

Universidad de El Salvador
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA



Universidad de El Salvador

Hacia la libertad por la cultura

**TEORÍA DE ÍNDICES Y ESTABILIDAD
ESTRUCTURAL DE CAMPOS
VECTORIALES**

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Matemática

PRESENTA:

Br. Rodrigo Otmaro Avalos Landaverde, AL14010

ASESOR

Dr. Dimas Noé Tejada Tejada

Ciudad universitaria,

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

MSc. ROGER ARMANDO ARIAS

VICERECTOR ACADÉMICO:

PhD. RAÚL ERNESTO AZCÚNAGA LÓPEZ

VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO:

ING. JUAN ROSA QUINTANILLA QUINTANILLA

SECRETARIO GENERAL:

MSc. FRANCISCO ANTONIO ALARCÓN SANDOVAL

FISCAL GENERAL:

LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:

LIC. MAURICIO HERNÁN LOVO CÓRDOVA

VICE-DECANO:

MSc. ZOILA GUERRERO

SECRETARIO:

LIC. JAIME SALINAS ESPINOZA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR DE ESCUELA:

Dr. DIMAS NOÉ TEJADA TEJADA

ASESOR:

Dr. DIMAS NOÉ TEJADA TEJADA

Dedicatoria

A mi mamá por su apoyo incondicional en las buenas y malas, a tío Alonso y tía Alexandra por toda la ayuda que me brindaron.

*A mis hermanos, Balmore y demás familiares que me apoyaron de una u otra manera para concluir esta meta. También le dedico este trabajo a
ELLA.*

Agradecimientos

A mi asesor, el Dr. Dimas quiero agradecerle por el tiempo dedicado, por aclarar cualquier duda que me surgiera respecto al tema, también por la claridad y exactitud que utilizó para explicar las cosas; toda la paciencia que me tuvo y sin dejar a un lado sus valiosos consejos.

Índice general

1. Preliminares	7
1.1. Resultados básicos de campos vectoriales	7
1.2. Retrato de fase de un campo vectorial	12
1.3. Campos vectoriales lineales en el plano	15
1.4. Equivalencia y conjugación topológica	26
1.5. Conjuntos α -límite y ω -límite de una órbita	32
1.6. Estructura local de puntos singulares y órbitas periódicas	39
1.7. Teorema de Poincaré-Bendixson	52
2. Teoría de índices	61
2.1. Índices de puntos singulares en plano	61
2.2. Índice de un campo vectorial	68
2.3. Fórmula del índice de Poincaré	74
3. Estabilidad estructural en \mathbb{S}^2	81
3.1. Campos vectoriales sobre la esfera	81
3.2. Estabilidad estructural en la esfera	84
3.3. Teorema de Poincaré-Hopf	91

Introducción

Los sistemas dinámicos, son una rama de la matemática que fue iniciada por Henry Poincaré a finales del siglo dieciocho e inicios del siglo diecinueve, quien con sus estudios sobre órbitas periódicas para el problema de tres cuerpos, concedió al mundo un conjunto de herramientas que hoy conocemos como teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. En este sentido, Henry Poincaré concebía a un sistema dinámico como un campo de vectores sobre el espacio de fases y una solución como una curva tangente en cada punto a los vectores de dicho campo.

En este trabajo hacemos un estudio sobre la estabilidad estructural de campos vectoriales definidos sobre el plano y la esfera, pasando por algunos resultados muy importantes como el teorema de Poincaré Bendixson, Poincaré-Hopf y campos vectoriales Morse-Smale.

En el capítulo 1, haremos una introducción a los resultados básicos de los campos vectoriales en el plano. Definiremos un campo vectorial, su respectivo retrato de fase y flujos. Además, el teorema fundamental de campos vectoriales lineales en el plano, la equivalencia y conjugación topológica, terminando con el teorema de Poincaré-Bendixson, los resultados presentados en este capítulo fueron tomados del primer capítulo de [1].

En el capítulo 2 veremos la teoría de índices, iniciaremos analizando el índice de un punto singular, luego una técnica para poder calcularlo; definiremos los sectores elípticos, parabólicos e hiperbólicos respecto a un punto singular que utilizaremos para demostrar la fórmula del índice de Poincaré , este capítulo fue estudiado en la sección 6.2 de [1].

Para terminar, en el capítulo 3 demostraremos el teorema de Poincaré-Bendixson en la esfera, definiremos los campos Morse-Smale y estudiaremos el concepto de estabilidad estructural dotando de una topología al conjunto de campos vectoriales. Finalizamos con el teorema de Poincaré-Hopf el cual establece una conexión entre la característica de Euler y el índice del campo, siendo la primera una propiedad topológica global y la segunda depende de la estructura local del campo. De esta forma, en matemática los resultados que relacionan propiedades locales con propiedades globales son importantes ya que nos permiten extraer mucha información del objeto en estudio. Estos resultados fueron estudiados en los textos, [4], [2] y [3].

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Resultados básicos de campos vectoriales

En este capítulo introduciremos algunos resultados básicos de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales asociadas a un campo vectorial; empezaremos definiendo un campo vectorial sobre un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 , las curvas solución cuya imagen llamaremos órbitas, el respectivo retrato de fase y el teorema de existencia y unicidad, haciendo un énfasis especial en los campos vectoriales en el plano.

Definición 1. Sea Δ un subconjunto abierto del plano \mathbb{R}^2 , se define el campo vectorial de clase C^r en Δ como la aplicación $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^r . Notemos que $X(x)$ representa la parte libre del vector adjunto al punto $x \in \Delta$. Donde r en C^r denota un entero positivo, $+\infty$ o ω y donde C^ω denota una función analítica.

Definición 2. Una curva solución del campo vectorial X es una aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, para la cual el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contiene a 0, satisface

$$\alpha'(t) = X(\alpha(t)), \text{ para todo } t \in I,$$

en otras palabras, el vector tangente a la curva solución en un punto es igual al campo evaluado en dicho punto.

Observemos que a cada campo vectorial le podemos asociar la ecuación diferencial $x' = X(x)$ de tal manera que una curva es solución del campo si y solo si satisface la ecuación diferencial. En la figura (1.1) se muestra la representación gráfica de un campo vectorial, la cual consiste en dibujar en cada punto $x \in \mathbb{R}^2$ su vector asociado $X(x)$ formando elementos $(x, X(x))$. Además, se muestran curvas solución de dicho campo.

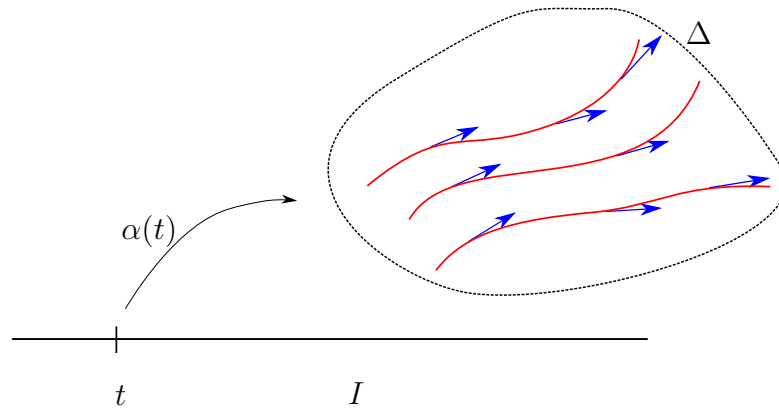


Figura 1.1: Campo vectorial

Integrar un campo vectorial es obtener una familia de curvas $\alpha(t)$, con t en un intervalo de \mathbb{R} , tal que son soluciones de la ecuación diferencial asociada

$$x' = X(x), \quad (1.1)$$

donde $x \in \Delta$ y x' denota $\frac{dx}{dt}$, las variables x y t son llamadas variables dependiente e independiente, respectivamente, de la ecuación diferencial asociada al campo vectorial. Una ecuación diferencial de la forma (1.1) es llamada ecuación diferencial autónoma, la cual siempre es posible estudiarla vista como el campo vectorial $X = (X_1, X_2)$. En el caso de una ecuación no autónoma podemos convertirla en ecuación autónoma $y' = Y(y)$ haciendo $y = (t, x)$ y $Y(y) = (1, X(y))$, la cual satisface que $(t, \alpha(t))$ es solución de $y' = Y(y)$ si y solo si $\alpha(t)$ es solución de $x' = X(x)$.

Definición 3. Un punto $x \in \Delta$ tal que $X(x) = 0$ es llamado punto singular, en caso contrario diremos que es un punto regular.

Lema 1. La curva $\alpha(t) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación $X' = X(x)$ si, y solamente, si $X(x) = 0$.

Demostración. Supongamos que $\alpha(t) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$ es solución de $X' = X(x)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= 0 \\ &= X(\alpha(t)) \\ &= X(x).\end{aligned}$$

Para demostrar el recíproco, tomamos un punto x , tal que $X(x) = 0$, entonces tenemos que,

$$\begin{aligned}0 &= X(x) \\ &= X(\alpha(t)) \\ &= \frac{d\alpha}{dt},\end{aligned}$$

es decir, $\alpha(t) = x$ es solución. \square

Definición 4. Sea $x_0 \in \Delta$ y $\alpha : I \mapsto \Delta$ una solución de (1.1) tal que $\alpha(0) = x_0$. La solución $\alpha : I \mapsto \Delta$ es llamada maximal si para cada solución $\psi : J \mapsto \Delta$ tal que $I \subset J$ y $\alpha = \psi|_I$, implica que $I = J$ y consecuentemente $\alpha = \psi$. En este caso se escribe $I = I_{x_0}$ y se llama intervalo maximal.

Sea $\alpha : I_{x_0} \mapsto \Delta$ una solución maximal, puede ser regular o constante, la imagen $\gamma_\alpha = \{\alpha(t) : t \in I_{x_0}\} \subset \Delta$ dotada de la orientación inducida por α , en el caso que α sea regular, es llamada trayectoria, órbita o curva integral asociada a la solución maximal α . Hay que recordar también que una solución definida por una curva integral, el vector tangente $\alpha'(t)$ de $\alpha(t)$ coincide con el campo vectorial X en el punto $\alpha(t)$.

Teorema 1. Sea X un campo vectorial de clase C^r donde $1 \leq r \leq +\infty$ o $\omega = r$, entonces se cumplen las siguientes condiciones:

- (I) (Existencia y unicidad de soluciones maximales) Para cada $x \in \Delta$ existe un intervalo abierto I_x en el que una solución maximal φ_x de la ecuación diferencial (1.1) es única, está bien definida y satisface la condición inicial $\varphi(0) = x$
- (II) (Propiedades de flujo) Si $y = \varphi(t, x)$ y $t \in I_x$ entonces $I_y = I_x - t = \{r - t : r \in I_x\}$ y $\varphi(s, y) = \varphi(t + s, x)$ para cada $s \in I_y$

(III) (Continuidad respecto a condiciones iniciales) Sea $\Omega = \{(t, x) : x \in \Delta, t \in I_x\}$, entonces Ω es un conjunto abierto de \mathbb{R}^3 y $\varphi : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$ dado por $\varphi(t, x)$ es una aplicación de clase C^r . Además, φ satisface

$$D_1 D_2 \varphi(t, x) = DX(\varphi(t, x)) D_2 \varphi(t, x),$$

para cada $(t, x) \in \Omega$, donde D_1 denota la derivada con respecto al tiempo, D_2 denota la derivada respecto de x y DX denota la parte lineal del campo vectorial.

Para la demostración de este teorema hacemos referencia a [5].

Teorema 2. Sea X un campo vectorial de clase C^r con $1 \leq r \leq +\infty$ o $r = \omega$ y $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Sea $x \in \Delta$ e $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$, tal que $\omega_+(x) < \infty$ (respectivamente $\omega_-(x) > -\infty$), entonces $\varphi(t, x)$ tiende a $\partial\Delta$ (la frontera de Δ) cuando $t \mapsto \omega_+(x)$ (respectivamente $t \mapsto \omega_-(x)$), esto es, para todo compacto $K \subset \Delta$, existe $\epsilon = \epsilon(x) > 0$, tal que si $t \in [\omega_+(x) - \epsilon, \omega_+(x))$ (respectivamente $t \in (\omega_-(x), \omega_-(x) + \epsilon]$), entonces $\varphi(t, x) \notin K$.

Demostración. Supongamos que existe un conjunto compacto $K \subset \Delta$ y una sucesión $t_n \mapsto \omega_+(x)$ tal que $\varphi(t_n, x) \in K$, para todo n , tomando de ser necesario una subsucesión de $\{t_n\}$ se puede suponer que $\varphi(t_n, x)$ converge a $x_0 \in K$ como se muestra en la figura (2).

Sea $b > 0$ y $\alpha > 0$ tal que $B_b \times I_\alpha \subset \Omega$, donde

$$B_b = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y - x_0| \leq b\} \subset \Delta, \text{ y también, } I_\alpha = \{t \in \mathbb{R} : |t| < \alpha\},$$

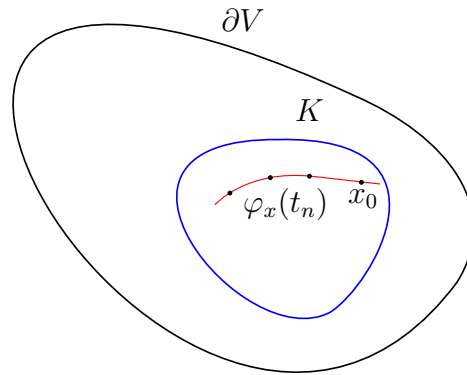


Figura 1.2: Sucesión que converge al punto x_0

por (III) del teorema 1, Ω es un conjunto abierto, luego por (II), $\varphi(t_n + s, x)$ está definida para $s < \alpha$ y coincide con $\varphi(s, y)$ cuando $n \mapsto \infty$, donde $y = \varphi(t_n, x)$, pero $t_n + s > \omega_+(x)$, lo cual es una contradicción ya que $(t_n + s) \notin I_x$. \square

Definición 5. Sea $\varphi(t, x)$ una curva integral del campo vectorial X , se dice que es periódica si existe $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tal que $\varphi(t + c, x) = \varphi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposición 1. Sea $\varphi(t, x)$ una solución de X definida en el intervalo maximal I_x , si $\varphi(t_1, x) = \varphi(t_2, y)$, para $t_1 \neq t_2$ y $t_1, t_2 \in I_x$, entonces $I_x = \mathbb{R}$ y

$$\varphi(t + c, x) = \varphi(t, x), \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

donde $c = t_2 - t_1$. Además, φ es una solución periódica de período c .

Demostración. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \psi : [t_2, t_2 + c] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \psi(t) &\longmapsto \varphi(t - c, x), \end{aligned}$$

la cual cumple que

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \varphi'(t - c, x) \\ &= X(\varphi(t - c, x)) \\ &= X(\psi(t)), \end{aligned}$$

y al evaluar en t_2 obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \psi(t_2) &= \varphi_x(t_2 - t_2 + t_1) \\ &= \varphi_x(t_1) \\ &= \varphi_x(t_2). \end{aligned}$$

Por la unicidad de soluciones, se tiene que $[t_2, t_2 + c] \subset I$ y $\varphi(t, x) = \varphi(t + c, x)$ si $t \in [t_2, t_2 + c]$, siguiendo este mismo argumento $I = \mathbb{R}$ y $\varphi(t + c, x) = \varphi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. \square

1.2. Retrato de fase de un campo vectorial

Un retrato de fase es una herramienta valiosa en el estudio de los campos vectoriales en el plano, ya que la configuración de las curvas solución u órbitas en el espacio de fase nos proporciona información sobre la existencia de puntos atractores, repulsores, también de conjuntos y ciclos límites, los cuales definiremos más adelante.

Definición 6. El conjunto $\gamma_p = \{\varphi(t, p) : t \in I_x\}$, es decir, la imagen de una curva integral del campo vectorial X que pasa por un punto p , se llama órbita de X a través del punto p , como se muestra en la figura (1.3).

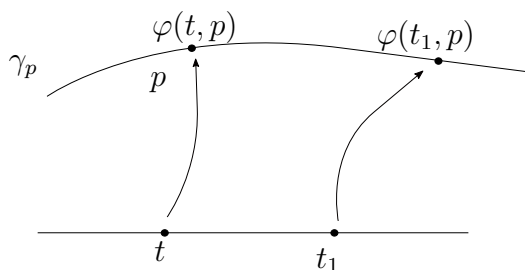


Figura 1.3: Órbita a través de un punto p

Definición 7. Un retrato de fase es una representación geométrica de todas las trayectorias u órbitas de un campo vectorial en el plano. Cada curva representa una condición inicial diferente.

Observamos que $q \in \gamma_p$ si y solo si $\gamma_q = \gamma_p$, de hecho, si en este sentido existe $t_1 \in I_p$ tal que $q = \varphi(t_1, p)$ en tal caso

$$\varphi(t, q) = \varphi(t + t_1, p),$$

donde el intervalo maximal para $\varphi(t, q)$ es $I_p - t_1 = I_q$, en otras palabras, dos órbitas de X coinciden o son disjuntas, esto es, Δ está compuesto por una unión disjunta de curvas diferenciables. El siguiente teorema establece que las órbitas de un campo vectorial X son rectas, puntos o curvas cerradas periódicas.

Teorema 3. Si φ es una solución maximal de un sistema diferencial como en (1.1) de clase C^r , entonces se cumple una de las siguientes condiciones:

- a) φ está en biyección con su imagen
- b) $I = \mathbb{R}$, φ es una función constante y γ_p es un punto
- c) $I = \mathbb{R}$ y φ es una función periódica de período mínimo τ .

Demostración. Para demostrar el literal (a) supongamos que φ no es biyectiva, entonces podemos decir que $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$, luego, por la proposición 1, se tiene que el intervalo maximal $I = \mathbb{R}$ y

$$\varphi(t + c, x) = \varphi(t, x), \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

donde $c = t_2 - t_1 \neq 0$, ahora definimos al conjunto de todos los puntos en \mathbb{R} que cumplen esta condición, es decir,

$$C = \{c \in \mathbb{R} : \varphi_x(t + c) = \varphi_x(t, x), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

Si tomamos una sucesión arbitraria c_n de elementos en C , tal que $c_n \mapsto c$, por la continuidad de φ , tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_x(t + c) &= \varphi_x\left(t + \lim_{n \rightarrow \infty} c_n\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_x(t + c_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_x(t), \quad \text{ya que } c_n \in C, \text{ para todo } n \\ &= \varphi_x(t), \end{aligned}$$

entonces $c \in C$, por lo tanto C es cerrado. Además, C es un subgrupo aditivo de \mathbb{R} , ya que si $c, d \in C$, se sigue que

$$\begin{aligned} \varphi_x(t + c + d) &= \varphi_x(t + c) \\ &= \varphi_x(t), \end{aligned}$$

por lo que $(c + d) \in C$, por otro lado

$$\begin{aligned} \varphi_x(t - c) &= \varphi_x(t - c + c) \\ &= \varphi_x(t), \end{aligned}$$

es decir, que $-c \in C$. Así, C es un subgrupo aditivo de \mathbb{R} . Si $C = \{0\}$, tendremos que C es discreto. En caso contrario, existe un elemento no nulo $c \in C$, de esta manera, $C \cap \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$. Supongamos que $\tau = \inf\{C \cap \mathbb{R}^+\}$, si $\tau > 0$ entonces $C = \{\dots, -2\tau, -\tau, 0, \tau, 2\tau, \dots\} = \tau\mathbb{Z}$. En efecto, supongamos que $\exists c \in C - \tau\mathbb{Z}$, en consecuencia c estará entre dos puntos de C , digamos $n\tau$ y $(n+1)\tau$, es decir,

$$n\tau < c < (n+1)\tau,$$

restando $n\tau$ en la doble desigualdad tenemos que

$$0 < c - n\tau < \tau,$$

luego como $c, n\tau \in C$, se tiene que $c - n\tau \in C$ y como $c - n\tau > 0$ se sigue que $c - n\tau \in C \cap \mathbb{R}^+$, lo cual es una contradicción ya que $\tau = \inf\{C \cap \mathbb{R}^+\}$. Si $\tau = 0$, demostraremos que C es denso en \mathbb{R} . Ya que si tomamos $\epsilon > 0$ y $t \in \mathbb{R}$, existe $c \in C$ tal que $|c - t| < \epsilon$, para mostrar esto, tomamos un elemento $c_0 \in C \cap \mathbb{R}^+$ tal que $0 < c_0 < \epsilon$, entonces la distancia de cualquier número real t a un punto de $c_0\mathbb{Z} \subset C$ es menor que ϵ , porque este conjunto divide a la recta real en intervalos de longitud $c_0 < \epsilon$ entre los puntos en $c_0\mathbb{Z}$, en otras palabras cualquier número real puede ser aproximado por elementos de C , por lo tanto C es denso en \mathbb{R} .

Si C es denso y cerrado en \mathbb{R} , tenemos que $C = \mathbb{R}$ y $\varphi(t, x)$ es un punto, para todo $t \in \mathbb{R}$, con lo que se prueba el literal (b). Por otro lado, si $C = \tau\mathbb{Z}$, tenemos que $\varphi(t, x)$ es una función periódica de período τ , con lo que se prueba el literal (c).

□

Ejemplo 1. A continuación se describirá el retrato de fase de un campo vectorial $X = (P, Q)$ sobre \mathbb{R}^2 , donde $P(x, y) = P(x)$ tiene un número finito de ceros y $Q(x, y) = y$ (Ver figura 1.4). Sean $a_1 < \dots < a_n$ los ceros de $P(x)$ y supongamos que $a_0 = -\infty$ y $a_{n+1} = \infty$.

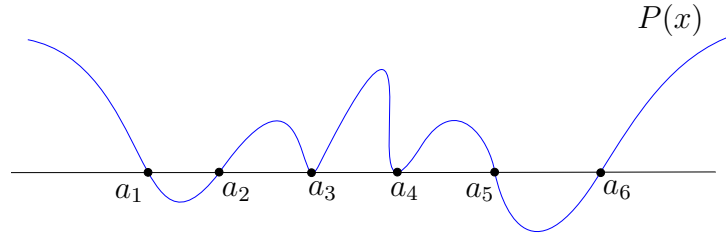


Figura 1.4: Gráfico de $P(x, y) = P(x)$

Dado que $P(a_i, y) = 0$, para todo a_i , $i = 1, \dots, n$ y $Q(x, y) = y$, entonces en las rectas $x = a_i$, el flujo crece en el semiplano superior y decrece en el semiplano inferior. Al analizar la recta $y = 0$, tenemos que tener en cuenta el gráfico de P , haciendo especial énfasis al signo que tiene en cada intervalo (a_i, a_{i+1}) . Por lo que el retrato de fase se muestra en la figura (1.5).

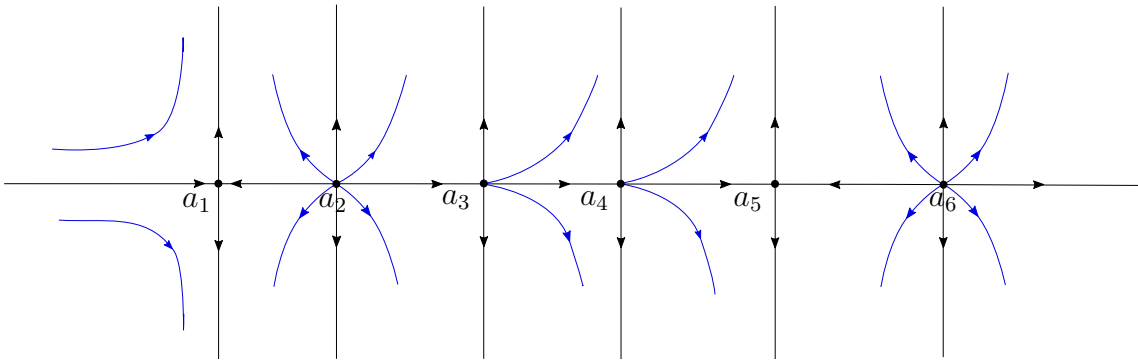


Figura 1.5: Retrato de fase del campo $X = (P, Q)$

1.3. Campos vectoriales lineales en el plano

En esta sección abordaremos algunos resultados como el teorema fundamental de los campos vectoriales lineales en el plano, la clasificación para los

puntos singulares y algunos ejemplos. Antes de iniciar, necesitamos algunos conceptos previos para entender dichos campos de manera correcta.

