:

i) Para todo $H \in \mathcal{H}$, $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \subset H$.

ii) Si $H_2 \in P(E)$ fuera tal que $H_2 \subset H$ para todo $H \in \mathcal{H}$, entonces:

$$H_2 \subset \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$$

luego

$$\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H = \mathrm{Inf}_{P(E)}\, H\,.$$

Si en el E3 consideráramos solamente los subconjuntos no vacíos de E, es decir si formáramos $A = \{X \in P(E) : X \neq \phi\}$ todos los elementos unitarios de A serían elementos minimales, ya que si $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$ fueran tales que $X \subset Y$, entonces $x = y$ con lo cual $X = Y$.

Algunos resultados útiles que ya podemos mencionar son los siguientes:

PROPOSICION 1.2.1

Si el copo $\mathbb{E}$ posee elemento mayor (respect. elemento menor), éste es único.

En efecto, si $a \in \mathbb{E}$ y $b \in \mathbb{E}$ fuesen elementos mayores de $\mathbb{E}$ tendriamos que $a \leq b \wedge b \leq a$, con lo cual $a = b$.

En forma análoga se demuestra la proposición para el elemento menor.

PROPOSICION 1.2.2

Si un copo $\mathbb{E}$ tiene elemento mayor (respect. elemento menor), éste es el único elemento maximal (respec. minimal) de $\mathbb{E}$.

Sea 1 el elemento mayor de $\mathbb{E}$, entonces $(\forall x)(x \in \mathbb{E} \Longrightarrow x \leq 1)$, con lo cual para todos los $y \in \mathbb{E}$ tales que $1 \leq y$, tendríamos $1 = y$.

La prueba para el elemento menor es similar.

PROPOSICION 1.2.3

Si un subconjunto X del copo $\mathbb{E}$ tiene elemento mayor 1, entonces $1 = \mathrm{Sup}_{\mathbb{E}} X$.

En efecto, si 1 es el elemento mayor de X, entonces $(\forall x)(x \in X \Longrightarrow x \leq 1)$, es decir, 1 es cota superior de X en $\mathbb{E}$. Por otro lado, si b fuese cota superior de X en $\mathbb{E}$ tendríamos $(\forall x)(x \in X \Longrightarrow x \leq b)$, en particular $1 \leq b$.

Luego

$$1 = \mathrm{Sup}_{\mathbb{E}} X .$$

PROPOSICION 1.2.4

Sea $\mathbb{E}$ un copo, X un subconjunto de $\mathbb{E}$ que tiene supremo e ínfimo en $\mathbb{E}$. Entonces $\mathrm{Inf}\ X \leq \mathrm{Sup}\ X$ si $X \neq \phi$; si $X = \phi$ entonces $\mathrm{Sup}_{\mathbb{E}} X$ es el elemento menor de $\mathbb{E}$ e $\mathrm{Inf}_{\mathbb{E}} X$ es el elemento mayor de $\mathbb{E}$.

Prueba

i) Si $X \neq \phi$, sea $a = \mathrm{Sup}_{\mathbb{E}} X$, $b = \mathrm{Inf}_{\mathbb{E}} X$.

Para cualquier $x \in X$ la relación "$x \leq a \wedge b \leq x$" es verdadera, con lo cual:

$$b = \mathrm{Inf}\ X \leq a = \mathrm{Sup}\ X .$$

ii) Si $X = \phi$, el conjunto de cotas superiores de X en $\mathbb{E}$, es $\mathbb{E}$ mismo, ya que la relación "$(\forall x)(x \in \phi \Longrightarrow x \leq a)$" es verdadera para cualquier $a \in \mathbb{E}$. Por lo tanto el elemento menor de $\mathbb{E}$ será el $\mathrm{Sup}_{\mathbb{E}} X$.
Similarmente, el conjunto de cotas inferiores de X en $\mathbb{E}$, es $\mathbb{E}$ mismo, ya que la relación "$(\forall x)(x \in \phi \Longrightarrow a \leq x)$" es verdadera para todo $a \in \mathbb{E}$; por consiguiente el elemento mayo de $\mathbb{E}$ será el $\mathrm{Inf}_{\mathbb{E}} X$.

PROPOSICION 1.2.5

Sean A, B subconjuntos de un copo $\mathbb{E}$ los cuales poseen supremo (respect. ínfimo) en $\mathbb{E}$. Si $A \subset B$ entonces $\mathrm{Sup}\, A \leq \mathrm{Sup}\, B$ (respect. $\mathrm{Inf}\, B \leq \mathrm{Inf}\, A$).

Prueba

Sean $a = \mathrm{Sup}_{\mathbb{E}} A$; $b = \mathrm{Sup}_{\mathbb{E}} B$

Como $A \subset B$, b es cota superior de A en $\mathbb{E}$, ya que las relaciones "$(\forall x)(x \in A \Longrightarrow x \in B)$" y $(\forall x)(x \in B \Longrightarrow x \leq b)$" implican que $(\forall x)(x \in A \Longrightarrow x \leq b)$ con lo cual b es cota superior de A en $\mathbb{E}$. Siendo a el supremo de A en $\mathbb{E}$, a es el elemento menor del conjunto de cotas superiores de A en $\mathbb{E}$, luego

$$a = \mathrm{Sup}_{\mathbb{E}}\, A \leq b = \mathrm{Sup}_{\mathbb{E}}\, B .$$

De la misma manera, si llamamos:

$$a' = \mathrm{Inf}_{\mathbb{E}}\, A ; \qquad b' = \mathrm{Inf}_{\mathbb{E}}\, B$$

la hipótesis $A \subset B$ nos lleva a que b' es cota inferior de A en $\mathbb{E}$, ya que las relaciones $(\forall x)(x \in A \Longrightarrow x \in B)$ y $(\forall x)(x \in B \Longrightarrow b' \leq x)$ implican $(\forall x)(x \in A \Longrightarrow b' \leq x)$ con lo cual b' es cota inferior de A en $\mathbb{E}$. Como $a' = \mathrm{Inf}_{\mathbb{E}} A$, a' es en particular el elemento mayor del conjunto de cotas superiores de A en $\mathbb{E}$, luego:

$$b' = \mathrm{Inf}_{\mathbb{E}}\, B \leq a' = \mathrm{Inf}_{\mathbb{E}}\, A$$

COROLARIO

Sea $(x_i)_{i\in I}$ una familia de elementos de un copo $\mathbb{E}$ la cual tiene supremo en $\mathbb{E}$. Si J es un subconjunto de I tal que la familia $(x_i)_{i\in J}$ tiene supremo en $\mathbb{E}$, entonces:

$$\operatorname{Sup}_{i\in J} x_i \leq \operatorname{Sup}_{i\in I} x_i .$$

PROPOSICION 1.2.6

Sean $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ dos familias de elementos de un copo $\mathbb{E}$, indizadas por el mismo conjunto I, tales que $x_i \leq y_i$ para todo $i \in I$. Si ambas familias tienen supremo en $\mathbb{E}$, entonces

$$\operatorname{Sup}_{i\in I} x_i \leq \operatorname{Sup}_{i\in I} y_i .$$

Prueba

Sea $a = \operatorname{Sup}_{i\in I} x_i$; $b = \operatorname{Sup}_{i\in I} y_i$.

La hipótesis $(\forall\, i)(i \in I \Longrightarrow x_i \leq y_i)$, junto con el hecho de que $b = \operatorname{Sup}_{i\in I} y_i$ nos lleva a que $x_i \leq y_i \leq b$ para todo $i \in I$, es decir que b es cota superior de los x_i, luego siendo $a = \operatorname{Sup}_{i\in I} x_i$, a es en particular la menor de las cotas superiores, es decir

$$a = \operatorname{Sup}_{i\in I} x_i \leq b = \operatorname{Sup}_{i\in I} y_i .$$

PROPOSICION 1.2.7

Sea $(x_i)_{i\in I}$ una familia de elementos del copo $\mathbb{E}$, $(J_\alpha)_{\alpha\in L}$ un cubrimiento del conjunto de índices I. Supongamos además que cada subfamilia $(x_i)_{i\in J_\alpha}$ tiene supremo en $\mathbb{E}$.

Para que la familia $(x_i)_{i\in I}$ tenga supremo en $\mathbb{E}$, es necesario y suficiente que la familia $(\operatorname{Sup}_{i\in J_\alpha} x_i)_{\alpha\in L}$ tenga supremo en $\mathbb{E}$ y entonces:

$$\operatorname{Sup}_{i\in I} x_i = \operatorname{Sup}_{\alpha\in L} (\operatorname{Sup}_{i\in J_\alpha} x_i) .$$

Prueba

i) Supongamos que la familia $(x_i)_{i\in I}$ tiene supremo a, $a = \mathrm{Sup}_{i\in I}\ x_i$. Debemos probar que la familia $(\mathrm{Sup}_{i\in J_\alpha}\ x_i)_{\alpha\in L}$ tiene supremo en $\mathbb{E}$.

Por hipótesis sabemos que cada subfamilia $(x_i)_{i\in J_\alpha}$ tiene supremo en $\mathbb{E}$, sea entonces:

$$b_\alpha = \mathrm{Sup}_{i\in J_\alpha}\ x_i \ , \qquad \alpha \in L \ .$$

El corolario de la proposición 1.2.5 nos muestra que, para cada $\alpha \in L$:

$$b_\alpha = \mathrm{Sup}_{i\in J_\alpha}\ x_i \leq \mathrm{Sup}_{i\in I}\ x_i = a \ .$$

Supongamos que a' fuera otra cota superior de los b_α, entonces $b_\alpha \leq a'$ para todo $\alpha \in L$, es decir:

$$\mathrm{Sup}_{i\in J_\alpha}\ x_i \leq a' \ , \qquad \text{para todo } \alpha \in L \ .$$

Sea $i \in I$, entonces existe $\alpha_0 \in L$ tal que $i \in J_{\alpha_0}$, luego para todo $i \in I$,

$$a = \mathrm{Sup}_{i\in I}\ x_i \leq a' \ ,$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{Sup}_{\alpha\in L}\ b_\alpha \\ &= \mathrm{Sup}_{\alpha\in L}\ (\mathrm{Sup}_{i\in J_\alpha}\ x_i) \ . \end{aligned}$$

ii) Supongamos ahora que la familia $(\mathrm{Sup}_{i\in J_\alpha}\ x_i)_{\alpha\in L}$ tiene supremo en $\mathbb{E}$. Debemos probar que $(x_i)_{i\in I}$ tiene supremo en $\mathbb{E}$.

Sea $b' = \mathrm{Sup}_{\alpha\in L}\ (\mathrm{Sup}_{i\in J_\alpha}\ x_i)$, donde vamos a llamar, igual que en el caso anterior, $b_\alpha = \mathrm{Sup}_{i\in J_\alpha}\ x_i$ bajo estas notaciones:

$$b_\alpha \leq b' \qquad \text{para todo } \alpha \in L \ .$$

Puesto que para todo $i \in I$, existe $\alpha_1 \in L$ tal que $i \in J_{\alpha_1}$, entonces para todo $i \in I$, $\mathrm{Sup}_{i\in I}\, x_i \leq b'$ con lo cual, $(\forall\, i)(i \in I \Longrightarrow x_i \leq b')$.

Supongamos ahora que b" fuese otra cota superior de $(x_i)_{i\in I}$, entonces b" sería cota superior para cada subfamilia $(x_i)_{i\in J_\alpha}$, las cuales, por hipótesis, tienen supremo b_α en $\mathbb{E}$, luego $(\forall\, \alpha)(\alpha \in L \Longrightarrow b_\alpha \leq b'')$. Como $b' = \mathrm{Sup}_{\alpha\in L}\, b_\alpha$ es la menor de las cotas superiores de $(b_\alpha)_{\alpha\in L}$ entonces $b' \leq b''$, luego:

$$b' = \mathrm{Sup}_{\alpha\in L}\, b_\alpha = \mathrm{Sup}_{\alpha\in L}\, (\mathrm{Sup}_{i\in J_\alpha}\, x_i) = \mathrm{Sup}_{i\in I}\, x_i \,.$$

<u>PROPOSICION 1.2.8</u>

Sea $(\mathbb{E}_i)_{i\in I}$ una familia de copos, A un subconjunto del copo $\mathbb{E} = \prod_{i\in I} \mathbb{E}_i$ y sea $A_i = pr_i\, A$ para cada $i \in I$.

