

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL  
DEPARTAMENTO DE CC.NN. Y MATEMÁTICA  
SECCIÓN DE MATEMÁTICA**



**TRABAJO DE GRADO:**

**“INTRODUCCIÓN A FORMAS DIFERENCIALES ”**

**PRESENTADO POR:**

**JENNIFER STEFANY GUERRERO MOLINA  
YESICA ESMERALDA HERNÁNDEZ DE AGUIRRE**

**PARA OPTAR AL GRADO DE:**

**LICENCIADA EN MATEMÁTICA**

**ASESOR DIRECTOR: LIC. WILLIAM NOÉ MERLOS JUÁREZ  
ASESOR ESPECIALISTA: MSC. GABRIEL ALEXANDER CHICAS  
REYES**

**CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, DICIEMBRE DE 2018**

**SAN MIGUEL**

**EL SALVADOR**

**CENTROAMÉRICA**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**

**AUTORIDADES**

**LIC. ROGER ARMANDO ARIAS  
RECTOR**

**DR. MANUEL DE JESÚS JOYA  
VICE-RECTOR ACADÉMICO**

**LIC. NELSON BERNABÉ GRANADOS  
VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO**

**LIC. CRISTOBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ  
SECRETARIO GENERAL**

**LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN  
FISCAL GENERAL**

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

ING. JOAQUÍN ORLANDO MACHUCA  
DECANO

LIC. CARLOS ALEXANDER DÍAZ  
VICE-DECANO

LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNÁNDEZ  
SECRETARIO

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL**

**AUTORIDADES**

**LIC. JOSÉ ALCIDES MARTÍNEZ  
JEFE DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

**ING. DOLORES BENEDICTO SARAVIA  
COORDINADOR DE LA SECCIÓN DE MATEMÁTICA**

**MTRO. JORGE PASTOR FUENTES CABRERA  
DIRECTOR GENERAL DE LOS PROCESOS DE GRADUACIÓN DE LA  
FMO**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL**

**AUTORIDADES**

**MSC. ÓSCAR ULISES LIZAMA VIGIL  
COORDINADOR DE LOS PROCESOS DE GRADUACIÓN DEL  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

**LIC. WILLIAM NOÉ MERLOS JUÁREZ  
DOCENTE ASESOR DIRECTOR**

**MSC. GABRIEL ALEXANDER CHICAS REYES  
DOCENTE ASESOR ESPECIALISTA  
ESCUELA DE MATEMÁTICA  
FACULTAD DE CC. NN. Y MATEMÁTICA SAN SALVADOR**

# Agradecimientos

A **Dios todo Poderoso** por permitir mi existencia, darme sabiduría y hacer realidad el esfuerzo de todos estos años de estudio.

A **Mis Padres Olga Pérez Ortiz**, quien ha sido el pilar fundamental en mi vida y **Genaro Lucio Hernández**, por haberme apoyado en todas las etapas de mi vida y por darme mucho amor y sobre todo sabios consejos que orientan el camino de mi vida.

A **mi esposo e hijo** quienes me impulsaron a seguir adelante, por la paciencia, el cariño, el amor y sobre todo por la confianza que se obtendría este triunfo.

A **Mis Hermanos**, quienes me dieron apoyo y aliento en los momentos difíciles de las diferentes etapas de mi vida.

A **Al Personal Docente de la Sección de Matemática** que dieron su aporte a mi desarrollo académico, mi agradecimiento por guiarme, ayudarme y corregirme, en especial al **Lic. William Noé Merlos** y al **MSc. Gabriel Alexander Chicas** por ayudarnos a culminar nuestro trabajo de Grado. A todos los que, en muchas ocasiones, y de manera desinteresada, tuvieron que sacrificar su tiempo para dedicarlo a orientarme tanto académicamente como moralmente.

A **mis amigos y compañeros y demás personas** por brindarme en todo momento su amistad sincera. A personas y seres queridos que compartieron e hicieron posible este triunfo dándome su apoyo y cariño.

*Yesica Esmeralda Hernández.*

## **Agradezco...**

**A Dios**, primeramente, por tener un plan para mí, por la capacidad y sabiduría que durante seis años de carrera universitaria que me brindó. Por fortalecerme en los momentos difíciles y regalarme tanto bellos recuerdos que tuvieron lugar en la Universidad.

**A mis padres: Luis Guerrero y Francisca Molina de Guerrero**, por apoyarme siempre en todas mis desiciones, por sus consejos, oraciones y por todo su sacrificio para lograr mi superación académica.

**A mis hermanos y demás familia**, por estar pendientes de este proceso, por sus palabras de aliento, motivación y cariño.

**A los catedráticos de la Sección de Matemática**, por su importante aportación en mi procesos académico, en mi desarrollo de criterios, tanto profesional como científicamente.

**A mis asesores: Lic. William Merlos y Msc. Gabriel Reyes**, por su colaboración y por compartir de una manera desinteresada sus conocimientos. Agradecer por su paciencia, por su tiempo invertido y por sus esfuerzos. También agradecer al **Lic. Tobías Martínez**, por formar parte del Tribunal Calificador, por sus atenciones y recomendaciones durante la investigación.

**A mi compañera de tesis: Yesica Hernández**, por la paciencia y la disposición de trabajar juntas durante todo un año esta investigación.

**A mis compañeros y amigos**, por los buenos momentos vividos, porque juntos nos motivamos para no decaer en los momentos difíciles.

*Jennifer Stefany Guerrero.*

# Dedicatorias

*En memoria del **Msc. Marcelino Mejía González**, por su incansable deseo de preparar dentro de la Sección de Matemática investigadores comprometidos de todas las ramas de la Matemática, en específico, las matemáticas abstractas. Ambas autoras de esta tesis, tuvimos el privilegio de recibir las cátedras de Lógica Matemática, Álgebra Moderna I y II, Teoría de la Medida y Seminario de Matemática; siendo estos conocimientos la primicia para seguir investigando matemática. Que en paz descanse.*

*En memoria del **Lic. Antonio Hernández**, por su labor tan importante dentro de la Sección de Matemática de inspirar a otros a compartir los conocimientos adquiridos buscando los medios más factibles para su aprendizaje. Fue el encargado de impartirnos las cátedras: Ecuaciones Diferenciales I e Introducción a los Sistemas Dinámicos; cuyos conocimientos abonaron al desarrollo del proceso investigativo. Que en paz descanse.*



# Índice general

	Página
Resumen	viii
Introducción	ix
Justificación	xi
Objetivos	xii
Nomenclatura	xiii
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Topología General . . . . .	1
1.2. Espacios Duales . . . . .	3
1.3. Conceptos de Geometría Diferencial . . . . .	6
<b>2. Formas Diferenciales en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>12</b>
2.1. Resolución de Ejercicios . . . . .	38
<b>3. Integrales de Línea</b>	<b>44</b>
3.1. Resolución de Ejercicios . . . . .	56
<b>4. Variedades Diferenciables</b>	<b>59</b>
4.1. Resolución de Ejercicios . . . . .	91
<b>5. Integración sobre Variedades</b>	<b>92</b>
5.1. Integración de Formas Diferenciales . . . . .	92
5.2. Teorema de Stokes . . . . .	98
5.3. Lema de Poincaré . . . . .	107
5.4. Resolución de Ejercicios . . . . .	109

<b>6. Geometría Diferencial en Superficies</b>	<b>112</b>
6.1. Ecuaciones de Estructura de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	112
6.2. Superficies en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	121
6.3. Geometría intrínseca de Superficies . . . . .	129
6.4. Resolución de Ejercicios . . . . .	136
<b>7. Teorema de Gauss-Bonnet y Teorema de Morse</b>	<b>140</b>
7.1. Teorema de Gauss-Bonnet . . . . .	140
7.2. El Teorema de Morse . . . . .	152
7.3. Resolución de Ejercicios . . . . .	160
<b>Bibliografía</b>	<b>162</b>

# Índice de figuras

1.1.	Superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ . . . . .	8
1.2.	Las parametrizaciones $\mathbf{x}_i$ cubren la esfera $\mathbb{S}^2$ . . . . .	10
2.1.	El espacio tangente puede verse como el espacio de $n$ -vectores cuyo punto inicial está ubicado en el punto $p$ . . . . .	12
2.2.	El campo vectorial $F(x, y) = (-y, x)$ . . . . .	14
2.3.	Para los $(e_i)_p$ ubicamos el punto inicial de $e_i$ en el punto $p$ . . . . .	16
3.1.	$V$ es conexo si, para $x, y \in V$ , existe una curva diferenciable a trozos $\mathbf{c}$ en $V$ tal que $\mathbf{c}(a) = x$ y $\mathbf{c}(b) = y$ . . . . .	47
3.2.	La curva $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 \cup (-\mathbf{c}_2)$ es cerrada. . . . .	48
3.3.	$\mathbf{c} \cup \mathbf{c}_i$ une a $x_0$ con $x + t e_i$ . . . . .	49
3.4.	Representación gráfica de una homotopía $H$ . . . . .	54
3.5.	El subrectángulo $R_{j,k}$ surge a partir de las líneas $t = \text{const.}$ , $s = \text{const.}$ , de tal manera que el diámetro de cada $R_{j,k}$ sea más pequeño que $d$ . . . . .	55
3.6.	Arco de la parábola $y = x^2$ . . . . .	57
3.7.	$U \cup V$ . . . . .	58
4.1.	Condición 2. de la definición (4.2) . . . . .	60
4.2.	Cambio de proyección estereográfica. . . . .	67
4.3.	Función diferenciable. . . . .	69
4.4.	Vector tangente en $p$ . . . . .	72
4.5.	Representación de la función $d\varphi_p$ de la Proposición (4.1) . . . . .	73
4.6.	Traza de la curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ . . . . .	77
4.7.	Traza de la curva $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ . . . . .	78
4.8.	Para $(x, y)$ , obtenemos $f_3^+(x_1, x_2) = (x_1, x_2, D_3)$ y $f_3^-(x_1, x_2) = (x_1, x_2, -D_3)$ . . . . .	81
5.1.	1(a): Función $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . 1(b): Función $\gamma$ . 1(c): El caso de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	96
5.2.	El semiespacio $H^2$ . . . . .	100
5.3.	Parametrizaciones $f_1 : U_1 \rightarrow M$ y $f_2 : U_2 \rightarrow M$ alrededor de $p$ . . . . .	102
5.4.	Caso A.1 . . . . .	104
5.5.	Caso A.2 . . . . .	105

6.1.	$t$ es el vector tangente, $n$ es el vector normal y $b$ es el vector binormal. . . . .	120
6.2.	La función de Gauss. . . . .	122
6.3.	Superficie de rotación con eje $y$ . . . . .	125
6.4.	Un ejemplo de campo vectorial sobre $\mathbb{S}^2$ . . . . .	136
7.1.	Algunos campos vectoriales en el plano con singularidades aisladas y sus índices respectivos. . . . .	142
7.2.	La singularidad $(0, 0)$ del campo $X(x, y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ tiene índice 1. . . . .	143
7.3.	La singularidad $(0, 0)$ del campo vectorial $X(x, y) = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$ tiene índice $-1$ . . . . .	144
7.4.	La singularidad $(0, 0)$ del campo $X(x, y) = (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$ tiene índice 2. . . . .	145
7.5.	En el caso que dos curvas cerradas simples no se intersecan. . . . .	146
7.6.	En el caso que dos curvas cerradas simples se intersecan, se construye $C_3$ que encierre $p$ . . . . .	147
7.7.	Mostramos el campo en dos triángulos de la triangulación. . . . .	150
7.8.	Triangulación de la esfera $\mathbb{S}^2$ con 8 triángulos. . . . .	151
7.9.	Una triangulación del toro $\mathbb{T}$ . . . . .	152
7.10.	El campo vectorial según el punto crítico mínimo, máximo o punto de silla. . . . .	154

# Resumen

Una forma diferencial es un objeto matemático que aparece naturalmente en el cálculo multivariable, cálculo tensorial y en física. Comúnmente es entendida como un operador multilineal antisimétrico definido sobre el espacio vectorial tangente a una variedad diferenciable. El concepto de formas diferenciales es una generalización sobre ideas previas como el gradiente, la divergencia, el rotacional, etc. Esto las convierte en una herramienta indispensable en el estudio de las variedades diferenciables, es por eso que se profundizará la teoría de esta área, dando temáticas para una bibliografía completa. Se construirá una teoría sólida con algunos ejemplos y la resolución de algunos ejercicios. Para ello se hará uso de fuentes bibliográficas confiables tanto escritas como virtuales. Se pretende demostrar, usando la teoría construida, los teoremas de Gauss-Bonnet y Morse.

*Palabras clave:* formas diferenciales, superficies, variedades diferenciables, campos vectoriales, teorema de Gauss-Bonnet, teorema de Morse.

# Introducción

A continuación se presenta el informe final del trabajo de investigación titulado: “**Introducción a formas diferenciales**”. Damos a conocer los objetivos que se persiguieron a lo largo del proceso, junto con la justificación del estudio.

A continuación, detallamos brevemente el contenido de cada capítulo.

En el **Capítulo I** presentamos un listado de temáticas previas para el desarrollo de la teoría de Formas diferenciales. Estos contenidos son de las áreas: Topología, Álgebra Lineal, Cálculo diferencial y Vectorial y Geometría Diferencial.

En el **Capítulo II** se introducen las formas diferenciales en  $\mathbb{R}^n$ . Se asumen únicamente los conocimientos del cálculo. El objetivo es para definir en  $\mathbb{R}^n$  campos de formas alternantes que puedan ser usados para obtener resultados geométricos.

En el **Capítulo III**, se comienza integrando formas diferenciales de grado uno a lo largo de curvas en  $\mathbb{R}^2$ . Esto permite algunas aplicaciones de las ideas del Capítulo II, donde se definieron dichas formas.