La exponencial de un operador

Definición 8. *Un operador lineal T es un operador tal que*

1. *El dominio $\mathfrak{D}(T)$ de T es un espacio vectorial y el rango $\mathfrak{R}(T)$ se encuentra en un espacio vectorial sobre el mismo campo*
2. *Para todos $x, y \in \mathfrak{D}(T)$ y para todo escalar α , se tiene*
 - $T(x + y) = Tx + Ty$
 - $T(\alpha x) = \alpha Tx$.

Denotamos por $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$ al conjunto que consta de todos los operadores lineales de \mathbb{R}^2 , es decir,

$$\mathfrak{L}(\mathbb{R}^2) := \{T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid T \text{ es un operador lineal}\}.$$

Definición 9. *Dado un operador lineal $T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$, definimos la norma operador como*

$$\|T\| = \max_{|x| \leq 1} |Tx|,$$

donde $|x| = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la norma euclídeana en \mathbb{R}^2 .

Proposición 2. *$\|\cdot\|$ es una norma en $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$, esto es, si $S, T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$, entonces*

- $\|T\| \geq 0$
- $\|T\| = 0 \iff T = 0$
- $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$
- $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

Demostración. Para el primer literal, por definición nuestra norma es definida positiva, también tenemos que $\|0\| = 0$.

Para el segundo, vemos que

$$\begin{aligned} \|T\| &= 0 \\ \iff \|Tx\| &= 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2 \\ \iff Tx &= 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2 \\ \iff T &= 0. \end{aligned}$$

Para el tercero, tomamos a $x \in \mathbb{R}^2$ y aplicamos propiedades del máximo, es decir,

$$\begin{aligned} \|\alpha T\| &= \max_{|x| \leq 1} \|\alpha Tx\| \\ &= \max_{|x| \leq 1} |\alpha| \|Tx\| \\ &= |\alpha| \max_{|x| \leq 1} \|Tx\| \\ &= |\alpha| \|T\|. \end{aligned}$$

Por último, sean $S, T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$ y $x \in \mathbb{R}^2$, utilizando la linealidad de los operadores, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|S + T\| &= \max_{|x| \leq 1} \|(S + T)x\| \\ &= \max_{|x| \leq 1} \|Sx + Tx\| \\ &\leq \max_{|x| \leq 1} \|Sx\| + \max_{|x| \leq 1} \|Tx\| \\ &= \|S\| + \|T\|. \end{aligned}$$

□

Lema 2. Si $S, T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$ y $x \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\text{I) } \|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$$

$$\text{II) } \|ST\| \leq \|S\| \|T\|$$

III) $\|T^n\| \leq \|T\|^n$.

Demostración. (I) Sea $x \neq 0$ y definimos a $a = x \cdot \frac{1}{|x|}$, de donde se sigue

$$\begin{aligned} \|Ta\| &= \frac{\|Tx\|}{|x|} \leq \|T\| \\ \Rightarrow \|Tx\| &\leq \|T\| |x|. \end{aligned}$$

(II) Para este caso tomamos a $|x| \leq 1$, para poder utilizar la norma como la hemos definido, en el caso que $|x| > 1$, tomamos a $y = \frac{x}{c}$, donde $c > |x|$, luego

$$\begin{aligned} \|STx\| &\leq \|S\| \|Tx\| \\ &\leq \|S\| \|T\| |x|. \end{aligned}$$

(III) Utilizando el literal anterior y tomando $S = T$, obtenemos tenemos que

$$\|T^2\| = \|TT\| \leq \|T\| \|T\| = \|T\|^2,$$

luego por inducción se demuestra el resultado. □

Teorema 4. *Dado un operador lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ y $t_0 > 0$, la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n t^n}{n!}$$

converge absoluta y uniformemente en el dominio $|t| \leq t_0$.

Demostración. Tomando a $c = \|T\|$ y por el lema anterior, se sigue que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T^n t^n}{n!} \right\| &\leq \frac{\|T\|^n |t|^n}{n!} \\ &\leq \frac{c^n t_0^n}{n!}, \text{ para } |t| \leq t_0. \end{aligned}$$

Luego, por la serie de Taylor sabemos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n t_0^n}{n!} = e^{ct_0},$$

converge en \mathbb{R} , de ahí que para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > n_0$, se cumple la desigualdad

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{T^n t^n}{n!} \right\| &\leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left\| \frac{T^n t^n}{n!} \right\| \\ &\leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{c^n t_0^n}{n!} < \epsilon, \end{aligned}$$

entonces la serie converge absoluta y uniformemente en $|t| < t_0$. □

Definición 10. La exponencial de un operador lineal $T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$ se define como la serie

$$e^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}.$$

Si A es la matriz asociada a T , definimos a

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Obsevación: $e^T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un operador lineal en $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$.

Proposición 3. Se verifica que

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{tA} e^{hA} - e^{tA}}{h} \\ &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - I}{h} \\ &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A + \frac{hA^2}{2} + \cdots + \frac{h^{n-1} A^n}{n!} \right) \\ &= e^{tA} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + \frac{hA^2}{2} + \cdots + \frac{h^{n-1} A^n}{n!} \right) \\ &= A e^{tA}. \end{aligned}$$

□

Nota 1. El intercambio de límite en la demostración de la proposición anterior, ocurre por la convergencia uniforme. Así esta propiedad, sabemos que es válida para en los reales.

Teorema 5. [Teorema fundamental de los campos lineales en el plano] *El campo lineal*

$$X(x) = Ax,$$

tiene una única solución dada por la trayectoria

$$\varphi(t, x_0) = e^{At}x_0,$$

con $x_0 \in \mathbb{R}^2$ y satisface $\varphi(0, x_0) = x_0$.

Demostración. Si $\varphi(t, x_0) = e^{tA}x_0$, entonces

$$\varphi'(t, x_0) = Ae^{tA}x_0 = A\varphi(t, x_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

y también

$$\varphi(0, x_0) = Ix_0 = x_0,$$

de modo que $\varphi(t, x_0) = e^{tA}x_0$ es solución del sistema.

Para demostrar la unicidad supongamos que $\sigma(t, x_0)$ es otra solución del campo vectorial, es decir,

$$\sigma'(t, x_0) = A\sigma(t, x_0),$$

que satisface

$$\sigma(0, x_0) = x_0.$$

Definimos a $\gamma(t) = e^{-tA}\sigma(t, x_0)$, al derivar respecto a la variable t , obtenemos

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= -Ae^{-tA}\sigma_{x_0}(t) + e^{-tA}\sigma'_{x_0}(t) \\ &= -Ae^{-tA}\sigma_{x_0}(t) + e^{-tA}A\sigma_{x_0}(t) \\ &= 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Como $\gamma'(t) = 0$, $\gamma(t)$ es constante y al evaluar en $t = 0$ se tiene que

$$\gamma(0) = x_0,$$

por lo tanto $\sigma(t, x_0) = e^{tA}x_0$, así toda solución del sistema lineal es de la forma

$$\varphi(t, x_0) = e^{tA}x_0.$$

□

Nota 2. La solución única demostrada en el teorema 5 es de la misma forma que en la ecuación 1.1.

Clasificación de campos vectoriales lineales planos

Consideremos el sistema lineal

$$x' = Ax,$$

donde A es una matriz de 2×2 con $\det(A) \neq 0$, esta condición es equivalente a que el origen es el único punto singular del campo, es decir, punto fijo del flujo lineal

$$\varphi(t, x) = e^{tA}x.$$

El polinomio característico de A que viene dado por

$$\lambda^2 - (\text{tr} A)\lambda + \det(A),$$

el cual, toma valores propios

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{(\text{tr} A)^2 - 4\det(A)}}{2}.$$

a) Si la matriz A es conjugada a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

las soluciones están dadas por

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

Si los valores propios λ_1, λ_2 de A son reales y distintos, necesariamente $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, tenemos los siguientes casos:

- Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, el origen es una singularidad llamada nodo estable como se muestra en la figura (1.6).

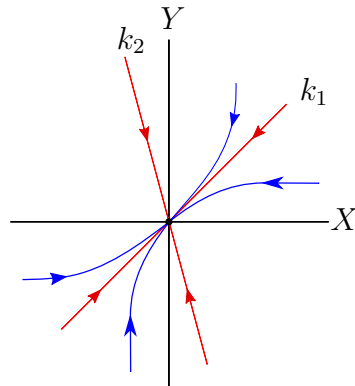


Figura 1.6: Nodo estable

- Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, el origen es una singularidad llamada nodo inestable, ver figura (1.7).

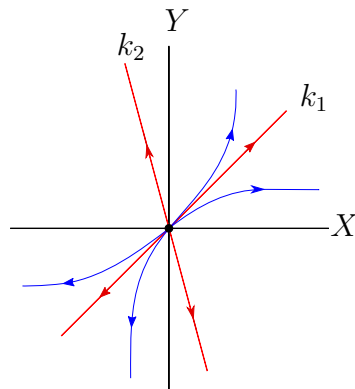


Figura 1.7: Nodo inestable

- Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, el origen es una singularidad de tipo silla, ver figura (1.8).

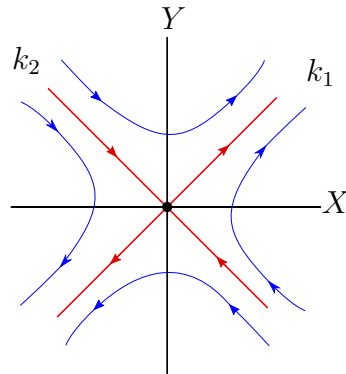


Figura 1.8: Punto silla

b) Si la matriz A es conjugada a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

las soluciones estan dadas por

$$x(t) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} x_0.$$

Dado que los valores propios son complejos conjugados, tenemos los siguientes casos:

- Si $\alpha = 0$, el origen es una singularidad llamada centro, como se muestra en la figura (1.9).

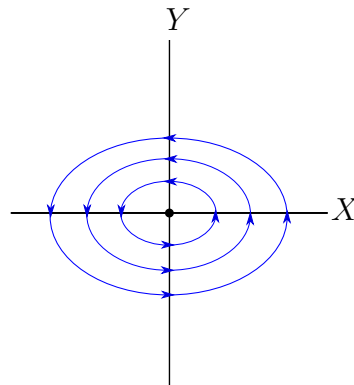


Figura 1.9: Centro

- Si $\alpha < 0$, el origen es un punto singular llamado foco estable, ver figura (1.10).

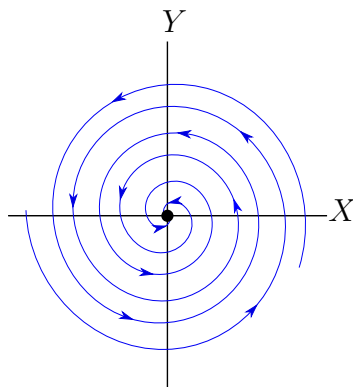


Figura 1.10: Foco estable

- Si $\alpha > 0$, el origen es un punto singular llamado foco inestable, como se muestra en la figura (1.11).

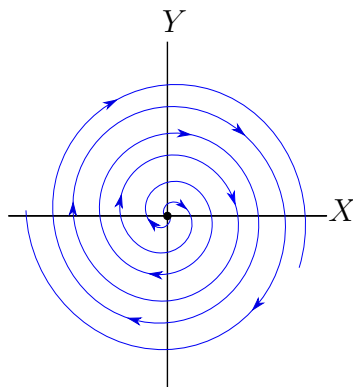


Figura 1.11: Foco inestable.

- c) Si la matriz A es conjugada a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

y los valores propios son valores reales e iguales $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, las soluciones estan dadas por

$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_0.$$

- Si $\lambda < 0$, el origen es una singularidad llamada nodo degenerado estable, ver figura (1.12).

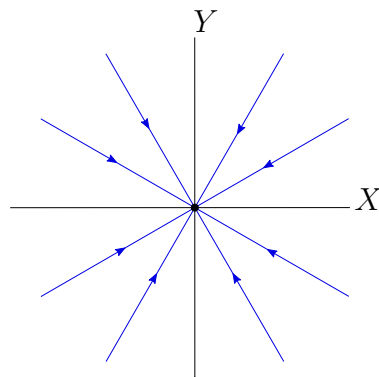


Figura 1.12: Nodo degenerado estable

- Si $\lambda > 0$, el origen es un punto singular llamado nodo degenerado inestable, ver figura (1.13).

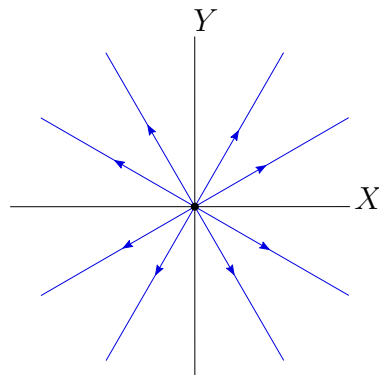


Figura 1.13: Nodo degenerado inestable

Ejemplo 2. Dado el campo $X(x) = Ax$, donde la matriz A esta dada por

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 15 & -19 \end{pmatrix},$$

realizar el retrato de fase del campo vectorial X .

Los valores propios de la matriz A son -4 , y -25 , entonces el origen $(0, 0)$ es un nodo estable. Los vectores propios son

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

de modo que la figura (1.14) muestra el retrato de fase del campo $X(x)$.

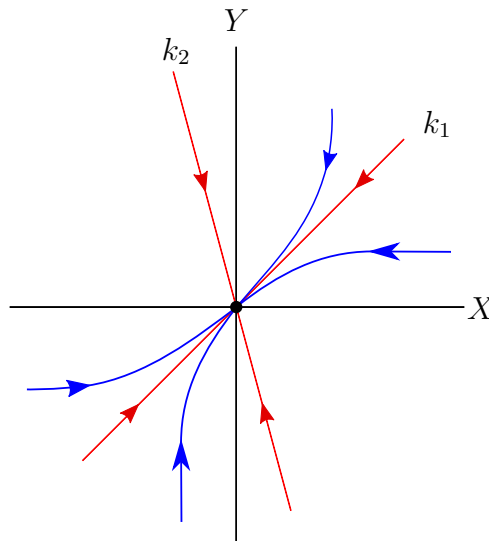


Figura 1.14: Retrato de fase del campo $X(x)$

1.4. Equivalencia y conjugación topológica

En el último capítulo de este trabajo abordaremos la estabilidad estructural de campos vectoriales, para la cual necesitamos definir la equivalencia y conjugación topológica. En esta sección, veremos que si dos campos vectoriales son equivalentes o conjugados, tendrán el mismo comportamiento

topológicamente hablando. Además, veremos algunos ejemplos y la diferencia de estos dos conceptos.

Definición 11. Sean X_1 y X_2 dos campos vectoriales definidos en los subconjuntos abiertos Δ_1 y Δ_2 de \mathbb{R}^2 , respectivamente. Se dice que X_1 es topológicamente equivalente a X_2 cuando existe un homeomorfismo $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$, el cual envía órbitas de X_1 en órbitas de X_2 , preservando su orientación.

Más precisamente, sea $p \in \Delta_1$ y γ_p la órbita orientada de X_1 que pasa por p , entonces $h(\gamma_p) = \varphi_{h(p)}$ es una órbita orientada de X_2 que pasa a través de $h(p)$, es decir, que h preserve la orientación significa que para $p \in \Delta_1$ y $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $0 < t < \epsilon$,

$$\gamma(t, p) = \varphi(t', h(p)), \quad \text{para algún } 0 < t' < \delta,$$

como se muestra en la figura (1.15).

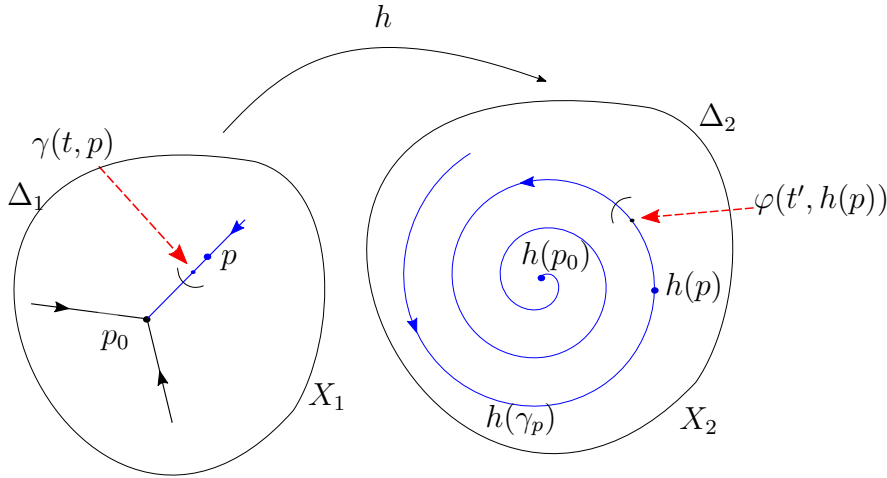


Figura 1.15: Equivalencia topológica

Definición 12. Sean $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ flujos generados por los campos vectoriales $X_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $X_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, respectivamente. Decimos que X_1 es topológicamente conjugado a X_2 cuando existe un homeomorfismo $h : U_1 \rightarrow U_2$, tal que

$$h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x)), \quad \text{para cada } (t, x) \in \Omega_1.$$

En una conjugación topológica, es necesario que los intervalos I_x para φ_1 y $I_{h(x)}$ para φ_2 sean iguales. La diferencia entre conjugación y equivalencia topológica, es que dados dos campos X_1 y X_2 , si son equivalentes topológicamente significa que el flujo en ambos campos pueden moverse con diferente velocidad, mientras que si son conjugados topológicamente los flujos en ambos campos se mueven a la misma velocidad. Así, todo par de campos equivalentes son conjugados.

Ejemplo 3. Sean

$$X(x, y) = (x, -y) \quad \text{y} \quad Y(x, y) = (x, -y + x^3)$$

dos campos vectoriales con los flujos

$$\begin{aligned} \varphi_1(t, (a, b)) &= (ae^t, be^{-t}), \\ \varphi_2(t, (a, b)) &= \left(ae^t, \left(b - \frac{a^3}{4} \right) e^{-t} + \frac{a^3 e^{3t}}{4} \right), \end{aligned}$$

de X y Y , respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ h(x, y) &\mapsto \left(x, y + \frac{x^3}{4} \right) \end{aligned}$$

es una conjugación entre X y Y . En efecto,

$$h(\varphi_1(t, x)) = (\varphi_2(t, h(x)))$$

ya que, al evaluar la parte izquierda de la ecuación anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} h(\varphi_1(t, x)) &= h(\varphi_1(t, (a, b))) \\ &= h(ae^t, be^{-t}) \\ &= \left(ae^t, be^{-t} + \frac{a^3 e^{3t}}{4} \right), \end{aligned}$$

y al evaluando el lado derecho, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_2(t, h(x)) &= \varphi_2(t, (a, b + \frac{a^3}{4})) \\ &= \left(ae^t, \left(b + \frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{4} \right) e^{-t} + \frac{a^3 e^{3t}}{4} \right) \\ &= \left(ae^t, be^{-t} + \frac{a^3 e^{3t}}{4} \right). \end{aligned}$$

En la figura (1.16), vemos los retratos de fase y lo que la conjugación h realiza a las órbitas de los campos X y Y .

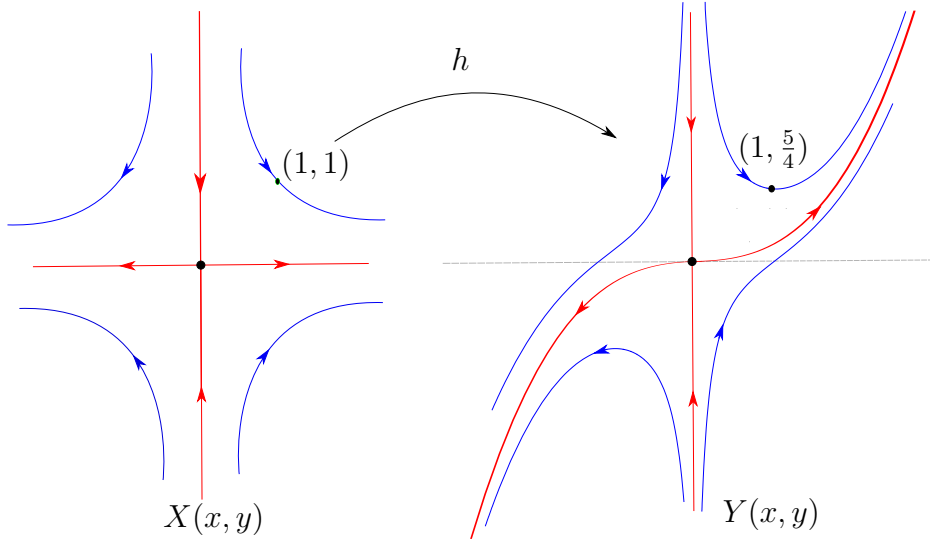


Figura 1.16: Conjugación topológica entre los campos X y Y

Lema 3. Sean $X_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $X_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos campos vectoriales de clase C^r , y $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ un difeomorfismo de clase C^r , entonces h es una conjugación entre X_1 y X_2 si y solamente si

$$Dh_p X_1(p) = X_2(h(p)), \text{ para todo } p \in \Delta_1. \quad (1.2)$$

Demostración. Supongamos que

$$\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Delta_1$$

$$\gamma : \Omega_2 \rightarrow \Delta_2,$$

son flujos de X_1 y X_2 , respectivamente. Si $p \in \Delta_1$, entonces

$$h(\varphi(t, p)) = \gamma(t, h(p)), \quad t \in I_1(p) = I_2(h(p)).$$

Derivando esta relación y evaluando en $t = 0$ tenemos

$$D(h\varphi(t, p)) = D\gamma(t, h(p))$$

$$Dh_p(X_1(p)) = X_2(h(p)).$$

Para el recíproco, supongamos que h satisface la relación

$$Dh_p X_1(p) = X_2(h(p)), \text{ para todo } p \in \Delta_1.$$

Dado $p_0 \in \Delta_1$, definimos a

$$\psi(t) = h(\varphi(t, p_0)), \quad t \in I_1(p),$$

si derivamos a ψ respecto a t , obtenemos que

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= Dh(\varphi(t, p_0)) \frac{d}{dt} \varphi(t, p_0) \\ &= Dh(\varphi(t, p_0)) X_1(\varphi_1(t, p_0)) \\ &= X_2(h(\varphi(t, p_0))) \\ &= \gamma(\psi(t)). \end{aligned}$$

□

Definición 13. Sea $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^r , $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ y $A \subset \mathbb{R}$ conjuntos abiertos, una aplicación $f : A \rightarrow \Delta$ es llamada **sección transversal local** de X , si para todo punto $a \in A$, $f'(a)$ y $X(f(a))$ son linealmente independientes. Se define a $\Sigma = f(A)$ con la topología inducida en \mathbb{R}^2 y $f : A \rightarrow \Sigma$ es un homeomorfismo, decimos que Σ es una sección transversal de X .

