Universidad de El Salvador
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Matemática

Trabajo de graduación titulado

Categorías aplicadas a la teoría de álgebras de Banach

Presentado por
Erick Amílcar Muñoz Deras

Para optar al grado de
Licenciado en Matemática

Ciudad universitaria, 5 de mayo de 2021

Universidad de El Salvador
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Matemática

Categorías aplicadas a la teoría de álgebras de Banach

Presentado por:
Erick Amílcar Muñoz Deras

Para optar al grado de
Licenciado en Matemática

Bajo la dirección del
Dr. Aarón Ernesto Ramírez Flores
MSc. Gabriel Alexander Chicas Reyes

Ciudad universitaria, 5 de mayo de 2021

Universidad de El Salvador

Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

Lic. Mauricio Hernán Lovo Córdoba
Decano

MS. Zoila Virginia Guerrero
Vicedecano

Lic. Jaime Humberto Salinas Espinoza
Secretario de Facultad

Escuela de Matemática

Dr. Dimas Noé Tejada Tejada
Director

MSc. Carlos Ernesto Gamez Rodríguez
Secretario

Dedicatoria

A mis padres.

Índice general

Introducción

En esta tesis se pretende emplear la teoría de categorías para obtener resultados de forma más eficiente en el estudio de álgebras de Banach.

En particular, consideraremos algunas estructuras y transformaciones que son útiles para clarificar la demostración del teorema de Gelfand-Naimark. Estas estructuras y transformaciones pueden tratarse como ejemplo de elementos básicos de la teoría de categorías.

Las estructuras más importantes con las que trabajaremos son las categorías cuyos objetos son espacios topológicos (**Top**), espacios de Hilbert (**Hil**), espacios de Banach ($\boldsymbol{Ban}$) y álgebras C^* conmutativas.

Sobre estas categorías se definen dos funtores importantes para nuestro estudio.
El funtor **M**: $Ban \to Top$ y el funtor $\mathbf{C_b}$: $Top \to Ban$. Si consideramos a X un espacio de Banach y Y un espacio topológico, los objetos $M(X)$ y $C_b(Y)$ son construcciones clásicas del análisis funcional, pero el punto de vista novedoso consiste en interpretarlos como funtores.
Esto nos brinda una ventaja en términos categóricos, pues se descubre una nueva relación la cuál se describe en el siguiente párrafo.

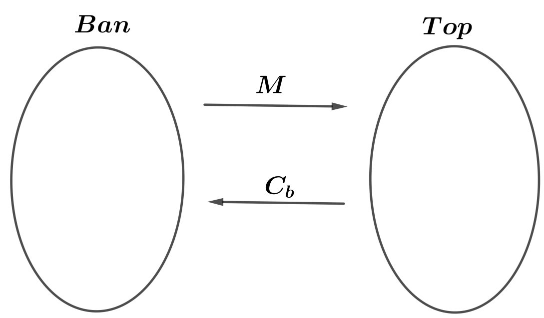

Figura 1: Esquema de la relación entre los funtores M y C_b.

Los funtores C_b y M son adjuntos, es decir, existe una biyección natural entre homomorfismos en la categoría Ban y homomorfismos en la categoría Top, la cual viene dada por $\phi : Hom_{\boldsymbol{Ban}}(\mathcal{A}, C_b(X)) \to Hom_{\boldsymbol{Top}}(X, M(\mathcal{A}))$, donde $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach.

Sin embargo, aunque no es posible plantear una equivalencia de categorías entre Ban y Top, se demuestra que es posible caracterizar dos subcategorías donde sí es posible obtener una equivalencia por medio de la composición de los funtores C_b y M. Esas categorías son $\boldsymbol{GN}$, la categoría cuyos objetos son generados al aplicar el funtor composición C_bM a espacios de Banach, y la categoría SC, cuyos objetos se obtienen al aplicar el funtor composición MC_b a espacios topológicos.

La composición C_bM es un funtor, el cual viene acompañado con una biyección natural

$$\phi : Hom_{Ban}(\mathcal{A}, C_bM\mathcal{A}) \to Hom_{Top}(M\mathcal{A}, M\mathcal{A})$$

que define el homomorfismo

$$\Gamma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C_b(M(\mathcal{A}))$$
$$\Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = ev_a$$

A este homomorfismo de álgebras de Banach se le llama, transformada de Gelfand.

De modo similar, se define la transformada de Stone-Cech como la composición MC_b, este funtor es una transformación natural que viene acompañada con una biyección natural

$$\phi : Hom_{Ban}(C_bX, C_bX) \to Hom_{Top}(X, MC_bX)$$

la cual define el homomorfismo

$$\Psi_X : X \to MC_b(X)$$
$$\Psi_X(x) = ev_x$$

Estás dos transformaciones permiten establecer una equivalencia de categorías entre GN y SC.

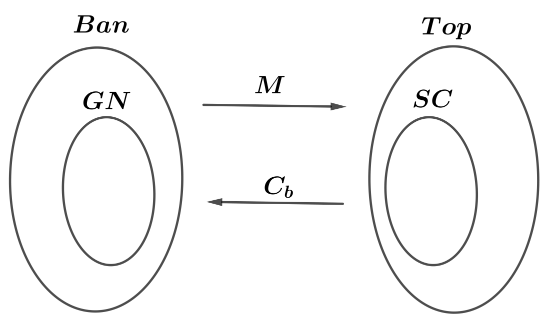

Figura 2: Equivalencia de las categorías GN y SC

Luego se demuestra que SC es realmente la categoría de espacios Hausdorff compactos, mientras que GN es realmente la categoría de álgebras C^* conmutativas. Por tanto, la transformada de Gelfand lo que realmente nos brinda es una equivalencia entre las categorías de espacios Hausdorff compactas y de álgebras C^* conmutativas, información que está escondida en la demostración usual del teorema.

Así, la idea del presente trabajo es retomar los detalles de la teoría previamente descrita y aplicar los métodos que de ella se obtienen a problemas relacionados de la teoría de álgebras de Banach; en específico, se muestra una aplicación a las álgebras C^* conmutativas.

El teorema de Gelfand-Naimark es un teorema fundamental del análisis funcional y es un resultado que data de 1943. publicado por Israel Gelfand y Mark Naimark. Plantea que si un álgebra C^* es conmutativa con unidad, entonces su imagen por la transformada de Gelfand es un isomorfismo$-*$. El objetivo de este trabajo es utilizar la teoría de categorías para reorganizar los elementos involucrados en la prueba de este teorema y revelar la información adicional que se obtiene bajo este contexto.

En las siguientes páginas, se propone un recorrido de la teoría más general sobre categorías, estableciendo todos los conceptos, propiedades y ejemplos necesarios para poder resolver el problema en estudio. También se realiza un recorrido por la teoría de espacios de Hilbert y espacios de Banach, finalizando con un breve repaso por la teoría básica de álgebras conmutativas de Banach. Con esto en mano, es posible iniciar con la teoría de Gelfand, reorganizando las estructuras y transformaciones involucradas en la prueba del teorema Gelfand-Naimark bajo el enfoque categórico hasta llegar a la prueba de dicho teorema. Toda esta teoría nos dará el poder de expandir la utilidad de dicho teorema, y poder estudiar algunas propiedades desde el punto de vista categórico e incluso descubrir otras nuevas.

Las ideas principales de este documento se desarrollan en el capítulo 4, donde el lector podrá estudiar cómo se aplica la teoría de categorías a la teoría de Gelfand. En específico, prestamos especial atención a dos funtores que relacionan la categoría espacios topolóogicos con la categoría de álgebras de Banach. En principio nos preguntamos si ambas categorías son equivalentes; lamentablemente, no es posible obtener una equivalencia entre ambas categorías. Pero es posible restringirse a dos subcategorías dentro de ellas, las cuáles sí son equivalentes. Estas dos sub-categorías son la categoría de álgebras C^* conmutativas y la categoría de espacios Hausdorff compactos. Es decir, se obtiene una equivalencia (en el sentido categórico) entre estas dos categorías que mencionados anteriormente.

En el último capítulo se estudia otra interesante aplicación de la teoría de categorías en las álgebras C^*. Resulta que podemos establecer una relación funtorial entre la categoría de álgebras C^* con unidad y la categoría de conjuntos parcialmente ordenados, analizando las subálgebras conmutativas de un álgebra $\mathbb{C}^*$ y estudiando la relación de orden entre ellas, está es una herramienta muy útil para clasificar álgebras C^* desde la vista teórica de Posets.
Se muestra un ejemplo particular, analizando el conjunto parcialmente ordenado de subálgebras C^* asociado a las matrices cuadradas de 2×2 con entradas complejas, bajo la relación funtorial se muestra un isomorfismo entre este conjunto y la unión del plano proyectivo con $\mathbb{C}$.

Capítulo 1

Elementos del análisis funcional

1.1. Espacios Normados

Definición 1.1.1.

Dado E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.
Una función $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, que lleva un vector $x \in E$ a un número $||x||$, es llamado una **prenorma** si para todo $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ sucede lo siguiente:

(i) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$

(ii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Desigualdad triángular)

Además, una prenorma se dice que es una **norma** si cumple la condición adicional:

(iii) $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$

Note que (i) implica que $||0|| = 0$, entonces podemos reemplazar la condición (iii) por $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Un espacio vectorial dotado con una prenorma es llamado ***espacio prenormado***.
Un espacio vectorial dotado de una norma es llamado ***espacio normado***.

Ejemplo 1.1.2.

La prenorma más simple en cualquier espacio lineal, es la prenorma cero, donde $||x|| = 0$ para todo $x \in E$.

Observación 1.1.3.

Todo espacio normado puede considerarse como un espacio métrico, en el cual la distancia $d(x, y)$ entre x y y es $||x - y||$. Donde las propiedades relevantes de d son

(I) $0 \leq d(x, y) < \infty$, para todo x, y,

(II) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(III) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo x y y,

(IV) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo x, y, z.

Observación 1.1.4.

Todo subespacio vectorial F de un espacio prenormado (normado) es también un espacio prenormado (normado). A la prenorma (norma) correspondiente en F se le dice *heredada* desde E.

Propiedad 1.1.5.

Toda prenorma $||\cdot||$ de un espacio lineal es una función continua con respecto a la topología generada por esta prenorma.

La prueba se sigue de la desigualdad $|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||$.

Definición 1.1.6.

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio prenormado, definimos

$$B_E := \{x \in E | \|x\| \leq 1\}$$

y que llamaremos **bola unitaria en E**.

Definición 1.1.7.

Sea H un espacio lineal. Una función $S : H \times H \to \mathbb{C}$ se llama funcional **quilineal**, si para todo $x, y, z \in H$ y $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$ se cumplen las siguientes condiciones.

(i) $S(\lambda x + \nu y, z) = \lambda S(x, z) + \nu S(y, z)$ (Linealidad);

(ii) $S(x, \lambda y + \nu z) = \bar{\lambda} S(x, y) + \bar{\nu} S(x, z)$ (Conjugación lineal).

Definición 1.1.8.

Un funcional bilineal en H es llamado un **producto pre-interno**, (cambiaremos la notación $S(x, y)$ por $\langle x, y\rangle$) si se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$

(ii) $\langle x, x\rangle \geq 0$

Un producto pre-interno es llamado **producto interno** cuando sucede que $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Definición 1.1.9.

Un espacio líneal H equipado con un producto pre-interno es llamado un espacio ***pre-Hilbert***. Si H está equipado con un producto interno, entonces es llamado espacio ***casi-Hilbert***. Los espacíos de Hilbert se definen más adelante.

Ejemplo 1.1.10.

El producto interno estandar en $\mathbb{C}^n$, definido por

$$\langle \epsilon, \eta\rangle := \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \bar{\eta_k}$$

.

Ejemplo 1.1.11.

El conjunto ℓ_2 de las sucesiones complejas cuadrado integrables, es decir, las sucesiones ϵ tal que la suma de los cuadrados de los módulos de sus elementos converge ($\sum_{k=1}^{n} |\epsilon_k|^2 < \infty$). Su producto lineal se define por

$$\langle \epsilon, \eta \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \bar{\eta}_k.$$

Esta serie siempre converge gracias a la desigualdad $|\epsilon_k \eta_k| \leq \frac{1}{2} \left(|\epsilon_k|^2 + |\eta_k|^2 \right)$.

Teorema 1.1.12.

(Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Para todo $x, y \in H$(Pre-Hilbert) tenemos

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Prueba.

Por la condición (ii) en la definición 1.1.7, se tiene que

$$0 \leq \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \bar{\lambda} \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\langle x, y \rangle \neq 0$ y definir $\lambda := t \frac{\langle y, x \rangle}{|\langle x, y \rangle|}$ con $t \in \mathbb{R}$.

Sustituyendo en la igualdad anterior se obtiene que $0 \leq \langle x, x \rangle t^2 + 2|\langle x, y \rangle| t + \langle y, y \rangle$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como asumimos $\langle x, y \rangle \neq 0$ entonces se tiene $\langle x, x \rangle > 0$. Tenemos un polinomio cuadrático en t cuyo descriminante es

$$\begin{aligned} (2|\langle x, y \rangle|)^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle &\leq 0, \text{ de la observación anterior} \\ |\langle x, y \rangle|^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle &\leq 0 \\ |\langle x, y \rangle|^2 &\leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

Proposición 1.1.13.

Una función $||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ definida en H (Pre-Hilbert) es una prenorma. Esta prenorma es una norma $\Leftrightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno.

Prueba.

La desigualdad triángular se comprueba de la siguiente forma

$$\begin{aligned} ||x + y||^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + |\langle y, x \rangle| + |\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle, \text{ por el teorema 1.1.12} \\ &= (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

Además, $||x|| = 0 \Rightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

1.2. Operadores acotados

Proposición 1.2.1.

Sea $T : E \to F$ un operador líneal entre dos espacios prenormados. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Existe $C > 0$ tal que $||T(x)||_F \leq C||x||_E$ para todo $x \in E$;

(ii) $\sup\{||T(x)||_F : x \in B_E\} < \infty$

Y más aún, si K^0 es el ínfimo de las constantes C para el cuál se cumple (i), y K_0 el supremo en (ii), entonces $K^0 = K_0$.

Nota: En lo que sigue omitiremos mencionar el espacio donde opera cada norma, así para esta prueba $|| \cdot ||_F := || \cdot ||$, $|| \cdot ||_E := || \cdot ||$.

Prueba.

(i) $\Rightarrow$ (ii)
Sea C, que satisface (i) y tomemos $x \in B_E$.

Tenemos $||T(x)|| \leq C||x|| \leq C < \infty$ (Ya que $x \in B_E$)

luego $K_0 = \sup\{||T(x)|| : x \in B_E\} \leq C < \infty$ y además, $K_0 \leq K^0$ ya que $k_0 \in C$, $\forall C > 0$ tal que

$$K^0 = \inf\{C > 0 : |Tx| \leq C\,|x|\,, \forall x \in X\}$$
$$K_0 = \sup_{x \in B_E} |Tx|\,.$$

(ii)$\Rightarrow$ (i) Sea $x \in E$.

Si $x = 0 \Rightarrow T(x) = 0 \Rightarrow ||T(x)|| = 0$. Como $K_0 \geq 0$ y $||x|| \geq 0 \Rightarrow ||T(x)|| \leq K_0||x||$.

Si $x \neq 0$, entonces $\left|\left|\frac{x}{||x||}\right|\right| = 1$, obsérvese que $\frac{x}{||x||} \in B_E$.

$$\left|\left|T\left(\frac{x}{||x||}\right)\right|\right| \leq \sup\{||T(x)|| : x \in B_E\} = K_0$$
$$\frac{1}{||x||}||T(x)|| \leq K_0$$
$$||T(x)|| \leq K_0||x||$$

Por tanto, hemos concluido que se cumple $||T(x)|| \leq K_0||x||$ para todo $x \in E$. Así, se cumple (i) cuando $C = K_0$. Además, $K^0 \leq K_0$ y entonces $K^0 = K_0$.

Definición 1.2.2.

Un operador entre dos espacios prenormados que tiene cualquiera de las propiedades (i) o (ii) de la proposición 1.2.1 es llamado **acotado**. Al número K_0 (que es lo mismo K^0) se le llama la **prenorma operador** (o **norma de operador**) del operador T y se denota por $|| \cdot ||_{op}$ y aplicado a T, simplemente se denota como $||T||$ (i.e, $||T|| := K_0 = K^0$).

Supongase que E y F son dos espacios prenormados. Denotaremos por $\boldsymbol{\mathcal{B}(E,F)}$ al conjunto de todos los operadores acotados desde E a F. Claramente, éste es un subconjunto del espacio líneal $\boldsymbol{\mathcal{L}(E,F)}$, de todos los operadores desde E hacía F.

Cuando $F = E$, por simplicidad a $\mathcal{B}(E,E)$ lo abreviaremos como $\mathcal{B}(E)$.

Proposición 1.2.3.

(i) $\mathcal{B}(E,F)$ es un subespacio líneal en $\mathcal{L}(E,F)$;

(ii) la función en $\mathcal{B}(E,F)$ que asigna a cualquier operador T, el número $||T||$ es una prenorma en $\mathcal{B}(E,F)$;

(iii) Si F es un espacio normado, entonces $\mathcal{B}(E,F)$ también es un espacio normado.

Prueba.

Tomemos $S,T \in \mathcal{B}(E,F)$. Para cualquier $x \in E$ tenemos

$$\begin{aligned} ||(S+T)(x)|| = ||S(x)+T(x)|| &\leq ||S(x)|| + ||T(x)|| \\ &\leq (||S|| + ||T||)||x|| \\ &= C||x||, \text{ con } C := ||S|| + ||T||. \end{aligned}$$

De lo anterior, $S+T \in \mathcal{B}(E,F)$ y $||S+T|| \leq ||S|| + ||T||$.

Por otro lado, sea $\lambda \in \mathbb{C}$, para todo $x \in E$ se cumple:

$$\begin{aligned} ||\lambda T(x)|| &= ||T(\lambda x)|| \\ &\leq ||T|| ||\lambda x|| \\ &\leq C||x||, \text{ donde } C := |\lambda| ||C|| \end{aligned}$$

Entonces, $\lambda T \in \mathcal{B}(E,F)$. Y además $(\lambda T)(x) = \lambda T(x)$, de donde $||\lambda T|| = |\lambda| ||T||$.

Y hemos demostrado que se cumplen (i) y (ii) de la definición 1.1.1.

Ahora, sea F un espacio normado y $T \neq 0 \in \mathcal{B}(E,F)$ entonces $T(x) \neq 0$ para algún $x \in B_E$. Luego, $||T|| \geq ||T(x)|| > 0$. De donde se obtiene que $||T|| = 0$ entonces $T = 0$.

Proposición 1.2.4. *Si F es Banach (F es normado y completo con respecto a la métrica inducida por la norma), entonces $\mathcal{B}(E,F)$ es completo.*

Prueba.

Sea $T : E \to F$ y $\{T_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(E,F)$.

Dado que

$$||T_n(x) - T_m(x)|| \leq ||T_n - T_m|| \, ||x||$$

También, $||T_n - T_m|| \to 0$ cuando $n, m \to \infty$ (por que $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es Cauchy), luego $\{T_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en F, para todo $x \in X$. Entonces $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ existe, porque F es Banach.
Si tomamos $\epsilon > 0$, tenemos que

$$||T_n(x) - T_m(x)|| \leq ||T_n - T_m|| \, ||x|| \leq \epsilon ||x||$$

y si tomamos un n y m lo suficientemente grande, tenemos que $||T(x)-T_m(x)|| \leq \epsilon||x||$. Luego,

$$\begin{aligned} ||T(x)|| - ||T_m(x)|| \leq ||T(x) - T_m(x)|| &\leq \epsilon||x|| \\ ||T(x)|| &\leq (||T_m|| + \epsilon)||x|| \end{aligned}$$

Entonces $T \in \mathcal{B}(E,F)$ y $||T - T_m|| \leq \epsilon$. Así $T_m \to T$ en la norma de $\mathcal{B}(E,F)$. Por tanto, $\mathcal{B}(E,F)$ es completo.

Definición 1.2.5.

En 1.2.2 definimos $\mathcal{B}(E,F)$ como el conjunto de operadores líneales acotados de E hacia F. Cuando F es el cuerpo de escalares, a $\mathcal{B}(E,F)$ se le conoce como el **espacio dual** de E y se denota por $\boldsymbol{E^*}$.

Para nuestros objetivos, en este trabajo tomaremos $F = \mathbb{C}$.

Desde lo hecho en la proposición 1.2.3 (ii), podemos concluir que si E es prenormado, entonces E^* es normado.

Nota. Más generalmente se considera $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$ (el conjunto de las aplicaciones lineales de E hacia el cuerpo).

Proposición 1.2.6.

Si $\dim(E) < \infty$ entonces E y E^* son isomorfos.

Prueba.

Note que $\mathcal{L}(E,\mathbb{C}) = B(E,\mathbb{C})$ cuando $\dim(E) < \infty$.

Nota. Asumiremos como conocido que $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E)\dim(F)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \dim(E^*) &= \dim(\mathcal{L}(E,\mathbb{C})) \\ &= \dim(E)\dim(C) \\ &= \dim(E), \text{ porque } \mathbb{C} \text{ tiene dimensión 1 como un espacio vectorial complejo.} \end{aligned}$$

Como $\dim(E^*) = \dim(E)$ entonces ambos espacios son isomorfos.

Definición 1.2.7.

Sea $T : E \to F$ un operador entre espacios prenormados. T es llamado una **contracción**, si $||T|| \leq 1$ (i.e, $||T(x)|| \leq ||x||$ para todo $x \in E$).

Un operador es llamado una **isometría**, si preserva normas, es decir, $||T(x)|| = ||x||$ para todo $x \in E$.

Proposición 1.2.8.

Sean E, F, G espacios prenormados y sean $S : E \to F$ y $T : F \to G$ operadores lineales acotados. Denotamos como TS a la composición $T \circ S$. Entonces $TS \in \mathcal{B}(E,G)$ y $||TS|| \leq ||T||\,||S||$.

Prueba.

Sea $x \in E$;

$$\begin{aligned} ||TS|| &= ||T(S(x))|| \\ &\leq C||S(x)||, \text{ por definición 1.2.1} \\ &\leq C'||x||, \text{ similar al paso anterior} \end{aligned}$$

por tanto, $TS \in \mathcal{B}(E,G)$. Además si $C' := ||T||\,||S||$ como se definió en 1.2.2, se tiene que $||TS(x)|| \leq (||T||\,||S||)\,||x||$. Por tanto $||TS|| \leq ||T||\,||S||$.

Ejemplo 1.2.9.