En el **Capítulo IV**, se definen las variedades diferenciables y se muestra una amplia lista de ejemplos. Definimos además, funciones diferenciables, vectores tangentes, espacio tangente, todo esto sobre variedades abstractas. Al final de este capítulo, presentamos las definiciones de formas diferenciales, campos vectoriales y orientabilidad para variedades.

El **Capítulo V**, por su parte, contiene la teoría de integración de formas sobre variedades diferenciables; y se muestran dos grandes resultados de la integración sobre variedades, a saber, el teorema de Stokes y el lema de Poincaré.

En el **Capítulo VI** se aplica la teoría de formas diferenciales para estudiar geometría diferencial. Presentamos las ecuaciones de estructura de  $\mathbb{R}^n$ , que dan vida al método del marco móvil sobre superficies. Esto sirve para definir la geometría intrínseca sobre superficies en  $\mathbb{R}^3$ , particularmente.

Y por último, en el **Capítulo VII** demostramos el teorema de Gauss-Bonnet y el teorema de Morse, utilizando toda la teoría desarrollada.

Al final de cada capítulo se han anexado algunos ejercicios resueltos para mejor comprensión de los contenidos desarrollados. Y al final del documento aparece la bibliografía.

# Justificación

Esta investigación trata sobre una Introducción a Formas Diferenciales, la cual nace con el objetivo de enriquecer la teoría disponible sobre Geometría Diferencial en la Facultad Multidisciplinaria Oriental de la Universidad de El Salvador y con ello cumplir los requerimientos del trabajo de grado para optar al título de Licenciatura en Matemática. Formando una bibliografía práctica y completa para temas relacionados a la Geometría Diferencial, de manera específica, a las Formas diferenciales y que sirva para futuras investigaciones en esta área de la geometría no euclidiana.

Se pretende presentar un documento que dote a quien lo estudie de los conocimientos necesarios de álgebra y geometría para realizar cálculos concretos.

Debido a la relación existente entre las formas diferenciales con otras áreas (como física), es interesante profundizar en estos objetos matemáticos. Uno de los grandes resultados al desarrollar esta teoría es que, nos proporciona una base para demostrar el teorema de Gauss-Bonnet para superficies compactas orientables, y el teorema de Morse, que es una relación entre la característica de Euler de una superficie y los puntos críticos de cierta clase de funciones diferenciables sobre tal superficie.



# Objetivos

## General

- Desarrollar una teoría sólida y detallada de las formas diferenciales, a partir de espacios conocidos como  $\mathbb{R}^n$  a espacios generales y de interés, como lo son las variedades diferenciables.

## Específicos

- Proveer una lista de temáticas básicas para el desarrollo de la teoría de formas diferenciales.
- Estudiar la teoría de superficies usando el lenguaje de formas diferenciales.
- Demostrar, con base en la teoría desarrollada, los teoremas de Gauss-Bonnet y el teorema de Morse.

# Nomenclatura

- $\mathcal{P}$  : Conjunto potencia.
- $\cup$  : Unión de conjuntos.
- $\cap$  : Intersección de conjuntos.
- $\subset$  : Inclusión de conjuntos.
- $\circ$  : Composición de funciones.
- $V^*$  : Espacio dual de  $V$ .
- $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  : Plano real proyectivo.
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  : Espacio real proyectivo.
- $\wedge$  : Producto cuña.
- $\|a\|$  : Norma de  $a$ .
- $\Lambda^n$  : Espacio de formas multilineales y alternantes.
- $T$  : Fibrado tangente.
- $T^*$  : Fibrado cotangente.
- $v_p$  : Vector con inicio en  $p$ .
- $T_p$  : Espacio tangente en  $p$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Topología General

**Definición 1.1.** Una **topología** sobre un conjunto  $X$  es una colección de subconjuntos  $\mathcal{T}$  de  $X$  que satisface:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .
2.  $U_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}$ .
3.  $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$ .

Se dirá que  $U$  es un entorno de  $x$  si dados  $x \in X$  y  $U \in \mathcal{T}$ , entonces  $x \in U$ .

Formalmente, un espacio topológico es un par  $(X, \mathcal{T})$ , es decir, un conjunto y una topología sobre el conjunto. A menudo nos referiremos al espacio topológico haciendo mención únicamente del conjunto cuando no haya confusión en cuanto a la topología.

**Definición 1.2.** Sea  $X$  un conjunto, una **base para una topología**  $\mathcal{T}_X$  es una colección  $\mathcal{B}$  de subconjuntos abiertos de  $X$  (llamados **básicos**) tales que:

1.  $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B$ .
2.  $\forall x \in B_1 \cap B_2$  con  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \exists B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

**Definición 1.3.** Una **base numerable** es aquella que tiene un número contable de elementos básicos.

**Definición 1.4.** Si  $d$  es una métrica sobre un conjunto  $X$ , entonces la colección de todas las bolas  $B_d(x, \varepsilon) := \{y \in X; d(x, y) < \varepsilon \text{ de radio } \varepsilon > 0 \text{ y } x \in X\}$  es una base para una topología sobre  $X$ , denominada **topología métrica** inducida por  $d$ .

**Definición 1.5.** Sean  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . La **métrica euclídea** en  $\mathbb{R}^n$ , la definimos mediante la ecuación

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Cuando  $\mathbb{R}^n$  tenga la topología dada por la métrica euclídea se le llamará la topología usual sobre  $\mathbb{R}^n$ . De aquí en adelante nos referiremos a las bolas  $B_d(x, \varepsilon)$  como  $B(x, \varepsilon)$  refiriéndonos siempre a la topología usual.

**Definición 1.6. (Conjunto cerrado).** Un subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$  se dice que es **cerrado** si el conjunto  $X - A$  es abierto.

**Definición 1.7.** Dado un subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$ , la **clausura** de  $A$  se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a  $A$ . Es denotado por  $\bar{A}$  y representa la clausura de  $A$  en  $X$ .

**Definición 1.8.** Un espacio topológico  $X$  se denomina **espacio de Hausdorff** si para cada par de puntos  $x_1, x_2 \in X$  tales que  $x_1 \neq x_2$ , existen  $U$  entorno de  $x_1$  y  $V$  entorno de  $x_2$  tal que  $U \cap V = \emptyset$ .

**Definición 1.9.** Sean  $(X, \mathcal{T}_X)$  e  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  dos espacios topológicos. Una función  $f : X \rightarrow Y$  se dice que es **continua** si, para cada  $V \in \mathcal{T}_Y$ , se tiene que  $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ .

**Definición 1.10.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos, sea  $f : X \rightarrow Y$  una biyección. Si  $f$  y su inversa  $f^{-1}$  son ambas continuas, entonces se dice que  $f$  es un **homeomorfismo**.

**Definición 1.11.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua inyectiva entre espacios topológicos. Sea  $Z$  el conjunto imagen  $f(X)$ , considerado como un subespacio de  $Y$ ; entonces, la función  $f' : X \rightarrow Z$  obtenida al restringir el rango de  $f$ , es biyectiva. Si ocurre que  $f'$  es un homeomorfismo de  $X$  con  $Z$ , decimos que la aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es un **embebimiento** de  $X$  en  $Y$ .

**Definición 1.12.** Una colección  $\mathcal{A}$  de subconjuntos del espacio  $X$  se dice que cubre a  $X$ , o que es un **cubrimiento** de  $X$ , si la unión de los elementos de  $\mathcal{A}$  coincide con  $X$ . Se dice que  $\mathcal{A}$  es un **cubrimiento abierto** de  $X$  si es un cubrimiento de  $X$  formado por conjuntos abiertos de  $X$ .

**Definición 1.13. (Compacidad).** Un espacio  $X$  se dice que es **compacto** si de cada cubrimiento abierto  $\mathcal{A}$  de  $X$  podemos extraer una subcolección finita que también cubre a  $X$ .

**Definición 1.14.** Sea  $X$  un espacio topológico, sea  $Y$  un conjunto y sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación sobreyectiva, entonces

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

es una topología sobre  $Y$  llamada **topología cociente** inducida por  $f$ . A  $f$  se le llama **aplicación cociente**.

Para más detalles sobre Topología General véase en [3].

## 1.2. Espacios Duales

**Definición 1.15.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial ( $K$  un cuerpo). Se llama **espacio vectorial dual** de  $V$ , y se denota  $V^*$ , al  $K$  espacio vectorial

$$V^* = \{f : V \longrightarrow K; f \text{ es una transformación lineal}\}$$

Afirmamos que  $\dim(V^*) = \dim(V) = n$ , para verificar esto, recordemos algunos resultados del álgebra lineal.

**Definición 1.16.** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales. Si  $f : V \longrightarrow W$  es una transformación lineal inyectiva y sobreyectiva, se dirá que  $f$  es un isomorfismo.

Si  $f$  es un isomorfismo:

1.  $\text{Ker}(f) = \{v \in V; f(v) = 0\} = \mathbf{0}$ .

2.  $f(V) = W$ .

**Teorema 1.1.**<sup>1</sup>

Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales,  $V$  de dimensión finita, y sea

$f : V \longrightarrow W$  una transformación lineal. Entonces  $\dim(V) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$ .

**Definición 1.17.** Sean  $n, m \in \mathbb{N}$ . El conjunto de las matrices de  $n$  filas y  $m$  columnas con coeficientes en un cuerpo  $K$  es

$$\text{Mat}_{n \times m}(K) \cong \left\{ \left( \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{array} \right); a_{ij} \in K, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \right\}.$$

Para definir una matriz en  $\text{Mat}_{n \times m}(K)$  basta especificar, para cada  $1 \leq i \leq n$  y cada  $1 \leq j \leq m$ , qué elemento de  $K$  se halla en el lugar  $ij$  (correspondiente a la intersección de la fila  $i$  y la columna  $j$ ) de la matriz.

**Definición 1.18.** Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita. Sean

$B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  y  $B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$  una base de  $W$ . Sea  $f : V \longrightarrow W$  una transformación lineal. Supongamos que  $f(v_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} w_i$  ( $1 \leq j \leq n$ ). Se llama **matriz de  $f$**  en las bases  $B_1, B_2$ , y se denota  $|f|_{B_1 B_2}$ , a la matriz en  $\text{Mat}_{n \times m}(K)$  definida por  $(|f|_{B_1 B_2})_{ij} = \alpha_{ij}$  para cada  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ .

**Teorema 1.2.**<sup>2</sup> Sean  $V$  y  $W$  dos  $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita, con  $\dim(V) = n$  y  $\dim(W) = m$ . Sean  $B$  y  $B'$  bases de  $V$  y  $W$  respectivamente. Entonces la función

$$T : \{f : V \rightarrow W; f \text{ es una transformación lineal}\} \longrightarrow \text{Mat}_{n \times m}(K), \text{ definida por } T(f) = |f|_{BB'} \text{ es un isomorfismo.}$$

<sup>1</sup>Vea la prueba en [4, página 73-74]

<sup>2</sup>Vea la prueba en [4, páginas 84-85]

En nuestro caso, como  $\dim(V) = n$ , y dadas  $B$  una base de  $V$  y  $B'$  una base de  $W$ , se tiene que  $T : V^* \rightarrow \text{Mat}_{1 \times n}(K)$  definida por  $T(f) = |f|_{BB'}$ , es un isomorfismo. Así, por el teorema (1.1)

$$\dim(V^*) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(T(V^*)) = \dim(\mathbf{0}) + \dim(\text{Mat}_{1 \times n}(K)) = 0 + n = n = \dim(V).$$

**Ejemplo 1.1.** *Se consideran las transformaciones lineales  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}$  definidas por  $\delta_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$  para  $i = 1, 2, 3$ .*

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^3)^* &= \{f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ es una transformación lineal}\} \\ &= \{f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; f(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; f = a\delta_1 + b\delta_2 + c\delta_3 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle \delta_1, \delta_2, \delta_3 \rangle \end{aligned}$$

Sea  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Las funciones del ejemplo anterior cumplen la condición  $\delta_i(e_j) = \delta_{i,j}$  (donde  $\delta_{i,j}$  es la función delta de Kronecker, definida por  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$  y  $\delta_{i,j} = 0$  si  $i \neq j$ ). En lo que sigue, fijada una base de cualquier espacio vectorial  $V$  de dimensión finita, vamos a ver cómo encontrar una base de  $V^*$  que cumpla esta propiedad.

**Proposición 1.1.**<sup>3</sup> *Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ , y sea  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ . Existe una única base  $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  de  $V^*$  tal que*

$$\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$B^*$  se llama la **base dual** de  $B$ .

*Demostración.* Para cada  $1 \leq i \leq n$ , sea  $\varphi_i : V \rightarrow K$  la transformación lineal definida en la base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  por:

$$\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Como  $\dim(V^*) = n$ , para ver que  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$  forman una base para  $V^*$ , basta verificar que son linealmente independientes. Sean  $a_1, \dots, a_n \in K$  tales que

$$a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n = 0.$$

---

<sup>3</sup>Vea la prueba en [4, página 96]

Evaluando en  $v_i$ , resulta que  $0 = a_1\varphi_1(v_1) + \cdots + a_i\varphi_i(v_i) + a_n\varphi_n(v_n) = a_i$  para  $i = 1, \dots, n$ .

En consecuencia,  $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  verifica las condiciones requeridas.