Para que A tenga supremo en $\mathbb{E}$, es necesario y suficiente que, para todo $i \in I$, A_i tenga supremo en $\mathbb{E}_i$, y entonces:

$$\mathrm{Sup}\, A = (\mathrm{Sup}\, A_i)_{i\in I} = (\mathrm{Sup}_{x\in A}\, pr_i\, x)_{i\in I} \,.$$

<u>Prueba</u>

Supongamos que para todo $i \in I$, A_i tiene supremo en $\mathbb{E}_i$:

$$b_i = \mathrm{Sup}_{\mathbb{E}_i}\, A_i = \mathrm{Sup}_{\mathbb{E}_i}\, pr_i\, A$$

entonces, para cada $x = (x_i)_{i\in I}$ se tiene:

$$pr_i x \leq b_i \quad \text{para todo } i \in I$$

$$x_i \leq b_i \quad \text{para todo } i \in I$$

$$(x_i)_{i\in I} \leq (b_i)_{i\in I}$$

es decir $(b_i)_{i\in I}$ es cota superior de A.

Sea ahora $(C_i)_{i\in I}$ otra cota superior de A en $\mathbb{E}$, entonces, para cada $x = (x_i)_{i\in I}$ en A tenemos:

$$(x_i)_{i\in I} \leq (C_i)_{i\in I}$$

$$x_i \leq C_i \qquad \text{para todo} \quad i \in I$$

$$pr_i(x) \leq C_i \qquad \text{para todo} \quad i \in I$$

entonces

$$b_i = \text{Sup } A_i \leq C_i \quad \text{para todo} \quad i \in I$$

$$(b_i)_{i\in I} \leq (C_i)_{i\in I}$$

luego

$$(b_i)_{i\in I} = (\text{Sup } A_i)_{i\in I} = \text{Sup } A .$$

Supongamos ahora que A tiene supremo en $\mathbb{E} = \Pi\, \mathbb{E}_i$, sea $a = (a_i)_{i\in I} = \text{Sup}_{\mathbb{E}} A$. Entonces cada a_j, $j \in I$, es cota superior de A_j ya que si $x_j \in A_j$ existiría $x \in A$ tal que $pr_j\, x = x_j$.

Pero siendo $a = \text{Sup}_{\mathbb{E}} A$, entonces para cada $x \in A$, $x \leq a$ con lo cual:

$$x_i \leq a_i \qquad \text{para todo} \quad i \in I$$

luego

$$x_j = pr_j\, x \leq a_j .$$

Sea a_j' otra cota superior de A_j, entonces el elemento $z' = (z_j')_{i\in I}$ para el cual:

$$z_i' = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad i \neq j \\ a_j' & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

es cota superior de A, con lo cual:

$$a = \operatorname{Sup} A \leq z'$$

es decir,

$$a_i \leq z'_i \quad \text{para todo } i \in I.$$

En particular:

$$a_j \leq z'_j$$

$$a_i \leq a'_j$$

esto significa que

$$a_j = \operatorname{Sup}_{E_j} A_j \quad \text{para todo } j \in I.$$

Luego:

$$\operatorname{Sup} A = a = (a_i)_{i \in I} = (\operatorname{Sup} A_i)_{i \in I} = (\operatorname{Sup}_{x \in A} pr_i\, x)_{i \in I} \cdot$$

CAPITULO SEGUNDO
REDES

2.1 REDES

DEFINICION 2.1.1

Un copo $\mathbb{E}$ es llamado RED si todo subconjunto formado por dos elementos de $\mathbb{E}$ tiene supremo e ínfimo en $\mathbb{E}$.

El supremo (respect. el ínfimo) del conjunto $\{a, b\} \subset \mathbb{E}$ será denotado por Sup $\{a, b\}$ (respect. Inf $\{a, b\}$).

E J E M P L O S

E1: Los conjuntos $\mathbb{R}$, Z, $\mathbb{N}$, ordenados bajo la relación " $\leq$ " usual son redes, sin más que tomar, para dos elementos a, b de dichos conjuntos, el mayor y menor de ellos como el Sup $\{a, b\}$ y el Inf $\{a, b\}$ respectivamente.

E2: El conjunto P de enteros positivos ordenados bajo la prescripción: "$x \leq y$ ssi $x|y$", es una red. El Sup $\{x, y\}$ será el mínimo común múltiplo de x e y; el Inf $\{x, y\}$ será el máximo común divisor de x e y.

E3: El conjunto P(E) ordenado por inclusión es una red. Para cualesquiera A, B en P(E) el Sup $\{A, B\}$ es la unión de A con B ya que $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$ y si $X \in P(E)$ fuera tal que $A \subset X$ y $B \subset X$ entonces $A \cup B \subset X$.
Es claro también que si $A \in P(E)$ y $B \in P(E)$ entonces $A \cup B \in P(E)$. Luego Sup $\{A, B\} = A \cup B$.
El Inf $\{A, B\}$ será la intersección de A con B ya que $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$; por otro lado si existiera $X \in P(E)$ tal que $X \subset A$ y $X \subset B$ entonces $X \subset A \cap B$. También, si $A \in P(E)$ y $B \in P(E)$ entonces $A \cap B \in P(E)$; luego Inf $\{A, B\} = A \cap B$.

E4: Sea L(V) el conjunto de todos los subespacios del espacio vectorial V sobre un campo K.
L(V) es ordenado por la relación de inclusión entre conjuntos.

Afirmamos entonces que si $S \in L(V)$ y $T \in L(V)$,

$Sup\{S, T\} = S + T$; $Inf\{S, T\} = S \cap T$.

El conjunto

$$S + T = \{\alpha + \beta : \alpha \in S \wedge \beta \in T\}$$

es un subespacio de V, ya que si

$$x_1 \in S + T \quad y$$

$$x_2 \in S + T$$

entonces

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1 \quad , \quad \alpha_1 \in S \ , \quad \beta_1 \in T$$

$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2 \quad , \quad \alpha_2 \in S \ , \quad \beta_2 \in T$$

con lo cual

$$x_1 + x_2 = \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)$$

$$= \alpha_3 + \beta_3 \qquad \alpha_3 \in S, \quad \beta_3 \in T$$

luego

$$x_1 + x_2 \in S + T .$$

También si

$$x_1 \in S + T , \qquad k \in K$$

$$kx_1 = k\alpha_1 + k\beta_1$$

$$= \alpha_2 + \beta_2 \qquad \alpha_2 \in S, \quad \beta_2 \in T$$

luego

$$kx_1 \in S + T .$$

Por otro lado, el subespacio $S + T$ es tal que $S \subset S + T$ y $T \subset S + T$, y si $R \in L(V)$ fuera tal que $S \subset R$ y $T \subset R$ entonces $S + T \subset R$ ya que si $x \in S + T$ entonces $x = \alpha + \beta$ con $\alpha \in S$, $\beta \in T$; luego $x \in R$.

El $Inf\{S, T\} = S \cap T$ pues si $S \in L(V)$ y $T \in L(V)$ entonces $S \cap T \in L(V)$ ya que para elementos $\alpha \in S \cap T$, $\beta \in S \cap T$ tenemos que $k_1\alpha + k_2\beta \in S$ y $k_1\alpha + k_2\beta \in T$ donde los

$k_i \in K$, luego $k_1\alpha + k_2\beta \in S \cap T$.

También como $S \cap T$ es el máximo subespacio contenido en S y T, $\text{Inf}\ \{S, T\} = S \cap T$.

En lo sucesivo, para todo subconjunto $\{a, b\}$ de una red R, escribiremos:

$$\text{Sup}_R\ \{a, b\} = a \cup b$$

$$\text{Inf}_R\ \{a, b\} = a \cap b$$

donde "$a \cup b$" se leerá "a cup b" y "$a \cap b$" se leerá "a cap b".

Las palabras "cap" y "cup" no tienen nada más especial que servir a la lectura y notación; ellas fueron introducidas por H. Whitney.

Si x_1 , x_2 , x_3 fuesen tres elementos de una red R, la proposición 1.2.7 nos muestra que:

$$\begin{aligned} \text{Sup}\ \{x_1, x_2, x_3\} &= \text{Sup}\ \{\text{Sup}\ \{x_1, x_2\}, x_3\} \\ &= \text{Sup}\ \{x_1, \text{Sup}\ \{x_2, x_3\}\} \end{aligned}$$

ó en nuestra notación de "cup" y "cap":

$$\begin{aligned} \text{Sup}\ \{x_1, x_2, x_3\} &= (x_1 \cup x_2) \cup x_3 \\ &= x_1 \cup (x_2 \cup x_3) \quad (R_1). \end{aligned}$$

De manera similar:

$$\begin{aligned} \text{Inf}\ \{x1, x_2, x_3\} &= (x_1 \cap x_2) \cap x_3 \\ &= x_1 \cap (x_2 \cap x_3) \quad (R_1'). \end{aligned}$$

Argumentando inductivamente podemos afirmar que, todo subconjunto finito de una red R tiene supremo e ínfimo en R. Si pudiéramos decir lo mismo sobre cualquier subconjunto de R (ya sea finito ó infinito) entonces la red R se llamará RED COMPLETA.

Nótese que

$$\text{Sup}\ \{x_1, x_2\} = \text{Sup}\ \{x_2, x_1\}$$

es decir:

$$x_1 \cup x_2 = x_2 \cup x_1 \qquad (R_2)$$

y también

$$x_1 \cap x_2 = x_2 \cap x_1 \qquad (R_2').$$

Veamos ahora que, como

$$\text{Inf}\,\{a, b\} \leq a \leq \text{Sup}\,\{a, b\}$$

entonces

$$\text{Inf}\,\{a, \text{Sup}\,\{a, b\}\} = a = \text{Sup}\,\{a, \text{Inf}\,\{a, b\}\}\ ,$$

es decir:

$$a \cap (a \cup b) = a \qquad (R_3)$$

y

$$a \cup (a \cap b) = a \qquad (R_3').$$

Claramente,

$$\text{Sup}\,\{x, x\} = \text{Sup}\,\{x\} = x\ ,$$

ó sea:

$$x \cup x = x \qquad (R_4)$$

y también podemos formular que:

$$x \cap x = x \qquad (R_4').$$

El listado de las anteriores propiedades algebraicas, nos podría llevar a pensar en la posibilidad de dar una definición un tanto más operativa que la Definición 2.1.1 de Red. Esa idea en efecto constituye nuestra siguiente proposición.

PROPOSICION 2.1.2

Los siguientes enunciados son equivalentes.

a) R es una red.

b) R es un conjunto dotado de dos operaciones, llamemosles "cap" y "cup" que satisfacen:

R_1 : $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$ $\qquad$ R_1' : $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

R_2 : $a \cup b = b \cup a$ $\qquad$ R_2' : $a \cap b = b \cap a$

R_3 : $a \cup (a \cap b) = a$ $\qquad$ R_3' : $a \cap (a \cup b) = a.$

<u>Prueba</u>

Que (a) implica (b) ya se argumentó en las anteriores páginas, sin más que escoger las operaciones "cap" y "cup" como:

$$a \cap b = \text{Inf}\ \{a, b\}$$

$$a \cup b = \text{Sup}\ \{a, b\}\ .$$

Supongamos ahora que R e s un conjunto que satisface las condiciones reseñadas en (b).

Para probar que R es una r e d , necesitamos proveernos ante todo de una relación de orden en R.

Definamos entonces, para elementos a, b e n R la relación:

$$a \leq b \quad \text{ssi} \quad a \cap b = a \qquad \text{(I)}$$

o equivalentemente:

$$a \leq b \quad \text{ssi} \quad a \cup b = b \qquad \text{(II)}$$

ya que si a y b son elementos de R tales que $a \cap b = a$, entonces:

$$a \cup b = (a \cap b) \cup b = b \cup (a \cap b) = b\ ,$$

y también si fuese cierto que $a \cup b = b$, entonces:

$$a \cap b = a \cap (a \cup b) = a.$$

Utilizaremos pues, indistintamente (I) ó (II) a lo largo de las argumentaciones que siguen.

La relación es reflexiva ya que para elementos a, b e n R:

$$a \cap a = a \cap (a \cup (a \cap b)) = a$$

con lo cual

$$a \leq a\ .$$

Para la antisimetría, supongamos que a, b son elementos de R tales que $a \leq b$ y $b \leq a$ son relaciones verdaderas, entonces también lo son:

$$a \cap b = a \quad \text{y} \quad b \cap a = b$$

luego

$$a = a \cap b = b \cap a = b.$$

Para la transitividad exigida, supongamos que a, b, c son elementos de R tales que las relaciones $a \leq b$ y $b \leq c$ son relaciones verdaderas, entonces:

$$a \cap b = a \quad y \quad b \cap c = b ,$$

con lo cual:

$$a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a,$$

esto significa que $a \leq c$ siempre que $a \leq b$ y $b \leq c$.