Teorema 6. Teorema del flujo tubular

Sea $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^r , $r \geq 1$, p un punto regular del campo y

$$f : A \rightarrow \Sigma,$$

una sección transversal de X de clase C^r con $f(0) = p$, entonces existe una vecindad V de p en Δ y un difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$ de clase C^r con $\epsilon > 0$ y B es un intervalo abierto centrado en el origen tales que

- $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$
- h es una conjugación de clase C^r entre $X|_V$ y el campo vectorial constante $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $Y = (1, 0)$.

Demostración. Sea $\varphi : \Omega \rightarrow \Delta$ el flujo asociado a X y definamos

$$\Omega_A = \{(t, u) : (t, f(u)) \in \Omega\},$$

y

$$\begin{aligned} F &: \Omega_A \rightarrow \Delta \\ F(t, u) &\mapsto \varphi(t, f(u)). \end{aligned}$$

Probaremos que F es un difeomorfismo local, para ello, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(0, 0) &= \frac{d}{dt} \varphi(t, f(0))_{t=0} \\ &= X(\varphi(0, p)) \\ &= X(p). \end{aligned}$$

Luego como

$$\begin{aligned} F(0, u) &= \varphi(0, f(u)) \\ &= \varphi(u), \quad \text{para todo } u \in A \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} F(0, 0) &= f'(0). \end{aligned}$$

Aplicando la definición de sección transversal, la cual nos asegura que

$$X(p) = \frac{\partial}{\partial t} F(0, 0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial u} F(0, 0) = f'(0)$$

son linealmente independientes y por lo tanto generan a \mathbb{R}^2 , es decir, $DF(0, 0)$ es un isomorfismo.

Por el teorema de la función inversa existe $\epsilon > 0$ y una vecindad $B \subset \mathbb{R}$ abierta alrededor de 0 tal que

$$F|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B} : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow V,$$

es un difeomorfismo. Definamos a

$$h : V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B,$$

como la función inversa de $F|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B}$ y dado que $F(0, u) = f(u) \in \Sigma$, tenemos que $h(V \cap \Sigma) = \{0\} \times B$. Demostremos que h^{-1} es una conjugación entre X

y Y , lo cual es cierto ya que

$$\begin{aligned}
 Dh^{-1}(t, u) \cdot Y(t, u) &= DF(t, u) \cdot (1, 0) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} F(t, u) \\
 &= \frac{d}{dt} \varphi(t, f(u)) \\
 &= X(t, f(u)) \\
 &= X(h^{-1}(t, u)), \quad \text{para todo } (t, u) \in (-\epsilon, \epsilon) \times B.
 \end{aligned}$$

□

Corolario 1. *Sea Σ una sección transversal de X , para todo $p \in \Sigma$ existe una $\epsilon = \epsilon(p) > 0$ vecindad de V de p en \mathbb{R}^2 y una función $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^r tal que $\tau(V \cap \Sigma) = 0$ y*

- (1) *Para cada $q \in V$, la curva integral $\varphi(t, q)$ de $X|_V$ esta bien definida y es biyectiva en $J_q = (-\epsilon + \tau(q), \epsilon + \tau(q))$*
- (2) *$\xi(q) = \varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$ es el único punto donde $\varphi(\cdot, q)|_{J_q}$ interseca la sección transversal Σ . En particular $q \in \Sigma \cap V$ si y solo si $\tau(q) = 0$*
- (3) *$\xi : V \rightarrow \Sigma$ es de clase C^k y $D\xi$ es sobreyectiva para todo $q \in V$. Además, $D\xi(q) \cdot v = 0$ si y solo si $v = \alpha X(q)$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Corolario 2. *Si γ es una solución maximal de un campo vectorial X de clase C^r y γ no es una singularidad, entonces, γ es difeomorfo a \mathbb{R} o a \mathbb{S}^1 .*

1.5. Conjuntos α -límite y ω -límite de una órbita

Definición 14. *Sea Δ un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 , $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^r y $\varphi(t, p)$ una curva integral de X que pasa por el punto p , definida sobre el intervalo maximal $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$; si $\omega_+(p) = \infty$ definimos el conjunto*

$$\omega(p) = \{q \in \Delta : \exists \{t_n\} \text{ con } t_n \rightarrow \infty \text{ y } \varphi(t_n) \rightarrow q, \quad n \rightarrow \infty\}.$$

Análogamente, si $\omega_-(p) = -\infty$ definimos el conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta : \exists \{t_n\} \text{ con } t_n \rightarrow -\infty \text{ y } \varphi(t_n) \rightarrow q, \quad n \rightarrow \infty\},$$

los conjuntos $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ son llamados conjuntos ω -límite y α -límite, respectivamente. Además, estos conjuntos pueden ser vistos como el futuro y el pasado de la órbita que pasa por el punto p .

Ejemplo 4. Sea $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial dado por

$$X(x, y) = (x, -y).$$

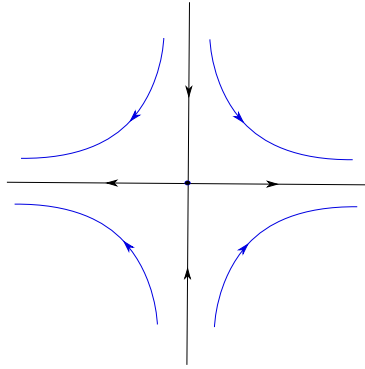


Figura 1.17: Retrato de fase del campo $X(x, y) = (x, -y)$

Los conjuntos ω -límite y α -límite son:

1. Si $p = (0, 0)$, $\alpha(p) = \omega(p) = \{(0, 0)\}$
2. Si $p \in \{(x, 0) : x \neq 0\}$, $\alpha(p) = \{(0, 0)\}$ y $\omega(p) = \emptyset$
3. Si $p \in \{(0, y) : y \neq 0\}$, $\omega(p) = \{(0, 0)\}$ y $\alpha(p) = \emptyset$
4. si $p \in \{(x, y) : xy \neq 0\}$, $\alpha(p) = \omega(p) = \emptyset$.

Así, hemos descrito el futuro y pasado de cada punto del plano.

Ejemplo 5. Sea $\varphi(t, p)$ una órbita periódica de período τ de un campo vectorial X , entonces $\omega(p) = \{\varphi(t, p) : t \in \mathbb{R}\} = \alpha(p)$. Para verificarlo

tomamos un punto q en φ , entonces existe $t' \in [0, \tau)$ tal que $\varphi(t', p) = q$. Si definimos la sucesión $t_n = t' + n\tau$ entonces $t_n \rightarrow \infty$ y

$$\begin{aligned}\varphi(t_n) &= \varphi(t' + n\tau, p) \\ &= \varphi(t') = q, \quad \text{para todo } q \in \varphi.\end{aligned}$$

Para $\alpha(p) = \varphi_p$ hacemos un argumento análogo tomando la sucesión $t_n = t' - n\tau$.

Ejemplo 6. Sea $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial definido por

$$X(x, y) = (y + x(1 - x^2 - y^2), -x + y(1 - x^2 + y^2)),$$

cuyo único punto singular es el origen y \mathbb{S}^1 la única órbita periódica, como se muestra en la figura (1.18). Entonces

1. Para todo $p \in \mathbb{R}^2$, $\omega(p) = \mathbb{S}^1$
2. Si $p \in \text{Int}(\mathbb{S}^1)$, entonces $\alpha(p) = \{(0, 0)\}$
3. Si $p \in \mathbb{S}^1$, tenemos que $\alpha(p) = \mathbb{S}^1$
4. Para cualquier punto $p \in \text{Ext}(\mathbb{S}^1)$, $\alpha(p) = \emptyset$.

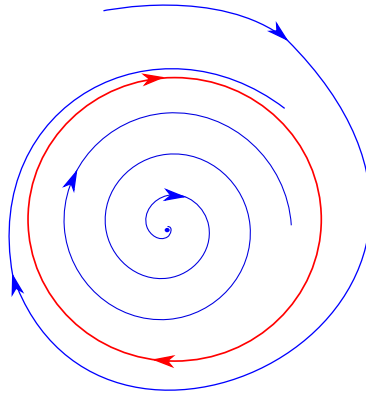


Figura 1.18:

De esta manera, hemos descrito el pasado y futuro de cualquier punto en \mathbb{R}^2 .

Observación 1. Sea γ_p la órbita de X que pasa por p y sea $q \in \gamma_p$, entonces $\omega(p) = \omega(q)$ y $\alpha(p) = \alpha(q)$, ya que $\gamma_q = \gamma_p$, es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, p) = \varphi(t + c, q)$.

Observación 2. Si $\varphi(t, p)$ es una curva integral que pasa por el punto p del campo vectorial X y sea $\psi(t, p)$ una curva integral del campo $-X$ que pasa por el punto p , entonces $\psi(t, p) = \varphi(-t, p)$. Además, el ω -límite de $\psi(t)$ es igual al α -límite de $\varphi(t)$ y el α -límite de $\psi(t)$ es igual al ω -límite de $\varphi(t)$. Así, toda propiedad del ω -límite también es cierta para el α -límite.

Teorema 7. Sea $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^r definido sobre un conjunto abierto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ y

$$\gamma^+(p) = \{\varphi(t, p) : t \geq 0\},$$

la semiórbita positiva del campo vectorial X que pasa por el punto p . Si $\gamma^+(p)$ está contenida en un subconjunto compacto $K \subset \Delta$, entonces:

- (1) $\omega(p) \neq \emptyset$
- (2) $\omega(p)$ es compacto
- (3) $\omega(p)$ es invariante en X , es decir, si $q \in \omega(p)$ entonces la curva integral que pasa a través de q está contenida en $\omega(p)$
- (4) $\omega(p)$ es conexo
- (5) Si $\omega(\gamma) \subset \gamma$ entonces $\omega(\gamma) = \gamma$ y γ es un punto singular o una órbita periódica.

Demostración. (1) $\omega(p) \neq \emptyset$.

Sea $t_n = n \in \mathbb{N}$, por hipótesis tenemos que $\{\varphi(t_n)\} \subset K$ compacto, de modo que existe una subsucesión $\{\varphi(t_{n_k})\}$ que converge a un punto $q \in K$, cuando $t_{n_k} \rightarrow \infty$ si $n_k \rightarrow \infty$. Dado que $\varphi(t_{n_k}) \rightarrow q$, entonces $q \in \omega(p)$.

(2) $\omega(p)$ es compacto.

Ya que $\omega(p) \subset \overline{\gamma^+(p)} \subset K$, se sigue que $\omega(p)$ es acotado, debido a lo cual es suficiente mostrar que es cerrado.

Sea $\{q_n\}$ una sucesión de puntos en $\omega(p)$ tal que $q_n \rightarrow q$, por lo tanto,

debemos demostrar que $q \in \omega(p)$. Dado que $q_n \in \omega(p)$, para todo n , entonces existe una sucesión $\{t_m^{(n)}\}$ tal que

$$t_m^{(n)} \rightarrow \infty, \quad \text{y} \quad \varphi(t_m^{(n)}, p) \rightarrow q_n, \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty,$$

esto por la definición de $\omega(p)$, ahora escojamos para cada sucesión un punto $t_n = t_{m(n)}^{(n)} > n$ tal que

$$d(\varphi(t_n, p), q_n) < \frac{1}{n}.$$

Usando la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} d(\varphi(t_n, p), q) &\leq d(\varphi(t_n, p), q_n) + d(q_n, q) \\ &< \frac{1}{n} + d(q_n, q), \end{aligned}$$

se sigue que $d(\varphi(t_n, p), q) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$ y como $t_n \rightarrow \infty$, $q \in \omega(p)$ por lo tanto $\omega(p)$ es cerrado y con esto compacto.

(3) $\omega(p)$ es invariante en X .

Tomamos al punto $q \in \omega(p)$ y $\psi : I(q) \rightarrow \Delta$ como la curva integral que pasa por q . Sea $q_1 = \varphi(t_0, q) = \psi(t_0)$, por tanto vamos a demostrar que $q_1 \in \omega(p)$. Dado $q \in \omega(p)$, por definición existe una sucesión $\{t_n\}$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como φ es continua, entonces

$$\begin{aligned} q_1 = \varphi(t_0, q) &= \varphi(t_0, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_0, \varphi(t_n, p)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_0 + t_n, p) \end{aligned}$$

Luego, $\{t_0 + t_n\} \rightarrow \infty$ y $\varphi(t_0 + t_n, p) \rightarrow q_1$ cuando $n \rightarrow \infty$, por esta razón $q_1 \in \omega(p)$.

(4) $\omega(p)$ es conexo.

Demostraremos esta parte por contradicción, para eso supongamos que $\omega(p)$ no es conexo, entonces existen abiertos A, B disjuntos tales que $\omega(p) = (\omega(p) \cap A) \cup (\omega(p) \cap B)$ y además $\omega(p) \cap A \neq \emptyset$, $\omega(p) \cap B \neq \emptyset$.

Tomemos dos puntos $z_1 \in \omega(p) \cap A$, $z_2 \in \omega(p) \cap B$. Por la definición del omega límite de p , y teniendo en cuenta que $z_1, z_2 \in \omega(p)$, deducimos que existen sucesiones $\{t_n\}, \{s_n\} \mapsto +\infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, p) = z_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n, p) = z_2$. Como $z_1 \in A$ y $z_2 \in B$ y los conjuntos A y B son abiertos, de la definición de límite deducimos que $\varphi(t_n, p) \in A$, $\varphi(s_n, p) \in B$ para todo n lo suficientemente grande. Entonces, sin pérdida de generalidad (posiblemente eliminando una cantidad finita de términos de las sucesiones $\{t_n\}$ y $\{s_n\}$ y reindexando después estas sucesiones), podemos asumir que

$$\varphi(t_n, p) \in A, \varphi(s_n, p) \in B, \forall n \geq 0, \lim t_n \mapsto +\infty, \lim s_n \mapsto +\infty.$$

Ahora construimos subsucesiones $\{t_h^*\}_{h \geq 0}$ y $\{s_h^*\}_{h \geq 0}$ de $\{t_n\}$ y $\{s_n\}$ respectivamente, tales que

$$t_h^* < s_h^* < t_{h+1}^* < s_{h+1}^*, \forall h \in \mathbb{N}$$

Como $\{t_h^*\}_{h \geq 0}$ y $\{s_h^*\}_{h \geq 0}$ son subsucesiones de $\{t_n\}$ y $\{s_n\}$, respectivamente, tenemos:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} t_h^* = +\infty, \lim_{h \rightarrow \infty} s_h^* = +\infty, \varphi(t_h^*, p) \in A, \varphi(s_h^*, p) \in B, \forall h \in \mathbb{N}$$

consideremos para $h \in \mathbb{N}$ fijo, la curva $\varsigma_h = \{\varphi(\tau, p)\}$, $t_h^* \leq \tau \leq s_h^*$ que es un arco conexo y compacto de la órbita que pasa por el punto p . Por construcción tenemos

$$\varphi(t_h^*, p) \in \varsigma \cap A \neq \emptyset, \varphi(s_h^*, p) \in \varsigma \cap B \neq \emptyset.$$

Siendo $\varsigma_h \subset K$ conexo, de la definición de conexidad, deducimos $\varsigma_h = (\varsigma \cap A) \cup (\varsigma \cap B)$, o equivalentemente existe un punto $p_h \in \varsigma_h \setminus (A \cup B)$, como $p_h \in \varsigma_h = \{\varphi(\tau, p)\}$, $t_h^* \leq \tau \leq s_h^*$, existe un instante $\tau_h \in [t_h^*, s_h^*]$ tal que

$$p_h = \varphi(\tau_h, p) \in K \setminus (A \cup B), t_h^* < \tau_h < s_h^*.$$

Dado que K es compacto, entonces toda sucesión en K tiene alguna subsucesión convergente. Por lo tanto, existe una subsucesión

$$p_{h_j} = \varphi(\tau_{h_j}, p) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} q, \tau_{h_j} \geq t_{h_j}^* \forall j \in \mathbb{N},$$

como $p_{h_j} \in K \setminus (A \cup B)$ y $A \cup B$ es abierto, $K \setminus (A \cup B)$ es cerrado; luego

$$q = \lim_j p_{h_j} \in K \setminus (A \cup B),$$

equivalentemente $q \notin A \cup B$. Por otra parte, como $\tau_{h_j} \geq t_{h_j}^* \mapsto +\infty$, y $p_{h_j} = \varphi(\tau_{h_j}, p) \mapsto q$, tenemos que $q \in \omega(p)$, por lo tanto $q \in \omega(p) \setminus (A \cup B)$, de donde

$$\omega(p) \neq (\omega(p) \cap A) \cup (\omega(p) \cap B),$$

lo que contradice la suposición inicial.

(5) Si $\omega(\gamma) \subset \gamma \Rightarrow \omega(\gamma) = \gamma$.

Para empezar podemos decir que γ es un punto singular o una órbita periódica y anteriormente vimos que γ es homeomorfo a \mathbb{R} o un círculo. Supongamos que γ es homeomorfo a \mathbb{R} y por hipótesis tenemos que $\omega(\gamma) \subset \gamma$ lo cual es una contradicción ya que $\omega(\gamma)$ es compacto mientras que γ no lo es. □

Nota 3. El resultado anterior y los demás que mostraremos del α y ω -límite, se pueden generalizar a la esfera \mathbb{S}^2 ya que en una vecindad lo suficientemente pequeña se puede tomar como un plano.

Ejemplo 7. Sea X un campo vectorial como se muestra en la figura (1.19), γ una órbita y $p \in \gamma$, cuya semiórbita positiva $\gamma^+(p)$ no está contenida en un conjunto compacto entonces $\omega(p)$ no es conexo, ni compacto. Con este ejemplo verificaremos la importancia de que las órbitas tienen que estar contenidas en un conjunto compacto para que las conclusiones del teorema 7 se cumplan.

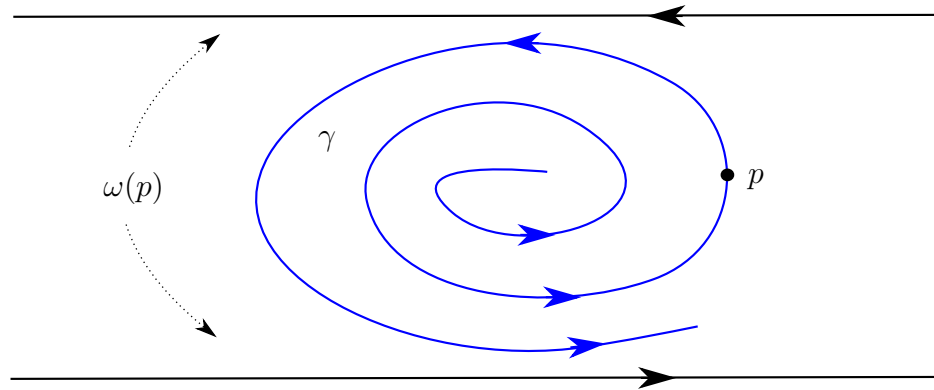


Figura 1.19:

1.6. Estructura local de puntos singulares y órbitas periódicas

Sea p un punto regular del campo vectorial X de clase C^r , $r \geq 1$, por el teorema del flujo tubular sabemos que existe un difeomorfismo de clase C^r que conjuga una vecindad V de p con el flujo constante $Y = (1, 0)$ alrededor del origen, entonces ambos campos X y Y son localmente conjugados en una vecindad de puntos regulares. Entonces nos interesa ver la estructura en una vecindad alrededor de un punto singular, digamos p de un campo vectorial $X = (P, Q)$ de clase C^r . En general, la descripción local del flujo alrededor de un punto singular p es una tarea difícil, así que utilizaremos para ello la parte lineal del campo y la propiedad de conjugación topológica..

Definición 15. Decimos que

$$DX(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{pmatrix},$$

es la parte lineal del campo vectorial X sobre un punto singular p . Además,

- (I) Un punto singular p es llamado **hiperbólico** si los 2 autovalores de $DX(p)$ tienen parte real no nula.
- (II) Un punto singular p es llamado **centro** si existe una vecindad abierta U de p , tal que las trayectorias en $U/\{p\}$ son órbitas periódicas. La singularidad es llamada **centro lineal** si los autovalores de $DX(p)$ son imaginarios puros no nulos. En este caso siguiendo que el campo vectorial X es analítico, el campo vectorial puede tener un centro o un foco en p .

Definición 16. Para estudiar el retrato de fase local de un punto singular p definimos el determinante, traza y discriminante de p como

$$\det(p) = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(p) = \frac{\partial P}{\partial x}(p) + \frac{\partial Q}{\partial y}(p)$$

$$\Delta(p) = \operatorname{tr}(p)^2 - 4 \det(p).$$

Observación 3. Si $\det(p) \neq 0$, entonces el punto singular p es no degenerado y es o bien **hiperbólico** o un **centro lineal**.

Teorema 8 (Teorema de Hartman-Grobman). *Sea Δ un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 conteniendo al origen, sea $X \in C^1(\Delta)$ y Φ_t el flujo del campo no lineal asociado a la ecuación*

$$x' = X(x), \quad (1.3)$$

supongamos que $X(0) = 0$ y que la matriz $A = DX(0)$ no tiene autovalores reales con parte real no nula.

Entonces existe un homeomorfismo H de un conjunto abierto U que contiene al origen en otro conjunto V que también contiene al origen tal que para cada $x_0 \in U$, existe un intervalo maximal $I_{x_0} \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero tal que para todo $x_0 \in U$ y $t \in I_{x_0}$

$$H \circ \Phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0).$$

Demostración. Consideremos el sistema no lineal $x' = X(x)$ donde $X \in C^1(\Delta)$, $X(0) = 0$ y $A = DX(0)$. Supongamos que la matriz A se puede escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

cumpliendo que los autovalores de P tienen parte real negativa y los autovalores de Q tienen parte real positiva; sea Φ_t el flujo del sistema no lineal (1.3) y escribimos las soluciones de la forma

$$\varphi(t, x_0) = \Phi_t(x_0) = \begin{bmatrix} y(t, y_0, z_0) \\ z(t, y_0, z_0) \end{bmatrix},$$

donde $x_0 = (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$. Definimos también la funciones

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(y_0, z_0) &= y(1, y_0, z_0) - e^P y_0, \\ \tilde{Z}(y_0, z_0) &= z(1, y_0, z_0) - e^Q z_0, \end{aligned}$$

tales que, al evaluar en $(0, 0)$ tenemos que $\tilde{Y}(0) = \tilde{Z}(0) = D\tilde{Y}(0) = D\tilde{Z}(0) = 0$. Puesto que $X \in C^1(\Delta)$ entonces las funciones $\tilde{Y}(y_0, z_0)$ y $\tilde{Z}(y_0, z_0)$ son continuamente diferenciables y

$$\|D\tilde{Y}(y_0, z_0)\| \leq a, \quad \|D\tilde{Z}(y_0, z_0)\| \leq a,$$

1.6. ESTRUCTURA LOCAL DE PUNTOS SINGULARES Y ÓRBITAS PERIÓDICAS 41

en el conjunto compacto $y_0^2 + z_0^2 \leq s_0^2$, la constante a la podemos tomar tan pequeña como queramos tomando s_0 tan pequeño como sea necesario. Sean $Y(y_0, z_0)$ y $Z(y_0, z_0)$ funciones suaves que coinciden con $\tilde{Y}(y_0, z_0)$ y $\tilde{Z}(y_0, z_0)$ en $y_0^2 + z_0^2 \leq (\frac{s_0}{2})^2$ y se anulan en $y_0^2 + z_0^2 \geq s_0^2$, por el teorema del valor medio

$$\|Y(y_0, z_0)\| \leq a\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \leq a(x_0 + y_0),$$

y también

$$\|Z(y_0, z_0)\| \leq a\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \leq a(x_0 + y_0),$$

para todo $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$. Ahora, sea $B = e^P$ y $C = e^Q$, supongamos que ya se llevó a cabo la normalización de estas matrices, por lo tanto

$$b = \|B\| < 1, \quad y, \quad c = \|C^{-1}\| < 1.$$

Luego para $x = (y, z) \in \mathbb{R}^2$ definimos

$$L(y, z) = \begin{bmatrix} By \\ Cz \end{bmatrix}$$

y

$$T(y, z) = \begin{bmatrix} By + Y(y, z) \\ Cz + Z(y, z) \end{bmatrix},$$

es decir $L(x) = e^A x$ y localmente $T(x) = \Phi_1(x)$. Ahora vamos a mostrar que existe un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$, donde U y V son conjuntos abiertos que contienen al origen, tal que $H \circ T = L \circ H$.

