

Universidad de El Salvador
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Física



Trabajo de graduación

**“Pruebas de modelos inflacionarios basadas en observaciones de radiación
cómica de fondo”**

Presentado por
William Alexander Larin Escobar

Para optar al grado de:
Licenciado en Física

Asesores
Ph.D. Saúl Noé Ramos Sánchez
M.Sc. Raúl Antonio Henríquez Ortiz

Autoridades Universitarias

Rector

Msc. Roger Armando Arias

Secretario General

Ing. Francisco Alarcón

Fiscal General

Licdo. Rafael Humberto Peña

Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

Msc. Mauricio Lovo

Director de la Escuela de Física

Msc. César Batres

*Dedicada a mi madre Yaneth Escobar y mi abue-
la Inés Torres.*

Agradecimientos

Quiero agradecer principalmente a los dos grandes pilares de mi vida, mi madre Yaneth y mi abuela Inés, que siempre me han brindado su amor, su apoyo y su confianza, sin ellas no hubiese llegado hasta donde estoy.

A mis hermanos Fidel y Fabio, que siempre me han dado ánimos para continuar, que siempre confían en mi y me consideran todo un hombre de ciencia aunque aún no lo sea.

A mis amigos de toda la vida: Jenni, Fátima, Amilcar, Mariella y Tatiana, con quienes he vivido muchas gratas experiencias y con quienes hemos compartido tanto.

A mis amigos de la facultad: Alexis, Ismael, Diego, Sergio, Kevin, Marcelo, con quienes hemos pasado por tanto y nos hemos apoyado para que ninguno se quede atrás. Gracias por darme su apoyo y por ayudarme.

A mi ex-novia Lisseth, con quien compartí toda mi vida universitaria y con quien viví tantas experiencias. Gracias por haberme apoyado tanto, por estar conmigo y motivarme a seguir adelante, espero que donde estés seas feliz.

A mis profesores, que me enseñaron tanto, especialmente al M.Sc. Raúl, que me ha apoyado en el desarrollo de la Tesis. También al Dr. Saúl Ramos-Sánchez, quien a pesar de no ser mi profesor se tomó el tiempo de dirigir la investigación y redacción de esta tesis. Muchísimas gracias a ambos, por todo el apoyo, la dedicación y el esfuerzo que realizaron, con ustedes aprendí mucho, me motivan a seguir en este hermoso camino de la física y en especial, de la cosmología.

Este trabajo fue parcialmente apoyado por los proyectos CONACyT-México F-252167 y 278017.

Índice general

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introducción | 1 |
| 2 | Elementos básicos de cosmología | 7 |
| 2.1 | Modelo estándar cosmológico | 7 |
| 2.2 | Inflación | 10 |
| 2.2.1 | Problemas del modelo estándar cosmológico | 10 |
| 2.2.2 | Inflación cósmica | 11 |
| 2.2.3 | Desarrollo de la teoría de la inflación. | 13 |
| 2.2.4 | Aproximación <i>slow-roll</i> | 16 |
| 2.3 | Radiación cósmica de fondo (CMB) | 19 |
| 2.4 | Algunos modelos inflacionarios | 20 |
| 2.4.1 | Modelo de Tipo Ia | 21 |
| 2.4.2 | Modelo de tipo Ib | 22 |
| 2.4.3 | Modelo Tipo Ic | 22 |
| 3 | Modelos de inflación caótica | 23 |
| 3.1 | Modelo Caótico | 23 |
| 4 | Teorías $f(R)$ | 27 |
| 4.1 | Ecuaciones de campo en el formalismo métrico | 28 |
| 4.2 | Transformación conforme | 30 |
| 4.3 | Equivalencia con la teoría de Brans-Dicke | 33 |
| 4.4 | Teorías $f(R)$ y campos escalares | 34 |
| 4.5 | Dinámica en el marco de Einstein | 35 |
| 4.6 | Inflación en teorías $f(R)$ | 37 |
| 5 | Starobinsky en el marco de Jordan | 39 |
| 5.1 | Modelo inflacionario de Starobinsky en teorías $f(R)$ | 39 |
| 5.2 | Función $f(R)$ para la métrica de FRW | 41 |
| 5.3 | Modelo de Starobinsky | 43 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.4 | Extensión exponencial del modelo de Starobinsky | 44 |
| 5.5 | Campos escalares como interpretación de $f(R)$ | 45 |
| 6 | Modelo Caótico y modificación de Starobinsky | 51 |
| 6.1 | Potencial inflacionario en la extensión exponencial del modelo de Starobinsky | 51 |
| 6.2 | Comparación del modelo modificado de Starobinsky con resultados de Planck | 59 |
| 6.3 | Comparación con una modificación del potencial del modelo de Starobinsky. | 66 |
| 6.4 | Inflación caótica | 68 |
| 7 | Conclusiones | 71 |
| A | Función $f(R)$ de modificación de Hansel | 75 |
| | Bibliografía | 81 |

Capítulo 1

Introducción

El modelo que mejor reproduce todas las observaciones cosmológicas es el llamado *modelo estándar cosmológico*, o bien, model Λ -*CDM* (por Λ -*Cold Dark Matter*), donde Λ se refiere a la constante cosmológica asociada a la energía oscura y CDM se refiere a la materia oscura fría, componentes fundamentales de nuestro Universo. Este modelo tiene como principio fundamental el llamado *principio cosmológico*, el cual, basándose en diversas observaciones, establece que el Universo es homogéneo e isotrópico. Este principio conduce a la formulación consistente de un espacio-tiempo dinámico descrito en términos de la relatividad general mediante la llamada *métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW). Esta métrica, compatible con el principio cosmológico, admite que la componente espacial del espacio-tiempo sea plana o curva. Observacionalmente, diversas mediciones han conducido al consenso de que el espacio en el que vivimos es plano. Dado que el principio cosmológico admite también un espacio curvo, es natural preguntarse cuál es el origen de la “planitud” del Universo. Además de esta interrogante, surge otra de igual importancia, relacionada con la isotropía y homogeneidad del Universo, ya que estas condiciones resultan muy difíciles de lograr. Para lograr brindar solución a estos problemas, el problema de la planitud y el problema del horizonte respectivamente, y a otros que presenta el modelo cosmológico moderno, se propuso la existencia de un periodo en el que el Universo creció muy rápidamente, al que se le denominó *inflación* [1, 2, 3, 4, 5].

La inflación corresponde a una época de expansión exponencial (y, en consecuencia, acelerada) del espacio-tiempo del Universo. La teoría indica que ocurrió entre los 10^{-36} s y los 10^{-32} s después de la *gran explosión* que originó nuestro Universo. Una característica importante de este escenario es la suposición de que en el inicio de la historia cosmológica hubo una etapa de evolución en la que el Universo se encontraba en un estado inestable, similar al vacío (falso vacío), con una gran densidad de energía. Starobinsky [1] presentó una propuesta similar, en la que la densidad de estado de alta energía se logró mediante correcciones de espacio curvo al tensor de energía-momento de un campo escalar. El estado de campo escalar empleado en la versión original de la inflación [3, 2] se llama vacío falso, ya que el estado actúa temporalmente como si fuera el estado de menor densidad de energía posible. Clásicamente, este estado sería completamente estable, porque no habría energía

disponible para permitir que el campo escalar atraviese la barrera de energía potencial que lo separa de los estados de menor energía. Trabajando con mecánica cuántica, sin embargo, el estado decaería por efecto túnel. Inicialmente, se esperaba que este proceso de tunelamiento podría acabar con la inflación con éxito, pero pronto se descubrió que la aleatoriedad de la descomposición del falso vacío produciría inhomogeneidades catastróficamente grandes [6, 7].

La propuesta de la teoría inflacionaria no solo proporciona una manera elegante de resolver los problemas de planitud y de horizonte, sino que también genera perturbaciones de densidad como semillas para la formación de estructura a gran escala en el Universo [8, 9, 10]. De hecho, inflación proporciona un mecanismo causal para generar espectros de perturbaciones cosmológicas casi de escala invariante, lo cual es consistente con las observaciones. Las perturbaciones en el espectro de energía del Universo, impresas durante la inflación, pueden ser el origen de la estructura a gran escala en el Universo. Estas perturbaciones pueden ser estudiadas mediante las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (o CMB, por sus siglas en inglés). Esta radiación fue descubierta en 1964 por Penzias y Wilson, la cual es la señal más antigua que se tiene del Universo y es una de las predicciones del modelo Λ -CDM. La CMB fue emitida cuando el Universo tenía 380,000 años de edad, correspondiente a la época del desacoplamiento, y posee hoy una temperatura de $T = 2.726K$. Esta radiación parece ser isótropa, como el Universo a gran escala, pero una observación más detallada indica que ésta posee anisotropías, las cuales son aprovechadas para entender y especular sobre el desarrollo del Universo temprano. La CMB cumple un rol muy importante para el modelo cosmológico. Nos permite determinar diversos parámetros como la densidad de bariones, el parámetro espacial de curvatura, el índice espectral escalar n_s o el cociente tensor-a-escalar r , entre otros. Observaciones hechas por la sonda Planck [11] proporcionan los valores más recientes de todos los parámetros cosmológicos. Para estos parámetros Planck proporciona los límites $n_s = 0.9665 \pm 0.0038$ con un nivel de confianza del 68 %, y $r < 0.064$ con un nivel de confianza de 95 %, datos que me sirvieron para hacer la comparación entre los modelos inflacionarios que son el objeto de estudio de esta tesis.

Desde el desarrollo de la teoría se han propuesto muchos modelos de inflación. Estos modelos incluyen el de inflación natural [12], que se caracteriza por (pseudo-)bosones de Nambu-Goldstone (PNGBs), que surgen cuando una simetría global aproximada se rompe espontáneamente. Otro modelo inflacionario es el conocido como inflación de Higgs [13], que establece que el campo del inflatón es el campo de Higgs no mínimamente acoplado a la gravedad. Existen enfoques más complejos, como la inflación de módulos de Kähler [14], que utiliza teoría de cuerdas de tipo IIB con compactificaciones de flujo vía Calabi-Yau. Todos estos pueden ser desarrollados ya que la inflación se puede abordar de distintas maneras, pero los modelos son aceptables sólo si resuelven los problemas del modelo cosmológico y se tiene compatibilidad con las observaciones de la CMB.¹ A pesar de la vasta variedad de modelos inflacionarios que se han desarrollado, en esta tesis de licenciatura he estudiado dos de los más antiguos, los cuales son el modelo de inflación caótica y el modelo de Starobinsky. Estos dos modelos fueron propuestas de enorme relevancia para la

¹Para el lector interesado en otros modelos de inflación, sugiero consultar las ref. [15, 16, 17, 18], donde se presentan recopilaciones de diversas propuestas de inflación.

teoría porque el primero genera inflación a partir de condiciones iniciales caóticas y el otro nace a partir de modificaciones a la gravedad. En especial, este último utiliza el escalar de curvatura de Ricci en la métrica de Friedmann-Robertson-Walker. El desarrollo de los modelos inflacionarios, sus propuestas teóricas, sus enfoques y las características particulares de cada tipo de inflación son algunas de las razones por las que he estudiado estos dos modelos específicos, junto con algunas de sus modificaciones.

El primer modelo que estudié fue el propuesto por Starobinsky [1], el cual es un ejemplo particular de un tipo de extensiones de la gravedad general, conocidas como *teorías $f(R)$* [19, 20]. Estas teorías son un conjunto de modificaciones o extensiones de la relatividad general, en las cuales la densidad Lagrangiana es una función arbitraria de R . Estas teorías nacen con el propósito de resolver algunos de los problemas que tiene la relatividad general con la materia y la energía oscura, debido a que al introducir una función arbitraria dependiente de R puede haber libertad para explicar fenómenos como la expansión acelerada o la formación de estructura *sin recurrir* a la materia o la energía oscura. Ya que el modelo se encuentra descrito por su función $f(R)$, hice la variación de la acción y apliqué una transformación conforme para expresar el potencial del modelo en términos de un campo escalar efectivo ϕ . Con este potencial me fue posible obtener los parámetros de inflación n_s y r , valores que me permitieron constatar la estabilidad del modelo de Starobinsky ante modificaciones. Para este modelo comparé dos modificaciones. La primera, desarrollada como una extensión exponencial propuesta por Fabris et.al. [21], condujo a variaciones pequeñas en los resultados de los parámetros inflacionarios. La segunda fue estudiada a profundidad por el físico Hansel Gordillo en su tesis “Cosmología de extensiones de la Relatividad General” [22], donde se presenta una modificación del modelo en el espacio de campos, la cual conduce a una mayor desviación en los resultados de los parámetros. En esta tesis discuto la razón de estos dos resultados.

El segundo modelo que estudié fue el de inflación caótica. Este está desarrollado sobre la base de la relatividad general y se presenta como un potencial cuadrático en términos de un campo escalar ϕ . Este modelo tiene el atractivo de eliminar la dependencia de las condiciones iniciales, ya que propone que en un inicio se tienen condiciones caóticas (de allí el nombre). El modelo inicialmente presentaba buenos resultados, pero las mediciones actuales de la radiación cósmica de fondo realizada por Planck dejan a un lado el modelo, ya que sus predicciones no coinciden con los límites de los parámetros.

La investigación en esta tesis tiene el objetivo de estudiar dos de las propuestas más prominentes de modelos inflacionarios, y conocer cómo sus predicciones contrastan con las observaciones modernas de la CMB. Este estudio permite también establecer el punto de partida para desarrollar trabajos más completos, en los que predicciones para la época de recalentamiento, para la generación de distorsiones gravitacionales y ondas gravitacionales primordiales, y para la formación de estructura puedan ser igualmente contrastadas con las mediciones actuales.

Organización de la tesis

La estructura de mi tesis es la siguiente. En el capítulo 2 presento de forma breve los elementos básicos de la cosmología, iniciando por explicar qué es el modelo estándar cosmológico y en qué principios está basado. Este modelo tiene algunos problemas; los dos más conocidos son el problema de la planitud y el problema del horizonte. Estos pueden solucionarse si se incluye una época de expansión acelerada del Universo temprano, llamada inflación. Esta descripción de los problemas y de la solución a los mismos es presentada en la sección 2.2, donde también explico el desarrollo de esta teoría y la aproximación más utilizada para el estudio de la misma, la aproximación de *slow-roll* o rodamiento lento. En la sección 2.3 hago un resumen de los aspectos más importantes de la CMB, que es hasta ahora el vestigio detectable más útil para estudiar el Universo temprano. Como último punto en este capítulo, en la sección 2.4, describo brevemente la clasificación de los modelos de inflación, que se dividen en tres categorías: *Ia* para modelos de campo grande, *Ib* para modelos de campo pequeño, y *Ic* para modelos híbridos.

El capítulo 3 tiene como protagonista al modelo de inflación caótica. En él describo su origen y la forma en la que se comporta el modelo para un universo dentro del dominio del campo homogéneo ϕ .

El capítulo 4 está dedicado a las teorías $f(R)$, que han sido consideradas alternativas a la relatividad general. En este explico qué son las funciones $f(R)$, cómo se obtienen las ecuaciones de campo en el formalismo métrico, y en la sección 4.2 muestro de manera introductoria qué sucede al aplicar una transformación conforme a la acción. También destaco la equivalencia entre la teoría de Brans-Dicke y las teorías $f(R)$, sección 4.3. Esta equivalencia me permite luego, en la sección 4.4, explicar de qué manera se puede representar un campo escalar (al que denoto también ϕ) en una teoría $f(R)$. En las últimas dos secciones del capítulo discuto la dinámica inflacionaria en un espacio de campos. En particular, presento, como un ejemplo, el caso particular del potencial de Starobinsky. Además, discuto cómo se presenta inflación en las teorías $f(R)$, de forma general.

En el capítulo 5 muestro los primeros resultados teóricos detallados de la tesis. Ahí expongo el cálculo explícito del potencial en términos de un campo escalar ϕ , asociado a una teoría $f(R)$. Para ello, en la sección 5.1, desarrollo la variación de la acción cuya densidad Lagrangiana es expresada en términos de una función $f(R)$, y luego le aplico la transformación conforme descrita en el capítulo anterior para expresar una función potencial de forma general. Entonces me concentro en el caso particular del modelo de Starobinsky como teoría $f(R)$, ver sección 5.5.

En el capítulo 6 presento la segunda parte de mis resultados. Primeramente, discuto la forma completa del potencial para el modelo de Starobinsky con una modificación exponencial en la sección 6.1. Después, expongo la comparación de los parámetros inflacionarios que predice el modelo con las observaciones de las anisotropías de la CMB, presentada en el espacio de parámetros delimitado por Planck, ver sección 6.2. La sección 6.3 del capítulo está enfocada en comparar los resultados de la modificación exponencial del modelo de Starobinsky con otra modificación hecha sobre el potencial original de Starobinsky. En la sección final del capítulo hago una comparación de las predicciones del modelo modificado de Starobinsky con las predicciones del modelo caótico, don-

de se puede evidenciar la enorme diferencia entre los modelos que, a pesar de haber sido propuestos casi al mismo tiempo, han tenido diferentes destinos al ser contrastados con las observaciones.

Finalmente, en el último capítulo escribo las conclusiones a las que llegué como resultado de todo el trabajo realizado en esta tesis, dando por finalizada así la investigación realizada.

Capítulo 2

Elementos básicos de cosmología

La cosmología tiene como base el modelo estándar cosmológico, que nos proporciona una visión muy acertada del origen, evolución y contenido de Universo, este tiene como base la Relatividad General y la validez del principio cosmológico, que supone la homogeneidad e isotropía del Universo a gran escala. A pesar de lo bien fundamentado y de las predicciones que el modelo hace, este tiene varios problemas, que hacen que este se encuentre incompleto. Como una forma de solucionar esto se propone la teoría de la inflación, un periodo de expansión exponencial en universo que se dio entre los $10^{-36}s$ hasta los $10^{-32}s$. A partir de esta propuesta se han desarrollado muchos modelos, que se van mejorando para que puedan describir a la perfección el desarrollo del universo y sean compatibles con los datos que se obtienen del estudio de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB).

Para comprender de mejor manera los modelos que van a ser estudiados, se inicia con un breve repaso sobre Relatividad General en la sección 2.1, posteriormente se explica el origen y desarrollo de la teoría de la inflación en la sección 2.2. Para entender cómo se puede estudiar actualmente la inflación, en la sección 2.3 se desarrolla brevemente la radiación cósmica de fondo (CMB), que es fundamental para probar los antiguos y nuevos modelos. Finalmente en la sección 2.4 se habla un poco sobre los diversos modelos inflacionarios que existen, de forma bastante general.

2.1 Modelo estándar cosmológico

El modelo cosmológico estándar clásico explica la evolución del universo desde la primera fracción de segundo hasta la edad actual de una manera bastante satisfactoria. Se fundamenta en la validez de la Teoría General de la Relatividad, la cual proporciona la teoría del campo gravitatorio y el marco básico para los distintos modelos cosmológicos. Otro aspecto que tiene gran relevancia en el modelo es el principio cosmológico, que supone la homogeneidad e isotropía del Universo a gran escala.

Para describir la evolución del Universo se utiliza normalmente la métrica de Friedmann-Lemaître-

Robertson-Walker (FLRW). La métrica de Friedmann-Robertson-Walker representa la geometría que mejor se adapta al principio cosmológico y a las observaciones de la expansión del universo [23]. Esta fue construida a partir de la hipótesis que el universo se expande (o contrae), es homogéneo e isotrópico geoméricamente a grandes escalas. El intervalo correspondiente esta dado por:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2.1)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala el cual posee dimensiones de longitud, por lo que r es adimensional. ds mide la distancia entre dos puntos del espacio-tiempo separados por dx^μ . El factor de escala permite medir la tasa de crecimiento del Universo a un tiempo t . (r, θ, ϕ) son coordenadas comóviles; una partícula inicialmente en reposo en estas coordenadas permanecerá en reposo, es decir (r, θ, ϕ) serán constantes para esta partícula. La constante k representa el tipo de curvatura del espacio (puede tener valores $+1$ para un universo cerrado, 0 para un universo plano, -1 para un universo abierto).

Supongamos ahora que la dinámica del universo está gobernada por las ecuaciones de Einstein y, además, que se emplean unidades naturales ($c = \hbar = 1$) como una manera de simplificar la notación, obtenemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía momento. Consideremos también que el contenido del universo puede ser modelado como un fluido perfecto. Así el tensor de energía momento adopta la forma

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(\rho(t), -P, -P, -P), \quad (2.3)$$

donde $\rho(t)$ corresponde a la densidad de energía y P a la presión del fluido.

Las componentes no nulas del tensor de Ricci y del escalar de Ricci están dadas por

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (2.4a)$$

$$R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} \right] g_{ij}, \quad (2.4b)$$

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (2.4c)$$

Así la componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$ de las ecuaciones del campo de Einstein conducen a:

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] = 8\pi\rho, \quad (2.5)$$

simplificando se tiene

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho, \quad (2.6)$$

y definiendo el parámetro de Hubble al tiempo t como

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.7)$$

llegamos a la primera ecuación de Friedmann

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho. \quad (2.8)$$

La ecuación de Friedmann es también expresada en la forma:

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{8\pi}{3H^2}\rho - 1 \equiv \frac{\rho}{\rho_c} - 1, \quad (2.9)$$

donde ρ_c es llamada *densidad crítica*, $\rho_c = 3H^2/8\pi$.

Se puede definir también el *parámetro de densidad o de abundancia* $\Omega \equiv \rho/\rho_c$, que permite reescribir la ecuación de Friedmann como

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \Omega - 1. \quad (2.10)$$

Con las ecuaciones de Friedmann podemos obtener algunas consecuencias importantes para la dinámica y forma de nuestro universo a todo tiempo. La ecuación (2.10) es una relación entre la curvatura del espacio y el contenido del universo parametrizado por Ω , donde es posible observar que

$$\text{sgn}(k) = \text{sgn}(\Omega - 1). \quad (2.11)$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} k = +1 &\implies \Omega > 1, \\ k = 0 &\implies \Omega = 1, \\ k = -1 &\implies \Omega < 1. \end{aligned}$$

Reescribiendo la ecuación de Friedmann como

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho a^2 - k, \quad (2.12)$$

notamos que, si la densidad de energía ρ es positiva, la expansión del universo, codificada en el crecimiento de a con el tiempo, sólo puede cesar si $k = +1$.

Debido a la homogeneidad del espacio-tiempo de FRW, las componentes espaciales de las ecuaciones de campo de Einstein (2.2) bajo la métrica de FRW conducen a la misma ecuación, la ecuación de aceleración cosmológica, siendo esta la segunda ecuación de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi P - \frac{1}{2} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} (\rho + 3P). \quad (2.13)$$

Notamos que si $\rho + 3P > 0$, la expansión del universo se desacelera, mientras que si $P < -\rho/3$, el universo se expande cada vez más velozmente.

Dependiendo del tipo de sustancia que es descrita por el fluido perfecto, la ecuación de estado $P = \omega\rho$ puede tener

$$\omega = \begin{cases} 1/3 & \text{radiación,} \\ 0 & \text{materia,} \\ -1 & \text{energía del vacío.} \end{cases}$$

Podemos observar entonces que un universo poblado solamente de materia y radiación tiene una expansión que se ralentiza. Por lo tanto, si $k = +1$ y el universo contiene sólo materia y radiación, tras alcanzar su tamaño máximo, comienza a contraerse hasta reducirse a una singularidad con $a = 0$. Por el contrario, si el universo está vacío pero posee una cantidad de energía intrínseca, la correspondiente ecuación de estado es $P = -\rho$ y el universo se expande aceleradamente. Esta misteriosa energía de presión negativa es habitualmente denominada energía oscura.

2.2 Inflación

2.2.1 Problemas del modelo estándar cosmológico

El modelo cosmológico estándar explica muy bien la dinámica y evolución del universo, este es un modelo teórico que toma en consideración muchos aspectos, como la expansión de Hubble, la radiación cósmica de fondo y la abundancia de núcleos atómicos livianos, además nos permite retroceder en el tiempo hasta cuando el universo tenía un segundo de edad, debido a esto y a otros aspectos, se le confiere una incuestionable importancia al modelo de *Big Bang* caliente. Pero a pesar de sus buenos resultados este modelo parece no estar completo ya que presenta algunas discrepancias, tiene algunos problemas básicos los cuales no permiten obtener una explicación completa y adecuada de la estructura y dinámica del universo actual. Uno de estos problemas es el denominado problema de la planitud, este se relaciona con la imposibilidad de explicar de manera adecuada el hecho de que hoy nuestro espacio-tiempo sea prácticamente plano sin considerar que siempre ha sido plano, dado que la curvatura del universo tiene la tendencia natural de crecer con el tiempo. Para que esto suceda se debieron dar condiciones específicas, casi puestas a dedo, en el inicio del universo para que se llegase a las observaciones actuales.

Las mediciones de la radiación cósmica de microondas (CMB) han mostrado que es homogénea a grandes escalas. Para lograr esta homogeneidad, sería preciso que, si bien hoy distintas regiones

del cosmos no se encuentran en contacto causal, debieron haber estado en contacto causal en algún momento del pasado, este es el llamado problema del horizonte.

Una forma ingeniosa de resolver estos problemas, y algunos otros, o de explicar las anisotropías que se observan en el universo a gran escala, es la inflación cósmica, ésta se refiere a una etapa de expansión acelerada del universo que sucedió aproximadamente entre los primeros 10^{-36} y 10^{-32} segundos después del *Big Bang*, durante los cuales el universo se expandió aproximadamente 10^{26} veces su tamaño.