Por ahora hemos logrado convertir a R en un COPO. Tenemos que verificar que todo subconjunto de R consistente en dos elementos tiene supremo e ínfimo en R.

Sea entonces $\{x_1 , x_2\} \subset R$. Afirmamos que

$$\mathrm{Inf}\ \{x_1, x_2\} = x_1 \cap x_2 .$$

pues:

i) $(x_1 \cap x_2) \cap x_1 = x_1 \cap (x_1 \cap x_2) = (x_1 \cap x_1) \cap x_2 = x_1 \cap x_2$

o sea que

$$(x_1 \cap x_2) \leq x_1 .$$

Con razonamiento similar:

$$(x_1 \cap x_2) \leq x_2 .$$

ii) Supongamos que $r \in R$ fuera tal que $r \leq x_1$ y $r \leq x_2$; entonces $r \cap x_1 = r$ y $r \cap x_2 = r$, con lo cual:

$$r \cap (x_1 \cap x_2) = (r \cap x_1) \cap x_2 = r \cap x_2 = r$$

luego

$$r \leq x_1 \cap x_2$$

siempre que

$$r \leq x_1 \qquad y \qquad r \leq x_2$$

De (i) y (ii):

$$\mathrm{Inf}_R\ \{x_1 , x_2\} = x_1 \cap x_2 .$$

El supremo de $\{x_1, x_2\}$ en R afirmamos que es $x_1 \cup x_2$ ya que:

i) $x_1 \cap (x_1 \cup x_2) = x_1$, es decir $x_1 \leq x_1 \cup x_2$; y también

$x_2 \cap (x_1 \cup x_2) = x_2$, o sea $x_2 \leq x_1 \cup x_2$.

ii) Supongamos ahora que $r \in R$ fuese tal que $x_1 \leq r$ y $x_2 \leq r$, entonces $x_1 \cup r = r$ y $x_2 \cup r = r$,

luego:

$$(x_1 \cup x_2) \cup r = x_1 \cup (x_2 \cup r) = x_1 \cup r = r,$$

es decir $(x_1 \cup x_2) \leq r$ siempre que $x_1 \leq r$ y $x_2 \leq r$.

De (i) y (ii)

$$\mathrm{Sup}_R \{x_1, x_2\} = x_1 \cup x_2 .$$

Antes de seguir más adelante, es necesario observar que en las ecuaciones $R_1 - R_1'$, $R_2 - R_2'$, $R_3 - R_3'$, $R_4 - R_4'$ los resultados son equivalentes al intercambiar "cap" y "cup". Podríamos aventurarnos un poco más y afirmar que ello es valedero en toda proposición relacionada con r e d e s . Esto es correcto y constituirá nuestro metateorema 1; sin embargo, debemos dar algunas definiciones preliminares.

Por una proposición teórica sobre redes entenderemos un enunciado E en el cual, además de las variables y expresiones lógicas, sólo intervienen los símbolos operacionales "cap" y "cup". Intercambiando dichos simbolos en E, obtenemos otra proposición teórica sobre redes, llamada el DUAL del enunciado E; será denotado por $\mathcal{D}(E)$. Claramente $\mathcal{D}(\mathcal{D}(E)) = E$, con lo cual la dualidad de E y $\mathcal{D}(E)$ es mútua. El proceso por el cual uno de los enunciados se puede obtener del otro por el intercambio apropiado de los símbolos cap y cup se le conoce como DUALIZACION DEL ENUNCIADO.

Si llamamos $Z = \{E_i\}$ a un conjunto de proposiciones teóricas sobre redes, $\mathcal{D}(Z)$ representará al conjunto de enunciados obtenidos por dualización de los E_i.

Si $\mathcal{D}(Z) = Z$, Z es llamado un conjunto de enunciados duales de sí mismo. Esto ocurrirá siempre que Z incluya las dualizaciones de sus propios enunciados, como sucede por ejemplo en el conjunto

$$Z = \{R_1 , R_2 , R_3 , R_1' , R_2' , R_3'\}$$

de enunciados que caracterizan a una red (proposición 2.1.2).

El enunciado E' se dirá que es un corolario de $Z = \{E_i\}$ si E' puede ser probado utilizando los E_i. La dualización de cada enunciado que se emplee para justificar los pasos de la prueba, proceso que llamaremos DUALIZACION DE LA PRUEBA, nos conduce a la demostración de $\mathcal{D}(E')$ utilizando duales de los E_i; entonces, si E' es un corolario de Z, $\mathcal{D}(E')$ será un corolario de $\mathcal{D}(Z)$ y viceversa.

Enunciemos ahora el

METATEOREMA 1

Principio de dualidad sobre redes.

"El dual de cualquier proposición teórica verdadera sobre redes, es también una proposición verdadera".

Debe aclararse sin embargo que si un enunciado o prueba sobre redes contiene, -además de las expresiones lógicas y símbolos operativos cap y cup-, otros símbolos o expresiones derivadas de definiciones estipuladas con anterioridad, la dualización deberá contemplar el reemplazo de éstos símbolos de acuerdo al tenor de su definición.

Por ejemplo, si R es una red, x un elemento de R, entonces la relación:

$$0 \cap x = 0 \qquad (R5)$$

es verdadera de acuerdo a la definición de elemento menor de R:

$$(\forall x)(x \in R \Longrightarrow 0 \leq x).$$

La dualización de R5 deberá tener en cuenta entonces que 0 representa un elemento sometido a exigencias establecidas de antemano. El dual de R_5 será:

$$1 \cup x = 1 \qquad (R_5')$$

donde 1 es el elemento mayor de R que satisface:

$$(\forall x)(x \in R \Longrightarrow 1 \geq x) \ .$$

De la misma manera, el dual de la relación:

$$(\forall x)(x \in R \Longrightarrow 1 \cap x = x) \qquad (R_6)$$

es:

$$(\forall x)(x \in R \Longrightarrow 0 \cup x = x) \qquad (R_6')$$

Puesto que R6 es verdadera según la definición del elemento mayor y la relación de orden (I) de la página 18, entonces R_6' también lo es.

Es interesante señalar que si $\langle R, \cap, \cup \rangle$ es una red, entonces los elementos de R junto con las operaciones "$\wedge$" , "$\vee$" definidas por:

$$a \wedge b = a \cup b$$
$$a \vee b = a \cap b$$

constituyen también una red, que se le llamará la "RED DUAL DE R" y la simbolizaremos por $\mathcal{D}(R)$.

Finalicemos esta sección ejemplificando las pruebas por dualización en las siguientes:

PROPOSICION 2.1.3

Toda red R tiene a lo sumo un elemento maximal y un minimal.

Prueba

La relación:

$$(\forall x)(\forall y)((x \in R \wedge y \in R) \Longrightarrow \text{Inf}\{x, y\} \leq x)$$

es verdadera según la definición de ínfimo. Si x fuera un elemento minimal de R tendríamos que:

$$\text{Inf}\{x, y\} = x$$

es decir,

$$x \cap y = x \qquad \text{para todo } y \in R.$$

Luego la relación:

$$(\forall y)(y \in R \Longrightarrow x \leq y)$$

es verdadera para todo x que sea elemento minimal de R.

Pero ésto no significa otra cosa más que x es elemento menor de R el cual es único según la proposición 1.2.1. Siendo x el elemento menor de R, será el único elemento minimal de R de acuerdo a la proposición 1.2.2.

La dualización del anterior argumento nos dará la prueba para el elemento mayor.

La relación:

$$(\forall x)(\forall y)((x \in R \wedge y \in R) \Longrightarrow \operatorname{Sup}\{x, y\} \geq x)$$

es verdadera por definición de supremo. Si x fuera un elemento maximal de R, entonces tendríamos:

$$\operatorname{Sup}\{x, y\} = x$$

es decir,

$$x \cup y = x \qquad \text{para todo } y \in R.$$

Luego la relación:

$$(\forall y)(y \in R \Longrightarrow x \geq y)$$

es verdadera para todo x que sea elemento maximal de R.

La relación anterior implica que x es elemento mayor de R el cual es único según la proposición 1.2.1. Si x es el elemento mayor de R, la proposición 1.2.2 nos muestra que x es el único elemento maximal de R.

PROPOSICION 2.1.4

Sea $\mathbb{K}$ un copo con 1 (respect. 0) en el cual todo subconjunto no vacío de $\mathbb{K}$ posee ínfimo (respect. supremo), entonces $\mathbb{K}$ es una red completa.

Prueba

Sea $\mathbb{K}$ un copo con 1 en el cual todo sus conjuntos no vacío de $\mathbb{K}$ tiene ínfimo.

Formemos el conjunto S de cotas superiores de algún $X \subset \mathbb{K}$. Como $1 \in S$, $S \neq \phi$, luego existirá $a = \operatorname{Inf} S$. Puesto que todos los elementos de X son cotas inferiores de S (por la construcción de S), entonces la relación:

$$(\forall x)(x \in X \Longrightarrow x \leq a)$$

es verdadera.

También, si w fuese otra cota superior de X, $w \in S$ con lo cual $\text{Inf } S = a \leq w$.

Luego:

$$a = \text{Inf } S = \text{Sup } X.$$

El resultado para el copo con 0 en el cual todo subconjunto no vacío tiene supremo, vale por dualidad.

2.2 ISOMORFISMOS DE REDES

DEFINICION 2.2.1

Sean R_1 y R2 redes. Una función biyectiva $\phi : R_1 \Longrightarrow R_2$ se llamará un isomorfismo de redes si satisface:

I_1 : $(\forall x)(\forall y)(((x, y) \in R_1 \times R_1) \Longrightarrow (\phi(x \cup y) = \phi(x) \cup \phi(y))$

I_2 : $(\forall x)(\forall y)(((x, y) \in R_1 \times R_1) \Longrightarrow (\phi(x \cap y) = \phi(x) \cap \phi(y))$.

Si existe un tal isomorfismo entre R1 y R2 diremos que R1 y R_2 son isomórficas. Se escribirá $R1 \approx R2$.

Por otro lado, en la categoría de los espacios ordenados, se define el isomorfismo entre dos copos $(R1, \Pi_1)$ y $(R2, \Pi_2)$ como la función biyectiva $\phi : R1 \Longrightarrow R2$ tal que hace verdadera la relación:

I_3 : $(\forall x)(\forall y)(((x, y) \in R_1 \times R_1) \Longrightarrow (x \Pi_1 y \Longleftrightarrow \phi(x) \Pi_2 \phi(y)))$.

Si existe un tal isomorfismo diremos que (R_1, Π_1) y $(R2, \Pi_2)$ son isomorficamente ordenados. Se escribirá: $R1 \overset{o}{\approx} R2$.

Bajo éstas definiciones podemos verificar la siguiente:

PROPOSICION 2.2.2

Los siguientes enunciados son equivalentes:

a) $R_1 \approx R_2$.

b) $(R_1, \Pi_1) \overset{o}{\approx} (R_2, \Pi_2)$.

<u>Prueba</u>

($a \Longrightarrow b$).

Sea $R1 \overset{\sim}{\sim} R2$, existirá entonces una biyección $\phi : R1 \Longrightarrow R2$ que satisface I_1 e $I2$. Para elementos x, y en R1 tendremos:

$$x \ \Pi_1 \ y \Longleftrightarrow x \cup y = y \Longleftrightarrow \phi(x \cup y) = \phi(y) \Longleftrightarrow \phi(x) \cup \phi(y) = \phi(y)$$

$$\Longleftrightarrow \phi(x) \ \Pi_2 \ \phi(y).$$

($b \Longrightarrow a$).

