UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICAS

TESIS:

"PROPIEDADES ELEMENTALES DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE ESPACIOS TOPOLOGICOS"

PRESENTAN:

JOSE ANTONIO FUENTES VELASQUEZ

JULIO DAGOBERTO ROMANO RODRIGUEZ

PARA OPTAR AL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

MAYO 2012

SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR : Ing. Mario Roberto Nieto Lovo

VICERRECTORA ACADEMICA: Maestra Ana María Glower de Alvarado

VICERRECTOR ADMINISTRATIVO: Lic. Salvador Castillo (interino)

SECRETARIA GENERAL: Dra. Ana Leticia de Amaya

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

DECANO: Lic. Cristobál Hernán Ríos Benítez

VICEDECANO: Lic. Carlos Alexander Díaz

ADMINISTRADOR ACADEMICO: Lic. Jeovanny Trejos Cabrera

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICAS

JEFE: Lic. José Enry García

SECCION DE MATEMATICA

COORDINADOR : Ing. Benedicto Saravia

TRABAJO DE GRADUACION APROBADO POR:

____

Lic. Raúl Antonio Alfaro

Coordinador de Procesos de Graduación

Depto. de Ciencias Naturales y Matemática

____

Msc. Jorge Alberto Martínez Gutiérrez

Asesor Director

____

Licda. María Olga Quintanilla de Lovo

Asesor Metodológico

AGRADECIMIENTOS

A **Dios** , por darnos salud, sabiduría y protegernos siempre en nuestra vida como universitario.

A **nuestros Padres** por habernos dado todo el apoyo necesario para poder emprender tan ardua tarea como fue siempre velar por nosotros en todo lo que necesitábamos.

A **nuestros Amigos y hermanos,** que siempre estuvieron en las buenas y en las malas, apoyándonos en todo lo que ellos pudieron .

Agradecemos especialmente a **Licda. María del Tránsito Gutiérrez Reyes**, por ayudarnos en todos los momentos en los cuales necesitábamos un consejo , a la **Licda. María Olga Quintanilla de Lovo y Msc. Jorge Alberto Martínez Gutiérrez** y por habernos aceptado la oportunidad de ser nuestros asesores y siempre estar aconsejándonos y apoyándonos, al **Prof. Francisco Madrid** por aportar a nuestra formación para lograr alcanzar la licenciatura .

Indice General

CAPITULO 5. “Representación en Serie de Potencias y Teorema de Mapeo Abierto”

CAPITULO 6. “Teorema Global de Cauchy”

Introducción

En el siguiente trabajo de graduación se hablará de las distintas propiedades de las funciones dadas en el análisis complejo, luego se presentará una recopilación de conceptos y definiciones básicas que nos ayudarán a entender las distintas propiedades que pueden ser aplicadas a las funciones Holomorfas, dada una breve descripción serian funciones puramente compleja, las cuales son infinitamente diferenciables dentro de un dominio de definición.

Ya que nuestro estudio comienza desde el área básica de definición de los números complejos y su álgebra, para así llegar a la definición de la diferenciación compleja así dando un breve recordatorio de las propiedades, definiciones y teoremas de este apartado y así mostrando que la diferenciación compleja mantiene todas las generalidades de la diferenciación real, pero la única novedad de la definición es que se está utilizando el producto complejo y eso, como veremos, hace que la condición de derivabilidad en sentido complejo sea mucho más restrictiva que la derivabilidad para funciones reales.

Así mismo tomar un enfoque en el estudio de las propiedades elementales de las funciones Holomorfas desde el punto de vista del Análisis Topológico y sus propiedades y aplicaciones locales o globales.

Luego revisaremos el caso en el cual las funciones de variable compleja están definidas en un conjunto de dominio como lo son los discos abiertos en el plano, en los cuales se ha definido una topología y diversas propiedades de carácter topológico que se cumplen dentro de estos conjuntos.

Los éxitos logrados con la teoría local de Cauchy nos hacen reflexionar y pensar en 'refinar' todas las herramientas y teorías básicas sobre “El Teorema de Cauchy” , “Fórmula de Cauchy” para así tratar de ampliar su alcance.

Por ahora, todas estas herramientas nos han servido de gran utilidad en discos abiertos, o a lo mucho en conjuntos estrellados o conjuntos convexos; ya que solo hemos averiguado propiedades de las funciones holomorfas que dependen de última instancia del comportamiento de la función en un entorno de cada punto de su dominio estas propiedades son de carácter local.

Dando propiedades del Análisis Complejo sobre conjuntos medibles y sus propiedades en el área de los números complejos, las cuales son las propiedades de medida de conjuntos y funciones; asi como integración abstracta y otras definiciones. Para poder transformar las funciones holomorfas y también a sus respectivas derivadas a una representación en series de potencia.

Tomando las bases de integración en el área de los números complejos, para llegar a nuestro objetivo principal; el cual es mostrar el carácter local y global del Teorema de Cauchy . El cual nos permite mostrar como es el comportamiento de los valores de las funciones holomorfas en un disco por medio de sus integrales en las cuales solo se toma en cuenta los valores en la frontera de dicha función en la circunferencia.

De modo que trataremos de estudiar las propiedades de carácter global y profundizaremos la validez de los teoremas y de la fórmula de Cauchy, ya no solo para ser aplicada en discos abiertos, sino también colecciones de discos abiertos cualesquiera. Así extenderemos las aplicaciones de este teorema a una colección de caminos cerrados llamados ciclos y de ahí el porque de carácter global de dicho teorema y de dichas propiedades de estas funciones complejas.

CAPITULO 1

“Antecedentes Históricos”

1.1 Historia del Análisis Complejo

El análisis complejo es una de las ramas clásicas de las matemáticas que tiene sus raíces más allá del siglo XIX. Los nombres destacados en su desarrollo son Euler, Gauss, Riemann, Cauchy, Weierstrass y muchos más en el siglo XX. Tradicionalmente, el análisis complejo, en particular la teoría de las aplicaciones conformes, tiene muchas aplicaciones en ingeniería, pero es ampliamente usada también en la teoría de números analítica. En tiempos modernos se convirtió en popular gracias al empuje de la dinámica compleja y los dibujos de fractales, producidos por la iteración de funciones holomorfas, de los cuales el más popular es el conjunto de Mandelbrot. Otras aplicaciones importantes del análisis complejo son las de la teoría de cuerdas, una teoría de campos cuánticos conforme-invariante.

El **Análisis Complejo** es la rama de las matemáticas que en parte investiga las funciones holomorfas, también llamadas funciones analíticas. Una función es holomorfa en una región abierta del plano complejo si está definida en esta región, toma valores complejos y por último es diferenciable en cada punto de esta región abierta con derivadas continuas.

El que una función compleja, sea diferenciable en el sentido complejo tiene consecuencias mucho más fuertes que la diferenciabilidad usual en los reales. Por ejemplo, toda función holomorfa se puede representar como una serie de potencias en algún disco abierto donde la serie converge a la función. Si la serie de potencias converge en todo el plano complejo se dice que la función es entera. Una definición equivalente para función holomorfa es: una función compleja sobre los complejos que puede ser representada como una serie de potencias. Esta definición es la más común para funciones holomorfas de varias variables. En particular, las funciones holomorfas son infinitamente diferenciables, un hecho que es marcadamente diferente de lo que ocurre en las funciones reales diferenciables. Un ejemplo de una función holomorfa particular es un fractal.

Un ***fractal*** es un objeto geométrico cuya estructura básica se repite en diferentes escalas. El término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975. En muchos casos, los fractales pueden ser generados por un proceso recursivo o iterativo, capaz de producir estructuras auto-similares independientemente de la escala específica. Los fractales son estructuras geométricas que combinan irregularidad y estructura. Aunque muchas estructuras naturales tienen estructuras de tipo fractal, un fractal matemático es un objeto que tiene por lo menos una de las siguientes características:

- Tiene detalles en escalas arbitrariamente pequeñas.
- Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.
- Tiene auto-similaridad exacta o estadística.
- Puede ser definido recursivamente.

La figura generada por el conjunto de Mandelbrot es la siguiente:

Sea z y c dos números complejo, la ecuación que genera a este conjunto es: Con la condición inicial $z_0 = C$ entonces $z_{n+1} = z_n^2 + C$.

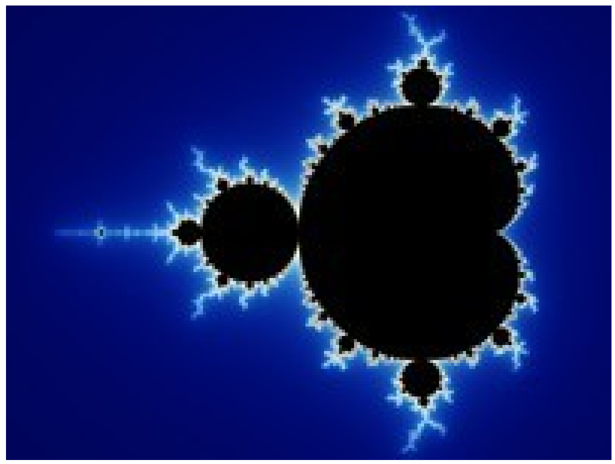

Figura 1.1

Los fractales existen en muchas áreas incluso hasta en la naturaleza un ejemplo de fractal en la naturaleza es el brocoli, ya que al tomarlo entero y lo fraccionamos podemos observar que sigue siendo la misma figura aunque de tamaño diferente como ´podemos observar en la figura 1.2

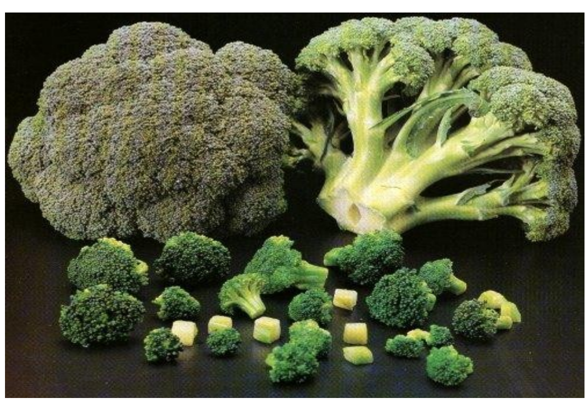

Figura 1.2

La mayoría de las funciones elementales como lo son algunos polinomios, la función exponencial y las funciones trigonométricas, son holomorfas.

En la siguiente figura se muestra la gráfica de la función compleja:

$$f(z)=\frac{(z^2-1)(z-2-i)^2}{(z^2+2+2\mathrm{i})}$$

11

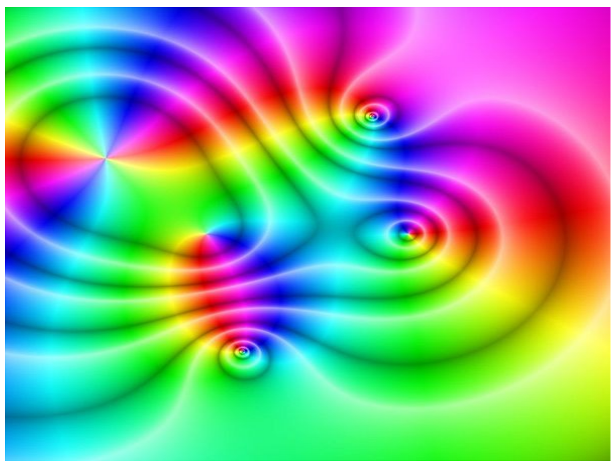

Figura 1.3

En la figura 1.3 la coloración representa el argumento de la función , mientras que el brillo representa el módulo de dicha función.

1.2 Historia de la Topología

La Topología es la rama de las matemáticas dedicada al estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas.

Históricamente, las primeras ideas topológicas conciernen al concepto de límite y al de completitud de un espacio métrico, y se manifestaron principalmente en la crisis de los inconmensurables de los pitagóricos, ante la aparición de números reales no racionales. El primer acercamiento concreto al concepto de límite y también al de integral aparece en el método de exhaución de Arquímedes. La aparición del Análisis Matemático en el siglo XVII puso en evidencia la necesidad de formalizar los conceptos de proximidad y continuidad, y la incapacidad de la Geometría para tratar este tema. Fue precisamente la fundamentación del Cálculo Infinitesimal, así como los intentos de formalizar el concepto de variedad en Geometría lo que llevó a la aparición de la Topología, a finales del siglo XIX y principios del XX.

Se suele fechar el origen de la Topología con la resolución por parte de Euler del problema de los puentes de Königsberg, en 1735. Ciertamente, la resolución de Euler del problema utiliza una forma de pensar totalmente topológica, y la solución del problema nos lleva a la característica de Euler, el primer invariante de la Topología Algebraica, pero sería muy arriesgado y arbitrario fechar en ese momento la aparición de la Topología. La situación es exactamente análoga a la del cálculo del área de la elipse por Arquímedes.

El término *topología* fue usado por primera vez por J. B. Listing, en 1836 en una carta a su antiguo profesor de la escuela primaria, Müller, y posteriormente en su libro

Vorstudien zur Topologie (Estudios previos a la topología), publicado en 1847. Anteriormente se la denominaba *analysis situs*. Maurice Fréchet introdujo el concepto de espacio métrico en 1906.

Es una disciplina que estudia las propiedades de los espacios topológicos y las funciones continuas . La Topología se interesa por conceptos como proximidad, número de agujeros, el tipo de consistencia (o textura) que presenta un objeto, comparar objetos y clasificar, entre otros múltiples atributos donde destacan conectividad , compacidad , metricidad o metrizabilidad , etc.

Idea Intuitiva

Particularmente se presenta a la Topología como la "Geometría de la página de goma (chicle)". Esto hace referencia a que en la Geometría euclídea dos objetos serán equivalentes mientras podamos transformar uno en otro mediante isometrías (rotaciones, traslaciones, reflexiones, etc), es decir, mediante transformaciones que conservan las medidas de ángulo, longitud, área, volumen y otras.

En topología está permitido doblar, estirar, encoger, , los objetos, pero siempre que se haga sin romper ni separar lo que estaba unido, ni pegar lo que estaba separado. Por ejemplo, un triángulo es topológicamente lo mismo que una circunferencia, ya que podemos transformar uno en otra de forma continua, sin romper ni pegar.

Pero una circunferencia no es lo mismo que un segmento, ya que habría que partirla (o pegarla) por algún punto. Ésta es la razón de que se la llame la "Geometría de la página de goma", porque es como si estuviéramos estudiando Geometría sobre un papel de goma que pudiera contraerse, estirarse, etc.

Un Ejemplo Clarificador

Observemos un plano del metro (tren) . En él están representadas las estaciones y las líneas de metro que las unen, pero no es *geométricamente* exacto. La curvatura de las líneas de metro no coincide, ni su longitud a escala, ni la posición relativa de las estaciones... Pero aún así es un plano perfectamente útil. Sin embargo, este plano es exacto en cierto sentido pues representa fielmente cierto tipo de información, la única que necesitamos para decidir nuestro camino por la red de metro.

En si la topología se ocupa de los objetos geométricos atendiendo a la forma, tamaño o posición, en general a sus propiedades cualitativas. Ver figura 1.4.

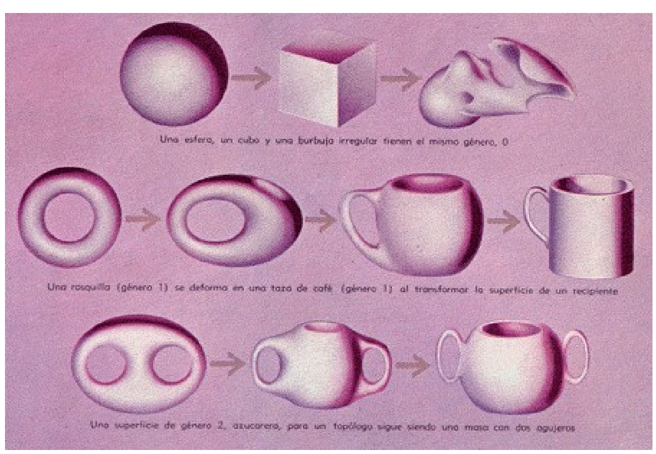

Figura 1.4

1.3 Historia del Análisis Real

El concepto de medida tiene una larga historia de más de 5000 años, que surge del manejo de longitudes, tareas y volúmenes fundamentalmente y de la necesidad de su cálculo. Estos tres ejemplos particulares de medidas son los que han servido como guía para sacar a la luz el concepto que detrás de ellos se escondía.

El Papiro de Moscú, considerado del 1800 A.C., es, con el de Rhind, uno de los documentos egipcios con problemas matemáticos, más antiguos que se conocen. En el encontramos problemas como el del cálculo del volumen de un tronco de pirámide con el cálculo del área de una superficie curva (en este no se aprecia si se trata de una semiesfera o de un semicilindro de altura el diámetro, los cuales tienen igual área). En cualquier caso en la solución que da el papiro de este problema, aparentemente se hace uso de la aproximación de π , $4(1-1/9)^2=3.160...$

Sin embargo no es hasta el libro de Euclides (300 a.c.) Los elementos, que aparecen las primeras demostraciones satisfactorias de teoremas relativos a áreas y volúmenes. Aunque, también es cierto, en este libro no hay definiciones de longitud, área o volumen; Euclides las considera características que puede medir respectivamente en las figuras que se definen como línea, superficie y sólido.

En matemática, una **medida** es una función que asigna un número real positivo o cero, interpretable como un "tamaño", un "área", un "volumen", o una "probabilidad", a los subconjuntos de un conjunto dado. El concepto es importante para el análisis matemático, la geometría y para la teoría de la probabilidad.

A menudo, el ambicioso objetivo de asignar una medida a todo subconjunto del conjunto base se revela inalcanzable. Solo será posible, o interesante en algunos casos, asignar medida a ciertas familias de subconjuntos, a los que llamaremos medibles. Las condiciones de consistencia que deben cumplir los miembros de estas familias quedan encapsuladas en el concepto auxiliar de σ-álgebra.

La teoría de la medida es una rama del análisis real que investiga las σ-álgebras, las medidas, funciones medibles e integrales. Es de importancia central en probabilidad y en estadística.

CAPITULO 2

“Introducción a la Variable Compleja y el Análisis Complejo”

2.1 Los Números Complejos y su Álgebra

Los números usados en álgebra elemental y en cálculo se llama números reales. Esto son aquellos que pueden representarse geométricamente por los puntos de una línea recta infinitamente larga(véase figura 2.1).

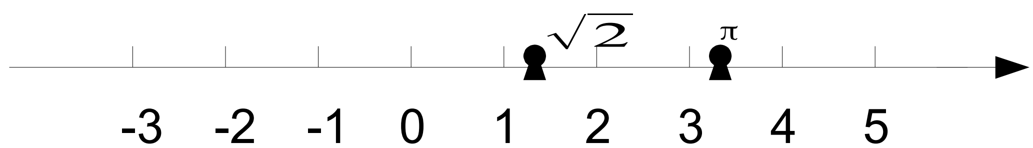

FIGURA 2.1.

La línea se divide en intervalos por medio de puntos equidistantes que representan a cada uno de los enteros, con los números reales positivos a la derecha del cero y los reales negativos a la izquierda.

Todo número real se representa por un solo punto sobre la línea. Estos números satisfacen las cinco reglas algebraicas siguientes, llamadas axiomas de campo:

1. **Leyes conmutativas**

$$a+b=b+a \quad y \quad ab=ba \ .$$

2. **Leyes asociativas**

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad y \quad (ab)c=a(bc) \ .$$

3. **Leyes distributivas**

$$a(b+c)=ab+ac \quad \mathbf{y} \quad (a+b)c=ac+bc \ .$$

4. **Identidades.** La identidad aditiva 0 y la identidad multiplicativa 1 satisfacen que $0 \neq 1$ y

$$a+0=a=0+a \quad \text{y} \quad a.1=a=1.\text{a} \ .$$

5. **Inversos**. Cada número real 'a' tiene un inverso aditivo $(-a)$ y, si $a \neq 0$ un inverso multiplicativo a^{-1} que satisface

$$a+(-a)=0=(-a)+a \quad \text{y} \quad aa^{-1}=1=a^{-1}a \ .$$

Sin embargo, los números reales tienen una deficiencia básica: no proporcionan todas las soluciones posibles de las ecuaciones polinomiales. Por ejemplo , la ecuación $a^2+1=0$ no puede resolverse mediante números reales, ya que la raíz cuadrada de un número real negativo no existe.

No obstante, podemos corregir este defecto si definimos el conjunto de números complejos C,

$$z=(x\,,y) \qquad \textbf{\textit{(1)}}$$

Los números reales x e y, se conocen como parte real y parte imaginaria de z. Escribimos:

$$Re z = x \quad y \quad Im z = y \ .$$

Dos números complejos z_1 *y* z_2 *se dicen que son* ***iguales*** *si tienen iguales las partes real e imaginaria.* Es decir:

Si $z_1 = (x_{1,} y_1)$ y $z_2 = (x_{2,} y_2)$ entonces $z_1 = z_2$ si y solo si $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

La ***suma*** y el ***producto*** de dos números complejos z_1 y z_2 se define por las ecuaciones:

si $z_1 = (x_{1,} y_1)$ y $z_2 = (x_{2,} y_2)$ entonces

$$z_1 + z_2 = (x_{1,} y_1) + (x_{2,} y_2) = (x_1 + x_{2,} y_1 + y_2) \qquad \textbf{\textit{(2)}}$$

$$z_1 . z_2 = (x_{1,} y_1)(x_{2,} y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_{2,} y_1 x_2 + x_1 y_2) \qquad \textbf{\textit{(3)}}$$

En particular,

$(x, 0) + (0, y) = (x + 0, 0 + y)$ y $(0,1)(y, 0) = (0.\text{y} - 1.0, y.1 + 0.0)$

$(x, 0) + (0, y) = (x, y)$, $(0,1)(y, 0) = (0, y)$

Luego entonces tenemos que el número complejo:

$$(x, y)=(x, 0)+(0,1)(y, 0) \qquad \textbf{\textit{(4)}}$$

Por lo tanto el conjunto de los números complejos es consecuencia, de una extensión natural de los números reales.