2.2.2 Inflación cósmica

La inflación nos ayuda a solucionar los problemas que presenta el modelo estándar cosmológico (preinflacionario), sin esta el modelo permanecería incompleto e insatisfactorio. El logro más espectacular de la inflación es que, combinado con la mecánica cuántica, proporciona un mecanismo convincente para el origen de las fluctuaciones cosmológicas (las semillas de las galaxias y de las anisotropías del fondo de microondas cósmico, CMB) y predice que su espectro debería ser casi invariante de escala (es decir, igual potencia en todas las escalas espaciales), lo cual es totalmente consistente con las observaciones [16]. Dados todos estos éxitos espectaculares y dado el hecho de que, a pesar de muchos esfuerzos, la inflación no ha sido reemplazada por sus diversos adversarios, este escenario se ha convertido gradualmente en una parte crucial de la cosmología moderna. Para producir una fase de inflación dentro de la Relatividad General, el contenido de materia del universo debe ser dominado por un fluido con presión negativa. A muy alta energía, la descripción correcta de la materia es la teoría de campos, el ejemplo prototípico es un campo escalar, ya que es compatible con las simetrías implicadas por el principio cosmológico. Muy notablemente, si el potencial de este campo escalar es suficientemente plano (de hecho, más precisamente, su logaritmo) para que el campo se mueva lentamente, entonces la presión correspondiente es negativa. Es por eso que se cree que la inflación es impulsada por uno (o varios) campos escalares. Por razones obvias, este campo escalar recibió el nombre de “inflatón”. Sin embargo, la naturaleza física del inflatón y su relación con el modelo estándar de física de partículas y sus extensiones siguen siendo esquivas. Además, no se conoce la forma de su potencial, excepto que debe ser lo suficientemente plana. Esto no es tan sorprendente ya que, como se mencionó anteriormente, se supone que el mecanismo inflacionario tiene lugar a muy altas energías en un régimen donde la física de partículas no se conoce y no se ha probado en aceleradores [17].

La idea básica de la inflación es que hubo una época en que la energía del vacío era el componente dominante de la densidad de energía del Universo, de modo que el factor de escala creció exponencialmente. Durante una época tal (conocido como una fase de Sitter), un pequeño, liso, y causalmente coherente parche de tamaño inferior a H^{-1} puede crecer a un tamaño tal que abarca fácilmente el volumen comóvil que se convierte en todo el Universo observable hoy [24].

Esta idea fue propuesta originalmente a principios de la década de 1980 por, principalmente, Alan Guth [3] para resolver varios problemas cosmológicos, como los problemas de planitud y horizonte. La inflación también proporciona un mecanismo causal para el origen de la estructura a gran escala

en el Universo. Las anisotropías de temperatura de la CMB observadas por *Cosmic Background Explorer* (COBE) en 1992, mostraron que el espectro de fluctuación es casi invariante a escala. Después de 2003, el telescopio *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) proporcionó datos de observación de alta precisión de las anisotropías de la CMB. Las observaciones más recientes son las realizadas por la sonda espacial Planck, en 2013, 2015 y los últimos resultados en 2018 mostraron unos resultados de más exactitud. Esto ha dado un fuerte apoyo a la existencia de un período inflacionario así como a la energía oscura [25].

En el contexto del modelo estándar cosmológico la inflación puede ser interpretada como una energía del vacío, sin embargo, matemáticamente en el modelo, es un campo escalar el que crea la inflación.

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.14)$$

La inflación se basa en la observación de que si en el universo muy temprano, antes de la bariogénesis, hubo un periodo en el cual la constante cosmológica Λ no era cero y dominaba el universo naciente con un valor muy grande, además se tiene una curvatura $k = 0$ y una densidad de materia $\rho = 0$. Aplicando estas restricciones en (2.14) obtenemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} = H_\Lambda^2, \quad (2.15)$$

la cual conduce a

$$a(t) = a_1 e^{H_\Lambda(t-t_1)}. \quad (2.16)$$

Si el periodo de inflación fue de Δt , el tamaño del universo debe haberse incrementado en un factor

$$Z = e^{H_\Lambda \Delta t}. \quad (2.17)$$

El término de curvatura k/a^2 debe haberse reducido por un factor de Z^{-2} , lo cual conduce a la solución del problema de la planitud si $Z > 10^{30}$.

Esto también significa que aunque varias partes del universo observable hoy en día estuvieran fuera de contacto causal con cada una de las otras en el momento del desacople de los fotones, ellas podrían haber estado en contacto causal y por tanto en equilibrio térmico antes que se iniciara la inflación, debido a que el universo era mucho menor, y por lo tanto si todo el universo hubiese estado en un dominio causal de tiempo cuando ocurrió el rompimiento de simetría [26].

Otra forma de ver la solución de los problemas de planitud y del horizonte es que en el periodo inflacionario el factor $(aH)^{-1}$ decrezca, de tal forma que la curvatura del universo inicial sea diluida. Simultáneamente, si $(aH)^{-1}$ decrece, sería posible lograr que las regiones que aparentan hoy siempre haber estado en des conexión causal hayan tenido un traslape durante el periodo de expansión acelerada.

La inflación requiere así una fuente de presión negativa p y una densidad de energía ρ que se diluye muy lentamente. Dicha fuente de tensión-energía puede ser modelada por la energía potencial

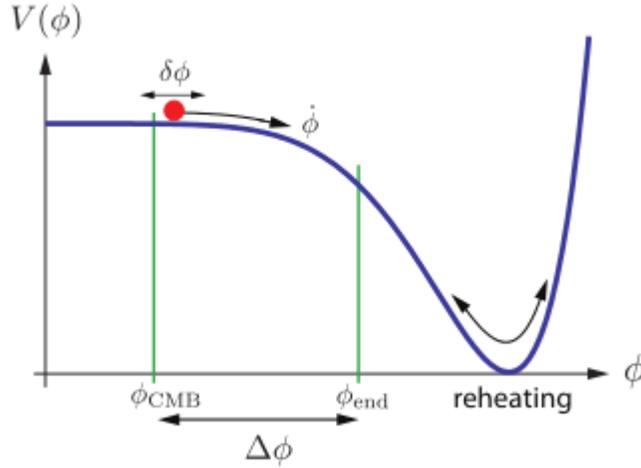


Figura 2.1: La aceleración ocurre cuando la energía potencial del campo domina sobre su energía cinética $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$. La inflación termina cuando la condición de rodamiento lento es violada. Imagen tomada de [27].

$V(\phi)$ de un campo escalar ϕ , junto con un mecanismo que mantiene un valor casi constante de $V(\phi)$ durante el período inflacionario. Es decir, el campo escalar $\phi(t, x)$ (el “inflatón”) es un parámetro de orden utilizado para describir el cambio en la densidad de energía durante la inflación. Existe una amplia gama de mecanismos para obtener $V(\phi)$ casi constante durante la inflación. Dos enfoques básicos incluyen postular un potencial casi plano $V(\phi)$, o postular una acción efectiva para ϕ que contiene autointeracciones fuertes que retrasan la evolución del campo hacia un potencial abrupto. Todos los mecanismos de campo único para la inflación pueden ser capturados por una teoría de campo efectiva para la inflación de campo único [27].

La propiedad principal de las leyes de la física que hacen posible la inflación es la existencia de estados de materia que tienen una densidad de energía alta la cual no puede ser disminuida rápidamente. En la versión original de la teoría inflacionaria [3], el estado propuesto fue un campo escalar en un mínimo local de su función de energía potencial. Una propuesta similar fue hecha por Starobinsky [1], en la cual la densidad de estado de alta energía se logró mediante correcciones del espacio curvo al tensor de energía momento de un campo escalar. El campo escalar utilizado en la versión original de inflación es llamado un *falso vacío*, ya que el estado actúa temporalmente como si fuera la densidad de estado de menor energía posible [28].

2.2.3 Desarrollo de la teoría de la inflación.

Sea el campo escalar de Higgs a altas temperaturas $kT \gg m_\phi c^2$. La densidad del número de partículas de Higgs, n_ϕ , es dado por una distribución de probabilidad cuántica, ésta es la desarrollada por

Bose-Einstein para bosones, la distribución general viene escrita como

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\epsilon_s \beta} - 1}, \quad (2.18)$$

donde ϵ_s es una función de la energía que para nuestro caso será el producto del momento por la velocidad de la luz, pc , y β es un parámetro de temperatura del sistema que viene expresado a su vez como $1/\kappa T$, donde T es la temperatura absoluta del sistema y κ como la constante de Boltzmann.

Expresando la distribución para el campo de Higgs tendremos:

$$n_\phi = \int_0^\infty \frac{dn}{dp} dp = \frac{g}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(e^{pc/kT} \pm 1)}, \quad (2.19)$$

con $g = 1$ (grados de libertad internos) y con la normalización covariante usual del campo ϕ , se obtiene

$$n_\phi = \frac{E|\phi^2|}{(\hbar c)^2}. \quad (2.20)$$

El valor esperado del campo de Higgs es

$$\langle \phi_T \rangle^2 = \frac{c^2}{2\pi^2 \hbar} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{E(e^{E/kt} - 1)} \approx \frac{1}{12} \frac{(kT)^2}{\hbar c} = \frac{T^2}{12}. \quad (2.21)$$

Se puede encontrar que el potencial de Higgs está dado por

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4. \quad (2.22)$$

Para tomar en cuenta las altas densidades de partículas, y sus interacciones para mantener la distribución térmica, se hace el reemplazo $\phi \rightarrow \phi + \langle \phi_T \rangle$, transformándose así en

$$V_T(\phi) \approx -\frac{1}{2}\mu^2 \left(\phi^2 + \frac{T^2}{12} \right) + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + \frac{1}{8}\lambda\phi^2 T^2 - \frac{\pi^2}{90} T^4, \quad (2.23)$$

de este modo, tenemos

$$\frac{\partial V_T(\phi)}{\partial \phi} \approx (-\mu^2\phi + \lambda\phi^3 + \frac{\lambda}{4}T^2\phi). \quad (2.24)$$

Se puede encontrar que $V_T(\phi)$ tiene puntos críticos en

$$\phi = 0 \quad \text{ó} \quad |\phi|^2 = \frac{\mu^2 - \lambda T^2/4}{\lambda}. \quad (2.25)$$

Pero la segunda solución aplica sólo para $T < T_c = 2\mu/\lambda^{1/2} = 2v$. Para $T > T_c$ la masa depende de la temperatura efectiva de las excitaciones del campo escalas alrededor de $\phi = 0$ la cual es

$$m_\phi^2 = -\mu^2 + \frac{\lambda T^2}{4}, \quad (2.26)$$

mientras que para $T < T_c$ la masa efectiva de las excitaciones alrededor del mínimo es

$$m_\phi^2 = 2\mu^2 - \frac{\lambda T^2}{2}, \quad (2.27)$$

la densidad de energía proveniente del vacío efectivo tenemos que es

$$\rho_v = V(\phi = 0) - V(\phi = \phi_{min}) \approx \frac{\mu^4}{4\lambda}. \quad (2.28)$$

De esta forma surge un término cosmológico efectivo

$$\Lambda = 8\pi G_N \rho_v \approx 8\pi G_N \frac{\mu^4}{4\lambda}, \quad (2.29)$$

si la temperatura cae cerca de cero.

Cuando T cae por debajo de T_c hasta cuando la transición de fase ocurre, la energía potencial de campo de inflatón ϕ puede causar inflación del universo [3].

Esta transición de fase ocurre cuando $\mu^2 < 0$, provocando que se pase de una fase simétrica a un rompimiento de fase. En este proceso el mínimo original del potencial de Higgs se transforma en un máximo y se forma un valle de mínimos.

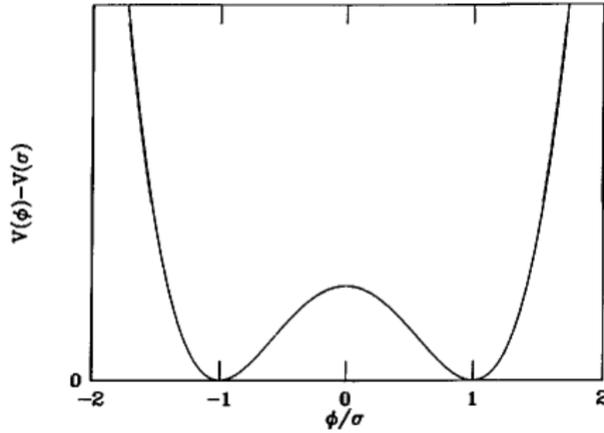


Figura 2.2: Potencial generado cuando se presenta el rompimiento espontáneo de simetría (SSB). Tomado de [24]

Si el cambio de fase ocurre a la energía de la teoría de gran unificación (GUT por sus siglas en inglés), $\mu \approx M_x \simeq 10^{14} GeV$, encontramos que

$$\Lambda \approx \frac{M_x^4}{m_{pl}^2} \approx 10^{18} GeV. \quad (2.30)$$

De esta forma una expansión suficientemente grande puede ocurrir si la inflación dura por lo menos 10^{-31} s.

Una vez la transición de fase ocurre, entonces $\Lambda \rightarrow 0$ y el calor latente se libera incrementando la temperatura del universo hasta $T \approx T_c/g^{1/4}$ donde g es el número total de grados de libertad de espín a esta temperatura[3], y la evolución del universo puede proceder como en el modelo del big bang caliente, con materia que se condensa cuando la temperatura cae a través de su acople a los campos de Higgs.

La fuente básica de radiación y materia en el universo es entonces la expansión del falso vacío. Durante el periodo inflacionario,

$$T_{\mu\nu} \approx g_{\mu\nu} \frac{\Lambda c^2}{8\pi G_N} = g_{\mu\nu} \rho_v c^2, \quad (2.31)$$

se puede deducir que ρ_v permanece fijo, el universo se expande debido a la presión hacia afuera $p = -\rho_v c^2$ de este falso vacío. Entonces la energía gravitacional se convierte en energía del falso vacío, la cual a su vez es convertida en materia y radiación después de la transición de fase[16]. Como la curvatura $k \rightarrow 0$ como resultado de la inflación, y como por hipótesis $\Lambda = 0$ después del cambio de fase, lo cual predice que ahora $\Omega = 1$, exactamente.

2.2.4 Aproximación *slow-roll*

El periodo de *slow-roll*, es un periodo en el cual la evolución de un campo escalar ϕ (el inflatón) libera la energía potencial $V(\phi)$ almacenada en ϕ cuando es dominado por su energía cinética $\dot{\phi}^2/2$ la cual conduce a una expansión exponencial del universo [26].

Para un potencial ordenado, el tiempo tomado por ϕ para alcanzar cierto estado como resultado de una fluctuación cuántica, donde se ha fijado la dirección del rompimiento de simetría requiere que sea muy corto. La transición de un estado A a uno B de un campo de inflación homogéneo $\phi(t)$ puede compararse con un balón rodando cuesta abajo.

Consideremos así un campo escalar ϕ mínimamente acoplado con una densidad Lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi}{2} - V(\phi) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (2.32)$$

El tensor de energía-momento para el campo ϕ es

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \mathcal{L} g^{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

La ecuación clásica de movimiento para ϕ puede obtenerse haciendo la variación de la acción

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}, \quad (2.34)$$

o usando la conservación del tensor energía-momento

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0.$$

Obtenemos así la siguiente ecuación de movimiento [24]

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma_{\phi}\dot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (2.35)$$

El término $3H\dot{\phi}$ surge debido a la expansión del universo y corresponde al corrimiento al rojo del momento del campo ($\dot{\phi}$) por la expansión del universo. H es constante y el valor Γ_{ϕ} es el ancho de decaimiento de la partícula ϕ . Esta ecuación de movimiento, que es igual a la de una bola que rueda cuesta abajo con fricción en un valle, tiene dos regímenes cualitativamente diferentes, cada uno de los cuales tiene una solución analítica simple. Uno de ellos es el régimen de rodamiento lento, donde la fricción domina y ϕ rueda a “velocidad terminal”.

Tenemos también que la ecuación de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_N \rho}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (2.36)$$

junto con la definición de la *masa de Planck*,

$$m_{pl} = \left(\frac{1}{G_N}\right)^{1/2},$$

conducen a

$$H^2 \approx \frac{8\pi G_N \rho}{3} = \frac{8\pi \rho}{3m_{pl}^2}, \quad (2.37)$$

donde la densidad de energía ρ del campo ϕ está dada por

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.38)$$

y hemos supuesto que $k = 0$ para describir un universo plano, compatible con todas las observaciones. La homogeneidad espacial implica que $\nabla\phi \approx 0$, y si entre A y B el potencial es suficientemente plano para que $\ddot{\phi}$ pueda ser despreciada y con $\Gamma \ll H$, entonces:

$$\dot{\phi} \approx -\frac{\partial V}{\partial \phi} \frac{1}{3H}, \quad (2.39)$$

que en el caso de la condición $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$ conduce a

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right| \ll 9H^2. \quad (2.40)$$

Si el potencial domina sobre el término $\dot{\phi}^2$ proporciona

$$V \gg \frac{\partial V}{\partial \phi} \frac{m_{pl}}{(48\pi)^{1/2}}. \quad (2.41)$$

Para calcular el número N de “ e -folds” (e -folding es el intervalo de tiempo en el que un crecimiento exponencial de una cantidad aumenta en un factor de e):

$$\ln(R_2/R_1) \equiv N(\phi_1 \rightarrow \phi_2) \equiv \int_{t_1}^{t_2} H dt = -\frac{8\pi}{m_{pl}^2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi. \quad (2.42)$$

Para $slow-roll$, el término $\ddot{\phi}$ en la ecuación de movimiento (2.35) es insignificante, y el término de creación de partículas $\Gamma_{\phi}\dot{\phi}$ no está operativo. Durante $slow-roll$ la ecuación de movimiento se reduce a

$$3H\dot{\phi} = -V'(\phi). \quad (2.43)$$

De las condiciones mostradas en (2.40) y (2.41) se puede observar que

$$H^2 \simeq \frac{8\pi}{3m_{pl}^2} V(\phi), \quad (2.44)$$

mientras que de (2.43) se obtiene

$$H = -\frac{V'(\phi)}{3\dot{\phi}}. \quad (2.45)$$

Ahora, si sabemos que $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$, entonces podemos expresar $dt = \frac{d\phi}{\dot{\phi}}$, con lo que

$$H dt = -\frac{V'(\phi)}{3\dot{\phi}} \cdot \frac{d\phi}{\dot{\phi}} = -\frac{V'(\phi)}{3\dot{\phi}^2} d\phi,$$

y, utilizando (2.44) y (2.45) tendremos que

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi}{3m_{pl}^2} V(\phi) = \left(-\frac{V'(\phi)}{3\dot{\phi}} \right)^2, \\ \frac{8\pi}{3m_{pl}^2} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} &= \frac{V'(\phi)}{9\dot{\phi}^2}, \\ \frac{8\pi}{m_{pl}^2} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} &= \frac{V'(\phi)}{3\dot{\phi}^2}. \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$H dt = -\frac{8\pi}{m_{pl}^2} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi. \quad (2.46)$$

Así la ecuación (2.42) se expresa como

$$N = \int_{t_1}^{t_2} H dt = -\frac{8\pi}{m_{pl}^2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi, \quad (2.47)$$

donde el signo negativo implica que $\phi_2 < \phi_1$.

Se pueden obtener así los parámetros:

$$\epsilon(\phi) \equiv \frac{1}{2M_{pl}^2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2, \quad \eta(\phi) \equiv \frac{1}{M_{pl}^2} \frac{V''(\phi)}{V(\phi)}, \quad (2.48)$$

donde $M_{pl} = m_{pl}/\sqrt{8\pi}$ es la masa reducida de Planck, con estos parámetros se encuentra el índice espectral de perturbaciones escalares n_s y el cociente de perturbaciones tensoriales y escalares r :

$$n_s(\phi) = 1 - 6\epsilon(\phi) + 2\eta(\phi), \quad r(\phi) = 16\epsilon(\phi), \quad (2.49)$$

siendo estos, dos de los principales parámetros inflacionarios, cuyos valores pueden ser medidos experimentalmente al estudiar las anisotropías en la radiación cósmica de fondo (CMB).

2.3 Radiación cósmica de fondo (CMB)

La forma de ver hacia atrás en la historia del universo y de estudiar la evolución que tuvo este mismo es la radiación cósmica de fondo (CMB). El cielo más antiguo que podemos ver es la llamada última superficie de dispersión, en la que los electrones quedan atrapados por el hidrógeno para formar átomos (denominados “desacoplamiento” o “recombinación”). Los fotones se encontraban estrechamente acoplados a bariones y electrones antes de la época de desacoplamiento en $z \simeq 1090$, pero después de eso podían moverse libremente hacia nosotros. Esta radiación es una predicción del modelo estándar cosmológico, pero fue hasta 1964 que se detectó por primera vez, Arno Penzias y Robert Wilson detectaron por primera vez los fotones termalizados de la CMB a una temperatura casi uniforme en todo el cielo, ellos hacían experimentos de radiocomunicación satelital para los laboratorios Bell, para ello utilizaban una gigantesca antena que era enfriada con helio líquido, notaron que es posible detectar a cualquier hora del día radiación isotrópica, ajena a toda fuente observable, en el canal de microondas con frecuencia de $4,080 \text{ MHz}$, que equivale a una longitud de onda de 7.35 cm [23].

Poco tiempo después, otros telescopios terrestres, satelitales y a bordo de globos aerostáticos confirmaron la existencia de radiación como la antes mencionada, en otras frecuencias de microondas lo que conducía a una distribución espectral similar a la que emite un cuerpo negro con una temperatura de $T_0 = 2.726 \text{ K}$.

Un cuerpo negro puede describirse fácilmente como aquel que emite radiación en todas las frecuencias. La densidad de energía de radiación del cuerpo negro depende de la frecuencia ν de la radiación emitida y de la temperatura T del cuerpo. Para describir el comportamiento del cuerpo negro se utiliza la *ley de Planck*, que nos proporciona la distribución espectral de energía por unidad de frecuencia

$$u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/\kappa_B T) - 1}, \quad (2.50)$$

donde h y κ_B son las constantes de Planck y Boltzmann, respectivamente.

Cuando se realiza la distribución espectral asociada a un cuerpo negro con la temperatura de $T = 2.726 K$, se observa que el máximo del espectro (donde se concentra la mayor cantidad de radiación emitida) ocurre en la frecuencia de $160.24 GHz$, en la región de microondas. Por esta razón y debido a que su origen no se puede asociar a ninguna fuente puntual terrestre o astrofísica, esta radiación es llamada *radiación cósmica de fondo*, *radiación de fondo de microondas* o CMB, por sus siglas en inglés Cosmic Microwave Background.

Un aspecto importante de la CMB es que esta no es completamente isotrópica y homogénea como se creía, se ha encontrado que la CMB tiene pequeñas anisotropías (de una parte en cien mil), producidas por la dinámica cósmica durante la época de última dispersión, estas anisotropías revelan diminutas acumulaciones de materia, consideradas hoy las semillas de la formación de la estructura. Por lo tanto, el estudio de las anisotropías en la CMB puede revelarnos aspectos de la época de materia, posterior a la formación de los primeros átomos de hidrógeno.

Las primeras anisotropías en la temperatura de la CMB fueron medidas en grandes separaciones angulares por el satélite COBE en 1992. La medición precisa de las anisotropías de temperatura mediante experimentos de alta precisión como BOOMERanG, MAXIMA, y especialmente WMAP abrió una nueva oportunidad para determinar los parámetros cosmológicos con alta precisión [17].

2.4 Algunos modelos inflacionarios

Un aspecto de vital importancia del escenario inflacionario es cómo termina y cómo se conecta con la posterior fase del *Big Bang*. Se cree que, después del período de rodamiento lento, el campo oscila en el fondo de su potencial, o sufre precalentamiento taquiónico, pero finalmente se desintegra en radiación. De esta manera, la inflación está conectada sin problemas a la época dominada por la radiación. Desafortunadamente, se sabe muy poco de manera observacional en este llamado período de recalentamiento. Hagamos hincapié en que las condiciones iniciales adiabáticas, favorecidas por las mediciones actuales de CMB, se derivan naturalmente de dicha configuración dentro de los modelos de campo único. Otra limitación es que la temperatura de recalentamiento, T_{reh} , debe ser mayor que la escala de nucleosíntesis (es decir, algunos MeV). Sin embargo, si uno se limita a modelos específicos, entonces puede obtener mejores límites en T_{reh} . Pero, hasta ahora, estas limitaciones se refieren solo a algunos modelos.

Así pues, existe una buena variedad de modelos inflacionarios que toman en cuenta diferentes aspectos, podemos tener entonces modelos provenientes de teorías $F(R)$, como lo es el R^2 , nueva inflación, caótico, extendido, ley de potencias, híbrido, natural, supernatural, extranatura, eterno, brana, oscilante, atractores, y un largo etcétera [17, 28, 18, 12].

A pesar de que la inflación es una pieza fundamental en el modelo cosmológico, esta etapa no es tan conocida observacionalmente como las otras partes del modelo. Pero actualmente se cuenta con una gran cantidad de datos y observaciones que nos brinda una mejor oportunidad para aprender más sobre la inflación. Un ejemplo de esto son los datos satelitales de Planck que se han estado publicando desde 2013, los cuales son una importante fuente de información relevante para varios problemas cosmológicos, incluidos la inflación. Algunos de los estudios que se hacen actualmente

ayudan a comprender mucho más la inflación un ejemplo de esto la medida de las oscilaciones acústicas bariónicas (BAO) [29], que son la versión desplazada al rojo de las oscilaciones acústicas observadas en las anisotropías de la CMB que se han transferido al espectro de potencia de la galaxia. El “brazo de nivel” en escalas de longitud entre la CMB y los espectros de potencia de la galaxia aumenta la sensibilidad a las pequeñas desviaciones de la invariancia de escala y, por lo tanto, debería ser extremadamente poderoso para restringir los modelos inflacionarios.

Estos diferentes tipos de modelos pueden clasificarse aproximadamente de la siguiente manera [30]. La primera clase, que se puede denominar de Tipo I, son modelos de inflación basados en un campo de inflatón único, rodando lentamente bajo la influencia de un potencial de inflatón $V(\phi)$. Esta clase podría parecer restrictiva, pero es interesante el hecho de que muchos modelos más complicados se pueden expresar en términos de un modelo Tipo I equivalente. Por ejemplo, la inflación “extendida”, que es un modelo de Jordan-Brans-Dicke con un campo de inflatón y un campo escalar JBD, puede formularse como un modelo de Tipo I efectivo. Cualquier modelo que no se pueda considerar de Tipo I es denotado como modelo de Tipo II.