Para lo cual ocuparemos el método de aproximaciones sucesivas, dado $x \in \mathbb{R}^2$ y

$$H(x) = \begin{bmatrix} \Phi(y, z) \\ \Psi(y, z) \end{bmatrix}.$$

Lo que queremos demostrar, es decir que $H \circ T = L \circ H$ es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} B\Phi(y, z) &= \Psi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \\ C\Psi(y, z) &= \Psi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)). \end{aligned}$$

El método de aproximaciones sucesivas para la segunda ecuación de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\Psi_0(y, z) &= z \\ \Psi_{k+1}(y, z) &= C^{-1}\Psi_k(By, Y(y, z), Cz + Z(y, z)),\end{aligned}$$

luego por inducción para $k = 0, 1, 2, \dots$ se tiene que $\Psi_k(y, z)$ es continua y satisface $\Psi_k(y, z) = z$ cuando $|y| + |z| \geq 2s_0$. Haciendo inducción para $j = 1, 2, \dots$ obtenemos que

$$|\Psi_j(y, z) - \Psi_{j-1}(y, z)| \leq Mr^r(y + z)^\delta,$$

donde

$$r = c[2 \max(a, b, c)]^\delta,$$

$\delta \in (0, 1)$ elegido suficientemente pequeño para que $r < 1$ y $M = \frac{ac(2s_0)^{1-\delta}}{2}$.
Para $j = 1$

$$\begin{aligned}|\Psi_1(y, z) - \Psi_0(y, z)| &= |C^{-1}\Psi_0(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) - z| \\ &= |C^{-1}(Cz + Z(y, z) - z)| \\ &= |C^{-1}(y, z)| \leq \|C^{-1}\| |Z(y, z)| \\ &\leq ca(y + z) \leq Mr(y + z)\delta,\end{aligned}$$

ya que $Z(y, z) = 0$, cuando $|y| + |z| \geq 2s_0$; asumiendo que la hipótesis inductiva se cumple, tenemos para $j = 1, 2, \dots, k$

$$\begin{aligned}|\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| &= |C^{-1}\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \\ &\quad - C^{-1}\Psi_{k-1}(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z))| \\ &\leq \|C^{-1}\| |\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \\ &\quad - \Psi_{k-1}(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z))| \\ &\leq cMr^k[|By + Y(y, z)| + |Cz + Z(y, z)|]^\delta \\ &\leq cMr^k[b|y| + 2a(|y| + |z|) + c|z|]^\delta \\ &\leq cMr^k[2 \max(a, b, c)]^\delta (|y| + |z|)^\delta \\ &= Mr^{k+1}(|y| + |z|)^\delta.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Psi_k(y, z)$ es una sucesión de Cauchy de funciones continuas que converge uniformemente cuando $k \rightarrow \infty$ a una función continua $\Psi(y, z)$.

1.6. ESTRUCTURA LOCAL DE PUNTOS SINGULARES Y ÓRBITAS PERIÓDICAS 43

Además $\Psi(y, z) = z$ para $y + z \geq 2s_0$. Tomando el límite en las aproximaciones sucesivas mostramos que $\Psi(y, z)$ es solución de

$$C\Psi(y, z) = \Psi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)),$$

mientras que la ecuación

$$B\Phi(y, z) = \Psi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)),$$

se puede escribir como

$$B^{-1}\Phi(y, z) = \Phi(B^{-1}y + Y_1(y, z), C^{-1}z + Z_1(y, z)),$$

donde las funciones Y_1 y Z_1 son definidas por la inversa de T , es decir,

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1}y + Y_1(y, z) \\ C^{-1}z + Z_1(y, z) \end{bmatrix}.$$

La ecuación anterior puede resolverse para $\Phi(y, z)$ por el método de aproximaciones sucesivas exactamente como hicimos anteriormente con $\Phi_0(y, z) = y$, donde $b = \|B\| < 1$, además obtendremos la aplicación continua

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \Phi(y, z) \\ \Psi(y, z) \end{bmatrix},$$

la cual es un homeomorfismo de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 ; por último probaremos que dicho homeomorfismo es único.

Sea H_0 un homeomorfismo definido como antes y sea L^t y T^t una familia uniparamétrica de transformaciones definidas por

$$L^t(x_0) = e^{At}x_0 \quad \text{y} \quad T^t(x_0) = \Phi_t(x_0).$$

Tomamos a

$$H = \int_0^1 L^{-s} H_0 T^s ds,$$

y dado que $H \circ T = L \circ H$ tenemos

$$\begin{aligned}
 L^t H &= \int_0^1 L^{t-s} H_0 T^{s-t} ds T^t \\
 &= \int_{-t}^{1-t} L^{-s} H_0 T^s ds T^t \\
 &= \left[\int_{-t}^0 L^{-s} H_0 T^s ds + \int_0^{1-t} L^{-s} H_0 T^s ds \right] T^t \\
 &= \int_0^1 L^{-s} H_0 T^s ds T^t = HT^t.
 \end{aligned}$$

Además, $H_0 = L^{-1} H_0 T$, lo cual implica que

$$\begin{aligned}
 \int_{-t}^0 L^{-s} H_0 T^s ds &= \int_{-t}^0 L^{-s-1} H_0 T^{s+1} ds \\
 &= \int_{1-t}^1 L^{-s} H_0 T^s ds.
 \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$H \circ T^t = L^t \circ H,$$

o equivalentemente

$$H \circ \Phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0).$$

□

Definición 17. Sea

$$\begin{aligned}
 \rho : \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 e^{2\pi it} &\mapsto \rho(e^{2\pi it}),
 \end{aligned}$$

donde ρ es de clase C^1 , $\rho' \neq 0$ en todas partes y además inyectiva, llamaremos a ρ como parametrización de la circunferencia permisible.

Definición 18. Sea X un campo vectorial de clase C^1 definido en una vecindad compacta V de p para la cual ∂V es la imagen de la parametrización de la circunferencia permisible

$$\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \partial V$$

y supongamos que $X(p) = 0$ y $X(q) \neq 0$, para todo $q \in V/\{p\}$.

1.6. ESTRUCTURA LOCAL DE PUNTOS SINGULARES Y ÓRBITAS PERIÓDICAS 45

1. Decimos que $X|_V$ es un **centro** si ∂V es una órbita periódica y todas las órbitas en $V/\{p\}$ son periódicas
2. Decimos que $X|_V$ es un **foco/nodo** atractor si en todos los puntos del campo, fuera de ∂V y para todo $q \in V/\{p\}$ se cumple que $\omega(q) = \{p\}$ y $\gamma^-(q) \cap \partial V \neq \emptyset$
3. Decimos que $X|_V$ es un **foco/nodo** repulsor si en todos los puntos del campo, fuera de ∂V y para todo $q \in V/\{p\}$ se cumple que $\alpha(q) = \{p\}$ y $\gamma^+(q) \cap \partial V \neq \emptyset$
4. Decimos que $X|_V$ posee una **descomposición finita en sectores no trivial** si no tenemos los casos anteriores y si existe un número finito de órbitas características c_0, c_1, \dots, c_{n-1} que cortan transversalmente a ∂V en los puntos p_i y con la propiedad de que las siguientes situaciones respecto al sector S_i , definido como una región compacta y acotada por $\{p\}$, c_i , c_{i+1} y la parte de ∂V entre p_i y p_{i+1} , tenemos
 - a) **Sector parabólico atractor** Si los puntos del campo vectorial dentro de $[p_i, p_{i+1}] \subset \partial V$ y para todo $q \in S_i/\{p\}$ se cumple que $\omega(q) = \{p\}$ y $\gamma(q)^- \cap \partial V \neq \emptyset$
 - b) **Sector parabólico repulsor:** Si los puntos del campo vectorial fuera de $[p_i, p_{i+1}] \subset \partial V$ y para todo $q \in S_i/\{p\}$ tenemos que $\alpha(q) = \{p\}$ y $\gamma(q)^+ \cap \partial V \neq \emptyset$
 - c) **Sector hiperbólico:** Si existe un punto $q_i \in (p_i, p_{i+1}) \subset \partial V$ con la propiedad de que en todos los puntos de $[p_i, q_i)$ el campo vectorial apunta hacia afuera mientras que en todos los puntos de $(q_i, p_{i+1}]$ el campo vectorial apunta hacia adentro.
En el punto q_i el campo vectorial es tangente en ∂V y la tangencia es externa en el sentido que la órbita en X de q_i permanece fuera de V y todo punto $q \in S_i/c_i \cup c_{i+1} \cup q_i$ satisface que $\omega^+(q) \cap \partial V \neq \emptyset$ y $\omega^-(q) \cap \partial V \neq \emptyset$
 - d) **Sector elíptico:** Si existe un punto $q_i \in (p_i, p_{i+1}) \subset \partial V$ con la propiedad que $\gamma(q_i) \subset V$ y $\omega(q_i) = \alpha(q_i) = \{p\}$.
A todos los puntos $q \in [p_i, q_i)$ donde el campo vectorial apunta hacia adentro, $\gamma^+(q) \subset V$ y $\omega(q) = \{p\}$ los denotaremos por

$$S_{[p_i, q_i]} = \cup_{q \in [p_i, q_i]} \gamma^+(q).$$

A todos los puntos $q \in (q_i, p_{i+1}]$ donde el campo vectorial apunta hacia afuera, $\gamma^-(q) \subset V$ y $\alpha(q) = \{p\}$ los denotaremos por

$$S_{[q_i, p_{i+1}]} = \cup_{q \in [q_i, p_{i+1}]} \gamma^-(q).$$

Además en los puntos q de $S / (S_{[p_i, q_i]} \cup S_{[q_i, p_{i+1}]} \cup \{p\})$ tenemos que $\gamma(q) \subset \mathbb{V}$ con $\omega(q) = \alpha(q) = \{p\}$.

De la misma forma es cierto si $[p_i, q_i]$ y $[q_i, p_{i+1}]$ son intercambiados, geoméricamente los sectores tienen la forma mostrada en la figura (1.20).

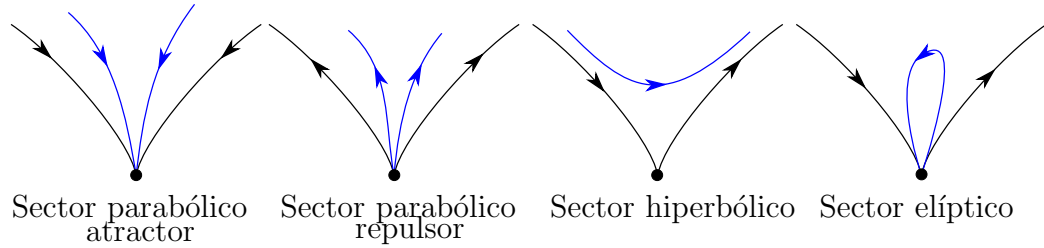


Figura 1.20:

Sea X un campo vectorial de clase C^r definido en una vecindad W de una singularidad p . Decimos que X tiene una descomposición finita de sectores propios en p si existe una vecindad $V \subset W$ de p tal que $X|_V$ satisface ser un sector **parabólico atractor**, **parabólico repulsor**, **hiperbólico** o **elíptico**, en los primeros tres casos diremos que es una **descomposición trivial de sectores**, ya que tenemos un solo sector. Observamos entonces que la distinción entre un foco y un nodo no es topológica sino diferenciable.

En el último caso, denotemos por e , h y p al número de sectores elípticos, hiperbólicos y parabólicos respectivamente, como no estamos en los primeros tres casos entonces e o h , o ambos son no nulos. Trataremos de mantener a p lo más pequeño posible, en el sentido que si hay dos sectores parabólicos adyacentes, los uniremos y añadiremos un sector parabólico a uno elíptico si

es adyacente a él. Por lo tanto, a los sectores parabólicos restantes sólo pueden ser los que están entre dos sectores hiperbólicos; diremos entonces que esta es una **descomposición mínima**. Si S_i es un sector ya sea hiperbólico o elíptico, tenemos que $X(p_i)$ y $X(p_{i+1})$ no pueden apuntar ambos hacia adentro o afuera, entonces $e + h$ es un número par.

Luego, de haber estudiado la estructura local de un campo vectorial al rededor de un punto singular, veamos como se comporta un campo alrededor de una órbita cerrada. Sea $\gamma = \{\varphi(t, p) : t \in \mathbb{R}\}$ una curva periódica de período τ_0 de un campo vectorial X de clase C^r definido en un subconjunto abierto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, $r \geq 1$. Sea Σ una sección transversal de X que pasa por el punto p así como en la definición 13. Debido a la continuidad del flujo φ de X , para todo $q \in \Sigma$ cercano a p , la trayectoria $\varphi_q(t)$ permanece cercana a γ , con t en un intervalo compacto dado, por ejemplo $[0, 2\tau_0]$. Definimos como $f(q)$ al primer punto donde $\varphi_q(t)$ interseca a Σ y sea Σ_0 el dominio de f , por supuesto que $p \in \Sigma_0$ y $f(p) = p$, ver figura (1.21).

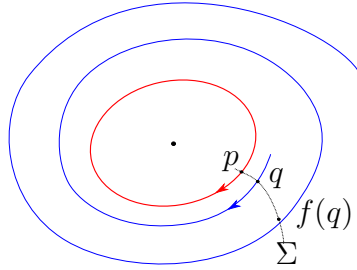


Figura 1.21: Comportamiento local al rededor de una órbita periódica

Las propiedades de X cerca de γ son reflejadas por f . Por ejemplo, las órbitas periódicas de X cerca de γ corresponden a los puntos fijos de f , $q \in \Sigma$ tal que $f(q) = q$. El comportamiento asintótico de las órbitas de X cerca de γ es descrito por f , en este sentido $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(q) = p$ implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_q(t), \gamma) = 0$, donde d denota la distancia Euclídea en \mathbb{R}^2 . Observemos que una sección Σ como la usamos aquí es una curva diferenciable contenida en Δ . Podemos asumir que Σ es un segmento “abierto” de \mathbb{R}^2 en el sentido que es la imagen regular de un intervalo abierto de \mathbb{R} .

Definición 19. Dado Σ definimos la aplicación de Poincaré $f : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ como el primer punto de retorno del flujo en Σ , es decir, para cada punto

de Σ que pertenece a una órbita específica, la aplicación nos dará el primer punto donde la órbita interseca a Σ en tiempo positivo. Supondremos que Σ_0 es suficientemente pequeño tal que f está definida en todos los puntos de Σ_0 .

Proposición 4. *Sea φ un flujo de clase C^r , $r \geq 1$. Entonces la aplicación de Poincaré $f : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ es un difeomorfismo de clase C^r sobre su imagen Σ_1 .*

Una órbita periódica γ de X es llamada **ciclo límite** si existe una vecindad V de γ tal que γ es la única órbita periódica en V . Sea γ una órbita periódica de \mathbb{R}^2 , denotamos por $\text{Ext}(\gamma)$ al conjunto de puntos que pertenecen al conjunto no acotado \mathbb{R}^2/γ (el exterior de γ) y denotamos por $\text{Int}\gamma$ al conjunto de puntos que pertenecen al conjunto acotado \mathbb{R}^2/γ (el interior de γ).

Definición 20. *Los distintos ciclos límite en \mathbb{R}^2 son:*

- (I) *Estable, cuando $\omega(q) = \gamma$ para cada $q \in V$*
- (II) *Inestable, cuando $\alpha(q) = \gamma$ para cada $q \in V$*
- (III) *Semi-estable cuando $\omega(q) = \gamma$ para cada $q \in V \cap \text{Ext}(\gamma)$ y $\alpha(q) = \gamma$ para cada $q \in V \cap \text{Int}(\gamma)$ o viceversa.*

Proposición 5. *La órbita γ es un ciclo límite si y solo si p es un punto singular aislado de f . Además,*

- (I) *γ es estable si y solo si $|f(x) - p| < |x - p|$ para cada $x \neq p$ suficientemente cerca de p*
- (II) *γ es inestable si y solo si $|f(x) - p| > |x - p|$ para cada $x \neq p$ suficientemente cerca de p*
- (III) *γ es semi-estable si y solo si $|f(x) - p| < |x - p|$ para cada $x \in \Sigma \cap \text{Ext}(\gamma)$, $x \neq p$ suficientemente cerca de p y $|f(x) - p| > |x - p|$ para cada $x \in \Sigma \cap \text{Int}(\gamma)$, $x \neq p$ suficientemente cerca de p .*

Si X es analítico y $f(x)$ no es la identidad, entonces $f(x) = x + a_k(x - p)^k + \dots$ donde $a_k \neq 0$. Así, si k es impar, entonces γ es estable si $a_k < 0$; γ es inestable si $a_k > 0$. Ahora, en el caso que k es par, γ es semi-estable

si $f(x) \equiv x$, entonces $a_k = 0$ y γ se encuentra en el interior de un anillo de órbitas periódicas de X , es decir, no es un ciclo límite.

Si $f'(p) < 1$ entonces podemos aplicar el teorema del valor intermedio y deducir que γ es estable. Equivalentemente γ es inestable si $f'(p) > 1$, como se muestra en la figura (1.22).

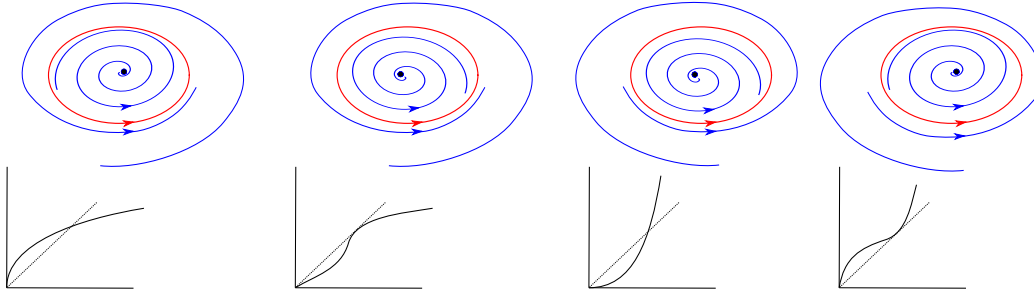


Figura 1.22: Tipos de ciclos límite y sus aplicaciones de Poincaré

Recordemos que $f'(p) > 0$, ya que la aplicación de Poincaré en el plano preserva la orientación. Es fácil, ver que $f'(p)$ es independiente de tomar un parámetro regular x en Σ , así como $p \in \gamma$ y es llamado **exponente característico** de γ .

En lo que sigue estudiaremos la aplicación de Poincaré en campo vectorial en el plano, para esto, consideramos el sistema diferencial en el plano dada por

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y). \end{cases}$$

Sea $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ el correspondiente campo vectorial del sistema diferencial. Denotamos por la divergencia de X en q como $(div X)(q)$. Supongamos que Σ es una sección transversal y $\Sigma' \subset \Sigma$ es un subconjunto abierto en el cual la aplicación de Poincaré, $f : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ está bien definida.

Ya que el campo vectorial X esta en el plano, Σ es una curva que puede ser parametrizada por $\gamma : I \rightarrow \Sigma$, donde $\gamma(I') = \Sigma'$ y $|\gamma'(s)| = 1$. Sea $X_{\perp}(q)$ la componente escalar de la línea tangente a Σ en q dado por

$$X_{\perp} \circ \gamma(s) = \det(\gamma'(s), X \circ \gamma(s)).$$

En el caso que Σ sea una línea horizontal, $\{(x, y^*) : x_1 < x < x_2\}$, $X_{\perp}(q) = Q(p)$ y en el caso que Σ sea una línea vertical, $\{(x^*, y) : y_1 < y < y_2\}$,

$$X_{\perp}(q) = P(q).$$

Sea $\tau(q)$ el tiempo de retorno para $q \in \Sigma'$, entonces $f(p) = \varphi^{\tau(q)}(q) = \varphi_q(\tau(q))$.

El siguiente teorema nos da las condiciones suficientes para determinar la estabilidad de un ciclo límite.

Teorema 9. *Sea $\gamma : I' \rightarrow \Sigma'$ una parametrización de la sección transversal Σ' como arriba $|\gamma'(s)| = 1$. Si $s \in I'$,*

$$(\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma)'(s) = \frac{X_{\perp} \circ \gamma(s)}{X_{\perp} \circ f \circ \gamma(s)} \exp \left(\int_0^{\tau \circ \gamma(s)} (\operatorname{div} X) \circ \varphi^t \circ \gamma(s) dt \right),$$

de esta manera, si $f(p) = p$ y $\gamma(s_0) = p$ entonces el exponente característico de γ esta dado por

$$f'(p) = (\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma)'(s_0) = \exp \left(\int_0^{\tau(p)} (\operatorname{div} X) \circ \varphi^t(p) dt \right).$$

Demostración. La primera ecuación variacional establece que

$$\frac{d}{dt} D\varphi_q^t = DX_{\varphi^t(q)} D\varphi_q^t.$$

Ya que $\det(D\varphi_q^0) = \det(id) = 1$, la fórmula de Liouville para la ecuación lineal tiempo- dependiente, dada por

$$\det(D\varphi_q^{\tau(q)}) = \exp \left(\int_0^{\tau(q)} (\operatorname{div} X) \circ \varphi^t(q) dt \right).$$

Notemos que el lado derecho de la ecuación anterior es igual a la exponencial en la formula para $(\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma)'(s)$ mencionado en el teorema. Además, para completar la prueba, debemos relacionar $(\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma)'(s)$ con el $\det(D\varphi_{\gamma(s)}^{\tau \circ \gamma(s)})$. Tomando la derivada de $f \circ \gamma = \varphi^{\tau \circ \gamma(s)}(\gamma(s))$.

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(s) &= (D\varphi_{\gamma(s)}^{\tau \circ \gamma(s)})\gamma'(s) + (\tau \circ \gamma)'(s)[X \circ \varphi^{\tau \circ \gamma(s)}(\gamma(s))] \\ &= (D\varphi_{\gamma(s)}^{\tau \circ \gamma(s)})\gamma'(s) + (\tau \circ \gamma)'(s)[X \circ f \circ \gamma(s)]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 (\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma)'(s)[X_{\perp} \circ f \circ \gamma(s)] &= \det((f \circ \gamma)'(s), X \circ f \circ \gamma(s)) \\
 &= \det((D\varphi_{\gamma(s)}^{\tau \circ \gamma})\gamma'(s), X \circ f \circ \gamma(s)) \\
 &\quad + \det((\tau \circ \gamma)'(s)[X \circ f \circ \gamma(s)], X \circ f \circ \gamma(s)) \\
 &= \det((D\varphi_{\gamma(s)}^{\tau \circ \gamma})\gamma'(s), (D\varphi_{\gamma(s)}^{\tau \circ \gamma})X \circ \gamma(s)) \\
 &= \det((D\varphi_{\gamma(s)}^{\tau \circ \gamma}) \det(\gamma'(s), X \circ \gamma(s))) \\
 &= \exp\left(\int_0^{\tau \circ \gamma(s)} (\operatorname{div} X) \circ \varphi^t \circ \gamma(s) dt\right) X_{\perp} \circ \gamma(s).
 \end{aligned}$$

Dividiendo por $X_{\perp} \circ f \circ \gamma(s)$, el teorema queda demostrado. \square

Ejemplo 8. Sea el campo vectorial X , dado por

$$\begin{aligned}
 X : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 X(x, y) &\mapsto (X_1(x, y), X_2(x, y)),
 \end{aligned}$$

donde $X_1(x, y) = -y + x(1 - x^2 - y^2)$ y $X_2(x, y) = (x + y(1 - x^2 - y^2))$, notamos entonces que \mathbb{S}^1 es una órbita periódica, verifiquemos si es estable o inestable.