Los ejemplos más simples de operadores acotados son:
El operador $\mathbf{0} : E \to F$; $x \to 0$ y el operador identidad $\mathbf{1} : E \to E$; $x \to x$. Para estos casos, $||0|| = 0$ y $||1|| = 1$.

Definición 1.2.10.

Un **funcional** es un operador con rango $\mathbb{C}$. Un funcional $f : E \to \mathbb{C}$ (donde E es un espacio prenormado) se dice acotado, si para algún $C > 0$ tenemos que $|f(x)| \leq C||x||$ para todo $x \in E$.

Teorema 1.2.11. *Las siguientes propiedades de un operador $T : E \to F$ entre espacios normados son equivalentes:*

(i) T es acotado;

(ii) T es continua en cero;

(iii) T es continuo;

(iv) T es uniformemente continua.

Prueba.

$(i) \Rightarrow (iv)$.
Sea $\epsilon > 0$ y $\delta := \frac{\epsilon}{C}$, donde C es la constante de la que se habla en 1.2.1.
Entonces, para todo $x, y \in E$, tales que $d(x,y) = ||x-y|| < \delta$ obtenemos que

$$\begin{aligned} d(T(x),T(y)) &= ||T(x)-T(y)|| < \epsilon \\ &= ||T(x)-T(y)|| \leq C < \epsilon \end{aligned}$$

También $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii)$, es claro desde la continuidad de T.

$(ii) \Rightarrow (i)$.
La aplicación T es continuo en $0 \in E$, y $T(0) = 0 \in F$. Entonces, para $\epsilon := 1$ existe un δ tal que $||x'|| < \delta \Rightarrow ||T(x')|| < \epsilon$.

Sea $x \in E$, si $||x|| > 0$, entonces podemos escribir $x' := \frac{\delta x}{2||x||}$. Vemos que $||x'|| < \delta$, y esto implica $||T(x)|| < \frac{2}{\delta}||x||$. Así, para todo $x \neq 0$ (caso $x = 0$ es trivial) tenemos $||T(x)|| < C||x||$, donde $C := \frac{2}{\delta}$. Por tanto T es acotado.

Definición 1.2.12.

Un operador entre espacios pre-normados es un isomorfismo topológico si y sólo si éste es un homeomorfismo.

Proposición 1.2.13.

Suponga que T es un espacio topológico, H un espacio topológico de Hausdorff, D es un subconjunto denso en T y definamos $\phi, \psi : T \to H$ como aplicaciones continuas.
Si ϕ y ψ coinciden en D, entonces $\phi = \psi$.

Si el lector está interesado en algunos de estos u otros resultados sobre espacios normados y operadores acotados, puede revisar Helemskii [2], capítulo 1.

Capítulo 2

Elementos de teoría de categorías

2.1. Categorías

Definición 2.1.1. *Una categoría $\mathcal{C}$ está dada por:*

i. Una colección de **objetos** $\mathcal{C}_0$, usualmente se denotan con las mayúsculas X, Y, Z, ...

ii. Un conjunto $\mathcal{C}_1$ de **morfismos** (flechas) $f : X \to Y$ para cada par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}_1$.

iii. Dadas dos flechas f y g tal que $cod(f) = dom(g)$ la composición de f con g ($g \circ f$ o gf) está definida y tiene dominio $dom(f)$ y codominio $cod(g)$:

$$(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z) \mapsto (X \xrightarrow{gf} Z)$$

Teniendo que satisfacerse:

1) La composición es asociativa: Dados, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : Z \to W$, $h(gf) = (hg)f$.
2) Para todo objeto X existe la flecha identidad $id_X : X \to X$, que satisface $id_X \circ g = g$ para todo $g : Y \to X$ y $f \circ id_X = f$ para todo $f : X \to Y$

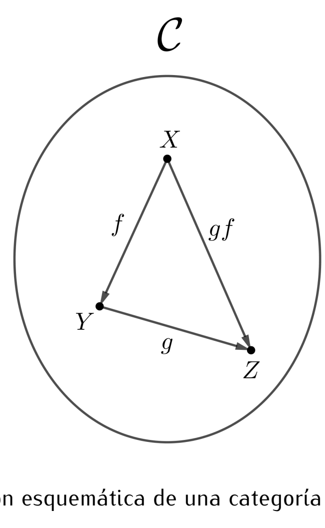

Figura 2.1: Representación esquemática de una categoría $\mathcal{C}$ y su regla de composición

Observación 2.1.2. *id_X es la única flecha con dominio X y codominio X que satisface esta propiedad.*

En efecto, sea g otra flecha con está propiedad, entonces

$$id_X \circ g = g = id_X \circ g = id_X$$

de donde $g = id_X$.

Ejemplo 2.1.3.

1) La categoría con un objeto (*) y una flecha (id_*), es la categoría **1**.

2) La categoría que no tiene objetos ni flechas es la categoría vacía o categoría **0**.

3) Un *preorden* es un conjunto X junto con una operación binaria $\leq$, la cual es reflexiva (es decir, $x \leq x$, para todo $x \in X$) y transitiva (es decir, $x \leq y$ y $y \leq z$ implica que $x \leq z$).

   Observación 2.1.4. *Un preorden es una categoría.*

   En efecto, definamos una categoría donde los objetos son los elementos de X (el mismo conjunto de arriba) y los morfismos son

$$f := \begin{cases} x \to y & \text{si } x \leq y \\ \varnothing & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

   X es transitivo. Sean $x, y, z \in X$, tal que $f : x \to y$, $g : y \to z$ y $h : z \to w$ se cumple que

$$\begin{aligned} gf &: (x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z) \mapsto (x \to z) \\ h(gf) &: (x \xrightarrow{gf} z \xrightarrow{h} w) \mapsto (x \to w)^* \\ hg &: (y \xrightarrow{g} z \xrightarrow{h} w) \mapsto (y \to w) \\ (hg)f &: (x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{hg} w) \mapsto (x \to w)^{**} \end{aligned}$$

   De $*$ y $**$ obtenemos que $h(gf) = (hg)f$. Además, como X es preorden cumple reflexividad, esto nos da la flecha identidad, por lo que X es una categoría.

4) En un espacio topológico X se puede definir la categoría de abiertos de X (**Abiertos(**X**)**). Definiendo los objetos como los subconjuntos abiertos de X y los morfismos

$$f := \begin{cases} U \to V & \text{si } U \subseteq V \text{ ;donde } U \text{ y } V \text{ son abiertos de } X \\ \varnothing & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

   En efecto, si W, U, V son abiertos de X tal que, $U \subseteq V \subseteq W$ entonces $U \subseteq W$ define la regla de composición.

   Por otro lado, $U \subseteq U$ define la flecha, $id_X : U \to U$. Si V es otro abierto de X tal que $f : V \to U$ ($V \subseteq U$) y $g : U \to V$ ($U \subseteq V$), las relaciones $V \subseteq U \subseteq U$ y $U \subseteq U \subseteq V$, nos dan las composiciones $f \circ id_X = f$ y $id_X \circ g = g$. Además, la composición es asociativa ya que la operación $\subseteq$ lo es.

Algunas categorías toman como objetos conjuntos dotados de estructura adicional.

Ejemplo 2.1.5.

a) Top, los objetos son espacios topológicos y los morfismos son las aplicaciones continuas.

b) $\mathcal{H}$, los objetos son espacios Hausdorff compactos y los morfismos son funciones continuas entre estos espacios.

c) Set, los objetos son conjuntos y los morfismos son las aplicaciones entre conjuntos.

d) Grp, los objetos son grupos y los morfismos son homomorfismos de grupos.

e) $k - Vect$, los objetos son los espacios vectoriales sobre un cuerpo y los morfismos son aplicaciones $k-$ lineales.

f) $k - vect$, los objetos son los espacios vectoriales de dimensión finita sobre k y los morfismos son aplicaciones $k-$ lineales.

e) Pos, los objetos son los conjuntos parcialmente ordenados y los morfismos son funciones monótonas.

f) Lin, los objetos son espacios linelaes (sobre $\mathbb{C}$) y los morfismos son los operadores.

Definición 2.1.6.

Dado $\mathcal{C}$ podemos formar una categoría $\mathcal{C}^{op}$ (Categoría dual) la cual tiene los mismos objetos y flechas que $\mathcal{C}$, pero con dirección opuesta, i.e si $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ entonces $f : Y \to X$ en $\mathcal{C}^{op}$ y su composición está definida por.

$$g^{op} \circ f^{op} := (f \circ g)^{op}$$

$$\mathcal{C}^{op}: \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f^{op}"] \arrow[rr, bend left, "g^{op}\circ f^{op}"] & Y \arrow[r, "g^{op}"] & Z \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{C}: \quad \begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, "f"'] & Z \arrow[l, "g"'] \arrow[ll, bend left, "f\circ g"] \end{tikzcd}$$

Definición 2.1.7.

Un objeto X de una categoría $\mathcal{C}$ es llamado **inicial** (respectivamente, **final**) si para todo $Y \in \mathcal{C}$ el conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (respectivamente, $Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$) consiste exactamente de un elemento (i.e exactamente una flecha de X a Y). Note que X es un objeto inicial de $\mathcal{C}$ si y sólo si $\mathcal{C}$ es un objeto final de $\mathcal{C}^{op}$.

Un objeto **0** es llamado un **objeto cero** si es al mismo tiempo inicial y final.

2.2. Morfismos especiales

Definición 2.2.1.

Sea $f : X \to Y$ un morfismo de cualquier categoría.

- **Monomorfismo:** Para todo par de morfismos g, $g\prime : Z \to X$ se cumple

$$f \circ g = f \circ g\prime \Rightarrow g = g'$$

i.e, si para todo $Z \in \mathcal{C}$ la aplicación

$$\begin{aligned} f_* : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) &\to Hom_{\mathcal{C}}(Z, Y) \\ g &\to f \circ g \end{aligned}$$

es inyectiva.

- **Epimorfismo:** Si para todo par de morfismos $g, g\prime : Y \to Z$ se cumple

$$g \circ f = g' \circ f \Rightarrow g = g\prime$$

i.e, si para todo $Z \in \mathcal{C}$ la aplicación

$$\begin{aligned} f_* : Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) &\to Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ g &\to f \circ g \end{aligned}$$

es inyectiva.

- **Isomorfismo:** si existe otro morfismo $f^{-1} : Y \to X$ tal que $f^{-1} \circ f = id_X$ y $f \circ f^{-1} = id_Y$. En este caso escribimos $X \cong Y$.

Propiedad 2.2.2. *Algunas propiedades de las composiciones de morfismos:*

1. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son isomorfismos, entonces $g \circ f : X \to Z$ es un isomorfismo.

   Prueba.

   Considerese el morfismo $f^{-1} \circ g^{-1}$

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f && \text{la composición es asociativa} \\ &= (f^{-1} \circ id_Y) \circ f \\ &= f^{-1} \circ f \\ &= id_X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} && \text{la composición es asociativa} \\ &= g \circ (id_Y \circ g^{-1}) \\ &= g^{-1} \circ g \\ &= id_Y \end{aligned}$$

   De lo anterior, existe $(g \circ f)^{-1}$ y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Por tanto, $g \circ f$ es un isomorfismo.

2. Si $m : X \to Y$ y $m' : Y \to Z$ son monomorfismos, entonces $m' \circ m : X \to Z$ es un monomorfismo.

   Prueba.

   Sean los morfismos $g, g' : Z \to W$, entonces

$$\begin{aligned} m \circ m' \circ g &= m \circ m' \circ g' \\ m \circ (m' \circ g) &= m \circ (m' \circ g') \quad \text{la composición es asociativa} \\ m \circ g &= m \circ g' \quad \text{Ya que } m' \text{ es monomorfismo} \\ g &= g' \quad \text{Ya que } m \text{ es monomorfismo} \end{aligned}$$

   Por tanto, $m \circ m' es$ monomorfismo.

3. Si $e : X \to Y$ y $e' : Y \to Z$ son epimorfismos, entonces $e' \circ e : X \to Z$ es un epimorfismo.

   Prueba.

   Sean los morfismos $g, g' : Z \to W$, entonces

$$
\begin{aligned}
g \circ (e' \circ e) &= g \circ (e' \circ e) \\
(g \circ e') \circ e &= (g \circ e') \circ e \\
g \circ e &= g \circ e \qquad \text{Ya que } e' \text{ es epimorfismo} \\
g &= g \qquad \text{Ya que } e \text{ es epimorfismo}
\end{aligned}
$$

   Por tanto, $e \circ e'$ es epimorfismo.

4. Sea $m : X \to Y$ y $f : Y \to Z$, si $f \circ m$ es monomorfismo, entonces m es monomorfismo.

   Prueba.

   La prueba es similar a la prueba del numeral anterior.

Proposición 2.2.3. *Dos objetos iniciales en $\mathcal{C}$ son isomorfos. La proposición también se cumple para objetos finales.*

Prueba

Sean X y Y objetos iniciales en $\mathcal{C}$. De la definición 2.1.7, existe una única flecha $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$. Consideremos el morfismo $gf : X \to X$, la unicidad de f y g implica la unicidad de gf y dado que $\mathcal{C}$ es categoría, implica que $gf = id_X$, de la misma manera $fg = id_Y$. Por tanto, los objetos **inciales** de una categoría son isomorfos.

■

Si pasamos a la categoría $\mathcal{C}^{op}$, también se cumple que los objetos finales son isomorfos.

2.3. Funtores

Dadas dos categorías C y D, un **funtor (covariante)** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de dos operaciones, $F_0 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$ y $F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}_1$ tal que:

1) A cada objeto X de $\mathcal{C}$ le asigna un objeto $F_0(X)$ de $\mathcal{D}$,

2) A cada morfismo $f : X \to Y \in \mathcal{C}$ se le asigna un morfismo $F_1(f) : F_0(X) \to F_0(Y)$ en $\mathcal{D}$,

tal que se cumplen los siguientes axiomas,

a) Preserva composiciones: para $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, $F_1(gf) = F_1(g)F_1(f)$;

b) Preserva el morfismo identidad: $F_1(id_X) = id_{F_0(X)}$

Notación. *Usualmente se escribe F sin distinguir entre F_0 y F_1.*

Observación 2.3.1. *Si f es un isomorfismo en $\mathcal{C}$ y F es un funtor $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, entonces $F(f)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$.*

En efecto, si $f : X \to Y$ es un isomorfismo, se cumple que existe $f^{-1} : Y \to X$ en $\mathcal{C}$ tal que $f \circ f^{-1} = id_X$ y $f^{-1} \circ f = id_Y$.

Consideremos $F(f)$ en D, existe $F(f^{-1})$ en D, tal que

$$
\begin{aligned}
F(f^{-1})F(f) &= F(ff^{-1}) \\
&= F(id_X) \\
&= id_{F(X)}
\end{aligned}
$$

de forma similar, $F(f)F(f^{-1}) = id_{F(Y)}$. Por tanto, existe $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$ y el morfismo $F(f)$ es de hecho un isomorfismo.

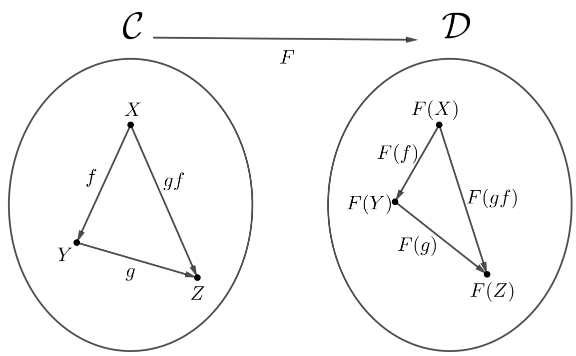

Figura 2.2: Representación esquemática de un funtor F entre dos categorías

Observación 2.3.2.

Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ son dos funtores, entonces la composición $G \circ F$ también es un funtor.

Sean X, Y, Z en $\mathcal{C}$ tal que $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

$$
\begin{aligned}
G \circ F(gf) &= G(F(gf)) \\
&= G(F(g)F(f)) && \text{dado que } F \text{ es funtor,} \\
&= G(F(g))G(F(f)) && \text{dado que } G \text{ es funtor,} \\
&= G \circ F(g) G \circ F(f)
\end{aligned}
$$

Además, la identidad respecto a la composición de funtores es $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, aplica un objeto X en sí mismo y un morfismo f en el mismo morfismo.

Ejemplo 2.3.3.

Sea X un objeto fijo de una categoría (arbitraria) $\mathcal{C}$. Para cuada objeto $Y \in \mathcal{C}_0$ asociamos el conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$:

$$Y \rightsquigarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

y para cada morfismo $f : Y \to Y_1$ en $\mathcal{C}$ induce la aplicación f_* definida por la composición

$$(Y \xrightarrow{f} Y_1) \rightsquigarrow (Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{f_*} Hom_{\mathcal{C}}(X, Y_1)).$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f \circ g"'] & Y \arrow[dl, "f"] \\
Y_1 &
\end{tikzcd}
$$

Esto define un funtor $Hom_{\mathcal{C}}(X,-) : \mathcal{C} \to Set$, generado por el objeto X, llamado el funtor covariante principal.

En efecto, sea $Y \xrightarrow{f} Y_1 \xrightarrow{f'} Y_2$, del diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y_2 & X \arrow[l, "f'\circ f\circ g"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f\circ g"'] & Y \arrow[dl, "f"] \\
& Y_1 \arrow[ul, "f'"] &
\end{tikzcd}$$

se comprueba que preserva composiciones, $Y \xrightarrow{f} Y_1 \xrightarrow{f'} Y_2$ entonces $(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$ y además, el morfismo identidad $id : Y \to Y$ induce el morfismo $id_* : Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Ejemplo 2.3.4.

Los **funtores olvidadizos** $\square : \mathcal{C} \to Set$, son funtores que olvidan toda su estructura.
Este funtor asigna a cada objeto $X \in \mathcal{C}$ el conjunto subyacente $\square X$.

$$\square : Top \to Set, \quad \square : Grp \to Set, \quad \square : Ring \to Set, \quad \square : k - Vect \to Set, etc$$

También están los funtores que olvidan una solo una parte de la estructura.

$$\square : Haus \to Top, \quad \square : Ab \to Grp, \quad \square : k - Vect \to Ab, etc$$

Definición 2.3.5.

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un **funtor contravariante** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ invierte la dirección de las flechas, i.e $F_1(f) =: f^* : F_0(cod(f)) \to F_0(dom(f)) \in \mathcal{D}$ para las flechas f en $\mathcal{C}$, de modo que

$$id_X^* = id_{F(X)} \quad y \quad (g \circ f)^* = f^* g^*$$

Observación 2.3.6.

Un funtor contravariante puede ser visto como un funtor covariante $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ o $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$ Estas definiciones nos ayudaran a tratar funtores covariantes y contravariantes de la misma manera.

Esto puede ser visto como un funtor $Hom_{\mathcal{C}}(-,Y) : \mathcal{C}^{op} \to Set$.

Ejemplo 2.3.7.

Para los espacios vectoriales sobre k, tenemos un funtor

$$Hom_K(-,V) : k - Vect^{op} \to K - Vect$$

En particular, el espacio vectorial dual define un funtor

$$(-)^* := Hom_K(-,k) : k - Vect^{op} \to k - Vect$$

Ejemplo 2.3.8.

Anteriormente se asoció a todo espacio topológio X, la categoría **Abiertos(**X**)**. Si consideramos una aplicación continua $\phi : X \to Y$, entonces por la definición, $\phi^{-1}(U)$ es abierto en X para todo abierto $U \subseteq Y$. Esto define un funtor $F :=$ **Abiertos(**Y**)** $\to$ **Abiertos(**X**)**.

Consideremos U, V, W abiertos de X, ϕ una aplicación continua, además, de los cursos de topología sabemos que se cumple $\phi(U)^{-1} \subseteq \phi(V)^{-1}$ cuando $U \subseteq V$ (ver Munkres [3], 2.18). Se tiene que

$$\begin{aligned} U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g}, W \quad & si \quad U \subseteq V \subseteq W \\ U \xrightarrow{F(f)} V \xrightarrow{F(g)} W, \quad & si \quad \phi^{-1}(U) \subseteq \phi^{-1}(V) \subseteq \phi^{-1}(W)^{*} \end{aligned}$$

y se comprueba que

$$\begin{aligned} U \xrightarrow{gf} W, \quad & si \quad U \subseteq W \\ \Rightarrow U \xrightarrow{F(gf)} W, \quad & \text{ya que} \quad \phi^{-1}(U) \subseteq \phi^{-1}(W) \\ \text{y} \quad U \xrightarrow{F(g)F(f)} W, \quad & \text{ya que} \quad \phi^{-1}(U) \subseteq \phi^{-1}(W) \quad \text{por } * \end{aligned}$$

de donde $F(gf) = F(g)F(f)$.
Además, $id_Y : U \subseteq U \in Y$ define $F(id_Y) : f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(U) \in X$.

Definición 2.3.9.

Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}_0$ podemos considerar la aplicación de conjuntos

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(F(X), F(Y)) \\ f \to F(f) \end{aligned}$$

1) Si esta aplicación es inyectiva para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}_0$, se dice que F es **fiel**.

2) Si es sobreyectiva para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}_0$, se dice que F es **pleno**.

3) Si es biyectiva para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}_0$, se dice que F es **fielmente pleno**.

Un funtor F **refleja** una propiedad P, si cuando la imagen F de algo (objeto, flecha, etc) tiene P, entonces este algo también tiene P.

Ejemplo 2.3.10.

El funtor olvidadizo $k{-}Vect \to Set$ es fiel porque diferentes morfismos entre espacios vectoriales corresponden a diferentes aplicaciones entre conjuntos.

Proposición 2.3.11. *Un funtor fiel refleja epimorfismos y monomorfismos*

Prueba. *Para epimorfismos.*

Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ fiel, $f : X \to Y$ y sean $g, g\prime : Y \to Z$ tal que $g \circ f = g\prime \circ f$.

$$\begin{aligned} F(gf) &= F(g^{'} f) \\ F(g)F(f) &= F(g^{'})F(f) \quad && \text{Ya que } F \text{ es funtor} \\ F(g) &= F(g^{'}) && \text{Ya que } F \text{ es epi} \\ g &= g^{'} && \text{Ya que } F \text{ es fiel} \end{aligned}$$

Entonces f es epimorfismo.
La prueba para monomorfismos es similar.

2.4. Transformaciones naturales entre funtores

Definición 2.4.1.

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos funtores entre ellas. Una **transformación natural** $\alpha : F \Rightarrow G$ entre F y G es una colección de morfismos $(\alpha_C : F(C) \to G(C))_{C \in \mathcal{C}_0}$, tal que para cada morfismo $f : C \to C'$ en $\mathcal{C}$ el siguiente diagrama en $\mathcal{D}$ es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F(C) \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(C') \arrow[r, "\alpha_{C'}"] & G(C')
\end{tikzcd}$$

Usaremos la notación $Nat(F, G) := \{\text{transformaciones naturales } F \Rightarrow G\}$.