Se pueden expresar varias subclases en los modelos de Tipo I. Modelos de Tipo Ia son modelos de “campo grande”, en el que el valor inicial del inflatón es grande y se desplaza lentamente bajo la influencia del potencial del inflatón hacia el mínimo potencial en ϕ más pequeño. La inflación caótica es uno de los modelos representativos de esta clase. La segunda clase (Tipo Ib) es el modelo de “campo pequeño”, en el cual el campo de inflatón es pequeño inicialmente y evoluciona lentamente hacia el mínimo potencial a mayor ϕ . Ejemplos de esta clase son la nueva inflación y la inflación natural. El tercero (Tipo Ic) es el modelo de inflación híbrido (doble), en el que la inflación normalmente termina por la transición de fase desencadenada por la presencia del segundo campo escalar (o por la segunda fase de inflación después de la transición de fase) [15]. En los modelos de Tipo Ia y Ib la energía del vacío es aproximadamente cero al final de la inflación, mientras que los modelos de inflación híbrida tienen una energía de vacío significativa al finalizar inflación.

En el primer modelo (Ia), la segunda derivada del potencial $V^{(2)}(\phi)$ generalmente toma valores positivos, mientras que $V^{(2)}(\phi)$ puede cambiar su signo en el segundo modelo.

2.4.1 Modelo de Tipo Ia

El modelo de inflación caótica es descrito por un potencial de inflatón cuadrático o cuártico,

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad \text{o} \quad V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\phi^4. \quad (2.51)$$

Lo “caótico” significa que las condiciones iniciales de la inflación están distribuidas caóticamente. De acuerdo con este escenario, la región que sufre la suficiente inflación da lugar a nuestro universo.

2.4.2 Modelo de tipo Ib

El modelo de inflación natural está caracterizado por pseudo bosones Nambu-Goldstone (PNGBs), que aparecen cuando una simetría global aproximada se rompe espontáneamente. El potencial PNGB es expresado como

$$V(\phi) = m^4 \left[1 + \cos \left(\frac{\phi}{f} \right) \right], \quad (2.52)$$

donde las dos escalas de masa m y f caracterizan la altura y ancho del potencial, respectivamente. Las escalas de masa típicas son del orden de $f \sim m_{pl} \sim 10^{19} GeV$ y $m \sim m_{GUT} \sim 10^{16} GeV$, los cuales son esperados por la física de partículas.

2.4.3 Modelo Tipo Ic

El modelo de inflación $R + R^{2p}$ es la descripción del marco de Einstein de una teoría del tensor escalar equivalente a $f(R) = R + \epsilon R^{2p}/\mu^{4p-2}$, donde μ es una escala de masa, $\epsilon = \pm 1$, y $p > 1/2$ (de otra manera la expansión no tiene sentido). Esta generaliza el modelo original de Starobinsky obtenido para $p = 1$. Estas teorías son bastante genéricas y aparecen como casos límite de teorías de gravedad modificadas más generales [17].

El potencial se puede expresar como

$$V(\phi) = M^4 e^{-2\sqrt{2/3}\phi/M_{pl}} \left| e^{\sqrt{2/3}\phi/M_{pl}} - 1 \right|^{2p/(2p-1)}, \quad (2.53)$$

que depende del parámetro p . Si p toma valores enteros diferentes de $p = 1$, entonces el modelo está descartado ya que proporciona valores de r y n_s que no son compatibles con los datos de Planck. Como consecuencia, p debe estar suficientemente cerca de 1, y por lo tanto debe ser un número real [18].

Capítulo 3

Modelos de inflación caótica

El modelo caótico nace a partir de la necesidad de resolver un problema que presentaba el primer modelo inflacionario, en este modelo se emplea un estado de campo escalar llamado “falso vacío”, ya que el estado temporalmente actúa como si fuera el estado de menor cantidad de densidad de energía posible, clásicamente este estado podría ser completamente estable, porque no habría energía disponible que permitiera al campo escalar cruzar la barrera de energía potencial que lo separaba de los estados de menor energía. Pero para la mecánica cuántica esto no era así, acá el estado podría decaer por tunelamiento. Inicialmente se esperaba que el proceso de tunelamiento pudiera terminar satisfactoriamente la inflación, pero pronto se descubrió que la aleatoriedad de la descomposición del falso vacío produciría inhomogeneidades catastróficamente grandes. En la nueva inflación, esta está dirigida por un campo escalar posado en una meseta del diagrama de energía potencial, como se muestra en la figura 3.1. Este campo escalar es llamado “inflatón”. Si la meseta es suficientemente plana, tal estado puede ser suficientemente estable para que la inflación sea exitosa. Posteriormente Andrei Linde demostró que el potencial inflacionario no necesita ni un mínimo local ni una meseta suave, a este escenario le llamó “inflación caótica”, que tiene un potencial como el presentado en la ecuación (3.1).

Este modelo acertó en un principio, pero a medida que se tuvieron más estudios de la radiación cósmica de fondo la suerte fue cambiando para este modelo. En este capítulo se describe el nacimiento del modelo caótico.

3.1 Modelo caótico

Para ilustrar la idea principal del escenario de inflación caótica Andrei Linde propone considerar un ejemplo extremo y no tan realista, que consta de un campo escalar ϕ , con un potencial efectivo degenerado $V(\phi) = V_0 = \text{const.} > 0$. Se puede ver que en tal teoría no hay razones para esperar que el campo clásico ϕ sea igual a cualquier valor particular (por decir, $\phi = 0$) en todo el universo. Por el contrario, se puede esperar que todos los valores de ϕ aparezcan en diferentes regiones del espacio

suficientemente alejados unos de otros, con igual probabilidad. Esto quiere decir que ϕ puede tomar valores arbitrarios que varían desde $-\infty$ hasta $+\infty$ en diferentes regiones del universo temprano. En particular, los valores $\phi \gg M_{pl} \sim 10^{19} GeV$ son bastante legítimos. La única posible limitación en la distribución del campo ϕ en el universo temprano es que $(\partial_\mu \phi)^2 \lesssim M_{pl}^4$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$, ya que de otra manera la parte del universo correspondiente podría encontrarse en la era planckiana, en la cual la descripción clásica del espacio y el tiempo sería difícilmente posible. Durante la expansión del universo ambos, la densidad de energía conectada con la inhomogeneidad del campo ϕ , la cual es proporcional a $(\partial_\mu \phi)^2$, y la energía térmica $\sim T^4$ decrecen rápidamente, la densidad de energía de materia se reduce a $V(\phi) = V_0 = const. > 0$, y el universo se expande exponencialmente con el factor de escala $a(t) \sim \exp(Ht)$, donde $H = (\frac{8}{3}\pi V_0/M_{pl}^2)^{1/2}$. Como resultado de esta expansión el universo se divide en muchos dominios exponencialmente grandes conteniendo un campo ϕ casi homogéneo. Este modelo es poco realista, pero es claro que algunos efectos muy similares aparecen en teorías con un potencial efectivo $V(\phi)$ que es suficientemente plano [4].

Más generalmente, esto significa que en teorías con valores grandes de $V(\phi)$ y con valores suficientemente pequeños de constantes de acoplamiento, el escenario de inflación del universo no puede ser realizado en una forma estándar, basado en la teoría de transiciones de fase a altas temperaturas [16].

Linde demostró que el potencial inflacionario no necesita tener ni un mínimo local o una meseta suave, el potencial de inflación puede ser tan simple como

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (3.1)$$

siempre que ϕ empiece en un valor suficientemente grande tal que la inflación pueda ocurrir a medida que se relaja [28].

Si se considera ahora una teoría $V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\phi^4$ con $\lambda \ll 1$ (proveniente de (2.22)). Una descripción clásica de la evolución del universo se vuelve posible solo después del tiempo de Planck $t \sim t_p \sim M_{pl}^{-1}$, donde la densidad de energía se vuelve más pequeña que M_{pl}^4 . Antes de ese tiempo, el universo se asume que se encuentra en algún estado cuántico caótico. Si λ es lo suficientemente pequeña, no hay razón para esperar que al tiempo $t \sim t_p$ el campo ϕ debe ser igual a cero en todos los lugares. Por el contrario, uno puede esperar que el campo ϕ tome cualquier valor entre $-M_{pl}/(\lambda)^{1/4}$ y $M_{pl}/(\lambda)^{1/4}$ en diferentes regiones del espacio, de tal manera que $V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \lesssim M_{pl}^4$. Podemos notar que, ya que el campo ϕ es tan grande como $M_{pl}/(\lambda)^{1/4}$, no está prohibido por ninguna ley de la naturaleza. En un universo abierto, a $t \sim t_p$ debería existir una infinidad de dominios localmente homogéneos e isotrópicos de tamaño $l \gg M_{pl}^{-1}$, conteniendo un campo ϕ localmente homogéneo tal que $M_{pl} \lesssim \phi \lesssim M_{pl}^{1/4}$.

La parte del universo dentro de un dominio lleno de un campo homogéneo ϕ se expande como un espacio de de Sitter con un factor de escala $a(t) = a_0 \exp(Ht)$, donde

$$H = \left(\frac{8}{3}\pi \frac{V(\phi)}{M_{pl}^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3}\pi\lambda \right)^{1/2} \frac{\phi^2}{M_{pl}}. \quad (3.2)$$

La ecuación de movimiento del campo ϕ dentro de este dominio es

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\lambda\phi^3, \quad (3.3)$$

lo que implica que cuando $\phi^2 \gg M_{pl}^2/6\pi$

$$\phi = \phi_0 \exp \left\{ - \left[\frac{\sqrt{\lambda} M_{pl}}{(6\pi)^{1/2}} \right] t \right\}. \quad (3.4)$$

Esto significa que cuando $\lambda \ll 1$ el tiempo típico $\Delta t \sim (6\pi)^{1/2}/\sqrt{\lambda}M_{pl}$, durante el cual el campo ϕ decrece considerablemente. es mucho más grande que el tiempo de Planck $t_p \sim (6M_{pl}^{-1})$. Durante la parte principal de este periodo el universo se expandió exponencialmente y el factor de escala después de la expansión creció de la forma

$$a(\Delta t) \sim a_0 \exp(H\Delta t) \sim a_0 \exp \left(\pi \frac{\phi_0^2}{M_{pl}^2} \right). \quad (3.5)$$

De la ecuación (3.5) se puede ver que la expansión es lo suficientemente grande si $\phi_0 \gtrsim 3m_{pl}$. Tal valor de ϕ_0 es posible si $\frac{1}{4}\lambda\phi_0^4 \lesssim M_{pl}^4$, lo cual implica que $\lambda \lesssim 10^{-2}$. Para un valor inicial típico $\phi_0 \sim M_{pl}/(\lambda)^{1/4}$ la ecuación (3.5) da

$$a(\Delta t) \sim a_0 \exp \left(\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} \right). \quad (3.6)$$

Por lo tanto, se puede observar que los dominios del campo $\phi_0 \gtrsim 3M_{pl}$, el cual inevitablemente existe en un universo con una distribución inicial caótica del campo ϕ , en la teoría $\frac{1}{4}\lambda\phi^4$ con $\lambda \lesssim 10^{-2}$, crece exponencialmente y dan lugar a mini-universos de un tamaño que excede el tamaño de la parte observable de nuestro universo.

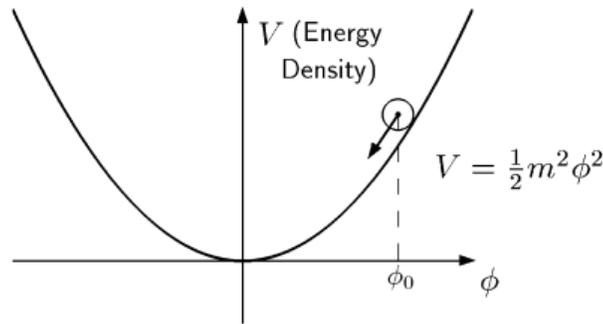


Figura 3.1: Potencial caótico, correspondiente al modelo (3.1). Imagen tomada de [28].

Capítulo 4

Teorías $f(R)$

Mientras que los modelos de inflación de campo escalar y de energía oscura corresponden a modificaciones del tensor de energía-momento en las ecuaciones de Einstein, existe otro enfoque para explicar la aceleración del universo. Este corresponde a la gravedad modificada en la cual la teoría de la gravedad es modificada, comparada con la relatividad general. La densidad Lagrangiana para la relatividad general está dada por $f(R) = R - 2\Lambda$, donde R es el escalar de Ricci y Λ corresponde a la constante cosmológica (correspondiente a la ecuación de estado con $\omega = -1$). La presencia de Λ nos indica una expansión exponencial del universo, pero no puede ser usada para inflación porque el periodo inflacionario necesita conectar con la era de radiación.

Una de las modificaciones a la relatividad general es la gravedad $f(R)$ en la cual, la densidad Lagrangiana f es una función arbitraria de R . Hay dos formalismos al derivar las ecuaciones de campo a partir de la acción en la gravedad $f(R)$. El primero es el formalismo métrico estándar en el cual las ecuaciones de campo son derivadas de la variación de la acción con respecto al tensor métrico $g_{\mu\nu}$. En este formalismo, la conexión afín $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ depende de $g_{\mu\nu}$. El segundo enfoque es el formalismo de Palatini, en este los términos $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ y $g_{\mu\nu}$ son tratados como variables independientes cuando se realiza la variación en la acción.

La gravedad $f(R)$ en el formalismo de la métrica corresponde a una generalización de la teoría Brans-Dicke (BD) con un parámetro BD $\omega_{BD} = 0$. A diferencia de la teoría BD original, existe un potencial para un grado de libertad de campo-escalar (llamado “escalarón”) con un origen gravitacional. Si la masa del escalaron siempre permanece tan ligera como el actual parámetro de Hubble H_0 , no es posible satisfacer las restricciones de gravedad locales debido a la aparición de una quinta fuerza de largo alcance con un acoplamiento del orden de la unidad. Se puede diseñar el potencial de campo de la gravedad $f(R)$ de manera que la masa del campo sea pesada en la región de alta densidad. Los modelos viables $f(R)$ deben ser construidos para satisfacer tal condición. Entonces el rango de interacción de la quinta fuerza se acorta en la región de alta densidad, lo que permite la posibilidad de que los modelos sean compatibles con las pruebas de gravedad local. Más precisamente, la existencia de un acoplamiento de materia, en el marco de Einstein, da lugar a un extremo del potencial de campo efectivo alrededor del cual el campo puede estabilizarse.

Es posible extender la gravedad $f(R)$ a una teoría generalizada BD con un potencial de campo y un parámetro ω_{BD} arbitrario. Si se realiza la transformación conforme al marco de Einstein, se puede demostrar que la teoría BD con un potencial de campo corresponde a un escenario acoplado de quintaesencia con un Q acoplado entre el campo y la materia no relativista.

En este capítulo se desarrollan las ecuaciones de campo en el formalismo métrico en la sección 4.1, es decir usando la variación de la acción (4.1) con respecto a la métrica con lo que se obtienen las ecuaciones (4.4), si expresamos estas ecuaciones en el espacio-tiempo plano de FLRW se obtienen las ecuaciones (4.11) y (4.12), para esta sección y las que conforman el capítulo se utilizaron las referencias [20, 19, 31], a continuación, en la sección 4.2 se desarrolla la transformación conforme, utilizando la transformación (4.14) en la acción (4.1), para pasar del marco de Jordan al marco de Einstein, en este último tenemos una nueva expresión de la acción, la cual se presenta en la ecuación (4.22), de esta manera se obtiene una expresión para el potencial inflacionario (4.23). En la sección 4.3 se muestra de qué manera se puede formular una teoría $f(R)$ en forma de una teoría de Brans-Dicke (BD), para ello se presenta una nueva acción (4.42) la cual se maneja de la misma manera que la primera acción presentada, con ello se obtiene un potencial (4.50) que nos ayuda en la sección 4.4 para pasar de una potencial en el marco de Einstein a una teoría $f(R)$, utilizando las ecuaciones (4.60). Finalmente en las secciones 4.6 y 4.5 se presenta la inflación en estas teorías $f(R)$, tanto en el marco de Jordan, como en el marco de Einstein, aparece acá la teoría $f(R)$ de Starobinsky (4.72) y su respectivo potencial (4.62), cuya gráfica es la mostrada en la imagen 4.1.

4.1 Ecuaciones de campo en el formalismo métrico

La acción tetradimensional para las teorías $f(R)$ es

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int d^4x \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, \Psi_M), \quad (4.1)$$

donde $\kappa^2 = 8\pi G_N = 8\pi/m_{pl}^2 = 1/M_{pl}^2$, g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$, y \mathcal{L}_M es el Lagrangiano de materia que depende de $g_{\mu\nu}$ y de los campos de materia Ψ_M . El escalar de Ricci, R , está definido como $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, donde el tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$ es

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\rho\lambda}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho. \quad (4.2)$$

En el caso del formalismo métrico sin torsión, las conexiones $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ son conectores métricos normales definidos, en términos del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, como

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial g_{\gamma\lambda}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\lambda} \right). \quad (4.3)$$

Esto se obtiene de la relación de métrica, $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial g_{\mu\nu} / \partial x^\lambda - g_{\rho\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\rho - g_{\mu\rho} \Gamma_{\nu\lambda}^\rho = 0$.

Las ecuaciones de campo se pueden obtener variando la acción (4.1) con respecto a $g_{\mu\nu}$:

$$\Sigma_{\mu\nu} \equiv F(R) R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu} \square F(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(M)}, \quad (4.4)$$

donde

$$F(R) \equiv \partial f / \partial R. \quad (4.5)$$

$T_{\mu\nu}^{(M)}$ es el tensor de energía momento para los campos de materia definido por la derivada variacional de \mathcal{L}_M en términos de $g^{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu}^{(M)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4.6)$$

Esta satisface la ecuación de continuidad $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(M)} = 0$, así como también lo hace la ecuación de movimiento, $\nabla^\mu \Sigma_{\mu\nu} = 0$. La traza de la ecuación (4.4) nos da

$$3\Box F(R) + F(R)R - 2f(R) = \kappa^2 T, \quad (4.7)$$

donde $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{(M)}$ y $\Box F = (1/\sqrt{-g})\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu F)$.

La gravedad dada por la teoría general de la relatividad de Einstein, sin la constante cosmológica, corresponde a una teoría del tipo $f(R) = R$ y, por consiguiente, $F(R) = 1$, así que el término $\Box F(R)$ en la ecuación (4.7) es nulo. En este caso se tiene $R = -\kappa^2 T$ y por lo tanto el escalar de Ricci, R , está directamente determinado por la materia (la traza T). En gravedad modificada el término $\Box F(R)$ no es nulo en la traza y eso significa que hay una propagación de grados de libertad escalares, $\phi \equiv F(R)$. La ecuación de la traza (4.7) determina la dinámica del campo escalar ϕ (llamado “escalarón”).

Existe un punto de de Sitter que corresponde a una solución de vacío ($T = 0$) en la cual el escalar de Ricci es constante. Como $\Box F(R) = 0$ en este punto, obtenemos

$$F(R)R = 2f(R) = 0. \quad (4.8)$$

El modelo $f(R) = \alpha R^2$ cumple esta condición, por lo que da lugar a la solución exacta de de Sitter. En el modelo $f(R) = R + \alpha R^2$, debido al término lineal en R , la expansión inflacionaria termina cuando el término αR^2 se vuelve más pequeño que el término lineal R . Esto es seguido por una etapa de recalentamiento en la cual las oscilaciones de R conducen a la producción de partículas gravitacionales.

Se considera el espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) con un factor de escala dependiente del tiempo $a(t)$ y una métrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2, \quad (4.9)$$

donde t es el tiempo cósmico. Al utilizar esta métrica se tiene que el escalar de Ricci viene dado por

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}), \quad (4.10)$$

donde $H \equiv \dot{a}/a$ es el parámetro de Hubble y el punto significa una derivada con respecto al tiempo t .

El tensor de energía-momento de materia esta dado por $T^{\mu(M)}_{\nu} = \text{diag}(-\rho_M, P_M, P_M, P_M)$, donde ρ_M es la densidad de energía y P_M es la presión. Las ecuaciones de campo (4.4) en el espacio plano de FLRW son

$$3FH^2 = (FR - f)/2 - 3H\dot{F} + \kappa^2\rho_M, \quad (4.11)$$

$$-2F\dot{H} = \ddot{F} - H\dot{F} + \kappa^2(\rho_M + P_M), \quad (4.12)$$

donde el fluido perfecto satisface la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho}_M + 3H(\rho_M + P_M) = 0. \quad (4.13)$$

4.2 Transformación conforme

La acción (4.1) en gravedad $f(R)$ corresponde a una función f no lineal en términos de R . Es posible expresar la acción en el marco de Einstein haciendo una transformación conforme:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad (4.14)$$

donde Ω^2 es el factor conforme y la tilde representa cantidades en el marco de Einstein. Los escalares de Ricci R y \tilde{R} en los dos marcos tienen la siguiente relación

$$R = \Omega^2(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega), \quad (4.15)$$

donde

$$\omega \equiv \ln \Omega, \quad \partial_\mu\omega \equiv \frac{\partial\omega}{\partial x^\mu}, \quad \tilde{\square}\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\partial_\mu(\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\omega). \quad (4.16)$$

Reescribiendo la acción (4.1) en la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa^2} FR - U \right) + \int d^4x \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, \Psi_M), \quad (4.17)$$

donde

$$U = \frac{FR - f}{2\kappa^2}. \quad (4.18)$$

Utilizando la ecuación (4.15) y la relación $\sqrt{-g} = \Omega^{-4}\sqrt{-\tilde{g}}$, la acción (4.17) se transforma en

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2\kappa^2} F \Omega^{-2} (\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega) - \Omega^{-4} U \right] + \int d^4x \mathcal{L}_M(\Omega^{-2}\tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi_M). \quad (4.19)$$

Obtenemos la acción en el marco de Einstein (acción lineal en \tilde{R}) al elegir

$$\Omega^2 = F. \quad (4.20)$$

Esta elección es consistente si $F > 0$. Introducimos un nuevo campo escalar ϕ definido por

$$\kappa\phi \equiv \sqrt{3/2} \ln F. \quad (4.21)$$

De la definición de ω en la ecuación (4.16), tenemos que $\omega = \kappa\phi/\sqrt{6}$. Usando la misma ecuación (4.16), la integral $\int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\square}\omega$ desaparece al hacer uso del teorema de Gauss. Entonces la acción en el marco de Einstein es

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + \int d^4 \mathcal{L}_M(F^{-1}(\phi) \tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi_M), \quad (4.22)$$

donde

$$V(\phi) = \frac{U}{F^2} = \frac{FR - f}{2\kappa^2 F^2}. \quad (4.23)$$

Por lo tanto, la densidad Lagrangiana del campo ϕ viene dada por $\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)$ con un tensor de energía momento

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{(\phi)} = -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta(\sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{L}_\phi)}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \tilde{g}_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right]. \quad (4.24)$$

El factor conforme $\Omega^2 = F = \exp(\sqrt{2/3} \kappa\phi)$ es dependiente del campo. De la acción de materia de la ecuación (4.22) se observa que el campo escalar ϕ está directamente acoplado a la materia en el marco de Einstein. Para ver de una mejor manera este acoplamiento, tomamos la variación de la acción (4.22) con respecto al campo ϕ :

$$-\partial_\mu \left(\frac{\partial(\sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{L}_\phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) + \frac{\partial(\sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{L}_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi} = 0, \quad (4.25)$$

esto es

$$\tilde{\square}\phi - V_{,\phi} + \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi} = 0, \quad \text{donde} \quad \tilde{\square}\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \phi). \quad (4.26)$$

Usando la relación (4.14) y las relaciones $\sqrt{-\tilde{g}} = F^2 \sqrt{-g}$ y $\tilde{g}^{\mu\nu} = F^{-1} g^{\mu\nu}$, el tensor de energía momento de materia es transformado como

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{(M)} = -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{T_{\mu\nu}^{(M)}}{F}. \quad (4.27)$$

El tensor de energía momento para fluidos perfectos en el marco de Einstein es dado por

$$\tilde{T}_\nu^{\mu(M)} = \text{diag}(-\rho_M/F^2, P_M/F^2, P_M/F^2, P_M/F^2). \quad (4.28)$$

La derivada de la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}) = \mathcal{L}_M(F^{-1}(\phi) \tilde{g}_{\mu\nu})$ con respecto a ϕ es

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi} = \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial \phi} = \frac{1}{F(\phi)} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \frac{\partial (F(\phi) \tilde{g}^{\mu\nu})}{\partial \phi} = -\sqrt{-\tilde{g}} \frac{F_{,\phi}}{2F} \tilde{T}_{\mu\nu}^{(M)}. \quad (4.29)$$

La fuerza del acoplamiento entre el campo y la materia puede ser cuantificado por la siguiente cantidad

$$Q \equiv -\frac{F_{,\phi}}{2\kappa F} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad (4.30)$$

la cual es constante en la gravedad $f(R)$. Se puede ver entonces que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi} = \sqrt{-\tilde{g}} \kappa Q \tilde{T}, \quad (4.31)$$

donde $\tilde{T} = \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{T}^{\mu\nu(M)} = -\tilde{\rho}_M + 3\tilde{P}_M$. Sustituyendo (4.31) en (4.26), se obtienen las ecuaciones de campo en el marco de Einstein:

$$\tilde{\square} \phi - V_{,\phi} + \kappa Q \tilde{T} = 0. \quad (4.32)$$

Esto muestra que el campo ϕ está directamente acoplado a la materia aparte de la radiación ($\tilde{T} = 0$).