Pensando en un número real x o de la forma $(x, 0)$, y denotado por i el número imaginario puro $(0,1)$, podemos reescribir la ecuación (4) así:

$$(x, y)=x+iy \qquad \textbf{\textit{(5)}}$$

entonces de la ecuación (1) tenemos:

$$z=x+iy$$

Al igual que en el análisis real tenemos en el análisis complejo que:

$$z^2=zz \quad , \quad z^3=zz^2 \quad , \textit{etc.}$$

y de $i=(0,1)$ tenemos que:

$$i^2=ii=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1 \quad ,$$

$$i^3=i^2.i=-1.\mathrm{i}=-i \quad ,$$

$$i^4=i^2.i^2=(-1)(-1)=1 \quad , \textit{etc.}$$

Además el conjugado de un número complejo z se denota por el símbolo $\overline{z}$. Dado que si $z = x + iy$, entonces: $z\,\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$.

A la vista de la expresión (5), las ecuaciones (2) y (3) se convierten en:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + (iy_1 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \qquad (7)$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2) + (iy_1 x_2 + ix_1 y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2) \qquad (8)$$

2.2 Algunas de las Operaciones Básicas con los Números Complejos

Suma

Para sumar números complejos, se siguen las normas básicas de la aritmética, sumando los reales con los reales y los imaginarios con los imaginarios:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad .$$

Ejemplo 2.1: dado dos números complejos efectuar

$$(4 + 2\mathrm{i}) + (3 + 2\mathrm{i}) = 4 + 2\mathrm{i} + 3 + 2\mathrm{i} = 4 + 3 + 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i} = (4 + 3) + (2 + 2)i = 7 + 4\mathrm{i}$$

el resultado es 7 + 4i

Resta

Al igual que en la suma, se opera como con los números reales ordinarios:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

Ejemplo 2.2: Dado dos números complejos efectuar

$$(4-2\mathrm{i})-(3+5\mathrm{i})=(4-3)+(-2\mathrm{i}-5\mathrm{i})=(4-3)+(-2-5)i=1-7\mathrm{i}$$

el resultado es 1 – 7i.

Multiplicación

Para multiplicar dos números complejos, se multiplica cada término del primero por los dos del segundo, con lo que obtenemos 4 términos:

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Obsérvese que el término bdi^2 *pasa a ser* $-bd$ *. Eso es porque* $i^2=-1$.

Ejemplo 2.3: dado dos números complejos efectuar

$$(4+2\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})=4.3+4.2\mathrm{i}+2.3\mathrm{i}+2.2\mathrm{i}^2=(4.3-2.2)+(4.2+2.3)i=8+14\mathrm{i}$$

el resultado es 8 +14i.

<u>División</u>

La división de números complejos requiere un mayor trabajo que la multiplicación y partimos de un artificio previo, basado en que el producto de un número complejo por su conjugado que se denota por $\bar{z}$, da como resultado un número real:

$$(a+bi)(c+di)=a^2-abi+bai+b^2=a^2+b^2$$

Si a la división de dos números complejos, la multiplicamos por el conjugado y también la dividimos por el conjugado del denominador obtenemos:

$$\frac{a+bi}{(c+di)}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-adi+bci+bd}{c^2-cdi+cdi+d^2}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=$$

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Ejemplo 2.4: dado dos números complejos efectuar

$$\frac{3+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\frac{(3+2\mathrm{i}).(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i}).(1+2\mathrm{i})}=\frac{3+6\mathrm{i}+2\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2}{1-(2\mathrm{i})^2}=\frac{3+8\mathrm{i}-4}{1+4}=-\frac{1}{5}+\frac{8}{5}i$$

el resultado es $-\frac{1}{5}+\frac{8}{5}i$.

Varias propiedades de la suma y el producto de número complejos coinciden con la de los números reales, y además al igual que los números Reales los números Complejos también cumplen Los **Axiomas de Campo:**

1. **Leyes conmutativas**

$$z_1+z_2=z_2+z_1, \qquad z_1 z_2=z_2 z_1.$$

2. **Leyes asociativas**

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3), \qquad (z_1 z_2)z_3=z_1(z_2 z_3).$$

3. **Leyes distributiva**

$$z(z_1+z_2)=zz_1+zz_2,$$

4. **Identidades.** La identidad aditiva $0=(0,0)$ y la identidad multiplicativa $1=(1,0)$ satisfacen que:

$$z+0=z \quad \textbf{y} \quad z.1=z$$

5. **Inversos**. Cada número complejo z tiene un inverso aditivo $-z$ y, si $z\neq 0$ un inverso multiplicativo z^{-1} que satisface

$$z+(-z)=(-z)+z=(0,0) \ \text{ y } \ zz^{-1}=z^{-1}z=1.$$

Demostración de las las leyes planteadas,

$$\text{si} \quad z_1=(x_1, y_1), \quad z_2=(x_2, y_2) \ \text{ y } \ z_3=(x_3, y_3)$$

Para 1.

Ley conmutativa para la suma:

$$z_1+z_2=(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)=(x_2+x_1, y_2+y_1)=(x_2, y_2)+(x_1, y_1)=z_2+z_1$$

Por lo tanto se cumple la ley conmutativa para la adición.

Ley conmutativa para el producto:

$$z_1 z_2=(x_1, y_1)(x_2, y_2)=(x_1 x_2-y_1 y_2, y_1 x_2+x_1 y_2)=(x_2 x_1-y_2 y_1, x_2 y_1+y_2 x_1)$$

$$=(x_2 x_1-y_2 y_1, y_2 x_1+x_2 y_1)$$

$$=(x_2, y_2)(x_1, y_1)=z_2 z_1 \quad .$$

Por lo tanto cumple la ley conmutativa para el producto.

Para 2.

Ley asociativa para la suma:

$$(z_1+z_2)+z_3=((x_1, y_1)+(x_2, y_3))+(x_3, y_3)$$

$$=(x_1+x_2, y_1+y_2)+(x_3, y_3)=(x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3)$$

$$= \ (x_1+(x_2+x_3), y_1+(y_2+y_3))=(x_1, y_1)+(x_2+x_3, y_2+y_3)$$

$$= \ (x_1, y_1)+((x_2, y_2)+(x_3, y_3))=z_1+(z_2+z_3).$$

Por lo tanto cumple la ley asociativa para la suma.

Ley asociativa para el producto:

$$(z_1 z_2) z_3 = ((x_{1,} y_1)(x_2, y_3))(x_3, y_3) = (x_1 x_2 - y_1 y_{2,} y_1 x_2 + x_1 y_2)(x_{3,} y_3)$$

$$= ((x_1 x_2 - y_1 y_2) x_3 - (y_1 x_2 + x_1 y_2) y_{3,} x_3 (y_1 x_2 + x_1 y_2) + (x_1 x_2 - y_1 y_2) y_3)$$

$$= ((x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 x_3) - (y_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 y_3), (x_3 y_1 x_2 + x_3 x_1 y_2) + (x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3))$$

$$= (x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 x_3 - y_1 x_2 y_3 - x_1 y_2 y_{3,} x_3 y_1 x_2 + x_3 x_1 y_2 + x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3)$$

$$= (x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 y_2 x_3 - y_1 x_2 y_{3,} x_3 y_1 x_2 - y_1 y_2 y_3 + x_3 x_1 y_2 + x_1 x_2 y_3)$$

$$= (x_1 (x_2 x_3 - y_2 y_3) - y_1 (y_2 x_3 + x_2 y_3), y_1 (x_3 x_2 - y_2 y_3) + x_1 (x_3 y_2 + x_2 y_3))$$

$$= (x_{1,} y_1)(x_2 x_3 - y_2 y_{3,} x_3 y_2 + x_2 y_3) = (x_{1,} y_1)((x_{2,} y_2)(x_{3,} y_3)) = z_1 (z_2 z_3)$$

Por lo tanto cumple la ley asociativa para el producto.

Y así vemos que se cumplen los axiomas de campos. Luego nos enfocamos al Análisis de esta área que seria el Análisis Complejo.

2.3 Representación Polar

Hemos visto que los números complejos pueden representarse como vectores en el plano complejo. En esta sección utilizaremos el concepto de segmento de recta dirigido para determinar las propiedades de la longitud y del ángulo de inclinación de un vector en el plano complejo.

Consideremos el vector no nulo $z = x + iy$ mostrado en la figura 2.2. La longitud del vector z se puede determinar mediante el teorema de Pitágoras:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad .$$

Llamamos a esta longitud **valor absoluto (módulo o magnitud)** del número complejo z, y la denotamos como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Se nota que $|z| \geq Re\, z$, $|z| \geq Im\, z$ y $|\bar{z}| = |z|$. además, recordemos que en la sección **2.1** probamos que $z\,\bar{z} = x^2 + y^2$. por lo tanto $z\,\bar{z} = |z^2|$.

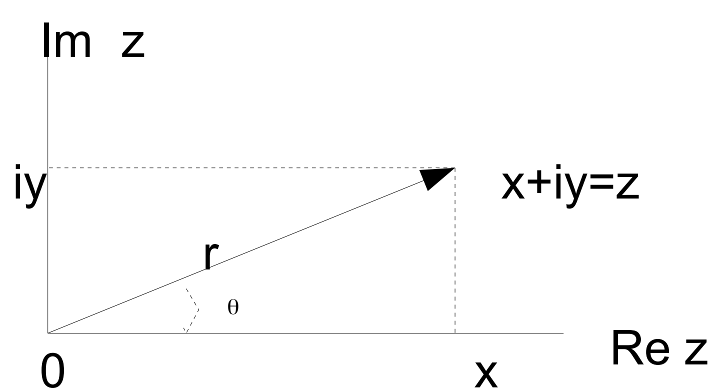

FIGURA 2.2.

Retomando siempre la figura 2.2, vemos que el ángulo que forma el vector $z = x + iy$ con el eje real positivo, esta dado por la expresión

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \quad .$$

Esta expresión, sin embargo no es válida para el segundo o tercer cuadrante, ya que los valores de arctangente caen en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Además, el ángulo de inclinación del vector esta determinado hasta un múltiplo de 2π , ya que los ángulos

$$\theta + 2\pi k \quad , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad ,$$

proporcionan todos la misma dirección en el plano complejo. El ángulo de inclinación del vector z , determinado excepto por un múltiplo de 2π , se llama **argumento** de z y se denota por $arg\, z$, el valor de $arg\, z$ que satisface

$$-\pi \leq arg\, z < \pi$$

se llama **valor principal** del argumento y se designa $Arg\, z$ .Cuando se trabaja con el argumento, es conveniente acordar que la notación $arg\, z$ ignore los múltiplos de 2π , además de utilizar la expresión

$$arg\, z + 2\pi k \quad , \qquad k \text{ como entero fijo,}$$

para indicar un ángulo particular.

Regresando al vector original $z=x+iy$, $z\neq 0$, se nota que

$$x=r\cos\theta=|z|\cos(\arg z)$$

y que

$$y=r\,sen\,\theta=|z|\,sen(\arg z) \quad .$$

Ahora tenemos,

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\,sen\,\theta)$$

puede reescribirse como

$$z=|z|[\cos(\arg z)+i\,sen(\arg z)] \quad , \quad z\neq 0 \quad .$$

Esta forma se llama **representación polar** del número complejo z .

Ejemplo 2.5:

Encuentre la representación polar de $1-i$.

SOLUCION:

Veamos la figura 2.3. El valor absoluto de $1-i$ es

$$|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2} \quad ,$$

mientras que el valor principal del argumento de $1-i$ es

$$\arg(1-i)=-\frac{\pi}{4} \quad .$$

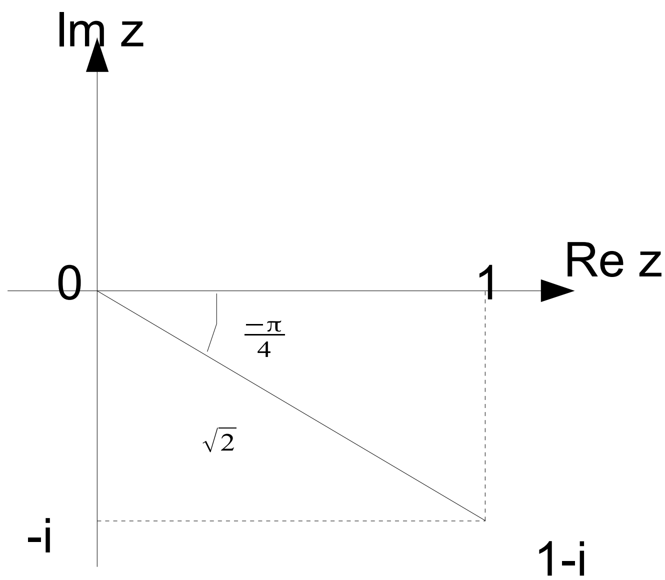

FIGURA 2.3.

Como los ángulos polares no están determinados de manera única, el argumento es

$$arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}+2\pi k \quad ,$$

donde k es cualquier entero. Así, la representación polar de $1-i$ es

$$1-i=\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}+2\pi k)+i\,sen(-\frac{\pi}{4}+2\pi k)] \quad .$$

2.4 Conjuntos en el Plano Complejo

Si z_0 es un número complejo, entonces, una e-**vecindad** de z_0 es el conjunto de todos los puntos z, cuya distancia a z_0 es menor que ε, esto es, todos los z que satisfacen $|z-z_0|<\varepsilon$ (véase la figura 2.4). gráficamente, este es el interior de un disco centrado en z_0 y radio ε.

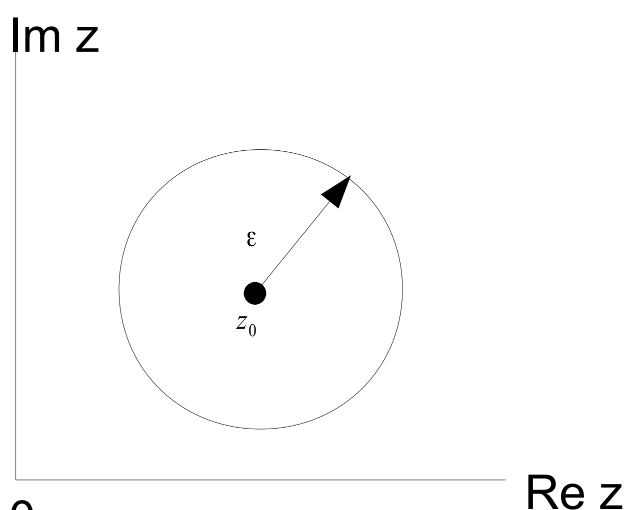

FIGURA 2.4.

Sea S un conjunto de puntos del plano complejo C. Se dice que z_0 es un **punto interior** de S si alguna e-vecindad de z_0 esta completamente contenida en S; el conjunto de todo los puntos interiores de S se llama **interior** de S y se denota por int S. El **complemento** de S es el conjunto $c-s$ de todo los puntos que no están en S. el conjunto $int(c-s)$ se denomina exterior de S.

Un punto z_0 es un **punto frontera** de S si toda e-vecindad de z_0 contienen puntos que están en S y puntos que no lo están. Se nota que los puntos frontera de S no están en el interior ni en el exterior de S. El conjunto de todos los puntos del conjunto frontera de S se llaman frontera de S (ver la figura 2.5).

Un punto z_0 es llamado un **punto de acumulación** de un conjunto S, si cada vecindad de z_0 contiene al menos un punto de S distinta de z_0.

Ejemplo 2.6:

Sea S_o el conjunto de todos los puntos z tales que $|z|<1$. Encontrar el interior, la frontera y el exterior del conjunto S_o.

Solución:

Sea z_0 un punto cualquiera de S_o. Notamos que el disco $|z-z_0|<\varepsilon$ esta situado completamente dentro de S_o siempre que $\varepsilon<1-|z_0|$. Así, todo punto de S_o es un punto interior. Igualmente, todo punto z_0 que satisfaga $|z_0|>1$ será exterior a S_o. Si $|z_0|=1$, entonces todas las e-vecindades de z_0 contendrán puntos que están en S_o y puntos que no lo están. Por lo tanto la frontera de S_o consiste en todos los puntos sobre el circulo $|z|=1$ el interior es el conjunto $|z|<1$, y el exterior es el conjunto de todos los puntos que satisfacen $|z|>1$.

Un conjunto es **abierto** si todos sus puntos son interiores; esto es, $S=\text{Int}(S)$ cuando S es abierto. Así, el conjunto S_0 es abierto.

Al complemento de un conjunto abierto se le llama **cerrado**. Por ejemplo el conjunto T de todo los puntos z , tal que $|z|\geq 1$ es cerrada. De igual manera, el conjunto $|z|\leq 1$ es cerrado.

Se dice que un conjunto S es **acotado** en caso de que exista un número real positivo tal que todo z en S satisfaga $|z|<R$.

Si esta condición no se cumple, decimos que S es **no acotada.** Por ejemplo, el conjunto S_0 en el ejemplo anterior es acotado, pero $T=\{ z:|z|\geq 1 \}$ es no acotado.

Un conjunto S es **conexo** si no puede ser representado como la unión de dos conjuntos A y B ajenos y no vacíos tales que ninguno de ellos contenga un punto frontera del otro.

Intuitivamente, lo que se señala es que S esta integrado por una sola pieza. Por ejemplo, S_0 es conexo, pero el conjunto de todos los z ,para los cuales $|z-2|<1$ o $|z+2|<1$ es no conexo, puesto que podemos formar el conjunto A de todo los z tales que $|z-2|<1$, y conjunto B de todos los z para los cuales $|z+2|<1$ (figura 2.5) .

Entonces A y B son conjunto abiertos, ajenos, y ninguno de ellos puede contener un punto frontera del otro.

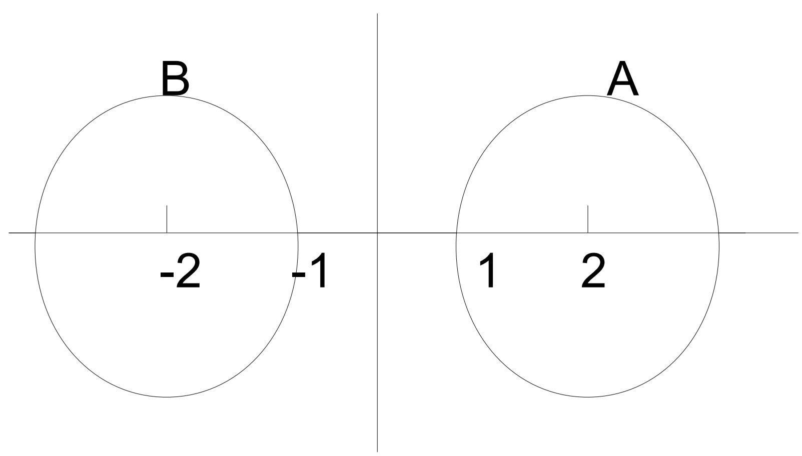

FIGURA 2.5.

2.5 Funciones Continuas de una Variable

Una función compleja de una variable compleja es un regla que asigna un número complejo w a cada número complejo z de un conjunto S. si escribimos $w=f(z)$, w es el valor de la función en el punto z que esta en el dominio de definición S. Al escribir $w=f(z)$ en términos de las descomposiciones en partes reales e imaginaria $z=x+iy$ y $w=u+iv$ de cada variable compleja,

$$w=u(z)+iv(z)=u(x,y)+iv(x,y) \quad ,$$

notamos que una función compleja de una variable compleja consiste en un par de funciones reales de dos variables reales.

Ejemplo 2.7:

Exprese $w=z^2$ como un par de funciones reales de dos variables reales.

Solución:

Con $z=x+iy$ obtenemos

$$w=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i(2\text{xy}) \quad .$$

Así, $u(x,y)=x^2-y^2$ y $v(x,y)=2\mathrm{xy}$.

Las funciones reales de una variable real $y=f(w)$ pueden describirse geométricamente por medio de una gráfica en el plano xy . No es posible una representación tan cómoda para $w=f(z)$, ya que esta requiere cuatro dimensiones, dos para cada variable compleja. En lugar de esto, la información acerca de la función se expresa dibujando planos complejos separados para las variables z y w , e indicando la correspondencia existente entre puntos, o conjuntos de puntos, en los dos planos (ver figura 2.6). Se dice que la función f es un **mapeo** del conjunto S contenido en el plano z en el plano w . una función f que mapea un conjunto S en un conjunto S' , $f:s\rightarrow s'$, se llama **uno a uno** si $f(z_1)=f(z_2)$ sólo para $z_1=z_2$; se le llama **sobre** si $S'=f(S)$, donde $f(S)$ es el conjunto de todos los valores tomados por f en el conjunto S . Llamamos a $f(S)$ el conjunto **imagen** de S bajo el mapeo f .

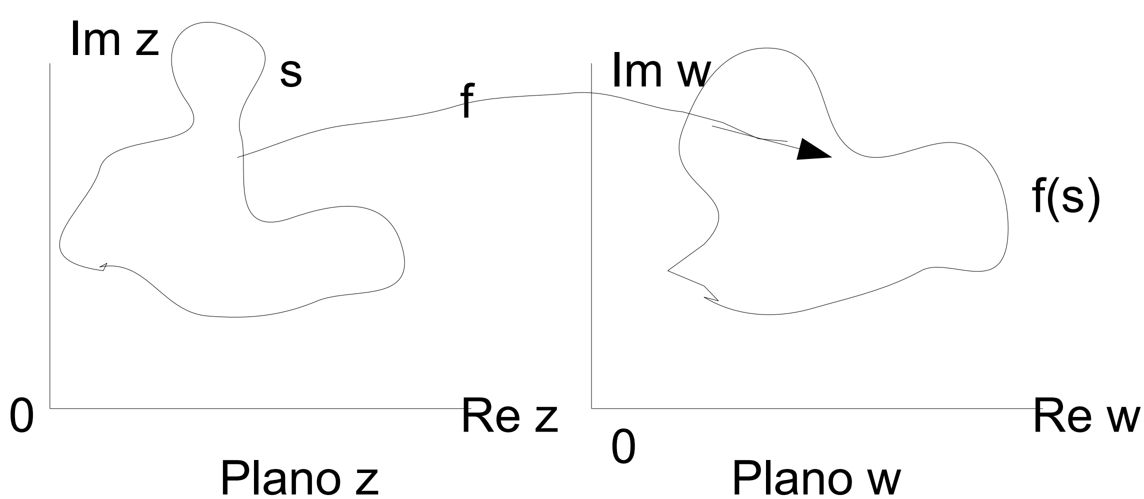

FIGURA 2.6.