Supongamos que  $\{\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n\}$  sea otra base que satisface las mismas condiciones. Entonces, para cada  $1 \leq i \leq n$ , se tiene que

$$\text{a) } \tilde{\varphi}_i(v_j) = 0 = \varphi_i(v_j) \text{ si } 1 \leq j \leq n, j \neq i.$$

$$\text{b) } \tilde{\varphi}_i(v_i) = 1 = \varphi_i(v_i) = 1,$$

es decir,  $\tilde{\varphi}_i$  y  $\varphi_i$  son dos transformaciones lineales que coinciden sobre una base. En consecuencia,  $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i$  para cada  $1 \leq i \leq n$ .  $\square$

### Ejemplo 1.2.

- El ejemplo (1.1) muestra que la base dual de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$  es  $E^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ , donde  $\delta_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$  para  $i = 1, 2, 3$ .
- Sea  $V = \mathbb{R}^2$ . Consideremos la base  $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ . Si  $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2\}$  es la base dual de  $B$ , entonces debe cumplir

$$\begin{cases} \varphi_1(1, 1) & = 1 \\ \varphi_1(1, -1) & = 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \varphi_2(1, 1) & = 0 \\ \varphi_2(1, -1) & = 1 \end{cases}$$

Puesto que para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  vale

$$(x, y) = \frac{x+y}{2}(1, 1) + \frac{x-y}{2}(1, -1)$$

resulta que  $\varphi_1(x, y) = \frac{x+y}{2}$  y  $\varphi_2(x, y) = \frac{x-y}{2}$ .

Si  $B$  es una base de un  $K$ -espacio vectorial  $V$  de dimensión finita y  $B^*$  es una base dual, es posible calcular fácilmente las coordenadas de un elemento de  $V$  en la base  $B$  utilizando la base  $B^*$ . Recíprocamente, utilizando la base  $B$ , es fácil obtener las coordenadas en la base  $B^*$  de un elemento de  $V$ .

**Nota.** Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  y sea  $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  su base dual.

a. Dado  $v \in V$ , podemos escribir  $v = \sum_i^n \alpha_i v_i$  con  $\alpha_i \in K$ . Entonces, para cada  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\varphi_j(v) = \varphi_j \left( \sum_i^n \alpha_i v_i \right) = \sum_i^n \alpha_i \varphi_j(v_i) = \alpha_j.$$

Luego,  $(v)_B = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v))$ .

b. Dada  $\varphi \in V^*$ , existen  $\beta_i \in K$  tales que  $\varphi = \sum_i^n \beta_i \varphi_i$ . Entonces, para cada  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\varphi(v_j) = \left( \sum_i^n \beta_i \varphi_i \right) (v_j) = \sum_i^n \beta_i \varphi_i(v_j) = \beta_j.$$

Luego,  $(\varphi)_{B^*} = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$ .

**Proposición 1.2.** Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una transformación lineal y  $A$  la matriz de la transformación. Entonces  $T$  es inyectiva si y solo si  $\text{rango}(A) = n$ , donde  $n$  es el número de columnas de  $A$ .

### 1.3. Conceptos de Geometría Diferencial

Sea  $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La derivada  $f'(x_0)$  de  $f$  en  $x_0 \in U$  es el límite (cuando existe)

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad x_0 + h \in U$$

Cuando  $f$  tiene derivadas en todos los puntos de un entorno  $V$  de  $x_0$ , podemos considerar la derivada de  $f' : V \rightarrow \mathbb{R}$  en  $x_0$ , que se denomina la *segunda derivada*  $f''(x_0)$  de  $f$  en  $x_0$ , y así sucesivamente.  $f$  es **diferenciable** en  $x_0$  si tiene derivadas continuas de todos los órdenes en  $x_0$ .  $f$  es **diferenciable** en  $U$  si es diferenciable en todos los puntos de  $U$ .

**Definición 1.19.** Sea  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . La **derivada parcial** de  $f$  con respecto a  $x$  en  $(x_0, y_0) \in U$ , denotada por  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ , es, cuando existe la derivada en  $x_0$  de la función de una variable:  $x \rightarrow f(x, y_0)$ . Análogamente, la derivada parcial con respecto a  $y$  en  $(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ , se define como la derivada en  $y_0$  de  $y \rightarrow f(x_0, y)$ . Cuando  $F$  tiene derivadas parciales en todos los puntos de un entorno  $V$  de  $(x_0, y_0)$ , podemos considerar las derivadas parciales segundas en  $(x_0, y_0)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$



$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Y así sucesivamente.  $f$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$  si tiene derivadas parciales de todos los órdenes en  $(x_0, y_0)$ .  $f$  es diferenciable en  $U$  si es diferenciable en todos los puntos de  $U$ .

Ahora estamos interesados en extender la noción de diferenciabilidad al caso de aplicaciones  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Decimos que  $F$  es **diferenciable** si sus componentes  $F_j = y_j \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $(y_1, \dots, y_m)$  son las coordenadas en  $\mathbb{R}^m$ , son funciones diferenciables.

**Definición 1.20.** Un **vector tangente** a una aplicación  $\alpha : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  en  $t_0 \in U$  es el vector de  $\mathbb{R}^m$

$$\alpha'(t_0) = (x'_1(t_0), \dots, x'_m(t_0)).$$

**Definición 1.21.** Sea  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación diferenciable. A cada  $p \in U$  asociamos una aplicación lineal  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que se denomina el diferencial de  $F$  en  $p$  y se define como sigue. Sea  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ , una curva diferenciable tal que

$\alpha(0) = p, \alpha'(0) = w, w \in \mathbb{R}^n$ . Por la regla de la cadena, la curva  $\beta : F \circ \alpha(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$  es también diferenciable. Entonces  $dF_p(w) = \beta'(0)$ .

**Definición 1.22.** La matriz de  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  en las bases canónicas de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ , es decir, la matriz  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ , se llama la **matriz jacobiana** de  $F$  en  $p$ . Cuando  $n = m$ , esta matriz es cuadrada y su determinante se denomina el **determinante jacobiano**; es habitual denotarlo por

$$\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

**Proposición 1.3.** <sup>4</sup>(La regla de la cadena para aplicaciones)

Sean  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $G : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  aplicaciones diferenciables, donde  $U$  y  $V$  son conjuntos abiertos tales que  $F(U) \subset V$ . Entonces  $G \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  es una aplicación diferenciable, y

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p, \quad p \in U.$$

**Definición 1.23.** Un **difeomorfismo** es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable. Como tal un difeomorfismo es una aplicación que posee aplicación inversa, por supuesto estas dos aplicaciones son diferenciables.

Uno de los teoremas más importantes del cálculo diferencial es el denominado teorema de la función inversa, el cual, con la presente notación, dice lo siguiente. (Recuerde que una aplicación lineal  $A$  es un isomorfismo si la matriz de  $A$  es invertible.)

<sup>4</sup>Vea la prueba en [1, página 129]

**Teorema 1.3.** <sup>5</sup>(Teorema de la función inversa). Sea  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación diferenciable y supóngase que en  $p \in U$  el diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un isomorfismo. Entonces existe un entorno  $V$  de  $p$  en  $U$  y un entorno  $W$  de  $F(p)$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $F : V \rightarrow W$  tiene una inversa diferenciable  $F^{-1} : W \rightarrow V$ .

**Definición 1.24.** Un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si, para cada  $p \in S$ , existe un entorno  $V$  en  $\mathbb{R}^3$  y una aplicación  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  de un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que (Fig. (1.1))

1.  $\mathbf{x}$  es diferenciable. Esto significa que si escribimos

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

las funciones  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes de  $U$ .

2.  $\mathbf{x}$  es un homeomorfismo. Como  $\mathbf{x}$  es continua por la condición 1, esto significa que  $\mathbf{x}$  admite una inversa  $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  que es continua; es decir,  $\mathbf{x}^{-1}$  es la restricción de la función continua  $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida sobre un conjunto abierto  $W$  que contiene a  $V \cap S$ .

3. Condición de regularidad. Para cada  $q \in U$ , el diferencial  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva.

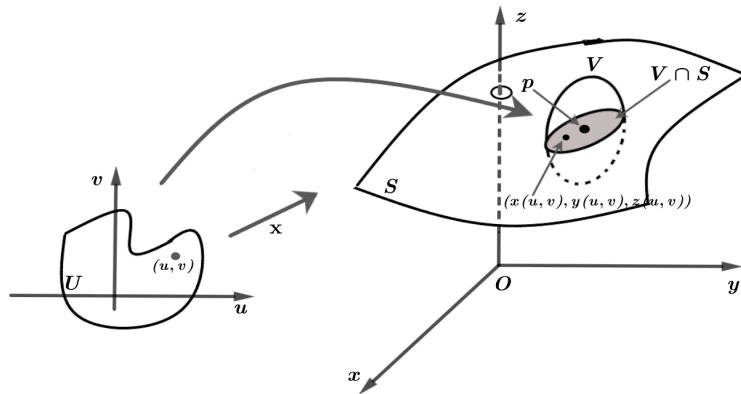


Figura 1.1. Superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ .

La aplicación  $\mathbf{x}$  se denomina una parametrización o un sistema local de coordenadas en (un entorno de)  $p$ . El entorno  $V \cap S$  se denomina un entorno coordenado.

<sup>5</sup>Vea la prueba en [12, página 33-34]

Para dar de una manera más familiar la condición 3, calculemos la matriz de la aplicación lineal  $d\mathbf{x}_q$  en las bases canónicas  $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$ , de coordenadas  $(u, v)$  y  $f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$ , de coordenadas  $(x, y, z)$ .

Sea  $q = (u_0, v_0)$ . El vector  $e_1$  es tangente a la curva  $u \rightarrow (u, v_0)$  cuya imagen a través de  $\mathbf{x}$  es la curva

$$u \rightarrow (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)).$$

Esta curva imagen (denominada la *curva coordenada*  $v = v_0$ ) está contenida en  $S$  y tiene en  $\mathbf{x}(q)$  el vector tangente

$$\left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u},$$

donde las derivadas están evaluadas en  $(u_0, v_0)$  y el vector se expresa por sus coordenadas en la base  $\{f_1, f_2, f_3\}$ . En virtud a la definición de diferencial

$$d\mathbf{x}_q(e_1) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}.$$

De manera similar, utilizando la curva coordenada  $u = u_0$  (la imagen por  $\mathbf{x}$  de la curva  $v \rightarrow (u_0, v)$ ), obtenemos

$$d\mathbf{x}_q(e_2) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}.$$

Así, la matriz de la aplicación lineal  $d\mathbf{x}_q$  en la base referida es

$$d\mathbf{x}_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

La condición 3 de la definición (1.24) puede expresarse ahora pidiendo que los dos vectores columna de esta matriz sean linealmente independientes; o, equivalentes, que el producto vectorial  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0$ ; o, todavía de otra forma, que uno de los menores de orden dos de matriz de  $d\mathbf{x}_q$ , es decir, uno de los determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)},$$

sea diferente de cero en  $q$ .

**Ejemplo 1.3.** *Demostremos que la esfera unitaria*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

es una superficie regular. Primero verifiquemos que la aplicación  $\mathbf{x}_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{x}_1(x, y) = (x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), \quad (x, y) \in U,$$

donde,  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$  y  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  es una parametrización de  $\mathbb{S}^2$ . Obsérvese que  $\mathbf{x}_1(U)$  es el subconjunto abierto de  $\mathbb{S}^2$  por encima del plano  $xy$ .

Ya que  $x^2 + y^2 < 1$ , la función  $+\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$  tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Por tanto,  $\mathbf{x}_1$  es diferenciable y se cumple la condición 1.

La condición 3 se verifica inmediatamente, ya que si expresamos a

$$\mathbf{x}_1(u, v) = (x(u, v) = u, y(u, v) = v, z(u, v) = +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$$

entonces

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x(u, v))}{\partial u} & \frac{\partial(x(u, v))}{\partial v} \\ \frac{\partial(y(u, v))}{\partial u} & \frac{\partial(y(u, v))}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Para comprobar la condición 2, observamos que  $\mathbf{x}_1$  es inyectiva y que  $\mathbf{x}_1^{-1}$  es la restricción de la proyección (continua)  $\pi(x, y, z) = (x, y)$  sobre el conjunto  $\mathbf{x}_1(U)$ . Por tanto,  $\mathbf{x}_1^{-1}$  es continua en  $\mathbf{x}_1(U)$ .

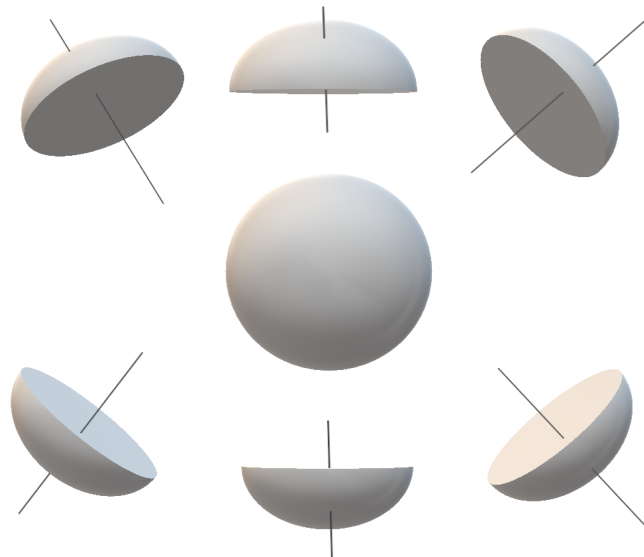


Figura 1.2. Las parametrizaciones  $\mathbf{x}_i$  cubren la esfera  $\mathbb{S}^2$ .

Ahora recubriremos totalmente la esfera con parametrizaciones similares, de la manera siguiente. Definimos  $\mathbf{x}_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mediante

$$\mathbf{x}_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), \quad (x, y) \in U,$$

se comprueba que  $\mathbf{x}_2$  es una parametrización y obsérvese que  $\mathbf{x}_1(U) \cup \mathbf{x}_2(U)$  recubre  $\mathbb{S}^2$  excepto el ecuador

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

Entonces, utilizando los planos  $xz$  y  $zy$ , definimos las parametrizaciones

$$\mathbf{x}_3(x, z) = (x, +\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z),$$

$$\mathbf{x}_4(x, z) = (x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z),$$

$$\mathbf{x}_5(y, z) = (+\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z),$$

$$\mathbf{x}_6(y, z) = (-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z),$$

las cuales, junto con  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ , cubren a  $\mathbb{S}^2$  completamente (Fig. (1.2)), demostrando que  $\mathbb{S}^2$  es una superficie regular.