Consideremos el espacio tiempo plano de FLRW con la métrica (4.9) en el marco de Jordan. La métrica en el marco de Einstein viene dada por

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2 = F(-dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2) \quad (4.33)$$

$$= -d\tilde{t}^2 + \tilde{a}^2(\tilde{t}) d\mathbf{x}^2, \quad (4.34)$$

la cual conduce a las siguientes relaciones (para $F > 0$)

$$d\tilde{t} = \sqrt{F} dt, \quad \tilde{a} = \sqrt{F} a, \quad (4.35)$$

donde

$$F = e^{-2Q\kappa\phi}. \quad (4.36)$$

Es fácil observar que la ecuación (4.36) proviene de integrar (4.30) para un valor constante de Q . La ecuación de campo (4.32) puede ser expresada como

$$\frac{d^2 \phi}{d\tilde{t}^2} + 3\tilde{H} \frac{d\phi}{d\tilde{t}} + V_{,\phi} = -\kappa Q (\tilde{\rho}_M - 3\tilde{P}_M), \quad (4.37)$$

donde

$$\tilde{H} \equiv \frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \frac{1}{\sqrt{F}} \left(H + \frac{\dot{F}}{2F} \right). \quad (4.38)$$

Definiendo la densidad de energía $\tilde{\rho}_\phi = \frac{1}{2}(d\phi/d\tilde{t})^2 + V(\phi)$ y la presión $\tilde{P}_\phi = \frac{1}{2}(d\phi/d\tilde{t})^2 - V(\phi)$, la ecuación (4.37) puede ser escrita como

$$\frac{d\tilde{\rho}_\phi}{d\tilde{t}} + 3\tilde{H}(\tilde{\rho}_\phi + \tilde{P}_\phi) = -\kappa Q (\tilde{\rho}_M - 3\tilde{P}_M) \frac{d\phi}{d\tilde{t}}. \quad (4.39)$$

Bajo la transformación (4.35) junto con $\rho_M = F^2 \tilde{\rho}_M$, $P_M = F^2 \tilde{P}_M$, y $H = F^{1/2} [\tilde{H} - (dF/f\tilde{t})/2F]$, la ecuación de continuidad (4.13) se transforma en

$$\frac{d\tilde{\rho}_M}{d\tilde{t}} + 3\tilde{H}(\tilde{\rho}_M + \tilde{P}_M) = \kappa Q(\tilde{\rho}_M - 3\tilde{P}_M) \frac{d\phi}{d\tilde{t}}. \quad (4.40)$$

las ecuaciones (4.39) y (4.40) muestran que el campo y la materia interactúan uno con el otro, mientras que el total de la densidad de energía $\tilde{\rho}_T = \tilde{\rho}_\phi + \tilde{\rho}_M$ y la presión $\tilde{P}_T = \tilde{P}_\phi + \tilde{P}_M$ satisfacen la ecuación de continuidad $d\tilde{\rho}_T/d\tilde{t} + 3\tilde{H}(\tilde{\rho}_T + \tilde{P}_T) = 0$. Más generalmente, las ecuaciones (4.39) y (4.40) pueden ser expresadas en términos de los tensores de energía momento definidos en (4.24) y (4.27)

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}_\nu^{\mu(\phi)} = -Q\tilde{T}\tilde{\nabla}_\nu\phi, \quad \tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}_\nu^{\mu(M)} = Q\tilde{T}\tilde{\nabla}_\nu\phi. \quad (4.41)$$

4.3 Equivalencia con la teoría de Brans-Dicke

La teoría $f(R)$ en el formalismo métrico se puede formular en forma de teoría de Brans-Dicke con un potencial para el grado de libertad efectivo del campo escalar (escalarón). Consideremos la siguiente acción con un nuevo campo χ ,

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi) + f_{,\chi}(\chi)(R - \chi)] + \int d^4x \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, \Psi_M). \quad (4.42)$$

Variando la acción con respecto a χ , se obtiene

$$f_{,\chi\chi}(\chi)(R - \chi) = 0. \quad (4.43)$$

Siempre que $f_{,\chi\chi}(\chi) \neq 0$ se tendrá que $\chi = R$. Por lo tanto, la acción (4.42) recupera la acción (4.1) en la gravedad $f(R)$. Si se define

$$\phi \equiv f_{,\chi}(\chi), \quad (4.44)$$

la acción (4.42) puede ser expresada como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \phi R - U(\phi) \right] + \int d^4x \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, \Psi_M), \quad (4.45)$$

donde $U(\phi)$ es un potencial de campo definido por

$$U(\phi) = \frac{\chi(\phi)\phi - f(\chi(\phi))}{2\kappa^2}. \quad (4.46)$$

Mientras tanto, la acción en la teoría BD con un potencial $U(\phi)$ viene dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \phi R - \frac{\omega_{BD}}{2\phi} (\nabla\phi)^2 - U(\phi) \right] + \int d^4x \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, \Psi_M), \quad (4.47)$$

donde ω_{BD} es el parámetro BD y $(\nabla\phi)^2 \equiv g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$. Comparando las ecuaciones (4.45) y (4.47) se puede ver que la teoría $f(R)$ en el formalismo de la métrica es equivalente a la teoría BD con el parámetro ω_{BD} (en la unidad $\kappa^2 = 1$).

Podemos utilizar el mismo método de la sección 4.2 para encontrar un potencial de campo en la equivalencia BD. Utilizamos para ello la misma equivalencia del escalar de Ricci (4.15) cuyas definiciones aparecen en (4.16), utilizando estos elementos se tiene que la acción (4.42) se puede expresar como

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[F(\chi)\Omega^{-2}(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega) - \Omega^{-4}(\chi F(\chi) - f(\chi)) \right]. \quad (4.48)$$

Para volver al marco de Einstein tomamos $\Omega^2 = F(\chi)$. Para que esta transformación sea válida es necesario que $F(\chi) > 0$. La acción ahora está dada por

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[(\tilde{R} + \tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega - \frac{\chi F(\chi) - f(\chi)}{(F(\chi))^2}) \right]. \quad (4.49)$$

Con el último término de la acción (4.49) se puede definir un potencial

$$V(\chi) \equiv \frac{1}{2\kappa^2} \frac{\chi F(\chi) - f(\chi)}{(F(\chi))^2}, \quad (4.50)$$

y por el teorema de Gauss, la integral $\int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\square}\omega$ en la acción (4.49) se anula, con lo que se puede reescribir esta acción de la forma

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\tilde{R} - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega \right) - \int d^4x \sqrt{-\tilde{R}} V(\chi). \quad (4.51)$$

4.4 Teorías $f(R)$ y campos escalares

Un proceso interesante que se puede hacer es obtener la teoría $f(R)$ correspondiente, si tenemos un campo escalar $V(\phi)$ dado. Diferenciando el potencial escalar (4.50) obtenemos

$$\frac{dV}{d\chi} = \left(\frac{1}{2\kappa^2} \right) \frac{f''(\chi)[2f(\chi) - \chi F(\chi)]}{(F(\chi))^3}. \quad (4.52)$$

El término cinético de χ se normaliza canónicamente después de una redefinición de $\chi(\phi)$ como

$$F(\chi) = \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\phi\kappa\right), \quad \phi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\kappa} \ln F(\chi), \quad (4.53)$$

en términos del campo canónico del inflatón ϕ , la acción total es

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi) \right]. \quad (4.54)$$

Las condiciones de estabilidad cuántica y clásica de la teoría de gravedad $f(R)$ están dadas por

$$f'(R) > 0 \quad \text{y} \quad f''(R) > 0, \quad (4.55)$$

y estas también las satisface el modelo de Starobinsky para $R > 0$.

Diferenciando el potencial escalar V en la ecuación (4.50), con respecto a ϕ obtenemos

$$\frac{dV}{d\phi} = \frac{dV}{d\chi} \frac{d\chi}{d\phi} = \frac{1}{2\kappa^2} \left[\frac{\chi f'' + f' - f'}{f'^2} - 2 \frac{\chi f' - f}{f'^3} f'' \right] \frac{d\chi}{d\phi}, \quad (4.56)$$

de donde tenemos

$$\frac{d\chi}{d\phi} = \frac{d\chi}{df'} \frac{df'}{d\phi} = \frac{df'}{d\phi} / \frac{df'}{d\chi} = \frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{3}} \frac{f'}{f''}. \quad (4.57)$$

Esto implica que

$$\frac{dV}{d\phi} = \frac{1}{\kappa} \frac{2f - \chi f'}{\sqrt{6} f'^2}. \quad (4.58)$$

Combinando las ecuaciones (4.50) y (4.58) obtenemos R y f en términos del potencial escalar V ,

$$R = \left[\sqrt{6}\kappa \frac{dV}{d\phi} + 4\kappa^2 V \right] \exp \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \phi \right), \quad (4.59)$$

$$f = \left[\sqrt{6}\kappa \frac{dV}{d\phi} + 2\kappa^2 V \right] \exp \left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \phi \right). \quad (4.60)$$

Estas ecuaciones definen la función $f(R)$ en la forma paramétrica, en términos del potencial escalar $V(R)$, es decir en la transformación inversa de (4.50). Esto es conocido como la equivalencia clásica (dualidad) entre las teorías de gravedad $f(R)$ y las teorías de gravedad escalar-tensorial.

4.5 Dinámica en el marco de Einstein

Estudemos la dinámica inflacionaria en el marco de Einstein para el llamado modelo de Starobinsky que se discutirá en detalle más tarde, ver e.g. (4.72), en ausencia de fluidos de materia ($\mathcal{L}_M = 0$). La acción en el marco de Einstein de este modelo corresponde a la presentada en (4.22), con un campo ϕ definido por

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\kappa} \ln F = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{R}{3M^2} \right). \quad (4.61)$$

Usando esta relación, el potencial (4.23) es escrito como

$$V(\phi) = \frac{3M^2}{4\kappa^2} \left(1 - e^{-\sqrt{2/3}\kappa\phi} \right)^2. \quad (4.62)$$

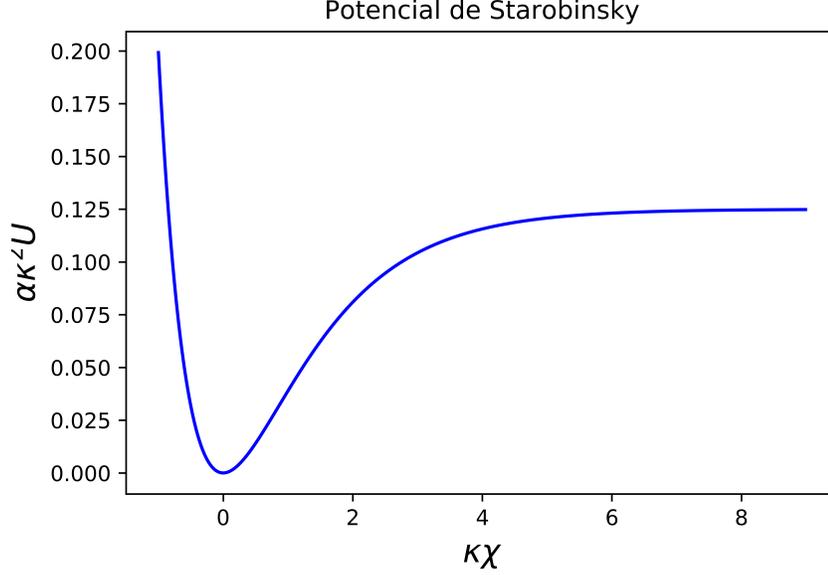


Figura 4.1: Potencial de Starobinsky en el marco de Einstein, correspondiente al modelo (4.62).

En la figura 4.1 se muestra el potencial (4.62) como función de ϕ . En el régimen $\kappa\phi \gg 1$ el potencial es casi constante ($V(\phi) \simeq 3M^2/(4\kappa^2)$), el cual conduce a inflación de tipo *slow-roll*. El potencial en el régimen $\kappa\phi \ll 1$ es dado por $V(\phi) \simeq (1/2)M^2\phi^2$, de tal manera que el campo oscila alrededor de $\phi = 0$ con una amortiguación Hubble. La segunda derivada de V con respecto a ϕ es

$$V_{,\phi\phi} = -M^2 e^{-\sqrt{2/3}\kappa\phi} \left(1 - 2e^{-\sqrt{2/3}\kappa\phi}\right), \quad (4.63)$$

la cual cambia de negativo a positivo en $\phi = \phi_1 = \sqrt{2/3}(\ln 2)/\kappa \simeq 0.169m_{pl}$.

Las ecuaciones de campo para la acción (4.22) vienen dadas por

$$3\tilde{H}^2 = \kappa^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\tilde{t}} \right)^2 + V(\phi) \right], \quad \frac{d^2\phi}{d\tilde{t}^2} + 3\tilde{H} \frac{d\phi}{d\tilde{t}} + V_{,\phi} = 0. \quad (4.64)$$

Usando las aproximaciones de *slow-roll* ($(d\phi/d\tilde{t})^2 \ll V(\phi)$ y $|d^2\phi/d\tilde{t}^2| \ll |\tilde{H}d\phi/d\tilde{t}|$) durante la inflación, uno tiene $3\tilde{H}^2 \simeq \kappa^2 V(\phi)$ y $3\tilde{H}(d\phi/d\tilde{t}) + V_{,\phi} \simeq 0$. Podemos definir los parámetros de *slow-roll*

$$\tilde{\epsilon}_1 \equiv -\frac{d\tilde{H}/d\tilde{t}}{\tilde{H}^2} \simeq \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2, \quad \tilde{\epsilon}_2 \equiv \frac{d^2\phi/d\tilde{t}^2}{\tilde{H}(d\phi/d\tilde{t})} \simeq \tilde{\epsilon}_1 - \frac{V_{,\phi\phi}}{3\tilde{H}^2}. \quad (4.65)$$

Para el potencial (4.62) se puede ver que

$$\tilde{\epsilon}_1 \simeq \frac{3}{4} (e^{\sqrt{2/3}\kappa\phi} - 1)^{-2}, \quad \tilde{\epsilon}_2 \simeq \tilde{\epsilon}_1 + \frac{M^2}{3\tilde{H}^2} e^{-\sqrt{2/3}\kappa\phi} (1 - 2e^{-\sqrt{2/3}\kappa\phi}), \quad (4.66)$$

los cuales son mucho más pequeños que durante inflación ($\kappa\phi \gg 1$). El final de la inflación es caracterizado por la condición $\{\tilde{\epsilon}_1, |\tilde{\epsilon}_2|\} = \mathcal{O}(1)$.

4.6 Inflación en teorías $f(R)$

Los modelos inflacionarios en las teorías $f(R)$ tiene la forma

$$f(R) = R + \alpha R^n, \quad (\alpha > 0, n > 0), \quad (4.67)$$

la cual incluye el modelo de Starobinsky como un caso específico ($n = 2$). En ausencia de materia ($\rho_M = 0$), la ecuación (4.11) da

$$3(1 + n\alpha R^{n-1})H^2 = \frac{1}{2}(n-1)\alpha R^n - 3n(n-1)\alpha H R^{n-2} \dot{R}. \quad (4.68)$$

La aceleración cósmica puede ser realizada en el régimen $F = 1 + n\alpha R^{n-1} \gg 1$. Bajo la aproximación $F \simeq n\alpha R^{n-1}$, se divide la ecuación (4.68) por $3n\alpha R^{n-1}$ para obtener

$$H^2 \simeq \frac{n-1}{6n} \left(R - 6nH \frac{\dot{R}}{R} \right). \quad (4.69)$$

Durante la inflación, el parámetro de Hubble H evoluciona lentamente así que se puede usar la aproximación $|\dot{H}/H^2| \ll 1$ y $|\ddot{H}/(H\dot{H})| \ll 1$. Entonces la ecuación (4.69) se reduce a

$$\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq -\epsilon_1 \quad \epsilon_1 = \frac{2-n}{(n-1)(2n-1)}. \quad (4.70)$$

Integrando esta ecuación para $\epsilon_1 > 0$, se obtiene la solución

$$H \simeq \frac{1}{\epsilon_1 t}, \quad a \propto t^{1/\epsilon_1}. \quad (4.71)$$

La aceleración cósmica ocurre para $\epsilon_1 < 1$, es decir, $n > (1 + \sqrt{3})/2$. Cuando $n = 2$ se tiene $\epsilon_1 = 0$, de tal manera que H es constante en el régimen $F \gg 1$. Los modelos que tienen un valor de n mayor, $n > 2$ conduce a superinflación caracterizada por $\dot{H} > 0$ y $a \propto |t_0 - t|^{-1/|\epsilon_1|}$ (t_0 es una constante). Por tanto, la inflación estándar con un H decreciente ocurre para $(1 + \sqrt{3})/2 < n < 2$.

El modelo de Starobinsky tiene la estructura

$$f(R) = R + \frac{R^2}{6M^2}, \quad (4.72)$$

donde la constante M tiene una dimensión de masa. La presencia de un término lineal en R eventualmente causa que la inflación termine. Sin despreciar este término lineal, la combinación de

las ecuaciones (4.11) y (4.12) se convierten en

$$\ddot{H} - \frac{\dot{H}^2}{2H} + \frac{1}{2}M^2H = -3H\dot{H}, \quad (4.73)$$

$$\ddot{R} + 3H\dot{R} + M^2R = 0. \quad (4.74)$$

Durante la inflación, los primeros dos términos en la ecuación (4.73) pueden despreciarse en relación a los otros, esto hace que $\dot{H} \simeq -M^2/6$. Entonces se obtienen las soluciones

$$H \simeq H_i - (M^2/6)(t - t_i), \quad (4.75)$$

$$a \simeq a_i \exp [H_i(t - t_i) - (M^2/12)(t - t_i)^2], \quad (4.76)$$

$$R \simeq 12H^2 - M^2, \quad (4.77)$$

donde H_i y q_i son el parámetro de Hubble y el factor de escala al inicio de la inflación ($t = t_i$), respectivamente.

Capítulo 5

Starobinsky en el marco de Jordan

La forma de obtener la ecuación de movimiento de un sistema es hacer la variación de la acción e igualar esa variación a cero. Para el caso de las funciones $f(R)$ es posible realizar el mismo procedimiento. En este capítulo se busca obtener la forma de una teoría $f(R)$ en la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, utilizando las componentes $\mu = \nu = 0$ del tensor y el escalar de Ricci dentro de la ecuación de movimiento del modelo. Esta teoría $f(R)$ obtenida es la que propone Starobinsky para inflación, teniendo la forma de nuestra función $f(R)$ podemos buscar a continuación un potencial en términos de un campo escalar, ϕ , asociado a nuestra teoría, para eso utilizamos una transformación conforme, que conduce a una acción en el marco de Einstein.

5.1 Modelo inflacionario de Starobinsky en teorías $f(R)$

Tenemos la acción en el marco de Jordan, como fue vista en el capítulo 4:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (5.1)$$

donde $\kappa^2 = 8\pi G_N$ y $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Se realizará la variación de la acción con respecto a la métrica y se hace que la variación de S sea igual a cero para obtener las ecuaciones de movimiento. Definimos otros elementos importantes para poder continuar

$$\delta g = \delta \det(g_{\mu\nu}) = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{\delta g}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}), \quad (5.3)$$

donde

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \quad (5.4)$$

Tomando la variación del tensor de Riemann general

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}, \quad (5.5)$$

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}. \quad (5.6)$$

Calculamos la derivada covariante

$$\nabla_{\mu}(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) = \partial_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}, \quad (5.7)$$

$$\nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}) = \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}, \quad (5.8)$$

y se resta (5.7) y (5.8)

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}) &= \partial_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \\ &\quad - \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \\ &= \partial_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} - \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Así, podemos determinar que

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \nabla_{\mu}(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}). \quad (5.10)$$

Tomando en cuenta que $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$, entonces

$$\delta R_{\sigma\nu} = \nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho}), \quad (5.11)$$

$$\delta R = R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \delta R_{\sigma\nu}g^{\sigma\nu} = R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla(g^{\sigma\nu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - g^{\sigma\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\mu}), \quad (5.12)$$

si hacemos cambio de índices obtenemos

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\nabla_{\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho}). \quad (5.13)$$

Hacemos la variación de los símbolos de Christoffel

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\nabla_{\mu}\delta g_{\alpha\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\alpha\mu} - \nabla_{\alpha}\delta g_{\mu\nu}), \quad (5.14)$$

introducimos esta ecuación en el resultado de la ecuación (5.13) con lo que se obtiene

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (5.15)$$

con $\square = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}$.

Teniendo todos los elementos necesarios, se puede tomar ahora la variación de la acción (5.1)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \frac{1}{2\kappa^2} (\delta f(R)\sqrt{-g} + f(R)\delta\sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{\partial f}{\partial R}\delta R\sqrt{-g} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R) \right) d^4x \\ &= \int \frac{1}{2\kappa^2} \left(F(R)(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta g^{\mu\nu})\sqrt{-g} - f(R)\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right) d^4x \\ &= \int \frac{\sqrt{-g}d^4x}{2\kappa^2} \left(F(R)(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta g^{\mu\nu}) - f(R)\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right), \end{aligned}$$

con lo que se obtiene

$$\delta S = \int \frac{d^4x}{2\kappa^2} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(F(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) F(R) \right). \quad (5.16)$$

Si imponemos que la acción permanezca invariante ante variaciones de la métrica, $\delta S = 0$, se tiene que

$$F(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) F(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(M)}, \quad (5.17)$$

donde, para generalizar la expresión, introdujimos $T_{\mu\nu}$, que es el tensor de energía momento de los campos de materia que surge a partir del Lagrangiano de materia (en un modelo con materia). $T_{\mu\nu}$ satisface que

$$T_{\mu\nu}^{(M)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (5.18)$$

Notemos que la ecuación (5.17) corresponde a una ecuación de movimiento. Sin embargo, aún no es evidente qué cantidad experimenta el movimiento. Como veremos más tarde, esta ecuación se puede traducir a la descripción de la dinámica de un campo escalar.

5.2 Función $f(R)$ para la métrica de FRW

Las componentes no nulas del tensor y el escalar de Ricci en la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, son

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right], \quad (5.19)$$

lo que conduce en el caso $k = 0$ a

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]. \quad (5.20)$$

Dado que el parámetro de Hubble está definido por $H = \dot{a}/a$, sabemos que

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \iff \frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2. \quad (5.21)$$

Por lo tanto, podemos reescribir el escalar de Ricci (5.20) como

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2). \quad (5.22)$$

Utilizando estos elementos en la ecuación de movimiento (5.17) se obtiene para la componente $\mu = \nu = 0$ que

$$\left(-3\frac{\ddot{a}}{a} \right) F + \frac{1}{2} f + (-\square - \nabla_0 \nabla_0) F = \kappa^2 \rho = 0, \quad (5.23)$$

donde hemos considerado $\rho = 0$ porque en nuestra construcción no hay materia. Dejando en términos de H y \dot{H} , esta expresión se reescribe como

$$(-3(\dot{H} + H^2))F + \frac{1}{2}f + 3H\dot{F} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -3F\dot{H} - 3FH^2 + \frac{1}{2}f + 3H\dot{F} = 0,$$

que, usando la ecuación (5.22) para sustituir \dot{H} , se convierte en

$$-3\left(\frac{R}{6} - 2H^2\right)F - 3FH^2 + \frac{1}{2}f + 3H\dot{F} = 0.$$

Ahora, ordenando y agrupando términos podemos reducir la expresión anterior a

$$-\left(\frac{FR - f}{2}\right) + 3FH^2 + 3H\dot{F} = 0,$$

haciendo un poco de álgebra y desarrollando la expresión para \dot{F}

$$\begin{aligned} FR - f - 6FH^2 &= 6H\dot{F} \\ &= 6HF'\dot{R}, \end{aligned}$$

con lo que se obtiene el sistema dinámico

$$\dot{H} = \frac{R}{6} - 2H^2, \quad \dot{R} = \frac{1}{6HF'}(FR - f - 6FH^2). \quad (5.24)$$

Para encontrar los puntos de equilibrio de este sistema dinámico, debemos imponer las condiciones $\dot{R} = \dot{H} = 0$. Por lo tanto, tendremos para \dot{H} en la ecuación (5.24) que

$$0 = \frac{R}{6} - 2H^2 \quad \Longleftrightarrow \quad H^2 = \frac{R}{12}. \quad (5.25)$$

Por otro lado, al aplicar la suposición $\dot{R} = 0$ en la ecuación para \dot{R} en (5.24), obtenemos

$$0 = FR - f - 6FH^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (R - 6H^2)F = f, \quad (5.26)$$

que, empleando la ecuación (5.25), se convierte en

$$\left(R - \frac{R}{2}\right)F = f \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{FR}{2} = f. \quad (5.27)$$

Debido a la definición de F en función de f , ecuación (4.5), notamos que f en función de R debe satisfacer

$$\frac{f'R}{2} = f \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f'}{f} = \frac{2}{R}. \quad (5.28)$$

Esta es una ecuación diferencial para f que podemos resolver trivialmente por integración:

$$\begin{aligned}\int \frac{df}{f} &= \int \frac{2}{R} dR, \\ \ln f &= 2 \ln R + C, \\ \ln f &= \ln R^2 + C, \\ f &= R^2 e^C,\end{aligned}$$

lo cual, definiendo la constante $\alpha \equiv e^C$, finalmente conduce a

$$f(R) = \alpha R^2. \quad (5.29)$$

Aquí aparece el término cuadrático R^2 como un caso especial de una teoría $f(R)$ para la cual se puede expresar el sistema dinámico, usando $f = \alpha R^2$, $F = 2\alpha R$, $F' = 2\alpha$, se puede encontrar

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \frac{1}{6HF'}(FR - f - 6FH^2) \\ &= \frac{1}{12H\alpha}(2\alpha R^2 - \alpha R^2 - 12\alpha RH^2) \\ &= \frac{1}{12H}(R^2 - 12RH^2),\end{aligned}$$

con lo que se expresa

$$\begin{cases} \dot{R} = \frac{R}{12H}(R - 12H^2), \\ \dot{H} = \frac{R}{6} - 2H^2. \end{cases} \quad (5.30)$$

5.3 Modelo de Starobinsky

El modelo de Starobinsky tiene como forma general

$$f(R) = R + \alpha R^2, \quad (5.31)$$

tomando en cuenta sus derivadas $F = 1 + 2\alpha R$, $F' = 2\alpha$, se puede determinar su sistema dinámico, como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \frac{1}{12\alpha H}(R(1 + 2\alpha R) - (R + \alpha R^2) - 6(1 + 2\alpha R)H^2) \\ &= \frac{1}{12\alpha H}(\cancel{R} + 2\alpha R^2 - \cancel{R} - \alpha R^2 - 6H^2 - 12\alpha RH^2) \\ &= \frac{1}{12\alpha H}(\alpha R^2 - 6H^2 - 12\alpha RH^2),\end{aligned}$$

expresándolo de una forma más ordenada, queda

$$\begin{cases} \dot{R} = \frac{1}{12\alpha H}(\alpha R^2 - 6H^2(1 + 2\alpha R)), \\ \dot{H} = \frac{R}{6} - 2H^2. \end{cases} \quad (5.32)$$

Buscando puntos críticos, se toma $\dot{H} = 0$, obteniéndose $R = 12H^2$, ingresando este término en \dot{R} se encuentra

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{1}{12\alpha H}(\alpha(144H^4) - 6H^2 - 144\alpha H^4) \\ &= \frac{-6H^2}{12H\alpha} = -\frac{H}{2\alpha}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Por lo tanto es aceptable decir que $R = 0 = H$, por ejemplo el espacio de Minkowski, es un punto crítico.