Para empezar, tomamos la sección transversal $\gamma = (s, 0)$, $s \in [1/2, 3/2]$, parametrizando a \mathbb{S}^1 como $\sigma = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. La divergencia del campo vectorial X , luego de hacer algunos cálculos es $\operatorname{Div}(X) = 1 - 3x^2 - y^2 + 1 - x^2 - 3y^2$, entonces

$$\begin{aligned}
 f'(p) &= \exp\left(\int_0^{2\pi} (2 - 4\cos^2(t) - 4\operatorname{sen}^2(t)) dt\right) \\
 &= \exp\left([2t - 2(t + \operatorname{sen}(t)\cos(t)) - 2(t - \operatorname{sen}(t)\cos(t))]_0^{2\pi}\right) \\
 &= \exp[-2t]_0^{2\pi} \\
 &= \exp[-4\pi] < 1,
 \end{aligned}$$

por lo tanto $\sigma = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) = \mathbb{S}^1$ es una órbita periódica estable, como se muestra en la figura (1.23).

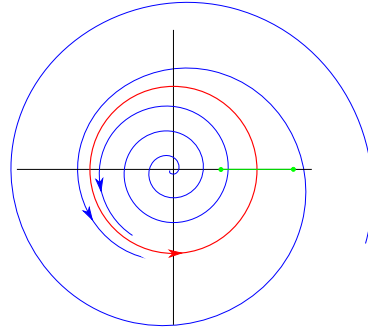


Figura 1.23: La órbita \mathbb{S}^1 es estable

1.7. Teorema de Poincaré-Bendixson

En lo que sigue, asumiremos que Δ es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y X es un campo vectorial de clase C^r , con $r \geq 1$. Además, en $\gamma_p^+ \subset \Delta$, es la semi-órbita positiva que pasa por el punto p .

Teorema 10. Poincaré-Bendixson en el plano. *Sea $\varphi(t, p)$ una curva integral del campo X definida para todo $t \geq 0$, tal que γ_p^+ esta contenida en un conjunto compacto $K \subset \Delta$. Asumamos que el campo vectorial X tiene a lo sumo un número finito de singularidades en K , entonces se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. *Si $\omega(p)$ esta compuesta solo de puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica*
2. *Si $\omega(p)$ contiene tanto puntos singulares como regulares, entonces $\omega(p)$ está formado por un conjunto de órbitas, las cuales, cada una tienden a un punto singular en $\omega(p)$ cuando $t \mapsto \infty$*
3. *Si $\omega(p)$ no contiene puntos regulares, entonces $\omega(p)$ único punto singular.*

Los siguientes lemas facilitarán la prueba de este teorema. Cabe destacar que las demostraciones de dichos lemas para campos vectoriales definidos sobre la esfera tienen la misma estructura, porque la esfera localmente se comporta como el plano \mathbb{R}^2 .

Lema 4. Si $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$, donde Σ es una sección transversal de X y $\gamma = \{\varphi(t)\}$ es una órbita del campo, entonces p es el límite de una sucesión de puntos $\varphi(t_n)$ en Σ cuando $t_n \mapsto \infty$.

Demostración. Sea $\gamma = \{\varphi(t, q)\}$ y $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$, como se muestra en la figura (1.24), consideremos una vecindad V de p , y la aplicación $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$, como en el corolario 1. Ya que $p \in \omega(\gamma)$, por definición existe una sucesión $\{\tilde{t}_n\}$ tal que $\tilde{t}_n \mapsto \infty$ y $\varphi(\tilde{t}_n) \mapsto p$ cuando $n \mapsto \infty$.

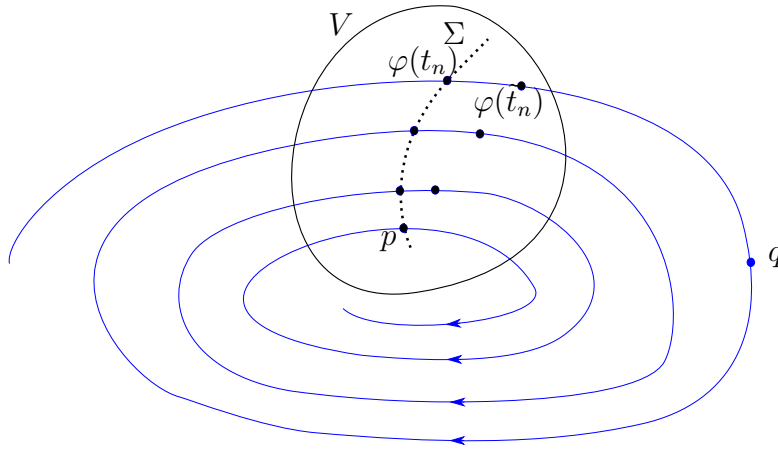


Figura 1.24: Esquema de la sección transversal Σ

Por esta razón, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(\tilde{t}_n) \in V$ para todo $n \geq n_0$. Sea $t_n = \tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n))$ para $n \geq n_0$. Entonces tenemos que

$$\varphi(t_n) = \varphi(\tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n)), q) = \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t}_n)), \varphi(\tilde{t}_n)),$$

de la definición de τ tenemos que $\varphi(t_n) \in \Sigma$. Debido a que τ es continua se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t}_n)), \varphi(\tilde{t}_n)) = \varphi(0, p) = p,$$

ya que $\varphi(\tilde{t}_n) \mapsto p$ y $\tau(\varphi(\tilde{t}_n)) \mapsto \tau(p) = 0$, cuando $n \mapsto \infty$. \square

Observemos que la sección transversal Σ de un campo vectorial X tiene dimensión 1, ya que es considerada como un campo vectorial sobre \mathbb{R}^2 ; entonces, localmente, Σ es la imagen difeomorfa de un intervalo de la recta. A

partir de ahora, vamos a suponer que cada sección transversal Σ es la imagen difeomorfa de un intervalo. Además, Σ posee un orden total “ \leq ”, inducido por el orden total del intervalo, por esta razón podemos hablar de sucesiones monótonas en Σ .

Lema 5. *Sea Σ una sección transversal de X contenida en Δ , si γ es una órbita de X y $p \in \Sigma \cap \gamma$, entonces $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p); t \geq 0\}$ intersecta a Σ en una sucesión monótona ya sea finita o infinita.*

Demostración. Sea $D = \{t \in \mathbb{R}^+ : \varphi(t, p) \in \Sigma\}$, por el teorema del flujo tubular, D es discreto, entonces podemos hacer un reordenamiento del mismo, es decir, $D = \{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n, \dots\}$.

Sea $p_1 = p$, definimos, en el caso que exista $p_2 = \varphi(t_1, p)$ y por inducción definimos a $p_n = \varphi(t_{n-1}, p)$. Si $p_1 = p_2$ entonces γ es una órbita periódica de período $\tau = t_1$ y $p = p_n$ para todo n .

Si $p_1 \neq p_2$ decimos que $p_1 < p_2$ y si p_3 existe, demostraremos que $p_3 > p_2$. En efecto, tomemos una orientación en la sección transversal Σ , digamos de arriba hacia abajo como se muestra en la figura (1.25 (a)). Por la razón que Σ es conexa y dada la continuidad del campo vectorial, las órbitas siempre cruzan la sección transversal en el mismo sentido, digamos, de izquierda a derecha como se muestra en la figura (1.25 (b)).

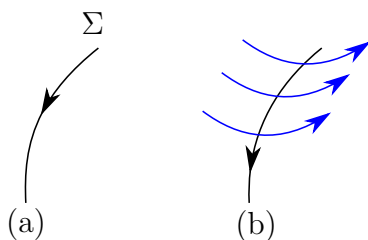


Figura 1.25: Esquema del flujo cruzando la sección transversal

Recordemos que una curva de Jordan en \mathbb{R}^2 cumple que si J es una curva cerrada simple y continua (homeomorfa a una circunferencia), entonces \mathbb{R}^2/J tiene dos componentes conexas, S_i (la componente interna de la curva, la cual es acotada) y S_e (la componente externa de la curva, es decir, no acotada) teniendo a J como frontera común. Por tanto, consideremos la curva de Jordan formada por la unión del segmento $\overline{p_1 p_2} \subset \Sigma$ con el arco $\widehat{p_1 p_2}$ de la órbita $\widehat{p_1 p_2} = \{\varphi(t, p) : 0 \leq t \leq t_1\}$, como se muestra en la figura (1.26).

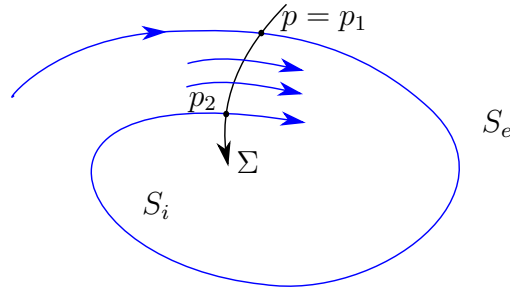


Figura 1.26: Definición de la curva de Jordan

En particular la órbita γ , iniciando en p_2 (esto es, para valores de $t \geq t_1$) está contenida en S_i , de hecho, no puede intersectar al arco $\widehat{p_1 p_2}$ por la unicidad de las órbitas, además tampoco puede intersectar al segmento $\overline{p_1 p_2}$ ya que tendría una dirección opuesta al flujo, lo cual es imposible. En resumen, en el caso que t_3 exista, tendremos que $t_1 < t_2 < t_3$ como se muestra en la figura (1.27).

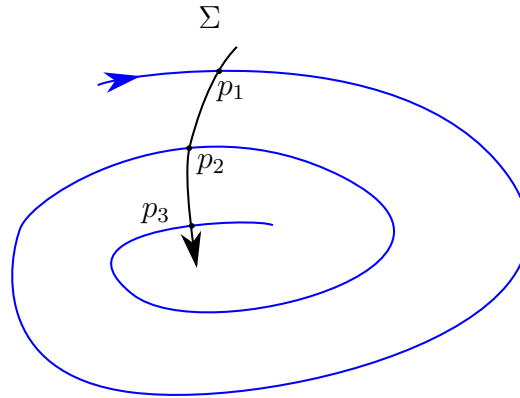


Figura 1.27:

Repitiendo este argumento tenemos que $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < \dots$, por lo cual $\{p_n\}$ es una sucesión monótona. Si $p_2 < p_1$ la prueba es análoga. \square

Lema 6. Si Σ es una sección transversal del campo vectorial X y $p \in \Delta$ entonces Σ intersecta a $\omega(p)$ en a lo sumo un punto.

Demostración. Por el lema anterior, el conjunto de puntos γ_p^+ sobre Σ tiene

a lo sumo un punto límite, ya que este conjunto es una sucesión monótona, luego, por el lema 4 se termina la prueba. \square

Lema 7. *Sea $p \in \Delta$, con γ_p^+ contenido en un conjunto compacto y γ una órbita de X , tal que, $\gamma \subset \omega(p)$, el cual contiene puntos regulares, entonces γ es una órbita cerrada y $\omega(p) = \gamma$.*

Demostración. Sea $q \in \omega(\gamma)$ un punto regular y sea V una vecindad del punto q , así como en el corolario 1 y Σ_q corresponde a la sección transversal. Por el lema 4 existe una sucesión $t_n \mapsto \infty$ tal que $\gamma(t_n) \in \Sigma_q$, como $\gamma(t_n) \in \omega(p)$, la sucesión $\{\gamma(t_n)\}$ se reduce a un punto, por el lema anterior tenemos que γ es periódica.

Ahora probemos que $\gamma = \omega(p)$; ya que $\omega(p)$ es conexo y γ es cerrado y no vacío, es suficiente probar que γ es abierto en $\omega(p)$.

Sea $\bar{p} \in \gamma$ y $V_{\bar{p}}$ una vecindad alrededor \bar{p} , como en el corolario 1, acá $\Sigma_{\bar{p}}$ corresponde a la sección transversal. Probaremos que $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$, de esta manera, tendremos que γ es abierto en $\omega(p)$, en un principio tenemos que $V_{\bar{p}} \cap \gamma \subset V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. Asumiendo que existe $\bar{q} \in V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$ tal que $\bar{q} \notin \gamma$, por el teorema del flujo tubular y la invarianza de $\omega(p)$, existe $t \in \mathbb{R}$, tal que $\varphi(t, \bar{q}) \in \omega(p) \cap \Sigma_{\bar{p}}$ y $\varphi(t, \bar{q}) \neq \bar{p}$ entonces existen dos diferentes puntos de $\omega(p)$ en $\Sigma_{\bar{p}}$, lo cual es una contradicción dado a lo que establece el lema 6, por lo tanto concluimos que $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. \square

Prueba del teorema 10

1. Supongamos que $\omega(p)$ contiene solo puntos regulares, tomemos un punto $q \in \omega(p)$ entonces la órbita $\gamma_q \subset \gamma(p)$ y dado que $\omega(p)$ es compacto, tenemos que $\omega(\gamma_q) \neq \emptyset$. Se sigue inmediatamente del lema 7 que $\omega(p) = \gamma_q$ es una órbita periódica, como se muestra en la figura (1.28).

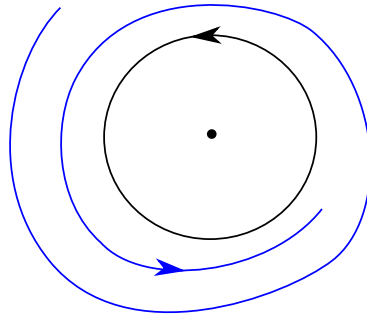


Figura 1.28: Órbita periódica como ω -límite

2. Asumiendo que $\omega(p)$ tiene tanto puntos singulares como regulares y γ es una órbita contenida en $\omega(p)$, entonces por el lema 7, del hecho que $\omega(\gamma)$ es conexo y que el campo X tiene un número finito de puntos singulares, se sigue que $\omega(\gamma)$ es un punto singular. Ver figura (1.29).

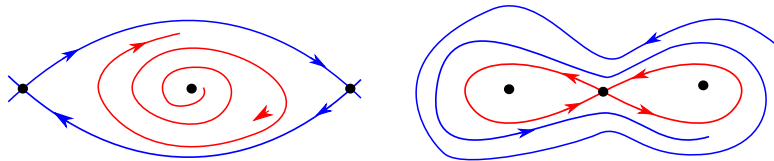


Figura 1.29: Posibles conjuntos ω -límites

3. Supongamos que $\omega(p)$ tiene sólo puntos singulares, se sigue directamente del hecho que $\omega(p)$ es conexo y que el campo vectorial X puede tener un número finito de singularidades en $\omega(p)$. Ver figura (1.30). \square

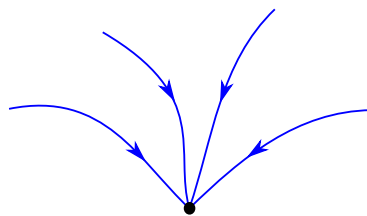


Figura 1.30: Un punto singular como ω -límite

Corolario 3. (Segundo teorema de Poincaré-Bendixson) *Sea $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ una curva integral de X definida para toda $t \geq 0$, tal que γ_p^+ está contenida en un conjunto compacto $K \subset \Delta$. Asumamos que el campo vectorial X tiene un número finito de singularidades en $\omega(p)$, las cuales poseen una descomposición finita de sectores, entonces se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. *Si $\omega(p)$ contienen solo puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica*
2. *Si $\omega(p)$ contiene tanto puntos regulares y singulares, entonces $\omega(p)$ está formado por un número finito de órbitas $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ y un número finito de puntos singulares p_1, p_2, \dots, p_n tales que $\alpha(\gamma_i) = p_i$, $\omega(\gamma_i) = p_{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$, concluimos que, $\alpha(\gamma_n) = p_n$ y $\omega(p_n) = p_1$*
3. *Si $\omega(p)$ no posee puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es un punto singular.*

Una aplicación del teorema de Poincaré-Bendixson

Teorema 11. *Sea X un campo vectorial de clase C^1 definido en un conjunto abierto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Si γ es una órbita periódica de X tal que $\text{Int}(\gamma) \subset \Delta$ entonces existe un punto singular de X contenido en $\text{Int}\gamma$.*

Demostración. Supongamos que no existen puntos singulares en γ y consideremos el conjunto Γ de órbitas cerradas de X contenidas en $\overline{\text{Int}\gamma}$, ordenadas por el siguiente orden parcial:

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \text{ si y solo si } \overline{\text{Int}\gamma_1} \supseteq \overline{\text{Int}\gamma_2}$$

Mostremos que todo subconjunto de S de Γ totalmente ordenado (es decir, si $\gamma_1 \neq \gamma_2$ en S entonces $\gamma_1 < \gamma_2$ o $\gamma_2 < \gamma_1$) admite una cota superior, es decir, un elemento mayor o igual que cualquier elemento de S . Un conjunto ordenado con estas condiciones se llama inductivo. De hecho, sea $\sigma = \{\cap \overline{\text{Int}\gamma_i}; \gamma_i \in S\}$, notamos que $\sigma \neq \emptyset$, puesto que cada $\overline{\text{Int}\gamma_i}$ es compacto y la familia $\{\overline{\text{Int}\gamma_i} : \gamma_i \in S\}$ tiene la *propiedad de Intersección Finita*, es decir, cualquier intersección finita de elementos de la familia es no vacía.

Sea $q \in \sigma$, por el teorema de Poincaré-Bendixson, $\omega(q)$ es una órbita cerrada contenida en σ , pues este conjunto es invariante bajo X y no contiene

puntos singulares, entonces ésta órbita es una cota superior de S . Por el lema de *Zorn*, Γ posee un elemento maximal μ , por lo tanto no existe un elemento de Γ contenido en $\overline{\text{Int}\mu}$, pero si $p \in \overline{\text{Int}\mu}$, entonces $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ son órbitas cerradas, esto sucede por el Teorema de Poincaré-Bendixson (ya que no tiene puntos singulares). Como $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ no pueden ser ambos iguales a μ , uno de ellos estará contenido en $\overline{\text{Int}\mu}$. Esta contradicción demuestra que deben existir puntos singulares en $\overline{\text{Int}\gamma}$. \square

Capítulo 2

Teoría de índices

En este capítulo estudiaremos el índice de un punto singular de un campo vectorial sobre \mathbb{R}^2 . Primero definiremos una trayectoria, la función ángulo para calcular el índice de una trayectoria alrededor de un punto, homotopías entre trayectorias y resultados interesantes como que el índice de puntos singulares es invariante bajo homotopías, para luego hablar sobre el índice de un campo vectorial X ; una forma geométrica de entender el índice sobre un punto singular es contar el número de vueltas que una trayectoria γ da al rededor del punto.

2.1. Índices de puntos singulares en plano

Definición 21. Una trayectoria en el plano \mathbb{R}^2 es una aplicación continua del intervalo $I = [0, 1]$ en \mathbb{R}^2 , es decir, $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, la cual a cada $t \in I$ le asigna un punto $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$; los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(1)$ se llaman punto inicial y final, respectivamente.

Nota 4. Una trayectoria σ diremos que es cerrada, si los puntos inicial y final coinciden, es decir, $\sigma(0) = \sigma(1)$. Una forma equivalente de definir una trayectoria cerrada es tomar aplicaciones $\sigma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continuas.

Ahora, para poder estudiar el índice de una trayectoria al rededor de un punto necesitamos previamente la definición de la **función ángulo**.

Definición 22. Sea $q \in \mathbb{R}^2$ tal que $q \notin \sigma(I)$ y r el rayo con origen en q y pasa por $\sigma(0)$, para cada punto $\sigma(t)$ en la trayectoria definimos a $\varphi(t)$

como el ángulo formado por el rayo r y $\overline{q\sigma(t)}$. La función $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es continua con respecto al parámetro t la cual llamaremos función ángulo, como se muestra en la figura (2.1).

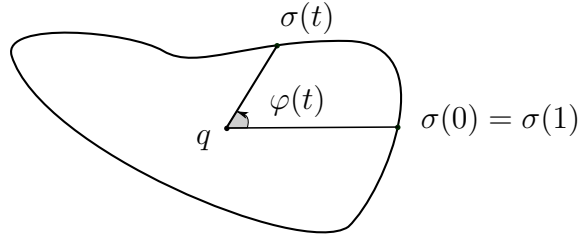


Figura 2.1: Función ángulo de una trayectoria cerrada al rededor de un punto

Para asegurar que φ está entre 0 y 2π y haciendo una traslación del punto q hasta el origen para tomar el rayo paralelo al eje X , podemos tomar

$$\varphi(t) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_1(t)}\right) & \text{si } \sigma_1(t) > 0 \text{ y } \sigma_2(t) \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_1(t)}\right) & \text{si } \sigma_1(t) < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_1(t)}\right) & \text{si } \sigma_1(t) > 0 \text{ y } \sigma_2(t) < 0 \end{cases}$$

Cabe notar que $\varphi(1) - \varphi(0)$ es un múltiplo de 2π , independiente de como se tome el rayo r , por lo cual es aceptable tomar este hecho para definir el índice de σ al rededor del punto q .

Definición 23. *El índice de una trayectoria cerrada σ al rededor de un punto q , esta dado por el cociente*

$$i(q, \sigma) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2\pi} = n.$$

Geoméricamente esta definición puede ser entendendida como el número de vueltas que la trayectoria σ al rededor del punto q , como se muestra en la figura (2.2).