Supongamos que f esta definida en una región G, y a es un punto de G. Entonces, el limite y la continuidad se definen de la misma manera que en el caso de variable real.

<u>Definición 2.1:</u> Se dice que la función $f(z)$ tiene limite A cuando z tiende hacia a,

$$\lim_{z \to a} f(z) = A \quad ,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

siempre que $0 < |z - a| < \delta$. Además, la función $f(z)$ es continua en a si y solo si

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$$

(ver figura 2.7). Una función continua es aquella que es continua en todos los puntos donde está definida.

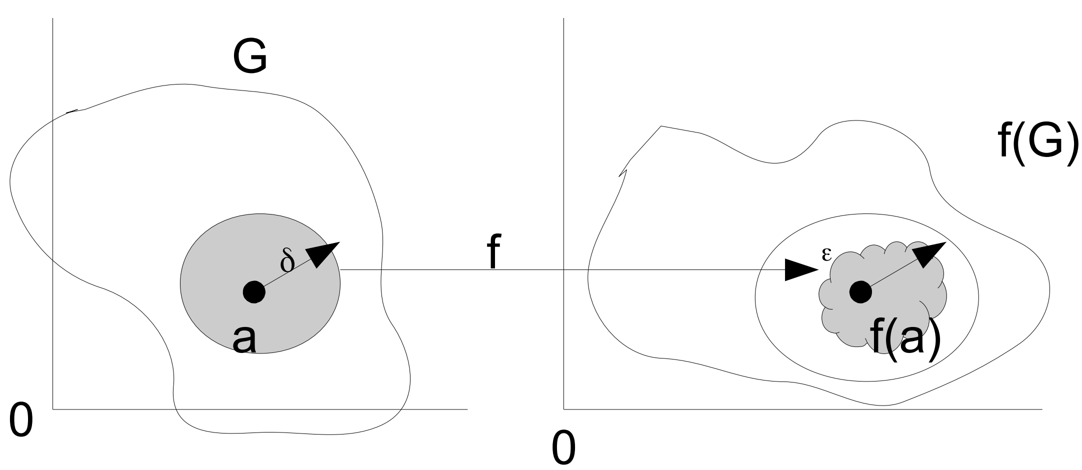

FIGURA 2.7.

Ejemplo 2.8:

Pruebe que $\lim_{z\to 3}\frac{z-1}{z-2}=2$.

Solución:

Con la expresión $|f(z)-A|$, simplificamos, obtenemos

$$\left|\frac{z-1}{z-2}-2\right|=\left|\frac{3-z}{z-2}\right|<\frac{\delta}{|z-2|} \quad ,$$

pues supongamos que $0<|z-3|<\delta$ donde δ debe expresarse en términos de ε

Si $\delta<\frac{1}{2}$, mediante la desigualdad del triángulo, tenemos

$$|z-2|=|1-(3-z)|\geq 1-|3-z|>1-\delta>\frac{1}{2}$$

de tal forma que

$$\left|\frac{z-1}{z-2}-2\right|<2\delta \quad .$$

Así, dado cualquier número pequeño $\varepsilon>0$, si elegimos

$$\delta<min(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\varepsilon) \quad ,$$

obtenemos

$$\left|\frac{z-1}{z-2}-2\right|<\varepsilon \quad .$$

Al igual que la definición de limite de una función compleja de una variable compleja es idéntica a la de una función real de una variable real, y puesto que los valores absolutos se comportan como en el caso real, se aplican exactamente las mismas reglas de los limites. La verificación de las propiedades siguientes son análogas a las pruebas usuales del cálculo elemental.

REGLAS DE LÍMITES

Sean $\lim\limits_{z\to a} f(z)=A$ y $\lim\limits_{z\to a} g(z)=B$.

Entonces

(i) $\lim\limits_{z\to a}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$,

(ii) $\lim\limits_{z\to a} f(z)g(z)=AB$,

(iii) $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$, para $B\neq 0$.

Ejemplo 2.9:

Determine si la función

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2-1}{z-1}, & z\neq 1\\ 3, & z=1\end{cases}$$

es continua.

Solución:

Claramente, f es continua en el conjunto $z \neq 1$, ya que el denominador es diferente de cero. Así, el único punto donde todavía necesitamos verificar la continuidad es $z=1$. Sin embargo,

$$\lim_{z\to 1} \frac{z^2-1}{z-1} = 2 \quad ,$$

porque

$$\frac{z^2-1}{z-1} = \frac{(z+1)(z-1)}{(z-1)} = z+1 \quad ,$$

si $z \neq 1$.

Pero, por definición, $f(1) = 3 \neq 2$. Por lo tanto, f no es continua.

2.6 Condiciones Necesarias para la Analiticidad

La derivada de una función compleja de una variable compleja se define exactamente, de la misma manera que el caso real del cálculo elemental.

Definición 2.2:

La derivada f' de f en a esta dada por

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad ,$$

cuando el limite existe. Se dice que la función f es **analítica** (u **holomorfa**) en la región G si tiene derivada en cada punto de G, y se dice que f es **entera** si es analítica en todo el campo de los números complejos.

Hay que observar que, en la definición anterior, h es un número complejo, como también lo es el cociente $[f(a+h)-f(a)]/h$. Así, para que exista la derivada, en necesario que ese cociente tienda a un número complejo único $f'(a)$ independiente de la manera en que h tienda hacia cero.

Lema 2.1: Si f tiene derivada en a, entonces f es continua en a.

Prueba:

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)=\lim_{h\to 0}\left\{\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right].h+f(a)\right\}=f(a) \quad .$$

Al manipular la definición de derivada nos lleva a las reglas usuales de derivación usadas en el análisis real :

(i) $(f\pm g)'=f'\pm g'$

(ii) $(fg)'=fg'+gf'$

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{gf'-fg'}{g^2}$, $g\neq 0$

(iv) $(f(g(z)))'=f'(g(z))g'(z)$, Regla de la cadena.

Las pruebas son idénticas a las de cualquier libro de calculo elemental. Por ejemplo,para (ii) tenemos:

$$(fg)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a+h)g(a)+f(a+h)g(a)-f(a)g(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[f(a+h).\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+g(a).\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]$$

$$=f(a)g'(a)+g(a)f'(a) \quad .$$

Los polinomios y las funciones racionales se derivan de la misma manera que en el calculo elemental. Por ejemplo, sea $f(z)=z^n$ con n un entero positivo. Si usamos el teorema del binomio, tendremos:

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^n-z^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(z^n+nz^{n-1}h+....+h^n)-z^n}{h}=nz^{n-1} \quad .$$

En particular, todo polinomio

$$p(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+....+a_nz^n \quad ,$$

es entero, porque en cada punto z de los complejos tiene derivada,

$$p'(z)=a_1+2a_2z+....+na_nz^{n-1} \quad .$$

No obstante hay una diferencia fundamental entre le derivación para funciones de variables reales y la derivación para funciones de una variable compleja. Sea $z=(x,y)$, supongamos que h es real , entonces,

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\frac{\partial f}{\partial x}(z)=f_x(z) \quad .$$

pero entonces si $h=ik$, es puramente imaginario, entonces

$$f'(z)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{ik}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z)=-if_y(z) \quad .$$

Así, la existencia de una derivada compleja obliga a la función a satisfacer la ecuación diferencial parcial

$$f_x=-if_y \quad .$$

Si $f(z)=u(z)+iv(z)$, donde u y v son funciones reales de una variable compleja, y si igualamos las partes reales y las imaginarias de

$$u_x + iv_x = f_x = -if_y = v_y - iu_y \quad ,$$

de esta manera obtenemos las ecuaciones diferenciales de **Cauchy-Riemann**

$$u_x = v_y \quad , \qquad v_x = -u_y \quad .$$

Entonces si la función $f(z) = u(z) + iv(z)$ tiene derivadas en el punto z, las primeras derivadas parciales de u y v, con respecto a x y y, existen y satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann.

CAPITULO 3

“Introducción a la Topología y el Análisis Real”

3.1 Topología en el Plano Complejo

Como hemos observado por la forma de los dominios donde se definen las funciones holomorfas necesitamos conocer algo acerca de la topología definida en el plano complejo, para esto tomaremos las definiciones y conceptos necesarios para trabajar sobre dichos conjuntos.

Definición 3.1:

Una ***topología*** sobre un conjunto **X** es una colección **Γ** de subconjuntos de **X** con las siguientes propiedades:

- **Ø** y **X** están en **Γ**
- La unión de los elementos de cualquier subcolección de **Γ** están en **Γ**
- La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de **Γ** están en **Γ**

Definición 3.2:

Un conjunto **X** para el cual se ha definido una topología **Γ** se llama ***Espacio Topológico.***

Definición 3.3:

Dado un subconjunto **A** de un espacio topológico **X** la ***Clausura de A*** se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a **A** y se denota por $\bar{A}$.

<u>Definición 3.4:</u>

Un Conjunto A es ***Conexo*** si no puede ser representado como la unión de dos conjunto A y B ajenos y no vacíos tales que ninguno de ellos contenga un punto de frontera del otro.

<u>Definición 3.5:</u>

Diremos que un Conjunto **A** es ***Abierto*** en un espacio topológico **X** si satisface que para todo elemento de A existe un U el cual todos sus puntos son interiores.

<u>Definición 3.6:</u>

Un conjunto $\boldsymbol{K \subset X}$ es ***compacto*** si para cada cubrimiento abierto de ***K*** contiene un subcubrimento finito. Dicho de otra forma, lo que se requiere es que si $\{V_\alpha\}$ es una colección finita de conjuntos abiertos los cuales la unión contiene a ***K*,** entonces la unión de alguna subcolección finita de $\{V_\alpha\}$ también contiene a ***K***.

<u>Definición 3.7:</u>

Si ***A*** es un subconjunto del espacio topológico **X** y si ***x*** es un punto de **X**, diremos que ***x*** es un ***Punto Limite*** o ***Punto de Acumulación*** de **A** si cada entorno de ***x*** interseca a **A** en algún punto distinto del propio ***x***. Dicho de otro modo, ***x*** es un punto limite de **A** si pertenece a la clausura de ***A- {x}.***

<u>Definición 3.8:</u>

Un espacio topológico X se denomina Espacio de Hausdorff si para cada par $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ de puntos distintos de **X**, existen entornos $\boldsymbol{U}_1$ y $\boldsymbol{U}_2$ de $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$, respectivamente, que son disjuntos. Ver fig. 3.1.

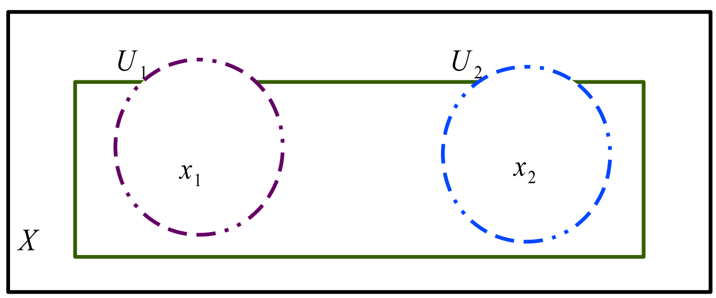

Figura 3.1

<u>Definición 3.9:</u>

Si $r > 0$ y a es un número complejo, $D(a\,;r) = \{z : |z-a| < r\}$ es el ***Disco Circular Abierto*** con centro *a* y radio *r*. $\bar{D}(a\,;r)$ es la clausura de $D(a\,;r)$

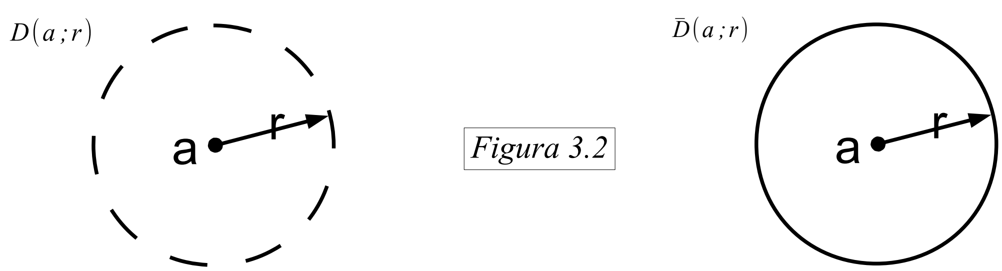

Figura 3.2

Definición 3.10:

Si $r>0$ y a es un número complejo entonces $D(a\,;r)=\{z:0<|z-a|<r\}$ es la definición del ***Disco Perforado*** con centro a y radio r.

Definición 3.11:

Un conjunto E en un espacio topológico X se dice que es ***no conexo*** si E es la unión de dos conjuntos no vacíos A y B tal que $\bar{A}\cap B=\emptyset=A\cap\bar{B}$ .Ver fig. 3.3

Si tenemos que A y B son no conexos y si V y W son los complementos $\bar{A}$ y $\bar{B}$, respectivamente podemos observar que $A\subset W$ y $B\subset V$.

Por lo tanto

$E\subset V\cup W$, $E\cap V\neq\emptyset$, $E\cap W\neq\emptyset$ $E\cap V\cap W=\emptyset$ .ver fig.3.3. ***(1)***

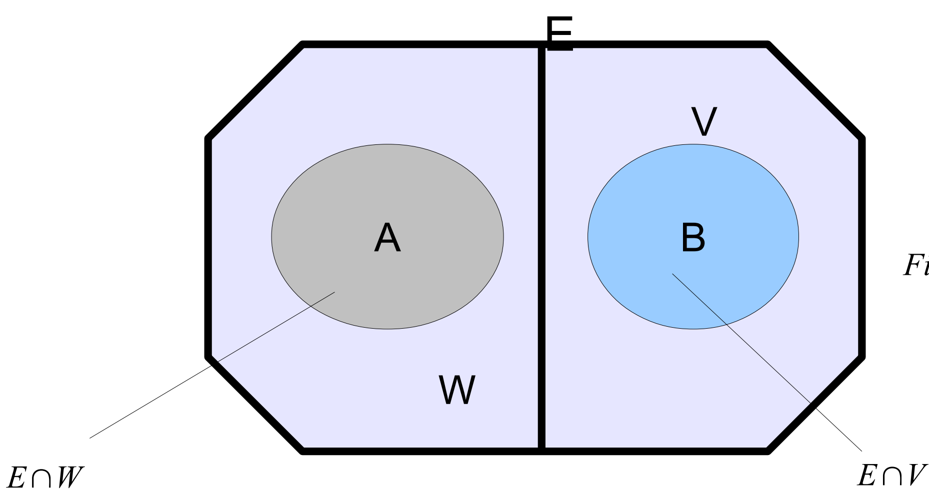

Figura 3.3

Recíprocamente, si los conjuntos abiertos V y W existen tal que *(1)* se mantiene, es fácil ver que E es no conexo y si tomamos $A=E\cap W$, $B=E\cap V$.

Si E es cerrado y no conexo entonces $\bar{A} \cap B = \emptyset = A \cap \bar{B}$ muestra que E es la unión de dos conjuntos cerrados distintos no vacios y si $\bar{A} \subset A \cup B$ y $\bar{A} \cap B = \emptyset$ entonces podemos decir que $\bar{A} = A$.

Si E es abierto y no conexo entonces *(1)* muestra que E es la unión de dos conjuntos disjuntos abiertos no vacíos, llamados $E \cap V$ y $E \cap W$.

Podemos ver que cada conjunto consiste de un solo punto esto hace ver que obviamente es conexo. Si tenemos un $x \in E$, la familia Φ_x de todos los subconjuntos conexos de E que contienen a x son por lo tanto diferentes de vacio.

Ahora veremos una definición para este tipo de conjuntos conexos que los generaliza en un tipo de conjunto que cumplen con la propiedad mencionada anteriormente.

Definición 3.12:

Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico y sea A un subespacio de $\boldsymbol{X}$. Decimos que A es una ***componente conexa de X*** *o* ***un conexo maximal en X*** si y solo si A es conexo y no es subconjunto propio de algún otro subespacio conexo de $\boldsymbol{X}$.

Como la clausura de un conexo es de nuevo conexa entonces las componentes son subconjuntos cerrados del espacio, y cada punto $x \in \boldsymbol{X}$ pertenece a una única componente, exactamente a la unión de todos los conexos que contienen al punto *x*. Por todo lo anterior, el conjunto de las componentes conexas de un espacio **X** determinan una partición sobre **X**.

La unión de todo los miembros de Φ_x es fácilmente observable que debe de ser conexo, y debe ser un *subconjunto maximal conexo* de E.

Cualquier dos componentes de E son disjuntos y E es la unión de sus componentes.

Por una región nos referimos a un subconjunto abierto no conexo del plano complejo.

Ya que cada conjunto abierto Ω en el plano es una unión de discos, y todos ellos son conexos, y cada componente de Ω es abierto. Dicho de otra manera cada conjunto abierto en el plano es una unión de regiones disjuntas. Y aquí adoptamos una notación que utilizaremos mucho en el desarrollo de esta letra Ω la cual demuestra un conjunto abierto en el plano.

3.2 El Análisis Real en el Plano Complejo

En esta sección veremos la importancia que tiene el análisis real en el plano complejo , al poder observar que las definiciones de la teoría de la medida aplicada en el análisis real funcionan en el análisis complejo, alguna de estas definiciones importantes como lo es la medida , σ-álgebra y conocer cuando un conjunto es medible así como también su espacio de definición tienen también su desarrollo en el análisis complejo.

El concepto de medida es una extensión del concepto de longitud. En el estudio del análisis real se hace necesario poder definirla para poder utilizarla; pero como en nuestro estudio el objetivo es el análisis complejo, lo aplicaremos a los elementos de dicha área de manera que podamos aplicarlos en abiertos y colecciones de abiertos definidos en el campo de los complejos.

Para obtener la medida debemos definir una función *m* que asigna a cada subconjunto de números complejos un número complejo no negativo (posiblemente ∞), y que esta función se generalice y se comporte como una función que mide longitudes de intervalos o para nuestro caso que mida flujos.

Las propiedades que debe de satisfacer m son :

- Para cada intervalo *I, m(I)= longitud de I, l(I).*
- Para un conjuntos

  $E \subset \mathbb{C}$ y $\forall x \in \mathbb{R}, \quad m(E) = m(x+E)$, $\left(= m\{x+e : e \in E\}\right)$.
- Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una colección numerable de conjuntos disjuntos

  $(E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j)$, se tienen que $m(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$.

Si la función *m* satisface la segunda propiedad se dice que *m* es *invariante por traslación* y si satisface la propiedad tres se dice que *m* tiene la propiedad de *aditividad sobre conjuntos disjuntos.* Claramente , queremos que la función *m* le de una *"longitud"* a los conjuntos que se construyan *"naturalmente"*. Los conjuntos a los que se les puede asignar un tamaño se denominan Lebesgue-medibles, o medibles a secas si no hay ambigüedad sobre la medida; el volumen o medida de un conjunto Lebesgue-medible E se denota por *m(E)* .

3.3 Medida Exterior

Una forma de introducir la medida de Lebesgue es mediante el concepto de medida exterior.

Definición 3.13:

Para un conjunto $E \subset \mathbb{C}$, sea cualquier colección numerable $\{I_i\}$ de intervalos abiertos que cubre a E. Se define la ***medida exterior*** de E , $m^*(E)$, por

$$m^*(E) = inf\ \{\sum l(I_i) : E \subset \cup I_i\}$$

donde $l(I_i)$ = longitud de I_i y el infinito se toma entre todos los recubrimientos del conjunto *E* formado por colecciones numerables de intervalos abiertos.

Podemos observar que la medida exterior esta bien definida y debe de ser no negativa para todo conjunto E porque siempre deberá de existir por lo menos un recubrimiento de cada conjunto formado por una colección numerable de intervalos abiertos, la suma esta bien definida porque solo tiene números positivos y el ínfimo de un conjunto de números no negativos es no negativo. Obviamente hay conjuntos E tal que $m^*(E)=\infty$.

Definición 3.14:

Un conjunto E se llama ***medible*** si para cada conjunto A se tienen que $m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c)$.

Definición 3.15:

Si E es un conjunto medible, se define la ***medida de Lebesgue*** de E, se define como: $m(E)=m^*(E)$.

Definición 3.16:

una colección de $\mathcal{M}$ de subconjuntos de un conjunto **X** se dice que es una **σ-álgebra** en **X** si $\mathcal{M}$ tiene las siguientes propiedades:

i. **X** ϵ $\mathcal{M}$**.**

ii. Si A ϵ $\mathcal{M}$ **,** entonces A^c ϵ $\mathcal{M}$ **,** donde A^c es el complemento de A relativo a **X**

iii. Si $A=\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ y si A_n ϵ $\mathcal{M}$ para n= 0,1, 2, 3,... entonces A ϵ $\mathcal{M}$**.**

<u>Definición 3.17:</u>

Se dice que E es una ***Medida Finita***s si E ϵ $\mathcal{B}$ y $\mu E < \infty$.