5.4 Extensión exponencial del modelo de Starobinsky

Ahora se analizará la extensión exponencial del modelo de Starobinsky, con la función

$$f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda e^{-\alpha R}. \quad (5.34)$$

Para $\alpha R \gg 1$ el modelo reproduce el exitoso paradigma inflacionario del modelo de Starobinsky y cuando $\alpha R \ll 1$, la función (6.1) puede ser aproximada como

$$\begin{aligned} f(R) &= R + \alpha R^2 - 2\Lambda \left(1 - \alpha R + \frac{\alpha^2 R^2}{2} - \dots\right), \\ f(R) &\sim R + \alpha R^2 - 2\Lambda + 2\Lambda\alpha R, \\ f(R) &\sim R - 2\Lambda. \end{aligned}$$

Usando las derivadas de (5.34), $F = 1 + 2\alpha R + 2\Lambda\alpha e^{-\alpha R}$, $F' = 2\alpha - 2\Lambda\alpha^2 e^{-\alpha R}$, se puede encontrar el sistema dinámico para el modelo, teniendo a \dot{R} de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{(R(1 + 2\alpha R + 2\Lambda\alpha e^{-\alpha R}) - (R + \alpha R^2 - 2\Lambda e^{-\alpha R}) - 6H^2(1 + 2\alpha R + 2\Lambda\alpha e^{-\alpha R}))}{6H(2\alpha - 2\Lambda\alpha^2 e^{-\alpha R})} \\ &= \frac{(\mathcal{K} + 2\alpha R^2 + 2\Lambda\alpha R e^{-\alpha R} - \mathcal{K} - \alpha R^2 + 2\Lambda e^{-\alpha R} - 6H^2)}{6H(2\alpha - 2\Lambda\alpha^2 e^{-\alpha R})}, \end{aligned}$$

el modelo queda

$$\begin{cases} \dot{R} = \frac{(\alpha R^2 - 6H^2 - 12\alpha R H^2 + 2\Lambda e^{-\alpha R}(1 + \alpha R - 6\alpha H^2))}{6H(2\alpha - 2\Lambda\alpha^2 e^{-\alpha R})}, \\ \dot{H} = \frac{R}{6} - 2H^2. \end{cases} \quad (5.35)$$

Buscando puntos críticos, se encuentran los mismos que en el modelo de Starobinsky, en infinito, representando inflación, y otros nuevos en la región finita, estos los encontramos haciendo $\dot{R} = \dot{H} = 0$, con lo que se obtiene $H^2 = R/12$, sustituimos en \dot{R}

$$\begin{aligned} \alpha R^2 - \frac{R}{2} - \alpha R^2 + 2\Lambda e^{-\alpha R} \left(1 + \alpha R - \alpha \frac{R}{2}\right) &= 0, \\ -\frac{R}{2} + 2\Lambda e^{-\alpha R} \left(1 + \alpha \frac{R}{2}\right) &= 0, \end{aligned}$$

dejando $R/2$ a un lado de la igualdad

$$\frac{R}{2} = 2\Lambda e^{-\alpha R} \left(1 + \alpha \frac{R}{2}\right),$$

con lo que se encuentra la ecuación trascendental

$$R = 2\Lambda e^{-\alpha R} (2 + \alpha R). \quad (5.36)$$

Para $\alpha R \ll 1$, la ecuación anterior puede escribirse como la aproximación:

$$\begin{aligned} R &= 2\Lambda e^{-\alpha R} (2 + \alpha R), \\ &\approx 2\Lambda (2 + \alpha R) \left(1 - \alpha R + \frac{\alpha^2 R^2}{2} - \dots\right) \\ &\approx (4\Lambda + 2\Lambda\alpha R)(1 - \alpha R) \\ &\approx 4\Lambda - 4\Lambda\alpha R + 2\alpha R - 2\Lambda\alpha^2 R^2 \\ &\approx 4\Lambda - 2\lambda\alpha R, \end{aligned}$$

organizando la aproximación

$$R + 2\Lambda\alpha R \approx 4\Lambda \quad \Longleftrightarrow \quad R(1 + 2\Lambda\alpha) \approx 4\Lambda, \quad (5.37)$$

despejando R

$$R \approx \frac{4\Lambda}{1 + 2\Lambda\alpha}. \quad (5.38)$$

5.5 Campos escalares como interpretación de $f(R)$

Para poder determinar la forma que tiene el potencial de Starobinsky en el marco de Einstein, se realiza una transformación conforme, al encontrar esta expresión podemos trabajar de forma más fácil con el modelo ya que podemos determinar los parámetros de *slow-roll* a partir de dicho potencial. Trabajar en el marco de Einstein es la forma más rápida de analizar el modelo y es por eso que se realiza este desarrollo extra.

La teoría $f(R)$ dada puede ser presentada en una teoría escalar-tensorial en el marco de Jordan. Luego, después de una transformación conforme $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$, podemos escribir la acción en el marco de Einstein. Iniciamos aplicando la transformación a los elementos que componen la acción

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha - \Omega^{-1} \left(\tilde{\delta}_\beta^\alpha \nabla_\gamma \Omega + \tilde{\delta}_\gamma^\alpha \nabla_\beta \Omega - \tilde{g}_{\beta\gamma} \nabla^\alpha \Omega \right), \quad (5.39)$$

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\rho, \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha &= \nabla_\mu \left[\tilde{\Gamma}_{\beta\nu}^\alpha - \Omega^{-1} \left(\tilde{\delta}_\beta^\alpha \nabla_\nu \Omega + \tilde{\delta}_\nu^\alpha \nabla_\beta \Omega - \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla^\alpha \Omega \right) \right] \\ &= \tilde{\Gamma}_{\beta\nu,\mu}^\alpha + \Omega^{-2} \nabla_\mu \Omega \left(\tilde{\delta}_\beta^\alpha \nabla_\nu \Omega + \tilde{\delta}_\nu^\alpha \nabla_\beta \Omega - \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla^\alpha \Omega \right) \\ &\quad - \Omega^{-1} \left(\tilde{\delta}_\beta^\alpha \nabla_\mu \nabla_\nu \Omega + \tilde{\delta}_\nu^\alpha \nabla_\mu \nabla_\beta \Omega - \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla_\mu \nabla^\alpha \Omega \right), \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha &= \nabla_\nu \left[\tilde{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha - \Omega^{-1} \left(\tilde{\delta}_\beta^\alpha \nabla_\mu \Omega + \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\beta \Omega - \tilde{g}_{\beta\mu} \nabla^\alpha \Omega \right) \right] \\ &= \tilde{\Gamma}_{\beta\mu,\nu}^\alpha + \Omega^{-2} \nabla_\nu \Omega \left(\tilde{\delta}_\beta^\alpha \nabla_\mu \Omega + \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\beta \Omega - \tilde{g}_{\beta\mu} \nabla^\alpha \Omega \right) \\ &\quad - \Omega^{-1} \left(\tilde{\delta}_\beta^\alpha \nabla_\nu \nabla_\mu \Omega + \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\nu \nabla_\beta \Omega - \tilde{g}_{\beta\mu} \nabla_\nu \nabla^\alpha \Omega \right), \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\rho &= \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\alpha \tilde{\Gamma}_{\beta\nu}^\rho - \Omega^{-1} \left(\tilde{\delta}_\beta^\rho \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\alpha \nabla_\mu \Omega + \tilde{\delta}_\nu^\rho \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\alpha \nabla_\beta \Omega - \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\alpha \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla^\rho \Omega \right) \\ &\quad - \Omega^{-1} \left(\tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\rho \Omega \tilde{\Gamma}_{\beta\nu}^\rho + \tilde{\delta}_\rho^\alpha \nabla_\mu \Omega \tilde{\rho}_{\beta\nu} - \tilde{g}_{\mu\rho} \nabla^\alpha \Omega \tilde{\Gamma}_{\beta\nu}^\rho \right) \\ &\quad + \Omega^{-2} \left(\tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\rho \Omega \tilde{\delta}_\beta^\rho \nabla_\nu \Omega + \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\rho \Omega \tilde{\delta}_\nu^\rho \nabla_\beta \Omega - \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\rho \Omega \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla^\rho \Omega \right. \\ &\quad + \tilde{\delta}_\rho^\alpha \nabla_\mu \Omega \tilde{\delta}_\beta^\rho \nabla_\nu \Omega + \tilde{\delta}_\rho^\alpha \nabla_\mu \Omega \tilde{\delta}_\nu^\rho \nabla_\beta \Omega - \tilde{\delta}_\rho^\alpha \nabla_\mu \Omega \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla^\rho \Omega \\ &\quad \left. - \tilde{g}_{\mu\rho} \nabla^\alpha \Omega \tilde{\delta}_\beta^\rho \nabla_\nu \Omega - \tilde{g}_{\mu\rho} \nabla^\alpha \Omega \tilde{\delta}_\nu^\rho \nabla_\beta \Omega + \tilde{g}_{\mu\rho} \nabla^\alpha \Omega \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla^\rho \Omega \right) \\ &= \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\alpha \tilde{\Gamma}_{\beta\nu}^\rho - \left(\tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^\alpha \nabla_\nu \ln \Omega + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \nabla_\beta \ln \Omega - \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\alpha \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla^\rho \ln \Omega \right. \\ &\quad + \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\rho \ln \Omega \tilde{\Gamma}_{\beta\nu}^\rho + \tilde{\delta}_\rho^\alpha \nabla_\mu \ln \Omega \tilde{\Gamma}_{\beta\nu}^\rho - \tilde{g}_{\mu\rho} \nabla^\alpha \ln \Omega \tilde{\Gamma}_{\beta\nu}^\rho \left. \right) + \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\rho \ln \Omega \tilde{\delta}_\beta^\rho \nabla_\nu \ln \Omega \\ &\quad + \tilde{\delta}_\mu^\alpha \tilde{\delta}_\nu^\rho \nabla_\rho \ln \Omega \nabla_\beta \ln \Omega - \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\rho \ln \Omega \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla^\rho \ln \Omega - \tilde{g}_{\mu\rho} \tilde{\delta}_\beta^\rho \nabla^\alpha \ln \Omega \nabla_\nu \ln \Omega - \tilde{g}_{\mu\rho} \tilde{\delta}_\nu^\rho \nabla^\alpha \ln \Omega \nabla_\beta \ln \Omega \\ &\quad + \tilde{g}_{\mu\rho} \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla^\alpha \ln \Omega + \tilde{\delta}_\beta^\alpha \nabla_\mu \ln \Omega \nabla_\nu \ln \Omega + \tilde{\delta}_\nu^\alpha \nabla_\mu \ln \Omega \nabla_\beta \ln \Omega - \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla_\mu \ln \Omega \nabla^\alpha \ln \Omega. \end{aligned} \quad (5.43)$$

De forma análoga se puede encontrar

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\rho &= \tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\alpha \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^\rho - \left(\tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\alpha \nabla_\beta \ln \Omega + \tilde{\Gamma}_{\nu\beta}^\alpha \nabla_\mu \ln \Omega - \tilde{g}_{\mu\beta} \tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\alpha \nabla^\rho \ln \Omega + \tilde{\delta}_\nu^\alpha \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^\rho \nabla_\rho \ln \Omega \right. \\ &\quad + \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^\alpha \nabla_\nu \ln \Omega - \tilde{g}_{\nu\rho} \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^\rho \nabla^\alpha \ln \Omega \left. \right) + \tilde{\delta}_\nu^\alpha \tilde{\delta}_\mu^\rho \nabla_\rho \ln \Omega \nabla_\beta \ln \Omega + \tilde{\delta}_\nu^\alpha \tilde{\delta}_\beta^\rho \nabla_\rho \ln \Omega \nabla_\mu \ln \Omega \\ &\quad - \tilde{\delta}_\rho^\alpha \tilde{g}_{\mu\beta} \nabla_\rho \ln \Omega \nabla^\rho \ln \Omega + \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\nu \ln \Omega \nabla_\beta \ln \Omega + \tilde{\delta}_\beta^\alpha \nabla_\nu \ln \Omega \nabla_\mu \ln \Omega - \tilde{\delta}_\rho^\alpha \tilde{g}_{\mu\beta} \nabla_\nu \ln \Omega \nabla^\rho \ln \Omega \\ &\quad - \tilde{g}_{\nu\mu} \nabla^\alpha \ln \Omega \nabla_\beta \ln \Omega - \tilde{g}_{\nu\beta} \nabla^\alpha \ln \Omega \nabla_\mu \ln \Omega + \tilde{g}_{\nu\rho} \tilde{g}_{\mu\beta} \nabla^\alpha \ln \Omega \nabla^\rho \ln \Omega. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Los elementos necesarios para expresar el tensor de Ricci son

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \nabla_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha &= \tilde{\Gamma}_{\beta\nu,\mu}^\alpha - \tilde{\Gamma}_{\beta\mu,\nu}^\alpha + \tilde{\delta}_\nu^\alpha \nabla_\mu \ln \Omega \nabla_\beta \ln \Omega - \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\nu \ln \Omega \nabla_\beta \ln \Omega \\ &- \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla_\mu \ln \Omega \nabla^\alpha \ln \Omega + \tilde{g}_{\beta\mu} \nabla^\alpha \ln \Omega \nabla_\nu \ln \Omega - \Omega^{-1} \left(\tilde{\delta}_\nu^\alpha \nabla_\mu \nabla_\beta \Omega \right. \\ &- \left. \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla_\mu \nabla^\alpha \Omega - \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\nu \nabla_\beta \Omega + \tilde{g}_{\beta\mu} \nabla_\nu \nabla^\alpha \Omega \right), \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \Gamma_{\mu\rho}^\rho &= \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\alpha \tilde{\Gamma}_{\beta\nu}^\rho - \tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\alpha \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^\rho + \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\alpha \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla^\rho \ln \Omega - \tilde{\delta}_\nu^\alpha \tilde{\Gamma}_{\beta\nu}^\rho \nabla_\rho \ln \Omega \\ &+ \tilde{g}_{\mu\rho} \nabla^\alpha \ln \Omega \tilde{\Gamma}_{\beta\nu}^\rho - \tilde{g}_{\mu\beta} \tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\alpha \nabla^\rho \ln \Omega + \tilde{\delta}_\nu^\alpha \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^\rho \nabla_\rho \ln \Omega \\ &- \tilde{g}_{\nu\rho} \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^\rho \nabla^\alpha \ln \Omega + \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\nu \ln \Omega \nabla_\beta \ln \Omega - \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\rho \ln \Omega \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla^\rho \ln \Omega \\ &+ \tilde{g}_{\mu\rho} \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla^\alpha \ln \Omega \nabla^\rho \ln \Omega - \tilde{\delta}_\nu^\alpha \nabla_\mu \ln \Omega \nabla_\beta \ln \Omega + \tilde{\delta}_\nu^\alpha \tilde{g}_{\mu\beta} \nabla_\rho \ln \Omega \nabla^\rho \ln \Omega \\ &- \tilde{g}_{\nu\rho} \tilde{g}_{\mu\rho} \nabla^\alpha \ln \Omega \nabla^\rho \ln \Omega. \end{aligned} \quad (5.46)$$

El tensor de Riemann, (5.40), puede escribirse entonces como

$$\begin{aligned} R_{\beta\mu\nu}^\alpha &= \tilde{R}_{\beta\mu\nu}^\alpha - \tilde{g}_{\beta\mu} \nabla_\nu \ln \Omega \nabla^\alpha \ln \Omega + \tilde{g}_{\beta\mu} \nabla^\alpha \ln \Omega \nabla_\nu \ln \Omega - \Omega^{-1} \left(\tilde{\delta}_\nu^\alpha \nabla_\mu \nabla_\beta \Omega \right. \\ &- \left. \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla_\mu \nabla^\alpha \Omega - \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\nu \nabla_\beta \Omega + \tilde{g}_{\beta\mu} \nabla_\nu \nabla^\alpha \Omega \right) + \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\alpha \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla^\rho \ln \Omega \\ &- \tilde{\delta}_\mu^\alpha \tilde{\Gamma}_{\beta\nu}^\rho \nabla_\rho \ln \Omega + \tilde{g}_{\mu\rho} \tilde{\Gamma}_{\beta\nu}^\rho \nabla^\alpha \ln \Omega - \tilde{g}_{\mu\beta} \tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\alpha \nabla^\rho \ln \Omega + \tilde{\delta}_\nu^\alpha \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\rho \nabla_\rho \ln \Omega \\ &- \tilde{g}_{\nu\rho} \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^\rho \nabla^\alpha \ln \Omega - \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\rho \ln \Omega \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla^\rho \ln \Omega + \tilde{g}_{\mu\rho} \tilde{g}_{\beta\nu} \nabla^\alpha \ln \Omega \nabla^\rho \ln \Omega \\ &+ \tilde{\delta}_\nu^\alpha \tilde{g}_{\mu\beta} \nabla_\rho \ln \Omega \nabla^\rho \ln \Omega - \tilde{g}_{\nu\rho} \tilde{g}_{\mu\rho} \nabla^\alpha \ln \Omega \nabla^\rho \ln \Omega \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} &= \tilde{R}_{\beta\mu\nu}^\alpha + 2\tilde{\delta}_\beta^\alpha \nabla_\mu \nabla_\nu \ln \Omega - 2g^{\alpha\rho} g_{\nu\beta} \nabla_\mu \nabla_\rho \ln \Omega \\ &+ 2\nabla_\beta \ln \Omega \tilde{\delta}_\mu^\alpha \nabla_\nu \ln \Omega - 2\nabla_\beta \ln \Omega g_{\mu\nu} g^{\alpha\rho} \nabla_\rho \ln \Omega \\ &- 2g_{\nu\beta} \tilde{\delta}_\mu^\alpha g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \ln \Omega \nabla_\sigma \ln \Omega. \end{aligned} \quad (5.48)$$

El tensor de Ricci se escribe como

$$\begin{aligned} R_{\beta\mu} &= \tilde{R}_{\beta\mu} - (n-2) \nabla_\beta \nabla_\mu \ln \Omega - g_{\beta\mu} g^{\sigma\rho} \nabla_\sigma \nabla_\rho \ln \Omega \\ &+ (n-2) \nabla_\beta \ln \Omega \nabla_\mu \ln \Omega - (n-2) g_{\beta\mu} g^{\sigma\rho} \nabla_\sigma \ln \Omega \nabla_\rho \ln \Omega, \end{aligned} \quad (5.49)$$

con n como el número de dimensiones del espacio-tiempo. El escalar de Ricci se expresa de la forma

$$R = g^{\beta\mu} R_{\beta\mu} = \Omega^2 \left[\tilde{R} + 2(n-1) \tilde{\square} \ln \Omega - \frac{(n-1)(n-2) \nabla_\beta \Omega \nabla_\mu \Omega}{\Omega^2} \right], \quad (5.50)$$

con $\tilde{\square} = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \nabla_\beta (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\beta\mu} \nabla_\mu \ln \Omega)$.

Si definimos $\omega = \ln \Omega$ y usando $n = 4$ tendremos ($\beta \rightarrow \mu$, $\mu \rightarrow \nu$, $\nabla_\mu \rightarrow \partial_\mu$)

$$R = \Omega^2 \left(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega \right). \quad (5.51)$$

La acción (5.1) la podemos reescribir como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa^2} FR - V \right) + \int d^4x \mathcal{L}_M, \quad (5.52)$$

con $\sqrt{-g} = \Omega^{-4} \sqrt{-\tilde{g}}$ y

$$V = \frac{FR - f}{2\kappa^2}, \quad (5.53)$$

tendremos

$$\begin{aligned} S_E &= \int d^4x \Omega^{-4} \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \left(\Omega^2 \left(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega \right) \right) F - V \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2\kappa^2} F \Omega^{-2} \left(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega \right) - \Omega^{-4} V \right], \end{aligned}$$

usando la transformación

$$\Omega^2 = F = \phi \kappa, \quad (5.54)$$

nos permite escribir

$$\int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\frac{\tilde{R}}{2\kappa^2} + \frac{6\tilde{\square}\omega}{2\kappa^2} - \frac{6}{2\kappa^2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega - VF^{-2} \right),$$

y, por el teorema de Gauss, la integral

$$\int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\square}\omega = 0. \quad (5.55)$$

Así

$$\begin{aligned} S_E &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\frac{\tilde{R}}{2\kappa^2} - \frac{3}{\kappa^2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \ln(\kappa\phi)^{1/2} \partial_\nu \ln(\kappa\phi)^{1/2} - VF^{-2} \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\frac{\tilde{R}}{2\kappa^2} - \frac{3}{4\kappa^2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \ln(\kappa\phi) \partial_\nu \ln(\kappa\phi) - VF^{-2} \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\frac{\tilde{R}}{2\kappa^2} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\kappa} \ln(\kappa\phi) \partial_\nu \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\kappa} \ln(\kappa\phi) - VF^{-2} \right). \end{aligned}$$

Definimos $\chi = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\kappa} \ln \kappa\phi$,

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\frac{1}{2\kappa^2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - U \right), \quad (5.56)$$

donde $U = \frac{V}{F^2} = \frac{V}{\kappa^2 \phi^2}$.

Podemos expresar el potencial correspondiente a la función $f(R)$ de otra manera, empezamos escribiendo la forma modificada del modelo de Starobinsky

$$f = R + \alpha R^2 - 2\alpha \Lambda e^{-\alpha R}, \quad (5.57)$$

cuya derivada es

$$F = 1 + 2\alpha R + 2\alpha \Lambda e^{-\alpha R}, \quad (5.58)$$

usando la transformación (5.54) escribimos

$$\kappa \phi = 1 + 2\alpha R + 2\alpha \Lambda e^{-\alpha R}. \quad (5.59)$$

Multiplicando (5.58) por R

$$FR - R - 2\alpha R^2 = 2\alpha \Lambda R e^{-\alpha R},$$

agregando el término $2\Lambda e^{-\alpha R}$

$$FR - R - \alpha R^2 + 2\Lambda e^{-\alpha R} = \alpha R^2 + 2\Lambda e^{-\alpha R} + 2\Lambda \alpha R e^{-\alpha R},$$

usando (5.57)

$$FR - f = \alpha R^2 + 2\Lambda e^{-\alpha R}(\alpha R + 1),$$

agregando el término $2\kappa^2$

$$2\kappa^2 \left(\frac{FR - f}{2\kappa^2} \right) = \alpha R^2 + 2\Lambda e^{-\alpha R}(\alpha R + 1),$$

usando la definición de V en (5.53)

$$2\kappa^2 V = \alpha R^2 + 2\Lambda e^{-\alpha R}(\alpha R + 1). \quad (5.60)$$

Encontrar una forma explícita $V(\phi)$ para el potencial en términos de funciones elementales parece no ser posible. Formalmente, usando la función W de Lambert (o producto logarítmico) puede ser expresada, para eso se utiliza la ecuación (5.59)

$$\kappa \phi - 1 = 2\alpha R + 2\alpha \Lambda e^{-\alpha R} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\kappa \phi - 1}{2} = \alpha R + \alpha \Lambda e^{-\alpha R},$$

cambiamos de signo

$$\frac{1 - \kappa \phi}{2} = -\alpha R - \alpha \Lambda e^{-\alpha R},$$

aplicamos e a cada lado de la ecuación

$$e^{(1-\kappa\phi)/2} = e^{-\alpha R} e^{-\alpha \Lambda e^{-\alpha R}}, \quad (5.61)$$

agregamos $-\alpha\Lambda$ a ambos lados

$$-\alpha\Lambda e^{(1-\kappa\phi)/2} = -\alpha\Lambda e^{-\alpha R} e^{-\alpha\Lambda e^{-\alpha R}},$$

luego se aplica la función W de Lambert

$$-\alpha\Lambda e^{-\alpha R} = W\left(-\alpha\Lambda e^{(1-\kappa\phi)/2}\right),$$

ingresando este resultado en la ecuación (5.59) para dejar todo en términos de $\kappa\phi$

$$\begin{aligned} \kappa\phi &= 1 + 2\alpha R + 2\alpha\Lambda e^{-\alpha R}, \\ 2\alpha R &= \kappa\phi - 1 - 2\alpha\Lambda e^{-\alpha R}, \\ 2\alpha R &= \kappa\phi - 1 - 2W\left(-\alpha\Lambda e^{(1-\kappa\phi)/2}\right). \end{aligned} \tag{5.62}$$

Capítulo 6

Modelo Caótico y modificación de Starobinsky

A través de los años se ha observado que el modelo de Starobinsky ha sido un muy buen modelo, desde que fue propuesto se ha mantenido como un modelo sólido cuyas predicciones de los parámetros inflacionarios han estado dentro de los límites de los mismos proporcionados por las observaciones de los diferentes satélites y sondas espaciales. Sería ahora interesante investigar qué sucede si se realizan pequeñas desviaciones al modelo a razón de probar su robustez. Lo que se ha aprendido al analizar el sistema dinámico es que la teoría $f(R)$ debe ser cuadrática solo para valores grandes de R . Por lo tanto, *Fabris et. al.* propusieron el siguiente modelo [21]:

$$f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda e^{-\alpha R}, \quad (6.1)$$

como una corrección exponencial al modelo de Starobinsky. Para $\alpha R \gg 1$ el modelo reproduce el exitoso paradigma inflacionario del modelo de Starobinsky y cuando $\alpha R \ll 1$, la función (6.1) puede ser aproximada como

$$f(R) \sim R - 2\Lambda. \quad (6.2)$$

En el capítulo anterior obtuvimos una expresión de V en términos de R y posteriormente determinamos, con la ayuda de la función W de Lambert, una expresión para R en términos de ϕ , ahora utilizando esos resultados encontraremos la expresión de U en términos del campo escalar.