Observación 2.4.2.

Si la transformación natural α_C es un isomorfismo para todo $C \in \mathcal{C}$ se dice que F y G son **isomorfos**.

O equivalentemente, si existen transformaciones naturales $\alpha : F \Rightarrow G$ y $\alpha^{-1} : G \Rightarrow F$ tales que $\alpha^{-1} \circ \alpha = Id_F$ y $\alpha \circ \alpha^{-1} = Id_G$

Observación 2.4.3.

Si F, G, H son tres funtores $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $\alpha : F \Rightarrow G$ y $\beta : G \Rightarrow H$ son transformaciones naturales, entonces la composición $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow H$ definida como

$$(\beta \circ \alpha)_X := \beta_X \circ \alpha_X$$

es también una transformación natural:

$$\begin{tikzcd}
F(C) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(C) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "G(f)"] & H(C) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(C') \arrow[r, "\alpha_Y"] & G(C') \arrow[r, "\beta_Y"] & H(C')
\end{tikzcd}$$

y se asocia a cada funtor F la transformación natural identidad $Id_F : F \Rightarrow F$ definida por $(Id_F)_X := F(id_X) = id_{F(X)}$ para todo X.

Definición 2.4.4.

Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos funtores, se dice que F es **adjunto por la izquierda** a G y que G es **adjunto por la derecha** a F si para cualesquiera $X \in \mathcal{C}_0$ e $Y \in \mathcal{D}_0$ tenemos una biyección natural

$$\Phi_{XY} : Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \overset{\cong}{\to} Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)).$$

La naturalidad quiere decir que para X fijo la biyección

$$\Phi_{X,-} : Hom_{\mathcal{D}}(F(X), -) \overset{\cong}{\to} Hom_{\mathcal{C}}(X, G(-))$$

es un isomorfismo de funtores $\mathcal{D} \to Set$ y para Y fijo la biyección.

$$\Phi_{-,Y} : Hom_{\mathcal{D}}(F(-), Y) \overset{\cong}{\to} Hom_{\mathcal{C}}(-, G(Y))$$

es también un isomorfismo de funtores $\mathcal{C}^{op} \to Set$.

Proposición 2.4.5.

Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor adjunto por la izquierda a $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Entonces,

i. F **preserva epimorfismos :** Para todo epimorfismo $f : X \to X'$ en $\mathcal{C}$ el morfismo $F(f) : F(X) \to F(X')$ es un epimorfismo en $\mathcal{D}$;

ii. G **preserva monomorfismos :** Para todo monomorfismo $g : Y \to Y'$ en $\mathcal{D}$ el morfismo $G(g) : G(Y) \to G(Y')$ es un monomorfismo en $\mathcal{C}$.

Demostración.

Para $Z \in \mathcal{D}_0$, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Hom(X', G(Z)) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\cong"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Z)) \arrow[d, "\cong"] \\ Hom(F(X'), Z) \arrow[r, "F(f^*)"] & Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Z) \end{tikzcd}$$

Si f es un epimorfismo, entonces la flecha f^* es inyectiva, y luego $F(f)^*$ es también inyectiva. La inyectividad de $F(f^*)$ para cualquier Z nos da que $F(f)$ es un epimorfismo.

Definición 2.4.6.

Un funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es llamado una **equivalencia** de esas categorías si existe otro funtor covariante $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que la composición GF es isomorfa (ver 2.4.2) al funtor identidad $id_{\mathcal{C}}$ y FG es isomorfo al funtor identidad $id_{\mathcal{D}}$.

Definición 2.4.7. *Dos categorías son llamadas equivalentes si existe una equivalencia entre ellas.*

Es decir, si existen los funtores F, G y dos transformaciones naturales $\alpha_C : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ y $\beta_D : id_{\mathcal{D}} \Rightarrow FG$ cuyas componentes son todos isomorfismos y tal que los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "f"] & GF(C) \arrow[d, "GF(f)"] \\ C' \arrow[r, "\alpha_{C'}"] & GF(C') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FG(D) \arrow[r, "\beta_D"] \arrow[d, "FG(g)"] & D \arrow[d, "g"] \\ FG(D') \arrow[r, "\beta_{D'}"] & D' \end{tikzcd}$$

Este concepto establece dos categoríasequivalentes, lo cual es muy útil, pues crea la posibilidad de traducir teoremas entre distintos tipos de estructura matemática, los cuales preservarán su significado aun después de la traducción.

Ejemplo 2.4.8.

Sea $k - Vect$ la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita, el funtor del espacio vectorial dual da un isomorfismo natural

$$ev_V : V \cong (V^*)^*.$$

Uno de los "$*$"denota el funtor $k - vect \to k - vect^{op}$ y el otro $"*"$ denota $k - vect^{op} \to k - vect$. Este isomorfismo corresponde a los isomorfismos de los funtores.

$$\alpha : Id_{k-vect} \Rightarrow * \circ *, \quad \beta : * \circ * \Rightarrow Id_{k-vect^{op}}$$

Entonces tenemos una equivalencia de categorías $K - vect \cong k - vect^{op}$.

Teorema 2.4.9.

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor covariante. Entonces F es una equivalencia si y solamente si:

1. F es fiel y pleno
2. **Es denso:** si para todo D en $\mathcal{D}_0$ existe C en $\mathcal{C}_0$ tal que $F(C) \cong D$

Prueba.

- ($\Rightarrow$) Sea F una equivalencia de categorías.
  Existen $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $GF \cong id_{\mathcal{C}}$ y $FG \cong id_D$, luego existen $\alpha_C : C \xrightarrow{\cong} GF(C)$ y $\beta_D : FG(D) \xrightarrow{\cong} D$. De lo anterior, $FG(D) \cong D$, con $G(D) \in \mathcal{C}_0$ por lo que F es denso.

  Ahora mostraremos 1.

  - Es fiel
    Si $F(f) = F(f')$ entonces $GF(f) = GF(f')$ y considerando el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "f"', "f'"] & GF(C) \arrow[d, "GF(f)=GF(f')"] \\ C' \arrow[r, "\alpha_{C'}"] & GF(C') \end{tikzcd}$$

    se obtiene que $f = \alpha_{C'}^{-1} \circ GF(f) \circ \alpha_C = \alpha_{C'}^{-1} \circ GF(f') \circ \alpha_C = f'$, por lo que tenemos $F(F) = F(f')$ entonces $\Rightarrow f = f'$.
  - Es pleno (se debe probar que la aplicación $f \mapsto F(f)$ es sobreyectiva).
    Consideremos la aplicación $g : F(C) \to F(C')$. Por lo realizado anteriormente, la aplicación $g \to G(g)$ es inyectiva. Considerando el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "f"', "f'"] & GF(C) \arrow[d, "GF(g)=GF(f)"] \\ C' \arrow[r, "\alpha_{C'}"] & GF(C') \end{tikzcd}$$

    se obtiene que $GF(f) = \alpha_{C'} \circ f \circ \alpha_C^{-1} = \alpha_{C'} \circ \alpha_{C'}^{-1} \circ f \circ \alpha_C^{-1} \circ \alpha_C = G(g)$.
    Por tanto, para todo $g \in \mathcal{D}$ existe f en $\mathcal{C}$ tal que $GF(f) = G(g)$.

- ($\Leftarrow$) Sea F tal que cumpla 1 y 2. Construiremos un funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y los isomorfismos naturales $\beta_D : 1_D \Rightarrow FG$ y $\alpha_C : id_C \Rightarrow GF$.

  Como F es denso, existe un $C \in \mathcal{C}_0$ para un $D \in \mathcal{D}_0$ tal que se cumple el isomorfismo $\alpha_D : D \to F(C)$. Sea $G(D) = C$, entonces tenemos el isomorfismo $\beta_D : D \to FG(D)$.
  Sea $g : D \to D' \in \mathcal{D}$, como F es fiel y pleno, para todo g existe un único morfismo $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, eligiendo $C = G(D)$ y $C' = G(D')$, . Entonces el siguiente diagrma

$$\begin{tikzcd} FG(D) \arrow[r, "\beta_D"] \arrow[d, "F(f)"] & D \arrow[d, "g"] \\ FG(D') \arrow[r, "\beta_{D'}"] & D' \end{tikzcd}$$

  conmuta. Si hacemos $G(g) = f$, tenemos el isomorfismo natural β_D (ver 2.4.7).

Ahora, también por unicidad, para cualquier D tenemos que $G(1_D) = 1_{G(D)}$ y que dados dos morfismos g y g' en D, si $g \circ g$ está definido, entonces $G(g \circ g') = G(g) \circ G(g')$. Así $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es un funtor covariante.

Por último, arriba obtuvimos un isomorfismo $\beta_D : D \to FG(D)$ y ya que $D \cong F(C)$, existe un isomorfismo $\beta_{F(C)} : F(C) \to FGF(C)$. Como F es fiel y pleno entonces existe un morfismo $\alpha_C : C \to GF(C)$ tal que $F(\alpha_C) = \beta_{F(C)}$ y además, como $\beta_{F(C)}$ es isomorfismo, existe un morfismo $g : FGF(C) \to F(C)$ tal que

$$g \circ \beta_{F(C)} = 1_{F(C)} \quad \text{y} \quad \beta_{F(C)} \circ g = 1_{FGF(C)}.$$

Ya que F es fiel y pleno, existe un único $h : GF(C) \to C$ con $F(h) = g$. Entonces,

$$F(h \circ \alpha_C) = F(h)F \circ (\alpha_C) = g \circ \beta_{F(C)} = 1_{F(C)} = 1_C$$

$$F(\alpha_C \circ h) = F(\alpha_C) \circ F(h) = \beta_{F(C)} \circ g = 1_{FGF(C)}$$

Y dado que F es fiel obtenemos

$$h \circ \beta_C = 1_C \quad \text{y} \quad \beta_C \circ h = 1_{GF(C)}$$

por tanto $\alpha_C : C \to GF(C)$ es un isomorfismo y existe un morfismo $f : C \to C'$ para el cual, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "f"] & GF(C) \arrow[d, "GF(f)"] \\
C' \arrow[r, "\alpha_{C'}"] & GF(C')
\end{tikzcd}$$

conmuta, dado que F es fiel y α_C es un isomorfismo.

Por tanto, α es un isomorfismo natural (ver 2.4.7).

■

2.5. Producto y coproducto

Definición 2.5.1.

Dados dos objetos $X_1, X_2 \in \mathcal{C}_0$, su **producto** es otro objeto $X_1 \times X_2 \in \mathcal{C}_0$ junto con dos morfismos $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ y $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ y que satisface la siguiente propiedad universal:

Dado otro objeto $Z \in \mathcal{C}_0$ y dos morfismos $f_1 : Z \to X_1$ y $f_2 : Z \to X_2$, entonces existe un único morfismo $\langle f_1, f_2 \rangle : Z \to X_1 \times X_2$ tal que

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "\exists! \langle f_1 f_2 \rangle"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X_1 & X_1 \times X_2 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & X_2
\end{tikzcd}$$

Definición 2.5.2.

Un **coproducto** es un objeto $X_1 \sqcup X_2 \in \mathcal{C}_0$ junto con dos morfismos $g_1 : X_1 \to X_1 \sqcup X_2$ y $g_2 : X_2 \to X_1 \sqcup X_2$ que satisface la siguiente propiedad universal:

Dado otro objeto $Z \in \mathcal{C}_0$ y dos morfismos $f_1 : X_1 \to Z$ y $f_2 : X_2 \to Z$, entonces existe un único morfismo $(f_1, f_2) : X_1 \sqcup X_2 \to Z$ tal que

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & X_1 \sqcup X_2 \arrow[d, "\exists!"', "(g_1 g_2)"] & X_2 \arrow[l, "g_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

2.6. Categorías del análisis funcional

2.6.1. Las categorías Hil y Ban

Ahora estamos listos para definir nuestras primeras dos categorías del análisis funcional.

Definición 2.6.2.

(i) La categoría $\mathbf{Nor}$. Los objetos son espacios normados y los morfismos son operadores acotados.

(ii) La categoría $\mathbf{Pre}$. Los objetos son espacios prenormados y los morfismos son operadores acotados.

La propiedad para la composición de morfismos en categorías se verifica desde la proposición en 1.2.8 y por que la composición de operadores es asociativa.
La propiedad del morfismo identidad se sigue desde el operador identidad definido en 1.2.9, combinando el hecho de que $||1|| = 1$ y la propiedad 1.2.8. De ahí que las estructuras definidas anteriormente, cumplen con ser categorías.

Además, las categorías anteriores cumplen la inclusión $\boldsymbol{Nor} \subset \boldsymbol{Pre}$. Es decir Los espacios normados son una subcategoría de los espacios pre-normados.

Definición 2.6.3.

Un espacio normado es llamado un espacio de $\boldsymbol{Banach}$ si es completo como espacio métrico (es decir, toda sucesión de Cauchy converge).
Un espacio casi-Hilbert (ver 1.1.9), es llamado espacio de $\boldsymbol{Hilbert}$ si es un espacio de Banach normado.

Proposición 2.6.4.

Suponga que E y F son espacios normados. Si F es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(E, F)$ es también un espacio de Banach.

Prueba.

Como E y F son normados. La demostración es la misma que en la proposición 1.2.4.

Propiedad 2.6.5.

Un espacio normado que es topológicamente isomorfo a un espacio de Banach es también un espacio de Banch.

Prueba.

Sea E un espacio de Banach, $\phi : E \to F$ un isomorfismo topológico y sea y_n una sucesión de Cauchy en F entonces, si definimos $x_n := \phi^{-1}(y_n)$, dado que ϕ es isomorfismo y y_n de Cauchy, se tenrá que x_n también es de Cauchy pues la imagen inversa por ϕ de cualquier sucesión de Cauchy es también de Cauchy. Entonces, x_n converge en E, dado que E es espacio de Banach y de nuestra definición de x_n se observa que $y_n = \phi(x_n)$, además si nombramos como x al límite de x_n en E, Tenemos que y_n converge y su valor de convergencia es $\phi(x)$.

Nota. Lo anterior nos indica que la propiedad de ser un espacio de Banach es invariante bajo isomorfismos en la categoría $\boldsymbol{Nor}$.

Proposición 2.6.6.

Los monomorfismos (ver definición en 2.2.1) en $\boldsymbol{Pre}$ y $\boldsymbol{Nor}$ son los operadores inyectivos.

Prueba.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría en $\boldsymbol{Pre}$ o $\boldsymbol{Nor}$. Tomemos también $\phi : X \to Y \in \mathcal{C}$ una aplicación inyectiva y $Z \in \mathcal{C}$.
Si tomamos dos morfismos $g_1, g_2 : Z \to X$ tenemos que

$$\begin{aligned} \phi g_1 &= \phi g_2 \\ \phi g_1(x) &= \phi g_2(x), \text{ para un } x \in Z \\ g_1 &= g_2, \text{ por la inyectividad de } \phi \end{aligned}$$

Entonces, $g_1 = g_2$ y por tanto ϕ es monomorfismo.

Proposición 2.6.7.

En la categoría $\boldsymbol{Nor}$ el morfismo $\phi : X \to Y$ es un epimorfismo (ver definición en 2.2.1) $\Leftrightarrow$ su imagen es densa en Y.

Prueba.

"$\Leftarrow$" Sea $Z \in \boldsymbol{Nor}$ y tomemos $g_1, g_2 : Y \to Z$ morfismos (es decir operadores acotados) tal que $g_1\phi = g_2\phi$.
De la relación anterior se tiene que $g_1 \mid_{Im(\phi)} = g_2 \mid_{Im(\phi)}$, como $Im(\phi)$ es densa en Y entonces se concluye que $g_1 = g_2$, gracias al resultado en la proposición 1.2.13.

"$\Rightarrow$" Seguiremos un razonamiento por contradicción.

Supongamos que existe un $y \in Y$ que no vive en la clausura de $Im(\phi)$. Es decir, para algún $r > 0$ tenemos $U(y, r) \cap Im(\phi) = \varnothing$.
Consideremos la función

$$\begin{aligned} f :& Y \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \max\left\{\frac{1}{r}(r - d(y, x)); 0\right\} \end{aligned}$$

Observar que f es un operador acotado, dada su definición. Por tanto, f es un morfismo en $\boldsymbol{Nor}$. Tomemos ahora, dos morfismos en $\boldsymbol{Nor}$ definidos como $g_1, g_2 : Y \to Z$, donde $g_1 \equiv 0$ y $g_2 = f$.

Si hacemos $g_1\phi = g_2\phi \Rightarrow g_1 = g_2$, dado que ϕ es un epimorfismo. Pero, $g_1 \neq g_2$ claramente. Lo que nos da una contradicción.

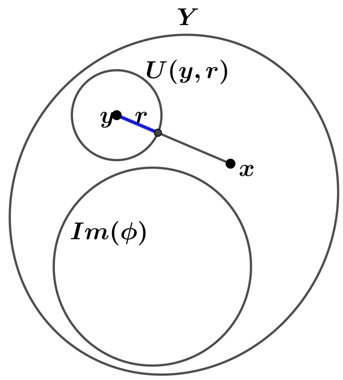

Figura 2.3: Representación plana de algunos elementos en la demostración anterior

Ahora estamos listos para definir dos nuevas categorías importantes para nuestro trabajo.

Definición 2.6.8.

(i) La categoría $\boldsymbol{Ban_0}$. Los objetos son espacios de Banach y los morfismos son operadores acotados.

(ii) La categoría $\boldsymbol{Hil}$. Los objetos son espacios de Hilbert y los morfismos son operadores acotados.

La verificación de los axiomas de categorías es la misma que la realizada en la definición 2.6.2.

Notación. *Algunos autores utilizan la notación* $\boldsymbol{Ban}$ *para denotar la categorías de espacios de Banach, en este texto dejamos esta notación para denotar a la categoría de álgebras conmutativas de Banach, que se definen en el siguiente capítulo.*

Además, se cumplen la siguiente cadena

$$\boldsymbol{Hil} \subset \boldsymbol{Ban_0} \subset \boldsymbol{Nor} \subset \boldsymbol{Pre}.$$

La inclusión es estricta pues las subcategorías son plenas.

Proposición 2.6.9. *Si F es un espacio de $Banach$, entonces para todo espacio prenormado E, el espacio normado $\mathcal{B}(E,F)$ (ver (iii) en la proposición 1.2.3) es también de Banach.*

En particular, para todo espacio prenormado E, el espacio dual E^* es también un espacio de Banach.

Prueba.

(i) Sea T_n una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(E,F)$. Si tomamos un $x \in E$ entonces $T_n(x)$ es Cauchy en F y si el límite para T_n es T entonces el límite para $T_n(x)$ es $T(x)$. Podemos definir entonces el mapa, $T : E \to F$.

$T_n(x+y) = T_n(x) + T_n(y)$, por aditividad de T_n
$T(x+y) = T(x) + T(y)$, ya que $T_n(x) \to T(x)$ y la adición es continua en F.*

Sea α un escalar entonces

$T_n(\alpha x) = \alpha T_n(x)$, porque T_n es homogénea.
$T(\alpha x) = \alpha T(x)$, porque $T_n(x) \to T(x)$ y F es continuo cuando se multiplica por escalares.**

De $*$ y $**$ se obtiene que $T : E \to F$ es líneal.

Dado que T_n es Cauchy entonces es acotada en $\mathcal{B}(E, F)$, luego existe un $C > 0$ para todo $x \in B_E$ tal que $||T_n(x)|| \leq C$. Y entonces T es acotado.

Por tanto, de las observaciones anteriores $T \in \mathcal{B}(E, F)$.

(ii) Ahora debemos mostrar que $T_n \to T$ bajo la norma de operador.

Sea $\epsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > N$ tenemos que $||T_m(x) - T_n(x)|| < \frac{\epsilon}{4}$. Para todo $x \in B_E$ y los mismos m, n tenemos que $||T_m(x) - T_n(x)|| < \frac{\epsilon}{4}$. Como $T_m(x)$ tiende a $T(x)$ cuando $m \to \infty$ entonces también se cumple que $||T(x) - T_m(x)|| < \frac{\epsilon}{4}$.Luego,

$$||T(x) - T_n(x)|| \leq ||T(x) - T_m(x)|| + ||T_m(x) - T_n(x)|| < \frac{2\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$$

Luego, si tomamos el $\sup\{||T(x) - T_n(x)||\}$ se cumple que $||T - T_n|| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Por tanto $\mathcal{B}(E, F)$ es también un espacio de Banach.

Definición 2.6.10.

Dado un espacio líneal normado E, el doble dual de E se denota por E^{**} y es el dual de E^*. Es decir, $E^{**} = (E^*)^* = \mathcal{L}(V^*, \mathbb{F})$, donde $\mathbb{F}$ es un cuerpo (en este documento se considera $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Sea $e \in E$. Un elemento $\hat{e} \in E^{**}$ se define como $\hat{e}(\phi) = \phi(e)$ para todo $\phi \in E^*$. Obsérvese que $\phi(e)$ es un elemento del cuerpo de escalares.

Proposición 2.6.11. *Si $dim(E) < \infty$ entonces E y E^{**} son isomorfos.*

Prueba.

$$\begin{aligned} dim(E^{**}) &= dim((E^*)^*) \\ &= dim(E^*), \text{ como se vió en 1.2.6} \\ &= dim(E) \end{aligned}$$

Proposición 2.6.12.

Los monomorfismos en $\boldsymbol{Ban_0}$ y en $\boldsymbol{Hil}$ son los operadores inyectivos. Los epimorfismos en $\boldsymbol{Ban}$ y en $\boldsymbol{Hil}$ son los operadores con imagen densa.

Prueba.

La prueba es la misma que en 2.6.6 y 2.6.7.

Definición 2.6.13.

Un morfismo en $\boldsymbol{Ban_0}$ o en $\boldsymbol{Hil}$ es un isomorfismo $\Leftrightarrow$ es un isomorfismo en $\boldsymbol{Nor}$.
Entonces, los isomorfismos en $\boldsymbol{Ban_0}$ y en $\boldsymbol{Hil}$ son los isomorfismos topológicos (ver 1.2.12).

Hemos visto en 2.6.9 que para cualesquiera $E, F \in \boldsymbol{Ban_0}$ el conjunto $B(E, F)$ tiene la estructura de un espacio de Banach. $B(E, F)$ corresponde en la notación de categorías a $Hom_{Ban_0}(E, F)$, pero en este texto utilizaremos la notación $B(E, F)$.

Proposición 2.6.14.