<u>Definición 3.18:</u>

Por un ***Espacio Medible*** nos referimos a un par ordenado **(X , $\mathcal{B}$)** que consiste de un conjunto **X** y una ***σ-álgebra*** $\mathcal{B}$ de subconjuntos de **X**. Un subconjunto **A** de **X** es llamado ***medible*** *(o medible con respecto a $\mathcal{B}$)si* ***A*** ϵ **$\mathcal{B}$.**

CAPITULO 4

“Diferenciación e Integración y El Teorema Local de Cauchy”

En este capítulo veremos los tópicos en la diferenciación y bajo que condiciones una función con dominio en un subconjunto de los complejos es diferenciable en un punto z si su derivada existe en ese punto; una función es diferenciable en un intervalo si es diferenciable en todos los puntos del intervalo.

Si una función es diferenciable en un punto z, la función es continua en ese punto. Sin embargo, una función continua en z, puede no ser diferenciable en dicho punto. En otras palabras, diferenciabilidad implica continuidad, pero no su recíproco.

La derivada de una función diferenciable puede ser, a su vez, diferenciable. La derivada de una primera derivada se llama derivada segunda. De un modo parecido, la derivada de una derivada segunda es la derivada tercera, y así sucesivamente. Esto también recibe el nombre de derivación sucesiva o derivadas de orden superior.

Luego la siguiente definición de una integral de línea o curvilínea es aquella integral cuya función es evaluada sobre una curva. En el caso de una curva es cerrada en dos dimensiones o del plano complejo, se llama también integral de contorno.

Y de esa forma reunir el conocimiento necesario para comprender la integración por caminos para así lograr un mejor de la teoría sobre el “Teorema Local de

Cauchy”que es una aplicación de los tópicos aprendidos en este capitulo.

Algunos ejemplos prácticos de su utilización pueden ser:

•El cálculo de la longitud de una curva en el espacio,

•El cálculo del volumen de un objeto descrito por una curva, objeto del que se posee una función (campo escalar) que describe su volumen a lo largo de la curva,

•O también para el cálculo del trabajo que se realiza para mover algún objeto a lo largo de una trayectoria teniendo en cuenta campos de fuerzas (descritos por campos vectoriales) que actúen sobre el mismo.

4.1 Diferenciación Compleja

La derivada de una función de variable compleja tiene las mismas propiedades a la derivada de una función real es decir dichas propiedades siguen verificándose. Sin embargo la derivabilidad compleja no es lo mismo que la diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$.

La derivada, como en el caso real, es el límite de un cociente incremental. Tal que la función *f(z)* sea derivable en z_o significa que para cualquier trayectoria de aproximación a z_o el límite del cociente incremental es siempre un mismo número complejo.

Definición 4.1

Supongamos que *f* es una función compleja definida en el dominio de definición Ω si $z_0 \in \Omega$ y si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \textbf{(1)}$$

existe, denotamos el limite por $f'(z_0)$ y lo llamamos la ***derivada de f en*** Z_0 .

Definición 4.2:

Si $f'(z_0)$ existe para cada $Z_0 \in \Omega$ decimos que *f* es ***holomorfa (o analítica)*** en Ω.. La clase de todas las funciones holomorfas en Ω se denotan por ***H(Ω)***.

Para ser mas explícitos, $f'(z_0)$ existe si para cada $\varepsilon > 0$, corresponde un $\delta > 0$ tal que $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$, $\forall$ $z \in D'(z_0; \delta)$, por lo tanto $f'(z_0)$ es un número complejo, obtenido como un limite de cocientes de números complejos.

Luego expresando la variable *z* en la definición **(1)** en termino de la nueva variable compleja $\Delta z = z - z_0$ y podemos escribir la definición como

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad \textbf{(2)}$$

Notemos que al estar *f* definida en un entorno de z_0 el mismo $f(z+\Delta z)$ esta siempre definido para $|\Delta z|$ suficientemente pequeño.

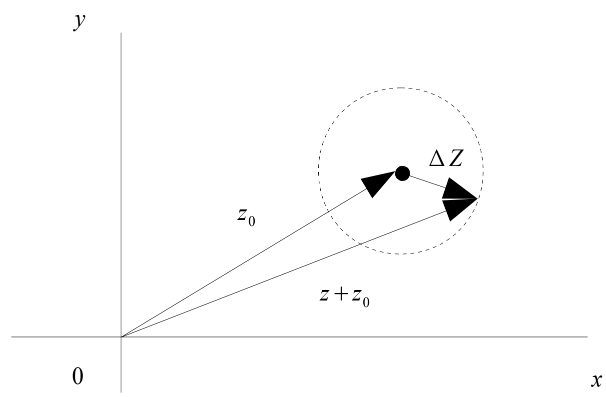

Figura 4.1

Al utilizar la forma **(2)** de la definición de derivada se suele omitir el subíndice z_0 y se introduce el número $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z)$ que denota el cambio en el valor de *f* correspondiente a un cambio Δz el punto en el que evaluamos *f* entonces si llamamos $\frac{dw}{dz}$ a $f'(z)$ la ecuación **(2)** se convierte en

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad .$$

<u>Definición 4.3:</u>

Se dice que una función es ***completa*** si es derivable en cualquier punto del plano.

<u>Definición 4.4:</u>

Un ***punto singular*** en una función es un punto donde la función no es analítica en ese punto pero si en su vecindad.

<u>Definición 4.5:</u>

Se dice que *f* es ***entera*** si es analítica en todo $\mathbb{C}$.

Podemos observar que *f* es un mapeo de Ω en R^2 ya que $R^2 \equiv \mathbb{C}$, por lo tanto tales mapeos aplicados en las derivadas es así un operador líneal en R^2 .

En nuestro análisis si la derivada satisface las afirmaciones de este operador lineal, este se transforma en la operación de multiplicación por $f'(z_0)$ (R^2 en el campo de los complejos)

A continuación tenemos un resumen de las operaciones de las funciones holomorfas.

<u>Diferentes Operaciones De Las Funciones Holomorfas:</u>

* *Si* $f \in H(\Omega)$ *y* $g \in H(\Omega)$ *, entonces* $f + g \in H(\Omega)$ *y* $f.g \in H(\Omega)$ *, asi que* $H(\Omega)$ *es un anillo con las reglas de la diferenciación usuales que se aplica.*

* *Más interesante es el caso que las superposiciones de funciones holomorfas son holomorfas.*

* *Si* $f\in H(\Omega)$, *si* $f(\Omega)\in\Omega$, *y si* $g\in H(\Omega)$ *y si* $h=g\circ f$ *entonces* $h\in H(\Omega)$ *y h' puede ser calculada por la regla de la cadena.*

$$h'(z_0)=g(f(z_0))f'(z_0) \qquad z_0\in\Omega \qquad (1) .$$

Para probar estas afirmaciones solo necesitamos fijar $z_0\in\Omega$ y poner $W_0=f(z_0)$ entonces,

$$f(z)-f(z_0)=[f'(z_0)+\varepsilon(z)](z-z_0) \qquad (2)$$

$$g(w)-g(w_0)=[g'(w_0)+\eta(w)](w-w_0) \qquad (3)$$

donde $\varepsilon(z)\rightarrow o$ cuando $z\rightarrow z_0$ y $\eta(w)\rightarrow o$ cuando $w\rightarrow w_0$ y luego sustituyendo (2) en (3) tenemos que

Si $z\neq z_0$

$$\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}=[g'(f(z_0))+\eta(f(z))][f'(z_0)+\varepsilon(z)] \qquad (4)$$

la derivabilidad de f hace a *f* ser continua en z_0 por lo tanto (1) sigue a (4).

Ejemplos:

* Para $n=0,1,2,3,.....,z^n$ es holomorfa en todo el plano y lo mismo es cierto para cualquier polinomio en z.

* Una forma fácil directamente es ver que la función $f(z)=\frac{1}{z}$ es holomorfa en

$z:z\neq 0$. Por lo tanto tomando $g(w)=\frac{1}{w}$ y entonces aplicamos la regla de la cadena, podemos observar que si f_1 y f_2 están en $H(\Omega)$ y como Ω_0 es un subconjunto abierto de Ω en cual f_2 tiene que ser diferente de cero entonces

$\frac{\delta_1}{\delta_2}\in H(\Omega_0)$.

* Otros ejemplos de funciones el cual es holomorfa en todo el plano (la cual es llamada entera) es la función exponencial definida por,

$$\exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

En este caso observamos que la función *exp* es diferenciable en todo punto del plano y que $\exp'(z)=\exp(z)$ existe para cualquier número complejo z.

$$\exp(z)=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+.......$$

$$\exp'(z)=1+z+\frac{z^2}{2!}+.......$$

4.2 Serie de Potencias

De la teoría de serie de potencias asumimos el único caso conocido que para cada serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

le corresponde un número $R \in [0, \infty]$ tal que las series convergen absolutamente y uniformemente en $\bar{D}(a:r)$ para cada $r<R$ y diverge si $z \notin \bar{D}(a;r)$. El radio de convergencia R viene dado por la prueba de la raíz

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to 0} \sup |C_n|^{\frac{1}{n}} .$$

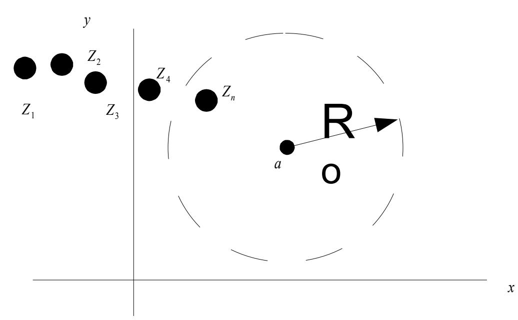

Figura 4.2

Digamos que una función *f* definida en Ω es representable en serie de potencia en Ω si para cada disco $D(a:r) \subset \Omega$ le corresponde una serie de potencias la cual converge a $f(z)$ para todo $Z \in D(a:r)$.

Definición 4.6:

Dada una sucesión de números complejos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ y un número $a\in\mathbb{C}$ consideremos la sucesión de funciones definida por

$$\{c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+...+c_n(z-a)^n\}$$

se representa por

$$\sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$$

y se llama ***serie de potencias centrada en a.*** La sucesión $\{C_n\}$ recibe el nombre de sucesión de coeficientes de la serie.

Definición 4.7:

Una sucesión de funciones $<f_n>$ definidas en un conjunto **E** se dice que ***Converge Puntualmente*** en **E** hacia una función *f*, si para cada ***x*** en **E** tenemos que $f(x)=\lim f_n(x)$; esto es , dado $x\in E$ y $\varepsilon>o,$ existe un N talque para todo $n\geq N$ tenemos $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

Definición 4.8:

Una sucesión de funciones $<f_n>$ definidas en un conjunto **E** se dice que ***Converge Uniformemente*** en **E,** si dado $\varepsilon>o,$ existe un N talque para todo $x\in E$ y todo $n\geq N$ tenemos $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

Teorema 4.1:

Si f es representable por serie de potencias en Ω *, entonces* $f \in H(\Omega)$ *y* f' *es también representable en serie de potencias en* Ω *, en caso si*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n \qquad (1)$$

para $Z \in D(a:r)$ *entonces para esos valores tenemos*

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n C_n (z-a)^{n-1} \quad (2).$$

Prueba:

Si la serie (1) converge en $D(a;r)$, la prueba de la raíz muestra que la serie (2) también converge.

Tomando $a=0$, y sin perder generalidad , denotamos la suma de la serie (2) por $g(z)$, fijamos $w \in D(a:r)$ y elegimos ρ tal que $|w|<\rho<r$

Si $z \neq w$ tenemos

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w) \quad =\sum_{n=0}^{\infty} C_n [\frac{z^n-w^n}{z-w}-n w^{n-1}] \ .$$

La expresión en corchetes se hace 0 si $n=1$ y es

$$(z-w)\sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1} z^{n-k-1} \quad (1)$$

Para $n \geq 2$. Si $|z|<\rho$, el valor absoluto de la suma en (1) es menor que

$$n\frac{(n-1)}{2}\rho^{n-2}$$

A si

$$\left|f(z)-f\frac{(w)}{z-w}-g(w)\right|\leq|z-w|\sum_{n=2}^{\infty}h^2|C_n|\rho^{n-2}\quad . \qquad (2)$$

Ya que $\rho<r$, la ultima serie converge. El lado izquierdo de (2) tiende a 0 si $z\to w$. Esto dice que $f'(w)=g(w)$

~~XXX~~

Corolario 4.1:

Ya que f' satisface la misma hipótesis de f puede ser aplicada a f', esto es si f tiene derivadas de todos los ordenes que cada derivada es representable en serie de potencias en Ω y que

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)....(n-k+1)C_n(z-a)^{n-k} \qquad \textbf{\textit{(3)}}$$

Si la serie de potencia se mantiene por lo tanto dicha serie implica que $k!c_x=f^{(k)}(a)$ con $(k=0.1.2.3....)$ dado que para cada $a\in\Omega$ existe una única sucesión C_n para el cual se mantiene.

Ahora describiremos un proceso en el cual podemos crear funciones que son representables por series de potencias.

4.3 Integral de Riemann Para Funciones de Variable Real con Valores Complejos

Diremos que una función $\varphi:[a,b]\rightarrow\mathbb{C}$ es *integrable Riemann* en el intervalo $[\alpha,\beta]$, y escribiremos $\varphi\in R([\alpha,\beta])$, si las funciones $\Re(\varphi)$ y $\Im(\varphi)$ son integrables Riemann en $[\alpha,\beta]$ (en el sentido que conocemos, ya que son funciones reales de variable real definidas en un intervalo) en cuyo caso definimos la integral de φ en $[\alpha,\beta]$ como el número complejo

$$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\,dt=\int_{\alpha}^{\beta}\Re\,\varphi(t)\,dt+i\int_{\alpha}^{\beta}\Im\,\varphi(t)\,dt$$

Es claro que una condición necesaria para la integrabilidad de φ es la acotación. La integrabilidad se puede caracterizar en los siguientes términos:

4.4 Criterio de Integrabilidad de Lebesgue.

<u>Definición 4.9:</u>

Sea $\varphi:[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbb{C}$ *una función acotada. Entonces* $\varphi\in R([\alpha,\beta])$ *si, y sólo si,* φ *es continua casi por doquier en* $[\alpha,\beta]$ *. En particular, toda función acotada y continua salvo en un número finito de puntos es integrable.*

En lo sucesivo la expresión “ f es integrable” se entenderá como “f es integrable Riemann”.

Indicamos a continuación las propiedades principales de la integral de Riemann de funciones de variable real con valores complejos. Todas ellas se deducen con facilidad de las propiedades correspondientes de la integral de Riemann de funciones reales de variable real que suponemos conocidas.

Teorema 4.2:

Supongamos que μ *es una medida compleja (finita) definida en un espacio de medida* X *,* φ *es una función medible* X, Ω *es un conjunto abierto en el plano el cual no interseca* $\varphi(x)$ *y*

$$f(z) = \int_x \frac{d\mu(\zeta)}{\varphi(\zeta) - z} \qquad z \in \Omega \quad \textit{(1);}$$

entonces f *es representable en serie de potencias en* Ω *.*

Prueba:

Supongamos $D(a; r) \subset \Omega$ .Ya que

$$\frac{|z-a|}{\varphi(\zeta)-a} \leq \left|\frac{z-a}{r}\right| < 1$$

para cada $z \in D(a; r)$ y cada $\zeta \in X$, la serie geométrica

$$\sum_0^\infty \frac{(z-a)^n}{(\varphi(\zeta)-a)^{n+1}} = \frac{1}{\varphi(\zeta - z)} \qquad (2)$$

converge uniformemente en X para cada $z \in D(a;r)$ fijo por lo tanto la serie (2) puede ser sustituida en (1) y $f(z)$ puede ser calculada intercambiando la sumatoria y la integración esto sigue que

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in D(a;r)) \qquad (3)$$

donde

$$C_n = \int_{x} \frac{d\mu(\zeta)}{(\varphi(\zeta)-a)^{n+1}} \qquad (n=0,1,2,3,......) \qquad (4).$$

XXX

NOTA.

La convergencia de la serie $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ en $D(a;r)$ en una consecuencia de la prueba. También diremos que se puede derivar de (4), ya que (4) muestra que

$$|C_n| \leq \frac{|\mu|(X)}{r^{n+1}} \quad ; \quad (n=0,1,2,.....) \quad .$$

4.5 Integración Sobre Caminos

La integración sobre caminos fue el instrumento principal del que se sirvió Cauchy para crear la teoría de funciones analíticas de variable compleja, estableciendo lo que actualmente suele denominarse 'Teoría de Cauchy', para distinguirlo de los enfoques posteriores de Riemann (con una visión más geométrica) y de Weierstrass (basado en los desarrollos locales en serie de potencias). Gracias a la representación (bajo ciertas condiciones) de una función holomorfa mediante una integral dependiente de un parámetro, Cauchy logró probar que, en $\mathbb{C}$, las nociones de holomorfía y analiticidad son las mismas, culminando su obra con lo que el denominó 'Cálculo de Residuos'. De todo esto nos ocuparemos más adelante.

El concepto de integral sobre un camino está muy relacionado con el de integración sobre caminos de formas diferenciales reales de dos variables. Esto hace que los resultados iniciales (y sus demostraciones) sean bastante parecidos a lo ya estudiado en la teoría de funciones de varias variables reales.

Nuestro mayor objetivo en este capitulo es el reciproco de el ***Teorema 4.1***: *Cada* $f \in H(\Omega)$ *es representable por serie de potencias en* Ω.

La ruta mas corta es mediante el teorema de Cauchy, el cual nos lleva a una importante representación integral de funciones holomorfas.

En esta etapa es requerida la teoría de la integración compleja la cual sera desarrollada y utilizada de la forma mas simple posible.

4.6 Curvas en el Plano

Definición 4.10:

Si X es un espacio topológico, una ***curva*** en X es un mapeo continuo en γ de un intervalo compacto $[\alpha,\beta]\subset R^1$ en X ; con $\alpha<\beta$.

Definición 4.11:

Una curva en $\mathbb{C}$ es una aplicación continua $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$. Llamamos a $[\alpha,\beta]$ el ***intervalo parámetro*** de γ y denotamos el ***rango*** de γ por $\gamma*$ Hay que distinguir entre la curva y su imagen (también llamada traza o soporte), que notaremos por $\gamma^*=\gamma([\alpha,\beta])$.

Por lo tanto γ es un mapeo en $\gamma*$ es el conjunto de todos los puntos $\gamma(t)$ para $\alpha\leq t\leq\beta$. Es claro que γ^* es un conjunto compacto y conexo.

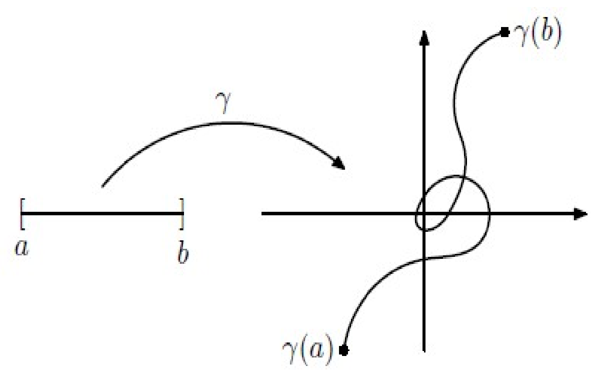

Figura 4.3

Definición 4.12:

Si el ***punto inicial*** $\gamma(\alpha)$ de γ coincide con el ***punto final*** $\gamma(\beta)$, llamamos a γ una ***curva cerrada***.

Definición 4.13:

Un ***camino*** es una curva continuamente diferenciable en el plano esto es decir es de clase C^1 . Más explícitamente un camino con intervalo parámetro $[\alpha, \beta]$ es una función compleja continua γ en $[\alpha, \beta]$.

Definición 4.14:

Un ***camino cerrado*** es una curva cerrada que también es un camino.

Definición 4.15:

Se dice que el arco γ es ***suave*** si la función $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$ no se anula y es continua en $\alpha \le t \le \beta$.

Definición 4.16:

Un arco ***suave por partes (spp)*** consiste en un número finito de arcos suaves unidos por sus extremos. Si γ es un arco spp, entonces $x(t)$ y $y(t)$ son continuas, pero sus derivadas $x'(t)$ y $y'(t)$ son continuas por partes.

<u>Definición 4.17:</u>

Una curva $\gamma:[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbb{C}$ es ***regular a trozos*** si existe una partición de muchos puntos finitos tales que $\alpha=s_0<s_1<....<s_n=\beta$, y con la restricción de γ a cada intervalo $[s_{(j-1)},s_j]$ es regular para $1\leq j\leq n$ ya que existe una derivada continua en el intervalo $[s_{(j-1)},s_j]$. Notemos que en los puntos $s_1,\ldots,s_{(n-1)}$ las derivadas γ de izquierda a derecha puede cambiar.

<u>Definición 4.18:</u>

Sea γ *: z = z (t),* $\alpha\leq t\leq\beta$ un arco suave, y $f(z)=u+iv$ continua en γ. Así la **integral de línea de *f* sobre γ** estará dada por

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt$$

$$=\int_\alpha^\beta [u(z(t))x'(t)-v(z(t))y'(t)]dt+i\int_\alpha^\beta [u(z(t))x'(t)-v(z(t))y'(t)]dt$$

La integral de línea sobre un arco γ spp se obtiene al aplicarse la definición anterior a un número finito de intervalos cerrados.

4.7 Propiedades de las Integrales Sobre Contornos

* Ahora supongamos γ es un camino y f es una función continua en $\gamma*$. La integral de f sobre γ es definida como una integral sobre el ***intervalo parámetro*** $[\alpha,\beta]$ de γ :

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz=\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \quad .$$

* Sea φ un mapeo uno a uno continuamente diferenciable de un intervalo $[\alpha_1,\beta_1]$ en $[\alpha,\beta]$ tal que $\varphi(\alpha_1)=\alpha$, $\varphi(\beta_1)=\beta$ y haciendo $\gamma_1=\gamma\circ\varphi$. Entonces γ_1 en un camino con un intervalo parámetro $[\alpha_1,\beta_1]$; la integral de f sobre γ_1 es

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(t))\gamma'_1(t)\,dt \quad =\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds \quad ,$$

aquí se muestra que la “reparametrización ” no han cambiado la integral.