6.1 Potencial inflacionario en la extensión exponencial del modelo de Starobinsky

La forma general del potencial que se va a utilizar es

$$U = \frac{V}{\kappa^2 \phi^2}, \quad (6.3)$$

52 CAPÍTULO 6. MODELO CAÓTICO Y MODIFICACIÓN DE STAROBINSKY

además definimos

$$\chi = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\kappa} \ln(\kappa\phi), \quad (6.4)$$

con lo que se tiene

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi = \ln(\kappa\phi) \quad \iff \quad e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi} = \kappa\phi, \quad (6.5)$$

ahora (6.3) se puede expresar como

$$\kappa^2 U = \frac{V}{\phi^2} = \kappa^2 e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi} V. \quad (6.6)$$

La función W de Lambert puede expandirse usando las series de Taylor en torno a 0, se escribe como

$$W_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} x^n = x - x^2 + \frac{3}{2} x^3 - \frac{8}{3} x^4 + \dots \quad (6.7)$$

Aplicando la expansión, hasta el segundo término, de nuestra función W queda

$$\begin{aligned} W\left(-\alpha\Lambda e^{(1-\kappa\phi)/2}\right) &= -\alpha\Lambda e^{(1-\kappa\phi)/2} - \left((\alpha\Lambda)^2 e^{2(1-\kappa\phi)/2}\right) \\ &= -\alpha\Lambda e^{(1-\kappa\phi)/2} - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-\kappa\phi} \\ &= -\alpha\Lambda e^{\left(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi}\right)/2} - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi}} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Para encontrar la expresión para V en términos de $\kappa\chi$ se utilizan las ecuaciones (5.60) y (5.62),

$$\begin{aligned} 2\alpha R &= e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi} - 1 + 2 \left[-\alpha\Lambda e^{\left(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi}\right)/2} - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi}} \right], \\ \alpha R &= \frac{1}{2} \left[e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi} - 1 - 2\alpha\Lambda e^{\left(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi}\right)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi}} \right], \end{aligned} \quad (6.9)$$

usando (6.9) en la ecuación (5.60) se obtiene V :

$$\begin{aligned} \kappa^2 V &= \frac{1}{8\alpha} \left[e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi} - 1 - 2\alpha\Lambda e^{\left(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi}\right)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi}} \right]^2 \\ &+ \Lambda \left[\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi}}{2} - \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{\left(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi}\right)/2} - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi}} + 1 \right] \\ &\times \exp\left(-\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi}}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{\left(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi}\right)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \chi}}\right), \end{aligned} \quad (6.10)$$

con esta expresión se puede encontrar U en la ecuación (6.6)

$$\begin{aligned}
 \alpha\kappa^2U &= \alpha\kappa^2V e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} \\
 &= \alpha e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} \left\{ \frac{1}{8\alpha} \left[e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} - 1 - 2\alpha\Lambda e^{\left(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}\right)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right]^2 \right. \\
 &+ \Lambda \left[\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{\left(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}\right)/2} - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right] \\
 &\times \left. \exp \left(-\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{\left(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}\right)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha\kappa^2U &= e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} \left\{ \frac{1}{8} \left[e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} - 1 - 2\alpha\Lambda e^{\left(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}\right)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right]^2 \right. \\
 &+ \alpha\Lambda \left[\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{\left(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}\right)/2} - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right] \\
 &\times \left. \exp \left(-\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{\left(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}\right)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \right\}. \tag{6.11}
 \end{aligned}$$

Para $\Lambda = 0$ se tiene una expresión para el potencial normal de Starobinsky

$$\alpha\kappa^2U = \frac{e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}}{8} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} - 1 \right)^2. \tag{6.12}$$

54 CAPÍTULO 6. MODELO CAÓTICO Y MODIFICACIÓN DE STAROBINSKY

Para determinar los parámetros de *slow-roll*, (2.48), se determinan las derivadas del potencial

$$\begin{aligned}
 \frac{dU}{d\chi} &= -2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} \left[\frac{1}{8} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right)^2 \right. \\
 &+ \alpha\Lambda \left(\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \exp \left(-\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}}{2} + \frac{1}{2} \right. \\
 &+ \left. \left. \alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \right] + e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} \left\{ \frac{1}{4} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} \right. \right. \\
 &- \left. \left. 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} + \alpha\Lambda\kappa\sqrt{\frac{2}{3}} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} + 2(\alpha\Lambda)^2\kappa\sqrt{\frac{2}{3}} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \right. \\
 &+ \alpha\Lambda \left(\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \left(-\frac{\kappa}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\alpha\Lambda e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} \right. \\
 &- \left. \frac{\kappa}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} - (\alpha\Lambda)^2\kappa\sqrt{\frac{2}{3}} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \exp \left(-\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} \right. \\
 &+ \left. \left. (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) + \alpha\Lambda \left(\frac{\kappa}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} + \alpha\Lambda\frac{\kappa}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} + (\alpha\Lambda)^2\kappa\sqrt{\frac{2}{3}} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \right. \\
 &\times \left. \left. \exp \left(-\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \right\}, \\
 \frac{dU}{d\chi} &= -2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} \left[\frac{1}{8} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right)^2 \right. \\
 &+ \alpha\Lambda \left(\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \exp \left(-\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}}{2} + \frac{1}{2} \right. \\
 &+ \left. \left. \alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \right] + \kappa\sqrt{\frac{2}{3}} e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} \right. \\
 &- \left. \left. 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \alpha\Lambda \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} \left(\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \\
& \times \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \exp \left(-\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} \right. \\
& + \left. (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) + \alpha\Lambda \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi} \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right) \\
& \times \exp \left(-\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi})/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}} \right),
\end{aligned}$$

haciendo $x = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi}$, tendremos

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{d\chi} &= -2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa x^{-2} \left[\frac{1}{8} \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right)^2 + \alpha\Lambda \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} \right. \right. \\
& - \left. \left. (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right] + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\kappa}{4} x^{-2} x \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} \right. \\
& - \left. (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) - \alpha\Lambda \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\kappa}{2} x^{-2} x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \\
& \times \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \\
& + \alpha\Lambda \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\kappa}{2} x^{-2} x \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{d\chi} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\kappa x^{-2} \left\{ -2 \left[\frac{1}{8} \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right)^2 + \alpha\Lambda \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} \right. \right. \right. \\
& - \left. \left. (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right] + \frac{x}{4} \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} \right. \\
& - \left. 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) - \alpha\Lambda \frac{x}{2} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \\
& \times \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \\
& + \left. \alpha\Lambda \frac{x}{2} \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dU}{d\chi} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\kappa x^{-2} \left\{ -2 \left[\frac{1}{8} \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right)^2 + \alpha\Lambda \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} \right. \right. \right. \\
 &- \left. \left. (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right] + \frac{x}{4} \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} \right. \\
 &- \left. 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) + \alpha\Lambda \frac{x}{2} \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \\
 &\times \left. \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right\}. \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

El parámetro ϵ se define como

$$\epsilon = \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{U'}{U} \right)^2, \quad (6.14)$$

donde U es el potencial presente en (6.11) y U' es la derivada del potencial, la cual se encontró en (6.13). La condición de *slow-roll* hace que $\epsilon = 0$, con lo que se tiene

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{U'}{U} \right)^2, \\
 U' &= \frac{\sqrt{2}}{M_{pl}} U \iff 0 = \sqrt{2}\kappa U - U', \\
 0 &= \sqrt{2}\kappa x^{-2} \left[\frac{1}{8} \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right)^2 + \alpha\Lambda \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right. \\
 &\times \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left. - \sqrt{\frac{2}{3}}\kappa x^{-2} \left[-\frac{1}{4} \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right)^2 \right. \right. \\
 &- 2\alpha\Lambda \left(\frac{x}{2} - \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) + \frac{x}{4} \left(x - 1 \right. \\
 &- \left. 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left(1 - \alpha\Lambda \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right. \right. \\
 &\left. \left. + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right) \left. \right] \\
 0 &= \left(\frac{\sqrt{6}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{8} \right) \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(x-1)/2} - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right)^2 + \left(\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{6}}{3} \right) \alpha\Lambda \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} \right. \\
 &- \left. (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) - \frac{\sqrt{6}}{12} x \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \\
 &\times \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left(1 - \alpha\Lambda \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right),
 \end{aligned}$$

al resolver la ecuación se encuentra el valor de χ con el que termina inflación.

La segunda derivada del potencial es

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2U}{d\chi^2} = & -2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa^2x^{-2} \left\{ -2 \left[\frac{1}{8} \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right)^2 + \alpha\Lambda \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} \right. \right. \right. \\
 & - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \left. \left. \left. \right] \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right] + \frac{x}{4} \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} \right. \right. \\
 & - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \left. \left. \right) \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) + \alpha\Lambda \frac{x}{2} \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right. \\
 & \times \left. \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right\} \\
 & + \sqrt{\frac{2}{3}}\kappa x^{-2} \left\{ -\frac{1}{2} \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa x + \sqrt{\frac{2}{3}}\alpha\Lambda\kappa x e^{(1-x)/2} \right. \right. \\
 & + 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\alpha\Lambda)^2\kappa x e^{1-x} \left. \left. \right) - 2\alpha\Lambda \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\kappa x}{2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\alpha\Lambda\frac{\kappa x}{2} e^{(1-x)/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}(\alpha\Lambda)^2\kappa x e^{1-x} \right) \right. \\
 & \times \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) - 2\alpha\Lambda \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \\
 & \times \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\kappa x}{2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\alpha\Lambda\frac{\kappa x}{2} e^{(1-x)/2} - \sqrt{\frac{2}{3}}(\alpha\Lambda)^2\kappa x e^{1-x} \right) \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \\
 & + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\kappa x}{4} \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \\
 & \times \left(1 - \alpha\Lambda \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right) + \frac{x}{4} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa x + \sqrt{\frac{2}{3}}\alpha\Lambda\kappa x e^{(1-x)/2} \right. \\
 & + 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\alpha\Lambda)^2\kappa x e^{1-x} \left. \right) \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left(1 - \alpha\Lambda \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} \right. \right. \\
 & + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \left. \left. \right) \right) - \frac{x}{4} \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\alpha\Lambda\kappa x e^{(1-x)/2} + 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\alpha\Lambda)^2\kappa x e^{1-x} \right) \\
 & \times \left(1 - \alpha\Lambda \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right) + \frac{x}{4} \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \\
 & \times \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left(\alpha\Lambda \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\kappa x}{2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\alpha\Lambda\frac{\kappa x}{2} e^{(1-x)/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}(\alpha\Lambda)^2\kappa x e^{1-x} \right) \right. \\
 & \times \left. \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right) \left. \right\},
 \end{aligned}$$

que, con un poco de álgebra, se reduce a

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2U}{d\chi^2} &= \kappa^2\chi^{-2} \left\{ \frac{1}{3} \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right)^2 + \frac{8}{3} \alpha\Lambda \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right. \\
 &\times \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) - \frac{x}{6} \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \\
 &\times \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left(3 - \alpha\Lambda \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right) \\
 &- \frac{2}{3} \alpha\Lambda x \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \\
 &\times \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) + \frac{x^2}{6} \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right)^2 \\
 &\times \left(1 - \alpha\Lambda \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right) - \frac{x^2}{6} \left(\frac{\alpha\Lambda}{2} e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \\
 &\times \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left(1 - \alpha\Lambda \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right) \\
 &+ \frac{\alpha\Lambda}{12} x^2 \left(x - 1 - 2\alpha\Lambda e^{(1-x)/2} - 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \left(1 + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + 2(\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right)^2 \\
 &\times \left. \exp \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\Lambda e^{(1-x)/2} + (\alpha\Lambda)^2 e^{1-x} \right) \right\}. \tag{6.15}
 \end{aligned}$$

El otro parámetro de *slow-roll* es el parámetro η , definido como

$$\eta = M_{pl}^2 \frac{U''}{U}, \tag{6.16}$$

aplicando la condición de que $\eta = 1$ para el final de inflación se tiene

$$M_{pl}^2 \frac{U''}{U} = 1 \quad \iff \quad U'' - \kappa U = 0, \tag{6.17}$$

donde U'' es la derivada presente en (6.15) y U es el potencial (6.11). Resolviendo para χ se puede encontrar el valor de inflación final.

Para determinar el número de *e-folds* se utiliza la ecuación

$$N = \kappa^2 \int_{\chi_f}^{\chi_i} \frac{U}{U_{,\chi}} d\chi, \tag{6.18}$$

siendo U el potencial presente en (6.11) y U' la primera derivada del potencial, encontrada en (6.13).

6.2 Comparación del modelo modificado de Starobinsky con resultados de Planck

El potencial de Starobinsky, (6.12), y el de Starobinsky modificado, (6.11), tienen la forma presentada en la figura 6.1.

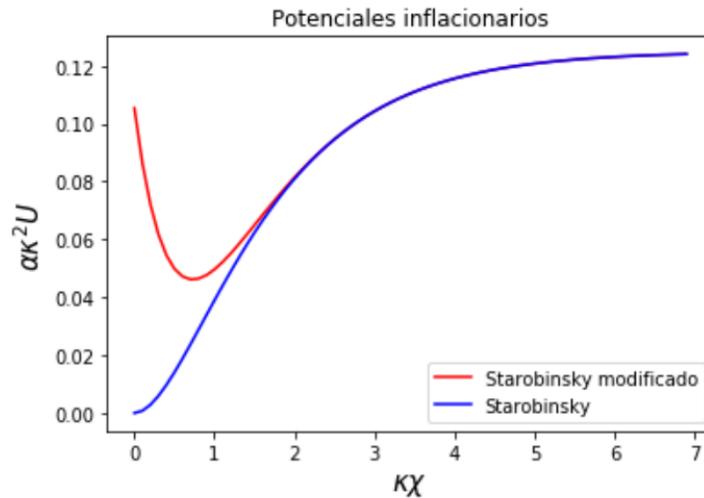


Figura 6.1: Potencial de Starobinsky ($\alpha\Lambda = 0$) en azul y potencial con la modificación exponencial (con $\alpha\Lambda = 0.1$) en rojo. Podemos notar que, mientras el modelo original tiene su mínimo en cero, para el modelo modificado el mínimo se encuentra desplazado hacia arriba y a la derecha, aproximadamente en $\kappa\chi \approx 0.8$.

Para estudiar el comportamiento del modelo se pusieron a prueba diferentes valores de $\alpha\Lambda$, el modelo propuesto en [21] solo toma en consideración $\alpha\Lambda = 0.1$, pero cabe preguntarse cómo cambian los parámetros de inflación si se eligen valores más pequeños o más grandes para $\alpha\Lambda$.

Se tomaron seis valores para $\alpha\Lambda < 0.1$, estos son: 0.01, 0.02, 0.03, 0.05, 0.07, 0.09, con cada uno se determinó el valor final $\kappa\chi_f$ y los valores de $\kappa\chi_i$ para $N = 50$ y $N = 70$. Además se muestran algunas gráficas de los potenciales correspondientes a dichos valores como una forma de observar el cambio que produce la modificación de la variable.

En la figura 6.2a se presenta la gráfica del potencial de Starobinsky modificado con un $\alpha\Lambda = 0.01$ (rojo), donde vemos lo cercana que ésta se encuentra del potencial de Starobinsky normal (azul), solo desplazada ligeramente a la derecha, pero uniéndose en el valor $\alpha\Lambda \approx 1$. Adicionalmente se observan las gráficas de las dos primeras derivadas del potencial y de los parámetros de *slow-roll*, los cuales convergen en cero a medida que aumenta el valor de $\kappa\chi$. El bajo valor de la constante $\alpha\Lambda$ denota una separación pequeña entre la gráfica del modelo original y la modificación, lo cual muestra que la modificación genera pequeños desplazamientos de la curva del potencial, sobre el potencial original.

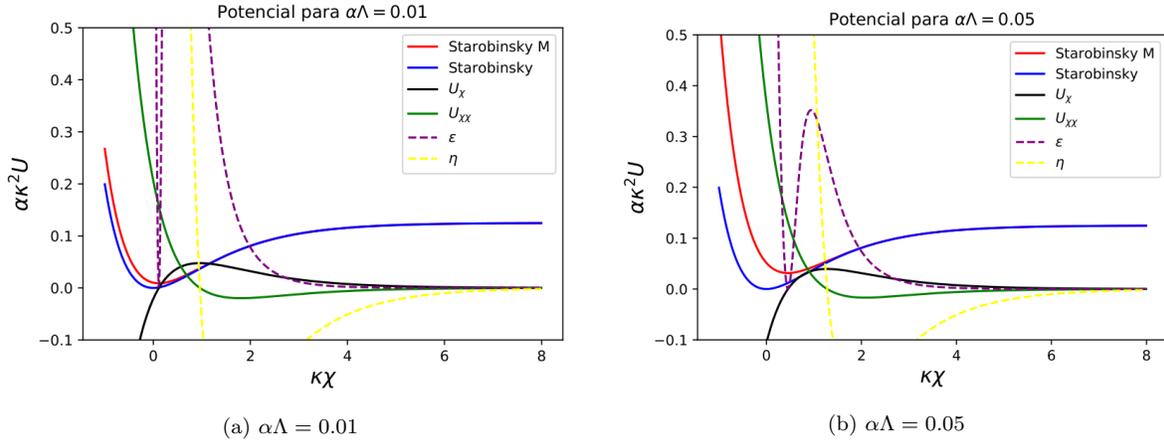


Figura 6.2: Potencial original de Starobinsky de azul, potencial modificado de Starobinsky con $\alpha\Lambda = 0.01$ (Starobinsky M, de rojo) del lado izquierdo y $\alpha\Lambda = 0.05$ del lado derecho, donde se evidencia el crecimiento que sufre el potencial al aumentar el valor de $\alpha\Lambda$. También se presenta su primera derivada (negro), su segunda derivada (verde) y los parámetros ϵ (morado línea cortada) y η (amarillo línea cortada).

En la figura 6.2b se presenta ahora el potencial para un valor de $\alpha\Lambda = 0.05$, donde se puede notar que el potencial se eleva y se aleja de la gráfica de Starobinsky normal, pero es interesante que la curva del modelo modificado parece desplazarse sobre la curva original, manteniéndose superpuestas para valores de $\kappa\chi$ mayores a 2. Comparándola con la curva de la gráfica presente en 6.2a, se nota más el movimiento en la línea roja.

Los resultados de $\kappa\chi_f$ y los $\kappa\chi_i$ se resumen en la Tabla 6.1, donde se presentan todos los valores que toma $\kappa\chi_i$ para los $\alpha\Lambda$ menores que 0.1.

Tabla 6.1: Resumen de valores encontrados de $\kappa\chi$ para diferentes valores de $\alpha\Lambda$.

| $\alpha\Lambda$ | $\kappa\chi_f$ | $\kappa\chi_i$ para $N = 50$ | $\kappa\chi_i$ para $N = 70$ |
|-----------------|----------------|------------------------------|------------------------------|
| 0.01 | 0.8649 | 5.2844 | 5.6770 |
| 0.02 | 0.4912 | 5.2804 | 5.6752 |
| 0.03 | 0.7806 | 5.2808 | 5.6718 |
| 0.05 | 0.8635 | 5.2784 | 5.6727 |
| 0.07 | 0.9351 | 5.2764 | 5.6711 |
| 0.09 | 0.9981 | 5.2747 | 5.6697 |
| 0.1 | 1.0269 | 5.2739 | 5.6690 |

Los parámetros inflacionarios que se estudian son el índice espectral de perturbaciones, n_s y el cociente tensor-a-escalar, r , cuyos valores proporcionados por el satélite Planck [11], son $n_s = 0.9665 \pm 0.0038$ y $r < 0.064$, correspondientes al 68 % y 95 % de confianza respectivamente, tomando

en cuenta las oscilaciones acústicas bariónicas (BAO), a partir de estos valores veremos qué tan buena es la modificación exponencial del modelo de Starobinsky, ya que las mediciones de Planck, junto con las medidas de polarización del BICEP2/Keck y las oscilaciones acústicas bariónicas proporcionan restricciones para los valores de estos parámetros.

Los primeros valores se encuentran dentro de los límites establecidos por Planck, en la figura 6.3 observamos que los valores de r están muy por debajo del límite, mientras n_s se encuentra dentro de los valores máximos y mínimos del parámetro. en esta figura también se agrega $\alpha\Lambda = 0.5$, que más adelante se detallará como un valor límite para $\alpha\Lambda$. En la gráfica se puede apreciar que los parámetros obtenidos yacen sobre la misma línea, cambiando únicamente el hecho de que aumentan su valor en r y disminuye para n_s , tanto para 50 como para 70 e -folds.

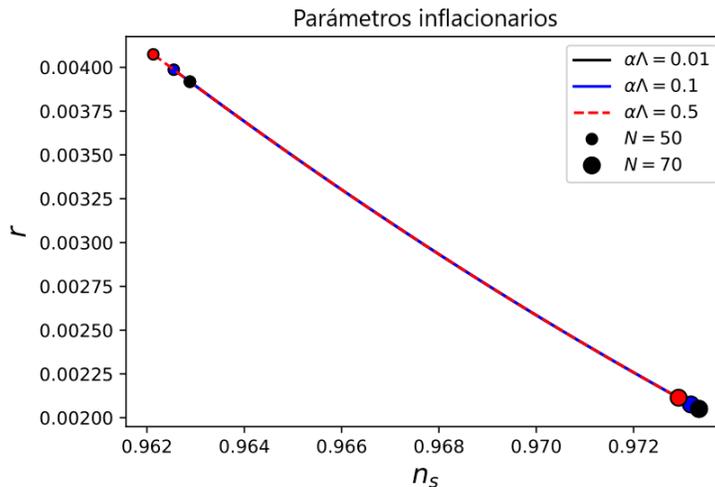


Figura 6.3: Índice espectral de perturbaciones, n_s y el cociente tensor-a-escalar, r , para tres diferentes valores de $\alpha\Lambda$, donde se puede observar que los parámetros se encuentran sobre la misma línea, pero que r aumenta a medida que $\alpha\Lambda$ aumenta, mientras que n_s disminuye.

Ahora cabría preguntarse qué sucede con los parámetros de inflación si se aumenta el valor de $\alpha\Lambda$ a partir de 0.1 y si es posible establecer un límite para esta variable. Para ello estudiamos valores de $\alpha\Lambda$ que van desde 0.2 hasta 40.0. En la Tabla 6.2 se muestran los valores de $\kappa\chi$ que se encontraron para el modelo con valores de $\alpha\Lambda$ por encima de 0.1. Se aprecia que los valores finales de $\kappa\chi$ aumentan a medida que se aumenta $\alpha\Lambda$, mientras que los valores iniciales encontrados de $\kappa\chi$ (ambos límites de e -folds) descienden hasta que llegan a $\alpha\Lambda = 0.7$ para posteriormente aumentar.

El aumento en el valor de $\kappa\chi$ puede verse reflejado en las gráficas del potencial, a medida que aumenta $\alpha\Lambda$, la curva del potencial se desplaza más hacia arriba a la derecha, aunque termine coincidiendo con Starobinsky normal para valores más elevados de $\kappa\chi$. En la figura 6.4a se observa el movimiento de la gráfica mencionado antes, vemos que el mínimo del potencial se desplaza cada vez más a la derecha y es por eso que inflación termina para valores $\kappa\chi$ más altos cada vez.

62 CAPÍTULO 6. MODELO CAÓTICO Y MODIFICACIÓN DE STAROBINSKY

Tabla 6.2: Resumen de valores encontrados de $\kappa\chi$ para valores $\alpha\Lambda > 0.1$.

| $\alpha\Lambda$ | $\kappa\chi_f$ | $\kappa\chi_i$ para $N = 50$ | $\kappa\chi_i$ para $N = 70$ |
|-----------------|----------------|------------------------------|------------------------------|
| 0.2 | 1.2518 | 5.2678 | 5.6640 |
| 0.3 | 1.4081 | 5.2642 | 5.6609 |
| 0.4 | 1.5273 | 5.2619 | 5.6590 |
| 0.5 | 1.6231 | 5.2607 | 5.6579 |
| 0.7 | 1.7701 | 5.2607 | 5.6575 |
| 0.9 | 1.8795 | 5.2625 | 5.6584 |
| 1.5 | 2.0935 | 5.2707 | 5.6637 |
| 2.5 | 2.2895 | 5.2836 | 5.6725 |
| 5.0 | 2.5232 | 5.3041 | 5.6869 |
| 10.0 | 2.7240 | 5.3256 | 5.7021 |
| 20.0 | 2.8981 | 5.3471 | 5.7175 |
| 30.0 | 2.9899 | 5.3596 | 5.7265 |
| 40.0 | 3.0512 | 5.3683 | 5.7328 |

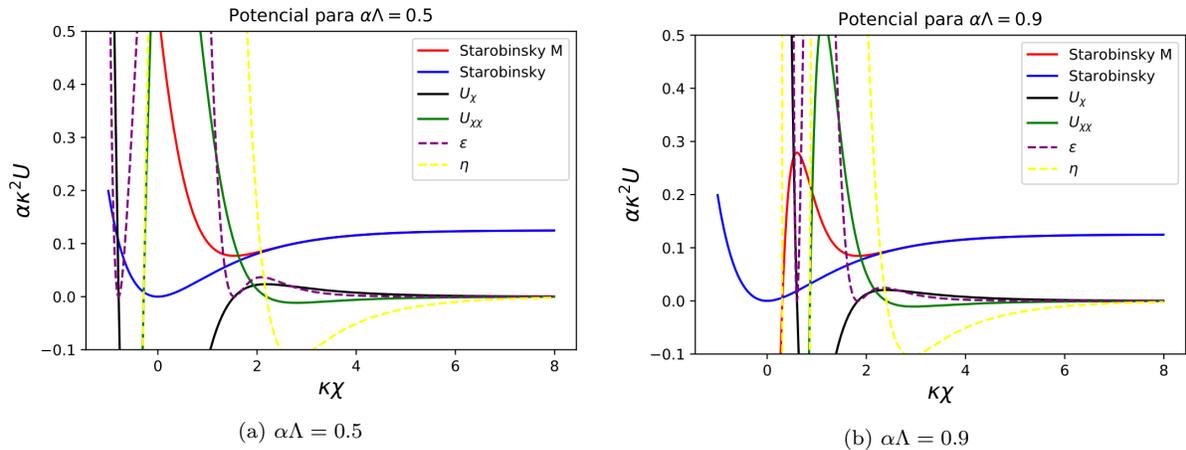


Figura 6.4: Potencial original de Starobinsky de azul, potencial modificado de Starobinsky con $\alpha\Lambda = 0.5$ (Starobinsky M, de rojo) del lado izquierdo y $\alpha\Lambda = 0.9$ del lado derecho, donde se observa que la pared del potencial se desplaza hacia valores grandes de $\kappa\chi$, siempre convergiendo con el potencial original en valores grandes de $\kappa\chi$. Para el caso de $\alpha\Lambda = 0.9$ (derecha), la curva ahora muestra un descenso en valores pequeños de $\kappa\chi$, perdiéndose así el mínimo global, convirtiéndose en un mínimo local, y apareciendo ahora un mínimo en infinito negativo.