Para todo $E \in \boldsymbol{Ban_0}$ y para cualquier morfismo $\phi : F \to G \in \boldsymbol{Ban_0}$ (es decir, para cualquier operador acotado desde F a G) los mapas

$$B(E,\phi) : B(E,F) \to B(E,G) : \psi \mapsto \phi\psi$$

y

$$B(\phi,E) : B(G,E) \to B(F,E) : \psi \mapsto \psi\phi$$

son operadores acotados.

Prueba.

La prueba viene del hecho que la composición de operadores acotados es acotada, como se vió en 1.2.8.
La proposición anterior implica que a todo espacio de Banach se le pueden asociar dos funtores, uno covariante y uno contravariante, ellos son:

$$B(E,-) : F \mapsto B(E,F); \phi \mapsto B(E,\phi)$$

y

$$B(-,E) : F \mapsto B(F,E); \phi \mapsto B(\phi,E)$$

Definición 2.6.15.

Tomando $E = \mathbb{C}$ en el funtor contravariante de la proposición anterior, se tiene
$B(-,\mathbb{C}) : \boldsymbol{Ban_0} \to \boldsymbol{Ban_0}$. Este funtor es llamado el funtor adjunto de Banach o **funtor estrella de Banach** y se denota por $(^*) : \boldsymbol{Ban_0} \to \boldsymbol{Ban_0}$ (notar las similitudes de la definición con el ejemplo 2.3).

Además, si E es un objeto en $\boldsymbol{Ban_0}$, el objeto $(^*)E$ es el espacio dual E^*, de igual forma los morfismos T en $\boldsymbol{Ban_0}$ se escriben como T^*, en lugar de $(^*)T$.

Definición 2.6.16.

Sea $T : F \to G$ un operador entre espacios de Banach (o más generalmente espacios normados). El operador $T^* : G^* \to F^*$ actúa por la regla $f \mapsto fT$ es llamado el adjunto de Banach para T. Es decir, que para $x \in F$ tenemos la igualdad $[T^*f](x) = f(Tx)$, la forma en la que actúa este diagrama se ilustra en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T^*f"'] & G \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Si tomamos el funtor estrella dos veces $(^{**}) : \boldsymbol{Ban_0} \to \boldsymbol{Ban_0}$, entonces este funtor asigna a cada $F \in \boldsymbol{Ban_0}$ su segundo espacio dual F^{**} y además, para todo operador $T : F \to G$, decimos que $T^{**} : F^{**} \to G^{**}$ es llamado el segundo operador adjunto.

Propiedad 2.6.17.

Para todo operador $T : F \to G$, existe el siguiente diagrama conmutativo de espacios de Banch:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\alpha_F"] & G \arrow[d, "\alpha_G"] \\ F^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & G^{**} \end{tikzcd}$$

Es decir, la familia $\{\alpha_F : F \in Ban\}$ es una transformación natural entre los funtores $\mathbf{1}$ y $(^{**})$ actuando en $\boldsymbol{Ban_0}$.

Capítulo 3

Álgebras de Banach

3.1. Álgebras conmutativas de Banach

Definición 3.1.1.

Un álgebra es un espacio vectorial $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ equipado con un producto binario asociativo $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ donde $\cdot$ satisface los siguientes axiomas:

1) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$.

2) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$.

3) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$.

4) $\lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definición 3.1.2.

Una subálgebra de un álgebra $\mathcal{A}$, es un subconjunto de $\mathcal{A}$ cerrado bajo todas sus operaciones. Nota: si $\mathcal{A}$, el álgebra más grande contiene a $1_{\mathcal{A}}$ entonces la subálgebra debe contener a $1_{\mathcal{A}}$.

Definición 3.1.3.

Un **álgebra de Banach** es un álgebra $\mathcal{A}$ sobre el cuerpo de números complejos equipado con una norma con respecto a la cual es un espacio de Banach (ver 2.6.3) y que satisface

$$||xy|| \leq ||x||||y||$$

para todo x, y en $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ es llamado **álgebra de Banach con unidad**, si posee un elemento unidad para la multiplicación, la cual en ocasiones se denota por e o por $1_{\mathcal{A}}$.

Definición 3.1.4.

Una involución en un álgebra $\mathcal{A}$ es un anti-automorfismo de $\mathcal{A}$ de orden 2. Es decir, una transformación $x \mapsto x^*$ de $\mathcal{A}$ hacia $\mathcal{A}$ que cumple lo siguiente:

a) $(x + y)^* = x^* + y^*$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$.

b) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$, $\forall x \in \mathcal{A}, \forall \lambda \in \mathcal{C}$.

c) $(xy)^* = y^* x^*$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$.

d) $x^{**} = x$, $\forall x \in \mathcal{A}$.

Un álgebra equipada con una involución es llamada un **álgebra**$-*$(se lee álgebra estrella).

Definición 3.1.5.

Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ que además es álgebra$-*$ y que satisface

$$||x^*x|| = ||x||^2 \text{ para todo } x \in \mathcal{A}$$

es llamada **álgebra** C^*.

Ejemplo 3.1.6.

$\mathbb{C}$ es un álgebra-C^* con la conjugación compleja como la involución.

Ejemplo 3.1.7.

Considerar las siguientes definiciones:

Sea X un espacio topológico

$$C_B(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ tal que f es continua y acotada}\}$$
$$C_o(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ tal que f es continua y se desvanece en infinito}\}$$

Observación:

$$\mathbb{C} \text{ completo entonces } C_0(X) \text{ y } C_B(X) \text{ son completos.}$$

La aplicación $0(x) = 0$ para todo X es la identidad aditiva.
La aplicación $1(x) = 1 \in \mathbb{C}$ es la identidad multiplicativa.

$C_B(X)$ es cerrado bajo suma y producto. Para ello, sean $f, g \in C_B(X)$, sean $M, N > 0$ tales que $|f(x)| < M$, $\forall x \in X$ y $|g(x)| < N$. $\forall x \in X$. Entonces, $|(f+g)(x)| < M + N$ y $|(f \cdot g)(x)| < M \cdot N, \forall x \in X$.

De lo anterior, C_B es un álgebra con unidad. Ahora, debemos mostrar que además es álgebra de Banach.

Si equipamos a $C_B(X)$ con la norma del supremo,

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Como $|f(x)| < M$, para todo x, entonces $||f||_\infty$ está bien definida. Además,

$$\begin{aligned}
||f+g||_\infty = \sup\{|(f+g)(x)| : x \in X\} &= \sup\{|f(x)+g(x)| : x \in X\} \\
&\leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| : x \in X\} \\
&= \sup\{|f(x)| : x \in X\} + \sup\{|g(x)| : x \in X\} \\
&= ||f||_\infty + ||g||_\infty
\end{aligned}$$

Si se reemplaza $+$ por $\cdot$ en la prueba anterior, se obtiene:

$$||fg||_\infty \leq ||f||_\infty ||g||_\infty$$

dado de la definición como supremo. Además $(C_B(X), ||\cdot||_\infty)$ es espacio de Banach, esto unido con la propiedad submultiplicativa de la norma, escrita arriba convierte a este espacio en un álgebra de Banach. Análogamente para $C_0(X)$.

Luego, podemos considerar una transformación de la forma $f \mapsto \bar{f}$. Para $f, g \in C_B(X)$ o $C_0(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, se cumple que:

- $\overline{(f+g)} = \bar{f} + \bar{g}$
- $\overline{(\lambda f)} = \bar{\lambda}\bar{f}$
- $\overline{fg} = \bar{g}\bar{f}$
- $\overline{\overline{z}} = z$

es decir, tenemos una involución para las álgebras $C_0(X)$ y $C_B(X)$, por tanto, ambas son álgebras$-*$.

Por último, observemos que $||\overline{f}f||_\infty = |||f^2|||_\infty = ||f||_\infty^2$. Entonces, $C_0(X)$ y $C_B(X)$ son álgebras C^*.

Ejemplo 3.1.8.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (las matrices $n \times n$ con entradas complejas) es un álgebra C^*(bajo cierta condición), con la involución definida como la matriz transpuesta conjugada.

- Sabemos que el producto y suma de matrices cumplen las siguientes propiedades,

$$
\begin{aligned}
A(BC) &= (AB)C, \text{multiplicación es asociativa}\\
A(B+C) &= AB + AC, \text{multiplicación es distributiva}\\
(A+B)C &= AC + BC, \text{suma es distributiva}\\
\lambda(AB) &= (\lambda A)B = A(\lambda B).
\end{aligned}
$$

  Tomando la matriz identidad, se tiene que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es un álgebra.

- La matriz transpuesta conjugada (denotaremos como *) tiene las siguientes propiedades que le dan la característica de ser involución:

$$
\begin{aligned}
(A^*)^* &= A\\
(A+B)^* &= A^* + B^*\\
(AB)^* &= B^*A^*\\
(\lambda A)^* &= \overline{\lambda}A^*
\end{aligned}
$$

- Además, podemos asignar la $p-$norma, convirtiendo a $(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$ en un espacio de Banach:

$$||A||_p = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||_p}{||x||_p} = \sup_{||x||_p=1} ||Ax||_p.$$

  Además se puede mostrar que bajo esta norma se cumple la propiedad submultiplicativa:

  Primero, se puede observar que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $y \in \mathbb{C}^n$. entonces,

$$||Ay||_p \leq ||A||_p||y||_p.$$

  Si aplicamos la observación anterior obtenemos

$$||ABx||_p \leq ||A||_p||Bx||_p \leq ||A||_p||B||_p||x||_p, \forall x \in \mathbb{C}^n$$

  Por tanto se cumple, $||AB||_p \leq ||A||_p||B||_p$ y podemos concluir que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es un álgebra de Banach.

- Finalmente se puede mostrar que

$$||A^*A||_p = ||A||_p^2,$$

se cumple solo para $p = 2$. De ahí que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sea un álgebra C^*, cuando se le asocia la norma $p = 2$.

Ejemplo 3.1.9.

$\mathbb{C}^n$ es un álgebra C^*.

Prueba.

Sean $x, y, z \in \mathbb{C}^n$, tal que

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Para dos elementos x, y el producto se define como

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ \vdots \\ x_ny_n \end{pmatrix}.$$

Bajo esta definición se puede mostrar que

$$\begin{aligned} z \cdot (x+y) &= z \cdot x + z \cdot y \\ (z \cdot x) \cdot y &= z \cdot (x \cdot y) \\ \lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y &= x \cdot (\lambda y) \\ \overline{x+y} &= \bar{x} + \bar{y} \\ \overline{\lambda x} &= \bar{\lambda}\bar{x} \\ \overline{x \cdot y} &= \overline{y} \cdot \overline{x} \\ \overline{\overline{x}} &= x \end{aligned}$$

Las propiedades anteriores nos dicen que $\mathbb{C}^n$ es un álgebra conmutativa y que podemos definir la involución como el conjugado complejo.

Luego, si le asignamos a $\mathbb{C}^n$ la norma máx, $(\mathbb{C}^n, ||\cdot||_{\text{máx}})$ es un espacio de Banach y además satisface la propiedad submultiplicativa

$$||x \cdot y||_{\text{máx}} \leq \|x\|_{\text{máx}} \|y\|_{\text{máx}}, \forall x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Por lo que $\mathbb{C}^n$ es un álgebra de Banach. Además,

$$\begin{aligned} ||x \cdot \bar{x}||_{\text{máx}} = \left\| \begin{pmatrix} \overline{x}_1 x_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n x_n \end{pmatrix} \right\|_{\text{máx}} = \left\| \begin{pmatrix} |x_1|^2 \\ \vdots \\ |x_n|^2 \end{pmatrix} \right\|_{\text{máx}} &= \text{máx}\{|x_1|^2, \cdots, |x_n|^2\} \\ &= (\text{máx}\{|x_1|, \cdots, |x_n|\})^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_{\text{máx}}^2, \end{aligned}$$

de donde, $\mathbb{C}^n$ es un álgebra$-C^*$.

[1] No se utiliza $\|\cdot\|_p$ ya que $\|x \cdot \bar{x}\|_p \neq \|x\|_p^2$. está demostración queda al lector.

Ejemplo 3.1.10. *$C[0,1]$ es un álgebra–C^*.*

Prueba.

Sea $f \in C[0,1]$, definamos $\|f\| := \text{máx}_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

- $C[0,1]$ es normado. Se cumplen los siguientes:

$$\|f\| \geq 0, \text{ y } \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$
$$\|cf\| = \text{máx}\,|cf(x)| = |c|\,\text{máx}\,|f(x)| = c \cdot \|f\|.$$
$$\|f+g\| = \text{máx}\,|f(x)+g(x)| \leq \text{máx}\,|f(x)| + \text{máx}\,|g(x)| = \|f\| + \|g\|.$$

- $C[0,1]$ es completo.
Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $C[0,1]$. Mostraremos que f_n converge bajo la norma definida anteriormente a un $f \in C[0,1]$.

  Si $\{f_n\}$ es de Cauchy en $C[0,1]$ entonces $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ para todo $x \in [0,1]$. Como $\mathbb{R}$ es completo, existe una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x)$, para todo $x \in [0,1]$.

  Sea $\epsilon > 0$ y elijamos un M tal que $\|f_n - f_m\| \leq \epsilon$ para $m, n \geq M$. Entonces, para todo $m > M$ y para $x \in [0,1]$:

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_m - f_n\| \leq \epsilon,$$

  como $||f - f_m|| = \text{máx}_{x\in[0,1]} |f(x) - f_m(x)| < \epsilon$, para $\epsilon > 0$, entonces $||f - f_m|| \to 0$.

  Por último, f es el límite uniforme de funciones continuas entonces también es continua, por tanto $f \in C[0,1]$ y f_n converge a $f \in C[0,1]$.

  Dados los dos puntos anteriores, $C[0,1]$ es entonces un espacio de Banach.

- $C[0,1]$ es un álgebra de Banach.
Se puede mostrar que la norma definida anteriormente es submultiplicativa.

$$\begin{aligned} ||fg|| = \text{máx}\{|(fg)(x)|\} &= \text{máx}\{|f(x)g(x)|\} \\ &= \text{máx}\{|f(x)||g(x)|\} \\ &\leq \text{máx}\{|f(x)|\}\,\text{máx}\{|g(x)|\} \\ &= \|f\|\|g\|. \end{aligned}$$

- $C[0,1]$ es un álgebra C^*.
La involución viene por la transformación $f \to \overline{f}$ y los pasos para demostrar que $C[0,1]$ es C^* son similares a los realizados en 3.1.7.

Definición 3.1.11.

Para dos álgebras de Banach $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, un **homomorfismo de álgebras** desde $\mathcal{A}$ hacia $\mathcal{B}$ es una aplicación lineal acotado Φ tal que $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

Además, si $\mathcal{A}$ y B son álgebras$-*$ y $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ para todo $x \in \mathcal{A}$, diremos que ϕ es un **homomorfismo**$-*$, si además preservan la identidad los llamaremos **homomorfismo**$-*$ **con unidad**.

Definición 3.1.12.

Llamaremos **homomorfismos acotados unitarios** a los homomorfismos de álgebras que preservan identidades y que son operadores acotados.

Proposición 3.1.13.

Los objetos que son álgebras de Banach con unidad (como se define en 3.1.3), conmutativas, junto con los morfismos que son homomorfismos acotados unitarios entre álgebras de Banach con unidad, forman una categoría que denotaremos como $\boldsymbol{Ban}$.

Prueba.

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, álgebras conmutativas de Banach y consideremos los homomorfismos acotados unitarios, f, g y h tal que $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ y $h : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

1. Primero veremos que la composición de estos operadores también es un homomorfismo de álgebras unitario, es decir $g \circ f \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$.

   Tomemos $a, b \in \mathcal{A}$, tenemos que $f(ab) = f(a)f(b)$ ya que $f \in Hom_{Ban}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, luego $g(f(ab)) = g(f(a)f(b)) = g(f(a))g(f(b))$ dado que $g \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, entonces $(g \circ f)(ab) = (g \circ f)(a)(g \circ f)(b)$.

   Similarmente para la suma, $g(f(a+b)) = g(f(a) + f(b)) = (g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)$. Por tanto, $g \circ f$ es un homomorfismo de álgebras.
   Denotemos como $1_{\mathcal{G}}$ a la unidad de un álgebra de Banach $\mathcal{G}$. Entonces, $f(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$, dado que f es un homomorfismo unitario. Bajo el mismo argumento $g(1_{\mathcal{B}}) = 1_{\mathcal{C}}$, de donde $(g \circ f)(1_{\mathcal{A}}) = g(f(1_{\mathcal{A}})) = 1_{\mathcal{C}}$. Por tanto, $g \circ f$ es unitario de $\mathcal{A}$ hacia $\mathcal{C}$ y por tanto $g \circ f \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$.

2. Mostraremos que $g \circ f$ es un operador lineal acotado.

   Como f es acotado se cumple que $\exists M > 0$ tal que

   $$||f(a)||_{\mathcal{B}} \leq M||a||_{\mathcal{A}} \text{ para todo } a \in \mathcal{A}$$

   Como g es acotado se cumple que $\exists N > 0$ tal que

   $$||g(b)||_{\mathcal{C}} \leq N||b||_{\mathcal{B}} \text{ para todo } b \in \mathcal{B}$$

   de donde,

   $$||g(f(a))||_{\mathcal{C}} \leq N||f(a)||_{\mathcal{B}} \leq NM||a||_{\mathcal{A}},$$

   entonces $g \circ f$ es acotado.

   Observemos que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, porque los homomorfismos son funciones y la composición de funciones es asociativa.

3. Necesitamos verificar el axioma del morfismo identidad para el caso de álgebras de Banach.

   Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad arbitraria, construimos $I_{\mathcal{A}}(a) = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Notemos que $I_{\mathcal{A}}(a) \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, ya que $I_{\mathcal{A}}(ab) = ab = I_{\mathcal{A}}(a)I_{\mathcal{A}}(b)$ para todo $a, b \in A$ y que además, $I_{\mathcal{A}}(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{A}}$. Luego, sea $\mathcal{B}$ otra álgebra de Banach con unidad y consideremos los homomorfismos $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, tendremos que $f \circ I_{\mathcal{A}} = f$ y que $I_{\mathcal{A}} \circ g = g$.

Por tanto, de los items anteriores se obtiene que $\boldsymbol{Ban}$ es una categoría.

Definición 3.1.14.

Diremos que un elemento de una álgebra de Banach con unidad es **invertible** si posee inversos a ambos lados.

Definición 3.1.15.

Sea $x \in \mathcal{A}$, álgebra de Banach con unidad e, el **espectro de** x es

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ es no invertible}\}.$$

Lema 3.1.16.

a. Si $||x|| < 1$, entonces $e - x$ es invertible y $(e-x)^{-1} = \sum_0^\infty x^n$.

b. Si $|\lambda| > ||x||$ entonces $\lambda e - x$ es invertible, y su inversa es $\sum_0^\infty \lambda^{-n-1} x^n$

Prueba.

Para (a).

Si consideramos la serie $\{\sum_0^N x^n\}_{N=0}^\infty$, está serie es de Cauchy cuando $||x|| < 1$ y como $\mathcal{A}$ es completo se concluye que $\{\sum_0^N x^n\}_{N=0}^\infty$ converge. En efecto, su valor de convergencia es

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^N x^n, \text{ es decir, } \sum_0^N x^n \overset{||\cdot||}{\to} \sum_0^\infty x^n$$

y por tanto, $\sum_0^\infty x^n \in \mathcal{A}$.

Ahora, mostraremos que $e - x$ es invertible. Para ello observemos que

$$\begin{aligned}(\sum_{n=0}^\infty x^n)(e-x) &= \sum_{n=0}^\infty x^n(e-x) \\ &= \sum_{n=0}^\infty x^n - (\sum_{n=0}^\infty x^n)x \\ &= \sum_{n=0}^\infty x^n - \sum_{n=0}^\infty x^{n+1} = e,\end{aligned}$$

así también,

$$\begin{aligned}(e-x)(\sum_{n=0}^\infty x^n) &= \sum_{n=0}^\infty x^n - x(\sum_{n=0}^\infty x^n) \\ &= \sum_{n=0}^\infty x^n - \sum_{n=0}^\infty x^{n+1} = e.\end{aligned}$$

Lo que demuestra que $(e - x)$ es invertible.

Ahora, demostraremos que $(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty x^n$. En efecto, si $||x|| < 1$, $x^{N+1} \to 0$ cuando $N \to \infty$ y entonces

$$\sum_0^\infty x^n = \lim_{N\to\infty} \sum_0^N x^n = \lim_{N\to\infty} \frac{e - x^{N+1}}{e-x} = \frac{e}{e-x}$$

Esto prueba que la serie $\sum_0^\infty x^n = \frac{e}{e-x} = (e-x)^{-1}$.

Para (b), λ es invertible por ser escalar distinto de cero, además, $\lambda e - x = \lambda(e - \lambda^{-1}x)$. Como $y = \lambda^{-1}x$ satisface $\|y\| = \|\frac{x}{\lambda}\| = \frac{\|x\|}{|\lambda|} < 1$, podemos aplicar el resultado anterior y obtendremos que $\lambda e - x$ es invertible y su inversa es $\lambda^{-1}\sum_0^\infty(\lambda^{-1}x)^n = \lambda^{-1}\sum_0^\infty \lambda^{-n}x^n = \sum_0^\infty \lambda^{-n-1}x^n$.

Observación 3.1.17.

$\sigma(x)$ es no vacío para todo $x \in \mathcal{A}$ (ver [1], Proposición 1.6).

Teorema 3.1.18. *Teorema de Gelfand Mazur.*

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach en la cual todo elemento diferente de 0 es invertible, entonces $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$.

Prueba.

Sea $x \in \mathcal{A}$, sea $e \in \mathcal{A}$ la unidad. Si x no está en $\mathbb{C}e$ entonces $\lambda e - x \neq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, de donde $\lambda e - x$ es invertible para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Pero, entonces $\sigma(x) = \varnothing$, lo cual es imposible. Entonces $\mathcal{A} = \mathbb{C}e \cong \mathbb{C}$.

Definición 3.1.19.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Un **funcional lineal multiplicativo** en $\mathcal{A}$ se refiere a un homomorfismo de álgebras $\phi \neq 0$ desde $\mathcal{A}$ hacia $\mathbb{C}$.

El conjunto de todos los funcionales multiplicativos en $\mathcal{A}$ se llama el **espectro de** $\mathcal{A}$ y lo denotaremos como $M(\mathcal{A})$.

Proposición 3.1.20.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad e.
Supongamos que $\phi \in M(\mathcal{A})$, entonces se debe cumplir que:

a. $\phi(e) = 1$.

b. Si x es invertible en $\mathcal{A}$ entonces $\phi(x) \neq 0$.

c. $|\phi(x)| \leq ||x||$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Prueba.