Sea $R1 \overset{\circ}{\sim} R2$, existirá entonces una biyección $\phi : R_1 \Longrightarrow R_2$ que satisface I3 . Afirmamos que:

$$\phi(a \cup b) = \phi(\mathrm{Sup}_{R_1}\{a, b\}) = \mathrm{Sup}_{R_2}\{\phi(a), \phi(b)\}$$

ya que:

$$a \cup b = \mathrm{Sup}_{R_1}\{a, b\} \geq a$$

$$a \cup b = \mathrm{Sup}_{R_1}\{a, b\} \geq b$$

con lo cual

$$\phi(a \cup b) = \phi(\mathrm{Sup}_{R_1}\{a, b\}) \geq \phi(a)$$

$$\phi(a \cup b) = \phi(\mathrm{Sup}_{R_1}\{a, b\}) \geq \phi(b).$$

Si $r2 \in R2$ fuera tal que $r2 \geq \phi(a)$ y $r2 \geq \phi(b)$, entonces para el elemento $r1 \in R1$ tal que $r2 = \phi(r1)$ tendríamos que $r_1 \geq a$ y $r_1 \geq b$ lo cual significa que r1 es cota superior de $\{a, b\}$ en R1 , luego:

$$r_1 \geq \mathrm{Sup}_{R_1}\{a, b\} = a \cup b$$

y por lo tanto:

$$\phi(r_1) \geq \phi(\mathrm{Sup}_{R_1}\{a,b\}) = \phi(a \cup b).$$

Esto nos conduce a afirmar:

$$\phi(a \cup b) = \phi(\mathrm{Sup}_{R_1}\{a, b\}) = \mathrm{Sup}_{R_2}\{\phi(a), \phi(b)\} = \phi(a) \cup \phi(b).$$

En forma dual obtendríamos:

$$\phi(a \cap b) = \phi(\mathrm{Inf}_{R_1}\{a,b\}) = \mathrm{Inf}_{R_2}\{\phi(a), \phi(b)\} = \phi(a) \cap \phi(b).$$

2.3 SEMI-REDES

La caracterización de una red como un sistema dotado de dos operaciones algebraicas (proposición 2.1.2) nos motiva a adaptar la siguiente definición general, de la estructura algebraica como semi-red, a nuestro estudio:

Se dice que un conjunto S es una semi-red, si S está dotado de una operación $\oplus$ que satisface:

SM_1 : $\oplus$ es asociativa, es decir:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(((x, y, z) \in S \times S \times S) \Longrightarrow x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z).$$

SM2 : $\oplus$ es conmutativa:

$$(\forall x)(\forall y)(((x, y) \in S \times S \Longrightarrow x \oplus y = y \oplus x).$$

SM_3 : $\oplus$ es idempotente:

$$(\forall x)(x \in S \Longrightarrow x \oplus x = x).$$

Claramente, si R es una red, entonces los sistemas $R^{\cap}$ y R^{U} formados por los elementos de R en los cuales sólo se consideran las operaciones cap y cup de R, respectivamente, son semi-redes. En efecto, de acuerdo a las relaciones R_1' , R_2' y R_4' , $R^{\cap}$ es una semi-red, y de la consideración de R_1 , R2 y R4 , el sistema R^{U} es una semi-red.

Llamaremos a $R^{\cap}$ la "cap semi-red" y a R^{U} la "cup semi-red".

2.4 SUB-REDES

DEFINICION 2.4.1

Sea R una red. Diremos que un subconjunto no vacío S de R es una sub-red si satisface:

SR_1 : $(\forall x)(\forall y)(((x, y) \in S \times S) \Longrightarrow \operatorname{Sup}\{x, y\} \in S)$

SR_2 : $(\forall x)(\forall y)(((x, y) \in S \times S) \Longrightarrow \operatorname{Inf}\{x, y\} \in S)$.

E J E M P L O S

Sea R una red, $a \in R$, entonces los conjuntos:

$$[a) = \{x \in R : a \leq x\}$$
$$(a] = \{x \in R : x \leq a\}$$

son sub-redes de R.

En efecto:

i) Sean z, w elementos de $[a)$, entonces $a \leq z \wedge a \leq w$ con lo cual:

$$a \cap z = a \quad ; \quad a \cup z = z$$
$$a \cap w = a \quad ; \quad a \cup w = w$$

entonces:

$$\begin{aligned} z \cup w &= (a \cup z) \cup (a \cup w) \\ &= a \cup (z \cup a) \cup w \\ &= a \cup (z \cup w) \end{aligned}$$

es decir:

$$a \leq z \cup w .$$

Por otro lado, como

$$\begin{aligned} a &= a \cap w \\ &= (a \cap z) \cap w \\ &= a \cap (z \cap w) \end{aligned}$$

entonces:

$$a \leq z \cap w.$$

ii) Sean z, w elementos de $(a]$, entonces $z \leq a \wedge w \leq a$ con lo cual las relaciones:

$$z \cap a = z \quad ; \quad z \cup a = a$$

$$w \cap a = w \quad ; \quad w \cup a = a$$

son verdaderas.

Como:

$$z \cap w = z \cap (w \cap a) = (z \cap w) \cap a$$

$$z \cap w \leq a .$$

También, siendo

$$\begin{aligned} a &= z \cup a \\ &= z \cup (w \cup a) \\ &= (z \cup w) \cup a \end{aligned}$$

tenemos que

$$z \cup w \leq a .$$

PROPOSICION 2.4.2

Toda subcadena S de una red R es una sub-red de R.

Prueba

Sea S una subcadena de R, es decir, S es un subconjunto de R en el cual dos elementos cualesquiera de S son comparables respecto al orden en R.

Sean x, y elementos de S, entonces:

i) Si $x \leq y$ tendremos que $x \cap y = x$, con lo cual

$$\text{Inf } \{x, y\} = x \in S.$$

También si $x \leq y$, $x \cup y = y$, o sea que

$$\text{Sup } \{x, y\} = y \in S$$

ii) Si $y \leq x$ tendríamos

$$x \cup y = \text{Sup } \{x, y\} = x \in S$$

$$x \cap y = \text{Inf } \{x, y\} = y \in S.$$

2.5 REDES DISTRIBUTIVAS

Empecemos por señalar que en toda red R las relaciones:

$D0$: $x \cap (y \cup z) \geq (x \cap y) \cup (x \cap z)$

D'_0 : $x \cup (y \cap z) \leq (x \cup y) \cap (x \cup z)$

son verdaderas para cualesquiera elementos x, y, z de R.

En efecto, siendo $x \cap y \leq x \wedge x \cap z \leq x$:

$$
\begin{aligned}
((x \cap y) \cup (x \cap z)) \cup x &= (x \cap y) \cup ((x \cap z) \cup x) \\
&= (x \cap y) \cup x \\
&= x
\end{aligned}
$$

luego,

$$(x \cap y) \cup (x \cap z) \leq x \qquad (I) .$$

Por otro lado, puesto que $y \cup z \geq y$ y siendo $y \geq x \cap y$ tenemos que $y \cup z \geq x \cap y$ es una relación verdadera para cualesquiera elementos x, y, z de R.

De la misma manera, de las relaciones $y \cup z \geq z \wedge z \geq x \cap z$, $y \cup z \geq x \cap z$, luego:

$$
\begin{aligned}
(((x \cap y) \cup (x \cap z)) \cup (y \cup z) &= (x \cap y) \cup ((x \cap z) \cup z) \cup y \\
&= (x \cap y) \cup (z \cup y) \\
&= ((x \cap y) \cup y) \cup z \\
&= y \cup z
\end{aligned}
$$

es decir,

$$(x \cap y) \cup (x \cap z) \leq y \cup z \qquad (II) .$$

De las relaciones (I) y (II):

$$(x \cap y) \cup (x \cap z) \leq x \cap (y \cup z)$$

ya que:

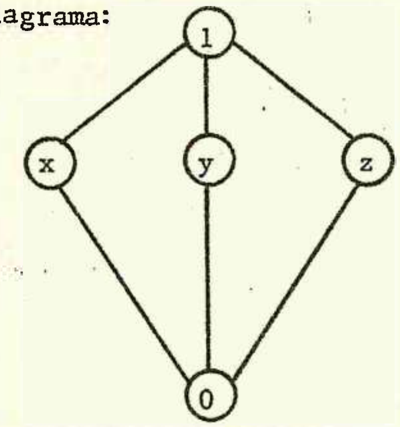
$$((x \cap y) \cup (x \cap z)) \cap (x \cap (y \cup z)) = (((x \cap y) \cup (x \cap z)) \cap x) \cap (y \cup z)$$
$$= ((x \cap y) \cup (x \cap z)) \cap (y \cup z)$$
$$= (x \cap y) \cup (x \cap z).$$

La prueba para D_0' se realiza por dualización.

Notemos que en general no se satisface la relación:

$$x \cap (y \cup z) \leq (x \cap y) \cup (x \cap z) \ ,$$

como lo ilustra el diagrama:



lo anterior nos motiva a establecer la:

DEFINICION 2.5.1

Una red R se dice que es distributiva, si para cualesquiera elementos x, y, z de R se satisfacen las relaciones:

D_1 : $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$

D_1' : $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$.

PROPOSICION 2.5.2

En una red R, las condiciones D_1 y D_1' son equivalentes.

Prueba

Sea R una red en la cual la relación D_1 es verdadera, entonces para elementos x, y, z de R :

$$(x \cup y) \cap (x \cup z) = ((x \cup y) \cap x) \cup ((x \cup y) \cap z)$$
$$= x \cup ((x \cap z) \cup (y \cap z))$$
$$= (x \cup (x \cap z)) \cup (y \cap z)$$
$$= x \cup (y \cap z).$$

En forma dual, $D_1' \Longrightarrow D_1$.

2.6 REDES COMPLEMENTADAS

DEFINICION 2.6.1

Una red R con elemento menor 0 y elemento mayor 1 es llamada RED COMPLEMENTADA, si para todo x en R, existe un elemento x' en R tal que satisface las relaciones:

C_1 : $x \cap x' = 0$

C_2 : $x \cup x' = 1$.

Cualesquier elemento x' que satisface las exigencias de la definición 2.6.1 se llamará un "complemento de x en R".

Puesto que en toda red R con 0 la relación:

$$(\forall x)(x \in R \Longrightarrow (0 \cap x = 0 \wedge 0 \cup x = x))$$

es verdadera, tendremos en particular que:

$$0 \cap 1 = 0 \quad \wedge \quad 0 \cup 1 = 1$$

con lo cual 1 es complemento de 0, además éste es único ya que si $x \in R$ fuera tal que $0 \cap x = 0$ y $0 \cup x = 1$, entonces $x = 1$.

Dualmente 0 es el único complemento de 1 en R.

Llamaremos "pseudo complemento" de $x \in R$, al mayor elemento x^* que satisface $x^* \cap x = 0$, es decir:

PS_1 : $(\forall a)(a \in R \Longrightarrow (a \cap x = 0 \Longleftrightarrow a \leq x^*))$

o equivalente:

$PS1$: $(\forall a)(a \in R \Longrightarrow (a \cap x = 0 \Longleftrightarrow a \cap x^* = a)).$

Notemos que el pseudocomplemento de x, si existe, es único ya que si $w \in R$ fuese también pseudocomplemento de x, tendríamos que $w \leq x^*$ $\wedge$ $x^* \leq w$, luego $x^* = w$.

El pseudocomplemento de x^*, si existe, se denotará por x^{**}, el de éste por x^{***} y así sucesivamente. Si todo elemento de R tiene pseudocomplemento, diremos que R es una red pseudocomplementada.

PROPOSICION 2.6.2

En una red R pseudocomplementada, los siguientes resultados son válidos:

1) $(\forall x)(x \in R \Longrightarrow x \leq x^{**})$

2) $(\forall x)(\forall y)(((x,y) \in R \times R) \Longrightarrow (x \leq y \Longrightarrow y^* \leq x^*))$

3) $(\forall x)(x \in R \Longrightarrow x^{***} = x^*)$

4) $(\forall x)(\forall y)(((x,y) \in R \times R) \Longrightarrow (x^* \cap y^* = (x^* \cap y^*)^{**}))$

5) $(\forall x)(\forall y)(((x,y) \in R \times R) \Longrightarrow ((x \cup y)^* = x^* \cap y^*))$

6) $(\forall x)(\forall y)(((x,y) \in R \times R) \Longrightarrow ((x \cap y)^* = (x^{**} \cap y^{**})^*))$

7) $(\forall x)(\forall y)(((x,y) \in R \times R) \Longrightarrow ((x \cap y)^* = (x^* \cup y^*)^{**}))$

8) $(\forall x)(\forall y)(((x,y) \in R \times R) \Longrightarrow ((x \cap y)^{**} = x^{**} \cap y^{**}))$

Prueba

1) Puesto que $x \cap x^* = 0$, entonces $x \leq x^{**}$.

2) Supongamos que x, y son elementos de R tales que $x \leq y$. Como $y \leq y^{**}$ según el resultado anterior, entonces $x \leq y$ implica $x \leq y^{**}$, es decir $x \cap y^* = 0$. Utilizando la conmutatividad de R, $y^* \cap x = 0$ con lo cual $y^* \leq x^*$.