* En la siguiente propiedad se muestran dos caminos los cuales se concluye que si

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=\int_{\gamma} f(z)\,dz$$

Cuando lo anterior se mantenga para un par de caminos γ y γ_1 (y para todo

f), consideramos γ y γ_1 , como ***equivalentes***.

Es conveniente ser capaz de reemplazar un camino por uno equivalente es decir es poder utilizar el intervalo parámetro a voluntad .

* Si el punto final de γ_1 coinciden con el punto inicial de γ_2 , localizamos sus intervalos parámetros tal que γ_1 y γ_2 unidos forman un camino γ , con la siguiente propiedad que

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

para cada f continua en $\gamma * = \gamma_1 * \cup \gamma_2 *$.

* Ahora supongamos que $[0,1]$ es el intervalo parámetro de un camino γ y $\gamma_1(t) = \gamma(1-t)$, $0 \le t \le 1$ a esto se le llama un ***camino usual***.

* Dada una poligonal de vértices $z_0, z_1, \ldots, z_n$.

Es la curva

$$[z_0, z_1] \dot{+} [z_{1,} z_2] \dot{+} \ldots \dot{+} [z_{n-1}, z_n]$$

y la representaremos por $[z_0, z_1, \ldots, z_n]$. La poligonal también es un camino, es decir, es una curva regular a trozos.

Definición 4.19:

Llamamos γ , "***el camino a" o "punto a"*** γ por la siguiente razón:

Para cualquier función f continua en $\gamma_1{*}=\gamma{*}$, tenemos

$$\int_0^1 f(\gamma_1(t))\gamma_1(t)\,dt=-\int_0^1 f(\gamma(1-t))\gamma'(1-t)\,dt$$

$$=-\int_0^1 f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds \quad ,$$

a si que

$$\int_{\gamma_1} f=-\int_{\gamma} f \qquad .$$

Definición 4.20:

Si $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ es un camino, entonces γ está definida y es continua en $[\alpha,\beta]$ excepto en un conjunto finito de puntos de $]\alpha,\beta[$ en los cuales tiene límites laterales distintos, dándole a γ' en cada uno de esos puntos el valor del límite por la izquierda (aunque esto es totalmente irrelevante, podemos darle cualquier valor) es claro que γ' es acotada en $[\alpha,\beta]$ y tiene un número finito de discontinuidades, luego es integrable en $[\alpha,\beta]$. Se define la ***longitud*** de γ de donde se obtiene la siguiente desigualdad

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right|\leq\|f\|_{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\|\gamma'(t)\|\,dt$$

De donde $\|f\|_{\infty}$ es el máximo de $|f|$ en $\gamma{*}$ y la ultima integral es por definición ***la longitud*** de γ .

A continuación se les plantean algunos casos especiales que se pueden tomar a consideración:

4.7.1 Casos Especiales

(a)

Si a es un número complejo $r>0$, el camino definido por

$$\gamma(t)=a+r\mathrm{e}^{it} \qquad (0\leq t\leq 2\pi) ,$$

es llamado el ***circulo positivo orientado*** con centro en a y radio r ; tenemos.

$$\int_{\gamma} f(z)dz=\int_{0}^{2\pi} f(a+re^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta .$$

y el de γ es $2\pi r$ como se esperaba es la longitud de la función.

(b)

Si a y b son números complejos, el camino γ dado por

$$\gamma(t)=a+(b-a)t \qquad (0<t<1) .$$

Es el intervalo orientado $[a,b]$, y su longitud es $|b-a|$, y

$$\int_{[a,b]} f(z)dz=(b-a)\int_{0}^{1} f(a+(b-a)t)\,dt .$$

Si

$$\gamma_1(t)=\frac{\alpha(\beta-t)+b(t-\alpha)}{\beta-\alpha} \qquad (\alpha\leq t\leq\beta)$$

obtenemos un camino equivalente, el cual lo seguimos denotando por $[a,b]$, el camino opuesto a $[a,b]$ es $[b,a]$.

(c)

Sea $\{a,b,c\}$ una tripleta ordenada de números complejos y sea

$$\Delta=\Delta(a,b,c) \quad .$$

El triángulo con vértices en a,b,c (Δ es el conjunto conexo el cual contiene a a,b y c) y se define

$$\int_{\sigma\Delta} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f \qquad \textbf{(1)}$$

Para cualquier f continua en los limites de Δ consideramos (1) tiene la definición en sus lados izquierdos. O consideremos ¿ Δ ? como un camino obtenido por las uniones $[a,b]$ a $[b,c]$ a $[c,a]$, como esta indicado en la definición 4.1, en cual como (1) que fácil mente muestra ser cierta .

Si $\{a,b,c\}$ es permutado cíclicamente, observamos que (1) que el lado izquierdo de (1) no es afectado.

Si $\{a,b,c\}$ es remplazado $\{a,b,c\}$ entonces el lado izquierdo de (1) cambia de signo.

Luego de los casos especiales anteriores, ahora vamos a ver un teorema el cual es de mucha importancia en la teoría de funciones holomorfas.

4.8 Analiticidad de las Funciones Holomorfas

El siguiente resultado es la clave para probar si una función es analítica. Antes de ver la demostración observemos que esta es una "fórmula de representación" pues representa los valores de una función holomorfa en todo disco mediante una integral que depende únicamente de los valores de la función en la frontera de ese disco.

Destaquemos además que el radio R que tomamos es cualquiera que cumpla la condición, la fórmula dada no depende de la circunferencia que tomemos.

Teorema 4.3:

Sea γ *un camino cerrado, sea* Ω *el complemento de* γ^* *(relativo al plano) y definimos*

$$Ind_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad (z \in \Omega) \ . \qquad (1)$$

entonces Ind_{γ} *es una función entero-evaluada en* Ω *la cual es constante en cada componente de* Ω *y la cual es* 0 *en las componentes no acotadas de* Ω *.*

Decimos $Ind_{\gamma}(z)$ el indice de z con respecto a γ . Notemos que

$\gamma *$ es compacto, por lo tanto esta en un disco acotado D el cual su complemento D^c es conexo, esto es D^c esta en algún componente de Ω. Esto muestra que Ω tiene precisamente un componente no acotado.

Prueba:

Sea $[\alpha, \beta]$ el intervalo parámetro de γ, fijamos $(z \in \Omega)$ entonces,

$$Ind\, \gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \quad . \qquad (2)$$

Ya que $\frac{w}{2\pi i}$ es un entero si $e^w = 1$, la primera afirmación de este teorema dice que $Ind\, \gamma(z)$ es un entero, es equivalente a la afirmación que $\gamma(\beta) = 1$, donde

$$\varphi(t) = \exp\left\{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds\right\} \qquad \alpha \leq t \leq \beta \qquad (3)$$

derivando lo anterior tenemos que

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \qquad \mathbf{(4)}$$

excepto posiblemente en un conjunto finito *S* donde γ es no diferenciable.

Por lo tanto $\frac{\varphi}{(\gamma - z)}$ es una función continua en $[\alpha, \beta]$ la cual su derivada es cero en $[\alpha, \beta] - S$. ya que *S* es finito, $\frac{\varphi}{(\gamma - z)}$ es constante en $[\alpha, \beta]$; y ya que $\gamma(\beta) = 1$, obtenemos que

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}=\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} \qquad (\alpha\leq t\leq\beta) \qquad (5)$$

Ahora usamos la afirmación que γ es un camino cuando es decir que $\gamma(\beta)=\gamma(\alpha)$; (5) muestra que $\varphi(\beta)=1$ y esto, es como observamos arriba, implica que $Ind\,\gamma(z)$ es un entero.

Por el ***Teorema 4.2*** ; (1) muestra que el $Ind\,\gamma\in H(\Omega)$. La imagen de un conjunto conexo bajo un mapeo continuo es conexo y ya que $Ind\,\gamma$ es una función entera-evaluada. $Ind\,\gamma$ Debería de ser constante en cada componente de Ω .

Finalmente, (2) muestra que $|Ind\,\gamma(z)|<1$ si $|z|$ es infinitamente grande esto implica que $Ind\,\gamma(z)=0$ es el componente no acotado de Ω .

XXX

De lo anterior podemos observar que si $\lambda(t)$ denota la integral en (3), la prueba anterior muestra que $2\pi\,Ind\,\gamma(z)$ es un incremento neto en la parte imaginaria de $\lambda(t)$, como t va desde α hasta β , y este es el mismo incremento neto de el argumento de $\gamma(t)-z$.(No hemos definido “argumento” y no necesitamos definirlo). Si dividimos este incremento por 2π obtenemos “el número de veces que γ se enrolla alrededor de z ”, y explica por que el termino “ número envolvente” es frecuente mente cuando para el indice.

En virtud de la prueba anterior es que establece la propiedad principal, de el indice en ninguna referencia de (múltiple - evaluado) argumento de números complejos.

<u>Teorema 4.4:</u>

Si el camino γ *es el circulo positivamente orientado con centro en* a *y radio en* r *entonces*

$$Ind\,\gamma(z)=\begin{Bmatrix} 1 & si|z-a|<r \\ 0 & si|z-a|>r \end{Bmatrix} \quad .$$

Prueba:

Tomando γ como en la sección (a) de los casos de las funciones especiales y por el ***Teorema 4.3***, esto es suficiente para calcular el $Ind\,\gamma$ (a), muestra que es igual a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z-a}=\frac{r}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}(r e^{it})^{-1}e^{it}\,dt=1 \quad .$$

XXX

<u>*4.9 Teorema Local de Cauchy*</u>

Existen muchas formas del teorema de Cauchy. Todas ellas afirman que si γ es un camino cerrado o circulo en Ω , y si γ y Ω satisfacen ciertas condiciones topológicas, entonces la integral de cada $f\in H(\Omega)$ sobre γ es 0 . Sería necesario comprobar que su integral a lo largo de *todo* camino cerrado es cero, lo que no parece nada fácil en la práctica. Afortunadamente, hay teoremas que garantizan que bajo ciertas condiciones la integral de una función a lo largo de cualquier camino cerrado es nula. Estos teoremas reciben el nombre de teoremas de Cauchy. En ellos se considera un conjunto abierto y un camino cerrado en su dominio de definición.

Primero derivamos una versión simple local de el Teorema de Cauchy para los conjuntos convexos el cual es suficiente para obtener muchas aplicaciones. La forma mas global de este teorema será establecida en capítulos siguientes.

Teorema 4.5:

Supongamos $F \in H(\Omega)$ *y* F' *es continua en* Ω . *entonces*

$$\int_{\gamma} F'(z)\, dz = 0$$

para cada camino cerrado γ *en* Ω .

Prueba:

Si $[\alpha, \beta]$ es el intervalo parámetro de γ el teorema fundamental del cálculo muestra que,

$$\int_{\gamma} F'(z)\, dz = \int_{\alpha}^{\beta} F'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = 0 \quad .$$

ya que los caminos $\gamma(\beta) = \gamma(\alpha)$.

XXX

Corolario 4.2:

Ya que z^n *es la derivada de* $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ *para todo los enteros* $n \neq -1$ *, tenemos que*

$$\int_{\gamma} z^n dz = 0$$

para cada camino cerrado γ *si* $n = 0, 1, 2, \ldots..$ *, y para aquellos caminos cerrados* γ *para los cuales* $0 \notin \gamma^*$ *Sin* $n = -2, -3, -4, \ldots$.

Para el caso $n = -1$ ya fue resulto en el teorema 4.3.

Teorema 4.6 :(Teorema de Cauchy para un Triángulo)

Supongamos que Δ *es un triángulo cerrado en un conjunto abierto del plano* Ω *,* $p \in \Omega$ *,* f *es continua en* Ω *, y* $f \in H(\Omega - \{p\})$.

Entonces

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0 \quad . \qquad (1)$$

Por la definición de $\partial \Delta$ nos referimos a la sección (c) de los casos especiales. Observamos luego que nuestra hipótesis realmente implica que $f \in H(\Omega)$ es decir que el punto excepcional p no es realmente excepcional.

Como sea, la forma de arriba de el teorema sera útil en la prueba de la fórmula de Cauchy.

Prueba:

El objetivo es probar que J = 0. Para esto consideremos los puntos medios de los lados del triángulo.

Caso 1

Asumimos primero que $p \notin \Delta$. Sea a, b y c los vértices de Δ sea $'a, b'$ y c' los puntos medios de $[b, c]$, $[c, a]$ y $[a, b]$ los cuales son

$$a' = \frac{b+c}{2} \quad , \quad b' = \frac{a+c}{2} \quad \text{y} \quad c' = \frac{a+b}{2} \quad .$$

Luego tenemos respectivamente en tripletas ordenadas $\{a, c', b'\}$, $\{b, a', c'\}$, $\{c, b', a'\}$, $\{a', b', c'\}$. (2)

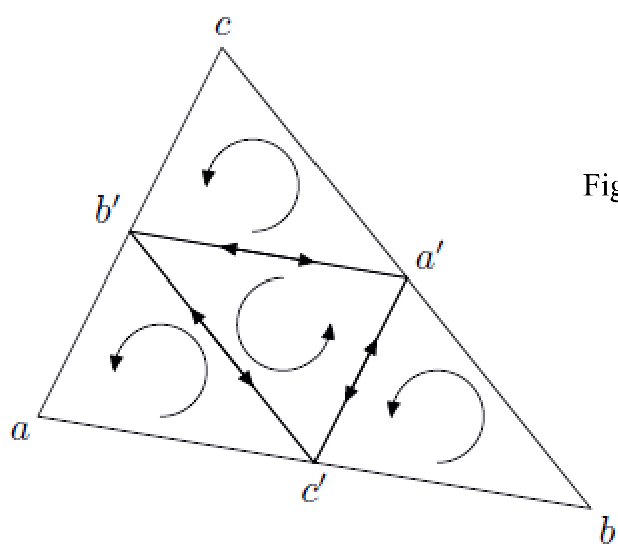

Figura 4.4

En la figura 4.4 se muestran los camino que deben de llevar los flujos de las integrales para poder probar que la integral sobre el triángulo es cero.

Si J es el valor de la integral (1), se convierte en la integral sobre el contorno de el conjunto de puntos de los vértices y los puntos medios de la forma de los lados del triángulo de la siguiente manera

$$\int_{\sigma\Delta} f(z)dz = \int_{[a,b]} f(z)dz + \int_{[b,c]} f(z)dz + \int_{[c,a]} f(z)dz$$

de manera que

$$J = \sum_{j=1} \int_{\partial\Delta^j} f(z)dz \qquad (3)$$

El valor absoluto de al menos una de las integrales en la derecha de (3) es por lo tanto al menos $\left|\frac{J}{4}\right|$, llamamos al triángulo correspondiente Δ_1, repitiendo el argumento con Δ_1 en lugar de Δ, y así sucesivamente, obtenemos la siguiente ecuación.

$$Diametro(\Delta_n) = \frac{1}{2} Diametro(\Delta_{n-1}) = \frac{1}{2^n} Diametro(\Delta)$$

Representándolo en forma de flujos para formar nuestros caminos en la integral de línea nos queda de la siguiente forma

$$L(\gamma_n)=\frac{1}{2}L(\gamma_{n-1})=\frac{1}{2^n}L(\gamma)$$

$$|J_{n-1}|\leq 4|J_n|$$

Podemos observar que esto generó una sucesión de triángulos Δ_n tal que $\Delta\supset\Delta_1\supset\Delta_2\supset......$, tal que la longitud de $\partial\Delta_n$ es $2^{-n}L$, si L es la longitud de $\partial\Delta$, y tal que

$$|J|\leq 4^n\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| \qquad (n=1,2,3,...) \qquad (4)$$

Existe un (único) punto z_0 el cual los triángulos Δ_n . Tienen en común ya que Δ es compacto, $z_0\in\Delta$ así f es diferenciable en z_0 .

Sea $\varepsilon>0$ dado. Existe un $r>0$ tal que

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|\leq\varepsilon|z-z_0| \qquad (5)$$

siempre que $|z-z_0|<r$, y existe un n tal que $|z-z_0|<r$ para todo $z\in\Delta_n$ .para este n también tenemos $|z-z_0|\leq 2^{-n}L$ para todo $z\in\Delta_n$ .Por el teorema 4.5 tenemos que

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n}[f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)]dz \qquad (6)$$

esto implica que

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right|\leq\varepsilon(2^{-n}L)^2 \qquad (7)$$

Y así ahora (4) muestra que $|J|\leq\in L^2$. Por lo tanto $J=0$ si $p\notin\Delta$.

Caso 2

Asumamos lo siguiente, si p es un vértice de Δ y decimos $p=a$.

Si a, b y c son colineales entonces (1) es trivial , para cualquier f continua. Si no, escogeremos puntos $x \leq [a, b]$ y $y \leq [a, c]$, ambos cerrados en a , y observamos la integral de f sobre $\partial \Delta$ en la suma de las integrales sobre los limites del triángulo $\{a, x, y\}$, $\{x, b, y\}$, y $\{b, c, y\}$. esta ultimas dos son 0 , ya que las integral sobre $\partial \Delta$ es la suma de las integrales sobre $[a, x]$, $[x, y]$ y $[y, a]$ y ya que estos intervalos pueden ser arbitrariamente cortas y f es acotada en Δ , obtenemos del número (1).

Caso 3

Finalmente, si p es un punto arbitrario de Δ , aplicamos el siguiente resultado a $\{a, b, p\}$, $\{b, c, p\}$, y $\{c, a, p\}$ para completar la prueba.

XXX

Un abierto Ω es un *dominio estrellado* respecto de un punto $z_0 \in \Omega$ si el segmento que une z_0 con cualquier otro punto de Ω se queda dentro de Ω , esto es, $[z_0, z]^* \subset \Omega$ para todo $z \in \Omega$. Por ejemplo un disco es un dominio estrellado respecto cualquiera de sus puntos.

Por supuesto, cualquier conjunto convexo es un dominio estrellado respecto de cualquiera de sus puntos, pero hay dominios estrellados que no son convexos

<u>Teorema 4.7: Teorema de Cauchy en un Conjunto Convexo (Dominios Estrellados).</u>

Supongamos Ω *es un conjunto abierto conexo,* $p \in \Omega$ *,* f *es continua en* Ω *, y* $f \in H(\Omega - \{p\})$ *, entonces* $f = F'$ *para algún* $f \in H(\Omega)$ *.Por lo tanto*

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0 \qquad (1)$$

para cada camino cerrado γ *en* Ω *.*

Prueba:

Fijemos $a \in (\Omega)$. Ya que Ω conexo, Ω contiene la línea recta de el intervalo de a a z $z \in (\Omega)$, así definimos

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)\,d\xi \qquad z \in (\Omega) \quad . \quad (2)$$

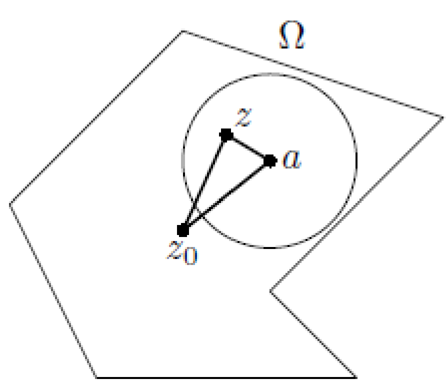

Figura 4.5

Para cualquier z y $z_0 \in (\Omega)$, el triángulo con vértices en a , z_0 y z esta en Ω , por lo tanto $F(z)-F(z_0)$ es la integral sobre $[z_0, z]$ por el teorema 4.6. fijando z_0 , entonces obtenemos

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)=\frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]}[f(\xi)-f(z_0)]\,d\xi \quad .$$

Si $z \neq z_0$. Dado $\varepsilon > 0$, la continuidad de f en z_0 muestra que existe $\delta > 0$ tal que $|f(\xi)-f(z_0)| < \varepsilon$ si $|\xi - z_0| < \delta$; por lo tanto el valor absoluto de el lado izquierdo (3) es menor que ε tan rápido como $|z-z_0| < \delta$.

En particular, $F \in H(\Omega)$, ahora (1) sigue del teorema 4.5.

XXX

<u>Teorema 4.8 :Fórmula de Cauchy en un conjunto convexo.</u>

Supongamos γ *es un camino cerrado en un conjunto conexo abierto* Ω *,* $f \in H(\Omega)$ *. si* $z \in (\Omega)$ *y* $z \notin \gamma^*$ *, entonces*

$$f(z).ind_{\gamma}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \quad . \qquad (1)$$

El caso de mayor interés es, por supuesto cuando, $ind_{\gamma}(z)=1$.

Prueba :

Fijamos z tal que la condición d arriba mantiene y define

$$g(\xi)=\left\{\begin{matrix} \dfrac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z} & si\, \xi \in \Omega\, , \xi \neq z\, , \\ f'(z) & si\, \xi = z \end{matrix}\right\} \qquad (2)$$

Entonces g satisface la hipótesis del teorema 4.7 Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} g(\xi)\, d\,\xi = 0 \quad . \ (3)$$

Si sustituimos (2) en (3) obtenemos (1).

~~XXX~~

El teorema concierne la representabilidad de funciones holomorfas en serie de potencias como una consecuencia sencilla del teorema 4.8, si tomamos un circulo de γ .

Teorema 4.9:

Para cada conjunto abierto Ω en el plano, cada $f \in H(\Omega)$ es representable por serie de potencias en Ω .

Prueba:

Supongamos $f \in H(\Omega)$ y $D(a\,;R) \subset (\Omega)$. Si γ es un circulo positivamente orientado con centro a y radio $r<R$, la conexidad de $D(a\,;R)$ nos permite aplicar el teorema 4.8; por teorema 4.4 obtenemos

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \qquad (z\in D(a\,;R)) \qquad (1)$$

Pero ahora podemos aplicar el teorema 4.5 con $x=[0{,}2\pi]$, $\varphi=\gamma$, y $d\mu(t)=f(\gamma(t)\gamma'(t))dt$ y concluimos que existe una sucesión $\{C_n\}$ tal que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n \qquad (z\in D(a\,;r)) \qquad (2)$$

La unicidad de $\{C_n\}$ muestra que la misma serie de potencia es obtenida para cada $r<R$ (tanto como a es fijado). por lo tanto la representación (2) es valida para cada $z\in D(a\,;R)$ y la prueba se completa.