Tomemos $x \in \mathcal{A}$ con $h(x) \neq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\phi(e)\phi(x) &= \phi(ex) \text{ porque es funcional multiplicativo}\\ &= \phi(x),\end{aligned}$$

entonces, $\phi(e) = 1$ lo que demuestra a.

Para (b), tomemos ahora un x invertible $\phi(x^{-1})\phi(x) = \phi(x^{-1}x) = \phi(e) = 1$. Lo que demuestra que $\phi(x) \neq 0$.

Para (c), ver por ejemplo [1], Proposición 1.10.

Lema 3.1.21.

Los funcionales lineales multiplicativos en un álgebra de Banach con unidad, tienen norma 1.

Prueba. *Primero demostraremos que para* $a \in \mathcal{A}$*, si* $||a|| < 1$ *es imposible que* $\phi(a) = 1$ *para* $\phi \in M(\mathcal{A})$.

Supongamos que existe un funcional lineal multiplicativo $\phi \in M(\mathcal{A})$ y algún $a \in \mathcal{A}$, tales que $||a|| < 1$ y $\phi(a) = 1$. Si consideramos la serie $b = \sum_{n \geq 1} a^n$, sabemos por 3.1.16 que esta serie converge cuando $||a|| < 1$.
Observemos que $a + ab = b$, luego de hacer las operaciones necesarias en la definición de b. Ahora, como ϕ es funcional lineal multiplicativo

$$\phi(b) = \phi(a + ab) = \phi(a) + \phi(ab) = \phi(a)(1 + \phi(b)),$$

si consideramos $\phi(a) = 1$, se tendrá que $\phi(b) = \phi(b) + 1$, pero esto último es imposible.

Por contradicción procederemos a la demostración del lema. Consideremos un a y un ϕ, de tal forma que $||a|| \leq 1$ y $|\phi(a)| > 1$. Sea $\phi(a) = \alpha$ entonces $\phi(\frac{a}{\alpha}) = 1$, tendríamos que $||\frac{a}{\alpha}|| < 1$ y que $\phi(\frac{a}{\alpha}) = 1$, pero hemos demostrado que esto es imposible.
Luego, consideremos $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$; $||1_{\mathcal{A}}|| = 1$ y $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1 \in \mathbb{C}$ entonces $|\phi(1_{\mathcal{A}})| = 1$, lo que demuestra que existe $a \in \mathcal{A}$ con $||a|| \leq 1$ y tal que $\phi(a) = 1$. Entonces,

$$||\phi|| = \sup\{|\phi(a)| \text{ para } ||a|| \leq 1\} = 1.$$

Lo que demuestra el lema.

La relación entre los ideales maximales y los funcionales multiplicativos es muy íntima. Recordemos algunas definiciones sobre ideales.

Definición 3.1.22.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, **un ideal por la derecha** es una sub-álgebra $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$ tal que $yx \in \mathcal{J}$, cuando $x \in \mathcal{A}$ y $y \in \mathcal{J}$. Análogamente se definen los ideales por la izquierda. Diremos que $\mathcal{J}$ es **propio** si $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}$.

Dada un álgebra con unidad $\mathcal{J}$ es propio si y sólo si e no está en $\mathcal{J}$. Observemos que, si $e \in \mathcal{J}$ entonces $x = xe = ex \in \mathcal{J}$ para todo $x \in \mathcal{A}$, lo que daría $\mathcal{J} = \mathcal{A}$. Un ideal **maximal** es un ideal propio que no está contenido en otro más grande.

Proposición 3.1.23.

Sea A un álgebra de Banach con unidad y sea $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ un ideal propio. Se cumplen los siguientes:

a. $\mathcal{J}$ contiene elementos no invertibles.

b. Si $\mathcal{J}$ es máximal entonces es cerrado.

Si el lector está interesado en la prueba de estos hechos, ver [1], proposición 1.11.

Teorema 3.1.24.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa de Banach con unidad. La aplicación, $\phi \to \ker(\phi)$ es una correspondencia uno a uno entre $M(\mathcal{A})$ y el conjunto de ideales maximales en $\mathcal{A}$, al que denotaremos como $L(\mathcal{A})$.

Es decir, la aplicación

$$\begin{aligned} M(\mathcal{A}) &\to L(\mathcal{A}) \\ \phi &\mapsto ker(\phi) \end{aligned}$$

es una biyección.

Prueba.

Para la prueba de este teorema se utilizan algunos resultados sobre ideales. Primero, observemos que si tomamos $\phi \in \mathcal{A}$ con ϕ homomorfismo de anillos. Definimos $K = \ker(\phi)$, la aplicación ϕ determina un isomorfismo $\mathcal{A}/K \cong \mathbb{C}$. Dado que $\mathbb{C}$ es un cuerpo, se obtiene que $\ker(\phi)$ es un ideal maximal de $\mathcal{A}$. De esta forma, la aplicación $M(\mathcal{A}) \to L(\mathcal{A})$ está bien definido.

- $M(\mathcal{A}) \to L(\mathcal{A})$ es inyectivo.
  Queremos probar que si $\ker(\phi) = \ker(\psi)$ entonces $\phi = \psi$, para $\phi, \psi \in M(\mathcal{A})$.
  Si definimos $K = ker(\phi)$ entonces $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ se puede interpretar como la composición de la aplicación cociente $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/K$ y la elección de un isomorfismo $\mathcal{A}/K \cong \mathbb{C}$. Entonces, dado que $k = \ker(\phi) = ker(\psi)$, $\phi \neq \psi$ si y sólo si el isomorfismo anterior es diferente para ϕ y para ψ; pero no pueden haber dos isomorfismos diferentes para $\mathcal{A}/K \cong \mathbb{C}$ porque de otra forma tendríamos un automorfismo no trivial de $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}$. Dado que estamos trabajando con álgebras de Banach con unidad, este automorfismo debería ser lineal en $\mathbb{C}$ y entonces debería de cumplirse que $\phi(1_{\mathcal{A}/K}) = \psi(1_{\mathcal{A}/K}) = 1_{\mathbb{C}}$, esto determina cualquier otro valor para ψ y ϕ. Por tanto, $\phi = \psi$.

- $M(\mathcal{A}) \to L(\mathcal{A})$ es sobreyectivo.
  Sea $N \in \mathcal{A}$ un ideal maximal, N es cerrado (véase 3.1.23) y $\mathcal{A}/N$ es un álgebra de Banach con unidad (véase **??**). Como N es maximal, $\mathcal{A}/N$ es un cuerpo y por tanto un álgebra simple. Dado que $\mathbb{C}$ es la única álgebra de Banch simple entonces $\mathcal{A}/N \cong \mathbb{C}$, por el teorema de Mazur (véase 3.1.18), por tanto, si se considera la aplicación $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/N$, N es núcleo de dicho mapa por el primer teorema de isomorfía, además, ϕ es un homomorfismo de álgebras de Banach y por tanto vive en $M(\mathcal{A})$. Entonces, tenemos que para todo $N \in L(\mathcal{A})$, existe $\phi \in M(\mathcal{A})$ tal que $N = ker(\phi)$. Es decir, la aplicación $M(\mathcal{A}) \to L(\mathcal{A})$ es sobreyectivo.

De lo anterior $M(\mathcal{A}) \to L(\mathcal{A})$ es una biyección.

Ejemplo 3.1.25. *Sobre $M(\mathcal{A})$.*

1. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y sea $\phi \in M(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.

   Sea $E_{pq} \in M_n(\mathbb{C})$ la matriz cuadrada cuya (p, q)-ésima entrada es 1 y todas las demás son 0, $E_{pq} = [\delta_{pi}\delta_{qj}]_{i,j=1}^n$.
   Note que

$$I_n = \sum_{q=1}^{n} E_{qq}$$

y que
$$E_{pq}E_{qp} = E_{pp},\ E_{qp}E_{pq} = E_{qq}.$$
Así,
$$\begin{aligned}\phi(E_{kk}) = \phi(E_{k1}E_{1k}) &= \phi(E_{k1})\phi(E_{1k}), \text{ por la linealidad de } \phi,\\ &= \phi(E_{1k})\phi(E_{k1}), \text{ por la conmutatividad en } \mathbb{C},\\ &= \phi(E_{1k}E_{k1})\\ &= \phi(E_{11})\end{aligned}$$

Luego,
$$0 = \phi(0) = \phi(E_{11}E_{22}) = \phi(E_{11})\phi(E_{22}) = \phi(E_{11})\phi(E_{11}) = \phi(E_{11})^2,$$
así $\phi(E_{11}) = 0$ y $\phi(I_n) = \phi(\sum_{q=1}^{n} E_{qq}) = \sum_{q=1}^{n} \phi(E_{qq}) = 0$. Para, $\psi \in (M_n(\mathbb{C}))$, se cumple que $\phi(\psi) = \phi(\psi I_n) = \phi(\psi)\phi(I_n) = 0$. Entonces $\phi = 0$, como esto no es posible de la definición para $M(M_n(\mathbb{C}))$ se tiene que $M(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \emptyset$.

2. Tomando $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, describamos $M(\mathbb{C})$.

   Sea $\phi \in M(\mathbb{C})$. Explícitamente podemos escribir
$$\phi(z) = \lambda z, \text{ con } \lambda \in \mathbb{C}.$$

   Analicemos primero cuando ϕ es la función identidad, es decir, cuando $\lambda = 1$. En ese caso tendremos
$$\begin{aligned}\phi(zw) &= zw\\ \phi(z)\phi(w) &= zw,\end{aligned}$$

   por tando, si $\phi = Id$ entonces $\phi \in M(\mathbb{C})$.

   De otra forma, sea $\lambda \neq 1$.
$$\begin{aligned}\phi(z)\phi(w) &= \lambda z \lambda w\\ &= \lambda^2 zw,\end{aligned}$$

   por otro lado, $\phi(zw) = z\phi(w)$, porque ϕ es homomorfismo y consideramos a $z \in \mathbb{C}$ como escalar. Entonces
$$\begin{aligned}\phi(zw) &= z\phi(w)\\ &= z\lambda w\\ &= \lambda zw\end{aligned}$$

   podemos igualar, $\lambda = \lambda^2$, de dónde, $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$, pero, si $\lambda = 0$ entonces $\phi = 0$, lo cual no es posible desde la definición de $M(\mathcal{A})$. Por lo que podemos concluir que $M(\mathbb{C}) = \{Id\}$.

Ejemplo 3.1.26.

Ahora veamos un ejemplo ilustrativo de la utilidad del teorema 3.1.24.

Sea $\mathcal{A} = C[0, 1]$.

- Estudiemos los ideales maximales de $C[0,1]$.

  Definamos $c \in [0,1]$ y definamos $I_c = \{f \in C[0,1] : f(c) = 0\}$.

  Proposición 3.1.27. *I_c es un ideal maximal y todo ideal en $C[0,1]$ tiene esta forma.*

  Observe que I_c contiene a todas las funciones constantes.
  Sea J un ideal más grande en el cual esté contenido I_c, mostraremos que $J = C[0,1]$.

  Prueba.

  Tomemos $g \in J$ de modo que g no está en I_c, entonces $g(c) \neq 0$.
  Si definimos $h(x) := g(x)/g(c) \in J$, ya que $\frac{1}{g(c)} \in J$, además obtenemos que $1 - h(x) \in J$, ya que $1 - h(x) = \frac{1}{g(c)}(g(c) - g(x))$.

  De está forma
  $$1 = h(x) + [1 - h(x)] \in J.$$
  Así $J = C[0,1]$.

  Ahora, supongamos que J es un ideal maximal en $C[0,1]$ y que no es de la forma I_c para todo $c \in [0,1]$. Debemos observar que para $c \in [0,1]$ existe $f_c \in J$ tal que $f_c(c) \neq 0$.
  Como f_c es continuo, existe un vecindario de c, que llamaremos V_c, donde, para cualquier x, $f_c(x) \neq 0$.
  Observe que $[0,1] \subset \bigcup_{c\in[0,1]} V_c$. Dado que $[0,1]$ es compacto, existe una subcobertura finita de estos conjuntos de modo que
  $$[0,1] \subset V_{c_1} \cup V_{c_2} \cup \cdots \cup V_{c_n}$$
  Tomemos $g(x) = f_{c_1}^2(x) + f_{c_2}^2(x) + \cdots + f_{c_n}^2(x)$. Dado que las funciones $f_{c_j} \neq 0$ en V_{c_j} tenemos que $g(x) > 0$ en $[0,1]$.
  Por lo que $1/g(x) \in C[0,1]$ y entonces $1 = g(x)/g(x) \in J$. De donde $J = C[0,1]$, esto es una contradicción.

  Así, concluimos que existe $c \in [0,1]$ tal que $J = I_c$.

- Describamos $M(C[0,1])$. Gracias al teorema 3.1.24, resulta que
  $$\begin{aligned} M(C[0,1]) \cong L(C[0,1]) &= \{f \in C[0,1] : f(c) = 0\} \\ &= \{I_c : c \in [0,1]\}. \end{aligned}$$

3.2. Teoría de Gelfand

Definición 3.2.1.

Sea X un espacio de Banach, X^* su espacio dual y tomemos $f \in X^*$. Definamos la **topología débil**$-^*$ en X^* como la topología más débil tal que para todo $x \in X$ la aplicación evaluación
$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_x : X^* &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$
es continua.

Observación 3.2.2.

Sea $a \in \mathcal{A}$, entonces $\text{ev}_a : f \to f(a)$ es continua si para todo abierto $U \in \mathbb{C}$, la imagen inversa $ev_a^{-1}(U)$ es abierta en $\mathcal{A}^*$. Esto nos permite declarar la siguiente base topológica (ver por ejemplo Munkres [3], 2.13):

$$V_{x,U} = \{\phi \in \mathcal{A}^* : \phi(x) \in U\},$$

podemos utilizar esta base para generar una topología en $\mathcal{A}^*$.

Observemos que $M(\mathcal{A})$ es un subconjunto de $\mathcal{A}^*$. Entonces $M(\mathcal{A})$ es un espacio topológico bajo el subespacio topológico inducido por la topología débil$-*$ en $\mathcal{A}^*$.

Observación 3.2.3. *El teorema de Banach-Alaoglu.*

La bola unitaria cerrada del espacio dual de un espacio vectorial normado, es compacta en la topología débil$-^*$. (Ver Rudin [6], Teorema 3.15.).

Proposición 3.2.4. *$M(\mathcal{A})$ es un espacio compacto de Hausdorff bajo la topología débil$-^*$.*

Prueba.

Sea B la bola unitaria cerrada en $\mathcal{A}^*$, $B := \{f \in \mathcal{A}^*, \|f\|_{op} \leq 1\}$ con la topología inducida por la topología débil$-^*$ en $\mathcal{A}^*$. Entonces B es Hausdorff (ver Rudin [6], 3.14), como $M(\mathcal{A}) \subseteq B$, entonces $M(\mathcal{A})$ también es Hausdorff.

Consideremos la sucesión $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq M(\mathcal{A})$ que converge al elemento $f \in B$ en la topología débil$-^*$, entonces

$$f(ab) = \lim_{j \in J} \phi_j(ab) = \lim_{j \in J} (\phi_j(a)\phi_j(b)) = \left(\lim_{j \in J} \phi_j(a)\right)\left(\lim_{j \in J} \phi_j(b)\right) = f(a)f(b).$$

Además, $f(e) = 1$, por lo que $M(\mathcal{A})$ es cerrado en B (el cual es compacto y Hausdorff por el teorema de Banach-Alaoglu) y por ende $M(\mathcal{A})$ es compacto y Hausdorff.

Definición 3.2.5.

Sea $x \in \mathcal{A}$, un álgebra de Banach con unidad, definamos la función

$$\begin{aligned} \widehat{x} : M(\mathcal{A}) &\to \mathbb{C} \\ \phi &\mapsto \phi(x) \end{aligned}$$

como

$$\widehat{x} = \phi(x)$$

con $\phi \in M(\mathcal{A})$, está función asigna a todo $x \in \mathcal{A}$ una función $\widehat{x} : M(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$. $\widehat{x}$ es continua en $M(\mathcal{A})$, ya que $\widehat{x} = \text{ev}_x|_{M(\mathcal{A})}$ (restricción de función continua es continua). También observe que $\widehat{x}$ es función acotada en $M(\mathcal{A})$ (ver 3.1.20). Así, $\widehat{x} \in C_B(M(\mathcal{A}))$.

La aplicación

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{A} &\to C_B(M(\mathcal{A})) \\ x &\to \widehat{x} \end{aligned}$$

la nombraremos como **transformada de Gelfand**. Denotaremos a esta transformada como $\boldsymbol{\Gamma_{\mathcal{A}}}$ cuando es necesario aclarar sobre cuál álgebra se está trabajando. Tenemos la relación

$$\Gamma_{\mathcal{A}}(x) = \widehat{x}.$$

Definición 3.2.6.

Si $x \in \mathcal{A}$, álgebra de Banach con unidad, el **radio espectral** de x se define como

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

En lo que sigue necesitaremos hacer uso del siguiente resultado.

Proposición 3.2.7.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Entonces, para todo $a \in \mathcal{A}$,

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} ||a^n||^{1/n}.$$

Para la demostración de este resultado, véase por ejemplo, Rudin [6], teorema 10.13.

Teorema 3.2.8.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad, sea $x \in \mathcal{A}$.

a. La transformada de Gelfand $\Gamma : \mathcal{A} \to C_B(M(\mathcal{A}))$ es un homomorfismo desde $\mathcal{A} \to C_B(M(\mathcal{A}))$ y $\hat{e}$ es la función constante 1.

b. Rango($\hat{x}$) $= \sigma(x)$.

c. $||\hat{x}||_{\sup} = \rho(x) \leq ||x||$.

Prueba.

La prueba viene del hecho que dado ϕ es un funcional multiplicativo, $\phi \in M(\mathcal{A})$ y dados $x, y \in \mathcal{A}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\widehat{xy}(\phi) &= \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = \widehat{x}(\phi)\widehat{y}(\phi)\\
\widehat{x+y}(\phi) &= \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) = \hat{x}(\phi) + \hat{y}(\phi)\\
\widehat{\alpha x}(\phi) &= \phi(\alpha x) = \alpha\phi(x) = \alpha\hat{x}(\phi)
\end{aligned}$$

además, $\hat{e} = 1$ desde la proposición 3.1.20. Lo que demuestra (a).

Observación: Sea X un espacio topológico. Una función f es no invertible en $C_B(X)$ si existe un $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$.

Específicamente en nuestro caso, $x \in \mathcal{A}$ es invertible si y sólo si $\hat{x} : M(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ nunca es cero.

Por definición, $\lambda \in \sigma(x)$ (véase 3.1.15) si y sólo si $\lambda e - x$ es no invertible si y sólo si existe $\phi \in M(\mathcal{A})$ tal que $\lambda - \phi(x) = 0$ (viene de de la observación anterior). Entonces $\phi(x) = \lambda$ para algún $\phi \in M(\mathcal{A})$ y siempre que $\lambda \in \sigma(x)$, lo que demuestra (b).

Para el último caso, utilizaremos el contrapositivo de 3.1.16, si $\lambda e - x$ es no invertible entonces $|\lambda| \leq ||x||$. Por definición, $\rho(x) = \{\sup|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$, por tanto, $\rho(x) \leq ||x||$.
Además $\rho(x) = ||\hat{x}||_{\sup}$ por el resultado obtenido en (b).

Definición 3.2.9.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad que además es un álgebra$-*$, cuando la transformada de Gelfand es un homomorfismo$-^*$, es decir cuando

$$\widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}} \ (x \in \mathcal{A})$$

$\mathcal{A}$ es llamada **simétrica**.

Proposición 3.2.10.

Suponga que $\mathcal{A}$ es un álgebra$-*$ conmutativa de Banach con unidad.

a. $\mathcal{A}$ es simétrica si y sólo si $\widehat{x}$ toma valores reales cuando $x = x^*$.

b. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, $\mathcal{A}$ es simétrica.

c. Si $\mathcal{A}$ es simétrica, Rango($\Gamma_{\mathcal{A}}$) es denso en $C_B(M(\mathcal{A}))$.

Prueba.

Para (a), veamos ambas implicaciones.
($\Rightarrow$) Si $\mathcal{A}$ es simétrica y $x = x^*$. Por hipótesis, $\widehat{x} = \overline{\widehat{x}}$, pero dado que $\hat{x}$ tiene imagen en $\mathbb{C}$, se tiene que $\hat{x}$ es real.
($\Leftarrow$) Dado $x \in \mathcal{A}$ y sean $u = \frac{1}{2}(x + x^*)$ y $v = \frac{1}{2i}(x - x^*)$. Observemos que $u \in \mathcal{A}$ y $v \in \mathcal{A}$, dado que $x^* \in \mathcal{A}$. Entonces, $u = u^*$ y $v = v^*$ y por tanto, $\hat{u}$ y $\hat{v}$ son reales por hipótesis. Se puede observar que $u + iv = \frac{1}{2}(x + x^*) + i(\frac{1}{2i}(x - x^*)) = x$, así también $x^* = u - iv$, entonces

$$\widehat{x^*} = \hat{u} - i\hat{v} = \overline{\widehat{x}}.$$

Para (b), suponga que $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*. Sea $x \in \mathcal{A}$ talque $x = x^*$ y sea $\phi \in M(\mathcal{A})$ y sea $\hat{x}(\phi) = \phi(x) = \alpha + i\beta$ con α, β real. Para todo $t \in \mathbb{R}$ consideremos $z = x + ite$.
Aplicando h tenemos que $\phi(z) = \phi(x) + \phi(ite) = \alpha + i\beta + it = \alpha + i(\beta + t)$ y además $z^*z = (x + ite)(x - ite) = x^2 + t^2e$.

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |\phi(z)|^2 &\leq ||z||^2, \text{ por la proposición 3.1.20} \\
&= ||z^*z|| \\
&= ||x^2 + t^2e|| \\
&\leq ||x^2|| + ||t^2e|| = ||x^2|| + t^2.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + (\beta + t)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t + t^2 &\leq ||x^2|| + t^2, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \\
\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t &\leq ||x^2||, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

esto obliga a que $\beta = 0$. De donde $\hat{x}$ es real, pues $\phi(x) = \alpha + i\beta = \alpha$. Por tanto, $\mathcal{A}$ es simétrica por (a).

Para probar que Rango($\Gamma_{\mathcal{A}}$) es denso en $C_B(M(\mathcal{A}))$ utilizaremos el teorema de Stone-Weierstrass, por lo que debemos comprobar que $\Gamma_{\mathcal{A}}$ no se anula y que Rango($\mathcal{A}$) separa puntos.