3) Como $x \leq x^{**}$ es verdadero para todo $x \in R$, la parte (2) nos lleva a que $x^{***} \leq x^*$. Por otro lado, el resultado (1) nos muestra que $x^* \leq x^{***}$ sin mas que tomar x como x^*. Luego $x^* = x^{***}$.

4) Por (1) sabemos que $x^* \cap y^* \leq (x^* \cap y^*)^{**}$.

Como $x^* \cap y^* \leq x^*$ entonces $x^{**} \leq (x^* \cap y^*)^*$, con lo cual

$$(x^* \cap y^*)^{**} \leq x^{***} = x^* \qquad (I)$$

De manera similar $x^* \cap y^* \leq y^*$ implica

$$(x^* \cap y^*)^{**} \leq y^{***} = y^* \qquad (II)$$

De (I) y (II):

$$(x^* \cap y^*)^{**} \leq x^* \cap y^* .$$

Luego

$$(x^* \cap y^*)^{**} = x^* \cap y^* .$$

5) La relación $x \leq x \cup y$ implica la validez de $(x \cup y)^* \leq x^*$; de la misma forma $y \leq x \cup y$ implica $(x \cup y)^* \leq y^*$. Luego $(x \cup y)^* \leq x^* \cap y^*$.

Probaremos ahora que $x^* \cap y^* \leq (x \cup y)^*$.

Como $x^* \cap y^* \leq x^*$, $x^{**} \leq (x^* \cap y^*)^*$, de donde, junto con (1), podemos afirmar que

$$x \leq x^{**} \leq (x^* \cap y^*)^* \qquad (I)$$

Con el mismo razonamiento

$$y \leq y^{**} \leq (x^* \cap y^*)^* \qquad (II)$$

De (I) y (II): $x \cup y \leq (x^* \cap y^*)^*$, lo cual implica que

$$(x^* \cap y^*)^{**} \leq (x \cup y)^* .$$

Utilizando ahora (4):

$$x^* \cap y^* = (x^* \cap y^*)^{**} \leq (x \cup y)^* .$$

6) Las relaciones $x \leq x^{**}$, $y \leq y^{**}$ nos muestran que $x \cap y \leq x^{**} \cap y^{**}$, con lo cual:

$$(x^{**} \cap y^{**})^* \leq (x \cap y)^* .$$

Para probar la relación $(x \cap y)^* \leq (x^{**} \cap y^{**})^*$ mostraremos equivalentemente que:

$$(x \cap y)^* \cap (x^{**} \cap y^{**}) = 0.$$

Sea $a = (x \cap y)^* \cap (x^{**} \cap y^{**})$. Por la definición de ínfimo obtenemos:

$$a \leq (x \cap y)^* \qquad (i)$$

$$a \leq x^{**} \qquad (ii)$$

$$a \leq y^{**} \qquad (iii)$$

Utilizando la relación (i), $a \cap (x \cap y) = 0$, $(a \cap x) \cap y = 0$ es decir, $a \cap x \leq y^*$ que junto con (iii) nos da:

$$a \cap x \leq y^* \cap y^{**} = 0$$

luego

$$a \leq x^* \qquad (iv)$$

Ahora, de (iv) y (ii) obtenemos:

$$a \leq x^* \cap x^{**} = 0.$$

Pero 0 es elemento minimal de R según la proposición 1.2.2, luego:

$$0 = a = (x \cap y)^* \cap (x^{**} \cap y^{**}).$$

7) Como $x \cap y \leq x$, $x^* \leq (x \cap y)^*$. Similarmente $x \cap y \leq y$ implica $y^* \leq (x \cap y)^*$ con lo cual las siguientes relaciones son verdaderas:

$$x^* \cup y^* \leq (x \cap y)^*$$

$$(x \cap y)^{**} \leq (x^* \cup y^*)^*$$

$$(x^* \cup y^*)^{**} \leq (x \cap y)^{***} = (x \cap y)^*.$$

Por otro lado, $x^* \leq x^* \cup y^*$ implica $(x^* \cup y^*)^* \leq x^{**}$ y $y^* \leq x^* \cup y^*$ implica $(x^* \cup y^*)^* \leq y^{**}$; entonces las siguientes relaciones son verdaderas:

$$(x^* \cup y^*)^* \leq x^{**} \cap y^{**}$$

$$(x^{**} \cap y^{**})^* \leq (x^* \cup y^*)^{**}$$

utilizando el resultado (6) obtenemos finalmente:

$$(x \cap y)^* \leq (x^* \cup y^*)^{**} .$$

8) De (6):

$$(x \cap y)^{**} = (x^{**} \cap y^{**})^{**}$$

y utilizando ahora (4):

$$(x \cap y)^{**} = x^{**} \cap y^{**}.$$

Los resultados de la proposición anterior, los deberemos tener muy en cuenta para las argumentaciones del capítulo tercero, en el cual estudiaremos pseudocomplementos en copos.

2.7 ALGEBRAS BOOLEANAS

DEFINICION 2.7.1

Un álgebra booleana es una red distributiva complementada que posee elementos 0 y 1.

El ejemplo más claro y común de álgebra booleana es la red de subconjuntos de cualquier conjunto A, donde 1 es A, 0 es ϕ y claramente las operaciones son:

$$\text{Sup } \{X, Y\} = X \cup Y \; ; \quad \text{Inf } \{X, Y\} = X \cap Y.$$

El complemento del elemento $X \in P(A)$ es el conjunto definido usualmente en Teoría de Conjuntos bajo ése nombre.

PROPOSICION 2.7.2

Sea B un álgebra booleana. Los siguientes enunciados son verdaderos:

1) Para todo $x \in B$, x' es único.

2) $(\forall x)(x \in B \Longrightarrow x'' = x)$.

3) $(\forall x)(\forall y)(((x, y) \in B \times B) \Longrightarrow ((x \cap y)' = x' \cup y'))$.

4) $(\forall x)(\forall y)(((x, y) \in B \times B) \Longrightarrow ((x \cup y)' = x' \cap y'))$.

Prueba

1) Sea $x \in B$, x_1 y x_2 dos complementos de x, entonces:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1 \cap 1 = x_1 \cap (x \cup x_2) = (x_1 \cap x) \cup (x_1 \cap x_2) \\
&= 0 \cup (x_1 \cap x_2) = (x \cap x_2) \cup (x_1 \cap x_2) \\
&= (x \cup x_1) \cap x_2 = 1 \cap x_2 \\
&= x_2 .
\end{aligned}
$$

2) Como $x \cap x' = 0$ y $x \cup x' = 1$, entonces x es el complemento de x' en B, es decir, $x'' = x$.

3) Sean x, y elementos de B, entonces:

$$
\begin{aligned}
(x \cap y) \cap (x' \cup y') &= (x \cap y \cap x') \cup (x \cap y \cap y') \\
&= (0 \cap y) \cup (0 \cap x) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

También:

$$
\begin{aligned}
(x \cap y) \cup (x' \cup y') &= ((x \cap y) \cup x') \cup y' \\
&= ((x \cup x') \cap (y \cup x')) \cup y' \\
&= (y \cup x') \cup y' \\
&= 1 \cup x' \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

4) Sean x, y elementos de B, entonces:

$$
\begin{aligned}
(x \cup y) \cap (x' \cap y') &= (x \cap (x' \cap y')) \cup (y \cap (x' \cap y')) \\
&= ((x \cap x') \cap y') \cup (x' \cap (y \cap y')) \\
&= (0 \cap y') \cup (x' \cap 0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

También:

$$
\begin{aligned}
(x \cup y) \cup (x' \cap y') &= x \cup (y \cup (x' \cap y')) \\
&= x \cup ((y \cup x') \cap (y \cup y')) \\
&= x \cup ((y \cup x') \cap 1) \\
&= x \cup (y \cup x') \\
&= (x \cup x') \cup y \\
&= 1 \cup y \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Una caracterización para álgebras booleanas es la siguiente:

PROPOSICION 2.7.3

Un conjunto S es un álgebra booleana si y sólo sí es cerrado bajo una operación binaria "." y una operación unitaria"*" que satisfacen:

AB_1 : $(\forall\, a)(a \in S \Longrightarrow a \,.\, a = a)$.

AB_2 : $(\forall\, a)(\forall\, b)(((a, b) \in S \times S) \Longrightarrow a \,.\, b = b \,.\, a)$.

AB_3 : $(\forall\, a)(\forall\, b)(\forall\, c)(((a,b,c) \in S\times S\times S) \Longrightarrow a \,.\,(b \,.\, c) = (a \,.\, b)\,.\, c)$.

AB_4 : Existe un elemento 0 en S tal que: $a \,.\, b^* = 0 \Longleftrightarrow a \,.\, b = a$.

Prueba

i) Sea S un álgebra booleana en el sentido de la definición 2.7.1, entonces las relaciones AB_1, AB2, AB3 se satisfacen plenamente en la "cap semi-red". Para la operación"*" escojamos como x^* el complemento de x en S. Debemos verificar AB_4. Supongamos para ello que a y b son elementos de S tales que $a \cap b^* = 0$, entonces:

$$a \cap b = (a \cap b) \cup 0 = (a \cap b) \cup (a \cap b^*) = a \cap (b \cup b^*)$$
$$= a \cap 1$$
$$= a.$$

Supongamos ahora que a, b son elementos de S tales que $a \cap b = a$, entonces:

$$a \cap b^* = (a \cap b) \cap b^* = a \cap (b \cap b^*) = a \cap 0 = 0.$$

ii) Empecemos por señalar que en S podemos introducir la relación de orden conocida:

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \,.\, y = x$$

con lo cual podemos tomar nuestro AB_4 como:

$$x \,.\, y^* = 0 \Longleftrightarrow x \leq y \Longleftrightarrow x \,.\, y = x.$$

Siendo $x \,.\, x = x$ una relación verdadera para todo $x \in S$, entonces $x \,.\, x^* = 0$, luego, para todo $x \in S$:

$$x \,.\, 0 = x \,.\, (x \,.\, x^*) = (x \,.\, x) \,.\, x^* = x \,.\, x^* = 0$$

es decir, $(\forall\, x)(x \in R \Longrightarrow 0 \leq x)$. Esto nos muestra que 0 es el elemento menor de S.

Afirmamos que $x \,.\, y$ es el ínfimo de x e y en S ya que:

$$(x \,.\, y) \,.\, x^* = y \,.\, (x \,.\, x^*) = y \,.\, 0 = 0$$

con lo cual:

$$x \,.\, y \leq x.$$

En forma similar: $x \,.\, y \leq y$.

Si $z \in S$ fuese tal que $z \leq x \;\wedge\; z \leq y$, entonces $z \,.\, x = z$ y $z \,.\, y = z$, luego:

$$z \,.\, (x \,.\, y) = (z \,.\, x) \,.\, y = z \,.\, y = z$$

es decir:

$$z \leq x \,.\, y \,.$$

Por ahora hemos logrado convertir a S en una cap semi--red. De ella mencionaremos dos propiedades muy útiles:

1) $a^{**} \leq a$ para todo $a \in S$.

2) Si $a \leq b$ entonces $b^* \leq a^*$.

En efecto, puesto que $a^{**} \,.\, a^* = 0$ entonces $a^{**} \leq a$.

Por otro lado, si a y b son elementos de S tales que $a \leq b$ $a \,.\, b^* = 0$ y siendo $a^{**} \leq a$ obtendremos:

$$b^* \,.\, a^{**} \leq b^* \,.\, a$$
$$b^* \,.\, a^{**} \leq 0$$
$$b^* \,.\, a^{**} = 0$$

luego $b^* \leq a^*$ siempre que $a \leq b$.

Con estas dos propiedades entremos a la tarea de convertir a S en un Algebra Booleana.

Definamos a tal efecto, para elementos x e y de S, la operación:

$$x \oplus y = (x^* \,.\, y^*)^* \,.$$

Puesto que S es cerrado para "." y "*", entonces si $x \in S$ y $y \in S$, $x \oplus y \in S$. Mostraremos que $x \oplus y$ es el supremo de x e y en S.

Siendo $(x^* . y^*)^{**} \leq x^* . y^*$ según la propiedad (1), entonces:

$$x . (x^* . y^*)^{**} \leq x . (x^* . y^*)$$

$$x . (x \oplus y)^* \leq (x . x^*) . y^* = 0 . y^*$$

$$x . (x \oplus y)^* \leq 0$$

$$x . (x \oplus y)^* = 0$$

luego:

$$x \leq x \oplus y .$$

En forma similar, $y \leq x \oplus y$.