**Proposición 1.4.** <sup>6</sup> (Cambio de parámetros.) Sea  $p$  un punto de una superficie regular  $S$ , y sean  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ ,  $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  dos parametrizaciones de  $S$  tal que  $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$ . Entonces el cambio de coordenadas

$h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$  es un difeomorfismo; es decir,  $h$  es diferenciable y tiene una inversa diferenciable.

**Teorema 1.4.** <sup>7</sup> (Teorema de Cambio de variable.) Suponga que  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  y con derivada continua, y que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua. Entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) \cdot g'.$$

En efecto, si  $F$  es una primitiva de  $f$  en  $[g(a), g(b)]$ , se tiene que

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = F(g(b)) - F(g(a)).$$

---

<sup>6</sup>Vea la prueba en [1, página 71-72]

<sup>7</sup>Vea la prueba en [12, página 62]

# Capítulo 2

## Formas Diferenciales en $\mathbb{R}^n$

El objetivo de este capítulo es establecer, de forma precisa y completa, los conceptos del cálculo vectorial. Es posible incluir todos estos conceptos en una única teoría, la de formas diferenciales, la cual forma la base no sólo para estos sino para la comprensión de la geometría diferencial moderna.

**Definición 2.1.** Para  $p \in \mathbb{R}^n$ , el espacio tangente en  $p$  es el conjunto

$$\mathbb{R}_p^n = \{(p, u) : u \in \mathbb{R}^n\}$$

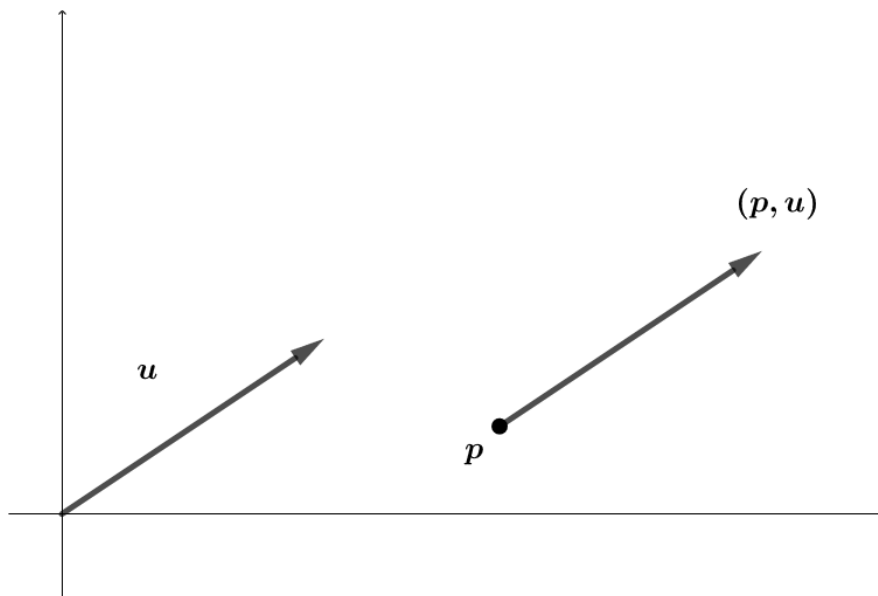


Figura 2.1. El espacio tangente puede verse como el espacio de  $n$ -vectores cuyo punto inicial está ubicado en el punto  $p$ .

Es decir,  $\mathbb{R}_p^n$  es una copia del espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , con base en el punto  $p$ . Podemos entender el espacio tangente como el espacio de  $n$ -vectores cuyo punto inicial, en lugar de estar ubicado en el origen, está ubicado en el punto  $p$ , como en la Figura (2.1). Si  $(p, u) \in \mathbb{R}_p^n$ , lo denotaremos simplemente como  $u_p$ .

**Proposición 2.1.** *El espacio tangente  $\mathbb{R}_p^n$  es un espacio vectorial con las operaciones*

$$u_p + v_p = (u + v)_p, \quad \alpha v_p = (\alpha v)_p,$$

con  $u_p, v_p \in \mathbb{R}_p^n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Sean  $u_p, v_p, w_p \in \mathbb{R}_p^n$  (nótese que  $\mathbb{R}^n$  es un espacio vectorial) y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Procederemos a mostrar que  $\mathbb{R}_p^n$  es un espacio vectorial a partir de la definición:

1.  $u_p + v_p = (u + v)_p = (p, u + v)$ , como  $u, v \in \mathbb{R}$ , entonces  $u + v \in \mathbb{R}^n$ . Así,

$$u_p + v_p = (u + v)_p = (p, u + v) \in \mathbb{R}_p^n.$$

2.  $u_p + v_p = (u + v)_p = (p, u + v) = (p, v + u)$  ya que  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . Así,

$$u_p + v_p = (u + v)_p = (p, u + v) = (p, v + u) = (v + u)_p = v_p + u_p.$$

3.  $(u_p + v_p) + w_p = (u + v)_p + w_p = ((u + v) + w)_p = (p, (u + v) + w) = (p, u + (v + w))$  ya que  $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ . Así,

$$\begin{aligned} (u_p + v_p) + w_p &= (u + v)_p + w_p = ((u + v) + w)_p \\ &= (p, (u + v) + w) = (p, u + (v + w)) = (p, u) + (p, v + w) = u_p + (v_p + w_p). \end{aligned}$$

4. Como  $\mathbb{R}^n$  es espacio vectorial, entonces existe  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $\forall u \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{0} + u = u$ , entonces

$$u_p = (p, u) = (p, \mathbf{0} + u) = (\mathbf{0} + u)_p = \mathbf{0}_p + u_p,$$

así, existe  $\mathbf{0}_p \in \mathbb{R}_p^n$  tal que  $\forall u_p \in \mathbb{R}_p^n$ ,  $u_p = \mathbf{0}_p + u_p$ .

5. Para  $u \in \mathbb{R}^n$ , existe  $(-u) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $u + (-u) = \mathbf{0}$ . Así,

$$\mathbf{0}_p = (p, \mathbf{0}) = (p, u + (-u)) = u_p + (-u)_p.$$

6.  $\alpha(u_p) = (\alpha u)_p = (p, \alpha u)$ , como  $u \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^n$  es espacio vectorial, entonces  $\alpha u \in \mathbb{R}^n$ . Por lo que,

$$\alpha(u_p) = (p, \alpha u) \in \mathbb{R}_p^n.$$

7.  $\alpha(u_p + v_p) = \alpha(u + v)_p = (\alpha(u + v))_p = (\alpha u + \alpha v)_p = (\alpha u)_p + (\alpha v)_p = \alpha u_p + \alpha v_p$ .

$$8. (\alpha + \beta)u_p = ((\alpha + \beta)u)_p = (\alpha u + \beta u)_p = (\alpha u)_p + (\beta u)_p = \alpha u_p + \beta u_p.$$

$$9. \alpha(\beta u_p) = \alpha(\beta u)_p = (\alpha(\beta u))_p = ((\alpha\beta)u)_p = (\alpha\beta)u_p.$$

$$10. \text{Sea } 1 \in \mathbb{R}, \text{ entonces } 1u_p = (1u)_p = (u)_p.$$

Por tanto, como se satisfacen las diez condiciones,  $\mathbb{R}_p^n$  es un espacio vectorial. □

**Nota.** Una manera más conceptual de entender este resultado es notar que existe una biyección  $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}_p^n$ ,  $(p, u) \mapsto u$  a través de la cual puede transferirse la estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$  hacia  $\mathbb{R}_p^n$ .

Además,  $\mathbb{R}_p^n$  posee el producto escalar

$$u_p \cdot v_p = u \cdot v,$$

donde el producto de la derecha es el producto escalar estándar en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 2.2.** El **fibrado tangente** de  $\mathbb{R}^n$ , denotado por  $T\mathbb{R}^n$ , es la unión disjunta de los espacios tangentes en cada punto de  $\mathbb{R}^n$ , es decir

$$\bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}_p^n.$$

**Definición 2.3.** Un **campo vectorial** es una función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n$  tal que, para cada  $p \in \mathbb{R}^n$ ,

$$F(p) \in \mathbb{R}_p^n$$

En otras palabras, el campo vectorial  $F$  asigna en cada punto  $p$  un vector con inicio en  $p$ .

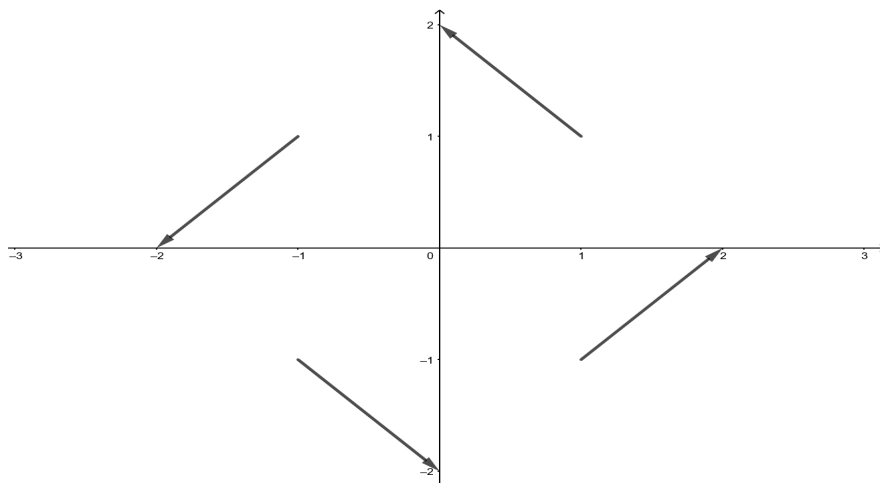


Figura 2.2. El campo vectorial  $F(x, y) = (-y, x)$ .



**Ejemplo 2.1.** Representaremos gráficamente el campo vectorial

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto F(x, y) = (-y, x) \end{aligned}$$

Para representar este campo vectorial se evaluarán algunos puntos  $(x, y)$  en la función  $F(x, y)$ , como por  $F(1, 1) = (-1, 1)$ ,  $F(-1, 1) = (-1, -1)$ ,  $F(-1, -1) = (1, -1)$  y  $F(1, -1) = (1, 1)$ . Luego tomamos, el primer vector resultante  $(-1, 1)$  y se grafica teniendo como punto inicial a  $(1, 1)$ . Aplicando sucesivamente este procedimiento con los otros vectores se obtiene la representación gráfica del campo vectorial que se muestra en la Figura (2.2).

Si  $F, G : \mathbb{R}^n \longrightarrow T\mathbb{R}^n$  son campos vectoriales, entonces podemos definir las siguientes operaciones:

1.  $(F + G)(p) = F(p) + G(p)$ ;
2.  $(\alpha F)(p) = \alpha F(p)$ ;
3. Si  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $(fF)(p) = f(p)F(p)$ ;
4.  $(F \cdot G)(p) = F(p) \cdot G(p)$ .

Si  $e_1, e_2, \dots, e_n$  es la base canónica en  $\mathbb{R}^n$ , esta induce una base canónica para  $\mathbb{R}_p^n$  en cada  $p \in \mathbb{R}^n$ , a saber

$$(e_1)_p, (e_2)_p, \dots, (e_n)_p.$$

Es decir, simplemente ubicamos el punto inicial de cada  $e_i$  en el punto  $p$  (Fig. (2.3)).

Si  $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow T\mathbb{R}^n$  es un campo vectorial, entonces podemos escribirlo en la forma

$$F(p) = F_1(p)(e_1)_p + F_2(p)(e_2)_p + \dots + F_n(p)(e_n)_p,$$

donde las funciones  $F_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  son llamadas **funciones componentes** de  $F$ . Decimos que el campo  $F$  es **diferenciable** si cada componente  $F_i$  es diferenciable.

Para cada  $p \in \mathbb{R}^n$ , consideremos el **espacio dual** de  $\mathbb{R}_p^n$

$$(\mathbb{R}_p^n)^* = \{ \varphi : \mathbb{R}_p^n \longrightarrow \mathbb{R}; \varphi \text{ es lineal} \}.$$

Es decir, es el espacio de las transformaciones lineales de  $\mathbb{R}_p^n$  a  $\mathbb{R}$ .

Recordemos que, al ser  $\mathbb{R}_p^n$  un espacio de dimensión finita, se tiene la siguiente propiedad:

**Proposición 2.2.**  $(\mathbb{R}_p^n)^*$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ .

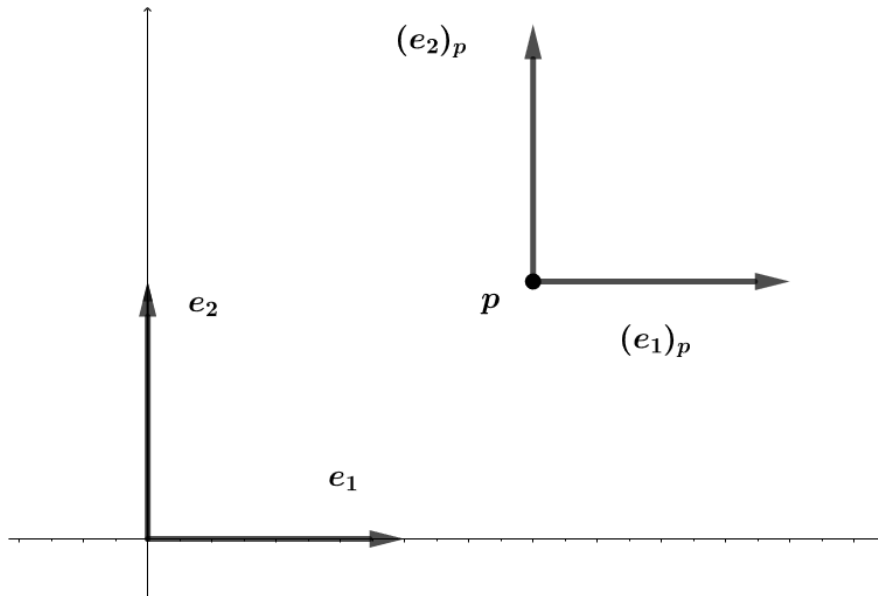


Figura 2.3. Para los  $(e_i)_p$  ubicamos el punto inicial de  $e_i$  en el punto  $p$ .