XXX

<u>Corolario 4. 3:</u>

Si $f\in H(\Omega)$ entonces $f'\in H(\Omega)$.

Prueba:

Combinar el teorema 4.1 y 4.9.

XXX

El teorema de Cauchy tiene un reciproco muy útil.

<u>Teorema 4. 10:Teorema de Morera</u>

Supongamos f *es una función continua Compleja en un conjunto abierto* Ω *tal que*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \quad .$$

para cada triángulo cerrado $\Delta \subset \Omega$ *. Entonces* $f \in H(\Omega)$ *.*

Prueba:

Sea v un conjunto conexo abierto en Ω . Así como en la prueba del teorema 4.7 podemos construir $f \in H(v)$ tal que $F' = f$. ya que las derivadas de funciones holomorfas son holomorfas (teorema 4.9) tenemos que $f \in H(v)$ para cada conexo abierto $v \subset \Omega$, por lo tanto $f \in H(\Omega)$.

XXX

CAPITULO 5

“Representación en Serie de Potencias y Tma. de Mapeo Abierto”

5.1 Representación de Serie de Potencias

En este capítulo vamos a ver que en algunos aspectos las funciones holomorfas se comportan localmente de forma parecida a las funciones polinómicas y que cada función holomorfa es localmente la suma de una serie de potencias convergente, estas tienen grandes e interesantes consecuencias.. Ello se debe, naturalmente, a que las funciones holomorfas son analíticas y, por tanto, localmente, son límites uniformes de sucesiones de funciones polinómicas (sus polinomios de Taylor). Los resultados principales de este capítulo son generalizaciones para funciones holomorfas de resultados conocidos para funciones polinómicas. Por ejemplo, es sabido que si dos funciones polinómicas de grado n coinciden en un punto junto con sus derivadas hasta la de orden n inclusive, entonces dichas funciones son idénticas. La generalización para funciones holomorfas de este resultado afirma que si dos funciones holomorfas en un dominio coinciden ellas y todas sus derivadas en un punto entonces ambas funciones son idénticas.

El estudio del módulo de una función holomorfa lleva de forma natural a introducir las funciones subarmónicas. Los resultados hasta aquí obtenidos para las funciones holomorfas se aplican para probar con comodidad importantes resultados para funciones armónicas.

Teorema 5.1:

Supongamos Ω *es una región* $f \in H(\Omega)$ *y* $Z(f)=\{a \in \Omega : f(a)=0\}$.

Entonces cualquier de los dos $Z(f)=\Omega$ *o* $f(z)$ *no tiene punto limite en* Ω *. En el caso anterior este corresponde a cada* $a \in Z(f)$ *un único entero positivo* $m=m(a)$ *tal que*

$$f(z)=(z-a)^m g(z) \qquad z \in \Omega \ , \qquad (1)$$

donde $g \in H(\Omega)$ *y* $g(a) \neq 0$ *; además ,* $Z(f)$ *es a lo sumo contable.*

(Hacemos referencia a que estas regiones son conjuntos abiertos conexos.)

El entero m es llamado el orden de el cero cual f tiene en el punto a . Claramente $Z(f)=\Omega$ si f es idénticamente cero en Ω . Llamamos a $Z(f)$ el conjunto cero de f .

Análogamente resulta por supuesto por el conjunto de $\alpha-$ *puntos* de f es decir $f-\alpha$, donde α es cualquier número Complejo.

Prueba:

Sea A el conjunto de todos los puntos limites de $Z(f)$ en Ω . ya que f es continua , $A \subset Z(f)$.

Fijamos $a \in Z(f)$, y encojemos $r>0$ así que $D(a;r) \subset \Omega$.

Por el teorema 4.9

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n \qquad (z \in D(a;r)) \qquad (2)$$

Hay ahora dos posibilidades. Ninguna de todas C_n son 0, en el caso de $D(a;r) \subset A$ y a es un punto interior de A, o existe el entorno m más pequeño [necesariamente positivo, ya que $f(a)=0$] tal que $C_m \neq 0$. En este caso, definimos

$$g(z)=\begin{cases} (z-a)^{-m} f(z) & (z \in \Omega - \{a\}), \\ C_n & z=a \end{cases} \qquad (4)$$

entonces (1) mantiene. Esto es claro que $g \in H(\Omega - \{a\})$ pero (2) implica

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} C_{m+k} (z-a)^k \qquad (z \in (a;r)) \quad . \qquad (5)$$

Por lo tanto $g \in H(D(a;r))$, así actualmente $g \in H(\Omega)$.

Más aún $g(a) \neq 0$, y la continuidad de g no es cero. Por lo tanto de esta manera a es un punto aislado de $Z(f)$ por (1).

Si $a \in A$, por lo tanto el primer caso debería ocurrir. Así A es abierto Si $B=\Omega - A$, es claro de la definición de A como conjuntos de puntos limites que B es abierto. Dado que Ω es la unión de conjuntos abiertos disjuntos A y B. ya que Ω es conexo, si $A=\Omega$, tenemos cualquiera de los dos casos, es el caso $Z(f)=\Omega$ o $A=\emptyset$.

En el caso más reciente, $Z(f)$ tiene a lo sumo muchos puntos limites en cada subconjunto compacto de Ω, ya que Ω es $\sigma - compacto$ $Z(f)$ es a lo sumo contable.

XXX

Corolario 5.1:

Si f y g son funciones holomorfas en una región Ω y si $f(z)=g(z)$ para todo z en algún conjunto el cual tiene un punto limite en Ω, entonces $f(z)=g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

En otras palabras, una función holomorfa en una región Ω esta determinado por sus valores de cualquier conjunto el cual tiene puntos limites Ω. Este es un importante teorema de unidad.

Debemos de tener mucho cuidado ya que el teorema falla si dejamos de asumir que Ω es conexo: si $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$, y Ω_0 y Ω_1, son conjuntos abiertos disjuntos, hacemos $f=0$ en Ω_0 y $f=1$ en Ω_1.

Definición 5.1

*Si $a \in \Omega$ y $f \in H(\Omega - \{a\})$ entonces f se dice que tiene una singularidad aislada en el punto a. Si f puede ser definida en a como la función extendida es holomorfa en Ω, la singularidad se dice que es **removible**.*

Teorema5.2:

Supongamos $f \in H(\Omega - \{a\})$ *y* f *es acotada en* $D'(a;r)$ *, para algún* $r > 0$ *. Entonces* f *tiene una singularidad removible en* a *.*

Llamaremos $D'(a;r) = \{z : 0 < |z-a| < r\}$ *.*

Prueba:

Definamos $h(a) = 0$ y $h(z) = (z-a)^2 f(z)$ en $\Omega - \{a\}$. Muestra que $h'(a) = 0$. ya que h es evidentemente diferenciable en cualquier otro punto de Ω , tenemos $h \in H(\Omega)$, así

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n (z-a)^n \qquad (z \in D(a;r)) \quad .$$

Obtenemos la extensión holomorfa de f haciendo $f(a) = C_2$, entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2} (z-a)^n \qquad (z \in D(a;r)) \quad .$$

~~XXX~~

Teorema 5.3:

Si $a \in \Omega$ *y* $f \in (\Omega - \{a\})$ *, entonces uno de los siguientes tres casos debe ocurrir :*

(a) f *tiene una singularidad removible en* a *.*

(b) Hay números Complejos $C_{1,}.....,C_m$ *don de* m *es un entero positivo y* $C_n \neq 0$ *, tal que*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{C_k}{(z-a)^k}$$ *tiene una singularidad removible en* a .

(c) *Si* $r>0$ *y* $D(a;r)\subset\Omega$ *entonces* $f(D'(a;r))$ *es denso en el plano.*

En el caso (b), f se dice tener un polo de orden m en a . La función

$$\sum_{k=1}^{m} C_k(z-a)^k \quad ,$$

es un polinomio en $(z-a)^{-1}$, es llamado la parte principal de f en a . Esto es claro en esta situación $|f(z)|\to\infty$ que cuando $z\to a$.

En caso (c) f se dice que tiene una singularidad esencial en a . Un enunciado equivalente a (c) es que cada número Complejo w le corresponde una sucesión $\{z_n\}$ tal que $z_n\to a$ y $f(z_n)\to w$ cuando $n\to\infty$.

Prueba:

Supongamos que c) falla. Entonces existe $r>0$, $\delta>0$ y un número Complejo w tal que $|f(z)-w|>\delta$ en $D'(a;r)$. definimos

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-w} \qquad (z\in D') \qquad (1)$$

entonces $g\in H(D')$ y $|g|<\dfrac{1}{\delta}$ por el teorema 5.2 g extiende a una función holomorfa en D . Si $g(a)\neq 0$, (1) muestra que f es acotada en $D'(a;\rho)$ para algún $\rho>0$. Por lo tanto (a) se conserva, por el teorema 5.2.

Si g tiene un cero de orden $m \geq 1$ en a, el teorema anterior muestra que

$$g(z) = (z-a)^m g_1(z) \qquad z \in D \qquad (2)$$

donde $g_1 \in H(D)$ y $g_1(a) \neq 0$. También g_1 no tiene cero en D' por (1)

hacemos $h = \frac{1}{g_1}$ en D. Entonces $h_1 \in H(D)$, no tiene ceros en D y

$$f(z) - w = (z-a)^{-m} h(z) \qquad z \in D' \qquad (3)$$

Pero tiene una expansión de la forma.

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \qquad z \in D \qquad (4)$$

Con $b_0 \neq 0$, ahora (3) muestra que (b) mantiene, con $C_k = b_{m-k}$, $k = 1, \ldots, m$.

Esto completa la prueba.

~~XXX~~

Ahora explotaremos el caso de que la restricción de una serie de potencia $\sum C_n (z-a)^n$ a un circulo con centro en a es una serie trigonométrica.

Teorema 5.3:

Si $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n \qquad (z \in D(a;R)) \qquad (1)$$

y si $0 < r < R$, *entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n^2| r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})^2| \, d\theta \ . \qquad (2)$$

Prueba:

Tenemos

$$f(a+re^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} \qquad (3)$$

para $r<R$, la serie (3) converge uniformemente en $[-\pi,\pi]$. Por lo tanto

$$c_n r^n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+re^{i\theta})\mathrm{e}^{-in\theta}\,d\theta \qquad (n=0,1,2,......) \qquad (4)$$

~~XXX~~

A partir de las desigualdades de Cauchy es fácil probar el siguiente resultado conocido como teorema de Liouville, aunque fue Cauchy el primero en establecerlo

<u>Teorema 5.4: Teorema de Liouville:</u>

Cada función entera acotada es constante. Decimos que una función es entera si es holomorfa en todo el plano.

Esta función es llamada entera si es holomorfa en todo el plano complejo.

Prueba:

Supongamos que f es entera $|f(z)|<M$ para todo z y

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ para todo z.

Por el teorema 5.3 ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} < M^2$$

para todo r , lo cual es posible solo si $c_n = 0$ para todo $n \geq 1$.

~~XXX~~

<u>Teorema 5.5: Teorema del módulo Máximo:</u>

Supongamos Ω *en una región,* $g \in H(\Omega)$ *y* $\bar{D}(a;r) \subset (\Omega)$ *entonces*

$$|f(a)| \leq max_\theta \, |f(a + r e^{i\theta})| \qquad \text{(1)}$$

igualmente ocurre en (1) si y solo si f *es constante en* Ω .

Consecuentemente $|f|$ no tiene un máximo local en cualquier punto de Ω hacemos que f sea constante.

Prueba:

Asumimos que $|f(a + r e^{i\theta})| \leq |f(a)|$ para todo real θ . En la notación del teorema 5.3 y se sigue entonces que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leq |f(a)|^2 = |c_0|^2 \quad .$$

Por lo tanto $c_1 = c_2 = c_3 = ... = 0$, lo cual implica que: $f(z) - f(a)$ en $D(a;r)$

Ya que Ω es conexo. El teorema 5.1 muestra que es constante en Ω .

~~XXX~~

Corolario 5.2 :

Bajo la misma hipótesis,

$$|f(a)| \geq min_{\theta} |f(a+r e^{i\theta})| \qquad (2)$$

si f no es cero en $D(a;r)$.

Prueba:

Si $f(a+r e^{i\theta})=0$ para algún θ entonces (2) es obvio. En el otro caso, existe una región Ω_0 que contiene $\bar{D}(a;r)$ y en cual f no es cero; por lo tanto (1) puede ser aplicada a $1/f$ y (2) lo sigue.

XXX

Teorema 5.6:

Si n *es un entero positivo y* $p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+......+a_1 z+a_0$ *, donde* $a_{0,}....,a_1$ *, son números complejos, entonces* p *tiene precisamente* n *ceros en el plano.*

Por supuesto, estos ceros están cortados de acuerdo a una multiplicidad: un cero de orden m , dice , es contado como m ceros.

Este teorema contiene el cero que el campo Complejo es algebraica mente cerrado es decir que cada polinomio no constante con coeficientes Complejos tiene al menos un cero Complejo.

Prueba:

Escojamos $r > 1 + 2|a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}|$. entonces

$$|p(re^{i\theta})| > |p(0)| \qquad (0 \le \theta \le 2\pi) \ .$$

Si d no tiene ceros, entonces la función $f = \frac{1}{p}$ seria entera y satisface $|f(0)| > |f(re^{i\theta})|$ para todo θ lo cual contradice el teorema de módulo máximo.

Dado, $p(z_1) = 0$ para algún z , consecuente mente existe un polinomio q de grado $n-1$ tal que $p(z) = (z - z_1)Q(z)$ la prueba se completa por inducción en n .

~~XXX~~

En el caso complejo, las desigualdades de Cauchy nos dicen que conociendo una cota de la función podemos acotar a sus derivadas. Veremos pronto que estas desigualdades son las principales responsables de que la convergencia uniforme de sucesiones de funciones holomorfas implique que la sucesión de sus derivadas también converja uniformemente.

<u>Teorema5.7: Teorema (Estimación o Desigualdad de Cauchy)</u>

Si $f \in H(D(a;R))$ y $|f(a)| < M$ para todo $z \in (D(a;R))$ entonces,

$$|f^{(m)}(a)| \le \frac{n!M}{R^n} \ . \qquad (1)$$

Prueba:

Para cada $r<R$ termino de la serie 5.3 es acotado por M^2 .

~~XXX~~

Si tomamos $a=0$, $R=1$ y $f(z)=z^n$ entonces $M=1$, $f^{(n)}(0)=n!$ y observamos que (1) no puede ser mejorado.

Definición 5.2:

Una sucesión $\{f_j\}$ de funciones en Ω , se dice que converge a f uniformemente es subconjunto compacto $k\subset\Omega$ y cada $\varepsilon>0$ le corresponde un $N=N(k,\varepsilon)$ tal que

$$|f_j(z)-f(z)|<\varepsilon \quad \textit{para todo} \quad z\in k \quad \textit{si} \quad j>n \ .$$

Para instancia, la sucesión $\{z^n\}$ converge a 0 uniformemente en subconjuntos compactos de $D(0;1)$ pero la convergencia no es uniforme en $D(0;1)$.

Es uniformemente convergente en subconjuntos compactos los cuales surgen mas naturalmente en conexión con las operaciones de limite en funciones holomorfas.

Teorema 5.8:

Supongamos $f_j \in H(\Omega)$ *para* $j=1,2,3,\ldots$ *y* $f_j \rightarrow f$ *uniformemente en subconjuntos compactos de* Ω *entonces* $f \in H(\Omega)$ *, y* $f'_j \rightarrow f'$ *uniformemente en subconjunto compacto* Ω *.*

Prueba:

Ya la convergencia es uniforme de cada disco compacto en Ω , f es continua. Sea Δ un triángulo en Ω , entonces Δ es compacto, así

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \lim_{j\rightarrow\infty} \int_{\partial\Delta} f_j(z)\,dz = 0 \quad .$$

Por el teorema de Cauchy dado que el teorema de Morera implica que $f \in H(\Omega)$.

Sea k un compacto; $k \subset \Omega$ existe un $r>0$ tal que la unión E , de los discos cerrados $\bar{D}(z\,;r)$ para todo $z \in k$, es un subconjunto compacto de Ω .

Aplicando el teorema anterior a $f-f_j$; tenemos

$$|f'(z)-f_j'(z)| \leq r^{-1}\|f-f_j\|_E \qquad (z \in k) \quad ,$$

donde $\|f\|_E$. denota el supremo de $|f|$ en E . Ya que $f_j \rightarrow f$ Uniforme en E esto de que $f_j' \rightarrow f'$ uniforme en k .

XXX

Corolario 5.3:

Bajo la misma hipótesis, $f_j^{(n)} \to f^{(n)}$ *uniformemente, cuando* $j \to \infty$ *en cada conjunto compacto.* $k \subset \Omega$ *Y para cada entero positivo* n .

Prueba:

Comparemos esta situación con la limite real, donde las sucesiones de funciones infinitamente diferenciables pueden converger uniformemente en ninguna pese a funciones diferenciables.

~~XXX~~

Teorema 5.9: Teorema del Mapeo Abierto

Si Ω *es una región y* $f \in H(\Omega)$ *, entonces* $f(\Omega)$ *es una región o un punto.*

Prueba:

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante y Ω un dominio en un disco abierto. Tomemos *U* un abierto en *W*. Probaremos que *f (U)* es abierto.

Sea $w_0 \in f(U)$ y sea $z_0 \in U$ tal que $f(z_0) = w_0$. El punto z_0 es un cero de la función no constante $z \to f(z) - w_0$ y debe ser un cero aislado de dicha función.

Luego existe un número $\rho > 0$ de forma que $\bar{D}(z_0;\rho) \subset U$ y para $z \in \bar{D}(z_0;\rho) - \{z_0\}$ se tiene que $f(z) \neq w_0$.

Llamemos

$$\lambda = min\{|f(z) - w_0| : z \in C(z_0;\rho)*\}$$

y veamos que $D(w_0;\lambda/2) \subset f(U)$.

Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $w \in D(w_0;\lambda/2)$ tal que $w \notin f(U)$.

Sea

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w} \quad , \qquad\qquad z \in U \quad .$$

La función g así definida es holomorfa en U, además

$$|g(z_0)| = \frac{1}{|w_0 - w|} > \frac{1}{\lambda/2} > \frac{2}{\lambda}$$

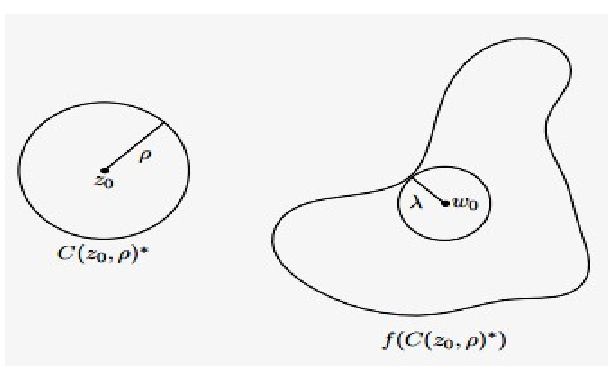

Figura 5.1

Supongamos que para $z \in C(z_0;\rho)*$ tenemos que

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-w|} = \frac{1}{|f(z)-w_0+w_0-w|}$$

$$= \frac{1}{|f(z)-w_0-(w-w_0)|} \leq \frac{1}{|f(z)-w_0|-|w-w_0|} \leq \frac{1}{\lambda-|w-w_0|}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda-\lambda/2} = \frac{2}{\lambda} \quad .$$

Hemos probado que en el centro del disco $D(z_0;\rho) \subset U$ el módulo de g toma un valor $|g(z_0)| > \frac{2}{\lambda}$ mientras que en la frontera de dicho disco toma valores menores que $\frac{2}{\lambda}$.

Esto contradice el principio del módulo máximo que afirma que |g| debe alcanzar su máximo en $D(z_0;\rho)$ siempre en la frontera.

~~XXX~~

Esta propiedad es una de las más importantes en las funciones holomorfas que será vista de manera más detallada en el Teorema 5.11.

Lema 5.1:

Si $f \in H(\Omega)$ *y g es definida en* $\Omega X \Omega$ *por*

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & si\, w \neq z, \\ f'(z) & si\, w = z, \end{cases}$$

entonces g es continua en $\Omega X \Omega$.

Prueba:

Sea $G = \{(z,w) \in \Omega X \Omega : z x w\}$ que es un conjunto abierto en $\Omega X \Omega$. La restricción de *g* a dicho conjunto es evidentemente continua, luego *g* es continua en *G*.

Los únicos puntos $(z,w) \in \Omega X \Omega$ donde debemos probar la continuidad de *g* son los puntos en los cuales *z=w* los cuales tienen la forma *(a,a).*

Para $a \in \Omega$. Veamos que g es continua también en dichos puntos.

Fijamos $a \in \Omega$. Y dado $\varepsilon > 0$. Existe $r > 0$ tal que $D(a;r) \subset \Omega$ y $|f'(\zeta) - f'(a)| < \varepsilon$ para todo $\zeta \in D(a;r)$.

Si *z* y *w* están dentro del disco $D(a;r)$ la condición de continuidad viene dada por

$|z-a|<\delta$ y $|w-a|<\delta$

$$\Rightarrow \quad |g(z,w)-g(a,a)|=|g(z,w)-f'(a)|<\varepsilon$$

y si

$$\zeta(t)=(1-t)z+tw \quad ,$$

entonces $\zeta(t)\in D(a;r)$ para $0\le t\le 1$, y

$$g(z,w)-g(a,a)=\int_0^1 [f'(\zeta(t))-f'(a)]dt \quad .$$

El valor absoluto del integrando es

$$\int_0^1 [f'(\zeta(t))-f'(a)]dt<\varepsilon \quad ,$$

para cada t. Ya que $|g(z,w)-g(a,a)|<\varepsilon$ esto prueba la continuidad de g en (a,a).