- $\Gamma_{\mathcal{A}}$ no se anula, dado que Rango($\Gamma_{\mathcal{A}}(a)$) contiene a $\hat{e} = 1$.
- Rango($\Gamma_{\mathcal{A}}$) separa puntos en $C_B(M(\mathcal{A}))$. Sean $\phi_1, \phi_2 \in M(\mathcal{A})$, si $\phi_1 \neq \phi_2$ entonces existe un $x \in \mathcal{A}$ tal que $\phi_1(x) \neq \phi_2(x)$, esto implica que $\hat{x}(\phi_1) \neq \hat{x}(\phi_2)$.

por tanto, Rango($\Gamma_{\mathcal{A}}$) es denso en $C(M(\mathcal{A}))$, lo que demuestra (c).

Observación 3.2.11.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad.

Decimos que la transformada de Gelfand ($\Gamma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C_B(M(\mathcal{A}))$) es una **isometría** (véase 1.2.7) si

$$||\hat{x}||_{\text{sup}} = ||\Gamma_{\mathcal{A}}(x)||_{\text{sup}} = ||x||$$

para todo $x \in \mathcal{A}$.

Proposición 3.2.12.

Sea $x \in \mathcal{A}$, con $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $k \geq 1$.

$$||\hat{x}||_{\sup}^{2^k} = ||\hat{x}^{2^k}||_{\sup}.$$

Prueba.

Sea $\phi \in M(\mathcal{A})$. Tenemos que $\hat{x}^{2^k}(\phi) = \phi(k)^{2^k}$; luego es claro que

$$\begin{aligned} |\phi(x)|^{2^k} &\leq (\sup(\phi \in M(\mathcal{A}) : |\phi(x)|)^{2^k}) \\ \Rightarrow \sup(|\phi(x)|^{2^k}) &\leq (\sup(\phi \in M(\mathcal{A}) : |\phi(x)|)^{2^k}) \end{aligned}$$

es decir, $||\hat{x}^{2^k}||_{\sup} \leq ||\hat{x}||_{\sup}^{2^k}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |\phi(x)| &\leq \sup(\phi \in M(\mathcal{A}) : |\phi(x)|^{2^k})^{\frac{1}{2^k}} \\ \Rightarrow \sup(\phi \in M(\mathcal{A}) : |\phi(x)|) &\leq \sup(\phi \in M(\mathcal{A}) : |\phi(x)|^{2^k})^{\frac{1}{2^k}} \\ \Rightarrow \sup(\phi \in M(\mathcal{A}) : |\phi(x)|)^{2^k} &\leq \sup(\phi \in M(\mathcal{A}) : |\phi(x)|^{k}) \end{aligned}$$

de donde $||\hat{x}||_{\sup}^{2^k} \leq ||\hat{x}^{2^k}||_{\sup}$. Por tanto, $||\hat{x}||_{\sup}^{2^k} = ||\hat{x}^{2^k}||_{\sup}$.

Proposición 3.2.13.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa y con unidad. Se cumplen los siguentes:

a. Dado $x \in \mathcal{A}$, $||\hat{x}||_{\sup} = ||x||$ si y sólo si $||x^{2^k}|| = ||x||^{2^k}$ para todo $k \geq 1$.

b. $\Gamma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C_{\mathcal{B}}(M(\mathcal{A}))$ es una isometría si y sólo si $||x^2|| = ||x||^2$, para todo $x \in \mathcal{A}$.

Prueba.

Para la parte (a), sea $x \in \mathcal{A}$.
Supongamos que $||\hat{x}||_{\sup} = ||x||$,

$$\begin{aligned} ||x^{2^k}|| &\leq ||x||^{2^k} \text{ por definición de álgebra de Banach (véase 3.1.3),} \\ &= ||\hat{x}||_{\sup}^{2^k}, \text{ por hipótesis} \\ &= ||\hat{x}^{2^k}||_{\sup} \text{ por la observación anterior,} \\ &= ||x^{\hat{2^k}}|| \text{ por el teorema 3.2.8} \\ &\leq ||x^{2^k}||, \text{ por el teorema 3.2.8} \end{aligned}$$

de donde $||x^{2^k}|| \leq ||x||^{2^k} \leq ||x^{2^k}||$ y por tanto $||x^{2^k}|| = ||x||^{2^k}$, $\forall k \geq 1$.

Si $||x^{2^k}|| = ||x||^{2^k}$ para todo k, de la proposición 3.2.7 y el teorema 3.2.8 se tiene la siguiente igualdad $||\hat{x}||_{\sup} = \lim_{k\to\infty} ||x^{2^k}||^{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} (||x||^{2^k})^{\frac{1}{2^k}} = ||x||$. Esto demuestra la parte (a).

Para la parte (b). Si $\Gamma_{\mathcal{A}}$ es una isometría entonces $||x^{2^k}|| = ||x||^{2^k}$ para todo $k \geq 1$ (por el resultado anterior), tomando $k = 1$ se tiene que entonces $||x^2|| = ||x||^2$, válido $\forall x \in \mathcal{A}$. Por otro lado, si $||x^2|| = ||x||^2$ para todo $x \in \mathcal{A}$, entonces al usar inducción sobre k

$$\begin{aligned} ||x||^{2^{k+1}} &= (||x||^{2^k})^2 \\ &= (||x^{2^k}||)^2, \text{ por hipótesis inductiva} \\ &= ||x^{2^{k+1}}||, \text{ por la hipótesis} \end{aligned}$$

Entonces, $||x^{2^k}|| = ||x||^{2^k}$ para todo $x \in \mathcal{A}$.
Utilizando el resultado anterior se concluye que $||\hat{x}||_{\text{sup}} = ||x||, \forall x \in \mathcal{A}$, es decir que $\Gamma_{\mathcal{A}}$ es una isometría, lo que demuestra (b).

Teorema 3.2.14. *El teorema de Gelfand Naimark.*

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra$-C^*$ conmutativa con unidad, $\Gamma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C_{\mathcal{B}}(M(\mathcal{A}))$ es un isomorfismo$-*$ isométrico.

Prueba.

Por el teorema 3.2.8 $\Gamma_{\mathcal{A}}$ es un homomorfismo de álgebras. Por la proposición 3.2.10 $\mathcal{A}$ es simétrica, luego $\Gamma_{\mathcal{A}}$ es un homomorfismo$-*$.
Sea $x \in \mathcal{A}$ y sea $y = x^*x$. Entonces $y^* = (x^*x)^* = x^*(x^*)^* = x^*x = y$. Dado que $y = y^*$, la identidad C^* nos da $||y||^2 = ||y^*y|| = ||y^2||$, por inducción se puede probar que $||y^{2^n}|| = ||y||^{2^n}$, para todo $n \geq 1$. Entonces se cumple que $||\hat{y}||_{\text{sup}} = ||y||$ por el literal a de la proposición 3.2.13.

Entonces,

$$\begin{aligned} ||x||^2 = ||x^*x|| = ||y|| &= ||\hat{y}||_{\text{sup}} \\ &= ||\widehat{(x^*)x}||_{\text{sup}} \\ &= ||(\widehat{x})^*\widehat{x}||_{\text{sup}} = ||\bar{\widehat{x}}\widehat{x}||_{\text{sup}} \text{ya que } \mathcal{A} \text{ es simétrica, proposición 3.2.10.} \\ &= ||\widehat{x}||_{\text{sup}}^2, \end{aligned}$$

Entonces $||\hat{x}||_{\text{sup}} = ||x||, \forall x \in \mathcal{A}$ y por tanto $\Gamma_{\mathcal{A}}$ es una isometría.

Por otro lado, si tomamos $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ tal que $\Gamma_{\mathcal{A}}(x_1) = \Gamma_{\mathcal{A}}(x_2)$, para todo $h \in M(\mathcal{A})$, $h(x_1) = h(x_2)$, entonces tendríamos que

$$0 = ||\Gamma_{\mathcal{A}}(x_1) - \Gamma_{\mathcal{A}}(x_2)||_{\text{sup}} = ||\Gamma_{\mathcal{A}}(x_1 - x_2)||_{\text{sup}} = ||x_1 - x_2||$$

entonces y se obtiene que $x_1 = x_2$. Por tanto, Γ_A es inyectiva.

Tenemos que Rango$(\Gamma_{\mathcal{A}}) \subset C_B(M(\mathcal{A}))$ y que Rango$(\Gamma_{\mathcal{A}})$ es completo, dado que $\mathcal{A}$ es completo y $\Gamma_{\mathcal{A}}$ una isometría. Dado que todo subespacio completo es cerrado, Rango$(\Gamma_{\mathcal{A}})$ es cerrado.

Además, sabemos que Rango$(\Gamma_{\mathcal{A}})$ es denso en $C_B(M(\mathcal{A}))$ por 3.2.10, entonces Rango$(\Gamma_{\mathcal{A}}) = \overline{\text{Rango}(\Gamma_{\mathcal{A}})} = C_{\mathcal{B}}(M(\mathcal{A}))$. Por tanto $\Gamma_{\mathcal{A}}$ es sobreyectiva.

De lo anterior, $\Gamma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C_{\mathcal{B}}(M(\mathcal{A}))$ es un isomorfismo isométrico, lo que demuestra el teorema.

■

Ejemplo 3.2.15.

Según el ejemplo 3.1.25, $C_B(M(\mathbb{C}))$ son las funciones continuas que van de $M(\mathbb{C})$ a $\mathbb{C}$, porque únicamente $Id \in M(\mathbb{C})$. Por tanto $\mathbb{C} \cong C_B(M(\mathbb{C}))$.

Ejemplo 3.2.16.

En el ejemplo 3.1.8 se vió que $M_n(\mathbb{C})$ es un álgebra C^* si se le asocia $||\cdot||_2$.

Sin embargo, no es posible plantear un isomorfismo$-^*$ entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $C_B(M(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})))$, dado que $M(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \emptyset$ y si comparamos las dimensiones de este espacio y $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, éstas nunca coincidirán. Vemos que en este caso no es posible utilizar el teorema de Gelfand-Naimark dado que el conjunto $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es un álgebra C^* no conmutativa.

Ejemplo 3.2.17. *El teorema de Gelfand-Mazur (3.1.18) como consecuencia del teorema de Gelfand Naimark.*

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa de Banach con unidad donde todo elemento diferente de cero es invertible, entonces $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$.

Prueba.

Debemos recordar que un anillo de división es, por definición, un anillo donde todo elemento diferente de cero es invertible. Por tanto, el $\mathcal{A}$ de este enunciado es un anillo de división, además debemos recordar el siguiente hecho.
Todo anillo de división no posee ideales, salvo el $< 0 >$ y el $< 1 >$. Así $L(\mathcal{A}) = \{< 0 >\}$.

Por el teorema 3.1.24 se concluye que $M(\mathcal{A})$ es unipuntual y $C_B(M(\mathcal{A}))$ define la aplicación

$$\begin{aligned} f : (\cdot) &\to \mathbb{C} \\ \cdot &\mapsto \alpha, \end{aligned}$$

dónde f es continua.

Por tanto, $C(M(\mathcal{A})) \cong \mathbb{C}$. Por el teorema de Gelfand Naimark se obtiene la siguiente cadena de isomorfismos

$$\mathcal{A} \cong C(M(\mathcal{A})) \cong \mathbb{C},$$

lo que nos permite concluir $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$.

3.3. Los funtores M y C_B

Proposición 3.3.1.

Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo entre dos álgebras de Banach con unidad $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} M(f) : M(\mathcal{B}) &\to M(\mathcal{A}) \\ \phi &\mapsto \phi \circ f \end{aligned}$$

es continua.

Prueba.

Sea $\phi \in M(\mathcal{B})$, $\phi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$, $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Note que $(\phi \circ f) \in M(\mathcal{A})$,

$$\phi \circ f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}.$$

Además, sean $x, y \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} (\phi \circ f)(xy) = \phi(f(xy)) &= \phi(f(x)f(y)) \\ &= \phi(f(x))\phi(f(y)) \\ &= \phi \circ f(x)\phi \circ f(y) \end{aligned}$$

Luego, consideremos $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{B}^*$, los duales de esas álgebras de Banach. Demostraremos que la aplicación

$$\begin{aligned} g : \mathcal{B}^* &\to \mathcal{A}^* \\ \phi &\mapsto \phi \circ f \end{aligned}$$

es continua respecto a la topología débil$-*$.

Sea V un abierto en $\mathcal{A}^*$ y consideremos su imagen inversa

$$g^{-1}(V) = \{\phi \in \mathcal{B}^* : \phi \circ f \in V\}.$$

Sea $V = V_{a,U}^{\mathcal{A}^*} = \{\psi \in \mathcal{A}^* : \psi(a) \in U\}$, para algún $a \in \mathcal{A}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto.

Si $g(\phi) = \phi \circ f \in V$, entonces por la definición anterior $(\phi \circ f)(a) \in U$. Entonces, tendremos:

$$\begin{aligned} g^{-1}(V_{a,U}^{\mathcal{A}}) &= \{\phi \in B^* : (\phi \circ f)(a) \in U\} \\ &= \{\phi \in B^* : (\phi \circ f)(a) \in U\} \\ &= V_{f(a),U}^{\mathcal{B}^*}. \end{aligned}$$

Dado que empleamos la topología débil$-^*$ en B^*, tenemos que $V_{f(a),U}^{B}$ es abierto en B^*, bajo esta topología. Entones, todo conjunto abierto en $\mathcal{A}^*$ lleva a un conjunto abierto en $\mathcal{B}^*$, bajo la imagen inversa de g. Por tanto, g es continua.

Además, sabemos que $M(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^*$, $M(\mathcal{B}) \subset B^*$. Dado que la continuidad de g se cumple para espacios duales en general, podemos restringir nuestro dominio a $M(\mathcal{B})$ y entonces $M(f)$ es continua.

Proposición 3.3.2.

M es un funtor contravariante definido en $\boldsymbol{Ban} \to \boldsymbol{Top}$.

Prueba.

Sabemos que $M(\mathcal{A})$ es un espacio topológico bajo la topología débil$-*$ para $\mathcal{A}^*$. Entonces, $M(\mathcal{A}) \in Obj_{\boldsymbol{Top}}$ para $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Por la proposición anterior, sabemos que $M(f)$ está en Hom_{Top} para todo homomorfismo $f \in \boldsymbol{Ban}$.

Observemos que para $\phi \in M(\mathcal{A})$,

$$M(I_{\mathcal{A}})(\phi) = \phi \circ I_{\mathcal{A}} = \phi$$

Entonces, $M(I_{\mathcal{A}}) = I_{M(\mathcal{A})}$. Es decir, preserva el morfismo identidad.

Luego, verifiquemos que preserva composiciones, para

$$M(g \circ f) : M(\mathcal{C}) \to M(\mathcal{A}).$$

Sea $h \in M(\mathcal{C})$,

$$\begin{aligned} [M(f) \circ M(g)](h) &= M(f)((M(g)(h))) \\ &= M(f)((h \circ g)) \\ &= h \circ g \circ f \\ &= h \circ (g \circ f) \\ &= M(g \circ f)(h) \end{aligned}$$

Por tanto, M es un funtor contravariante.

Teorema 3.3.3.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C* con unidad, conmutativa, entonces $\Gamma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C_B(M(\mathcal{A}))$ es un epimorfismo en Ban.

Prueba.

Sea $\mathcal{B} \in \boldsymbol{Ban}$ y tomemos $h_1, h_2 : C_B(M(\mathcal{A})) \to \mathcal{B}$ morfismos, es decir, homomorfismos acotados tal que $h_1 \circ \Gamma_{\mathcal{A}} = h_2 \circ \Gamma_{\mathcal{A}}$.
De la relación anterior se tiene que $h_1 \mid_{\text{Rango}(\Gamma_{\mathcal{A}})} = h_2 \mid_{\text{Rango}(\Gamma_{\mathcal{A}})}$, como Rango$(\Gamma_{\mathcal{A}})$ es densa en $C_B(M(\mathcal{A}))$ (véase 3.2.10) entonces se concluye que $h_1 = h_2$, por el resultado en la proposición 1.2.13.

Definición 3.3.4.

Considere todas las funciones continuas $f : X \to Y$ para X, Y, espacios topológicos, es decir, $f \in Hom_{\boldsymbol{Top}}(X, Y)$. También considere todas las funciones continuas acotadas (como se definió en 3.1.7), tomemos $g \in C_B(Y)$. Entonces, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} C_B(f) : C_B(Y) &\to C_B(X) \\ g &\mapsto g \circ f \\ (C_B(f))(g) &:= g \circ f. \end{aligned}$$

Obsérvese que la composición de funciones continuas es continua, y $g \circ f$ es acotada dado que g es acotada, por lo que C_B está bien definida.

Proposición 3.3.5.

C_B es un funtor contravariante definido en $\boldsymbol{Top} \to \boldsymbol{Ban}$.

Prueba.

- Si $X \in Obj_{\boldsymbol{Top}}$ entonces $C_B(X) \in Obj_{\boldsymbol{Ban}}$, porque es un álgebra de Banach.
  Si $f \in Hom_{\boldsymbol{Top}}$ entonces $C_B(f) \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}$, dado que son homomorfismos acotados de álgebras.
- C_B preserva la aplicación identidad. Sea $g \in C_B(X)$.

  $$C_B(I_X)(g) = g \circ I_X = g \in C_B(X).$$

  Entonces, $C_B(I_X) = I_{C_B(X)}$.
- Preserva composiciones.
  Sea $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. $C_B(f)$ acepta una función $h_1 \in C_B(Y)$ y al componer se genera $h_1 \circ f : X \to \mathbb{C}$. $C_B(g)$ acepta una función $h_2 \in C_B(Z)$ y al componer se genera $h_2 \circ g : Y \to \mathbb{C}$.
  Entonces, tomemos $h_2 \in C_B(Z)$,

  $$[C_B(f) \circ C_B(g)](h_2) = (C_B(f))(h_2 \circ g) = (h_2 \circ g) \circ f,$$

  lo cuál es equivalente a hacer $C_B(g \circ f)(h_2) = h_2 \circ (g \circ f)$

Por tanto, C_B es un funtor contravariante.

Capítulo 4

Aplicaciones a teoría de álgebras de Banach

4.1. Adjunción entre C_B y M

En está sección se aborda el problema de una adjunción (ver 2.4.4) entre los funtores $M(\mathcal{A})$ y $C_B(X)$ (ver 3.3.2 y 3.3.5), además se estudian dos transformaciones que surgen de las composiciones de ambos funtores.

4.1.1. La adjunción

Teorema 4.1.2. *El funtor M es adjunto por la izquierda a C_B.*

Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Dados $f \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(\mathcal{A}, C_B(X))$ y $g \in Hom_{Top}(X, M(\mathcal{A}))$. Existe una biyección natural

$$\Phi : Hom_{\boldsymbol{Ban}}(\mathcal{A}, C_B(X)) \to Hom_{\boldsymbol{Top}}(X, M(\mathcal{A}))$$

donde $\Phi(f) = g$ y $\Phi^{-1}(g) = f$ de modo que

$$(f(a))(x) = (g(x))(a)$$

para todo $x \in X$, $a \in \mathcal{A}$, $f \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(\mathcal{A}, C_B(X))$ y $g \in Hom_{\boldsymbol{Top}}(X, M(\mathcal{A}))$.

En particular, la naturalidad se refiere a verificar las siguientes condiciones:

1. $\Phi(C_B(k) \circ f) = \Phi(f) \circ k$.

2. $\Phi^{-1}(Mh \circ g) = \Phi^{-1}(g) \circ h$.

Para $h \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(B, \mathcal{A})$ y $k \in Hom_{\boldsymbol{Top}}(Y, X)$. En otras palabras los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "C_Bk \circ f"'] & C_B(X) \arrow[d, "C_Bk"] & & & M(A) & X \arrow[l, "\Phi(f)"'] \\
& C_B(Y) & {} \arrow[r, "\Phi"] & {} & & Y \arrow[u, "k"'] \arrow[ul, "\Phi(f) \circ k"]
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Phi^{-1}(g)"] & C_B(X) & & M(A) \arrow[dd, "M(h)"] & X \arrow[l, "g"'] \arrow[ddl, "M(h)\circ g"] \\
& & & \arrow[ll, "\Phi^{-1}"'] & \\
B \arrow[uu, "h"] \arrow[uur, "\Phi^{-1}(g)\circ h"'] & & & M(B) &
\end{tikzcd}
$$

Para que los diagramas anteriores tengan sentido debemos considerar, $f \in Hom_{Ban}(\mathcal{A}, C_B(X))$, $g \in Hom_{Top}(X, M(\mathcal{A}))$, $h \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(B, \mathcal{A})$ y $k \in Hom_{Top}(Y, K)$, por la contravarianza se obtienen los morfismos $M(h) \in Hom_{Top}(M(\mathcal{A}), M(B))$ y $C_B k \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(C_B(X), C_B(Y))$.

El teorema 4.1.2 puede probarse siguiendo los pasos descritos a continuación.

a. Para todo $x \in X$, $g(x) \in M(\mathcal{A})$.

b. Si $f \in Hom_{Ban}(\mathcal{A}, C_B(X))$, $g \in Hom_{Top}(X, M(\mathcal{A}))$,

c. Para todo $a \in \mathcal{A}, f(a) \in C_B(X)$.

d. Si $g \in Hom_{Top}(X, M(\mathcal{A}))$, $f \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(\mathcal{A}, C_B(X))$.

e. Φ es una biyección.

f. Φ es natural.

En orden, demostraremos cada uno de los puntos anteriores. Esta idea de pasos a demostrar para obtener la adjunción puede observarse en [4].

Proposición 4.1.3.

Si $f \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(\mathcal{A}, C_B(X))$, entonces $\Phi(f)(x) = g(x) \in M(\mathcal{A})$ para todo $x \in X$.

Prueba.

Debemos probar dos puntos.

- $g(x)$ es un funcional multiplicativo $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$.

  Primero, veamos que $g(x)$ puede ser descrito como

$$
\begin{gathered}
g(x) : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \\
(g(x))(a) = (f(a))(x) = (ev_x \circ f)(a)
\end{gathered}
$$

  donde el mapa

$$
\begin{gathered}
ev_x : C_B(X) \to \mathbb{C} \\
ev_x(h) = h(x)
\end{gathered}
$$

  con $h \in C_B(X)$.