Supongamos que $z \in S$ fuese tal que $x \leq z$ y $y \leq z$ entonces obtendríamos $z^* \leq x^*$ y $z^* \leq y^*$ con lo cual:

$$z^* \leq x^* . y^*$$

$$(x^* . y^*)^* \leq z^{**} \leq z$$

luego $x \oplus y \leq z$.

Siendo $x \oplus y$ el supremo de x e y en S obtenemos la útil relación:

$$x = x^{**}$$

ya que:

$$x = x \oplus x = (x^* . x^*)^* = x^{**} .$$

Afirmamos que S posee elemento mayor, dado que, para todo $x \in S$, $0 = x . 0 = x . 0^{**}$.

Esto significa que $x \leq 0^*$ para todo $x \in S$, es decir 0^* es el elemento ~~menor~~ de S. Llamaremos 1 al elemento 0^*.

MAYOR

Los resultados hasta ahora obtenidos, junto con las relaciones:

$$x \, . \, x^* \; = \; 0$$

$$x \oplus x^* \; = \; (x^* \, . \, x^{**})^* = 0^* = 1$$

nos permiten afirmar que S es una red complementada.

Para exhibir a S como un Algebra Booleana no nos resta más que probar la distributividad de las operaciones. Probaremos solamente la relación:

$$x \oplus (y \, . \, z) \; = \; (x \oplus y) \, . \, (x \oplus z) \qquad \text{(I)}$$

ya que ella implicará, según la proposición 2.5.2, la relación:

$$x \, . \, (y \oplus z) \; = \; (x \, . \, y) \oplus (x \, . \, z).$$

De la relación (I) bastará probar:

$$(x \oplus y) \, . \, (x \oplus z) \; \leq \; x \oplus (y \, . \, z) \qquad \text{(II)}$$

puesto que la relación

$$x \oplus (y \, . \, z) \leq (x \oplus y) \, . \, (x \oplus z)$$

es verdadera según D_0' de la sección 2.5.

Prueba de (II):

Llamaremos

$$w \; = \; (x \oplus y) \, . \, (x \oplus z) \, . \, (x \oplus (y.z))^* \, .$$

La definición de ínfimo nos lleva a las siguientes relaciones:

$$w \leq x \oplus y = (x^* \, . \, y^*)^* \qquad (1)$$

$$w \leq x \oplus z = (x^* \, . \, z^*)^* \qquad (2)$$

$$w \leq (x \oplus (y \, . \, z))^* \qquad (3)$$

Siendo $x \leq x \oplus (y \, . \, z)$:

$$(x \oplus (y \, . \, z))^* \leq x^* \qquad (4)$$

De (3) y (4):

$$w \leq x^* \qquad (5)$$

Y con el mismo razonamiento:

$$w \leq (y \,.\, z)^* \qquad (6)$$

Como $w \,.\, (x^* \,.\, y^*) = 0$ según (1), entonces $(w \,.\, x^*) \,.\, y^* = 0$ lo cual significa que:

$$w \,.\, x^* \leq y \qquad (7)$$

En forma similar:

$$w \,.\, x^* \leq x \qquad (8)$$

De (8) y (5):

$$w \,.\, y^* \leq x \,.\, x^* = 0$$

$$w \,.\, y^* = 0$$

luego

$$w \leq y \qquad (9)$$

Utilizando ahora (2) obtenemos que $w \,.\, (x^* \,.\, z^*) = 0$, de donde:

$$w \,.\, x^* \leq z \qquad (10)$$

$$w \,.\, z^* \leq x \qquad (11)$$

De (11) y (5):

$$w \,.\, z^* \leq x \,.\, x^* = 0$$

$$w \,.\, z^* = 0$$

$$w \leq z \qquad (12)$$

De (9) y (12):

$$w \leq z \,.\, y \qquad (13)$$

Finalmente, de (13) y (6):

$$w \leq (y \,.\, z) \,.\, (y \,.\, z)^* = 0$$

luego:

$$0 = w = (x \oplus y) \,.\, (x \oplus z) \,.\, (x \oplus (y \,.\, z))^*$$

significando esto que:

$$(x \oplus y) \,.\, (x \oplus z) \leq x \oplus (y \,.\, z) \,.$$

CAPITULO TERCERO

PSEUDO COMPLEMENTOS EN CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

En el capítulo anterior se mencionó y obtuvimos algunos resultados para psc. (pseudo complementos) en redes. Como se ha señalado, una red no es otra cosa más que un tipo especial de copo; trataremos ahora de avanzar un poco más en nuestro estudio y considerar los psc. en conjuntos parcialmente ordenados. Definiremos los psc. para copos utilizando ideales, para lo cual, variaremos ligeramente nuestro vocabulario y daremos algunas nociones sobre ideales en copos.

Sea $\mathbb{C}$ un copo, $A = \{a_i : i \in I\}$ un subconjunto de $\mathbb{C}$. Llamaremos "red suma de los a_i" al supremo de A en $\mathbb{C}$ (siempre que éste exista) y "red producto de los a_i" al ínfimo de A en $\mathbb{C}$ (siempre que exista); ellos serán denotados por $\sum a_i$ y Πa_i respectivamente.

Si A es finito, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ la red suma y la red producto de los a_i la podremos representar por $a_1 + \ldots + a_n$ y $a_1 . \ldots . a_n$ respectivamente.

Seguiremos reservando los símbolos 0 y I para los elementos menor y mayor de $\mathbb{C}$, siempre que ellos existan.

Un subconjunto de una red R que contenga a la red suma (respect. red producto) en R para todo par de sus elementos se llamará - un "sub-sistema aditivo" de R (respect. sub-sistema multiplicativo).

Un subconjunto de la red completa R será llamado un Σ-subsistema (respect. Π-subsistema) si contiene la red suma (respect. red producto) de cualquier número de sus elementos. Si un subconjunto de una red completa R es a la vez un Σ-subsistema y un Π-subsistema de R, lo llamaremos una sub-red completa de R.

En una red R, la suma $\sum a_i$ es llamada distributiva si para cada $b \in R$ se tiene que

$$b . \sum a_i = \sum b . a_i .$$

Una red en la cual toda suma sea distributiva será llamada "red Σ-distributiva". La "Π-distributiva" es definida en forma dual.

3.1 SEMI-IDEALES E IDEALES EN COPOS

DEFINICION 3.1.1.

Sea $\mathbb{C}$ un copo, A un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$. Diremos que A es un semi-ideal de $\mathbb{C}$, si la relación $b \leq a$ entre elementos $a \in A$, $b \in \mathbb{C}$ implica que $b \in A$.

DEFINICION 3.1.2

Sea $\mathbb{C}$ un copo, A un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$. Diremos que A es un ideal de $\mathbb{C}$ si satisface:

I_1 : A es un semi-ideal de $\mathbb{C}$.

I_2 : La red suma de todo número finito de elementos de A, cuando exista, pertenece a A.

Por dualización obtenemos los conceptos de "ideal-dual" y "semi-ideal-dual".

E J E M P L O S

Sea $\mathbb{C}$ un copo. El conjunto $(a]$ (respect. $[a)$) es un ideal de $\mathbb{C}$ (respect. un ideal-dual).

En efecto, sea

$$A = (a] = \{x \in \mathbb{C} : z \leq a\}$$

y sean $z \in A$, $w \in \mathbb{C}$ elementos tales que $w \leq z$.

Como $z \in A$, $z \leq a$. Luego la transitividad del orden en $\mathbb{C}$ nos lleva a que $w \leq a$, es decir $w \in A$.

Sean ahora w, z elementos de A y supongamos que $w + z$ existe. Puesto que $w \in A$ y $z \in A$, $w \leq a$ y $z \leq a$, con lo cual $w + z \leq a$.

Sea $\{w_1 , \ldots , w_{k+1}\}$ un conjunto de $k + 1$ elementos de A tales que

$$\sum_1^k w_i \in A ,$$

entonces

$$\sum_1^{k+1} w_i = (w_1 + w_k) + w_{k+1} \in A .$$

Luego $A = (a]$ es un ideal de $\mathbb{E}$. Se le llamará el "ideal principal generado por a".

Tomemos $B = [a) = \{x \in \mathbb{E} : a \leq x\}$ y sean $z \in B$, $w \in \mathbb{E}$ elementos tales que $z \leq w$. Como $z \in B$, $a \leq z$, luego la transitividad en $\mathbb{E}$ nos da que $a \leq w$.

Por otro lado, si z, w son elementos de B tales que $z . w$ existe, entonces, siendo $a \leq z$ y $a \leq w$ tenemos que $a \leq z . w$, es decir $z . w \in B$.

Sea $\{w_1, \ldots, w_{k+1}\}$ un conjunto de $k + 1$ elementos de B tales que

$$\prod_1^k w_i \in A ,$$

entonces

$$\prod_1^{k+1} w_i = (w_1 \ldots . w_k) \; w_{k+1} \in B.$$

Luego $B = [a)$ es un ideal-dual de $\mathbb{E}$. Se le llamará el "ideal-dual principal generado por a".

<u>PROPOSICION 3.1.3.</u>

Sea $\mathbb{E}$ un copo con 0 (respect. 1). El conjunto S_μ (respect. S_α) de todos los semi-ideales (respect. semi-ideales duales) de $\mathbb{E}$ es una red completa $\sum$ y $\prod$ distributiva bajo la inclusión de conjuntos como relación de orden.

<u>Prueba</u>

Empecemos por notar que si A y B son elementos de S_μ, entonces $A \subset \mathbb{E}$, $A \neq \phi$, $B \subset \mathbb{E}$, $B \neq \phi$. Luego, $A \cup B \subset \mathbb{E}$, $A \cup B \neq \phi$.

Supongamos que $b \in \mathbb{E}$ y $a \in A \cup B$ son elementos tales que $b \leq a$ entonces:

i) Si $a \in A$, la hipótesis $b \leq a$ nos da que $b \in A$. Luego $b \in A \cup B$.

ii) Si $a \in B$, la hipótesis $b \leq a$ nos da que $b \in B$. Luego $b \in A \cup B$.

Por lo tanto, en todos los casos, la relación

$$\text{"}a \in A \cup B \ \wedge \ b \in \mathbb{E} \ \wedge \ b \leq a\text{"}$$

implica $b \in A \cup B$.

De donde podemos afirmar que $A \cup B \in S_\mu$.

De manera similar, si A, B son elementos de S_μ, $A \cap B \in S_\mu$; luego podemos tomar

$$A + B = A \cup B \quad ; \quad A \,.\, B = A \cap B$$

para convertir a S_μ en una red.

También, si $A = \{A_i : i \in I\}$ fuese cualquier subconjunto de S_μ, las siguientes relaciones son verdaderas:

$$(\forall\, i)(i \in I \Longrightarrow A_i \subset \mathbb{E})$$

$$(\forall\, i)(i \in I \Longrightarrow A_i \neq \phi)$$

con lo cual, $\cup A_i \neq \phi$ y $\cup A_i \subset \mathbb{E}$.

Supongamos ahora que los elementos $x \in \cup A_i$, $y \in \mathbb{E}$ son tales que $y \leq x$, entonces las siguientes relaciones son verdaderas:

$$(\exists\, i_o)(i_o \in I \ \wedge \ x \in A_{i_o} \ \wedge \ y \in A_{i_o})$$

$$y \in \bigcup_{i \in I} A_i$$

luego:

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in S_\mu \,.$$

Si $x \in \bigcap A_i$, $y \in \mathbb{K}$ fuesen tales que $y \leq x$, entonces las relaciones

$$(\forall\ i)(i \in I \Longrightarrow x \in A_i)$$

y $y \leq x$ implican la verdad de la relación

$$(\forall\ i)(i \in I \Longrightarrow y \in A_i)$$

es decir

$$y \in \bigcap_{i \in I} A_i \ .$$

En base a lo anterior, podemos tomar

$$\sum A_i = \bigcup A_i \quad , \quad \Pi A_i = \bigcap A_i$$

para convertir a S_μ en una red completa.

La $\sum$ y Π distributividad se obtienen de las operaciones unión e intersección de conjuntos.

En forma similar se obtienen las características para el conjunto S_α .

<u>PROPOSICION 3.1.4.</u>

El conjunto S_μ es cerrado para pseudo complementos.

<u>Prueba</u>

Afirmamos que si $A \in S_\mu$, entonces el conjunto

$A^* = \{x \in \mathbb{K} : (x] \cap (a] = (0]$ para todo $a \in A\}$

es el psc. de A en S_μ .