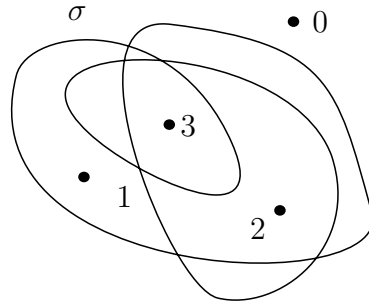


Figura 2.2: Índice de una trayectoria cerrada σ al rededor de algunos puntos

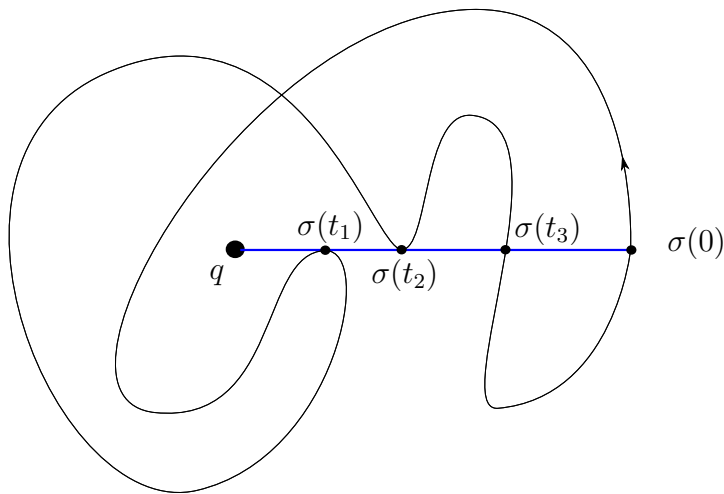
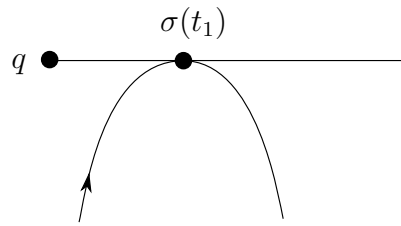


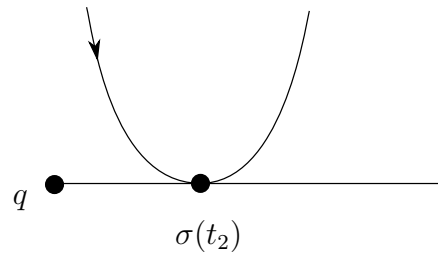
Figura 2.3: Ejemplo del método para calcular el índice

Un método para calcular el índice de un punto respecto a una trayectoria, es tomar el rayo r con origen en q de tal forma que corte a $\sigma(I)$ en un número finito de puntos. Sean $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < 1$ los parámetros para los cuales $\sigma(t_i) \in r$, como se muestra en la figura (2.3), asumamos que para cada t_i existe un $\epsilon_i > 0$ tal que para cada $t \neq t_i$, con $|t_i - t| < \epsilon_i$, $\sigma(t) \notin r$, en consecuencia $\varphi(t) \neq \varphi(t_i)$, entonces distinguimos casos:

1. $\varphi(t) \leq \varphi(t_i)$ para cada t , tal que $|t_i - t| < \epsilon_i$

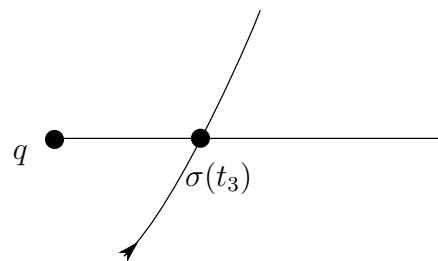


2. $\varphi(t) \geq \varphi(t_i)$ para cada t , tal que $|t_i - t| < \epsilon_i$.

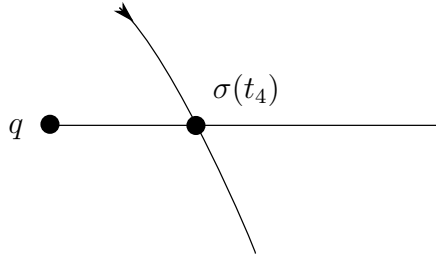


En estos dos casos, el rayo r no cruza a $\sigma(I)$ en el punto $\sigma(t_i)$.

3. $\varphi(t) < \varphi(t_i)$ para $t_i - \epsilon_i < t < t_i$. y $\varphi(t) > \varphi(t_i)$ para $t_i < t < t_i + \epsilon_i$



4. $\varphi(t) > \varphi(t_i)$ para $t_i - \epsilon_i < t < t_i$. y $\varphi(t) < \varphi(t_i)$ para $t_i < t < t_i + \epsilon_i$.



Para estos dos últimos casos, el rayo r cruza a σ en el punto $\sigma(t_i)$. Llamaremos **punto de intersección positiva y negativa** si estamos en el caso (3) y (4) respectivamente.

Denotemos por $\psi(t) = \left[\frac{\varphi(t)}{2\pi} \right]$ a la parte entera de $\frac{\varphi(t)}{2\pi}$, entonces $\psi(t_i) = \varphi(t_i)/2\pi$ al aumentar a t en la vecindad $|t_i - t| < \epsilon_i$, desde los puntos $t < t_i$ hasta $t > t_i$. El valor de $\psi(t)$ incrementa cuando estamos en el caso (3) y disminuye cuando estamos en el caso (4), luego como

$$\frac{\varphi(0)}{2\pi} - \left[\frac{\varphi(0)}{2\pi} \right] = \frac{\varphi(1)}{2\pi} - \left[\frac{\varphi(1)}{2\pi} \right],$$

entonces tenemos que

$$\psi(1) - \psi(0) = \left[\frac{\varphi(1)}{2\pi} \right] - \left[\frac{\varphi(0)}{2\pi} \right] = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2\pi}.$$

Sean m y n los puntos de intersección positiva y negativa, respectivamente, por lo tanto, tenemos que $i(q, \sigma) = m - n$, es decir que el índice es igual a la diferencia entre los puntos de intersección positiva y los puntos de intersección negativa independientemente de cómo se tome el rayo r . La siguiente proposición nos establece que para determinar el índice de una trayectoria cerrada al rededor de un punto no depende de éste último.

Proposición 6. Si el segmento $\overline{q_1 q_2}$ no corta a la trayectoria de la curva cerrada, entonces $i(q_1, \sigma) = i(q_2, \sigma)$.

Demostración. Sea $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una trayectoria cerrada, q_1 y q_2 son puntos que no están en $\sigma(I)$, sean además φ_1 y φ_2 las funciones ángulo con respecto a los puntos q_1 y q_2 respectivamente, entonces la función

$$\delta(t) = \frac{\varphi_1(t) - \varphi_2(t)}{\pi},$$

es continua para cada $t \in I$ y tenemos que

$$\begin{aligned} \delta(1) - \delta(0) &= \frac{\varphi_1(1) - \varphi_2(1)}{\pi} - \frac{\varphi_1(0) - \varphi_2(0)}{\pi} \\ &= 2 \frac{\varphi_1(1) - \varphi_1(0)}{2\pi} - 2 \frac{\varphi_2(1) - \varphi_2(0)}{2\pi} \\ &= 2(i(q_1, \sigma) - i(q_2, \sigma)). \end{aligned}$$

Supongamos que $i(q_1, \sigma) \neq i(q_2, \sigma)$, en consecuencia, $|\delta(1) - \delta(0)| \geq 2$, por el teorema del valor intermedio, existe $t_0 \in I$ tal que $\delta(t_0)$ es impar, es decir $\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0) = n\pi$ con n impar. Tomando dos rayos paralelos cuyos orígenes están en q_1 y q_2 , para definir a φ_1 y φ_2 , de tal manera que el rayo que inicia en q_1 pase por q_2 , entonces $\sigma(t_0) \in \overline{q_1 q_2}$, lo que contradice la hipótesis de la proposición. \square

Corolario 4. Si q_1 y q_2 están en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^2/\sigma(I)$, entonces $i(q_1, \sigma) = i(q_2, \sigma)$.

Demostración. Para demostrar este corolario, basta aplicar directamente la proposición anterior. \square

El siguiente resultado nos garantiza que el índice es independiente de la trayectoria cerrada que tomemos al rededor de un punto.

Proposición 7. Sean $\sigma_1, \sigma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos trayectorias cerradas del punto $q \in \mathbb{R}^2$, tal que $q \notin \overline{\sigma_1(t) \sigma_2(t)}$, para cada $t \in I$, entonces $i(q, \sigma_1) = i(q, \sigma_2)$.

Demostración. Sean φ_1 y φ_2 las funciones ángulo respecto a las trayectorias σ_1 y σ_2 del punto q , respectivamente. Supongamos que el índice de ambas trayectorias sobre q es distinto, entonces por el teorema del valor intermedio, existe un $t_0 \in I$ tal que $\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0) = n\pi$ con n impar, lo que implica que q pertenece al segmento determinado por $\sigma_1(t_0)$ y $\sigma_2(t_0)$, lo que contradice la hipótesis. \square

Corolario 5. Sean $\sigma_1, \sigma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos trayectorias cerradas tal que $q \notin \sigma_1(I) \cup \sigma_2(I)$. Si para cada $t \in I$ se cumple que $\|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\| < \|q - \sigma_1(t)\|$, entonces $i(q, \sigma_1) = i(q, \sigma_2)$.

Demostración. Las hipótesis de este corolario son equivalentes a las de la proposición anterior, es decir, $q \notin \overline{\sigma_1(t) \sigma_2(t)}$ para cualquier $t \in I$, así el resultado se demuestra aplicando directamente de la proposición anterior. \square

Las homotopías toman un papel importante en la teoría de índices, en este sentido definimos a dos trayectorias son homotópicas de la siguiente forma.

Definición 24. Dada una familia de trayectorias cerradas $\sigma_s : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde $s \in I$ decimos que $\sigma(s, t) = \sigma_s(t)$ es una deformación de trayectorias cerradas, donde la continuidad depende de $s, t \in I$. Si dos trayectorias cerradas pueden ser deformadas continuamente una en la otra, entonces diremos que son homotópicas, ver figura (2.4).

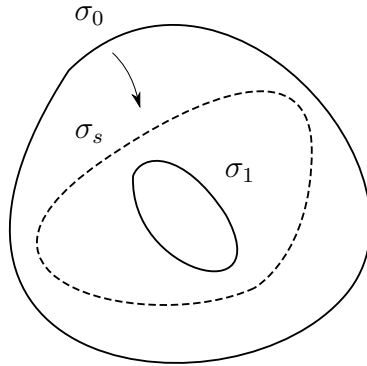


Figura 2.4: Curvas homotópicas.

El siguiente teorema establece que el índice es invariante bajo homotopías, el cual es un resultado bastante interesante, ya que por simplicidad, más adelante podemos tomar por trayectoria a la circunferencia unitaria, manteniendo el índice.

Teorema 12. Dos trayectorias son homotópicas en $\mathbb{R}^2/\{q\}$ si y solo si tienen el mismo índice.

Demostración. Sean σ_1 y σ_2 dos trayectorias cerradas y homotópicas en $\mathbb{R}^2/\{q\}$, como $\sigma(I \times I)$ es compacto, la distancia d del punto $q \notin \sigma(I \times I)$ a $\sigma(I \times I)$ es positiva y dado que cada aplicación continua definida en un conjunto compacto es uniformemente continua, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\|\sigma(t, s) - \sigma(t', s')\| < d$ para cada t, s, t', s' tales que $|s - s'| < \delta$ y $|t - t'| < \delta$. Sean $0 < s_0 < s_1 < \dots < s_n < 1$ tales que $s_i - s_{i-1} < \delta$; para cada $t \in I$ para todo $i = 1, 2, \dots, n - 1$ tenemos que

$$\|\sigma(t, s_i) - \sigma(t, s_{i-1})\| < d \leq \|q - \sigma(t, s_i)\|,$$

aplicando directamente el corolario 5 obtenemos

$$i(q, \sigma_0) = i(q, \sigma_{s_1}) = i(q, \sigma_{s_2}) = \cdots = i(q, \sigma_{s_n}) = i(q, \sigma_1).$$

Para el recíproco, definimos a $\sigma_n = q + e^{2\pi int}$ y tomando a r como el rayo horizontal con dirección hacia la derecha y que pase por el punto q , para definir la función ángulo $\varphi(t)$ de la trayectoria cerrada σ , también tomamos el conjunto

$$d(t) = \|q - \sigma(t)\|,$$

y definimos a la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma(I \times I) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \sigma(t, s) &\mapsto q + [d(t)(1-s) + s]e^{(\varphi(t)(1-s) + 2\pi nst)i}. \end{aligned}$$

Podemos ver que σ es continua, que $\sigma(t, 0) = \sigma(t)$, $\sigma(t, 1) = \sigma_n(t)$, $\varphi(1) = \varphi(0) + 2\pi n$ y $\sigma(0, s) = \sigma(1, s)$, para todo $s \in I$. Ya que $q \notin \sigma(I \times I)$, es decir, q no está en ninguna de las trayectorias que conforman a la deformación continua, se demuestra el resultado. □

Corolario 6. Si una trayectoria cerrada es homotópica a un punto en $\mathbb{R}^2/\{q\}$, entonces $i(q, \sigma) = 0$.

Corolario 7. Si una trayectoria cerrada σ es homotópica en $\mathbb{R}^2/\{q\}$ a la trayectoria cerrada definida por $\sigma_n = q + e^{2\pi int}$, $n \in \mathbb{Z}$ y $t \in I$, entonces $i(q, \sigma) = n$.

2.2. Índice de un campo vectorial

Con las herramientas que tenemos hasta ahora, estudiemos la forma en que se procede para encontrar el índice de una singularidad aislada, digamos el punto singular p de un campo vectorial X , entonces definimos la forma que tendrán las trayectorias cerradas al rededor de una singularidad y como denotaremos el índice de esta.

Definición 25. Sea p un punto singular del campo vectorial X sobre \mathbb{R}^2 y V una vecindad de p , de tal forma que en el interior de V no hay otra singularidad más que p , consideramos la aplicación $\sigma : \mathbb{S}^1 \rightarrow V/\{p\}$ como la trayectoria cerrada alrededor de p y definimos por $i_{p,\sigma}(X) = i(X \circ \sigma)$ como el número de vueltas que da en sentido antihorario $X \circ \sigma$ al rededor de p .

Lema 8. Si p es una singularidad aislada de un campo vectorial X y σ, σ' dos trayectorias cerradas y homotópicas en $V/\{p\}$, donde V es una vecindad de p en la cual X no tiene otra singularidad a parte de p , entonces $i_{p,\sigma}(X) = i_{p,\sigma'}(X)$.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} \sigma : I \times I &\rightarrow V/\{p\} \\ (t, s) &\mapsto \sigma(t, s) \end{aligned}$$

una homotopía entre $\sigma_1(t) = \sigma(t, 0)$ y $\sigma_2(t) = \sigma(t, 1)$, entonces la función $f : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2/\{(0, 0)\}$ dada por $(t, s) \mapsto X(\sigma(t, s))$ es una homotopía entre las trayectorias $X \circ \sigma_1$ y $X \circ \sigma_2$, lo que termina la prueba, ya que por ser homotópicas tienen el mismo índice. \square

Nota 5. Diremos que una trayectoria cerrada $\sigma : I \rightarrow V/\{p\}$ es canónica si es homotópica en $V/\{p\}$ a la trayectoria $\sigma_r : I \rightarrow V/\{p\}$, donde $\sigma_r(t) = p + r e^{2\pi i t}$, con $r > 0$, lo suficientemente pequeño de modo que p sea la única singularidad en $Int(\sigma_r)$. Al trabajar con trayectorias homotópicas denotaremos por $i_p = i_p(X)$ al índice de una singularidad p de un campo vectorial X y entenderemos que es el índice $i_{p,\sigma}(X)$ de la trayectoria cerrada canónica σ respecto a p .

Consideremos un método para calcular el índice $i_p(X)$, dada una trayectoria cerrada canónica σ de p , pero antes definamos al vector tangente $u(t)$ de la curva $\sigma(I)$ en el punto $\sigma(t)$, $t \in I$ y sea el vector unitario

$$v(t) = \frac{X(\sigma(t))}{\|X(\sigma(t))\|};$$

trabajaremos también con trayectorias cerradas canónicas σ de p que cumplan la condición que exista un número finito de valores $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$ del parámetro t tales que los vectores $u(t_i)$ y $v(t_i)$ coinciden, entonces para cada t_i existe un $\epsilon_i > 0$ tal que para todo $t_j \neq t_i$ y $t \neq t_i$ tales que $|t_j - t_i| > \epsilon_i$ y $|t - t_i| < \epsilon_i$, respectivamente, el ángulo entre los vectores $u(t)$ y $v(t)$ es menor que $\pi/4$, de lo cual consideramos cuatro casos:

1. $u(t) \wedge v(t) \leq 0$, $\forall t$ tal que $|t_i - t| < \epsilon_i$
2. $u(t) \wedge v(t) \geq 0$, $\forall t$ tal que $|t_i - t| < \epsilon_i$.

Donde $u \wedge v = |u| |v| \text{sen}(\theta)$, siendo θ el ángulo entre los vectores u y v medido en sentido antihorario, en estos dos casos el ángulo θ no cambia de signo a medida que pasamos por el punto $\sigma(t_i)$ aumentando el valor de t .

3. $u(t) \wedge v(t) < 0$, para todo t tal que $t_i - \epsilon_i < t < t_i$ y $u(t) \wedge v(t) > 0$, para todo t tal que $t_i < t < t_i + \epsilon_i$
4. $u(t) \wedge v(t) > 0$, para todo t tal que $t_i - \epsilon_i < t < t_i$ y $u(t) \wedge v(t) < 0$, para todo t tal que $t_i < t < t_i + \epsilon_i$.

En estos dos últimos casos los vectores $u(t)$ y $v(t)$ cambian de orientación cuando la trayectoria σ pasa por el punto $\sigma(t_i)$, a medida que incrementamos el valor del parámetro t .

Nota 6. Llamaremos a los casos (3) y (4) como puntos de cruce positivo y negativo respectivamente.

Definición 26. Sean m y n el número de puntos de cruce positivo y negativo, entonces $i_p(X) = m - n + 1$.

Utilizando esta interpretación geométrica del índice de una singularidad aislada p del campo vectorial X respecto a la trayectoria canónica cerrada de p , se prueba el siguiente resultado.

Proposición 8. Si el campo vectorial X en el punto p es localmente conjugado al campo vectorial Y en el punto q , siendo tanto p y q dos singularidades aisladas, entonces $i_p(X) = i_q(Y)$.

Demostración. Como los campos vectoriales X y Y son localmente conjugados entonces tienen el mismo número de puntos de cruce positivos y negativos, de esta forma $i_p(X) = m - n + 1 = i_q(Y)$. \square

Ejemplo 9. Sea el campo vectorial $X = (x, y)$ el cual tiene una singularidad aislada en el origen, donde el campo vectorial está dado en la figura (2.5), en este caso, no hay ningún punto de intersección ya sea positiva o negativa, ya que todos los vectores tangentes a \mathbb{S}^1 son perpendiculares a los vectores dados por el campo, ver figura (2.6), entonces no hay ningún punto donde $u(t)$ y $v(t)$ coincidan, entonces $i_{(0,0)}(X) = 1 + m - n = 1$.

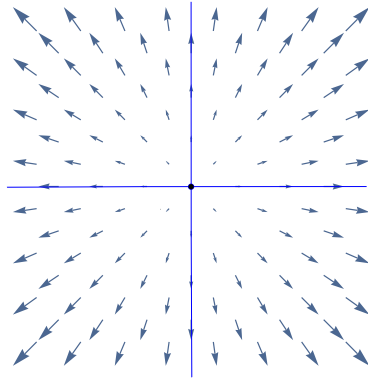


Figura 2.5: Campo vectorial $X = (x, y)$.

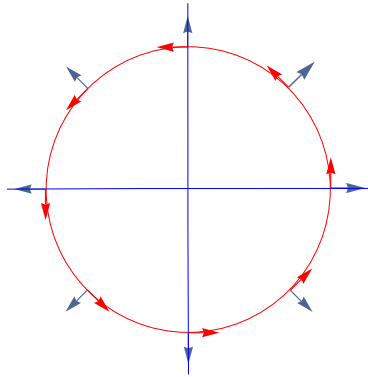


Figura 2.6: Vectores $u(t)$ y $v(t)$ respecto a \mathbb{S}^1 y $X = (x, y)$.

Ejemplo 10. Sea $X = (x, -y)$ ver figura (2.7), en esta caso, los puntos en donde el campo coincide con σ' siendo $\sigma(t) = e^{2\pi it}$ son cuando $t = \frac{3}{4}$ y $t = \frac{7}{4}$, y ambos son puntos de cruce negativo, ya que para los valores de $t \in (\frac{7}{4}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$, $u(t) \wedge v(t) < 0$ y para los valores de $t \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \cup (\frac{5}{4}, \frac{7}{4})$, $u(t) \wedge v(t) > 0$, por lo tanto $m = 0$, $n = 2$ y de ahí que $i_{(0,0)}(X) = -1$, ver figura (2.8).

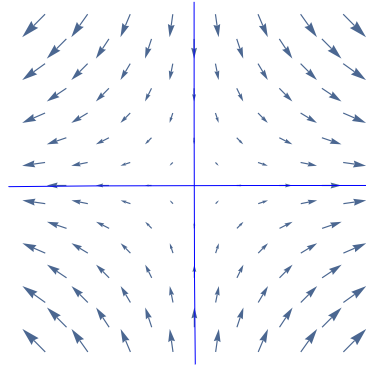


Figura 2.7: Campo vectorial $X = (x, -y)$.

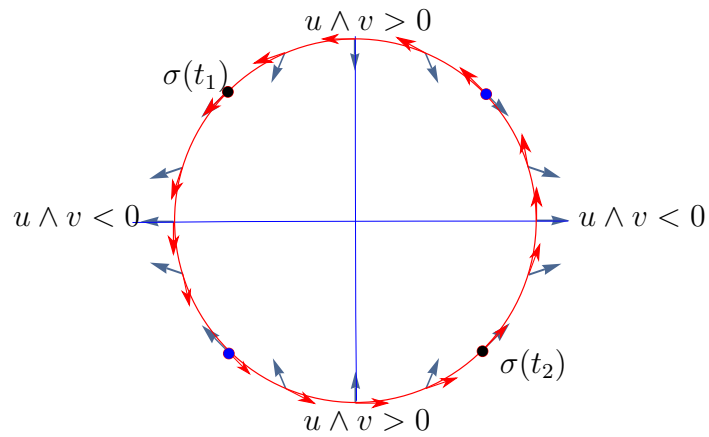


Figura 2.8: Vectores $u(t)$ y $v(t)$ respecto a \mathbb{S}^1 y $X = (x, -y)$.

Proposición 9. Sea X un campo vectorial definido en \mathbb{D}^2 tal que $X(p) \neq 0$, para todo $p \in \partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$ y supongamos que el número de singularidades de X en \mathbb{D}^2 es finito, digamos p_1, p_2, \dots, p_k entonces

$$i(X|_{\mathbb{S}^1}) = \sum_{n=1}^k i_{p_n}(X).$$

Demostración. Sean V_1, \dots, V_k circunferencias centradas en p_i de radios lo suficientemente pequeños de tal manera que estén completamente contenidos

en \mathbb{D}^2 y que en su interior el único punto singular sea p_i , también disjuntas una a una. Estratégicamente dividimos a $\mathbb{D}^2/\bigcup V_i$ en sectores W_i , como se muestra en la figura (2.9).

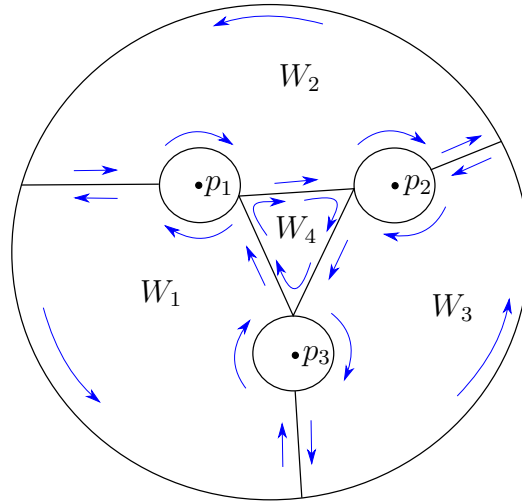


Figura 2.9: Descomposición de \mathbb{D}^2/V_i .

Cada región W_i es homeomorfa a \mathbb{D}^2 , por esta razón, podemos hablar del índice $i(X, W_i)$ del campo vectorial en cada ∂W_i , entonces

$$\sum_{n=1}^k i(X, \partial W_n) = i(X) - \sum_{n=1}^k i_{p_i},$$

dado que $i(X, \partial W_n) = 0$, se verifica que

$$\begin{aligned} 0 &= i(X) - \sum_{n=1}^k i_{p_i} \\ \Rightarrow i(X) &= \sum_{n=1}^k i_{p_i}. \end{aligned}$$

□

2.3. Fórmula del índice de Poincaré

Teorema 13. Fórmula del índice de Poincaré. *Si q es una singularidad aislada que posee una descomposición finita de sectores y sean e , h y p el número de sectores elípticos, hipérbólicos y parabólicos, respectivamente, supongamos que $e + h + p > 0$, entonces*

$$i_q = \frac{e - h}{2} + 1.$$

Demostración. La idea de esta demostración es hacer una deformación continua del campo vectorial sobre una vecindad del punto singular hacia \mathbb{S}^1 , de tal manera que la aportación del ángulo de cada uno de los sectores de la descomposición de la singularidad al índice se mantenga invariante, llegados a este punto cada sector será un sector triangular de circunferencia, en ese momento estudiaremos el aporte de cada sector al índice.