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned} g(x)(a \cdot \alpha b) &= (ev_x \circ f)(a \cdot \alpha b) \\ &= ev_x(f((a \cdot \alpha b))) \\ &= ev_x(f((\alpha a \cdot b))) \\ &= ev_x(f(\alpha a)) \cdot ev_x(f(b)) \\ &= \alpha g(x)(a) + g(x)(b). \end{aligned}$$

Además, para todo $f \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(A, C_B(X))$, en consecuencia

$$(g(x))(1_{\mathcal{A}}) = ev_x(f(1_{\mathcal{A}})) = 1_{C_{B(X)}}(X) = 1 \in \mathbb{C},$$

ya que $1_{C_{B(X)}}$ es la aplicaciòn continua $h : X \to \mathbb{C}$ tal que $h(x) = 1$.

- $g(x)$ es acotada. Tomemos h y $k \in C_B(X)$ de tal forma que

$$\begin{aligned} ||h - k||_\infty = \sup\{|h(x) - k(x)|, \text{para todo } x \in X\} \leq \epsilon, \text{ para un } \epsilon \text{ fijo.} \\ \Rightarrow |h(x_0) - k(x_0)| \leq \epsilon, \text{ fijando } x_0, \end{aligned}$$

por tanto, para todo $x_0 \in X$, $ev_{x_0} : C_B(X) \to \mathbb{C}$ es continuo.

Si $f \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(\mathcal{A}, C_B(X))$, sabemos que f es acotado bajo la norma de operador y entonces continua. Luego, $g(x) = ev_x \circ f$ es continua porque la composición de funciones continuas es continua, además es acotada porque f y ev_{x_0} son acotadas, por tanto $g(x) : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ es acotada. Lo que demuestra que $g(x) \in M(\mathcal{A})$.

Proposición 4.1.4.

Si $f \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(\mathcal{A}, C_B(X))$ entonces $\Phi(f) = g \in Hom_{Top}(X, M(\mathcal{A}))$.

Prueba.

Sea $f : \mathcal{A} \to C_B(X)$, $a \in \mathcal{A}$ y O un conjunto abierto en $\mathbb{C}$. Observemos que $f(a)$ es continuo en X porque $f(a) \in C_B(X)$.
Consideremos el conjunto,

$$U_{f,a,O} = \{x \in X : (f(a))(x) \in O\},$$

este puede describirse equivalentemente como $U_{f,a,O} = (f(a))^{-1}(O)$, entonces $U_{f,a,0}$ debe ser abierto en X dado que O es abierto en $\mathbb{C}$ y la imagen inversa de abiertos es abierta.

Ahora, recordemos que $M(\mathcal{A})$ tiene asociada la topología débil $-^*$ (ver 3.2.2). Consideremos los conjuntos abiertos, de la forma $V_{a,P} = \{\phi \in M(\mathcal{A}) : \phi(a) \in P\}$, con P abierto en $\mathbb{C}$. Todo abierto en $M(\mathcal{A})$ puede obtenerse como unión de estos conjuntos, por tanto, forman una base topológica para $M(\mathcal{A})$. Podemos reescribir el conjunto de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g^{-1}(V_{a,P}) &= \{x \in X : g(x) \in V_{a,P}\} \\ &= \{x \in X : g(x)(a) \in P\} \\ &= \{x \in X : f(a)(x) \in P\} \\ &= U_{f,a,P} \end{aligned}$$

como P es abierto, $V_{a,P}$ es abierto en $\mathbb{C}$ y por el razonamiento anterior, g es continua y $g \in Hom_{Top}(X, M(\mathcal{A}))$.

Proposición 4.1.5.

Sea $g : X \to M(\mathcal{A})$ entonces $(\Phi^{-1}(g))(a) = f(a) : X \to \mathbb{C}$ (ver diagrama en 4.1.2) es acotado y continuo, es decir $f(a) \in C_B(X)$.

Prueba.

- $f(a)$ es continuo.
  Definamos:

$$ev_a : M(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$$
$$ev_a(\phi) = \phi(a), \text{ con } a \text{ fijo.}$$

  Entonces podemos reescribir

$$f(a) : X \to \mathbb{C}$$
$$((f(a))(x) = (ev_a \circ g)(x), \text{ para } g \text{ fijo.}$$

  Recordemos que ϕ es un operador acotado con norma 1 (ver el lema 3.1.21) y por el literal c de la proposición 3.1.20 podemos plantear

$$|\phi(a)| \leq ||a||_{\mathcal{A}}, \text{ para todo } \phi.$$
$$|ev_a(\phi)| \leq ||a||_{\mathcal{A}} \cdot 1$$
$$|ev_a(\phi)| \leq C_a||\phi||, \text{ para todo } a \text{ existe } C_a.$$

  Entonces, ev_a es acotado bajo la norma de operador y por tanto continua al evaluar en ϕ y para todo a.

  Además, g es continuo según la proposición aterior. Por tanto, $f(a) = ev_a \circ g$ es continuo.

- $f(a)$ es acotado.
  Primero, debemos observar que $M(\mathcal{A})$ es compacto según 3.2.4 y que ev_a es continuo por el punto anterior, de ahí que la imagen de ev_a es compacta, dado que la imagen de funciones continuas en espacios topológicos compactos es compacta.

  Luego, para algún $K \in \mathbb{R}$,

$$|ev_a(\phi)| = |\phi(a)| < K,$$

  ya que la imagen de ev_a está en $\mathbb{C}$ y subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ son acotados por el teorema de Heine-Borel.

  Si $\phi = g(x)$ para $x \in X$, tendremos que $ev_a(g(x)) < K$. Entonces, $f(a) = ev_a \circ g$ es acotado.
  Por tanto, $f(a)$ continuo y acotado implica que $f(a) \in C_B(X)$.

Proposición 4.1.6.

Si $g \in Hom_{Top}(X, M(\mathcal{A}))$ entonces $\Phi^{-1}(g) = f \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(\mathcal{A}, C_B(X))$.

Prueba.

- f es un homomorfismo de álgebras con unidad.

  Sean $a, b \in \mathcal{A}$, $x \in X$ y $c \in \mathbb{C}$.

  $$f(ka)(x) = g(x)(ka) = k \cdot g(x)(a) = k \cdot f(a)(x).$$

  $$f(a+b)(x) = g(x)(a+b) = g(x)(a) + g(x)(b) = f(a)(x) + f(b)(x).$$

  lo mismo se cumple para el producto.
  Además,

  $$f(1_{\mathcal{A}})(x) = g(x)(1_{\mathcal{A}}) = (ev_{1_{\mathcal{A}}} \circ g)(x) = ev_{1_{\mathcal{A}}}(g(x)) = (g(x))(1_{\mathcal{A}}) = 1 \in \mathbb{C},$$

  por tanto $f(1_{\mathcal{A}})(x) = 1 \in \mathbb{C}$, para todo $x \in X$ y como $f(1_{\mathcal{A}}) \in C_B(X)$ entonces $f(1_{\mathcal{A}}) = 1_{C_B(X)}$. Por tanto, $f : \mathcal{A} \to C_B(X)$ es un homomorfismo de álgebras con unidad.

- f es acotado.

  $$||g(x)|| = 1,$$

  dado que $g(x) \in M(\mathcal{A})$. Consideremos $||a||_{\mathcal{A}} \leq 1$, entonces

  $$|f(a)(x)| = |g(x)(a)| \leq \|g(x)\| \, \|a\|_{\mathcal{A}} \leq 1,$$

  para todo $x \in X$. Entonces $\|f(a)\|_{\infty} \leq 1$, para $\|a\|_{\mathcal{A}} \leq 1$. Por tanto, $\|f\| \leq 1$, es decir, f es acotado bajo la norma operador.

  De los puntos anteriores, $f \in Hom_{Ban}(\mathcal{A}, C_B(X))$.

Proposición 4.1.7. Φ *es biyectivo.*

Prueba.

Tomemos $f, g : \mathcal{A} \to C_B(X)$.

- Φ es inyectivo.
  Tomemos $(\Phi(f)(x))(a) = (\Phi(g)(x))(a)$.

  $$\begin{aligned}
  &(ev_x \circ f)(a) = (ev_x \circ g)(a), \text{ para todo } x \in X,\, a \in \mathcal{A}.\\
  \Leftrightarrow &ev_x(f(a)) = ev_x \circ (g(a))\\
  \Leftrightarrow &(f(a))(x) = (g(a))(x)\\
  \Leftrightarrow &f(a) = g(a), \text{ para todo } a \in \mathcal{A}.\\
  \Leftrightarrow &f = g,
  \end{aligned}$$

  de donde Φ es inyectivo.

- Φ es sobreyectivo.
  Sean $z, p : X \to M(\mathcal{A})$.

  Tomemos $(\Phi^{-1}(z))(a)(x) = (\Phi^{-1}(p))(a)(x)$.

  $$\begin{aligned}
  &(ev_a \circ z)(x) = (ev_a \circ p)(x), \text{ para todo } x \in X,\, a \in \mathcal{A}.\\
  \Leftrightarrow &(ev_a)(z(x)) = (ev_a)(p(x))\\
  \Leftrightarrow &(z(x))(a) = (p(x))(a)\\
  \Leftrightarrow &z(x) = p(z)\\
  \Leftrightarrow &z = p
  \end{aligned}$$

de donde Φ^{-1} es inyectivo.

Por tanto, Φ es biyectivo.

Proposición 4.1.8. Φ *es natural.*

Prueba.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[ddr, "C_Bk\circ f"'] & C_B(X) \arrow[dd, "C_Bk"] & & & M(A) & X \arrow[l, "\Phi(f)"'] \\
& & {} \arrow[r, "\Phi"] & {} & & \\
& C_B(Y) & & & & Y \arrow[uu, "k"'] \arrow[uul, "\Phi(f)\circ k"]
\end{tikzcd}$$

- $\Phi(C_Bk \circ f) = \Phi(f) \circ k$.

  Sean $k : Y \to X$, $C_Bk : C_B(X) \to C_B(Y)$ y $f : \mathcal{A} \to C_B(X)$. Tomemos $a \in \mathcal{A}, y \in Y$.

  $$(\Phi(C_Bk \circ f)(y))(a) = ((C_Bk \circ f)(a))(y) = ((C_Bk(f(a)))(y) = (f(a))(k(y)),$$

  la última expresión está bien definida ya que $f(a) \in C_B(X)$ y $k(y) \in X$. Además,

  $$(f(a))(k(y)) = ((\Phi(f))(k(y)))(a) = ((\Phi(f)))(k(y))(a) = ((\Phi(f) \circ k)(y))(a)$$

  la última expresión está bien definida ya que $\Phi(f) \circ k : Y \to M(\mathcal{A})$.

  Con lo que se concluye la igualdad.

- $\Phi^{-1}(Mh \circ g) = \Phi^{-1}(g) \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Phi^{-1}(g)"] & C_B(X) & & & M(A) \arrow[dd, "M(h)"] & X \arrow[l, "g"'] \arrow[ddl, "M(h)\circ g"] \\
& & {} & {} \arrow[l, "\Phi^{-1}"'] & & \\
B \arrow[uu, "h"] \arrow[uur, "\Phi^{-1}(g)\circ h"'] & & & & M(B) &
\end{tikzcd}$$

  Sean $h : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, $Mh : M(\mathcal{A} \to M(\mathcal{B}))$ y $g : X \to M(\mathcal{A})$. Tomemos $b \in \mathcal{B}, x \in X$.

  $$(\Phi^{-1}(Mh \circ g))(b)(x) = ((Mh \circ g)(x))(b) = (Mh(g(x)))(b) = (g(x))(h(b)),$$

  Además,

  $$(g(x))(h(b)) = ((\Phi^{-1}(g))(h(b)))(x) = ((\Phi^{-1}(g) \circ h)(b))(x),$$

la última expresión está bien definida, considerando $\Phi^{-1}(g) : \mathcal{A} \to C_B(X)$ y $h : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

Por la cadena de igualdades, $\Phi^{-1}(Mh \circ g) = \Phi^{-1}(g) \circ h$.

Por tanto, Φ es natural y hemos demostrado que los funtores C_B y M son adjuntos.

■

Ahora que hemos demostrado la adjunción de estos funtores estudiaremos algunos resultados que surgen a partir de esta adjunción.

4.1.9. El funtor $C_B M$

Analicemos primero el funtor (ver 2.3.2)

$$C_B M : \boldsymbol{Ban} \to \boldsymbol{Ban}$$

y en la definición anterior, para nuestra transformación natural Φ, sustituyamos X por $M(\mathcal{A})$ (recordemos que $M(\mathcal{A})$ es espacio topológico), es decir,

$$\Phi : Hom_{\boldsymbol{Ban}}(\mathcal{A}, C_B(M(\mathcal{A}))) \to Hom_{Top}(M(\mathcal{A}), M(\mathcal{A}))$$

es también una biyección natural.

Consideremos el mapa identidad

$$\begin{aligned} I_{M(\mathcal{A})} &: M(\mathcal{A}) \to M(\mathcal{A}) \\ I_{M(\mathcal{A})}(f) &= f, \end{aligned}$$

definamos un homomorfismo de álgebras de Banach, como $\Gamma_{\mathcal{A}} = \Phi^{-1}(I_{M(\mathcal{A})})$. Por la definición de Φ,

$$(\Gamma_{\mathcal{A}}(a))(f) = I_{M(\mathcal{A})}(f)(a) = f(a)$$

para todo $a \in \mathcal{A}, \phi \in M(\mathcal{A})$. Por tanto, $\Gamma_{\mathcal{A}}$ puede describirse utilizando la aplicación evaluación

$$\begin{aligned} ev_a &: M(\mathcal{A}) \to \mathbb{C} \\ ev_a(\phi) &= \phi(a) \end{aligned}$$

y podemos describir $\Gamma_{\mathcal{A}}$ como

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{A}} &: \mathcal{A} \to C_B(M(\mathcal{A})) \\ \Gamma_{\mathcal{A}}(a) &= ev_a. \end{aligned}$$

La definición de este homomorfismo coincide con la definición de la transformada de Gelfand dada en 3.2.5, en efecto, ésta es la transformada de Gelfand.

Proposición 4.1.10.

La transformada de Gelfand es natural, en el sentido de que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\Gamma_{\mathcal{A}}:a\mapsto ev_a} & C_B M(\mathcal{A}) \\ \big\downarrow p & & \big\downarrow C_B M p \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\Gamma_{\mathcal{B}}:b\mapsto ev_b} & C_B M(\mathcal{B}) \end{array}$$

y entonces debe cumplirse la igualdad $\Gamma_{\mathcal{B}} \circ p = C_B M p \circ \Gamma_{\mathcal{A}}$.

Prueba.

Primero, observemos que las flechas del diagrama tienen sentido. Sea $p \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ entonces $Mp \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(M(\mathcal{B}), M(\mathcal{A}))$ y más aún $C_BMp \in Hom_{\boldsymbol{Ban}}(C_BM\mathcal{A}, C_BM\mathcal{B})$. Por último, $\Gamma_{\mathcal{A}}, \Gamma_{\mathcal{B}}$ son las transformadas de Gelfand para $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente.

Como Φ es natural y $\Gamma_A = \Phi^{-1}(I_{M(\mathcal{A})})$ obtenemos los siguientes diagramas dados por la aplicación Φ.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "\Gamma_B"] \arrow[dr, "C_B(Mp)\circ\Gamma_{\mathcal{A}}"'] & C_B(M(\mathcal{A})) \arrow[d, "C_B(Mp)"] & & M(\mathcal{A}) & M(\mathcal{A}) \arrow[l, "I"'] \\
& C_B(M(\mathcal{B})) & {} \arrow[r, "\Phi"] & {} & M(\mathcal{B}) \arrow[u, "Mp"'] \arrow[ul, "Mp"]
\end{tikzcd}$$

Con este diagrama podemos obtener $\Phi(C_B(Mp) \circ \Gamma_{\mathcal{A}}) = \Phi(\Gamma_A) \circ Mp = I_{M(\mathcal{A})} \circ Mp = Mp$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "\Gamma_B"] & C_B(M(\mathcal{B})) & & M(\mathcal{B}) \arrow[d, "Mp"] & M(\mathcal{B}) \arrow[l, "I"'] \arrow[dl, "Mp"] \\
\mathcal{A} \arrow[u, "p"] \arrow[ur, "\Gamma_B \circ p"'] & {} \arrow[r, "\Phi"] & {} & M(\mathcal{A}) &
\end{tikzcd}$$

Para este diagrama, $\Phi(\Gamma_B \circ p) = Mp \circ \Phi(\Gamma_B) = Mp \circ I_{M(\mathcal{B})} = Mp$.

Por último, como Φ es biyectivo, entonces es inyectivo y debe cumplirse que

$$\Phi(\Gamma_B \circ p) = \Phi(C_B(Mp) \circ \Gamma_{\mathcal{A}})$$

y concluimos que $\Gamma_{\mathcal{B}} \circ p = C_B(Mp) \circ \Gamma_{\mathcal{A}}$.

4.1.11. La transformada de Stone-Cech

Ahora, analicemos el funtor

$$MC_B : Top \to Top.$$

Observemos que si hacemos $\mathcal{A} = C_B(X)$, la imagen del funtor anterior no es solo un espacio topológico sino también un espacio compacto de Hausdorff, bajo la topología débil$-^*$ asignada a $\mathcal{A}$ según 3.2.4.
Al igual que antes, podemos obtener una biyección natural

$$\Phi : Hom_{Ban}(C_B(X), C_B(X)) \to Hom_{Top}(X, M(C_B(X))).$$

Definimos la aplicación identidad $I_{C_B(X)} : C_B(X) \to C_B(X)$ y la aplicación $\Psi_X \in Hom_{Top}(X, M(C_B(X)))$, tal que $\Psi_X = \Phi(I_{C_B(X)})$. Por la definición de Φ,

$$\Psi(x)(h) = I_{C_B(X)}(h)(x) = h(x) \in \mathbb{C}.$$

Entonces, Ψ satisface

$$\Psi_X : X \to M(C_B(X))$$
$$\Psi_X(x) = ev_x,$$

Esta aplicación es llamada la **transformada de Stone-Cech**.

Propiedad 4.1.12.

La transformada de Stone-Cech es natural, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Psi_X : x \mapsto ev_x} & M(C_B(X)) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle MC_B f} \\ Y & \xrightarrow{\Psi_Y : y \mapsto ev_y} & M(C_B(Y)) \end{array}$$

Prueba.

La demostración es similar a la prueba anterior.

4.2. Una equivalencia entre Cst y $\mathcal{H}$

Definición 4.2.1.

Los objetos que son álgebras$-C^*$ conmutativas con unidad, junto con los homomorfismos$-^*$ (ver 3.1.11) con unidad forman la categoría Cst.

En está sección se plantea una equivalencia entre dos subcategorías, una en $\boldsymbol{Ban}$ y otra en $\boldsymbol{Top}$; estas subcategorías resultan de la imagen de la transformada de Gelfand y la transformada de Stone Cech.

Definición 4.2.2.

La categoría $\boldsymbol{\mathcal{SC}}$ está formada por los objetos que son la imagen de espacios topológicos al aplicarles el funtor MC_B, junto con las funciones continuas entre objetos de este tipo.

Podemos notar que si X es un espacio topológico, $C_B(X)$ es un álgebra de Banach y entonces $MC_B(X)$ es también un espacio topológico. Por tanto, podemos limitarnos a objetos en la categoría $\boldsymbol{Top}$ dados por la imagen de MC_B y funciones continuas entre objetos de este tipo.

Definición 4.2.3.

La categoría $\boldsymbol{\mathcal{GN}}$ está formada por los objetos que son la imagen de las álgebras de Banach con unidad al aplicarles el funtor C_BM, junto con los homomorfismos acotados entre objetos de este tipo.

Podemos notar que $M(\mathcal{A})$ es un espacio topológico y entonces $C_B(M(\mathcal{A}))$ es un álgebra de Banach.

Teorema 4.2.4.

La transformada de Stone Cech es una biyección.

Prueba.

Consideremos $I_x = \{f \in C_B(X) : f(x) = 0\}$, con $f \in I$.

Notese que los ideales de la forma I_x son ideales propios en $C_B(X)$.

- Obsérvese que $I \subseteq I_x$, ya que si $f \in I$, según el hecho anterior, $f \in I_x$. Como I es maximal entonces $I = I_x$, entonces cualquier ideal maximal en $C_B(X)$ es de la forma I_x.

- Supongamos que existe un ideal J tal que $I_X \subset J$. Por el hecho anterior a esta proposición, se sabe que existe un punto $y \in X$ tal que $f(y) = 0$ para todo $f \in J$.
Supongamos que $x \neq y$, como X es compacto es también normal por el teorema de Tietze (ver Munkres [3], Teorema 3.2). Entonces existe una una función $f \in C_B(X)$ tal que $f(y) = 1$ y $f(x) = 0$, lo cual nos dice que $f \in I_x$ y f no está en J lo que diría que I_X no está incluido en I, lo cual es una contradicción. Entonces $x = y$, por tanto I_x es un ideal maximal.

Hemos demostrado que el mapa $X \to L(C_B(X))$ es una biyección.

Además, I_X es el núcleo de la aplicación evaluación $ev_x : C_B(X) \to \mathbb{C}$, pero además sabemos que $M(C_B(X)) \to L(C_B(X))$ es una biyección, componiendo las biyecciones se tiene que

$$\begin{aligned} X &\to C_B(X) \\ x &\mapsto ev_x \end{aligned}$$

es una biyección.

Este mapa, es precisamente la transformada de Stone Cech.

Corolario 4.2.5.

Si X es un espacio Hausdorff compacto. La transformada de Stone-Cech es un homeomorfismo.

Prueba.

Sabemos que $MC_B(X)$ también es un espacio compacto de Hausdorff. Además, si X y Y son espacios de Hausdorff, una biyección continua $f : X \to Y$ es un homeomorfismo (Munkres [3], Teorema 5.6).

Por el teorema anterior. Sabemos que $\Psi_X : X \to MC_B(X)$ es una biyección continua entre espacios topológicos y por tanto es un homeomorfismo.

Proposición 4.2.6.

Los funtores $MC_B : Top \to Top$ y $C_BM : \boldsymbol{Ban} \to \boldsymbol{Ban}$ son idempotentes, es decir, debe cumplirse que $MC_B \cong MC_BMC_B$ y $C_BM \cong C_BMC_BM$ son funtores naturalmente isomorfos.

Prueba.

Como X es un espacio topológico $C_B(X) \in \boldsymbol{Ban}$ y entonces $MC_B(X)$ es un espacio compacto de Hausdorff.
Obsérvese que en

$$\Psi_{MC_B} : MC_B(X) \to MC_BMC_B(X)$$

ambos conjuntos involucrados son de Hausdorff, por tanto, Ψ_{MC_B} es un homeomorfismo. Además, vimos que Ψ es una transformación natural (ver 4.1.12), lo que nos da las componentes para un isomorfismo natural $\alpha : MC_B \cong MC_BMC_B$.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad, tenemos que $\Psi_{M\mathcal{A}} : M(\mathcal{A}) \to MC_BM(\mathcal{A})$ es un homeomorfismo y entonces $C_B(\Psi_{\mathcal{A}}) : C_BMC_BM(\mathcal{A}) \to C_BM(\mathcal{A})$ es un isomorfismo de álgebras de Banach con unidades, dado que C_B es un funtor contravariante y los funtores preservan isomorfismos (ver 2.4.5).