De manera explícita, toda base  $\{(v_1)_p, (v_2)_p, \dots, (v_n)_p\}$  de  $\mathbb{R}_p^n$  induce una base de  $(\mathbb{R}_p^n)^*$ , llamada la **base dual**, denotada por  $(\widehat{v}_1)_p, (\widehat{v}_2)_p, \dots, (\widehat{v}_n)_p$ , definida de la forma

$$(\widehat{v}_i)_p((v_j)_p) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La base dual inducida por la base canónica  $(e_1)_p, (e_2)_p, \dots, (e_n)_p$  se le llama base dual canónica y se denota por

$$(dx_1)_p, (dx_2)_p, \dots, (dx_n)_p.$$

A cada una de las transformaciones  $(dx_i)_p$  se les llama **diferenciales elementales** en  $p$ . Note que  $(dx_i)_p(v_p) = v_i$ , es decir,  $(dx_i)_p$  sólo toma la coordenada  $i$  del vector  $v_p \in \mathbb{R}_p^n$ .

En el caso de  $\mathbb{R}_p^3$ , considere  $v_p = v_1(e_1)_p + v_2(e_2)_p + v_3(e_3)_p$ , y la base dual canónica  $\{(dx_1)_p, (dx_2)_p, (dx_3)_p\}$ . Así,

$$\begin{aligned} (dx_1)_p(v_p) &= (dx_1)_p(v_1(e_1)_p + v_2(e_2)_p + v_3(e_3)_p) \\ &= v_1(dx_1)_p((e_1)_p) + v_2(dx_1)_p((e_2)_p) + v_3(dx_1)_p((e_3)_p) \\ &= v_1(1) + v_2(0) + v_3(0) \\ &= v_1 \end{aligned}$$

De igual forma para  $(dx_2)_p$  y  $(dx_3)_p$ . Mostramos, entonces, que  $(dx_i)_p$  refleja la coordenada  $i$ -ésima del vector  $v_p$ .

**Definición 2.4.** El **fibrado cotangente** de  $\mathbb{R}^n$ , denotado por  $T^*\mathbb{R}^n$ , es la unión disjunta  $\bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} (\mathbb{R}^n)_p^*$ .

**Definición 2.5.** Una **1-forma diferencial** en  $\mathbb{R}^n$  es una función  $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$  tal que, para cada  $p \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\omega(p) \in (\mathbb{R}^n)_p^*.$$

Para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  podemos escribir

$$\omega(p) = \omega_1(p)(dx_1)_p + \omega_2(p)(dx_2)_p + \cdots + \omega_n(p)(dx_n)_p.$$

A las funciones  $\omega_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se les llama **funciones componentes** de  $\omega$ . Solemos escribir, simplemente,

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i(dx_i)_p \quad \text{ó} \quad \omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i.$$

**Observación 1.** Haremos un paréntesis en nuestro estudio de formas diferenciales para estudiar su relación con los campos vectoriales en  $\mathbb{R}^n$ . Primero, haremos una breve discusión sobre productos internos y el espacio dual.

Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión finita, digamos  $\dim V = n < \infty$ , y  $V^*$  su espacio dual. Si  $V$  tiene producto interno  $(\cdot, \cdot)$ , éste induce un isomorfismo natural entre  $V$  y  $V^*$ ,  $u \mapsto \phi_u$ , donde

$$\phi_u(v) = (u, v).$$

En  $\mathbb{R}^n$ , con el producto punto estándar como producto interno, este isomorfismo está dado por  $e_j \mapsto dx_j$ , como lo habíamos discutido antes. Entonces, este isomorfismo induce un isomorfismo natural entre campos vectoriales y 1-formas diferenciales, definido de la siguiente forma. Si

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n,$$

es un campo vectorial, entonces definimos la 1-forma diferencial  $\omega_F$  dada por

$$\omega_F(p)(v_p) = F(p) \cdot v.$$

Explícitamente, si  $F$  está dado por

$$F(p) = F_1(p)(e_1)_p + F_2(p)(e_2)_p + \cdots + F_n(p)(e_n)_p,$$

entonces

$$\omega_F(p) = F_1(p)(dx_1)_p + F_2(p)(dx_2)_p + \cdots + F_n(p)(dx_n)_p.$$

Revisemos algunas definiciones interesantes en  $\mathbb{R}_p^3$ .

**Definición 2.6.** Sea  $\varphi : \mathbb{R}_p^3 \times \mathbb{R}_p^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $\varphi$  es **bilineal** si es lineal en cada coordenada. Es decir, para  $u_p, v_p, w_p \in \mathbb{R}_p^3$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi(\alpha u_p + \beta v_p, w_p) = \alpha \varphi(u_p, w_p) + \beta \varphi(v_p, w_p),$$

$$\varphi(u_p, \alpha v_p + \beta w_p) = \alpha \varphi(u_p, v_p) + \beta \varphi(u_p, w_p).$$

**Ejemplo 2.2. (Producto punto)**

El ejemplo más natural de una forma bilineal es la inducida por el producto punto en  $\mathbb{R}_p^3$ , dada por

$$\varphi(u_p, v_p) = u \cdot v.$$

En efecto, para  $u_p, v_p, w_p \in \mathbb{R}_p^3$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha u_p + \beta v_p, w_p) &= (\alpha u_p + \beta v_p) \cdot w_p \\ &= ((\alpha u)_p + (\beta v)_p) \cdot w_p \\ &= (\alpha u + \beta v)_p \cdot w_p = (\alpha u + \beta v) \cdot w \\ &= (\alpha u) \cdot w + (\beta v) \cdot w \\ &= \alpha(u \cdot w) + \beta(v \cdot w) \\ &= \alpha \varphi(u_p, w_p) + \beta \varphi(v_p, w_p) \end{aligned}$$

Se satisface la primera condición de la definición anterior. La segunda se desarrolla similar. Por tanto concluimos que el producto punto sobre  $\mathbb{R}_p^3$  es bilineal.

**Definición 2.7.** Decimos que la forma bilineal  $\varphi$  es **alternante** si, para cada  $u_p, v_p \in \mathbb{R}_p^3$ ,

$$\varphi(u_p, v_p) = -\varphi(v_p, u_p).$$

Podemos notar que,  $\varphi$  es alternante si y sólo si  $\varphi(u_p, u_p) = 0$  para todo  $u_p \in \mathbb{R}_p^3$ .

En efecto, si  $\varphi$  es alternante, entonces

$$\begin{aligned} \varphi(u_p, u_p) &= -\varphi(u_p, u_p) \\ \varphi(u_p, u_p) + \varphi(u_p, u_p) &= 0 \\ 2\varphi(u_p, u_p) &= 0 \\ \varphi(u_p, u_p) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, partamos de  $\varphi(u_p + v_p, u_p + v_p) = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(u_p + v_p, u_p + v_p) = \varphi(u_p, u_p + v_p) + \varphi(v_p, u_p + v_p) \\ 0 &= \varphi(u_p, u_p) + \varphi(u_p, v_p) + \varphi(v_p, u_p) + \varphi(v_p, v_p) \\ 0 &= 0 + \varphi(u_p, v_p) + \varphi(v_p, u_p) + 0 \\ \varphi(u_p, v_p) &= -\varphi(v_p, u_p). \end{aligned}$$

Al conjunto de formas bilineales y alternantes en  $\mathbb{R}_p^3$  lo denotaremos por  $\Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)$ .

**Definición 2.8.** Si  $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}_p^3)^*$ , definimos el **producto cuña** de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  como

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2(u_p, v_p) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(u_p) & \varphi_1(v_p) \\ \varphi_2(u_p) & \varphi_2(v_p) \end{pmatrix}$$

**Ejemplo 2.3.** Sean  $\varphi_1 = 2 dx_1 - 3 dx_2$  y  $\varphi_2 = dx_1 + dx_2$  y  $u = (u_1, u_2, u_3)$  y  $v = (v_1, v_2, v_3)$ . Entonces  $\varphi_1 \wedge \varphi_2$  está dado por

$$\begin{aligned} \varphi_1 \wedge \varphi_2(u, v) &= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(u) & \varphi_1(v) \\ \varphi_2(u) & \varphi_2(v) \end{pmatrix} \\ &= \varphi_1(u) \varphi_2(v) - \varphi_1(v) \varphi_2(u) \\ &= [(2 dx_1 - 3 dx_2)(u)] [(dx_1 + dx_2)(v)] - [(2 dx_1 - 3 dx_2)(v)] [(dx_1 + dx_2)(u)] \\ &= [2 dx_1(u) - 3 dx_2(u)] [dx_1(v) + dx_2(v)] - [2 dx_1(v) - 3 dx_2(v)] [dx_1(u) + dx_2(u)] \\ &= (2 u_1 - 3 u_2)(v_1 + v_2) - (2 v_1 - 3 v_2)(u_1 + u_2) \\ &= 2 u_1 v_1 + 2 u_1 v_2 - 3 u_2 v_1 - 3 u_2 v_2 - 2 u_1 v_1 - 2 u_2 v_1 + 3 u_1 v_2 + 3 u_2 v_2 \\ &= 5 u_1 v_2 - 5 u_2 v_1. \end{aligned}$$

**Proposición 2.3.** Sean  $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}_p^3)^*$ . Entonces

1.  $\varphi_1 \wedge \varphi_2$  es bilineal y alternante.
2.  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = -(\varphi_2 \wedge \varphi_1)$ .
3.  $(dx_1)_p \wedge (dx_2)_p, (dx_1)_p \wedge (dx_3)_p, (dx_2)_p \wedge (dx_3)_p$  forman una base para  $\Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)$ .

*Demostración.*

1. Alternancia

$$\begin{aligned} \varphi_1 \wedge \varphi_2(u, v) &= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(u) & \varphi_1(v) \\ \varphi_2(u) & \varphi_2(v) \end{pmatrix} \\ &= \varphi_1(u) \varphi_2(v) - \varphi_1(v) \varphi_2(u) \\ &= -(\varphi_1(v) \varphi_2(u) - \varphi_1(u) \varphi_2(v)) \\ &= -\det \begin{pmatrix} \varphi_1(v) & \varphi_1(u) \\ \varphi_2(v) & \varphi_2(u) \end{pmatrix} \\ &= -(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v, u) \end{aligned}$$

Bilinealidad

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \wedge \varphi_2)(\alpha u_p + \beta v_p, w_p) &= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(\alpha u_p + \beta v_p) & \varphi_1(w_p) \\ \varphi_2(\alpha u_p + \beta v_p) & \varphi_2(w_p) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha \varphi_1(u_p) + \beta \varphi_1(v_p) & \varphi_1(w_p) \\ \alpha \varphi_2(u_p) + \beta \varphi_2(v_p) & \varphi_2(w_p) \end{pmatrix} \\ &= \det \left[ \begin{pmatrix} \alpha \varphi_1(u_p) + \beta \varphi_1(v_p) & 2\varphi_1(w_p) \\ \alpha \varphi_2(u_p) + \beta \varphi_2(v_p) & 2\varphi_2(w_p) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \varphi_1(w_p) \\ 0 & \varphi_2(w_p) \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} \alpha \varphi_1(u_p) + \beta \varphi_1(v_p) & 2\varphi_1(w_p) \\ \alpha \varphi_2(u_p) + \beta \varphi_2(v_p) & 2\varphi_2(w_p) \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & \varphi_1(w_p) \\ 0 & \varphi_2(w_p) \end{pmatrix} \\
&= \det \left[ \begin{pmatrix} \alpha \varphi_1(u_p) & \varphi_1(w_p) \\ \alpha \varphi_2(u_p) & \varphi_2(w_p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \varphi_1(v_p) & \varphi_1(w_p) \\ \beta \varphi_2(v_p) & \varphi_2(w_p) \end{pmatrix} \right] - 0 \\
&= \det \begin{pmatrix} \alpha \varphi_1(u_p) & \varphi_1(w_p) \\ \alpha \varphi_2(u_p) & \varphi_2(w_p) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \beta \varphi_1(v_p) & \varphi_1(w_p) \\ \beta \varphi_2(v_p) & \varphi_2(w_p) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \det \begin{pmatrix} \varphi_1(u_p) & \varphi_1(w_p) \\ \varphi_2(u_p) & \varphi_2(w_p) \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_p) & \varphi_1(w_p) \\ \varphi_2(v_p) & \varphi_2(w_p) \end{pmatrix} \\
&= \alpha(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(u_p, w_p) + \beta(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_p, w_p)
\end{aligned}$$

De la misma forma se desarrolla

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(u_p, \alpha v_p + \beta w_p) = \alpha(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(u_p, v_p) + \beta(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(u_p, w_p)$$

Por tanto se concluye que el producto cuña es bilineal.

2. Partamos de:

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(u_p, v_p) &= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(u_p) & \varphi_1(v_p) \\ \varphi_2(u_p) & \varphi_2(v_p) \end{pmatrix} \\
&= \varphi_1(u_p)\varphi_2(v_p) - \varphi_1(v_p)\varphi_2(u_p) \\
&= -(\varphi_2(u_p)\varphi_1(v_p) - \varphi_2(v_p)\varphi_1(u_p)) \\
&= -\det \begin{pmatrix} \varphi_2(u_p) & \varphi_2(v_p) \\ \varphi_1(u_p) & \varphi_1(v_p) \end{pmatrix} \\
&= -(\varphi_2 \wedge \varphi_1)(u_p, v_p)
\end{aligned}$$

3. Para demostrar que  $(dx_1)_p \wedge (dx_2)_p$ ,  $(dx_1)_p \wedge (dx_3)_p$  y  $(dx_2)_p \wedge (dx_3)_p$  forman una base, debemos mostrar que forman un conjunto linealmente independiente y generan el espacio  $\Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)$ . Denotaremos  $(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p$  por  $(dx_i \wedge dx_j)_p$ .