Empecemos pues tomando una vecindad V del punto q , tal que el campo vectorial está bien definido. Supongamos que $X|_V$ tiene sectores elípticos e hipérbólicos, de lo contrario tendremos que $i_q = 1$; por definición ∂V es una trayectoria cerrada simple, además los vectores de X serán transversales en todos los puntos de ∂V a excepción de aquellos puntos de tangencia de los sectores elípticos s_1, s_2, \dots, s_e (donde la tangencia es interna) y los puntos de tangencia de los sectores hipérbólicos r_1, r_2, \dots, r_h (donde la tangencia es externa). Ahora ordenamos estos puntos de tangencia como q_1, q_2, \dots, q_n , $n = e + h$, respetando el orden cíclico de ∂V y tomamos puntos intermedios $p_k \in (q_k, q_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$ y $q_0 = q_n$, como se muestra en la figura 2.10.

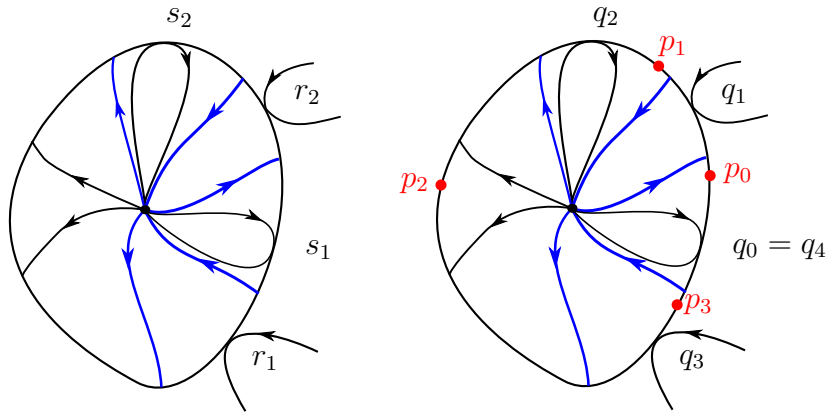


Figura 2.10: Descomposición no trivial de sectores

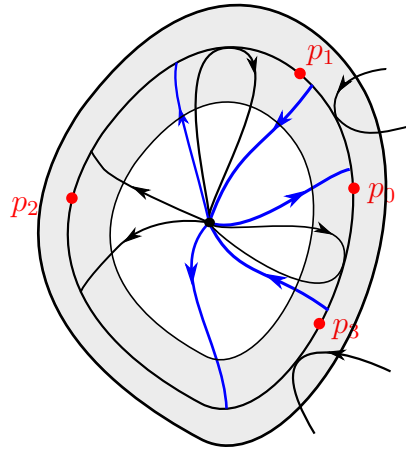
Tomamos una parametrización

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{S}^1 &\rightarrow \partial V \\ \rho(e^{2\pi ik/n}) &\mapsto p_k, \end{aligned}$$

de tal manera que $X(p_0)$ apunta hacia afuera. Dado que el número de sectores es finito (en el mismo sentido de la definición 18) y $e + h = n$ es un número par entonces $X(p_k)$ apunta hacia afuera cuando k es par y hacia adentro cuando k es impar.

Definamos el vector normal a ρ como $N(e^{2\pi it})$ y la aplicación que forma un anillo de radio ϵ al rededor de ρ como

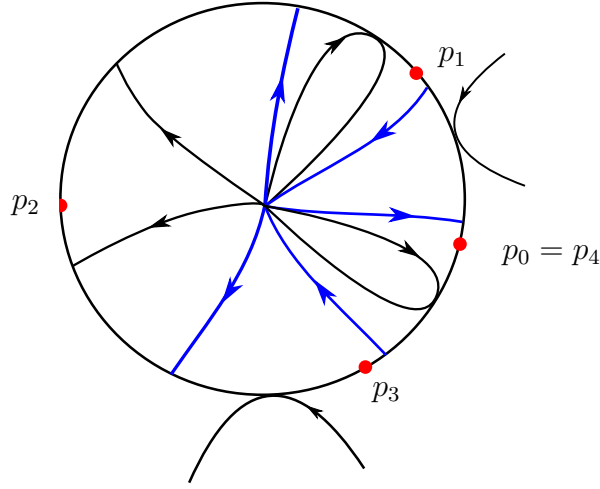
$$\begin{aligned} R : \mathbb{S}^1 \times (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (e^{2\pi it}, s) &\mapsto \rho(e^{2\pi it}) + s N(e^{2\pi it}). \end{aligned}$$

Figura 2.11: Anillo dado por la aplicación R

Notamos que $\frac{\partial R}{\partial t}$ y $\frac{\partial R}{\partial s}$ (los vectores tangente y normal a R) son linealmente independientes para $t \in [0, 1]$ y $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, entonces dR es invertible y del hecho que R es C^1 , podemos ocupar el teorema de la función inversa, es decir, existe una vecindad U de $R(e^{2\pi it}, s)$ en donde $(dR)^{-1}$ esta bien definida y es continua ya que R es biyectiva, por lo tanto genera un difeomorfismo con su imagen para $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño. Ahora definimos el campo vectorial Y sobre \mathbb{S}^1

$$Y(2^{2\pi it}, 0) = (dR_{e^{2\pi it}, 0})^{-1} X(\rho(e^{2\pi it})),$$

como una reparametrización continua de X sobre $\partial\rho$, como se muestra en la figura (2.12), de modo que $i(X, \partial\rho) = i(Y, \mathbb{S}^1)$, además se mantiene el mismo número de sectores y puntos de tangencia, así que seguiremos llamándolos como lo hemos hecho hasta ahora.

Figura 2.12: Deformación del campo X sobre \mathbb{S}^1

Dado que el índice es invariante si un campo vectorial lo hacemos unitario podemos tomar vectores de la forma $\frac{Y(p)}{\|Y(p)\|}$ en el campo $Y_{\mathbb{S}^1}$. Sobre \mathbb{S}^1 tomemos vecindades $V_K = (p_k - \epsilon, p_k + \epsilon) \subset \mathbb{S}^1$ donde $\epsilon > 0$ es tan pequeño como sea necesario para que no hayan puntos de tangencia q_1, \dots, q_n dentro de V_k , para poder hacer una deformación continua de tal manera que cada sector de la descomposición inicial del punto singular q se convierta en una sección triangular de ángulo $m = e + h + p$ sobre la circunferencia unitaria. Para cada k par tomamos la aplicación dentro de V_k

$$Y(e^{2\pi it}) = e^{2\pi it(\frac{k}{n}(1-s) + s(\frac{k\pi}{n} + \pi))}, \quad (2.1)$$

donde tenemos tangencia interna y para cada k impar tomamos

$$Y(e^{2\pi it}) = -e^{2\pi it(\frac{k}{n}(1-s) + s(\frac{k\pi}{n} + \pi))}, \quad (2.2)$$

en ambos casos $s = n(t - \frac{k}{n})$; después de esta deformación podemos suponer que el campo vectorial Y está dado por (2.1) y (2.2) dependiendo si hay tangencia interna o externa en p_k, p_{k+1} . En este punto ya tenemos a cada uno de los sectores como una sección triangular de la circunferencia unitaria de ángulo $\frac{2\pi}{m}$, $m = e + h + p$, como se muestra en la figura (2.13).

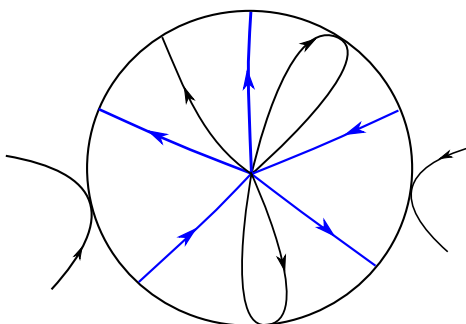


Figura 2.13:

Sea σ una circunferencia de radio r lo suficientemente pequeña como para que no haya otro punto singular dentro de ella en el campo vectorial Y , estudiaremos entonces la contribución al índice de cada sector triangular.

1. Un **sector triangular parabólico** con un ángulo $\frac{2\pi}{m}$ inicia en $\varphi(0) = \alpha$ y termina en $\varphi(\frac{2\pi}{m}) = \alpha + \frac{2\pi}{m}$, es decir, su contribución es un ángulo de $\frac{2\pi}{m}$, como se ve en la figura (2.14).

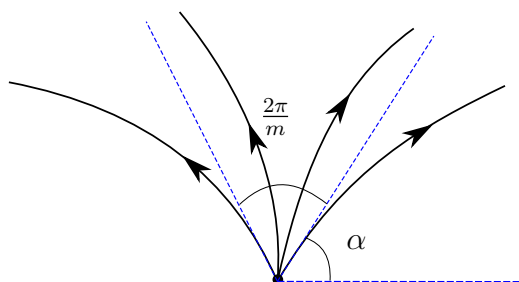


Figura 2.14: Sector parabólico

2. Un **sector triangular hiperbólico** con ángulo $\frac{2\pi}{m}$ que inicia en $\varphi(0) = \alpha$ termina en $\varphi(\frac{2\pi}{m}) = \alpha + \frac{2\pi}{m} - \pi$, es decir contribuye con un ángulo de $\frac{2\pi}{m} - \pi$ como se muestra en la figura (2.15)

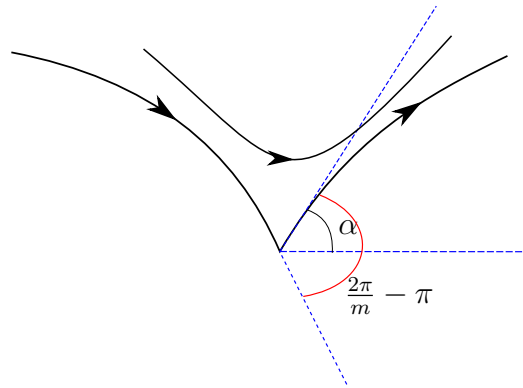


Figura 2.15: Sector hiperbólico

3. Un **sector elíptico** con un ángulo de $\frac{2\pi}{m}$ que inicia en $\varphi(0) = \alpha$ y termina en $\varphi(\frac{2\pi}{m}) = \alpha + \frac{2\pi}{m} + \pi$, como se muestra en la figura (2.16).

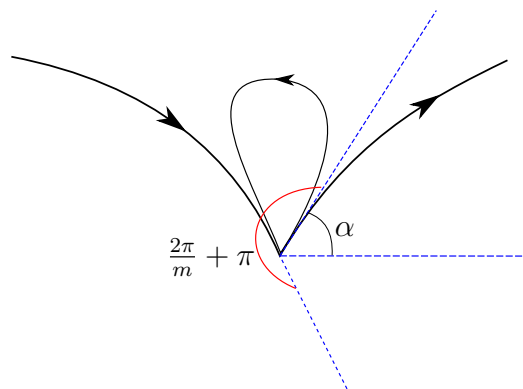


Figura 2.16: Sector elíptico

Haciendo algunos cálculos aritméticos sencillos tenemos que

$$\begin{aligned}i_q = i(q, \sigma) &= \frac{\sum_{j=i}^p \frac{2\pi}{m} + \sum_{j=1}^h (\frac{2\pi}{m} - \pi) + \sum_{l=1}^e (\frac{2\pi}{m} + \pi)}{2\pi} \\&= \frac{p\frac{2\pi}{m} + h(\frac{2\pi}{m} - \pi) + e(\frac{2\pi}{m} + \pi)}{2\pi} \\&= \frac{2\pi(p+h+e)}{m2\pi} + \frac{\pi(e-h)}{2\pi}, \quad \text{como } m = e + h + p \\&= 1 + \frac{e-h}{2}.\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Estabilidad estructural en \mathbb{S}^2

En este capítulo todos los resultados y ejemplos de campos vectoriales serán siempre sobre \mathbb{S}^2 , probaremos un resultado increíble, el teorema de Poincaré-Hopf el cual establece que la suma de los índices de todos los puntos singulares de un campo vectorial sobre la esfera es 2, que coincide con la característica de Euler de esta superficie. En otras palabras nos da información para campos vectoriales que pueden ser definidos sobre \mathbb{S}^2 dadas las propiedades topológicas de la esfera, también mostraremos el teorema de Poincaré-Bendixson en esta superficie y por último abordaremos la estabilidad estructural de los campos definidos sobre \mathbb{S}^2 . Antes de todo veamos la forma que tiene un campo vectorial definido sobre la esfera.

3.1. Campos vectoriales sobre la esfera

Definición 27. Sea X un campo vectorial sobre la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, es decir, que a cada punto $p \in \mathbb{S}^2$ se asigna un vector $X(p) = (X_1(p), X_2(p), X_3(p))$ tal que las componentes $X_1(p)$, $X_2(p)$, $X_3(p)$ son continuas y dependen de p , el campo vectorial X es llamado campo vectorial tangente a \mathbb{S}^2 si para todo $p \in \mathbb{S}^2$, $X(p)$ está en el plano tangente $T_p\mathbb{S}^2$ en el punto p .

Es muy importante mencionar que todos los lemas antes de la prueba del teorema 10, de Poincaré-Bendixson en el plano, se pueden demostrar de una forma análoga para \mathbb{S}^2 , dado que localmente \mathbb{S}^2 es homeomorfa a un plano, por lo tanto veamos el teorema de Poincaré-Bendixson en la esfera.

Teorema 14. Teorema de Poincaré-Bendixson en la esfera \mathbb{S}^2 . Sea $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en \mathbb{R}^3 tal que $p \in \mathbb{S}^2 =$

$\{(x_1, x_2, x_3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1)\}$ entonces $\varphi(t, p) \in \mathbb{S}^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si X tiene un número finito de puntos singulares en \mathbb{S}^2 , entonces el conjunto ω -límite de una órbita que pasa por el punto $p \in \mathbb{S}^2$ cumple las mismas condiciones que el teorema de Poincaré-Bendixson en \mathbb{R}^2 .

Demostración. I) Si el campo $X \in \mathcal{X}^r(\mathbb{S}^2)$ tiene una órbita cerrada γ .

Sea $p \in \mathbb{S}^2$ y sea σ_p^+ la semi-órbita positiva que pasa por el punto p contenida en γ que por hipótesis es cerrada y como está contenida en \mathbb{S}^2 entonces es compacta, tomemos a Σ como una sección transversal que pasa por p . Escojamos un punto $q \in \Sigma \cap \omega(p)$ y al tomar a γ como curva de Jordan entonces podemos aplicar el lema 5 y con esto $\omega(p)$ corta a Σ en una sucesión monótona creciente $\{\sigma(t_n)\}$ de modo que q es el límite de dicha sucesión y por el lema 7 tenemos que $\omega(p) = \gamma$

II) No hay órbitas cerradas.

a) $\omega(p)$ no contiene puntos regulares.

Como X tiene un número finito de singularidades y dado que $\omega(p)$ es conexo entonces la órbita γ_p no puede tener como ω -límite a dos puntos singulares distintos, entonces podemos concluir que $\omega(p)$ es un único punto singular.

b) $\omega(p)$ tiene puntos regulares.

Supongamos que $\gamma_q \subset \omega(p)$, como no hay órbitas cerradas entonces por el lema 7, $\omega(\gamma_q)$ no contiene puntos regulares y por la invarianza del flujo sobre el ω -límite, tenemos que $\omega(\gamma_q) \subset \omega(p)$, por el hecho que X tiene un número finito de singularidades y los conjuntos α y ω -límite son conexos, entonces tanto $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ son puntos singulares.

□

Ejemplo 11. Sea X un campo vectorial sobre \mathbb{S}^2 como se muestra en la figura (3.1), los polos norte y sur son singularidades y el ecuador una órbita cerrada, las demás órbitas tienen como inicio los polos y terminan en el ecuador. Sea $\varphi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa de clase C^∞ la cual se anula precisamente en el ecuador de la esfera, consideremos entonces el campo vectorial $Y = \varphi \circ X$, entonces cada punto en el ecuador es un punto singular del campo vectorial Y y el ω -límite de cada punto p cerca de cada polo o el ecuador es el mismo ecuador. Este ejemplo muestra que el teorema de Poincaré-Bendixson no es válido sin las hipótesis de un número finito de singularidades.

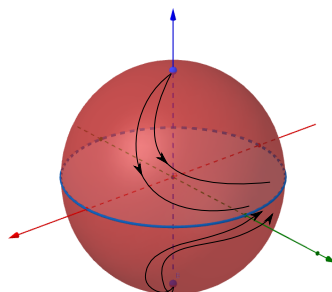


Figura 3.1:

Ejemplo 12. Sea X un campo vectorial sobre \mathbb{S}^2 como se muestra en la figura (3.2), el campo vectorial X tiene dos singularidades ubicadas en el polo norte y polo sur y una órbita cerrada γ .

Las órbitas en el hemisferio norte tienen como α -límite al polo norte P_n y como ω -límite a la curva cerrada γ . En el hemisferio sur, el polo es el centro de una rosa con infinitos pétalos acotados por una órbita que empieza y termina en P_s , las demás órbitas tienen como α -límite a la curva cerrada γ y la frontera de la rosa como ω -límite.

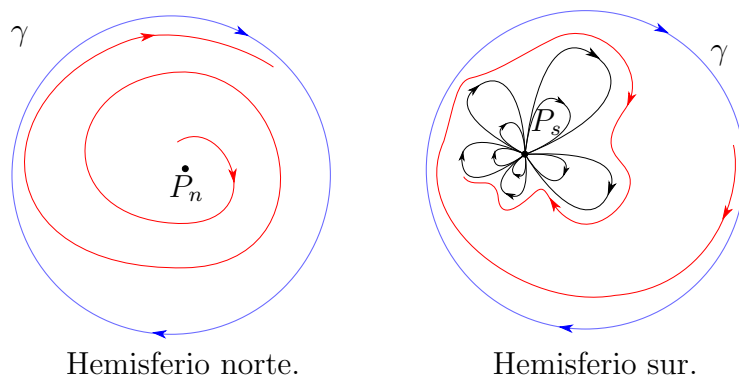


Figura 3.2:

Lo que ocurre en cada pétalo, es que dentro de cada uno hay una familia infinita de curvas cerradas que inician y terminan en el polo sur, como se muestra en la figura (3.3).

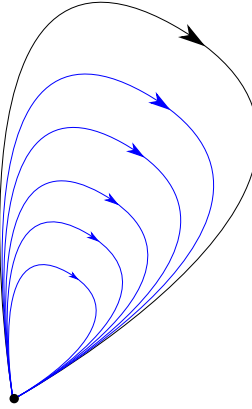


Figura 3.3: Interior de cada pétalo

3.2. Estabilidad estructural en la esfera

Para hablar de estabilidad estructural, tenemos que tener en cuenta que los campos vectoriales tienen cierta topología que a continuación mencionaremos, también, una componente muy importante en esta parte es la equivalencia topológica, ya que en este sentido consideremos al espacio $C^r(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$ como las aplicaciones de clase $0 \leq r < \infty$ definidos sobre \mathbb{S}^2 que tiene la estructura natural de un espacio vectorial sobre $C^r(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$, es decir, si $f, g \in C^r(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}(f + g)p &= f(p) + g(p) \\ (\lambda f)p &= \lambda f(p).\end{aligned}$$

Tomemos una cobertura finita de \mathbb{S}^2 por conjuntos abiertos V_1, V_2, \dots, V_k tales que cada V_i está contenido en el dominio de una carta local (x_i, U_i) tal que

$$\begin{aligned}x_i(U_i) &= B(2) \\ x_i(V_i) &= B(1),\end{aligned}$$

donde $B(2)$ y $B(1)$ son bolas centradas en el origen de \mathbb{R}^2 de radios 2 y 1, respectivamente, y consideramos la norma en el espacio $C^r(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$.

Definición 28. Sea $f \in C^r(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$ y

$$f^i = f \circ x_i^{-1} : B(2) \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Definimos la norma de f en este espacio como

$$\|f\|_r = \max_i \sup \{ \|f^i(u)\|, \|df^i(u)\|, \|d^2 f^i(u)\|, \dots, \|d^r f^i(u)\|; u \in B(1) \}.$$

Proposición 10. $\|\cdot\|_r$ es una norma completa.

Demostración. Primero mostraremos que $\|\cdot\|_r$ es una norma.

- $\|f\|_r = 0$ si y solo si $f = 0$.

$$\|f\|_r = 0$$

$$\iff \max_i \sup \{ \|f^i(u)\|, \|df^i(u)\|, \|d^2 f^i(u)\|, \dots, \|d^r f^i(u)\|; u \in B(1) \} = 0$$

$$\iff \forall u \in B(1), \quad \|d^j f^i(u)\| = 0$$

$$\iff \forall u \in B(1), \quad d^j f^i(u) = 0$$

$$\iff f = 0.$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in C^r(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$, entonces $\|\lambda f\|_r = |\lambda| \|f\|_r$.

$$\|\lambda f\|_r = \max_i \sup \{ \|\lambda f^i(u)\|, \|\lambda df^i(u)\|, \|\lambda d^2 f^i(u)\|, \dots, \|\lambda d^r f^i(u)\|; u \in B(1) \}$$

$$= |\lambda| \max_i \sup \{ \|f^i(u)\|, \|df^i(u)\|, \|d^2 f^i(u)\|, \dots, \|d^r f^i(u)\|; u \in B(1) \}$$

$$= |\lambda| \|f\|_r.$$

- Si $f, g \in C^r(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$, entonces $\|f + g\|_r \leq \|f\|_r + \|g\|_r$.

$$\|f + g\|_r = \max_i \sup \{ \|(f^i + g^i)u\|, \|d(f^i + g^i)u\|, \dots, \|d^r(f^i + g^i)u\|, u \in B(1) \}$$

$$= \max_i \sup \{ \|f^i(u) + g^i(u)\|, \dots, \|d^r f^i(u) + d^r g^i(u)\|, u \in B(1) \}$$

$$\leq \max_i \sup \{ \|f^i(u)\| + \|g^i(u)\|, \dots, \|d^r f^i(u)\| + \|d^r g^i(u)\|, u \in B(1) \}$$

$$= \max_i \sup \{ \|f^i(u)\|, \|df^i(u)\|, \dots, \|d^r f^i(u)\|; u \in B(1) \} +$$

$$\max_i \sup \{ \|g^i(u)\|, \|dg^i(u)\|, \dots, \|d^r g^i(u)\|; u \in B(1) \}$$

$$= \|f\|_r + \|g\|_r.$$

Entonces $\|\cdot\|_r$ es una norma, ahora probemos que toda sucesión de Cauchy con esta norma en $C^r(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$ es convergente para demostrar que es una norma completa.

Sea $f_n : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una sucesión de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_r$, si $p \in \mathbb{S}^2$ entonces $f_n(p)$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^2 , además es convergente, digamos a

$$f(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p),$$

en particular $f_n^i(u) \rightarrow f^i(u)$, $i = 1, 2, \dots, k$, $u \in B(1)$.