~~XXX~~

<u>Teorema 5.10: Teorema de Inversión Local</u>

Supongamos que $\varphi\in H(\Omega)$ *,* $z_0\in\Omega$ *, y* $\varphi'(z_0)\neq 0$ *. Entonces* Ω *contiene una vecindad V de* z_0 *tal que*

(a) φ *es uno-a-uno en V,*

(b) $W=\varphi(V)$ *es un conjunto abierto, y*

(c) *Si* $\psi:W\to V$ *es definida por* $\psi(\varphi(z))=z$ *, entonces* $\psi\in H(W)$ *.*

Así $\varphi:V\to W$ *tiene una inversa holomorfa.*

Prueba:

Para probar (a) consideremos la función continua g del lema 5.1.

Como $g(a,a)=f'(a)\neq 0$, a hora bien consideramos $\lambda=|g(a,a)|>0$, por continuidad, existe $\rho>0$ tal que $D(a,\rho)\subset\Omega$ y si $z,w\in D(a,\rho)$ entonces $|g(z,w)|\geq\frac{\lambda}{2}$. por lo tanto, para $z,w\in D(a,\rho)$, $z\neq w$, tenemos que

$$|g(z,w)|\geq\frac{\lambda}{2}|(z-w)| \quad ,$$

de donde seguimos la inyectividad de f en $D(a,\rho)$.

Para probar b) tomamos un elemento $a\in V$ y escogemos $r>0$ tal que $\bar{D}(a,r)\subset V$. Luego si

$$|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)|\geq\frac{1}{2}|\varphi'(z_0)||z_1-z_2| \quad , \quad z_{1,}z_2\in V \qquad (1)$$

existe un $c>0$ tal que

$$|\varphi(a+re^{i\theta})-\varphi(a)|>2\text{c} \qquad (-\pi\leq\theta\leq\pi) \quad .$$

Si $\lambda\in D(\varphi(a);c)$, entonces $|\lambda-\varphi(a)|<c$, por lo tanto la expresión anterior implica que

$$min_\theta|\lambda-\varphi(a+re^{i\theta})|>c$$

Por el corolario del módulo mínimo sabemos que , $\lambda-\varphi$ debe al menos tener un cero en $D(a,r)$. Así $\lambda=\varphi(z)$ para algún $z\in D(a,r)\subset V$.

Esto prueba que $D(\varphi(a), r) \subset \varphi(V)$. Ya que *a* es un punto arbitrario de *V*, $\varphi(V)$ es abierto.

Para probar c), fijamos $w_1 \in W$. Entonces $\varphi(z_1) = w_1$ para un único $z_1 \in V$. Si $w \in W$ y $\psi(w) = z \in V$, tenemos que

$$\frac{\psi(w) - \psi(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{\varphi(z) - \varphi(z_1)}$$

De la expresión (1) , tenemos que $z \to z_1$ cuando $w \to w_1$. Por lo tanto $\varphi'(z) \neq 0$ implica que

$$\psi'(w_1) = 1/\varphi'(z_1) \text{ . Así } \psi \in H(W)$$

~~XXX~~

Podemos preguntarnos qué ocurriría en el teorema de inversión local si $f'(a) = 0$. Por ejemplo, podemos considerar la función polinómica $f(z) = z^n$ cuya derivada se anula en $a = 0$ donde *f* tiene un cero de orden *n* y en cualquier entorno de cero la función f toma cada valor exactamente n veces.

Este comportamiento de la función $f(z) = z^n$ en un entorno de cero da una pista de lo que sucede en el caso general. Necesitaremos el siguiente lema de interés por sí mismo.

Lema 5.2:

Toda función holomorfa que no se anula en un dominio estrellado tiene logaritmos holomorfos en dicho dominio. En particular, tiene raíces holomorfas de cualquier orden.

Definición 5.3:

Para $m=1,2,3,\ldots,$ denotamos la " $m^{ésima}$ función potencia" $z\rightarrow z^m$ por π_m .

Cada $w\neq 0$ en $\pi_m(z)$ tiene precisamente *m* valores distintos de *z*.

Si $w=re^{i\theta}$, $r>0$. Entonces $\pi_m(z)=w$ si y solo $z=r^{\frac{1}{m}}e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{m}}$, $k=1,\ldots m.$

Observemos también que cada π_m es un mapeo abierto: Si *V* es abierto y no contiene a cero, entonces π_m es abierto.

Definición 5.4:

Las composiciones de mapeos abiertos son claramente también abiertas. De manera que si observamos particularmente $\pi_m\circ\varphi$ es una composición abierta si φ' es diferente de cero.

En el siguiente teorema contiene una versión mas detallada del Teorema de Mapeo Abierto el cual fue mencionado anteriormente.

Teorema 5.11:

Supongamos Ω *es una region , y sea* $f \in H(\Omega)$ *, f no es constante,* $z_0 \in \Omega$ *, y* $w_0 = f(z_0)$ *. Sea m el orden de los ceros en los cuales la función* $f - w_0$ *tiene en* z_0 *.*

Entonces existe un vecindad V de z_0 *,* $V \subset \Omega$ *, y existe* $\varphi \in H(V)$ *, tal que*

(a) $f(z) = w_0 + [\varphi(z)]^m$ *para todo* $z \in V$ *,*

(b) φ' *no tiene ceros en V y* φ *es un mapeo invertible de V sobre un disco* $D(0;r)$ *.*

Así $f - w_0 = \pi_m \circ \varphi$ *en V. De manera que f es exactamente un mapeo m-a-1 de* $V - \{z_0\}$ *sobre* $D'(w_0; r^m)$ *, y que cada* $w_0 \in f(\Omega)$ *es un punto interior de* $f(\Omega)$ *. Por lo tanto* $f(\Omega)$ *es abierto.*

Prueba

Sin perder la generalidad asumimos que Ω es una vecindad conexa de z_0 la cual es tan pequeña que $f(z) \neq w_0$ si $z \in \Omega - \{z_0\}$. Entonces

$$f(z)-w_0=(z-z_0)^m g(z) \qquad z\in\Omega$$

para algún $g\in H(\Omega)$ el cual no tiene ningún cero en Ω. Por lo tanto $g'/g\in H(\Omega)$. $g'/g\in=h'$ para algún $h\in H(\Omega)$.

La derivada $g.exp(-h)$ es 0 en Ω. Si h es modificado por la suma de una constante que nos sea favorable, podemos decir que $g=\exp(h)$. Definimos

$$\varphi(z)=(z-z_0)\exp\frac{h(z)}{m} \qquad (z\in\Omega) \quad .$$

entonces (a) se mantiene, para todo $(z\in\Omega)$.

También $\varphi(z_0)=0$ y $\varphi'(z_0)\neq 0$. La existencia de un conjunto abierto V satisface (b) y es la condición del teorema 5.10 la cual hace que se complete la demostración del teorema.

~~XXX~~

El siguiente teorema esta realmente contenido en los resultados anteriores, pero parece aconsejable definirlo explícitamente.

Teorema 5.12:

Supongamos una región Ω, $f\in H(\Omega)$, *y f es uno-a-uno en* Ω. *Entonces* $f'(z)\neq 0$ *para cada* $z\in\Omega$, *y la inversa de f es holomorfa.*

Prueba

Si $f'(z_0)$ donde 0 es algún $z_0 \in \Omega$, la hipótesis del teorema 5.11 la cual se mantiene para algunos *m > 1* así que *f* seria *m-a-1* en alguna vecindad eliminada de z_0 . Ahora aplicamos la parte (c) del teorema 5.10.

~~XXX~~

Podemos observar que el sentido reciproco del teorema anterior es falso: Si $f(z)=e^z$ entonces $f'(z)\neq 0$ para cada *z,* pero *f* no es uno-a-uno en todo el plano complejo.

Teorema 5.13: Teorema de Inversión Global

Sea f *una función holomorfa en* Ω *e inyectiva. Entonces* f *es una biyección biholomorfa de* Ω *sobre* $f(\Omega)$.

Prueba:

El Teorema 4.1 nos asegura, gracias a la inyectividad, que $f'(z)\neq 0$ para cualquier *z* ∈ *W.* Puesto que *f* es inyectiva existe su inversa. El teorema de inversión local nos garantiza que *f* es localmente invertible de forma holomorfa, luego f^{-1} es holomorfa en $f(\Omega)$.

~~XXX~~

CAPITULO 6

“Teorema Global de Cauchy”

Los éxitos logrados con la teoría local de Cauchy nos hacen reflexionar y pensar en 'refinar' todas las herramientas y teorías básicas sobre “El Teorema de Cauchy” , “Fórmula de Cauchy” para así tratar de ampliar su alcance.

Ya que por ahora, todas estas herramientas nos han servido de gran utilidad en discos abiertos, o a lo mucho en conjuntos estrellados o conjuntos convexos; ya que solo hemos averiguado propiedades de las funciones holomorfas que dependen de ultima instancia del comportamiento de la función en un entorno de cada punto de su dominio estas propiedades son de carácter local.

De modo que trataremos de estudiar las propiedades de carácter global y profundizaremos la validez de los teoremas y de la fórmula de Cauchy, ya no solo para ser aplicada en discos abiertos, sino también colecciones de discos abiertos cualesquiera. Así extenderemos las aplicaciones de este teorema a una colección de caminos cerrados llamados ciclos y de ahí el porque de carácter global de dicho teorema.

6.1 El Teorema Global de Cauchy

Ahora extenderemos la integración a una colección de caminos cerrados llamados ciclos, e introduciremos el concepto de Homotopía o ciclo respecto a un abierto. Así podemos obtener una versión muy general del Teorema de Cauchy viendo así que estamos aplicándolos sobre un conjunto de caminos cerrados o ciclos con respecto a un abierto, y así poder observar lo que hace que la integral de toda función holomorfa en un abierto sea nula .

En otras palabras los ciclos más generales para los que será valido dicho teorema si no se imponen restricciones en ese abierto.

De manera practica esto nos libera de buscar abiertos estrellados en los que se pueden plantear las integrales que debemos manejar .

Definición 6.1:

Un arco que no se intersecta a sí mismo se llama ***arco de Jordan*** *o* ***arco simple****.*

Definición 6.2:

Una curva cerrada que no se intersecta a sí misma se llama ***Curva de Jordan*** *o* ***Curva simple****.*

Definición 6.3:

Un ***dominio simplemente conexo D*** *es si cada punto interior de todo contorno cerrado que se encuentra completamente dentro D también pertenece a D.*

Teorema 6.1:

Sean γ_0 *y* γ_1 *contornos arbitrarios que unen los puntos* z_0 *y* z_1 *, orientados ambos de* z_0 *a* z_1 *. Si* γ_0 *y* γ_1 *se encuentran en un dominio simplemente conexo* Ω *en el cual* Ω *es analítica, entonces*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz \quad .$$

Prueba:

Sea el contorno cerrado $(-\gamma_0)+\gamma_1$ se encuentra en su totalidad en Ω como se muestra en la figura 6.1, entonces por el teorema integral de Cauchy podemos afirmar que:

$$0 = \int_{(-\gamma_0)+\gamma_1} f(z)dz = \int_{-\gamma_0} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

$$= -\int_{\gamma_0} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

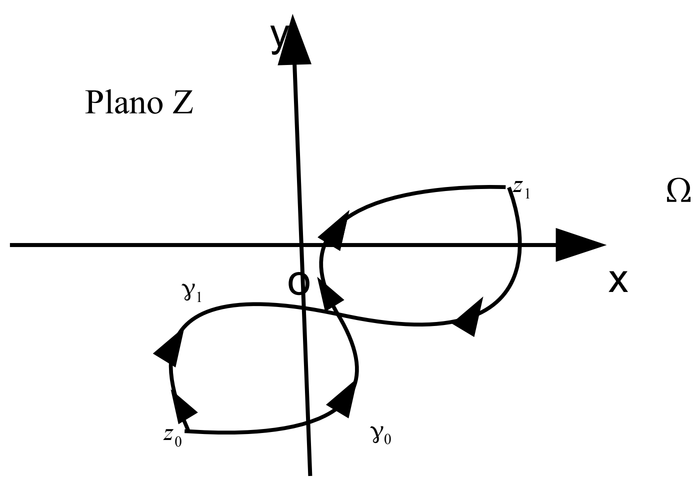

Figura 6.1

~~XXX~~

Antes de expresar y probar el teorema Global de Cauchy removeremos la restricción que fue impuesta en el teorema 4.10 acerca de las regiones convexas, y seria conveniente añadir un poco mas de información acerca de la integración visto hasta ahora. Esencialmente es una cuestión de considerar no quedarnos en la restricción de integrales sobre caminos simples, ahora consideraremos “sumas” finitas de caminos.

6.2 Cadenas y Ciclos

Supongamos $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ son caminos en el plano, y haciendo $K = \gamma_1^* \cup \ldots \cup \gamma_n^*$. Cada γ_i induce un funcional lineal $\tilde{\gamma}_i$ en el espacio vectorial *C(K)*, por la siguiente fórmula

$$\tilde{\gamma}_i(f) = \int_{\gamma_i} f(z)\,dz \quad . \qquad (1)$$

Define a

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{\gamma}_1 + \ldots + \tilde{\gamma}_n \quad . \qquad (2)$$

Explícitamente es, $\tilde{\Gamma}(f) = \tilde{\gamma}_1(f) + \ldots + \tilde{\gamma}_n(f)$ para todo $f \in C(K)$. La relación (2) sugiere que podemos introducir una suma formal de la forma

$$\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \gamma_n \qquad (3)$$

y definir

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \tilde{\Gamma}(f) \quad . \qquad (4)$$

Entonces (3) es meramente una abreviación para el enunciado

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_i} f(z)\,dz \qquad (f\in C(K)) \quad . \qquad (5)$$

Notemos que (5) satisface la definición en su lado izquierdo.

En lo que sigue nos va a interesar integrar en varios caminos al mismo tiempo por lo que es conveniente introducir la terminología de "cadenas".

Los objetos Γ definidos, son llamados "cadenas".

<u>Definición 6.4:</u>

Una ***cadena*** es una combinación líneal formal con coeficientes enteros de caminos, es decir, una expresión de la forma $\Gamma=m_1\gamma_1\dot{+}\ldots\dot{+}m_n\gamma_n$ donde cada γ_i es un camino y cada m_i es un entero.

El símbolo $\dot{+}$ que hemos escrito en la expresión anterior no representa a la suma de funciones ni a la yuxtaposición de caminos, es una manera de decir que la cadena Γ está formada por varios caminos.

<u>Definición 6.5:</u>

Si cada γ_i en $\Gamma=m_1\gamma_1\dot{+}\ldots\dot{+}m_n\gamma_n$ es un camino cerrado entonces Γ es llamado ***ciclo***.

Definición 6.6:

Si cada γ_i en $\Gamma = m_1 \gamma_1 \dotplus \ldots \dotplus m_n \gamma_n$ es un camino en algún conjunto abierto de Ω, decimos que Γ es una ***cadena en*** Ω **.**

Ejemplo 6.1

Podemos considerar la cadena *G =C(0,1)+C(i,2)−2C(1+i,1/2)* que está formada por tres circunferencias, la última de ellas considerada dos veces y recorrida en sentido contrario.

Definición 6.7:

Se define el ***soporte*** de Γ, que notaremos Γ^*, como $\Gamma^* = \gamma_0^* \cup \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \cup \ldots \cup \gamma_n^*$.

Definición 6.8:

Si Γ es un ciclo y $\alpha \notin \Gamma^*$, definimos el ***indice de*** α con respecto a Γ por

$$Ind_{\Gamma}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z-\alpha} ,$$

como fue definida en el Teorema 4.3 . Obviamente Γ implica que

$$Ind_{\Gamma}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} Ind_{\gamma_i}(\alpha) .$$

6.3 Propiedades de las Cadenas

* Si cada γ_i en la cadena Γ es reemplazado por su camino opuesto la cadena resultante sera denotada por $-\Gamma$. entonces

$$\int_{-\Gamma} f(z)\,dz = -\int_{\Gamma} f(z)\,dz \qquad (f \in C(\Gamma^*)) \quad .$$

En particular, $Ind_{-\Gamma}(\alpha) = -Ind_{\Gamma}(\alpha)$ si Γ es un ciclo y $\alpha \notin \Gamma^*$.

* Las operaciones con las cadenas pueden ser adición y sustracción de una forma obvia, solo es necesario sumar o restar los correspondientes funcionales: La declaración $\Gamma = \Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$ significa

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$$

para cada $f \in C(\Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*)$.

* Una cadena puede ser representada como una suma de caminos en muchas direcciones. Dicho de otra forma es

$$\gamma_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \gamma_n = \delta_1 \dot{+} \ldots \delta \dot{+}_n$$

es tan simple como

$$\sum_i \int_{\gamma_i} f(z)\,dz = \sum_j \int_{\gamma_j} f(z)\,dz$$

para cada *f* continua en $\gamma_1^* \cup \ldots \cup \gamma_n^* \cup \delta_1^* \cup \ldots \delta_k^*$. En particular, un ciclo puede ser muy bien representado como la suma de caminos abiertos.

Por definición y según toda la teoría que hemos visto en este capítulo, para integrar una función sobre una cadena se integra la función sobre cada uno de los caminos que forman la cadena y se suman dichas integrales.

Teorema 6.2 : Teorema Global de Cauchy

Supongamos que $f \in H(\Omega)$ *, donde* Ω *es un conjunto abierto arbitrario en el plano complejo. Si* Γ *es un ciclo en* Ω *que satisface*

$$Ind_{\Gamma}(\alpha)=0 \quad \textit{para cada} \quad \alpha \quad \textit{que no esta en} \quad \Omega \; , \qquad (1)$$

entonces

$$f(z).Ind_{\Gamma}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f\frac{(w)}{w-z}dw \qquad \textit{para} \quad z\in\Omega-\Gamma^{*} \qquad (2)$$

y

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=0 \quad . \qquad (3)$$

Si Γ_0 *y* Γ_1 *son ciclos en* Ω *tal que*

$$Ind_{\Gamma_0}(\alpha)=Ind_{\Gamma_1}(\alpha) \quad \textit{para cada} \quad \alpha \quad \textit{que no esta en} \quad \Omega \; , \qquad (4)$$

entonces

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz=\int_{\Gamma_1} f(z)dz \quad . \qquad (5)$$

Prueba:

La función *g* definida en $\Omega X \Omega$ por

$$g(z,w)=\begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & si\, w\neq z, \\ f'(z) & si\, w=z, \end{cases} \quad (6)$$

es continua en $\Omega X \Omega$ por el Lema 5.1 . Por lo tanto podemos definir

$$h(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(z,w)\,dw \qquad z\in\Omega \quad . \qquad (7)$$

Para $z\in\Omega-\Gamma^*$, la formula de Cauchy es claramente equivalente a la afirmación que dice

$$h(z)=0 \quad . \quad (8)$$

Para probar esta afirmación , primero probaremos que $h\in H(\Omega)$. Notemos que *g* es uniformemente continua en cada subconjunto compacto de $\Omega X \Omega$. Si $z\in\Omega$, $z_n\in\Omega$, y $z_n\rightarrow z$, se sigue que $z_n\rightarrow z$ uniformemente para $w\in\Gamma^*$ (un subconjunto compacto de Ω). Por lo tanto $h(z_n)\rightarrow h(z)$. Esto prueba que *h* es continua en Ω . Entonces

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Big(\int_{\partial\Delta} g(z,w)\,dz\Big)\,dw \quad . \qquad (9)$$

Para cada $w \in \Omega$, $z \to g(z,w)$ es holomorfa en Ω . (La singularidad en *z*=*w* es removible.) La integral interior en el lado derecho es por lo tanto 0 para cada $w \in \Gamma^*$. El teorema de Morera nos muestra que $h \in H(\Omega)$.

Luego, decimos que Ω_1 es el conjunto de todos los números complejos *z* para los cuales $Ind_\Gamma(z)=0$, y definimos

$$h_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \qquad\qquad z\in\Omega_1$$

Si $z\in\Omega\cap\Omega_1$, la definición de Ω_1 se hace tan clara que $h_1(z)=h(z)$. Por lo tanto existe una función $\varphi\in H(\Omega\cup\Omega_1)$ cuya restricción a Ω es aquella restricción en Ω_1 es h_1 .

Nuestra hipótesis muestra que Ω_1 contiene el complemento de Ω . Por lo tanto φ es una función entera. Ω_1 También contiene un componente no acotado de el complemento de Γ^* , ya que el $Ind_\Gamma(z)=0$. Por lo tanto

$$\lim_{|z|\to\infty}\varphi(z)=\lim_{|z|\to\infty}h_1(z)=0 \quad .$$

Ahora vemos que el teorema de Liouville implica que $\varphi(z)=0$ para cada z. Esto prueba (8) y la de (2).

Para deducir (3) de (2) tomamos $a \in \Omega - \Gamma^*$ y definamos $f(z) = (z-a) f(z)$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

$$= F(a).Ind_{\Gamma}(a) = 0 \quad ,$$

ya que $F(a)=0$.

Finalmente,(5)se da por (4) si (3) se aplica al ciclo $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_0$. Lo cual completa la prueba.

~~XXX~~

Del teorema anterior y de todas sus aplicaciones podemos obtener las siguientes conclusiones:

- Si γ es un camino cerrado en una región convexa Ω ,y si $\alpha \in \Omega$ y si tenemos una aplicación del teorema anterior a la siguientes función $f(z) = (z-\alpha)^{-1}$ muestra que $Ind_{\Gamma}(z) = 0$. Hipótesis (1) del teorema anterior es por lo tanto que se satisface para cada ciclo en Ω si Ω es convexo. Esto muestra que el teorema anterior es como una generalización del Teorema 4.7 y 4.8.
- La última parte del teorema anterior nos muestra que bajo las circunstancias dadas la integración sobre un ciclo puede ser reemplazada por la integración

sobre otro sin tener que cambiar el valor de la integral. Por ejemplo, sea Ω el plano con tres discos cerrados disjuntos D_i . Si $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ son círculos positivamente orientados en Ω tal que Γ rodea a $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ y γ_i rodea a D_i pero no a D_j para $j \neq i$, entonces

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} f(z)dz$$

para cada $f \in H(\Omega)$.