Definamos

$$\phi = \alpha_1(dx_1 \wedge dx_2)_p + \alpha_2(dx_1 \wedge dx_3)_p + \alpha_3(dx_2 \wedge dx_3)_p$$

y supongamos que  $\phi = 0$ . Debemos mostrar entonces que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

Note el comportamiento de los elementos  $(dx_i \wedge dx_j)_p$ :

$$\begin{aligned}
(dx_1 \wedge dx_2)_p((e_1)_p, (e_2)_p) &= \begin{vmatrix} (dx_1)_p((e_1)_p) & (dx_1)_p((e_2)_p) \\ (dx_2)_p((e_1)_p) & (dx_2)_p((e_2)_p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
(dx_1 \wedge dx_2)_p((e_2)_p, (e_3)_p) &= \begin{vmatrix} (dx_1)_p((e_2)_p) & (dx_1)_p((e_3)_p) \\ (dx_2)_p((e_2)_p) & (dx_2)_p((e_3)_p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$$(dx_1 \wedge dx_2)_p((e_1)_p, (e_3)_p) = \begin{vmatrix} (dx_1)_p((e_1)_p) & (dx_1)_p((e_3)_p) \\ (dx_2)_p((e_1)_p) & (dx_2)_p((e_3)_p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Así,

$$(dx_2 \wedge dx_3)_p((e_1)_p, (e_2)_p) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (dx_2 \wedge dx_3)_p((e_2)_p, (e_3)_p) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$(dx_2 \wedge dx_3)_p((e_1)_p, (e_3)_p) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(dx_1 \wedge dx_3)_p((e_1)_p, (e_2)_p) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (dx_1 \wedge dx_3)_p((e_2)_p, (e_3)_p) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(dx_1 \wedge dx_3)_p((e_1)_p, (e_3)_p) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Note también que

$$(dx_1 \wedge dx_2)_p((e_2)_p, (e_1)_p) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad (dx_2 \wedge dx_3)_p((e_3)_p, (e_2)_p) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$(dx_1 \wedge dx_3)_p((e_3)_p, (e_1)_p) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Por lo que, si  $i \neq j$

$$(dx_i \wedge dx_j)_p((e_k)_p, (e_l)_p) = \det \begin{pmatrix} (dx_i)_p((e_k)_p) & (dx_i)_p((e_l)_p) \\ (dx_j)_p((e_k)_p) & (dx_j)_p((e_l)_p) \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & i = k, j = l \\ -1, & i = l, j = k \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

De aquí que

$$\phi((e_1)_p, (e_2)_p)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_1 [(dx_1 \wedge dx_2)_p((e_1)_p, (e_2)_p)] + \alpha_2 [(dx_1 \wedge dx_3)_p((e_1)_p, (e_2)_p)] + \alpha_3 [(dx_2 \wedge dx_3)_p((e_1)_p, (e_2)_p)] \\ &= \alpha_1(1) + \alpha_2(0) + \alpha_3(0) = \alpha_1, \end{aligned}$$

$$\phi((e_2)_p, (e_3)_p)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_1 [(dx_1 \wedge dx_2)_p((e_2)_p, (e_3)_p)] + \alpha_2 [(dx_1 \wedge dx_3)_p((e_2)_p, (e_3)_p)] + \alpha_3 [(dx_2 \wedge dx_3)_p((e_2)_p, (e_3)_p)] \\ &= \alpha_1(0) + \alpha_2(1) + \alpha_3(0) = \alpha_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \phi((e_1)_p, (e_3)_p) \\ &= \alpha_1 [(dx_1 \wedge dx_2)_p((e_1)_p, (e_3)_p)] + \alpha_2 [(dx_1 \wedge dx_3)_p((e_1)_p, (e_3)_p)] + \alpha_3 [(dx_2 \wedge dx_3)_p((e_1)_p, (e_3)_p)] \\ &= \alpha_1(0) + \alpha_2(0) + \alpha_3(1) = \alpha_3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como  $\phi = 0$ , se sigue que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Así,  $\{(dx_i \wedge dx_j)_p\}$  es un conjunto linealmente independiente.

Ahora demostraremos que  $\{(dx_i \wedge dx_j)_p\}$  generan al espacio  $\Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)$ . Sea  $\varphi \in \Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)$ . Entonces

$$\varphi(x_p, y_p) = \varphi\left(\sum_{i=1}^3 x_i(e_i)_p, \sum_{j=1}^3 y_j(e_j)_p\right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i y_j \varphi((e_i)_p, (e_j)_p); \varphi \text{ es lineal.}$$

Como  $\varphi$  es alternante,  $\varphi((e_i)_p, (e_i)_p) = 0$  y  $\varphi((e_i)_p, (e_j)_p) = -\varphi((e_j)_p, (e_i)_p)$ , por lo que

$$\begin{aligned} \varphi(x_p, y_p) &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i y_j - x_j y_i) \varphi((e_i)_p, (e_j)_p) \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) \varphi((e_1)_p, (e_2)_p) + (x_1 y_3 - x_3 y_1) \varphi((e_1)_p, (e_3)_p) \\ &\quad + (x_2 y_3 - x_3 y_2) \varphi((e_2)_p, (e_3)_p) \end{aligned}$$

Finalmente, note que

$$x_i y_j - x_j y_i = (dx_i)_p(x_p)(dx_j)_p(y_p) - (dx_j)_p(x_p)(dx_i)_p(y_p) = (dx_i \wedge dx_j)_p(x_p, y_p).$$

por lo que si  $\alpha_1 = \varphi((e_1)_p, (e_2)_p)$ ,  $\alpha_2 = \varphi((e_1)_p, (e_3)_p)$ ,  $\alpha_3 = \varphi((e_2)_p, (e_3)_p)$  entonces

$$\varphi = \alpha_1(dx_1 \wedge dx_2)_p + \alpha_2(dx_1 \wedge dx_3)_p + \alpha_3(dx_2 \wedge dx_3)_p.$$

□

Ahora, generalizaremos la noción de forma diferencial en  $\mathbb{R}^n$ . Antes definiremos algunos conceptos útiles para esta generalización.

**Definición 2.9.** Decimos que la función  $T : \underbrace{\mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_p^n \times \cdots \times \mathbb{R}_p^n}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ , es **multilineal** si

es lineal en cada coordenada, es decir

$$T(v_1, v_2, \dots, \underbrace{\alpha v_i + \beta u}_i, \dots, v_n) = \alpha T(v_1, v_2, \dots, \underbrace{v_i}_i, \dots, v_n) + \beta T(v_1, v_2, \dots, \underbrace{u}_i, \dots, v_n)$$

para cada  $i, j = 1, 2, \dots, k$ . Decimos que la función multilineal  $T$  es **alternante** si

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, \underbrace{v_j}_i, \dots, \underbrace{v_i}_j, \dots, v_k),$$

para cada  $i, j = 1, 2, \dots, k, i \neq j$ .



Denotemos  $\underbrace{\mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_p^n \times \cdots \times \mathbb{R}_p^n}_k$  por  $(\mathbb{R}_p^n)^k$ . Las propiedades de las funciones alternantes están enumeradas en la siguiente proposición.

**Proposición 2.4.** Si  $T : (\mathbb{R}_p^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$  es alternante, entonces

1. Para  $\sigma \in S_k$ ,

$$T(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) T(v_1, v_2, \cdots, v_k),$$

donde  $S_k$  es el grupo simétrico de  $k$  objetos y

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma \text{ es par,} \\ -1, & \text{si } \sigma \text{ es impar.} \end{cases}$$

2.  $T(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_i, \cdots, v_k) = 0$

3. Si los vectores  $v_1, \cdots, v_k$  son linealmente dependientes,

$$T(v_1, \cdots, v_k) = 0.$$

*Demostración.*

1. Suponga primero que,  $\sigma \in S_k$  es par, es decir, es el producto de un número par  $d$  de transposiciones, entonces al ordenar de manera creciente los subíndices de los  $v$ , es como que hagamos  $d$ -veces la permutación  $\sigma$ , de esta manera hacemos  $d$ -cambios en los  $v$ , luego el signo de  $T$  es  $(-1)^d$ , i.e, es positiva. Aplicamos el mismo razonamiento para cuando  $\sigma$  es impar, lo cual implica que  $T$  tendría signo  $(-1)^d$  (negativo), con  $d$  impar, al ordenar de manera creciente los subíndices.

2. Como  $T$  es alternante

$$\begin{aligned} T(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_i, \cdots, v_k) &= -T(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_i, \cdots, v_k) \\ 2T(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_i, \cdots, v_k) &= 0 \\ T(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_i, \cdots, v_k) &= 0 \end{aligned}$$

3. Si  $v_1, \cdots, v_k$  son vectores linealmente dependientes, entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existen  $\alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  tales que

$$v_1 = \sum_{i=2}^k \alpha_i v_i.$$

Tenemos entonces que, por la linealidad de  $T$  en la primer variable,

$$T(v_1, v_2, \cdots, v_k) = T\left(\sum_{i=2}^k \alpha_i v_i, \cdots, v_k\right) = \sum_{i=2}^k \alpha_i T(v_i, v_2, \cdots, v_k) = 0; \text{ por prop. (2.4) 2)}$$

□

Al conjunto de funciones multilineales alternantes en  $(\mathbb{R}_p^n)^k$  lo denotaremos por  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)$ .

**Proposición 2.5.** *El conjunto de funciones multilineales alternantes  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)$  es un espacio vectorial, con suma y multiplicación escalar puntuales.*

En el caso  $k = 1$ ,  $\Lambda^1(\mathbb{R}_p^n) = (\mathbb{R}_p^n)^*$ , el espacio dual de  $\mathbb{R}_p^n$ .

**Observación 2.** *La tercera parte de la proposición (2.4) implica que  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n) = \{0\}$  si  $k > n$ , ya que cualquier función de  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)$ , al ser evaluada en cualquier conjunto de  $k$  vectores, en un espacio de dimensión  $n$ , será idénticamente cero, pues el conjunto de  $k$  vectores es linealmente dependiente.*

**Definición 2.10.** *Sean  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \in (\mathbb{R}_p^n)^*$ . Definimos el **producto exterior** o **producto cuña** de  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  como la transformación dada por*

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k(v_1, v_2, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)). \quad (2.1)$$

Las propiedades básica del determinante permiten garantizar que la transformación dada por (2.1) es, de hecho, multilineal y alternante.

A continuación, demostraremos que los productos exteriores de elementos de la base dual de  $\mathbb{R}_p^n$  forman una base para el espacio de funciones multilineales y alternantes por medio de la siguiente proposición.

**Proposición 2.6.** *El conjunto*

$$\{(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p, i_1 < i_2 < \dots < i_k, i_j \in \{1, \dots, n\}\}$$

*es una base para  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)$ .*

Este resultado es un caso particular del siguiente teorema, el cual procederemos a demostrarlo.

**Teorema 2.1.** *Sea  $V$  un espacio vectorial, dimensión  $n < \infty$ . Sea  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base para  $V$  y  $\{\widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \dots, \widehat{v}_n\}$  la base dual de  $\mathcal{B}$  para el espacio dual  $V^*$ . Entonces los productos*

$$\widehat{v}_{i_1} \wedge \widehat{v}_{i_2} \wedge \dots \wedge \widehat{v}_{i_k},$$

*con  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , forman una base para  $\Lambda^k(V)$ ,  $1 \leq k \leq n$ .*

Para simplificar la notación, denotaremos un multiíndice  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  como  $I$ ; así,  $|I|$  representa su longitud (en este caso  $|I| = k$ ). Decimos que un multiíndice  $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$  es creciente si  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ .

La lista  $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$  será denotada por  $v_I$ , y

$$\widehat{v}_I = \widehat{v}_{i_1} \wedge \widehat{v}_{i_2} \wedge \dots \wedge \widehat{v}_{i_k}.$$

Procederemos ahora a la demostración del teorema (2.1).

*Demostración.* Mostraremos primero que los productos  $v_I$ , con  $I$  creciente, son linealmente independiente. Suponemos entonces que

$$\sum_{I \text{ creciente}} a_I \widehat{v}_I = 0,$$

y demostraremos que todos los  $a_I = 0$ .

Sea  $J$  un multiíndice creciente. Entonces

$$\left( \sum_{I \text{ creciente}} a_I \widehat{v}_I \right) (v_j) = 0,$$

pero

$$\left( \sum_{I \text{ creciente}} a_I \widehat{v}_I \right) (v_j) = \sum_{I \text{ creciente}} a_I \widehat{v}_I(v_j) = a_J$$

por lo que  $a_J = 0$ , como queríamos.