Notemos también que $df_n^i(u)$ es una sucesión de Cauchy en $L(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$; dado que \mathbb{S}^2 es normado y \mathbb{R}^2 es Banach con la norma $\|\cdot\|_r$, entonces $L(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$ es un espacio de Banach, por lo que mostraremos que $df_n^i(u)$ converge uniformemente a un operador T^i , utilizando la desigualdad triangular, tenemos

$$\|df_n^i(u) - T^i(u)\| \leq \|df_n^i(u) - df_{n'}^i(u)\| + \|df_{n'}^i(u) - T^i(u)\|,$$

como $df_n^i(u)$ es de Cauchy, entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, n' \geq n_0$ se cumple que $\|df_n^i(u) - df_{n'}^i(u)\| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $u \in B(1)$, por otro lado, para cada $u \in B(1)$, existe $n' \geq n_0$ que depende de u tal que $\|df_{n'}^i(u) - T^i(u)\| < \frac{\epsilon}{2}$, de esto concluimos que si tomamos a $n \geq n_0$, entonces

$$\|df_n^i(u) - T^i(u)\| \leq \epsilon,$$

por lo que la convergencia es uniforme, y como f^i es de clase C^r entonces $df^i = T^i$ y finalmente $f_n \rightarrow f$ utilizando la norma $\|\cdot\|_r$. \square

Cabe mencionar que la topología de $C^r(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$ inducida por la norma $\|\cdot\|_r$, no depende de la cobertura V_1, V_2, \dots, V_k de \mathbb{S}^2 . Una clase de campos vectoriales que tienen un papel importante en la teoría de los sistemas dinámicos, que lleva como nombre **sistemas Morse-Smale**, veremos que esta clase de campos forman un grupo abierto y no vacío y sus elementos son estructuralmente estables. Para definir un conjunto Morse-Smale, necesitaremos algunos conceptos previos como los de a continuación.

Definición 29. Sea $X \in \chi^r(\mathbb{S}^2)$, consideraremos los conjuntos $L_\alpha(X) = \{p \in \mathbb{S}^2 : p \in \alpha(q), \text{ para algún } q \in \mathbb{S}^2\}$ y $L_\omega(X) = \{p \in \mathbb{S}^2 : p \in \omega(q), \text{ para algún } q \in \mathbb{S}^2\}$.

Estos dos conjuntos son invariantes bajo el flujo generado por el campo vectorial X , ya que al tomar la órbita de cualquier punto, tiene por pasado a L_α y por futuro a L_α , también definiremos un punto errante, de la siguiente manera.

Definición 30. Sea $X \in \chi^r(\mathbb{S}^2)$, diremos que $p \in \mathbb{S}^2$ es un punto errante de X si existe una vecindad V de p y un $t_0 > 0$ tal que $X(V, t) \cap V = \emptyset$, para $|t| > t_0$, en otro caso diremos que p es no errante y al conjunto que contiene a todos los puntos no errantes lo denotaremos por $\Omega(X)$.

Definición 31. Sea $X \in \chi^r(\mathbb{S}^2)$ y p un punto singular del campo vectorial. El conjunto $W^s(p)$ de puntos en \mathbb{S}^2 , tales que tienen como ω -límite al punto p es llamado variedad estable de p . Análogamente, el conjunto $W^u(p)$ de puntos en \mathbb{S}^2 tales que tienen como α -límite al punto p es llamado variedad inestable de p . Además, tanto $W^s(p)$ y $W^u(p)$ son invariantes bajo el flujo generado por el campo.

Ahora, definimos los campos vectoriales Morse-Smale, como sigue a continuación.

Definición 32. Sea $X \in \chi^r(\mathbb{S}^2)$, diremos que X es un campo vectorial Morse-Smale si cumple las siguientes condiciones:

1. X tiene un número finito de elementos críticos (puntos singulares y órbitas cerradas) todos siendo hiperbólicos
2. Si σ_1 y σ_2 son elementos críticos de X entonces $W^s(\sigma_1)$ es transversal a $W^u(\sigma_2)$
3. $\Omega(X)$ es la unión de todos los elementos críticos de X .

Nota 7. Un elemento crítico diremos que es atractor o repulsor si el índice es el valor máximo posible o cero respectivamente en caso contrario diremos que es silla; además a los campos vectoriales Morse-Smale los denotaremos por simplicidad como M-S.

Veamos algunos ejemplos de campos vectoriales M-S sobre la esfera \mathbb{S}^2 .

Ejemplo 13. Cualquier campo vectorial sobre \mathbb{S}^2 que cumple las siguientes características es llamado campo polo norte-sur.

- p_n, p_s son singularidades hiperbólicas

- p_n es un atractor
- p_s es un repulsor
- Si $x \in \mathbb{S}^2 - \{p_n, p_s\}$ entonces $\omega(x) = p_n$ y $\alpha(x) = p_s$

Ejemplo 14. En la figura (3.4), se tiene que p_n y p_s son puntos singulares repulsores hiperbólicos y γ es una órbita cerrada atractora hiperbólica y si $x \in \mathbb{S}^2 - \{p_n, p_s\} - \gamma$ entonces $\omega(x) = \gamma$ y $\alpha(x) = p_n$ ó p_s .

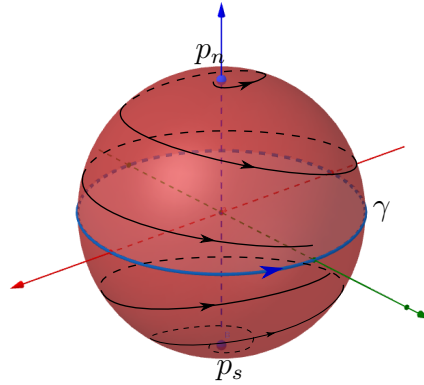


Figura 3.4:

Ejemplo 15. En el campo vectorial sobre \mathbb{S}^2 de la figura (3.5), los puntos p_1, p_2 son atractores hiperbólicos, r_1, r_2 son repulsores hiperbólicos, s_1, s_2 son sillan hiperbólicas y $\Omega(X) = \{p_1, p_2, r_1, r_2, s_1, s_2\}$.

Ejemplo 16. En la figura (3.6) los puntos r_1, r_2, r_3 son repulsores hiperbólicos, el punto s es una silla hiperbólica y γ_1, γ_2 son órbitas cerradas atractoras hiperbólicas y tenemos entonces que $\Omega(X) = \{r_1, r_2, r_3\} \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$.

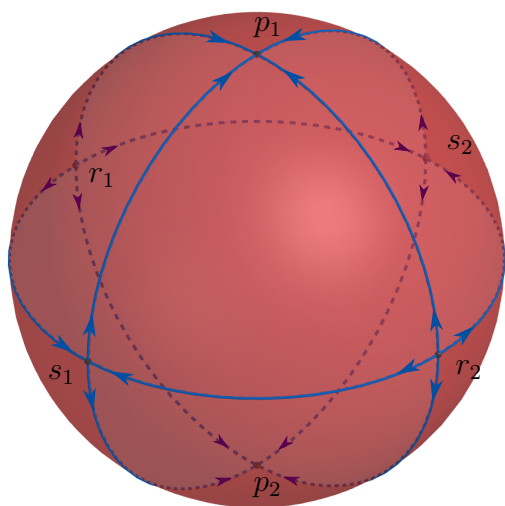


Figura 3.5:

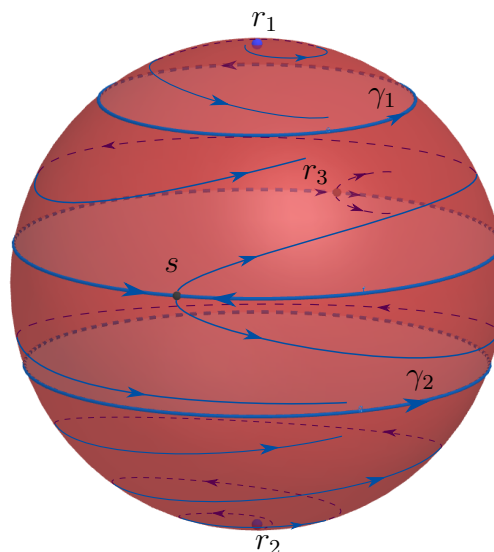


Figura 3.6:

Definición 33. Sea φ una órbita de un campo vectorial X . Definimos una conexión tipo silla, cuando φ tiene como α -límite y ω -límite a dos singularidades de tipo silla.

Proposición 11. Un campo vectorial $X \in \chi^r(\mathbb{S}^2)$ es Morse-Smale si y solo si

1. X tiene un número finito de elementos críticos todos hiperbólicos
2. No tiene conexiones de tipo silla
3. Cada órbita tiene un único elemento crítico como α y ω -límite.

Demostración. Si X es M-S entonces cumple las condiciones de la proposición. Para el recíproco, tomando un campo vectorial $X \in \chi^r(\mathbb{S}^2)$ que satisface las condiciones (1), (2) y (3). La variedad estable atractora y repulsora son de dimensión dos y la condición de transversalidad en el único caso que puede ser rota, si ambas variedades son de tipo silla, cosa que no sucede ya que no hay conexiones silla, por lo tanto será suficiente probar que $\Omega(X)$ está compuesto por elementos críticos.

Primero mostremos que la variedad estable atractora consta de puntos errantes excepto el atractor mismo, en este sentido, supongamos primero que

es un punto singular p , entonces existe un disco $D \subset W^s(p)$ que contiene al punto p , cuya frontera C es transversal a X y por definición tenemos que

$$W^s(p) - \{p\} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(C),$$

el conjunto de puntos errantes es invariante, entonces basta que mostremos que los puntos de C son errantes.

Consideremos los discos $D_1 = X_1(D)$, contenido en el interior de D y $D_{-1} = X_{-1}(D)$ en cuyo interior contiene a D , tomemos ahora un punto $x \in C$ y sea V una vecindad de x disjunta tanto a D_1 como a $\mathbb{S}^2 - D_{-1}$, entonces tenemos que

$$X_t(V) \cap V = \emptyset, \text{ para } |t| > 2,$$

por lo que x es un punto errante.

Ahora supongamos que el atractor es una órbita cerrada γ , en este caso también existe una vecindad U cuya frontera S es transversal a X , si γ es una curva orientada entonces U es homeomorfa a un anillo y S es la unión disjunta de dos curvas cerradas simples, en el caso que γ no sea orientada entonces U es homeomorfa a una banda de Möbius y S es una curva orientada simple, además

$$W^s(\gamma) - \gamma = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(S),$$

por un argumento similar al anterior usado para S , concluimos que $W^s(\gamma) - \gamma$ también consiste de puntos errantes. De manera análoga podemos demostrar que $W^u(\sigma) - \sigma$ consta de puntos errantes si σ es un elemento repulsor.

Por último si $x \in \mathbb{S}^2$ no es un punto singular ni está en una órbita cerrada entonces su α o ω límite son repulsores, ya que no hay conexiones de tipo silla, es decir, x es un punto errante lo cual termina la prueba. \square

Teorema 15. *Sea $X \in \chi^r(\mathbb{S}^2)$, donde $r \geq 2$, X es estructuralmente estable si y solo si es Morse-Smale.*

La demostración de este teorema es extensa y tiene elementos técnicos que quedan fuera de los objetivos de este trabajo, para su demostración hacemos referencia a [3].

3.3. Teorema de Poincaré-Hopf

Así como el Teorema de Gauss Bonnet nos da una relación entre la curvatura gaussiana de una superficie, su característica de Euler y sus ángulos con la topología de la misma, el Teorema de Poincaré-Hopf nos da la relación entre campos vectoriales definidos sobre superficies diferenciables (en nuestro caso la esfera) y la topología de estas superficies, ya que relaciona un invariante topológico global de la esfera como es su característica de Euler con un invariante local como es el índice de un campo vectorial tangente en un punto, en resumen el teorema dice que la suma de los índices de un campo vectorial con un número finito de singularidades aisladas es igual a la característica de Euler.

Teorema 16. Poincaré-Hopf. *Sea X un campo vectorial definido sobre \mathbb{S}^2 y supongamos que tiene un número finito de singularidades, entonces la suma de los índices de dichas singularidades es siempre 2.*

Demostración. Dado que X tiene un número finito de singularidades, podemos encontrar una circunferencia de radio máximo que no contenga a ningún punto singular y sea \mathbb{E}^2 el plano que contiene a \mathbb{S}^1 , entonces trabajaremos con los polos norte y sur respecto a \mathbb{E}^2 . Sea X' la proyección estereográfica del campo vectorial X restringida al hemisferio sur desde el polo norte hacia \mathbb{E}^2 y sea X'' la proyección estereográfica del campo vectorial X restringida al hemisferio norte desde el polo sur hacia el plano \mathbb{E}^2 , ver figura (3.7).

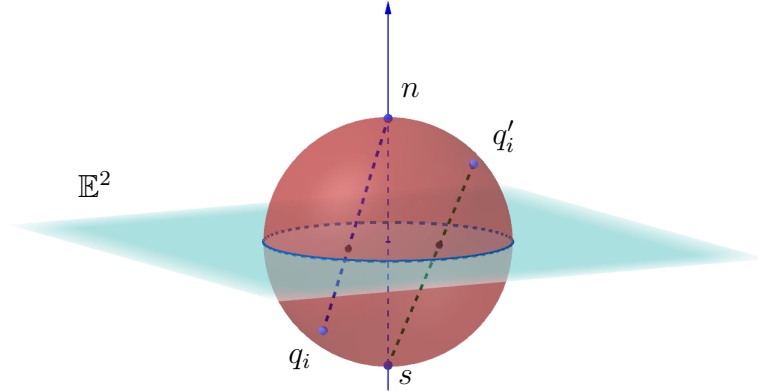


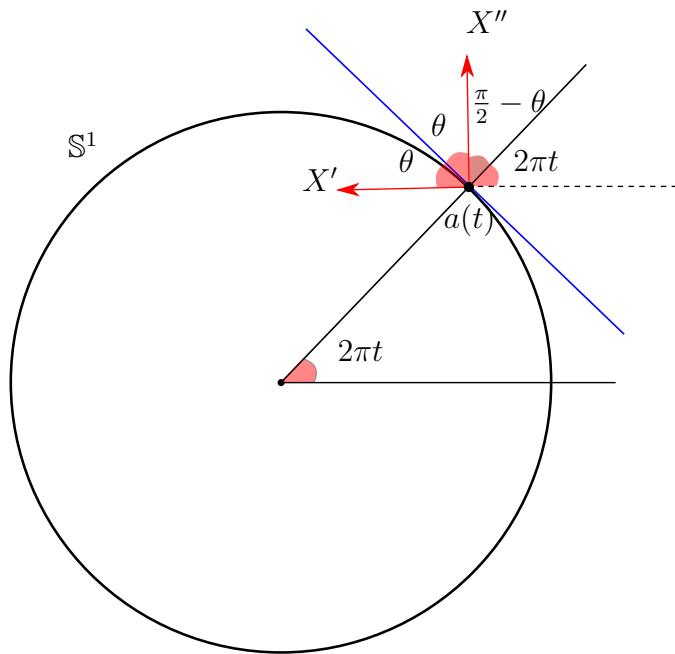
Figura 3.7: Proyección estereográfica del campo vectorial X en \mathbb{S}^2 hacia X' y X'' en \mathbb{E}^2 .

Si q_1, \dots, q_n son los puntos singulares de X en el hemisferio sur con índices i_1, \dots, i_n respectivamente y sean q'_1, \dots, q'_m los puntos singulares del hemisferio norte con índices i'_1, \dots, i'_m respectivamente, por la proposición 9 tenemos en \mathbb{E}^2 que

$$i(X') = \sum_{k=1}^m i'_k$$

$$i(X'') = \sum_{j=1}^n i_j.$$

Es de nuestro interés calcular $i(X') + i(X'')$, para esto analicemos la relación entre X' y X'' , para esto definamos como φ' y φ'' a las funciones ángulo de X' y X'' , respectivamente, sobre los puntos de \mathbb{S}^1 . Para todo punto $a(t) \in \mathbb{S}^1$, por construcción dada por las proyecciones estereográficas los campos vectoriales X' y X'' son simétricos respecto a la recta tangente a \mathbb{S}^1 en el punto $a(t)$, ver figura (3.8) y es fácil ver que para $t \in I$,

Figura 3.8: Campos vectoriales X' y X'' en \mathbb{D}^2

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= 2\pi t + \frac{\pi}{2} + \theta \\ \varphi''(t) &= 2\pi t + \frac{\pi}{2} - \theta \\ \therefore \varphi'(t) + \varphi''(t) &= 4\pi t + \pi.\end{aligned}$$

Entonces haciendo luego algunos cálculos sencillos, vemos que

$$\begin{aligned}i(X') + i(X'') &= \frac{\varphi'(1) - \varphi'(0) + \varphi''(1) - \varphi''(0)}{2\pi} \\ &= \frac{\varphi'(1) + \varphi''(1) - (\varphi'(0) + \varphi''(0))}{2\pi} \\ &= \frac{4\pi(1) + \pi - (4\pi(0) + \pi)}{2\pi} \\ &= \frac{4\pi}{2\pi} \\ &= 2.\end{aligned}$$

□

Corolario 8. *Cualquier campo vectorial X sobre \mathbb{S}^2 debe tener puntos singulares.*

Demostración. Supongamos que el campo vectorial X no tiene puntos singulares, por un argumento similar al del teorema anterior, la ausencia de singularidades implica que $i(X') = i(X'') = 0$, lo cual contradice el hecho que $i(X') + i(X'') = 2$. \square

El corolario anterior es comunmente llamado el teorema de la bola peluda, el cual es una versión intuitiva del teorema de Poincaré-Hopf que podemos interpretar de la siguiente manera, *si visualizamos a cada vector como un "cabello" tangente a la superficie, cualquier peinado que realicemos debe contener un rizo o remolino.* Veamos algunos ejemplos para este importante resultado, utilizando algunos de los campos vectoriales que definimos anterioremente.

Ejemplo 17. Si para todo $p \in \mathbb{S}^2$, $X(p)$ coincide con el vector tangente del paralelo que pasa por el punto p con dirección antihoraria, en este caso tendremos dos singularidades las cuales son los dos polos y cada uno tiene un índice 1, porque ambos son centros, entonces tenemos que $i(X) = 2$ ver figura (3.9).

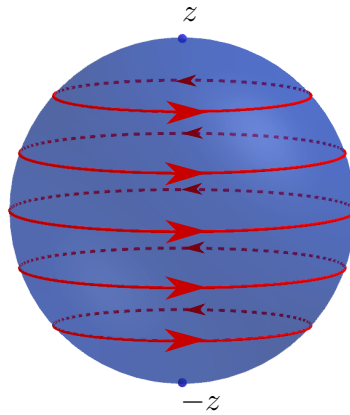


Figura 3.9: El polo norte y polo sur son centros del campo vectorial X .

Ejemplo 18. Si para todo $p \in \mathbb{S}^2$, $X(p)$ coincide con el vector tangente del meridiano que pasa por el punto p con dirección hacia abajo, de nuevo tenemos que los polos son puntos singulares y cada uno tiene índice 1, en

este caso las singularidades son nodos, uno atractor y el otro repulsor, de esto podemos concluir que $i(X) = 2$, ver figura (3.10).

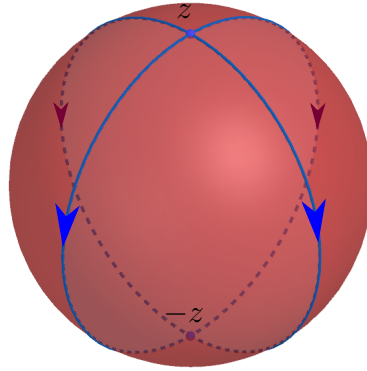


Figura 3.10: El polo norte y polo sur son nodos del campo vectorial X .

Ejemplo 19. En la figura (3.4) los puntos p_n y p_s son repulsores, entonces son de índice 1, por lo tanto

$$i(X) = i(p_n) + i(p_s) = 1 + 1 = 2.$$

Ejemplo 20. En la figura (3.5) los puntos p_1 y p_2 por ser atractores tienen índice 1, respectivamente, de igual forma los puntos r_1 y r_2 los cuales son repulsores también tienen índice 1 cada uno, mientras que los puntos silla s_1 y s_2 tienen índice -1 , por esta razón

$$\begin{aligned} i(X) &= i(p_1) + i(p_2) + i(r_1) + i(r_2) + i(s_1) + i(s_2) \\ &= 4 - 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ejemplo 21. En la figura (3.6) los puntos r_1, r_2, r_3 por ser repulsores tienen índice 1 cada uno, mientras que s , que es un punto silla tiene índice -1 , por lo tanto

$$\begin{aligned} i(X) &= i(r_1) + i(r_2) + i(r_3) + i(s) \\ &= 3 - 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Epílogo

Después de más de cien años de la muerte de Poincaré, los sistemas dinámicos son una de las ramas de mayor actividad en el mundo de las matemáticas. Por sus diferentes vertientes, han desfilado nombres como Arnold, Andronov, Birkhoff, Pontryagin, Peixoto, Kolmogorov, Liapunov, Lorentz, Morse, Smale; por mencionar solo algunos de los ilustres matemáticos que han nutrido con inmortales resultados a los sistemas dinámicos. Los cuales, hoy en día, explican una gran variedad de fenómenos en diversas áreas del conocimiento, y desde luego, un gran número de problemas matemáticos. Para darnos una idea, con un sistema dinámico se puede explicar, desde el movimiento de un péndulo simple, hasta el movimiento planetario. Además de la amplia cobertura fenomenológica, aquellas primeras herramientas desarrolladas por Poincaré, hoy se han multiplicado, tanto que para nombrar algunas, tendríamos que ver con lupa un problema particular.

El teorema de Hartman-Grobman nos da una descripción local de la dinámica alrededor de puntos singulares hiperbólicos, al hacer equivalencia topológica local entre el campo y la parte lineal del mismo. El teorema de Poincaré-Bendixson para campos vectoriales en el plano, en una determinada región, garantiza la existencia de órbitas periódicas. Además, da la existencia de puntos singulares y cada órbita periódica debe rodear una singularidad.

Los campos vectoriales Morse-Smale son una clase de campos que cumplen ser estructuralmente estables en la esfera (superficies de dimensión 2), podemos decir entonces que un campo vectorial estructuralmente estable no se ve afectado bajo pequeñas perturbaciones en sus condiciones iniciales.

El teorema de Poincaré-Hopf el cual exige que la suma de los índices de todas las singularidades de un campo vectorial sea igual a la característica de Euler de la superficie sobre la que se encuentra definido, este resultado suele ser ilustrado con el conocido corolario de La Bola Peluda cuyo enunciado intuitivo dice que no se puede peinar una bola de forma continua sin formar en ella ningún remolino, es decir, que no podemos tener definido un campo vectorial tangente continuo sobre una esfera sin singularidades.

Las teoría desarrollada en este trabajo es fundamental para iniciar trabajos de investigación en diferentes temas de sistemas dinámicos tales como *Es-*

tabilidad Estructural en Campos Vectoriales Suaves Por Partes, Estabilidad Estructural local de Ecuaciones Diferenciales Binarias, Análisis Dinámico de Curvas Principales y Líneas Asintóticas en Superficies. En dichos temas existen una gran variedad de problemas aún no resueltos y que pueden ser abordados a partir de los conceptos y técnicas expuestas en este texto.

Bibliografía

- [1] Freddy Dumortier, Jaume Llibre , Joan C. Artes, *Qualitative theory of planar differential systems* (Springer, 2006).
- [2] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems, volume 7 of Texts in applied mathematics*. Springer, Berlin Heidelberg New York, third edition, 2001.
- [3] M. Peixoto, *Structural stability on two-dimensional manifolds, Topology*, 1 (1962), 101-120.
- [4] J. Palis e W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. New York: Springer-Verlag, 1982
- [5] J. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, volume 11 of Euclid Projecto. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979
- [6] Morris W, Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney, *Differential Equation, Dynamical systems and an introduction to Chaos*