En efecto, si $x \in A^*$ y $w \in \mathbb{K}$ son tales que $w \leq x$, entonces $(w] \subset (x]$ con lo cual

$$(w] \cap (a] = (0] \quad \text{para todo } a \in A.$$

Esto quiere decir que $w \in A^*$. Luego $A^* \in S_\mu$.

Supongamos ahora que $B \in S_\mu$ es tal que $A \cap B = (0]$. Escogiendo $x \in B$ obtendremos que, para todo $a \in A$,

$$(x] \cap (a] = (0]$$

ya que si $z \leq x$ y $z \leq a$ entonces $z \in B$ y $z \in A$ con lo cual $z = 0$, es decir,

$$(x] \cap (a] \subset (0] .$$

Claramente, si $B \subset A^*$, $A \cap B = (0]$.

Resumiendo, $A \cap B = (0] \Longleftrightarrow B \subset A^*$. Esto significa que A^* es el psc. de A en S_μ .

PROPOSICION 3.1.5.

El conjunto I_μ de todos los ideales de un copo $\mathbb{C}$ con 0 es una red completa bajo la inclusión de conjuntos como relación de orden. Además I_μ es un sub-sistema multiplicativo de S_μ .

Prueba

Sea $A = \{A_i : i \in I\}$ un subconjunto de I_μ . Como las relaciones $A_i \neq \phi$, $A_i \subset \mathbb{C}$ y $0 \in A_i$ son verdaderas para todo $i \in I$, $\cap A_i \neq \phi$ y $\cap A_i \subset \mathbb{C}$; además siendo los A_i en particular semi-ideales de $\mathbb{C}$, $\cap A_i$ es un semi-ideal.

Tomemos $B = \{w_1, \ldots, w_n\} \subset \cap A_i$ y supongamos que $\sum_1^n w_j$ existe. Puesto que los $w_j \in A_i$ para todo $i \in I$, entonces, siendo los A_i ideales de $\mathbb{C}$, $\sum_1^n w_j \in A_i$ para todo $i \in I$, es decir

$$\sum_1^n w_j \in \cap A_i .$$

Luego:

$$\bigcap_{i \in I} A_i \in I_\mu .$$

Como $\mathbb{C}$ es un ideal de sí mismo, la proposición 2.1.4 nos muestra que I_μ es una red completa.

Por otro lado, siendo los A_i en particular semi-ideales de $\mathbb{C}$, y puesto que para cualesquiera elementos $A1$, $A2$ de I_μ :

$$A_1 \cdot A_2 = A_1 \cap A_2 \in I_\mu$$

entonces I_μ es un sub-sistema multiplicativo de S_μ .

Notación

En lo sucesivo denotaremos por V a la red-suma de elementos de I_μ .

PROPOSICION 3.1.6.

En un copo $\mathbb{C}$, una red producto $\prod_{i \in I} a_i$ (respect. una red-suma $\sum_{i \in I} a_i$) existe sí y solo sí $\bigcap_{i \in I} (a_i]$ (respect. $\bigcap_{i \in I} [a_i)$) es un ideal principal (respect. ideal-dual principal). Cuando $\prod a_i$ (respect. $\sum a_i$) exista: $\bigcap (a_i] = (\prod a_i]$ (respect. $\bigcap [a_i) = [\sum a_i)$).

Prueba

Sea $\{a_i : i \in I\} \subset \mathbb{C}$.

i) Si $\prod a_i$ existe, afirmamos que

$$(\prod a_i] = \bigcap (a_i]$$

ya que si $z \in (\prod a_i]$, $z \leq \prod a_i$ con lo cual, $z \leq a_i$ para todo $i \in I$, o sea que $z \in (a_i]$ para todo $i \in I$. Luego

$$z \in \bigcap_{i \in I} (a_i] .$$

También, si $w \in \bigcap_{i \in I} (a_i]$ las relaciones siguientes son verdaderas:

$$(\forall\ i)(i \in I \Longrightarrow w \in (a_i])$$

$$(\forall\ i)(i \in I \Longrightarrow w \leq a_i)$$

$$w \leq \prod_{i \in I} a_i$$

o sea que $w \in (\Pi\ a_i]$. Luego

$$\cap\ (a_i] \subset (\Pi\ a_i] .$$

ii) Si $\cap\ (a_i] = (x]$, entonces $x \leq a_i$ para todo $i \in I$.

Además, si z fuera otra cota inferior de los a_i, es decir si $z \leq a_i$ para todo $i \in I$, entonces $z \in (a_i]$ para todo $i \in I$, o sea que

$$z \in \bigcap_{i \in I} (a_i] = (x] .$$

Luego $z \leq x$.

Lo anterior significa que $x = \Pi\ a_i$.

iii) Supongamos que $\sum a_i$ existe; sea entonces $w \in [\sum a_i)$. Las siguientes relaciones serán verdaderas:

$$\sum a_i \leq w$$

$$(\forall\ i)(i \in I \Longrightarrow a_i \leq w)$$

$$(\forall\ i)(i \in I \Longrightarrow w \in [a_i))$$

$$w \in \bigcap_{i \in I} [a_i)$$

luego $[\sum a_i) \subset \cap\ [a_i)$.

Tomemos ahora $z \in \cap\ [a_i)$. Las siguientes relaciones son verdaderas:

$$(\forall\, i)(i \in I \Longrightarrow z \in [a_i))$$

$$(\forall\, i)(i \in I \Longrightarrow a_i \leq z)$$

$$\sum a_i \leq z$$

$$z \in [\sum a_i)$$

Luego:

$$\cap\, [a_i) \subset [\sum a_i)\ .$$

iv) Si $\cap\, [a_i) = [r)$, entonces $a_i \leq r$ para todo $i \in I$. Además, si z fuera otra cota superior de los a_i, $a_i \leq z$ para todo $i \in I$ con lo cual $z \in [a_i)$ para todo $i \in I$ y entonces

$$z \in \cap\, [a_i) = [r)\ .$$

Luego $r \leq z$. Esto significa que $r = \sum\limits_{i \in I} a_i$.

PROPOSICION 3.1.7.

En un copo $\mathbf{C}$, Una red-suma $\sum\limits_1^n a_i$ (respect. una red-producto $\prod\limits_1^n a_i$) existe sí y solo sí $(a_1] \vee (a_2] \vee \ldots \vee (a_n]$ (respect. $[a_1) \vee [a_2) \vee \ldots \vee [a_n)$) es un ideal principal (respect. ideal-dual principal). Siempre que $\sum\limits_1^n a_i$ (respect. $\prod\limits_1^n a_i$) exista:

$$(a_1] \vee \ldots \vee (a_n] = (\sum_1^n a_i]$$

(respect. $$[a_1) \vee \ldots \vee [a_n) = [\prod_1^n a_i)\ .$$

Prueba

Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{I}$.

i) Supongamos que $\sum_1^n a_i$ existe.

Partiendo del hecho de que I_μ es una red (proposición 3.1.5), $\bigvee_1^n (a_i]$ existe, y por lo tanto los $a_i \in \bigvee_1^n (a_i]$ ya que $a_i \in (a_i] \subset \bigvee_1^n (a_i]$ con lo cual $\sum_1^n a_i \in \bigvee_1^n (a_i]$.

Sea $x \in (\sum a_i]$, entonces $x \leq \sum_1^n a_i$.

Como $\sum_1^n a_i \in \bigvee_1^n (a_i]$ y siendo $\bigvee_1^n (a_i]$ un ideal tenemos que $x \in \bigvee_1^n (a_i]$.

Luego $(\sum_1^n a_i] \subset \bigvee_1^n (a_i]$.

Por otro lado, puesto que $a_i \leq \sum_1^n a_i$, $(a_i] \subset (\sum a_i]$ para todo i, $i = 1, \ldots, n$, con lo cual $\bigvee_1^n (a_i] \subset (\sum_1^n a_i]$.

ii) Sea $\bigvee_1^n (a_i] = (x]$.

Como $(a_i] \subset (x]$ para todo i, $a_i \leq x$.

También si z fuese otra cota superior de los a_i, las siguientes relaciones serían verdaderas:

$$a_i \leq z \text{, para todo } i, i = 1, \ldots\ldots, n$$

$$(a_i] \subset (z] \text{, para todo } i, i = 1, \ldots\ldots, n$$

$$(x] = \bigvee_1^n (a_i] \subset (z] .$$

Luego $x \leq z$. Esto significa que $\sum_1^n a_i$ existe y que $x = \sum_1^n a_i$.

iii) Supongamos que $\prod_1^n a_i$ existe.

Como I_α es una red, $\bigvee_1^n [a_i)$ existe y entonces los $a_i \in \bigvee_1^n [a_i)$ ya que $a_i \in [a_i) \subset \bigvee_1^n [a_i)$, luego

$$\prod_1^n a_i \in \bigvee_1^n [a_i) .$$

Sea $x \in [\prod a_i)$, entonces $\prod_1^n a_i \leq x$.

Como $\prod_1^n a_i \in \bigvee_1^n [a_i)$ y siendo $\bigvee_1^n [a_i)$ un ideal-dual de $\mathbb{E}$, $x \in \bigvee_1^n [a_i)$.

Luego $[\prod a_i) \subset \bigvee_1^n [a_i)$.

Por otro lado, como $\prod_1^n a_i \leq a_i$, $[a_i) \subset [\prod a_i)$ para todo i, $i = 1, \ldots, n$, luego $\bigvee_1^n [a_i) \subset [\prod a_i)$.

iv) Sea $\bigvee_1^n [a_i) = [x)$.

Puesto que, para todo i, $[a_i) \subset [x)$, $x \leq a_i$. También, si z fuera otra cota inferior de los a_i:

$$z \leq a_i \quad \text{para todo } i, \; i = 1, \ldots, n$$

$$[a_i) \subset [z) \quad \text{para todo } i, \; i = 1, \ldots, n$$

$$\bigvee_{1}^{n} [a_i) = [x) \subset [z).$$

Luego $z \leq x$. Esto significa que $\prod_{1}^{n} a_i$ existe y que $x = \prod_{1}^{n} a_i$.

3.2 PSEUDO-COMPLEMENTOS EN CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS.

DEFINICION 3.2.1

Sea $\mathbb{E}$ un copo con 0. Diremos que el elemento $a \in \mathbb{E}$ tiene un "pseudo-complemento" en $\mathbb{E}$, si existe un elemento $a^* \in \mathbb{E}$ tal que:

PS_1 : $(a] \cap (a^*] = (0]$.

PS2 : Las relaciones $b \in \mathbb{E}$ y $(a] \cap (b] = (0]$ implican $(b] \subset (a^*]$.

El elemento a^* se llamará el "pseudo-complemento de a en $\mathbb{E}$". Notemos que, según la definición 3.2.1, el psc. de un elemento, cuando exista, será único. En efecto, si a_1^* y a_2^* fuesen dos pcs. de $a \in \mathbb{E}$, entonces PS1 nos muestra que:

$$(a] \cap (a_1^*] = (0]$$

$$\text{y} \quad (a] \cap (a_2^*] = (0]$$

luego, según PS2:

$$(a_1^*] \subset (a_2^*]$$

$$\text{y} \quad (a_2^*] \subset (a_1^*]$$

con lo cual,

$$a_1^* \leq a_2^*$$

$$\text{y} \quad a_2^* \leq a_1^* .$$

Por lo tanto

$$a_1^* = a_2^* .$$

DEFINICION 3.2.2.

Diremos que el copo $\mathbb{E}$ es "cerrado para pseudo-complementos" (o sencillamente que $\mathbb{E}$ es pseudo-complementada si $\mathbb{E}$ posee elemento menor 0 y todos los elementos de $\mathbb{E}$ tienen pseudo-complemento.

El psc. de a^* será denotado por a^{**}, el de éste por a^{***} y así sucesivamente.

DEFINICION 3.2.3.

Sea $\mathbb{E}$ un copo cerrado para pseudo-complementos. Un elemento $a \in \mathbb{E}$ lo llamaremos "normal" si

$$a^{**} = a .$$

PROPOSICION 3.2.4

Sea $\mathbb{E}$ un copo con 0. Para $a \in \mathbb{E}$, a^* existe si y sólo si $(a]^*$ es un ideal principal. Cuando a^* exista,

$$(a]^* = (a^*] .$$

Prueba

Supongamos que a^* existe. Por PS_1 tenemos que

$$(a] \cap (a^*] = (0] ,$$

luego

$$(a^*] \subset (a]^* .$$

Sea $x \in (a]^*$, entonces

$$(a] \cap (x] \subset (a] \cap (a]^*$$

ya que si $z \in \mathbb{E}$ fuese tal que $z \leq a$ y $z \leq x$, la última de éstas relaciones y el hecho de que x pertenezca al ideal $(a]^*$ implica que $z \in (a]^*$. Luego $z \in (a]$ y $z \in (a]^*$, de donde:

$$(a] \cap (x] \subset (a] \cap (a]^* = (0]$$

es decir $(a] \cap (x] = (0]$. Aplicando ahora PS_2, $(x] \subset (a^*]$, con lo cual $x \in (a^*]$.