Ahora, sea  $\phi \in \Lambda^k(V)$ ,  $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ , y evaluaremos

$$\phi(u_1, u_2, \dots, u_k).$$

Primero, sean  $a_i^j \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , tales que

$$u_i = \sum_{j=1}^n a_i^j v_j, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \phi(u_1, u_2, \dots, u_k) &= \phi \left( \sum_{j_1=1}^n a_1^{j_1} v_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n a_2^{j_2} v_{j_2}, \dots, \sum_{j_k=1}^n a_k^{j_k} v_{j_k} \right) \\ &= \sum_J a_1^{j_1} a_2^{j_2} \cdots a_k^{j_k} \phi(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}) \\ &= \sum_{J \text{ creciente}} \left( \sum_{\sigma \in S_k} a_1^{\sigma(j_1)} a_2^{\sigma(j_2)} \cdots a_k^{\sigma(j_k)} \text{sgn}(\sigma) \right) \phi(v_J) \\ &= \sum_{J \text{ creciente}} \det(a_i^{j_l})_{i,l=1,2,\dots,k} \phi(v_J). \end{aligned}$$

Si definimos  $\xi_J = \phi(v_J)$ , entonces

$$\phi(u_1, u_2, \dots, u_k) = \sum_{J \text{ creciente}} \xi_J \det(a_i^{j_l})_{i,l=1,2,\dots,k}.$$

Como cada  $a_i^j = \widehat{v}_J(u_i)$ , tenemos que

$$\det(a_i^j) = \widehat{v}_J(u_1, u_2, \dots, u_k).$$

Por lo tanto,

$$\phi = \sum_{J \text{ creciente}} \xi_J \widehat{v}_J,$$

y concluimos que los  $\widehat{v}_I$ , con  $I$  creciente, generan el espacio  $\Lambda^k(V)$ .  $\square$

**Corolario 2.1.** *La dimensión del espacio  $\Lambda^k(V)$  es igual a*

$$\binom{n}{k},$$

*el coeficiente binomial de  $n$  en  $k$ .*

**Corolario 2.2.** *Si  $v_1, v_2, \dots, v_n$  es una base para  $V$  y  $\phi \in \Lambda^k(V)$ , entonces*

$$\phi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det(a_i^j) \phi(v_1, v_2, \dots, v_n),$$

*si  $u_i = \sum_{j=1}^n a_i^j v_j$ .*

Por el teorema (2.1), afirmamos que el conjunto

$$\{(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p, i_1 < i_2 < \dots < i_k, i_j \in \{1, \dots, n\}\}$$

es una base para  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)$ .

Estamos listos para definir una forma diferencial en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 2.11.** *Una **k-forma exterior**, o **k-forma diferencial**, en  $\mathbb{R}^n$ , es una función  $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)$ , tal que, para cada  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)$ .*

Es decir, para cada  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $\omega(p)$  es una transformación multilinear alternante en  $(\mathbb{R}_p^n)^k$ , donde  $\mathbb{R}_p^n$  es el espacio tangente en  $p$ .

Las formas diferenciales, en general, pueden estar definidas sólo en un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Cualquiera de las definiciones o propiedades estudiadas en el resto de este capítulo son válidas para formas definidas en subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .

Por el teorema (2.1), para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  y cada  $k$ -multiíndice creciente  $I$ , existen  $\omega_I(p)$  tales que

$$\omega(p) = \sum_{I \text{ creciente}} \omega_I(p) (dx_I)_p,$$

donde

$$(dx_I)_p = (dx_{i_1})_p \wedge (dx_{i_2})_p \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_p.$$

Si las funciones  $\omega_I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son diferenciables, entonces decimos que  $\omega$  es diferenciable.

A una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la llamaremos, por convención, una **0-forma**.

**Ejemplo 2.4.** (Formas en  $\mathbb{R}$ )

Las únicas formas diferenciales no triviales en el espacio unidimensional  $\mathbb{R}$ , aparte de las 0-formas, son las 1-formas

$$\omega_0 dx,$$

con  $\omega_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 2.5.** (Formas en  $\mathbb{R}^2$ )

En  $\mathbb{R}^2$ , las 1-formas diferenciales están dadas por

$$\omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2,$$

con  $\omega_1, \omega_2$  funciones reales en  $\mathbb{R}^2$ , mientras las 2-formas diferenciales se escriben

$$\omega_0 dx_1 \wedge dx_2,$$

o simplemente  $\omega_0 dx_1 dx_2$ , o  $\omega_0 dx dy$ , en notación clásica, donde  $\omega_0$  es una función en  $\mathbb{R}^2$ . A  $dx_1 \wedge dx_2$  se le llama el **elemento de área** en  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejemplo 2.6.** (Formas en  $\mathbb{R}^3$ )

En el espacio  $\mathbb{R}^3$ , tenemos las 1-formas,

$$\omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \omega_3 dx_3.$$

Las 2-formas se escriben comúnmente

$$\omega_1 dx_2 \wedge dx_3 + \omega_2 dx_1 \wedge dx_3 + \omega_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Las 3-formas se escriben

$$\omega_0 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

En notación clásica, simplemente se suele escribir  $\omega_0 dx dy dz$ .  $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$  es llamado el **elemento de volumen** en  $\mathbb{R}^3$ .

**Ejemplo 2.7.** (Formas en  $\mathbb{R}^4$ )

En  $\mathbb{R}^4$ , las 1-formas están dadas por

$$\omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \omega_3 dx_3 + \omega_4 dx_4,$$

con  $\omega_i$  funciones reales en  $\mathbb{R}^4$ . Las 2-formas por su parte

$$\omega_{12} dx_1 \wedge dx_2 + \omega_{13} dx_1 \wedge dx_3 + \omega_{14} dx_1 \wedge dx_4 + \omega_{23} dx_2 \wedge dx_3 + \omega_{24} dx_2 \wedge dx_4 + \omega_{34} dx_3 \wedge dx_4,$$

con  $\omega_{i,j}$  funciones reales en  $\mathbb{R}^4$ . Las 3-formas

$$\omega_{123} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \omega_{124} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + \omega_{134} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \omega_{234} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4,$$

y las 4-formas

$$\omega_{1234} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

De ahora en adelante, nos restringiremos a  $k$ -formas diferenciables y las llamaremos simplemente por  $k$ -formas.

Las  $k$ -formas en  $\mathbb{R}^n$  forman un espacio vectorial bajo las operaciones suma y multiplicación puntuales. Es decir si  $\omega$  y  $\eta$  son  $k$ -formas,  $\omega = \sum \omega_I dx_I$  y  $\eta = \sum \eta_I dx_I$ , entonces su suma está dada por

$$\omega + \eta = \sum (\omega_I + \eta_I) dx_I,$$

mientras que la multiplicación escalar está dada simplemente por

$$\lambda\omega = \sum \lambda\omega_I dx_I.$$

**Definición 2.12.** Si  $\omega$  es una  $k$ -forma, y  $\eta$  es una  $s$ -forma en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\omega = \sum \omega_I dx_I$ ,  $\eta = \sum \eta_J dx_J$ , definimos el **producto exterior**  $\omega \wedge \eta$  como la  $(k+s)$ -forma

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} (\omega_I \eta_J) dx_I \wedge dx_J \quad (2.2)$$

donde la suma corre sobre todos los multiíndices crecientes  $I$  de longitud  $k$  y todos los multiíndices crecientes  $J$  de longitud  $s$ .

En la fórmula (2.2), algunos, o todos, los productos  $dx_I \wedge dx_J$  pueden ser iguales a 0, lo cual depende de la longitud de  $I$  y de  $J$ , y si  $I$  y  $J$  tienen índices comunes. Al producto exterior también se le conoce comúnmente como el **producto cuña**.

**Ejemplo 2.8.** Consideremos las formas  $\omega$ , y  $\eta$  en  $\mathbb{R}^3$  dadas por

$$\omega = x dx + y dy + z dz \quad \eta = x dx \wedge dy + y dx \wedge dz,$$

y vamos a calcular la 3-forma  $\omega \wedge \eta$ . Entonces

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= x dx(x dx \wedge dy) + x dx(y dx \wedge dz) + y dy(x dx \wedge dy) \\ &+ y dy(y dx \wedge dz) + z dz(x dx \wedge dy) + z dz(y dx \wedge dz) \\ &= x^2 dx \wedge dx \wedge dy + x y dx \wedge dx \wedge dz + y x dy \wedge dx \wedge dy \\ &+ y^2 dy \wedge dx \wedge dz + z x dz \wedge dx \wedge dy + z y dz \wedge dx \wedge dz \end{aligned}$$

De los términos anteriores, sólo dos no son iguales a cero por la alternancia, estos son  $y^2 dy \wedge dx \wedge dz$ ,  $xz dz \wedge dx \wedge dy$ . Tenemos, por tanto, que

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= y^2 dy \wedge dx \wedge dz + xz dz \wedge dx \wedge dy \\ &= -y^2 dx \wedge dy \wedge dz - (-xz dx \wedge dy \wedge dz) \\ &= (xz - y^2) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Algunas de las propiedades del producto exterior están enumeradas en la siguiente proposición.

**Proposición 2.7.** Sean  $\omega$  una  $k$ -forma,  $\eta$  una  $s$ -forma y  $\psi$  una  $p$ -forma en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces

1.  $\omega \wedge (\eta \wedge \psi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \psi$ ;
2.  $\omega \wedge \eta = (-1)^{ks} \eta \wedge \omega$ ; y
3. Si  $s = p$ ,  $\omega \wedge (\eta + \psi) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \psi$ .

*Demostración.* Sean

$$\omega = \sum \omega_I dx_I, \quad \eta = \sum \eta_J dx_J, \quad \psi = \sum \psi_K dx_K.$$

Para multiíndices crecientes  $I, J$  y  $K$ .

1.

$$\begin{aligned} \omega \wedge (\eta \wedge \psi) &= \left( \sum \omega_I dx_I \right) \wedge \left[ \left( \sum \eta_J dx_J \right) \wedge \left( \sum \psi_K dx_K \right) \right] \\ &= \left( \sum \omega_I dx_I \right) \wedge \left( \sum (\eta_J \psi_K) dx_J \wedge dx_K \right) \\ &= \sum [\omega_I (\eta_J \psi_K)] dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K) \\ &= \sum [(\omega_I \eta_J) \psi_K] (dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K \\ &= (\omega \wedge \eta) \wedge \psi \end{aligned}$$

2. Sólo es necesario verificar que esta propiedad se cumple en los productos  $dx_I \wedge dx_J$ . Como  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$  para cualquier  $i, j$ .

$$\begin{aligned} dx_I \wedge dx_J &= dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \\ &= (-1)^k dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s}; \text{ se conmuta } k\text{-veces.} \\ &= (-1)^{ks} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}; \text{ se conmuta } s\text{-veces.} \\ &= (-1)^{ks} dx_J \wedge dx_I \end{aligned}$$

3. Dado que  $s = p$ , entonces la suma siguiente está definida

$$\eta + \psi = \sum (\eta_J + \psi_J) dx_J,$$

así,

$$\begin{aligned} \omega \wedge (\eta + \psi) &= \left( \sum \omega_I dx_I \right) \wedge \left( \sum (\eta_J + \psi_J) dx_J \right) \\ &= \sum \omega_I (\eta_J + \psi_J) dx_I \wedge dx_J; \text{ por def. producto exterior de formas.} \\ &= \sum (\omega_I \eta_J + \omega_I \psi_J) dx_I \wedge dx_J; \omega_I, \eta_J, \psi_J \text{ son funciones reales.} \\ &= \left( \sum \omega_I \eta_J dx_I \wedge dx_J \right) + \left( \sum \omega_I \psi_J dx_I \wedge dx_J \right); \text{ por def. suma de formas.} \\ &= \omega \wedge \eta + \omega \wedge \psi; \text{ por def. de producto de formas.} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\omega \wedge (\eta + \psi) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \psi.$$

□

**Nota.** La segunda parte de la proposición (2.7), implica que, si  $k$  es impar, y  $\omega$  es una  $k$ -forma, entonces

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega &= (-1)^{k^2} \omega \wedge \omega \\ &= (-1) \omega \wedge \omega; \quad k \text{ es impar.} \end{aligned}$$

Así,  $\omega \wedge \omega = 0$ .

Sin embargo, si  $k$  es par, es posible que  $\omega \wedge \omega$  no sea idénticamente cero, como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.9.** Sea  $\omega$  la 2-forma en  $\mathbb{R}^4$  dada por

$$\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 dx_3 \wedge dx_4.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega &= x_1 x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_1 x_2 dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= 2 x_1 x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4, \end{aligned}$$

lo cual no es idénticamente cero en  $\mathbb{R}^4$ .

Una de las características más importantes de las formas diferenciales, es la manera en que se comportan bajo funciones diferenciables, estudiaremos aquí el efecto de un cambio de variable en una forma diferencial y para ello tenemos la siguiente definición.

**Definición 2.13.** Sean  $\omega$  una  $k$ -forma en  $\mathbb{R}^m$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función diferenciable, donde  $f$  induce una función  $f^*$  que toma  $k$ -formas en  $\mathbb{R}^m$  y las lleva a  $k$ -formas de  $\mathbb{R}^n$ , es decir  $f^*\omega$  es la  $k$ -forma de  $\mathbb{R}^n$  dada por

$$(f^*\omega)_p(v_1, v_2, \dots, v_k) = \omega_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k))$$

con  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ , y  $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  la función diferencial de  $f$  en  $p$ .

Si  $g$  es una 0-forma en  $\mathbb{R}^m$ , definimos simplemente  $f^*g = g \circ f$ .

Vamos a mostrar que la operación  $f^*$  en formas diferenciales es equivalente a la sustitución de variables. Antes de eso, necesitamos algunas propiedades de  $f^*$ . Las propiedades elementales de  $f^*$  se enumeran en la siguiente proposición.



**Proposición 2.8.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función diferenciable,  $\omega$  y  $\varphi$  son  $k$ -formas en  $\mathbb{R}^m$  y  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  una 0-forma en  $\mathbb{R}^m$ . Entonces

1.  $f^*(\omega + \varphi) = f^*\omega + f^*\varphi$ .
2.  $f^*(g\omega) = f^*(g)f^*(\omega)$ .
3. Si  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  son 1-formas en  $\mathbb{R}^m$ ,  $f^*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) = f^*(\varphi_1) \wedge \dots \wedge f^*(\varphi_k)$ .