En la figura 6.4b se puede observar que la parte del mínimo del potencial ahora es un mínimo local, ya que en la parte izquierda de la gráfica roja el potencial se va hacia infinito negativo, y la parte derecha se acerca más a la parte plana del potencial. Esta caída en la parte izquierda del potencial podría generar problemas al desarrollar inflación, a nivel cuántico es posible que haya

tunelamiento del inflatón, es algo que se analizará más adelante, por el momento es de destacar que mientras aumenta el valor la constante $\alpha\Lambda$ se va perdiendo la forma del potencial y ya no parece ser Starobinsky, sino un potencial diferente. Como un valor extremo se tomó $\alpha\Lambda = 40.0$, la gráfica se presenta en la figura 6.5, el potencial ahora se vuelve casi una “L” muy a la derecha, bastante cercano a la zona plana del potencial, a pesar de la forma tan inusual del potencial, con estos valores de $\alpha\Lambda$ se pueden obtener resultados congruentes en los parámetros de inflación, r y n_s . Pero a pesar de que los resultados obtenidos con valores tan altos de $\alpha\Lambda$ funcionen, cabe preguntarse si sería posible producir inflación con los mismos.

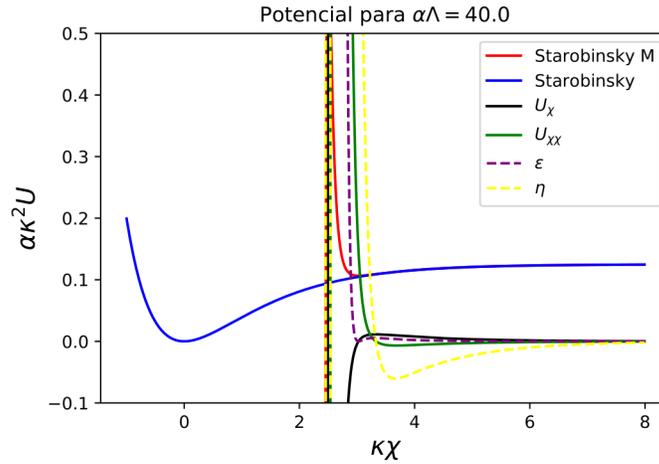


Figura 6.5: Potencial original de Starobinsky en azul, potencial modificado de Starobinsky con $\alpha\Lambda = 40.0$ (Starobinsky M, de rojo), en este gráfico podemos ver que la curva del potencial modificado se ha desplazado muchísimo a la derecha, pasa del valor $\kappa\chi = 2.0$, llegando al punto de casi formar una “L” con la zona más plana del potencial, sus gráficas para las derivadas y los parámetros de *slow-roll* se ven afectados de la misma manera, con el desplazamiento hacia la derecha.

Para saber qué sucede con inflación cuando se tiene un mínimo local se va a buscar el límite de $\alpha\Lambda$ en el que se observa este fenómeno. El primer valor con el que se observa que la curva del potencial se va hacia infinito negativo por el lado izquierdo es a $\alpha\Lambda = 0.53$, esto se muestra en la figura 6.6, teniendo el potencial de esta forma es válido tener la duda de si puede existir tunelamiento del inflatón en esta barrera de potencial, ya que de ser así podría generar problemas cuando suceda inflación.

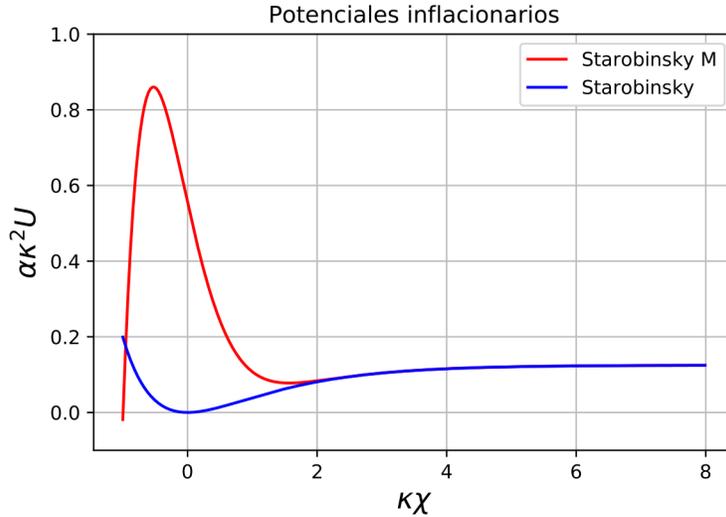


Figura 6.6: Potencial original de Starobinsky, de azul, y potencial modificado de Starobinsky con $\alpha\Lambda = 0.53$ (Starobinsky M, de rojo), donde se aprecia que la curva desciende a infinito negativo para valores pequeños de $\kappa\chi$.

Para resolver la duda se hizo un breve análisis de tunelamiento en este modelo calculando el coeficiente de transmisión para esta barrera de potencial utilizando el método de Wentzel-Kramers-Brillouin

$$p_t \sim e^{-2\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V(x) - E)} dx, \quad (6.19)$$

donde m es la masa de la partícula, \hbar es la constante reducida de Planck y E es la energía a la que se encuentra la partícula.

Ahora traduciremos la ecuación (6.19) a nuestro caso, donde tenemos campos escalares. La ecuación para tunelamiento nos queda

$$p_t \sim e^{-2\gamma}, \quad \gamma = \int_{\kappa\chi_1}^{\kappa\chi_2} \sqrt{2m(\alpha\kappa^2U - E)} dx. \quad (6.20)$$

Se calculó el valor del coeficiente de transmisión para $\alpha\Lambda = 0.53$ sin entrar en mucho detalle pues el fin era simplemente saber si existía o no probabilidad de tunelamiento, los valores usados para los límites de la integral y el valor de la energía son $\kappa\chi = -0.9$, $\kappa\chi = 0.8$, $m = 10^3 GeV$ y $E = 0.2 GeV$, con los cuales se obtuvo un valor de $p_t \sim 2.07 \times 10^{-31}$. Con ello podemos establecer un valor límite para el cual podemos tener inflación sin ningún riesgo de tunelamiento, los valores aceptables para la variable del modelo modificado son $\alpha\Lambda = [0.01, 0.5]$.

A pesar de este límite propuesto para $\alpha\Lambda$ se puede estudiar cómo se comportan los parámetros inflacionarios cuando aumentamos el valor de la variable, si sucede inflación. En la figura 6.7 vemos que cuando el valor de $\alpha\Lambda$ va de 0.01 a 0.5 el parámetro r aumenta tanto para 50 como para 70 e -folds y el parámetro n_s disminuye para ambos valores de e -folds, pero para los valores más altos

de $\alpha\Lambda$ sucede lo contrario, el parámetro r disminuye, mientras que el parámetro n_s aumenta, lo cual hace que la recta se desplace hacia la derecha y los valores para $N = 70$ se encuentren fuera del contorno del 68 % de probabilidad.

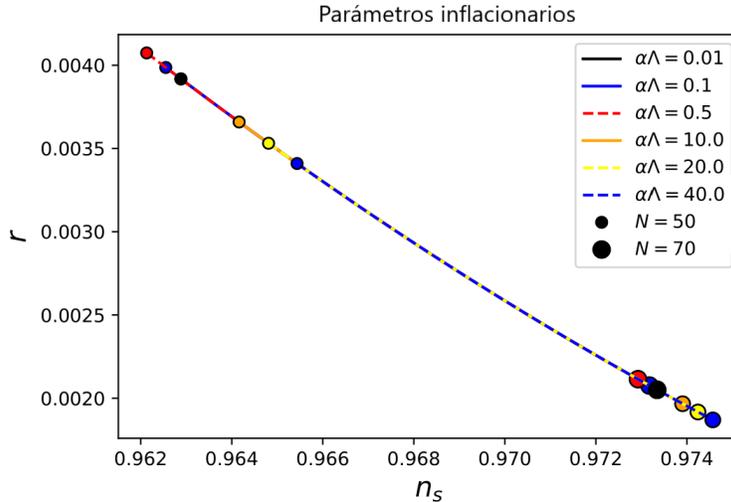


Figura 6.7: Índice espectral de perturbaciones, n_s y el cociente tensor-a-escalar, r para valores de $\alpha\Lambda$ desde 0.01 hasta 40.0. En este caso se observa que la línea de los valores de los parámetros se desplaza hacia la derecha para valores altos de $\alpha\Lambda$, es decir, que los valores de r disminuyen y los valores de n_s aumentan.

Establecido el límite para $\alpha\Lambda$ podemos hablar sobre lo bien que se comporta el modelo al comparar los resultados del modelo modificado con los datos proporcionados por el satélite Planck en el 2018, los parámetros inflacionarios se encuentran dentro del límite proporcionado por Planck, esto lo podemos observar en la figura 6.8, donde tenemos las regiones de límite de parámetros de 68 % y 95 % CL, los parámetros de inflación se mantienen dentro de los límites tanto para 50 como para 70 e -folds, teniéndose así buenos resultados con nuestro modelo con extensión exponencial.

Cabe aclarar ciertos aspectos relacionados con la leyenda de la gráfica 6.8, y es que el satélite Planck muestra diversos resultados, en primer lugar el espectro de potencias de la radiación cósmica de fondo, donde se tienen TT que representa el espectro de potencia de temperatura, TE es el espectro cruzado de polarización de temperatura y EE es el espectro de potencia de polarización eléctrica. *Lensing* se refiere a la reconstrucción de lentes de la CMB, *lowE* es la verosimilitud *Commander* de temperatura para un bajo- ℓ más la verosimilitud *SimAll* de EE , para bajo- ℓ en el rango $2 \leq \ell \leq 29$ (*Commander* implementa un muestreo bayesiano completo de un modelo paramétrico explícito que incluye tanto la señal cosmológica CMB como las señales astrofísicas no cosmológicas, como polvo térmico, CO y primeros planos de baja frecuencia; *SimAll* es un algoritmo que usa simulaciones para construir una probabilidad empírica para los espectros EE y BB). La verosimilitud *BK14* son datos recientes de polarización de modos B más sensibles y *BAO* se refiere

a oscilaciones acústicas bariónicas, las oscilaciones acústicas del fluido bariónico-fotónico antes de la recombinación son responsables de la estructura de pico acústico de los espectros de potencia angular del CMB. La contraparte de los picos acústicos de CMB en la distribución de bariones son los *BAO*, que permanecen impresos en la distribución de la materia hasta el día de hoy. En la imagen del espacio de posiciones, los *BAO* del espectro de potencia corresponden a un pico en la función de correlación, definiendo una escala de longitud característica dependiente de la cosmología que sirve como regla estándar y puede extraerse, por ejemplo, de estudios de desplazamiento al rojo de galaxias.

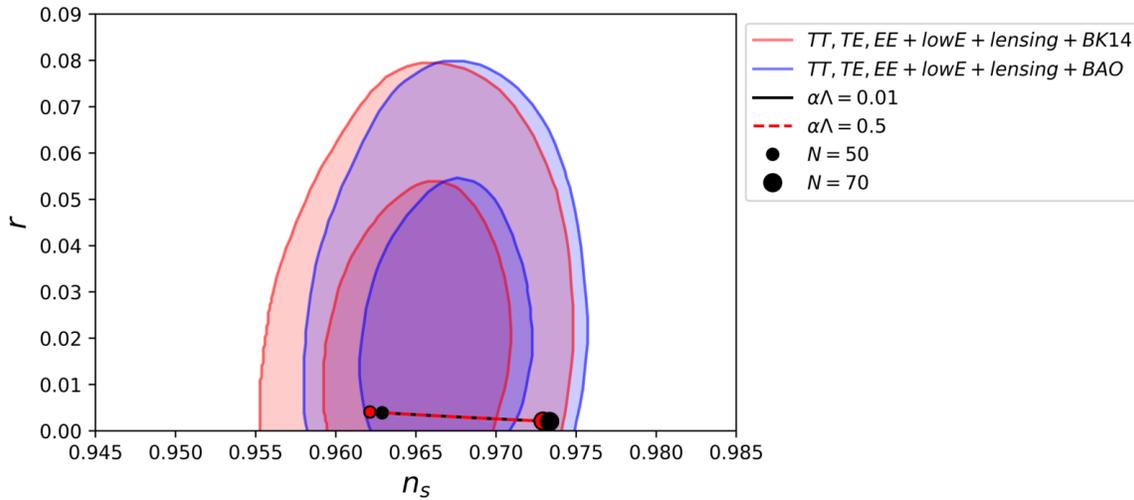


Figura 6.8: Regiones paramétricas delimitadas para 68% y 95% CL para n_s y r de Planck en combinación con *BK14* y *BAO* comparado con las predicciones del modelo modificado de Starobinsky con $\alpha\Lambda = [0.01, 0.5]$.

Entonces, valores de $0.01 < \alpha\Lambda < 0.5$ generan resultados aceptables ya que se encuentran en congruencia con los resultados presentados por Planck en el 2018, pero además parecen mostrar que el modelo modificado no genera grandes cambios en cuanto a resultados en los parámetros inflacionarios se refiere, es decir no son tan diferentes que si modelo original, con lo que se puede decir que una extensión exponencial en el modelo de Starobinsky lo mantiene estable.

6.3 Comparación con una modificación del potencial del modelo de Starobinsky.

Una modificación diferente a la presentada por *Fabris et. al.* en [21] es la que trabajó el Físico Hansel Argyll Gordillo Ruiz en su tesis “Cosmología de extensiones de la Relatividad General”

[22], donde trabaja con un potencial que tiene la forma

$$V = \frac{3}{4} M_{pl}^2 m^2 \left[1 - A \exp \left(-\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{pl}} \right) \right]^2, \quad (6.21)$$

donde A y λ son constantes diferentes de cero. La gráfica del potencial se muestra en la figura 6.9, desde un primer momento podemos ver la diferencia entre esta modificación de la tesis de Hansel y la que se utilizó en este trabajo, el mínimo del potencial para nuestro modelo se eleva, se desplaza hacia la derecha y las gráficas se unen en un punto cercano de $\kappa\chi$, mientras que el potencial de Hansel se desplaza completamente hacia la derecha y tiene una elevación un poco mayor del lado derecho.

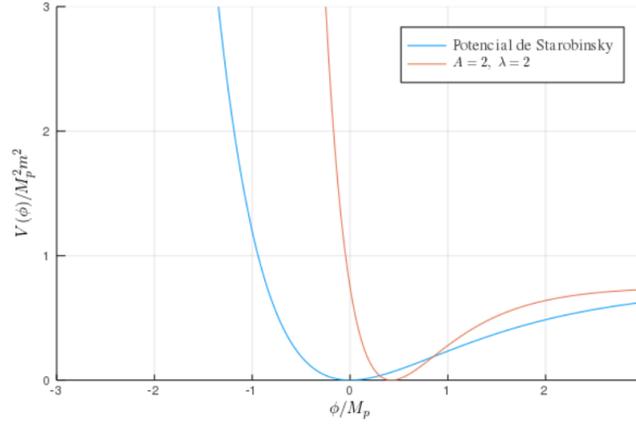


Figura 6.9: Gráfica del potencial de Starobinsky y Starobinsky modificado con $A = 2$ y $\lambda = 2$ presentada en [22], donde se puede notar que la modificación del potencial de Starobinsky desplaza la curva hacia la derecha del potencial original, mostrando una forma ligeramente diferente en la elevación de la parte derecha de la línea roja.

Esta modificación genera grandes cambios en cuanto a parámetros inflacionarios respecta. La razón tensor-a-escalar, r , aumenta su valor a medida que el valor de la constante λ disminuye de 2.5 hasta 0.07 (y el valor de A se mantiene como 1), mientras que el parámetro n_s aumenta ligeramente y luego disminuye, describiendo una curva, lo cual se puede observar en la figura 6.10. Estas grandes variaciones hacen interesante el modelo, ya que la modificación presenta cambios notables en los parámetros de inflación.

Para entender el cambio que presenta este modelo se expresará en su función $f(R)$ utilizando las ecuaciones (4.59), (4.60) y el potencial (6.21). Con esto la función $f(R)$ que se obtiene es

$$f(R) = \frac{R^2}{6m^2} + RA \exp \left[\left(\frac{RK}{3m^2} + C \right) (1 - \lambda) \right] - 3A^2 m^2 \exp \left[2 \left(\frac{RK}{3m^2} + C \right) (1 - \lambda) \right] \\ \times \left\{ \frac{(\lambda - 1)^2}{2} - \lambda + (\lambda - 1)^2 \exp \left[-A \exp \left[- \left(\frac{RK}{3m^2} + C \right) \lambda \right] \right] \right\}, \quad (6.22)$$

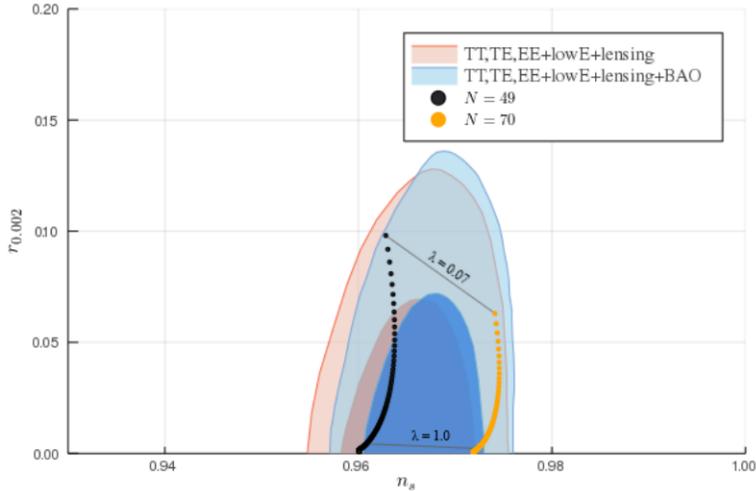


Figura 6.10: Parámetros del potencial modificado de Starobinsky para $N = 49$ y $N = 70$, donde se ha barrido λ desde 0.07 hasta 2.5, mientras que $A = 1$. Se muestran los contornos de probabilidad (para 1σ y 2σ) proporcionados por el satélite Planck. Gráfica presentada en [22]. Como un detalle a resaltar, la gráfica presenta un cambio de escala para r , si multiplicamos por un factor de 0.629 obtenemos la escala presente en nuestras gráficas de resultados de Planck.

siendo

$$K = [A(1 - \lambda)(\lambda - 2) - A(2\lambda - 1) + 1]^{-1}, \quad C = -K(1 - A)(1 + A(\lambda - 1)). \quad (6.23)$$

Para ver el desarrollo completo de la obtención de la función $f(R)$ a partir del potencial, referirse al apéndice A.

Es fácil observar que la función $f(R)$ es muy diferente al planteamiento presentado por Fabris, (5.57) y esa sea una de las razones por las que el modelo de Hansel presenta desviaciones grandes en los parámetros inflacionarios de la modificación exponencial y de los parámetros en el planteamiento original de Starobinsky.

6.4 Inflación caótica

Un modelo igual de antiguo es el modelo caótico, este presenta un potencial simple del tipo

$$V(\phi) = A\phi^2, \quad (6.24)$$

donde A es una constante. El potencial se muestra en la figura 6.11, vemos que este es muy diferente al de Starobinsky, aunque coincide con el mínimo de Starobinsky normal.

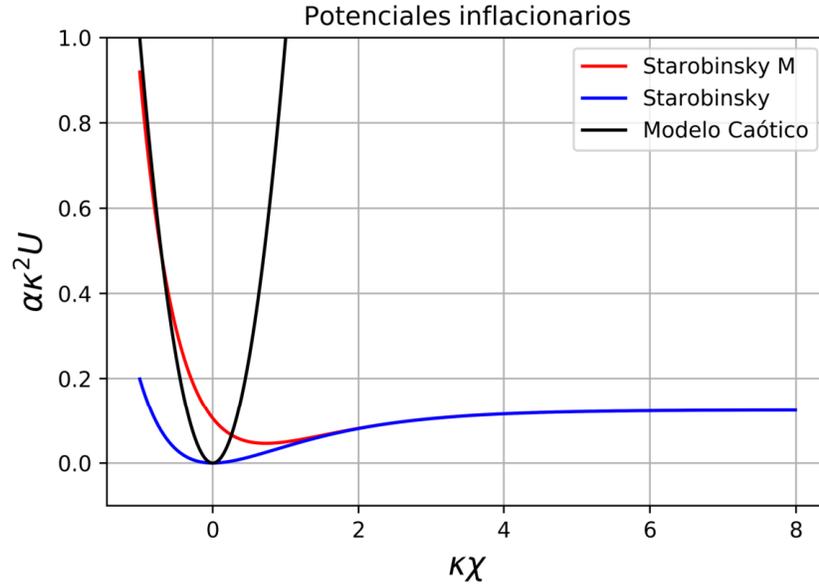


Figura 6.11: Potencial de Starobinsky, $\alpha\kappa^2U$, con $\alpha\Lambda = 0.0$ (azul) y $\alpha\Lambda = 0.1$ (Starobinsky M, de rojo), comparado con el modelo caótico $V = A\phi^2$ (negro).

La primera y segunda derivada del potencial (6.24) son

$$V'(\phi) = 2A\phi, \quad (6.25)$$

$$V''(\phi) = 2A. \quad (6.26)$$

$$(6.27)$$

Utilizando las ecuaciones de los parámetros de *slow-roll*, (2.48), se encuentra el valor de ϕ_f , el cual se utiliza para determinar los valores de ϕ_i para *e-folds* de 50 a 70, al resolver trivialmente la integral

$$\begin{aligned} N &= \kappa^2 \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{V'} d\phi = \kappa^2 \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{A\phi^2}{2A\phi} d\phi = \kappa^2 \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{\phi}{2} d\phi \\ N &= \frac{\phi_i^2}{4} - \frac{\phi_f^2}{4}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Los parámetros de inflación encontrados se muestran en la figura 6.12, en esta se observa que el modelo caótico está totalmente fuera de los valores presentados por Planck, este modelo no conduce a resultados aceptables. Ambos modelos, el de Starobinsky y el caótico, fueron propuestos desde un inicio del desarrollo de la teoría inflacionaria, sin embargo los modelos puros, o iniciales, generan resultados muy diferentes entre sí, con el paso de los años el modelo caótico ha perdido

70 CAPÍTULO 6. MODELO CAÓTICO Y MODIFICACIÓN DE STAROBINSKY

adeptos y a pesar de que se intenta rescatar con muchas modificaciones, de todo tipo, vemos que la base o el modelo original no es para nada aceptable. Por otro lado, el modelo original de Starobinsky ha perdurado a través de los años y a través de todas las observaciones realizadas y se ha mantenido dentro de los límites aceptables, vemos también que es muy estable ante variaciones de tipo exponencial, pero a la vez resulta versátil al poder modificarse tanto en su forma de función $f(R)$ como en su forma de potencial dependiente de ϕ y aún así presenta resultados convincentes.

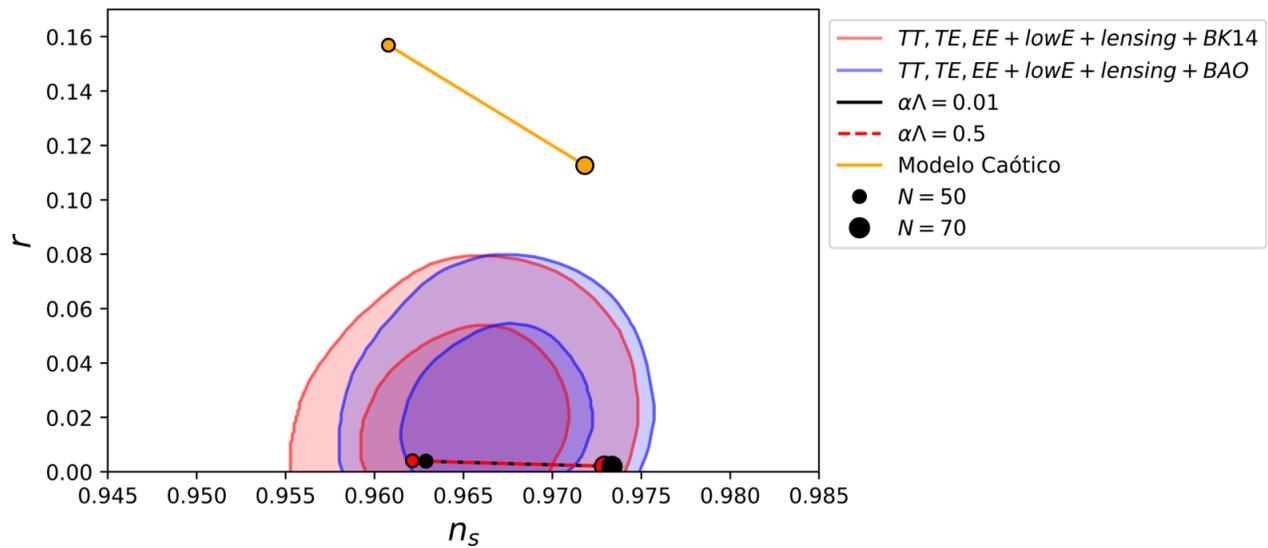


Figura 6.12: Regiones paramétricas delimitadas para 68% y 95% CL para n_s y r de Planck en combinación con $BK14$ y BAO comparado con las predicciones del modelo modificado de Starobinsky con $\alpha\Lambda = [0.01, 0.5]$ y el modelo caótico.