En síntesis, $(a^*] = (a]^*$ siempre que a^* exista.

Recíprocamente, si $(a]^* = (b]$, entonces

$$(a] \cap (b] = (0] .$$

Por otro lado, si $x \in \mathbb{E}$ es tal que

$$(a] \cap (x] = (0],$$

$$(x] \subset (a]^* = (b] .$$

Esto significa que a^* existe y que $a^* = b$.

<u>PROPOSICION 3.2.5</u>

En un copo $\mathbb{E}$, cerrado para psc., los siguientes resultados son válidos:

1º) $(\forall a)(a \in \mathbb{E} \Longrightarrow a \leq a^{**})$

2º) $(\forall a)(\forall b)((a, b) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}) \Longrightarrow (a \leq b \Longrightarrow b^* \leq a^*))$

3º) $(\forall a)(a \in \mathbb{E} \Longrightarrow a^{***} = a^*)$

4º) $\mathbb{E}$ posee elemento mayor.

<u>Prueba</u>

1º) Siendo a^{**} el psc. de a^* :

$$(a^*] \cap (a^{**}] = (0] .$$

Como también $(a^*] \cap (a] = (0]$, PS_2 nos muestra que

$$(a] \cap (a^{**}] .$$

De donde $a \leq a^{**}$.

2º) Supongamos que a, b son elementos de $\mathbb{E}$ tales que $a \leq b$, entonces $(a] \subset (b]$. Puesto que S_μ es una red pseudo-complementada (proposición 3.1.4), el resultado 2 de la proposición 2.6.2 nos lleva a que $(b]^* \subset (a]^*$. Luego $(b^*] \subset (a^*]$, es decir $b^* \leq a^*$ siempre que $a \leq b$.

3º) Tomando a como a^* en (1º), $a^* \leq a^{***}$. Y como $a \leq a^{**}$, $a^{***} \leq a^*$ según (2º). Luego $a^{***} = a$.

4º) Puesto que, para todo $x \in \mathbb{E}$, $(0] \cap (x] = (0]$, $(x] \subset (0]^* = (0^*]$. Luego $x \in (0^*]$ con lo cual, $x \leq 0^*$ para todo $x \in \mathbb{E}$. Esto significa que 0^* es el elemento mayor de $\mathbb{E}$. Lo llamaremos 1.

PROPOSICION 3.2.6.

En un copo $\mathbb{E}$, cerrado para psc., los siguientes resultados son válidos:

1º) Si $\prod_1^n a_i$ existe en $\mathbb{E}$, $\prod_1^n a_i^{**}$ también existe.

Además:

a) $$(\prod_1^n a_i)^{**} = \prod_1^n a_i^{**}$$

b) $$(\prod_1^n a_i)^* = (\prod_1^n a_i^{***})^* .$$

2º) Si $\sum_{i \in I} a_i$ existe en $\mathbb{E}$, $\prod_{i \in I} a_i^*$ también existe.

Además,

$$(\sum_{i \in I} a_i)^* = \prod_{i \in I} a_i^* .$$

Prueba

1º) Supongamos que $\prod_1^n a_i$ existe en $\mathbb{E}$. Por ser $\mathbb{E}$ cerrado para psc. también existirán $(\prod_1^n a_i)^*$ y $(\prod_1^n a_i)^{**}$; luego la proposición 3.2.4. nos da:

$$((\prod_1^n a_i)^{**}] = (\prod_1^n a_i]^{**} = (\bigcap_1^n (a_i])^{**} \quad \text{(Propo. 3.1.6)}$$

Como S_μ es una red cerrada para psc., los resultados de la proposición 2.6.2. se cumplen en S_μ. En particular, la relación (8) de esa proposición muestra que:

$$\left(\bigcap_1^n (a_i]\right)^{**} = \bigcap_1^n (a_i]^{**}$$

$$= \bigcap_1^n (a_i^{**}] \qquad \text{(Proposición 3.2.4)}$$

Luego

$$\left(\left(\prod_1^n a_i\right)^{**}\right] = \bigcap_1^n (a_i^{**}].$$

Esto significa, según 3.1.6., que $\prod_i^n a_i^{**}$ y además

$$\bigcap_1^n (a_i^{**}] = \left(\prod_1^n a_i^{**}\right] .$$

Luego

$$\left(\prod_1^n a_i\right)^{**} = \prod_1^n a_i^{**} .$$

Del resultado anterior podemos obtener la parte (b) de (1):

$$\left(\prod_1^n a_i\right)^{***} = \left(\prod_1^n a_i^{**}\right)^{*}$$

$$\left(\prod_1^n a_i\right)^{*} = \left(\prod_1^n a_i^{**}\right)^{*} \qquad \text{((3), propo. 3.2.5).}$$

2º) Supongamos que $\sum_{i\in I} a_i$ existe.

Como $a_i \leq \sum a_i$ para todo $i \in I$, $(\sum a_i)^* \leq a_i^*$.

Sea $z \in \mathbb{L}$ otra cota inferior de los a_i^*, es decir, $z \leq a_i^*$ para todo $i \in I$, entonces $a_i^{**} \leq z^*$. Como $a_i \leq a_i^{**}$ (proposición 3.2.5., (1)), $a_i \leq z^*$ para todo $i \in I$.

Luego

$$\sum_{i\in I} a_i \leq z^* \quad y \quad z^{**} \leq (\sum_{i\in I} a_i)^{*} .$$

Utilizando otra vez (1) de la proposición 3.2.5.:

$$z \leq z^{**} \leq (\sum_{i\in I} a_i)^{*} .$$

Esto significa que $\prod_{i\in I} a_i^*$ existe y que:

$$\prod_{i\in I} a_i^* = (\sum_{i\in I} a_i)^* .$$

PROPOSICION 3.2.7

Sea $\mathbb{C}$ un copo cerrado para psc.. Si un conjunto N de elementos normales de $\mathbb{C}$ es cerrado para psc., contiene 0 ó 1 y es una semi red o una semi-red dual, entonces N es un Algebra Booleana.

Prueba

Utilizaremos la caracterización para Algebras Booleanas dada en la proposición 2.7.3.

Sea N una semi-red que satisface las demás hipótesis. Para probar que N es un Algebra de Boole sólo nos faltaría mostrar AB4 de 2.7.3..

Tomemos x, y en N tales que $x . y^* = 0$ entonces $x \leq y^{**} = y$, que es equivalente a afirmar $x . y = x$.

Recíprocamente, si $x . y = x$:

$$x . y^* = (x . y) . y^* = x . (y . y^*) = x . 0 = 0$$

luego

$$x . y^* = 0 \iff x . y = x.$$

Supongamos que N es una semi-red dual. Definamos la operación:

$$a . b = (a^* + b^*)^* .$$

Entre elementos de N, donde "+" es la red suma en N. Probaremos que $a \, . \, b$ es la red producto de a, b.

Como $a^* \leq a^* + b^*$, $(a^* + b^*)^* \leq a^{**} = a$, luego $a \, . \, b \leq a$. De manera similar $a \, . \, b \leq b$.

Supongamos que $x \in N$ es tal que $x \leq a$ y $x \leq b$ entonces $a^* \leq x^*$ y $b^* \leq x^*$ con lo cual las siguientes relaciones son verdaderas:

$$a^* + b^* \leq x^*$$
$$x^{**} \leq (a^* + b^*)^*$$
$$x \leq a \, . \, b$$

luego $a \, . \, b$ es la red producto de a, b en N y la proposición vale por la primera parte.

COROLARIO

Si en una semi-red o una semi-red dual cerrada para psc., todo elemento es normal, entonces es una Algebra Booleana.

PROPOSICION 3.2.8.

Una red singularmente complementada que es cerrada para psc. es un Algebra de Boole.

Prueba

Sea R una red singularmente complementada, esto es, todo elemento de R posee un único complemento. Supongamos además que R es cerrada para psc..

Mostraremos que todo elemento de R es normal.

Sea $a \in R$ y $a' \in R$ su complemento. Entonces $a \, . \, a' = 0$ y $a' \leq a^*$ (por definición de psc.). Luego $a + a' \leq a + a^*$, $1 \leq a + a^*$. Esto significa que $a + a^* = 1$ por ser 1 elemento maximal de R.

Por otro lado, puesto que $a \leq a^{**}$, $a + a' \leq a^* + a^{**}$, $1 \leq a^* + a^{**}$. Luego $1 = a^* + a^{**}$.

Como también $0 = a \, . \, a^* = a^* . \, a^{**}$, las ecuaciones anteriores indican que a y a^{**} son complementos de $a^* \in R$. Por la singularidad de R, $a = a^{**}$.

Luego la proposición vale por el colorario de 3.2.7.

PROPOSICION 3.2.9.

Una red singularmente complementada que sea a la vez relativamente complementada, es un Algebra de Boole.

Prueba

Sea R una red singularmente complementada. Supongamos además que R es relativamente complementada, es decir, para tres elementos a, b, u de R, $a \leq u \leq b$, podemos encontrar al menos un complemento de u en $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$.

Mostraremos que R es cerrado para psc. Sea $a \in R$, a' su complemento en R, b un elemento de R tal que $a \cdot b = 0$. Puesto que $b \leq a + b \leq 1$, entonces, por ser R relativamente complementada, existirá un complemento relativo de $a + b$ en $[b, 1]$. Llamémosle z; z cumplirá:

$$z \cdot (a + b) = b$$

$$z + (a + b) = 1$$

siendo $$a \cdot (a + b) = a .$$

entonces

$$a \cdot z = a \cdot (a + b) \cdot z = a \cdot b = 0.$$

Y del hecho de que $b \leq z$ se deduce $b + z = z$, con lo cual

$$a + z = a + b + z = 1 .$$

Las dos últimas relaciones indican que z es el complemento de a en R. Por la singularidad de R, $z = a'$. Luego $a' \in [b, 1]$ siempre que $a \cdot b = 0$, es decir, $a \cdot b = 0$ implica $b \leq a'$.

Supongamos ahora que $b \leq a'$, entonces $b \cdot a' = b$, de donde:

$$a \cdot b = a \cdot (b \cdot a') = b \cdot (a \cdot a') = b \cdot 0 = 0.$$

En resumen, $a \cdot b = 0 \iff b \leq a'$. Esto significa que $a' = a^*$. Luego R es pseudocomplementada y por consiguiente un Algebra de Boole de acuerdo a la proposición 3.2.8.

B I B L I O G R A F I A

1) Birkhoff G., LATTICE THEORY, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXV, 1940.

2) Birkhoff - Mac Lane, Algebra Moderna,Editorial Vicens-Vives, 1963

3) Bourbaki N., ELEMENTS OF MATHEMATICS, Addison - Wesley, 1968.

4) Buncrot R., ON LATTICE COMPLEMENTS, Proc. Glasgow Mathematical Assoc., Vol. 7, 1965.

5) Frink O., IDEALS IN PARTIALLY ORDERED SETS, Ametican Mathematical Monthly, Vol. 61, 1954.

6) Frink O., PSEUDO-COMPLEMENTS IN SEMI-LATTICES, Duke Mathematical Journal, Vol. 29, 1962.

7) Frink O., REPRESENTATION OF BOOLEAN ALGEBRAS, Bulletin American Mathematical Society, Vol. 47, 1941.

8) Halmos P., LECTURES ON BOOLEAN ALGEBRAS, D. Van Nostrand Co., 1963.

9) Halmos P., TEORIA INTUITIVA DE CONJUNTOS, 8a. edición, Compañía Editorial Continental S.A., 1973.

10) Oubiña L., INTRODUCCION A LA TEORIA DE CONJUNTOS, 5a. Edición, EUDEBA, 1970.

11) Szasz G., INTRODUCTION TO LATTICE THEORY, D. Van Nostran Company, 1951.

12) Venkatanarasimhan P.V., PSEUDO-COMPLEMENTS IN POSETS, Proc. - American Mathematical Society, Vol. 28, No. 1, 1971.