Como Ψ_X es natural y C_B es contravariante, entonces tenemos la colección de isomorfismos naturales $\beta_{\mathcal{A}} = C_B\Psi_{M(\mathcal{A})}$ lo que nos da el isomorfismo $\beta : C_BMC_BM \cong C_BM$.

Corolario 4.2.7.

La transformada de Stone Cech es un homeomorfismo para objetos en $\boldsymbol{\mathcal{SC}}$.

Prueba.

La prueba viene de lo realizado en las primeras líneas de la proposición anterior.

Corolario 4.2.8.

La transformada de Gelfand es un isomorfismo de álgebras de Banach con unidad conmutativas, en $\boldsymbol{\mathcal{GN}}$.

Prueba.

Veamos que $\beta_{\mathcal{A}}$ es la aplicación inversa de $\Gamma_{C_BM(\mathcal{A})} : C_BM(\mathcal{A}) \to C_BMC_BM(\mathcal{A})$.
Hagamos $X = C_BM(\mathcal{A})$ y tomemos $x \in X$, sabemos que $\beta_{\mathcal{A}}(\Gamma_B(x)) = C_B(\Psi_{M(\mathcal{A})})(\Gamma_B(x))$, recordemos que $\Gamma_X(x) = x$. Entonces

$$\begin{aligned}\beta_{\mathcal{A}}(\Gamma_X(x)) &= C_B(\Psi_{M(\mathcal{A})})(\Gamma_X(x))\\ &= C_B(\Psi_{M(\mathcal{A})})(ev_x)\\ &= ev_x \circ \Psi_{M(\mathcal{A})},\ \text{donde } ev_x \circ \Psi_{M(\mathcal{A})} : M(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}\end{aligned}$$

Pero,

$$(ev_x \circ \Psi_{M(\mathcal{A})})(\phi) = ev_x(\Psi_{M(\mathcal{A})}(\phi)) = ev_x(ev_\phi) = ev_\phi(x) = x(\phi),$$

eso permite establecer $\beta_{\mathcal{A}}(\Gamma_X(x))(\phi) = (ev_x \circ \Psi_{M(\mathcal{A})})(\phi) = x(\phi)$. para $\phi \in M(\mathcal{A})$.
Por tanto, $\beta_{\mathcal{A}}(\Gamma_X(x)) = x$ y $\beta_{\mathcal{A}}$ es la aplicación inverso de Γ_B, lo que demuestra que la transformada de Gelfand es un isomorfismo en $\boldsymbol{\mathcal{GN}}$, ya que β es un isomorfismo.

4.2.9. Una equivalencia entre $\mathcal{GN}$ y $\mathcal{H}$.

Teorema 4.2.10.

Los funtores $M : \mathcal{GN} \to \mathcal{SC}$ y $C_B : \mathcal{SC} \to \mathcal{GN}$ son equivalencias de categorías (en el sentido de la definición 2.4.6). En otras palabras, se cumplen los siguientes isomorfismos $I_{\mathcal{GN}} \cong C_b M$ $I_{\mathcal{SC}} \cong MC_B$.

Prueba.

Del trabajo en 4.2.6 se tienen las componentes $\beta_{\mathcal{A}}$ y α de forma que $\alpha : MC_B \cong MC_B MC_B$ y $\beta : C_B MC_B M \cong C_B M$.

Consideramos Y un objeto en $\mathcal{SC}$, entonces $Y = MC_B(X)$ para un espacio topológico X.
$\Psi_Y : Y \to MC_B Y$ es un homeomorfismo que determina las componentes de un isomorfismo natural $I_{\mathcal{SC}} \cong MC_B$.
Sea B un objeto en $\mathcal{GN}$, entonces $B = C_B M(\mathcal{A})$, con $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Dado que $\Gamma_B : B \to C_B M(B)$ es un isomorfismo, este determina las componentes de una transformación natural $\Gamma : I_{\mathcal{GN}} \cong C_B M$.

De lo anterior, $\mathcal{SC}$ y $\mathcal{GN}$ son categorías equivalentes.

Notación.

Por la definición en el ejemplo 2.1.5, los objetos que son espacios de Hausdorff compactos, junto con los morfismos que son funciones continuas entre espacios de Hausdorff compactos forman la categoría $\mathcal{H}$.

Teorema 4.2.11. *Existe una equivalencia entre las categorías $\mathcal{H}$ y $\mathcal{SC}$.*

Prueba.

Consideremos el funtor inclusión $F : \mathcal{SC} \to \mathcal{H}$, es decir, si se considera $Y = MC_B(X) \in \mathcal{SC}$ entonces $F(Y)$ lleva al mismo $Y \in \mathcal{H}$, de igual forma, para un morfismo $f \in \mathcal{SC}$, $F(f)$ lleva al mismo morfismo en $\mathcal{H}$.
Entonces, para cualquier espacio de Hausdorff, la transformada de Stone-Cech nos da el isomorfismo natural $I_{\mathcal{H}} \cong FMC_B$, ya que $Y \in \mathcal{H}$, Ψ_Y es un homeomorfismo.

Además, desde nuestro argumento de idempotencia tenemos el isomorfismo natural

$$I_{\mathcal{SC}} \cong MC_B F$$

.

■

Corolario 4.2.12. *La subcategoría $\mathcal{GN}$ es equivalente a $\mathcal{H}$.*

Prueba.

De la definición en 4.2.3, sabemos que $\mathcal{GN}$ es una subcategoría de $\boldsymbol{Ban}$. Además, tenemos que $\mathcal{GN}$ y $\mathcal{SC}$ son equivalentes, $\mathcal{SC}$ y $\mathcal{H}$ también son equivalentes. Ocupando que la equivalencia de categorías es transitiva, obtenemos que $\mathcal{GN}$ y $\mathcal{H}$ son equivalentes.

4.2.13. Una equivalencia entre $\mathcal{C}st$ y $\mathcal{H}$.

Proposición 4.2.14.

Sea X, Y espacios compactos de Hausdorff, todo homomorfismo de álgebras de Banach conmutativas con unidad $f : C_B(X) \to C_B(Y)$ es un homomorfismo$-^*$.

Prueba.

Tomemos un $f : C_B(X) \to C_B(Y)$ arbitrario. Como la transformada de Gelfand es natural $C_BM(f) \circ \Gamma_{CX} = \Gamma_{CY} \circ f$ y además, $CM(f)$ preserva la adjunción, al igual que Γ_{CX} y Γ_{CY}. Entonces, para todo $z \in CX$,

$$(C_BM(f) \circ \Gamma(C_BX))(z^*) = (C_BM(f) \circ \Gamma(C_BX))(z)^*,$$

tomando la adjunción por la derecha

$$(\Gamma_{CY} \circ f)(z^*) = (\Gamma_{CY} \circ f)z^*,$$

de donde

$$\Gamma_{CY}(f(z^*)) = \Gamma_{CY}(f(z))^* = \Gamma_{CY}(f(z)^*),$$

como Γ_{CY} es un isomorfismo (ver Rafkin [4], lema 7.3), debemos tener que $f(z)^* = f(z^*)$, lo que concluye la prueba.

Nótese que los objetos en $\mathcal{C}st$ son justamente objetos en $\boldsymbol{Ban}$ y que todo morfismo en $\mathcal{C}st$ es también un morfismo en $\boldsymbol{Ban}$, de esta forma obtenemos el funtor olvidadizo:

$$Z : \mathcal{C}st \to \boldsymbol{Ban}.$$

Podemos componer Z con la transformada de Gelfand y obtenemos

$$C_BMZ : \mathcal{C}st \to \boldsymbol{\mathcal{GN}}$$

Además, todo objeto en $\boldsymbol{\mathcal{GN}}$ es un álgebra $\mathcal{C}st$ ya que todo objeto en $\boldsymbol{\mathcal{GN}}$ es de la forma $C_BM(\mathcal{A})$, con $M(\mathcal{A})$ un espacio topológico. También un morfismo $f : C_BM(\mathcal{A}) \to C_BM(\mathcal{B})$ es un homomorfismo$-^*$ (como se probó en 4.2.14). Por lo que tenemos un funtor

$$Y : \boldsymbol{\mathcal{GN}} \to \mathcal{C}st,$$

que recupera la estructura de ser álgebra $C-^*$.

En lo que sigue veremos que estos dos últimos funtores son una equivalencia de categorías.

Teorema 4.2.15.

La transformada de Gelfand $C_BMZ : \mathcal{C}st \to \boldsymbol{\mathcal{GN}}$ es una equivalencia de categorías.

Prueba.

- $C_BMZ \circ Y \cong I_{\boldsymbol{\mathcal{GN}}}$.
  Observemos que la composición $ZY : \boldsymbol{\mathcal{GN}} \to \boldsymbol{Ban}$ es el funtor inclusión de $\boldsymbol{\mathcal{GN}}$ como subcategoría de $\boldsymbol{Ban}$. De esta forma, C_BMZY es lo mismo que el funtor $C_BM : \boldsymbol{\mathcal{GN}} \to \boldsymbol{\mathcal{GN}}$, utilizando el teorema 4.2.10, sabemos que $C_BM \cong I_{\boldsymbol{\mathcal{GN}}}$.

- $Y \circ C_B M Z \cong I_{\mathcal{C}st}$.
  Observemos que Y y Z no provocan cambios a la composición de C_B con M.

  Si T es un álgebra$-C^*$ conmutativa, debemos probar que

  $$T \to Y C_B M(ZT)$$

  es un isomorfismo en $\mathcal{C}st$.

  Por el teorema de Gelfand Naimark (ver 3.2.14). $\Gamma_{ZT} : ZT \to C_B M(ZT)$ es un isomorfismo$-^*$ isométrico.

  Para todo $T \in \mathcal{C}st$, $Y(\Gamma_{ZT})$ son las componentes de un isomorfismo natural. Desde este hecho, tenemos que $Y C_B M Z \cong I_{\mathcal{C}st}$.

■

Corolario 4.2.16. *La categoría $\mathcal{C}st$ de álgebras C^* conmutativas es equivalente a la categoría H de espacios topológicos compactos de Hausdorff $\mathcal{H}$.*

Prueba.

Hemos probado que $\boldsymbol{\mathcal{GN}}$ y $\mathcal{H}$ son equivalentes, por el teorema anterior $\boldsymbol{\mathcal{GN}}$ y $\mathcal{C}st$ también son equivalentes. Por transitividad, obtenemos el resultado.

Capítulo 5

Aplicación a las álgebras $\mathcal{C}^*$

Definición 5.0.1.

Un conjunto $\mathcal{P}$ se dice **parcialmente ordenado** si existe una relación binaria $\leq$ tal que para todo $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}$ se cumple que

1. $p_1 \leq p_1$.

2. $p_1 \leq p_2$, $p_2 \leq p_3$ implica $p_1 \leq p_3$.

3. $p_1 \leq p_2$ y $p_2 \leq p_1$ implica $p_1 = p_2$.

Definición 5.0.2.

Decimos que $\mathcal{P}$ es **plano** si y sólo si, existe un elemento $a \in \mathcal{P}$ tal que para todo elemento x, y de $\mathcal{P}$, $x \leq y$ si y sólo si $x = a$ o $x = y$.

Definición 5.0.3.

Denotemos como $\boldsymbol{Poset}$, a la categoría cuyos objetos son conjuntos parcialmente ordenados y cuyos morfismos son la relación de orden.

Definición 5.0.4.

Denotemos como $\boldsymbol{Cstar}$ a la categoría cuyos objetos son álgebras C^* con unidad y sus morfismos son homomorfismos$-^*$ con unidad.

Definición 5.0.5.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra $\mathcal{C}^*$ con unidad $1_{\mathcal{A}}$. Denotamos el conjunto de sus subálgebras conmutativas C^* que contienen a $1_{\mathcal{A}}$ por $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ (recordar definición en 3.1.2).

Proposición 5.0.6.

Existe un funtor $\mathcal{C} : \boldsymbol{Cstar} \to \boldsymbol{Poset}$, definido sobre objetos que son de la forma

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \{C \in \boldsymbol{Cstar} | C \text{ es una subálgebra } C^* \text{ conmutativa de } \mathcal{A} \text{ que contiene a } 1_{\mathcal{A}}\},$$

ordenados por inclusión. La acción $\mathcal{C}(f) : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$ sobre un morfismo $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de $\boldsymbol{Cstar}$ es la imagen directa $C \mapsto f[C]$.

Prueba.

Sea $C \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$. Al restringir f a C, se tiene un homomorfismo$-^*$ cuyo codominio es B. $f[C]$ es una subálgebra $C-^*$ de B. Como $f[C]$ es una subálgebra$-^*$ de B, entonces $f[C] \in \mathcal{C}(B)$.

- $\mathcal{C}(f)$ es un morfismo ordenado.
  Dado que, $f[C] \subseteq f[D]$ si $C \subseteq D$.
- Preserva composiciones.
  Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $g : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ son homomorfismo$-^*$ entonces
  $$\mathcal{C}(g \circ f)(C) = g \circ f[C] = g[f[C]] = \mathcal{C}(g) \circ \mathcal{C}(f)$$
  .
- Preserva identidad.
  Sea $I_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ el morfismo identidad, entonces $\mathcal{C}(I_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}$.

Teorema 5.0.7.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* de dimensión finita y sea $\mathcal{B}$ cualquier álgebra C^* tal que $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{C}(\mathcal{B})$, entonces $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Teorema 5.0.8.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* de dimensión finita. Entonces, exsten $k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{A} \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C}).$$

El número k es único, miéntras que los números $n_1, \ldots, n_k$ son únicos salvo permutación.

Prueba.

(Ver [7], Teorema I.11.2).

Para probar 5.0.7 debemos tener en cuenta lo siguiente:

- Primero, debemos estudiar el Poset asociado a $\mathcal{A}$, es decir, debemos describir el conjunto $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ y su propiedad de orden. Esta descripción se corresponde con la dimensión finita de $\mathcal{A}$.
- Debemos asignar adecuadamente los números $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$, listados en el teorema anterior y según la descripción de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. De esta forma, podremos utilizar el teorema anterior para demostrar finalmente 5.0.7.

Ejemplo 5.0.9.

Describamos $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, para $\mathcal{A} = \mathbb{C}$.

Figura 5.1: Diagrama del Poset asociado a $\mathbb{C}$

Podemos pensar que el Poset asociado a $\mathbb{C}$ es $\{0, \mathbb{C}\}$, pero debemos recordar que en la definición 5.0.5, las subálgebras contienen al uno. Por tanto, el Poset asociado es $\{\mathbb{C}\}$ y tenemos el diagrama de orden según la figura 5.1.

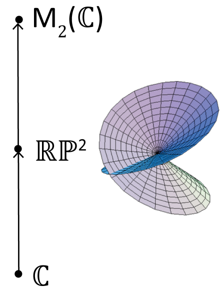

Figura 5.2: Diagrama del Poset asociado a $\mathcal{C}(\mathcal{A})$

Ejemplo 5.0.10.

Sea $\mathcal{A} = \boldsymbol{Hilb}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$, determinemos $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

$\mathcal{A}$ es el álgebra C^* de matrices complejas de 2×2.

Prueba.

Toda álgebra C^* tiene una subálgebra C^* unidimensional simple, la cuál llamamos $\mathbb{C}$, que está formada por los múltiplos escalares de la unidad.
Además, toda subálgebra C^* de dos dimensiones está generada por un par de proyecciones ortogonales de una dimensión. Esta proyección de una dimensión en $\mathcal{A}$, es de la forma

$$p(x, y, z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+x & y+iz \\ y-iz & 1-x, \end{pmatrix}$$

donde la triada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisface $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Si el lector está interesado en este resultado, puede ver el comentario en 5.0.11.

Entonces, podemos notar que las proyecciones en $\mathcal{A}$ están parametrizadas por S^2.
Como $1 - p(x, y, z) = p(-x, -y, -z)$ y los pares $(p, 1-p)$ y $(1-p, p)$ definen la misma subálgebra C^*, los dos elementos en dos dimensiones de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ están parametrizadas por $S^2/\sim$, con $(x, y, z) \sim (-x, -y - z)$. Este espacio es homeomorfo al plano real proyectivo $\mathbb{RP}^2$, es decir, el conjunto de rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen.

Entonces, al parametrizar $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \cong \{\mathbb{C}\} + \mathbb{RP}^2$. Por tanto, a un punto $(x, y, z) \in S^2/\sim$ le corresponde el álgebra C^*, $C_{(x,y,z)}$ generada por las proyecciones $\{p(x, y, z), p(-x, -y-, z)\}$. El lector puede encontrar un ejemplo particular del último comentario en la observación 5.0.12.

Podemos decir un poco más acerca de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. El orden de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ es plano, según la definición dada en 5.0.2, es decir, $C < D$ si y solo si $C = \mathbb{C}$.

De esta manera, si nos preguntamos acerca de la relación de las subálgebras de dimensión 2, podemos utilizar que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ es plano y concluir que no se pueden relacionar entre ellas, sin embargo todas pueden relacionarse con la subálgebra $\mathbb{C}$ de dimensión 1 y con toda $\mathcal{A}$. Esta relación puede observarse en la figura A.2.

Observación 5.0.11.

Las proyecciones en $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$ son de la forma

$$p(x,y,z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+x & y+iz \\ y-iz & 1-x, \end{pmatrix}.$$

Comentamos la idea de la demostración (para mayor detalle ver [5], Ejercicio 3.8).

Primero, debemos demostrar que un elemento $p \in M_2(\mathbb{C})$ es una proyección unidimensional si y solo si

$$p = \begin{pmatrix} t & w\sqrt{t(1-t)} \\ \bar{w}\sqrt{t(1-t)} & 1-t, \end{pmatrix},$$

para algún $t \in [0,1]$ y w un número complejo con módulo 1.

Nombremos como $G_{2,1}$ al conjunto formado por todas las proyecciones unidimensionales de $M_2(\mathbb{C})$. Luego, se debe parametrizar S^2 utilizando t y w descritos anteriormente. Entonces, de la definición de p obtendremos una aplicación $\phi : S^2 \to G_{2,1}$ descrita por

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+x & y+iz \\ y-iz & 1-x, \end{pmatrix}.$$

Entonces es posible mostrar que este mapa es un homeomorfismo entre estos espacios.

Observación 5.0.12. *A un punto $(x,y,z) \in S^2/\sim$ le corresponde el álgebra C^*, $C_{(x,y,z)}$ generada por las proyecciones $\{p(x,y,z), p(-x,-y-,z)\}$*

Veamos un ejemplo ilustrativo del comentario anterior, hecho en la prueba de 5.0.10.

- Consideremos el punto $(1,0,0)$.

$$p(1,0,0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$1-p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Estás dos proyecciones corresponden al eje x y el eje y respectivamente, es decir, el álgebra correspondiente es la generada por ambos ejes.

- Consideremos el punto $(0,1,0)$.

$$p(0,1,0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$1-p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Éstas dos proyecciones corresponden a las rectas $y = x$ y $y = -x$ respectivamente. Es decir, el álgebra correspondiente es la generada por ambas rectas.

Conclusiones

En ocaciones, el estudio categórico de algunos objetos del análisis funcional u otras áreas, permite describir nuevos resultados que se encuentran ocultos dentro de la teoría y permite establecer conexiones entre diferentes áreas de la matemática, a través de relaciones funtoriales que conectan objetos y aplicaciones inmersas en dos categorías disntintas.
En este trabajo se muestran las ventajas de describir objetos que se encuentran dentro del análisis funcional utilizando el lenguaje brindado por la teoría de categorías. En específico, se muestra que es posible describir objetos inmersos en la teoría de Gelfand, álgebras de Banach, álgebras C^*, el conjunto de funcionales multiplicativos, la transformada de Gelfand, entre otros. La descripción de objetos del análisis funcional en términos categóricos permite revelar resultados, que a priori, no son observables únicamente estudiando la teoría convencional. A continuación se enlistan los resultados más destacados del trabajo.

- Se puede describir el espectro de un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ o conjunto de funcionales multiplicativos ($M(\mathcal{A})$) como un funtor entre la categoría de álgebras de Banach y la categoría de espacios topológicos. Esto permite relacionar los objetos y morfismos que están dentro de las álgebras de Banach con los objetos y morfismos dentro de espacios topológicos. También es posible plantear el conjunto de funciones continuas y acotadas con imagen en $\mathbb{C}$ como un funtor, en este caso desde la categoría de espacios topológicos hacía la categoría de álgebras de Banach.

- Podemos plantear una adjunción que relaciona los dos funtores mencionados en el ítem anterior y a tráves de la cuál podemos estudiar el funtor composición de ambos, estableciendo una de las composiciones como la transformada de Gelfand y estudiando la característica de ser una transformación natural, esto permite establecer una relación de equivalencia entre las imagenes de ambos funtores.

- Podemos plantear y mostrar el teorema de Gelfand-Naimark como una equivalencia entre las categorías Cst, de álgebras C^* conmutativas con unidad, y $\mathcal{H}$, la categoría de espacios topológicos de Hausdorff y compactos.

- Podemos establecer una relación funtorial entre la categoría de álgebras C^* con unidad y la categoría de conjuntos parcialmente ordenados, analizando las subálgebras conmutativas de un álgebra cualquiera y estudiando la relación de orden entre ellas. Obtenemos entonces una herramienta muy útil para clasificar álgebras C^* desde la vista teórica de Posets.

Bibliografía

[1] Gerald B. Folland, *A course in abstract harmonic analysis*, 2 ed., Textbooks in mathematics, CRC press, Seattle, 1995.

[2] A. Ya. Helemskii, *Lectures and Exercises on Functional Analysis*, Translations of mathematical monographs, American Mathematical Society, Rhode Island, 2006.

[3] James R. Munkres, *Topología*, 2 ed., PEARSON EDUCACIÓN, Prentice Hall, Madrid, 2002.

[4] Charlie Rafkin, *Category Theory and the Gelfand-Naimark theorem*, https://www.math.dartmouth.edu/theses/undergrad/2016/Rafkin-thesis.pdf, 1999, Accedido 16-03-2020.

[5] Larsen Rordam, *An introduction to ac-theory for c^*-algebras*, London Mathematical Society Student Texts, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, Cambridge, 2000.

[6] Walter Rudin, *Functional analysis*, 2 ed., International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, Singapore, 1991.

[7] Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, Springer-Verlag, 1979.