- Al aplicar el teorema anterior es deseable tener un método eficiente y razonable para poder encontrar el indice de un punto con respecto a un camino cerrado. El siguiente teorema hace para todos los tipos de caminos que pueden ocurrir en la practica . Se dice , esencialmente, que el indice aumenta por 1 cuando el camino es cruzado de "derecha a izquierda". Si llamamos que el $Ind_{\Gamma}(z)=0$ si α esta fuera de la componente acotada de el complemento *W de* γ^* podemos determinar exitosamente el $Ind_{\Gamma}(\alpha)$ en los otros componentes de *W* , provistos porque *W* tiene muchos componentes finitos y que γ no atraviesa el arco mas de una vez.

Ejemplo 6.2:

Sea el abierto Ω el plano complejo $\mathbb{C}$ al que le hemos quitado tres puntos *a*, *b* y *c*. Pretendemos calcular la integral de una función holomorfa en Ω a lo largo del camino Γ que se presenta en la siguiente figura :

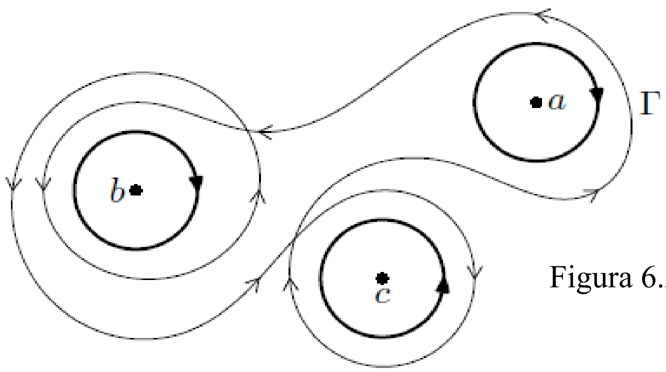

Figura 6.2

Teniendo en cuenta que el índice de los puntos *a*, *b* y *c* respecto de Γ es el número de veces que Γ los rodea (teniendo en cuenta que el sentido es positivo si los rodea en sentido contrario al de las agujas del reloj) a la vista de la figura tenemos:

$$Ind_{\Gamma}(a)=1 \quad , \quad Ind_{\Gamma}(b)=2 \ \text{ y } \ Ind_{\Gamma}(c)=-1$$

Consideremos las circunferencias $C(a,\rho)$, $C(b,\rho)$ y $C(c,\rho)$ que se presentan en la figura y formemos el ciclo

$$\sum = C(a,\rho)+2\mathrm{C}(b,\rho)+C(c,\rho)$$

El ciclo S es homológicamente equivalente al ciclo Γ respecto de Ω . El teorema de Cauchy nos dice que en estas condiciones para cualquier función holomorfa en Ω , *f*, se cumple que

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{C(a,\rho)} f(z)dz + 2\int_{C(b,\rho)} f(z)dz - \int_{C(c,\rho)} f(z)dz$$

De esta forma hemos reducido el cálculo de la integral de cualquier función holomorfa sobre el camino Γ a tres integrales sobre circunferencias. Podemos observar, además, que podemos tomar las circunferencias de radio tan pequeño como queramos. Esto nos dice que es el comportamiento de f en un entorno reducido de los puntos a, b y c el que determina el valor de la integral de f sobre cualquier camino cerrado. Volveremos sobre esta idea al estudiar las singularidades aisladas de una función holomorfa.

A continuación se presenta la figura de forma general de la manera en la cual se aplica el método de Cauchy Global

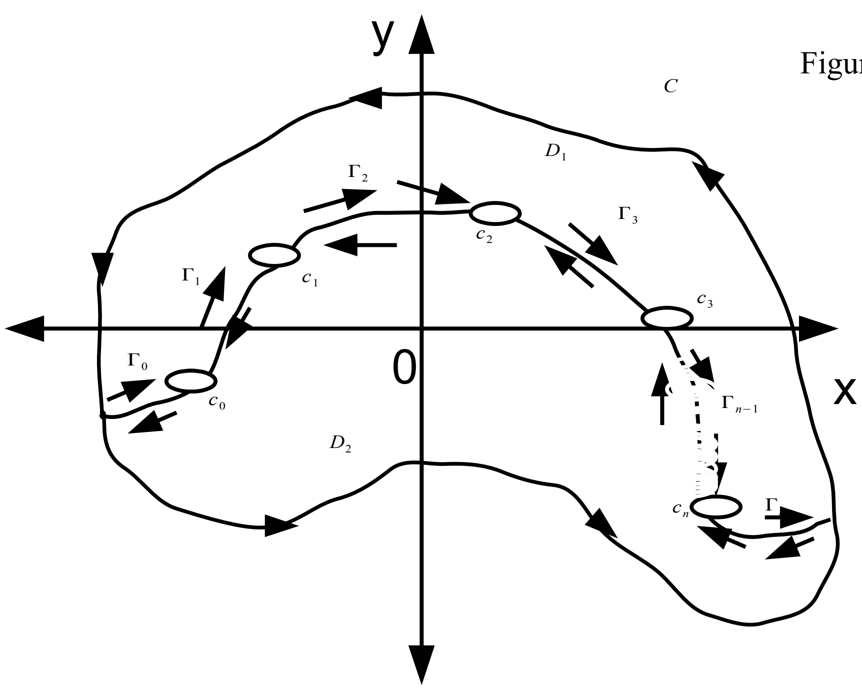

Figura 6.3

Teorema 6.3:

Supongamos que γ es un camino cerrado en el plano, con un intervalo parámetro $[\alpha,\beta]$. Supongamos $\alpha<u<v<\beta$, *a* y *b* son números complejos, $|b|=r>0$, y

(i) $\gamma(u)=a-b$, $\gamma(v)=a+b$,

(ii) $|\gamma(s)-a|<r$ si y solo si $u<s<v$,

(iii) $|\gamma(s)-a|=r$ si y solo si $s=u$ ó $s=v$.

Asumamos que $D(a;r)-\gamma^*$ *es la unión de* D_+ *y* D_- *, llamadas tal que* $a+bi\in\bar{D}_+$ *y* $a-bi\in\bar{D}_-$. *Entonces* $Ind_\gamma(z)=1+Ind_\gamma(w)$ *si* $x\in D_+$ *y* $w\in D_-$.

Como $\gamma(t)$ atraviesa $D(a;r)$ desde $a+bi$ hasta $a-bi$, D_- esta en el lado derecho y D_+ esta en el lado izquierdo del camino.

Prueba:

Para simplificar la escritura, reparametrizaremos γ tal que *u=0* y $v=\pi$. Definamos

$$C(s)=a-b\,e^{is} \qquad (0\leq s\leq 2\pi)$$

$$f(s)=\begin{cases} C(s) & (0\leq s\leq 2\pi) \\ \gamma(2\pi-s) & (\pi\leq s\leq 2\pi) \end{cases}$$

$$g(s)=\begin{cases}\gamma(s) & (0\leq s\leq\pi)\\ C(s) & (\pi\leq s\leq 2\pi)\end{cases}$$

$$h(s)=\begin{cases}\gamma(s) & (\alpha\leq s\leq 0\; ó\; \pi\leq s\leq\beta)\\ C(s) & (0\leq s\leq\pi)\end{cases}$$

Ya que $\gamma(0)=C(0)$ y $\gamma(\pi)=C(\pi)$, *f*,*g* y *h* son caminos cerrados.

Si $E\subset\bar{D}(a;r)$, $|\zeta-a|=r$, y $\zeta\notin E$, entonces E esta en el disco $D(2a-\zeta;2r)$ el cual no contiene a ζ . Aplicando esto a $E=g^*$, $\zeta=a-bi$ y así observamos que el indice de $Ind_g(a-bi)=0$. ya que $\bar{D}_-$ es conexo y D_- no interseca a g^* , y llegando a que

$$Ind_g(w)=0 \qquad \text{si} \quad w\in D_- \;. \qquad (1)$$

El mismo razonamiento sigue para

$$Ind_f(z)=0 \qquad \text{si} \quad z\in D_+ \qquad (2)$$

y así concluimos que

$$Ind_\gamma(z)=Ind_h(z)=Ind_h(w)$$

$$Ind_C(w)+Ind_\gamma(w)=1+Ind_\gamma(w)$$

La primera de esas igualdades se da de (2), ya que $h=\gamma\dotplus f$. Luego la segunda igualdad nos da porque *z* y *w están* en $D(a;r)$, un conjunto conexo el cual no interseca a h^*. La tercera consecuencia sigue de (1), ya que $h \dotplus g = C \dotplus \gamma$, y la cuarta es una consecuencia del teorema 4.4. Lo cual completa la prueba.

~~XXX~~

Ahora tomamos una breve discusión de otro concepto topológico relevante en el teorema de Cauchy.

6.5 Homotopía

Definición:6.9:

Supongamos γ_0 y γ_1 son caminos cerrados en un espacio topológico X, ambos con un intervalo parámetro $I=[0,1]$. Decimos que γ_0 y γ_1 son ***X-homotópicos*** si existe un mapeo continuo *H* del cuadrado unidad $I^2 = I \, X \, I$ en *X* tal que

$$H(s,0)=\gamma_0(s) \quad , \quad H(s,1)=\gamma_1(s) \quad , \quad H(0,t)=H(1,t) \qquad (1)$$

para todo $s \in I$ y $t \in I$.

Haciendo $\gamma_t(s)=H(s,t)$. Entonces (1) define una ***familia uni-paramétrica*** de ***curvas cerradas*** γ_t en *X,* el cual ***conecta*** γ_0 y γ_1. Intuitivamente, esto significa que γ_0 puede ser continuamente deformada hacia γ_1, dentro de *X.*

Si γ_0 es X-homotopica hacia un mapeo constante γ_1 *, (es decir si* γ_1^* que consiste de un único punto) decimos que γ_0 es ***homotopicamente-nula*** en *X*. Si *X* es conexo y si cada curva cerrada en *X* es homotopicamente-nula, *X* se dice que es *simplemente conexo.*

Por ejemplo, cada región convexa Ω , fijamos $z_1 \in \Omega$ y definimos

$$H(s,t)=(1-t)\gamma_0(s)+t z_1 \qquad (0\leq s\leq 1, 0\leq t\leq 1) \; .$$

En el siguiente teorema 6.4 nos muestra la condición (4) del teorema de Cauchy, el cual es válido cuando Γ_0 y Γ_1 son caminos cerrados $\Omega - homotópicos$. Como un caso especial es la condición *(1) del teorema de Cauchy la cual se mantiene para cada camino cerrado* Γ *en* Ω *si* Ω *es simplemente conexo.*

<u>Lema 6.1:</u>

Si γ_0 *y* γ_1 *son caminos cerrados con intervalo parámetro [0,1], si* α *es un número complejo, y si*

$$|\gamma_1(s)-\gamma_0|<|\alpha-\gamma_0(s)| \qquad 0\leq s\leq 1 \qquad \textit{(1)}$$

entonces $Ind_{\gamma_1}(\alpha)=Ind_{\gamma_0}(\alpha)$.

Prueba:

Podemos notar que (1) implica que Ω y $\alpha \notin \gamma_1^*$. Por lo tanto podemos definir a $\gamma=(\gamma_1-\alpha)/(\gamma_0-\alpha)$. Entonces

$$\frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{\gamma'_1}{\gamma_1-\alpha}-\frac{\gamma'_0}{(\gamma_0-\alpha)} \qquad (2)$$

y $|1-\gamma|<1$, por (1). Por lo tanto $\gamma^*\subset D(1;1)$, el cual implica que $Ind_\gamma(0)=0$.

La integración de (2) sobre [0,1] nos da el resultado que deseamos.

$$Ind_{\gamma_1}(\alpha)=Ind_{\gamma_0}(\alpha)$$

~~XXX~~

Teorema 6.4:

Si Γ_0 *y* Γ_1 *son caminos cerrados* $\Omega-homotopicos$ *en una región* Ω *, y si* $\alpha\notin\Omega$ *entonces*

$$Ind_{\Gamma_1}(\alpha)=Ind_{\Gamma_0}(\alpha) \qquad (1)$$

Prueba:

Por definición, existe un mapeo continuo $H:I^2\rightarrow\Omega$, tal que

$$H(s,0)=\Gamma_0(s)\;,\quad H(s,1)=\Gamma_1(s)\;,\quad H(0,t)=H(1,t)\;. \qquad (2)$$

Ya que I^2 es compacto, también lo es $H(I^2)$. Por lo tanto existe $\varepsilon>0$ tal que

$$|\alpha-H(s,t)|>2\varepsilon \quad \text{si} \quad (s,t)\in I^{2.} \qquad (3)$$

Ya que H es uniformemente continua, existe un entero positivo n tal que

$$|H(s,t)-H(s',t')|<\varepsilon \quad \text{si} \quad |s-s'|+|t-t'|\leq 1/n \qquad (4)$$

Definamos caminos poligonales cerrados $\gamma_{0,} \cdots, \gamma_n$ por

$$\gamma_k(s) = H\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right)(ns+1-i) + H\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n}\right)(i-ns) \qquad (5)$$

Si $i-1 \leq ns \leq i$ y $i=1,\ldots,n$. Por la ecuación (4) y (5)tenemos que ,

$$|\gamma_k(s) - H(s, k/n)| < \varepsilon \qquad (k=0,\ldots,n;\, 0 \leq s \leq 1) \qquad (6)$$

En particular si tomamos *k=0 y k=n*, tenemos que

$$|\gamma_0(s) - \Gamma_0(s)| < \varepsilon \qquad |\gamma_n(s) - \Gamma_1(s)| < \varepsilon \qquad (7)$$

y si tomamos las ecuaciones (6) y (3) podemos decir que ,

$$|\alpha - \gamma_k(s)| > \varepsilon \qquad (k=0,\ldots,n;\, 0 \leq s \leq 1) \qquad (8)$$

Por otra parte si tenemos la ecuación (4) y (5) también obtendremos que

$$|\gamma_{k-1}(s) - \gamma_k(s)| < \varepsilon \qquad (k=1,\ldots,n;\, 0 \leq s \leq 1) \qquad (9)$$

Luego si tenemos las ecuaciones (7), (8), (9), y *n+2* son las aplicaciones del lema anterior que α tienen el mismo indice con respecto a cada uno de los caminos $\Gamma_0, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \Gamma_1$. Lo cual prueba el teorema .

~~XXX~~

Definición 6.10:

Una **función meromorfa** sobre un subconjunto abierto Ω del plano complejo es una función que es holomorfa en todo Ω *excepto* en un conjunto de puntos aislados, llamados polos de la función. Toda función meromorfa sobre Ω puede ser expresada como el cociente entre dos funciones holomorfas definidas sobre Ω : los polos de la función meromorfa ocurren en los ceros del denominador.

Una función meromorfa en un conjunto abierto Ω cumple las siguientes propiedades si existe un conjunto $A \subset \Omega$ tal que

1. *A* no tiene punto limite en Ω ,
2. $f \in H(\Omega - A)$,
3. *f* tienen un polo en cada punto de *A*.

Notemos que la posibilidad de que $A = \emptyset$ no ha sido excluida. Dado que para cada $f \in H(\Omega)$ es meromorfa en Ω .

Notemos también 1. implica que no hay subconjuntos compactos en Ω contiene infinitos puntos de *A,* y que *A* es por lo tanto a lo sumo contable.

En la siguiente figura se muestra el comportamiento de una función meromorfa.

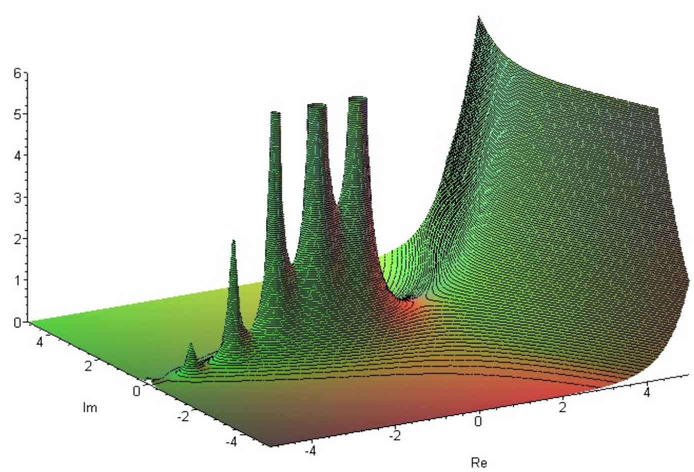

Figura 7.3

Si *f* y *A* se comportan como las propiedades anteriores , y si $a \in A$, y

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{-k} \quad (1)$$

es la parte principal de *f* en *a,* definida en el teorema 5.3 es decir *f-Q* tienen una singularidad removible en 1. entonces el número c_1 es llamado el ***residuo de f en*** *a:*

$$c_1 = Res(f\,;a) \qquad \textit{(2)}$$

Si Γ es un ciclo y $a \notin \Gamma^*$ *(1)* implica que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} Q(z)\,dz = c_1\,Ind_{\Gamma}(a) = Res(Q\,;a)\,Ind_{\Gamma}(a) \quad . \qquad (3)$$

Este es un caso muy especial el cual se utilizara en la prueba del siguiente teorema.

<u>Teorema 6.5 : Teorema de el Residuo</u>

Supongamos que f es una función meromorfa en Ω . Sea *A* el conjunto de puntos en Ω donde f tiene polos. Si Γ es un ciclo en $\Omega - A$ tal que

$$Ind_{\Gamma}(\alpha) = 0 \qquad \text{para todo} \quad \alpha \notin \Omega \ , \qquad (1)$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{a \in A} Res(f : a)\,Ind_{\Gamma}(a) \quad . \qquad (2)$$

Prueba

Sea $B = \{a \in A : Ind_{\Gamma}(a) \neq 0\}$. Sea *W* el complemento de Γ^* . Entonces

$Ind_{\Gamma}(z)$ es constante en cada componente *V* de *W*. Si *V* es no acotada, o si *V* se interseca con Ω^c, (1) implica que $Ind_{\Gamma}(z)=0$ para cada $z\in V$. Ya que *A* no tiene punto limite en Ω, por lo que concluimos que *B* es un conjunto finito.

La suma en (2) , es sin embargo formalmente finita , por lo tanto es finita.

Sean $a_1,\dots,a_n$ puntos de *B* , y sea $Q_1,\dots,Q_n$ la parte principal de *f* en $a_1,\dots,a_n$, y hagamos $g=f-(Q_1+\dots+Q_n)$. (Si $B\neq\emptyset$, es una posibilidad n la cual no podemos excluir, entonces *f*=*g*.) Hagamos Ω . Ya que *g* tiene singularidades removibles en $a_1,\dots,a_n$, aplicado a la función *g* en el conjunto abierto Ω_0 muestra que

$$\int_{\Gamma} g(z)dz=0 \cdot$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz=\frac{\sum_{i=1}^{n} 1}{2\pi i}\int_{\Gamma} Q_k(z)dz=\sum_{k=1}^{n} Res(Q_k;a_k)Ind_{\Gamma}(a_k) \quad ,$$

ya que *f* y Q_k tienen el mismo residuo en a_k obtenemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz=\sum_{a\in A} Res(f:a)Ind_{\Gamma}(a)$$

En la siguiente figura tenemos como funciona gráficamente el teorema anterior:

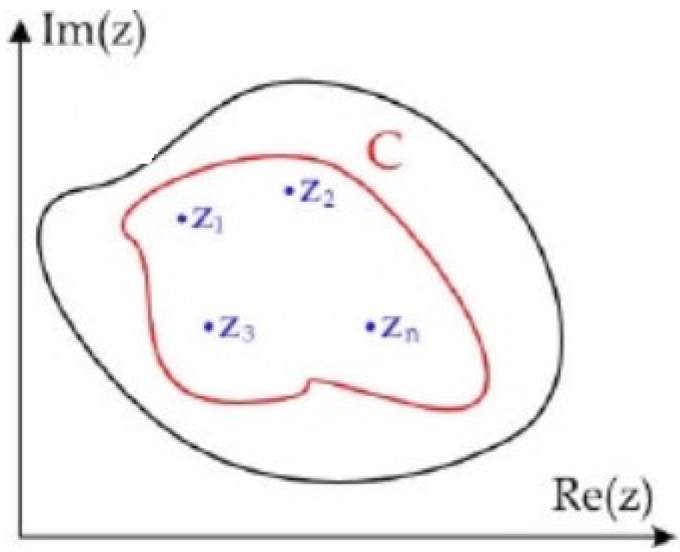

Figura 7.4

En el cual observamos que la curva C encierra a las singularidades.

Y así concluimos este capitulo con la aplicación del teorema del residuo. La cual se basa en los ceros de las funciones holomorfas a partir de sus integrales.

BIBLIOGRAFIA

- Rudin , Walter ; *Real and Complex Analysis* (3rd edition) MacGrawHill Series in Higher Mathematics.

- Conway, J. B.: *Functions of One Complex Variable.* (2nd ed.) Springer, New York (1978).

- http://alguborda.blogdiario.com/img/apuntes1_ac.pdf

- Http://es.wikipedia.org/wiki/Topolog%C3%ADa

- Derrick, William; Variable Compleja Con Aplicaciones, Editorial Iberoamericana

- Churchill, Ruel y Bronw, James Brown; Variable Compleja con Aplicaciones(5ta de)

- MacGrawHill

- Royden, H.L. ; Real Análysis (3ed) Macmillan Publishin Company

- Munkres, James R. ; Topology (2ed) Pearson Prentice Hall