Capítulo 7

Conclusiones

Es esta tesis estudié dos de las propuestas inflacionarias pioneras en los modelos de inflación cósmica: la inflación caótica, desarrollada por Andrei Linde, y el modelo de Starobinsky. Estos modelos proporcionaron las soluciones buscadas para los problemas del modelo cosmológico estándar clásico. Desde su propuesta se han realizado varios estudios de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB) por parte de diferentes misiones. Las mediciones más recientes son las realizadas por el satélite Planck [11]. Con estos estudios de la CMB se han obtenido restricciones en los parámetros cosmológicos, de los cuales los más interesantes para la inflación son el cociente tensor-a-escalar, r , y el índice espectral de perturbaciones, n_s , que en esta tesis me ayudaron a someter los modelos estudiados al escrutinio observacional.

El modelo de Starobinsky nace a partir de un modelo de gravedad modificada, específicamente como una teoría $f(R)$, en el cual la densidad Lagrangiana es una función arbitraria del escalar de Ricci R . La primera tarea que realicé fue determinar las ecuaciones de campo en el formalismo métrico. Con este fin, estudié la variación de la acción (5.1) con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$, llegando a la ecuación (5.17). Posteriormente, utilizando las componentes no nulas del tensor y el escalar de Ricci en la métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW), obtuve una forma primitiva del modelo de Starobinsky que presenta el término cuadrático en R , $f(R) = \alpha R^2$. Haciendo esto, gané intuición sobre la manera de obtener la función $f(R)$ a partir de la acción general. Conociendo la forma en que se obtiene el término cuadrático del modelo pude expresar la función de Starobinsky, $f(R) = R + \alpha R^2$. Al expresar el sistema dinámico de la teoría utilizando las ecuaciones de movimiento, presente en (5.32), encontré que tiene puntos críticos en cero y dos en infinito al estudiar el modelo en términos del escalar de curvatura R , tomando $\dot{R} = \dot{H} = 0$. Uno de estos puntos en el infinito representa un repelente de De Sitter y, por lo tanto, puede proporcionar una fase transitoria de inflación a escalas de alta energía.

Una forma simple y equivalente de descubrir la relación del modelo de Starobinsky con inflación es traduciendo la acción en términos de $f(R)$ a una expresión en el espacio de campos. Esto se logra aplicando una transformación conforme específica a la acción. Así, encontré la expresión del potencial de Starobinsky en términos de un campo escalar denominado “inflatón”, ϕ . Con el objetivo

de generalizar este resultado, estudié esta transformación de forma general y encontré la acción en el marco de Einstein, la cual está dada en (5.56). Esta acción exhibe explícitamente el potencial general U del inflatón, que es la herramienta básica de los modelos de inflación en teoría cuántica de campos. Este formalismo me permitió aplicarlo posteriormente a algunos casos especiales. Uno de esos casos especiales es la propuesta del modelo de Starobinsky con una extensión exponencial, presentado en (5.34) y que fue propuesto por Fabris et.al. [21]. Utilizando la función $f(R)$ del modelo modificado encontré una expresión que involucra el potencial, pero en términos de R . Para reexpresar este modelo en términos del campo escalar ϕ , me auxilié la función W de Lambert. Realizado esto pude expresar R totalmente en términos de ϕ , lo que me condujo también a que V se encuentre en términos de ϕ . Finalmente, utilizando todos los resultados anteriores, expresé el potencial U para la extensión exponencial de Starobinsky. En este caso, hice una transformación del campo escalar ϕ de forma tal que me permitiera evitar trabajar con logaritmos naturales.

En el modelo modificado de Starobinsky se tiene una constante, $\alpha\Lambda$, la cual en el artículo original es adoptada con el valor 0.1. En este trabajo, estudié los efectos de asignar a esta constante valores mayores y menores que la propuesta original. Como era de esperarse, los valores más pequeños de $\alpha\Lambda$ hacen que la energía potencial del modelo modificado se aproxime al potencial original de Starobinsky. Este comportamiento se puede notar en las similitudes entre las curvas roja y azul en la figura 6.2a. Por otro lado, notamos que al aumentar $\alpha\Lambda$ de 0.01 a 0.05, el potencial del modelo modificado aumenta y su mínimo deja de estar en cero y toma valores positivos. Otro aspecto relevante es que la modificación hace que la energía mantenga el comportamiento de la energía del modelo original, con la diferencia de que la energía mínima aumenta, pero las energías convergen para valores de $\kappa\chi \geq 1$. Esto nos muestra que la modificación no genera cambios enormes en el comportamiento energético del modelo con respecto al modelo original, y que incluso las energías potenciales convergen en la zona de energías que son asociadas con el desarrollo de la época inflacionaria.

Un fenómeno interesante que sucede cuando el valor de $\alpha\Lambda$ aumenta es que para valores pequeños de $\kappa\chi$ la energía potencial no está acotada por abajo, i.e. el Universo no es estable. Esto deja a la energía con un mínimo metaestable (local) donde antes se tenía un mínimo estable (global). Esto sucede para valores de $\alpha\Lambda \geq 0.53$. En este caso, como se puede apreciar en la figura 6.6, existe una barrera de potencial entre el mínimo local y el límite de un universo inestable. Esta observación condujo a la pregunta de si podría haber tunelamiento cuántico del inflatón. De haber tunelamiento, este tendría el efecto devastador de destruir el Universo como lo conocemos. Si la probabilidad de tunelamiento no es prácticamente nula, el modelo conduciría a un escenario no observado, por lo que las condiciones que conducen a esta situación deberían ser descartadas físicamente. Para comprobar si ocurre tunelamiento en el modelo considerado, hice un breve análisis utilizando el método WKB al potencial inflacionario. El coeficiente de transmisión que obtuve, tomando la masa del inflatón como $m \sim 10^3 GeV$, fue de $p_t \sim 2.07 \times 10^{-31}$, que, a pesar de ser un valor pequeño, puede ser importante en tiempos cosmológicos. Por lo tanto, la conclusión es que el valor $\alpha\Lambda = 0.53$ es una cota superior para la validez de la extensión exponencial del modelo de Starobinsky.

Como en cualquier modelo inflacionario que presente rodamiento lento del inflatón, consideré

que el número de *e-folds* que caracterizan el periodo inflacionario fue entre 50 y 70. Usando estos datos, determiné los valores de los parámetros inflacionarios y los comparé con sus cotas debidas a observaciones de CMB. Las restricciones a estos parámetros que proporciona el satélite Planck al estudiar la radiación cósmica de fondo son $n_s = 0.9665 \pm 0.0038$ con un nivel de confianza del 68 %, y $r < 0.064$ con un nivel de confianza de 95 %. Estos datos toman en cuentas las oscilaciones acústicas de bariones (BAO). Los valores de $\alpha\Lambda$ que estudié fueron los que van desde 0.01 hasta 0.5, con los que obtuve valores de $r < 0.0042$ para $N = 50$ y $r < 0.0022$ para $N = 70$, siendo estos unos valores que se encuentran dentro de los límites para r . Para el índice espectral de perturbaciones obtuve un valor de $n_s = 0.962$ para $N = 50$ con $\alpha\Lambda = 0.5$, siendo este el valor más pequeño, mientras que para $N = 70$ obtuve $n_s = 0.973$. En la figura 6.3 podemos observar que los resultados de n_s y de r son muy parecidos: están sobre la misma línea y no muestran variaciones grandes a pesar de que el valor de $\alpha\Lambda$ fue cambiado desde 0.01 hasta 0.5. En la figura 6.8 comparé estos valores con las regiones del espacio de parámetros establecidos por Planck, para 68 % y para 95 % CL, combinados con los datos de la colaboración BK14 y utilizando valores de las BAO (ver fig. 8 de ref. [11], se utiliza la notación TT,TE,EE+lowE+lensing+BK14+BAO). En la comparación se puede observar que los valores para $N = 50$ y 70 están dentro de los límites de los parámetros que establece Planck, e incluso para $N = 50$ tenemos nuestros valores dentro del límite de 68 %, el cual es un valor aceptable. Aunque esto no implica que el modelo describe o no la naturaleza, esta compatibilidad con las observaciones representa un resultado alentador de la teoría. Adicionalmente, el hecho de que los valores de los parámetros no se encuentren tan dispersos unos de otros cuando se modifica el valor de la constante $\alpha\Lambda$ me lleva a la conclusión de que la extensión exponencial del modelo de Starobinsky es, a pesar su aparente radicalidad, una modificación pequeña y que predomina la robustez y estabilidad del modelo original. Haría falta una modificación mayor para que se presente una variación más visible en los parámetros de inflación.

Otra modificación del modelo fue estudiada por el físico mexicano Hansel Gordillo en su tesis “Cosmología de extensiones de la Relatividad General” [22], cuya modificación se hace sobre el potencial en el espacio de campos. El modelo de la ecuación (6.21) introduce las constantes A y λ las cuales generan cambios significativos en la energía potencial. En la figura 6.9 presento la gráfica del potencial modificado junto al modelo original (estas gráficas fueron tomadas directamente del documento original [22]) y notamos que para este modelo las energías son ligeramente diferentes ya que el mínimo para la energía se da para valores de ϕ diferentes de cero. Además, para valores más grandes de ϕ , la energía potencial del modelo modificado parece aumentar más de prisa que en el modelo original, con lo cual podemos hacernos una idea de que los parámetros también sufrirán cambios. En la figura 6.10 presento estos parámetros en comparación con los límites establecidos por Planck, observamos que los parámetros inflacionarios tienen valores muy diferentes para cada valor de la constante λ . Los valores de los parámetros yacen dentro de los límites, pero cubren casi toda la zona central de la gráfica, aumentando su valor en r . Es interesante que a medida que el valor de λ disminuye, su valor en r aumenta. Para intentar comprender esta variación en los resultados de este modelo busqué la forma equivalente en términos de su teoría $f(R)$ utilizando las ecuaciones (4.59) y (4.60). Tras hacer el trabajo algebraico, encontré una función $f(R)$ bastante grande y

muy diferente a la función del modelo de Starobinsky. La función de esta nueva modificación se presenta en la ecuación (6.22). En esta el término R^2 permanece igual, pero junto al factor R se agrega una expresión bastante grande en términos de R y de las constantes A y λ . La diferencia enorme entre las funciones $f(R)$ de los dos modelos puede ser una de las razones por las cuales los resultados de los parámetros inflacionarios lucen tan diferentes. Es posible argumentar entonces que variaciones pequeñas en la teoría $f(R)$ del modelo original parecen no conducir a grandes variaciones en los parámetros cosmológicos inflacionarios, mientras que modificaciones aparentemente pequeñas y directas al potencial de Starobinsky en el espacio de campos genera resultados con mayores variaciones.

Con la finalidad de contrastar mis resultados principales con escenarios tradicionales y muy populares de inflación, como último punto estudié el modelo más sencillo de inflación, el *modelo caótico*, que presenta la forma $V(\phi) = A\phi^2$. Una comparativa entre los potenciales de los dos modelos se encuentra en la figura 6.11, donde se observa una diferencia notable entre ambos. Los valores de los parámetros que obtuve con este modelo los muestro en la figura 6.12. Este modelo presenta valores que están muy por encima de los límites de Planck para r , así que tal y como está no es posible tomarlo en cuenta como un modelo viable. Si bien fue un modelo aceptado en su tiempo, actualmente no representa una construcción relevante para inflación.

Por lo tanto concluyo que las modificaciones del modelo de Starobinsky mantienen al modelo dentro de los límites aceptables de los parámetros, aunque faltarían más estudios para determinar si este u otro modelo es el que describe de mejor manera la naturaleza en el periodo de la expansión del universo temprano. En particular una aspecto interesante a estudiar en el futuro para restringir más los parámetros libres del modelo de Starobinsky y sus modificaciones es el periodo cosmológico conocido como *recalementamiento*, que ocurre justo cuando la inflación cosmológica llega a su fin. También, se podrían considerar nuevas variaciones simples a la teoría $f(R)$ con el objetivo de apreciar si estas pueden conducir a grandes variaciones en este prometedor modelo. Aún falta más por estudiar, más modelos que probar y nuevos elementos que agregar para completar la teoría, pero el estudio de los primeros modelos es un buen punto de partida para un descubrimiento mayor.

Apéndice A

Función $f(R)$ de modificación de Hansel

Para escribir la función $f(R)$ del potencial de Starobinsky modificado (6.21), presentado en [22] se utilizan las ecuaciones (4.59) y (4.60). El escalar de Ricci se expresa de la forma

$$\begin{aligned}
 R &= \left\{ 3m^2 \lambda A \exp\left(-\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) \left[1 - A \exp\left(-\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) \right] + 3m^2 \left[1 - A \exp\left(-\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) \right]^2 \right\} \\
 &\quad \times \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right), \\
 R &= \left\{ 3m^2 \lambda A \exp\left(-\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) - 3m^2 \lambda A^2 \exp\left(-2\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) + 3m^2 \left[1 - 2A \exp\left(-\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + A^2 \exp\left(-2\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) \right] \right\} \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right), \\
 R &= \left\{ 3m^2 \lambda A \exp\left(-\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) - 3m^2 \lambda A^2 \exp\left(-2\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) + 3m^2 - 6m^2 A \exp\left(-\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) \right. \\
 &\quad \left. + 3m^2 A^2 \exp\left(-2\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) \right\} \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right),
 \end{aligned}$$

agrupando términos

$$\begin{aligned}
 R &= \left\{ 3m^2 A \exp\left(-\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) (\lambda - 2) - 3m^2 A^2 \exp\left(-2\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) (\lambda - 1) + 3m^2 \right\} \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right), \\
 R &= 3m^2 A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1 - \lambda)\right) (\lambda - 2) - 3m^2 A^2 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1 - 2\lambda)\right) (\lambda - 1) + 3m^2 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right).
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

La expresión para f es

$$\begin{aligned}
 f &= \left\{ 3m^2 \lambda A \exp\left(-\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) \left[1 - A \exp\left(-\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right)\right] + \frac{3}{2} m^2 \left[1 - A \exp\left(-\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right)\right]^2 \right\} \\
 &\quad \times \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right),
 \end{aligned}$$

que, de la misma forma como se trabajó con R , se puede escribir como

$$f = 3m^2 A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(2 - \lambda)\right) (\lambda - 1) - 3m^2 A^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1 - \lambda)\right) \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} m^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right). \tag{A.2}$$

Ahora se determina R^2 ,

$$\begin{aligned}
 R^2 &= 9m^4 A^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1 - \lambda)\right) (\lambda - 2)^2 + 9m^4 A^4 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1 - 2\lambda)\right) (\lambda - 1)^2 \\
 &\quad + 9m^4 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) - 18m^4 A^3 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(2 - 3\lambda)\right) (\lambda - 2)(\lambda - 1) \\
 &\quad + 18m^4 A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(2 - \lambda)\right) (\lambda - 2) - 18m^4 A^2 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(2 - 2\lambda)\right),
 \end{aligned}$$

tomando factor común $6m^2$,

$$\begin{aligned}
 R^2 &= 6m^2 \left\{ \frac{3}{2} m^2 A^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1 - \lambda)\right) (\lambda - 2)^2 + \frac{3}{2} m^2 A^4 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1 - 2\lambda)\right) (\lambda - 1)^2 \right. \\
 &\quad + \frac{3}{2} m^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) - 3m^2 A^3 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(2 - 3\lambda)\right) (\lambda - 2)(\lambda - 1) \\
 &\quad \left. + 3m^2 A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(2 - \lambda)\right) (\lambda - 2) - 3m^2 A^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1 - \lambda)\right) \right\},
 \end{aligned}$$

separando algunos términos y reordenando

$$\begin{aligned}
\frac{R^2}{6m^2} &= \frac{3}{2}m^2A^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) \lambda(\lambda-2) - 3m^2A^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) (\lambda-1) \\
&+ 3m^2A^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) + \frac{3}{2}m^2A^4 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(1-2\lambda)\right) (\lambda-1)^2 + \frac{3}{2} \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}\right) \\
&- 3m^2A^3 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(2-3\lambda)\right) (\lambda-2)(\lambda-1) + 3m^2A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(2-\lambda)\right) (\lambda-1) \\
&- 3m^2A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(2-\lambda)\right) - \frac{3}{2}m^2A^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) \\
&- \frac{3}{2}m^2A^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right),
\end{aligned}$$

ahora se puede sustituir f , (A.2), dentro de la ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{R^2}{6m^2} &= f + \frac{3}{2}m^2A^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) \lambda(\lambda-2) + \frac{3}{2}m^2A^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) \\
&+ \frac{3}{2}m^2A^4 \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(1-2\lambda)\right) (\lambda-1)^2 - 3m^2A^3 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(2-3\lambda)\right) (\lambda-2)(\lambda-1) \\
&- 3m^2A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(2-\lambda)\right),
\end{aligned}$$

sacamos otro factor común

$$\begin{aligned}
\frac{R^2}{6m^2} &= f + A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) \left\{ \frac{3}{2}m^2A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) \lambda(\lambda-2) \right. \\
&+ \frac{3}{2}m^2A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) + \frac{3}{2}m^2A^3 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(1-3\lambda)\right) (\lambda-1)^2 \\
&\left. - 3m^2A^2 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}(1-2\lambda)\right) (\lambda-2)(\lambda-1) - 3m^2A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M}\right) \right\},
\end{aligned}$$

y separamos algunos términos

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{6m^2} = & f + A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) \left\{ \frac{3}{2} m^2 A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) (\lambda^2 - 1) \right. \\ & - 3m^2 A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) (\lambda - 2) + \frac{3}{2} m^2 A^3 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-3\lambda)\right) (\lambda - 1)^2 \\ & - 3m^2 A^2 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-2\lambda)\right) \lambda(\lambda - 1) + 3m^2 A^2 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-2\lambda)\right) (\lambda - 1) \\ & \left. + 3m^2 A^2 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-2\lambda)\right) (\lambda - 1) - 3m^2 A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}\right) \right\}, \end{aligned}$$

podemos ahora sustituir R de (A.1) dentro de esta última expresión

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{6m^2} = & f - A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) R + A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) \left\{ \frac{3}{2} m^2 A \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) (\lambda^2 - 1) \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} m^2 A^3 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-3\lambda)\right) (\lambda - 1)^2 - 3m^2 A^2 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-2\lambda)\right) (\lambda - 1)^2 \right\}, \end{aligned}$$

sacamos nuevamente un factor común

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{6m^2} = & f - AR \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) + 3m^2 A^2 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) \left\{ \frac{(\lambda^2 + 1)}{2} \right. \\ & \left. + \frac{A^2}{2} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M} 2\lambda\right) (\lambda - 1)^2 - A \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M} \lambda\right) (\lambda - 1)^2 \right\}, \end{aligned}$$

los términos dentro de las llaves los podemos expresar de la forma

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{6m^2} = & f - AR \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) + 3m^2 A^2 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) \left\{ \frac{(\lambda^2 + 1)}{2} \right. \\ & \left. - (\lambda - 1)^2 + (\lambda - 1)^2 \exp\left[-A \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M} \lambda\right)\right] \right\}, \end{aligned}$$

reescribimos para f

$$\begin{aligned} f = & \frac{R^2}{6m^2} + AR \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) - 3m^2 A^2 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M}(1-\lambda)\right) \left\{ \frac{(\lambda^2 + 1)}{2} \right. \\ & \left. - (\lambda - 1)^2 + (\lambda - 1)^2 \exp\left[-A \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M} \lambda\right)\right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Para encontrar una expresión que no involucre a ϕ utilizamos la ecuación (A.1) y aproximamos el exponencial a su segundo término de la expansión

$$\begin{aligned}
R &= 3m^2 A \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M} (1 - \lambda) \right) (\lambda - 2) - 3m^2 A^2 (\lambda - 1) \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M} (1 - 2\lambda) \right) + 3m^2 \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M} \right) \\
R &= 3m^2 A (\lambda - 2) - 3m^2 A^2 (\lambda - 1) + 3m^2 + 3m^2 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M} \left(A (\lambda - 2) - A \lambda (\lambda - 2) - A^2 (\lambda - 1) \right. \\
&\quad \left. + 2A^2 \lambda (\lambda - 1) + 1 \right) \\
\frac{R}{3m^2} &= (1 - A) (1 + A (\lambda - 1)) + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M} \left(3A \lambda - 3A^2 \lambda - 2A - A \lambda^2 + A^2 + 2A^2 \lambda^2 + 1 \right) \\
\frac{R}{3m^2} - (1 - A) (1 + A (\lambda - 1)) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M} \left(A (1 - \lambda) (\lambda - 2 - A (2\lambda - 1)) + 1 \right),
\end{aligned}$$

si definimos $K^{-1} = (A(1 - \lambda)(\lambda - 2 - A(2\lambda - 1)) + 1)$ tendremos

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M} = \frac{RK}{3m^2} - (1 - A)(1 + A(\lambda - 1))K,$$

definiendo ahora $C = -K(1 - A)(1 + A(\lambda - 1))$ expresamos la ecuación anterior como

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M} = \frac{RK}{3m^2} + C. \quad (\text{A.4})$$

Ahora usamos (A.4) en (A.3) para obtener

$$\begin{aligned}
f(R) &= \frac{R^2}{6m^2} + RA \exp \left[\left(\frac{RK}{3m^2} + C \right) (1 - \lambda) \right] - 3A^2 m^2 \exp \left[2 \left(\frac{RK}{3m^2} + C \right) (1 - \lambda) \right] \\
&\quad \times \left\{ \frac{(\lambda - 1)^2}{2} - \lambda + (\lambda - 1)^2 \exp \left[-A \exp \left[- \left(\frac{RK}{3m^2} + C \right) \lambda \right] \right] \right\},
\end{aligned}$$

que es el resultado presentado en (6.22).

Bibliografía

- [1] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. **91B** (1980), 99–102, [Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.3,130(1987); ,771(1980)].
- [2] K. Sato, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **195** (1981), no. 3, 467–479.
- [3] A. H. Guth, Physical Review D **23** (1981), no. 2, 347.
- [4] A. D. Linde, Physics Letters B **129** (1983), no. 3-4, 177–181.
- [5] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Physical Review Letters **48** (1982), no. 17, 1220.
- [6] S. W. Hawking, I. Moss, and J. Stewart, Physical Review D **26** (1982), no. 10, 2681.
- [7] A. H. Guth and E. J. Weinberg, Nuclear Physics B **212** (1983), no. 2, 321–364.
- [8] S. W. Hawking, Physics Letters B **115** (1982), no. 4, 295–297.
- [9] A. A. Starobinsky, Physics Letters B **117** (1982), no. 3-4, 175–178.
- [10] A. H. Guth and S.-Y. Pi, Physical Review Letters **49** (1982), no. 15, 1110.
- [11] Planck, N. Aghanim et al., (2018), 1807.06209.
- [12] K. Freese, J. A. Frieman, and A. V. Olinto, Physical Review Letters **65** (1990), no. 26, 3233.
- [13] F. Bezrukov and M. Shaposhnikov, Physics Letters B **659** (2008), no. 3, 703–706.
- [14] J. P. Conlon and F. Quevedo, Journal of High Energy Physics **2006** (2006), no. 01, 146.
- [15] S. Tsujikawa, arXiv preprint hep-ph/0304257 (2003).
- [16] A. D. Linde, Reports on Progress in Physics **47** (1984), no. 8, 925.
- [17] J. Martin, C. Ringeval, and V. Vennin, Physics of the Dark Universe **5** (2014), 75–235.
- [18] J. Martin, C. Ringeval, R. Trotta, and V. Vennin, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **2014** (2014), no. 03, 039.

-
- [19] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010), 451–497, [0805.1726].
- [20] A. De Felice and S. Tsujikawa, *Living Rev. Rel.* **13** (2010), 3, [1002.4928].
- [21] J. Fabris, T. Miranda, and O. Piattella, *Variations on the starobinsky inflationary model*, in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 798, IOP Publishing, 2017, p. 012092.
- [22] H. A. G. Ruiz, *Cosmología de extensiones de la relatividad general*, Tesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2020.
- [23] S. Ramos-Sánchez, *Relatividad para futuros físicos*, Copit-arXives, 2018.
- [24] E. W. Kolb and M. S. Turner (eds.), *The early universe*, 1988.
- [25] L. Amendola and S. Tsujikawa, *Dark energy: theory and observations*, Cambridge University Press, 2010.
- [26] A. M. Sánchez, (2011).
- [27] D. Baumann, M. G. Jackson, P. Adshead, A. Amblard, A. Ashoorioon, N. Bartolo, R. Bean, M. Beltrán, F. De Bernardis, S. Bird, et al., *Probing inflation with cmb polarization*, in *AIP Conference Proceedings*, vol. 1141, AIP, 2009, pp. 10–120.
- [28] A. H. Guth, *Physics Reports* **333** (2000), 555–574.
- [29] F. Beutler, C. Blake, M. Colless, D. H. Jones, L. Staveley-Smith, L. Campbell, Q. Parker, W. Saunders, and F. Watson, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **416** (2011), no. 4, 3017–3032.
- [30] E. W. Kolb, arXiv preprint hep-ph/9910311 (1999).
- [31] Y. Aldabergenov, R. Ishikawa, S. V. Ketov, and S. I. Kruglov, *Physical Review D* **98** (2018), no. 8, 083511.