*Demostración.* Sea  $p \in \mathbb{R}^n$  y sean  $(v_1)_p, \dots, (v_k)_p \in \mathbb{R}^n$ . Además sean  $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$  y  $\varphi = \sum_I \varphi_I dx_I$ , entonces:

1.

$$\begin{aligned}
f^*(\omega + \varphi)_p((v_1)_p, \dots, (v_k)_p) &= \left( \sum (\omega_I + \varphi_I)(dx_I) \right)_{f(p)} (df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\
&= \sum (\omega_I + \varphi_I)_{f(p)} [(dx_I)_p(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k))] \\
&= \sum (\omega_I)_{f(p)} (dx_I)_p(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\
&\quad + (\varphi_I)_{f(p)} (dx_I)_p(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\
&= \sum (\omega_I)_{f(p)} (dx_I)_p(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\
&\quad + \sum (\varphi_I)_{f(p)} (dx_I)_p(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\
&= \left( \sum \omega_I dx_I \right)_{f(p)} (df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\
&\quad + \left( \sum \varphi_I dx_I \right)_{f(p)} (df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\
&= (f^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) + (f^*\varphi)_p(v_1, \dots, v_k) \\
&= (f^*\omega + f^*\varphi)_p(v_1, \dots, v_k)
\end{aligned}$$

2. Sea  $\omega_p = \sum_I (\omega_I)_p dx_I$

$$\begin{aligned}
f^*(g\omega)_p(v_1, \dots, v_k) &= (g\omega)_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) = \left( g \sum_I \omega_I dx_I \right)_{f(p)} (df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\
&= \left( \sum_I (g\omega_I) dx_I \right)_{f(p)} (df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\
&= \sum_I (g\omega_I)_{f(p)} dx_{I_p}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\
&= \sum_I g_{f(p)} \cdot (\omega_I)_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\
&= g(f_p) \sum_I (\omega_I)_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\
&= (g \circ f)_p(f^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = ((f^*g)_p \cdot (f^*\omega)_p)(v_1, \dots, v_k)
\end{aligned}$$

3. Por conveniencia, omitimos el punto  $p$  y obtenemos

$$\begin{aligned} f^*(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(v_1, \cdots, v_k) &= (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(df(v_1), \cdots, df(v_k)) \\ &= \det(\varphi_i(df(v_j))) \\ &= \det(f^*\varphi_i(v_k)) \\ &= (f^*\varphi_1 \wedge \cdots \wedge f^*\varphi_k)(v_1, \cdots, v_k). \end{aligned}$$

Esto se cumple ya que las  $\varphi_i$  son 1-formas,  $\varphi_i(df(v_j)) = (f^*\varphi_i)(v_j)$

□

Ahora podemos presentar la interpretación de  $f^*$ , que actúa como un cambio de coordenadas.

Sean  $x = (x_1, \cdots, x_n)$  coordenadas en  $\mathbb{R}^n$  y  $y = (y_1, \cdots, y_m)$  coordenadas en  $\mathbb{R}^m$ . Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  escrito como

$$y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_m = f_m(x_1, \cdots, x_n) \quad (2.3)$$

Definamos  $\omega = \sum_I \omega_I dy_I$  una  $k$ -forma en  $\mathbb{R}^m$ . Podemos utilizar la propiedad anterior de  $f^*$ , así obtenemos

$$\begin{aligned} f^*\omega &= f^*\left(\sum_I (\omega_I)(dy_I)\right) \\ &= \sum_I f^*(\omega_I dy_I) \\ &= \sum_I f^*(\omega_I) f^*(dy_I) \\ &= \sum_I f^*(\omega_I) (f^*dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (f^*dy_{i_k}), \end{aligned}$$

donde cada una de las 1-formas en el producto, evaluadas en un punto  $p$ , es igual a

$$f^*(dy_i)_p(v_p) = (dy_i)_{f(p)}(df_i)_p(v_{f(p)}) = d(y_i \circ f)_p(v_p) = (df_i)_p(v_p) ; v_p \in \mathbb{R}_p^n$$

es decir, la derivada de la  $i$ -ésima componente de  $f$  en  $p$ , aplicada al vector  $(v_p)$ . Entonces, podemos escribir  $f^*(dy_i) = df_i$ .

Como  $\omega_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es una 0-forma, entonces  $f^*\omega_i = \omega_i \circ f$  así,

$$f^*\omega = \sum_I (\omega_I \circ f) df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}$$

si

$$\omega(y) = \sum_I \omega_I(y_1, \cdots, y_m) df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}$$

es una forma diferencial en  $\mathbb{R}^m$ , la forma  $f^*\omega$  en  $\mathbb{R}^n$  está dada por

$$f^*\omega(x) = \sum_I \omega_I(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}$$

donde  $f_i$  y  $df_i$  son funciones de  $x_j$ , por lo tanto, aplicar  $f^*$  a  $\omega$  es equivalente a sustituir en  $\omega$  las variables  $y_i$  y sus respectivos diferenciales por las funciones  $x_k$  y  $dx_k$  obtenidas de (2.3).

**Nota.** En diversas ocasiones, es conveniente usar formas diferenciales definidas sólo en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  y no en todo  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 2.10.** (Coordenadas Polares.) Sea  $\omega$  la 1-forma en  $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$ , definida como

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Sea  $U$  el conjunto en el plano  $(r, \theta)$  dado por

$$U = \{r > 0; 0 < \theta < 2\pi\}$$

definimos la función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Sean  $x, y$  las coordenadas en  $\mathbb{R}^2$ , dadas por

$$x = f_1(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y = f_2(r, \theta) = r \sin \theta$$

Si  $\omega$  es una forma diferencial en el plano de coordenadas cartesianas  $(x, y)$ ,  $f^*\omega$  es una forma diferencial en coordenadas polares  $(r, \theta)$ .

Vamos a calcular  $f^*\omega$ . Tenemos que

$$f^*dx = df_1 = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

y

$$f^*dy = df_2 = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned} f^*\omega &= \frac{-r \sin \theta}{r^2} f^*dx + \frac{r \cos \theta}{r^2} f^*dy \\ &= \frac{-\sin \theta}{r} (\cos \theta - r \sin \theta d\theta) + \frac{\cos \theta}{r} (\sin \theta dr - r \cos \theta d\theta) \\ &= d\theta \end{aligned}$$

En la proposición anterior afirmamos que la adición de formas diferenciales conmuta con sustitución de variables. Ahora mostraremos que esto también es verdadero para el producto exterior o producto cuña.

**Proposición 2.9.** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función diferenciable, entonces*

1. *Si  $\omega$  y  $\eta$  son formas en  $\mathbb{R}^m$ , entonces*

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta.$$

2. *Si  $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y  $\omega$  es una forma en  $\mathbb{R}^m$ , entonces la forma  $(f \circ g)^*\omega$  en  $\mathbb{R}^p$  satisface*

$$(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega).$$

*Demostración.*

1. Sean  $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$  y  $\eta = \sum_J \eta_J dx_J$ , entonces

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} \omega_I \eta_J dx_I \wedge dx_J,$$

recordemos también, que se cumple para funciones reales  $f, g, h$  que  $(f \circ g) \circ h = (f \circ h)(g \circ h)$  y por tanto

$$\begin{aligned} f^*(\omega \wedge \eta) &= \sum_{I,J} ((\omega_I \eta_J) \circ f) df_I \wedge df_J \\ &= \sum_{I,J} (\omega_I \circ f)(\eta_J \circ f) df_I \wedge df_J \\ &= \left( \sum_I (\omega_I \circ f) df_I \right) \wedge \left( \sum_J (\eta_J \circ f) df_J \right) \\ &= f^*\omega \wedge f^*\eta \end{aligned}$$

2. Usaremos el hecho  $d(f \circ g) = df(dg)$  en la prueba. Sea  $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$ . Entonces

$$(f \circ g)^*\omega(q) = \sum_I (\omega_I \circ (f \circ g))(q) (d(f \circ g)_I)_q.$$

Desarrollando la expresión de la izquierda

$$\begin{aligned} g^*(f^*\omega)(q) &= g^* \left( \sum_I (f^*\omega_I) f^*(dx_I) \right) (q) \\ &= \sum_I g^*(\omega_I \circ f)(q) g^*(df_I)_q \\ &= \sum_I ((\omega_I \circ f) \circ g)(q) g^*(df_I)_q \\ &= \sum_I (\omega_I \circ (f \circ g))(q) g^*(df_I)_q; \text{ por la asociatividad de la composición.} \end{aligned}$$

Ahora sólo falta mostrar que  $(d(f \circ g)_I)_q = g^*(df_I)_q$ , entonces

$$\begin{aligned} g^*(df_i)(v) &= df_i(dg(v)) \\ &= d(x_i \circ f)(dg(v)) \\ &= dx_i(df(dg(v))) \\ &= dx_i(d(f \circ g)(v)) \\ &= d(x_i \circ (f \circ g))(v) \\ &= d(f \circ g)_i(v) \end{aligned}$$

Así,

$$(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega).$$

□

Ahora vamos a definir una operación en formas diferenciales que generalice la diferenciación de funciones.

**Definición 2.14.** Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una 0-forma (es decir una función diferenciable). Entonces el diferencial

$$dg = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$$

es una 1-forma.

Queremos generalizar este proceso para definir una operación que tome  $k$ -formas y al aplicar dicha operación devuelva  $(k + 1)$ -formas.

**Definición 2.15.** Sea  $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$  una  $k$ -forma en  $\mathbb{R}^n$ . La diferencial exterior  $d\omega$  de  $\omega$  es definida como

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx_I$$

**Ejemplo 2.11.** Sea  $\omega = xyzdx + yzdy + (x + z)dz$  y vamos a calcular  $d\omega$

$$\begin{aligned} d\omega &= d(xyz) \wedge dx + d(yz) \wedge dy + d(x + z) \wedge dz \\ &= \left( \frac{\partial(xyz)}{\partial x} dx + \frac{\partial(xyz)}{\partial y} dy + \frac{\partial(xyz)}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\ &+ \left( \frac{\partial(yz)}{\partial x} dx + \frac{\partial(yz)}{\partial y} dy + \frac{\partial(yz)}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\ &+ \left( \frac{\partial(x + z)}{\partial x} dx + \frac{\partial(x + z)}{\partial y} dy + \frac{\partial(x + z)}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\ &= (yzdx + xzdy + xydz) \wedge dx + (0dx + zdy + ydz) \wedge dy + (dx + 0dy + dz) \wedge dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= yzdx \wedge dx + xzdy \wedge dx + xydz \wedge dx + zdy \wedge dy + ydz \wedge dy + dx \wedge dz + dz \wedge dz \\
&= xzdy \wedge dx + xydz \wedge dx + ydz \wedge dy + dx \wedge dz \\
&= -xzdx \wedge dy - xydx \wedge dz - ydy \wedge dz + dx \wedge dz \\
&= -xzdx \wedge dy + (1 - xy)dx \wedge dz - ydy \wedge dz
\end{aligned}$$

Presentaremos algunas propiedades de el diferencial exterior. El literal (c) es quizás el más importante y el (d) muestra que la operación  $d$  conmuta con sustitución de variables.

**Proposición 2.10.**

- a)  $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$ , donde  $\omega$  y  $\eta$  son  $k$ -formas.  
b)  $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k(\omega \wedge d\varphi)$ , donde  $\omega$  es una  $k$ -forma y  $\varphi$  es una  $s$ -forma.  
c)  $d(d\omega) = d^2(\omega) = 0$ .  
d)  $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ , donde  $\omega$  es una  $k$ -forma en  $\mathbb{R}^m$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función diferenciable.

*Demostración.*

- a) Sean  $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$ , y  $\eta = \sum_I \eta_I dx_I$ , así,

$$\omega + \eta = \sum_I (\omega_I + \eta_I) dx_I,$$

entonces,

$$\begin{aligned}
d(\omega + \eta) &= \sum_I d(\omega_I + \eta_I) \wedge dx_I \\
&= \sum_I \left[ \left( \sum_I \frac{\partial(\omega_I + \eta_I)}{\partial x_I} dx_I \right) \wedge dx_I \right] \\
&= \sum_I \left[ \sum_I \left( \frac{\partial\omega_I}{\partial x_I} dx_I + \frac{\partial\eta_I}{\partial x_I} dx_I \right) \wedge dx_I \right] \\
&= \sum_I \left[ \left( \sum_I \frac{\partial\omega_I}{\partial x_I} dx_I + \sum_I \frac{\partial\eta_I}{\partial x_I} dx_I \right) \wedge dx_I \right] \\
&= \sum_I \left[ \left( \sum_I \frac{\partial\omega_I}{\partial x_I} dx_I \right) \wedge dx_I + \left( \sum_I \frac{\partial\eta_I}{\partial x_I} dx_I \right) \wedge dx_I \right] \\
&= \sum_I \left[ \left( \sum_I \frac{\partial\omega_I}{\partial x_I} dx_I \right) \wedge dx_I \right] + \sum_I \left[ \left( \sum_I \frac{\partial\eta_I}{\partial x_I} dx_I \right) \wedge dx_I \right] \\
&= \sum_I d(\omega_I) \wedge dx_I + \sum_I d(\eta_I) \wedge dx_I \\
&= d(\omega) + d(\eta)
\end{aligned}$$

b) Sean  $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$ , y  $\varphi = \sum_J \varphi_J dx_J$ , así,

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{I,J} (\omega_I \varphi_J) dx_I \wedge dx_J,$$

entonces,

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \varphi) &= \sum_{I,J} d(\omega_I \varphi_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} (\varphi_J d\omega_I + \omega_I d\varphi_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} \varphi_J d\omega_I \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} \omega_I d\varphi_J \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \varphi + (-1)^{k+1} \sum_{I,J} \omega_I dx_I \wedge d\varphi_J \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \varphi + (-1)^k (\omega \wedge d\varphi). \end{aligned}$$

c) Vamos a suponer primero que  $\omega$  es una 0-forma, es decir,  $\omega$  es una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que asocia cada  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  el valor de  $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) = \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j\right). \end{aligned}$$

Ya que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  y  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ ,  $i \neq j$ , obtenemos que

$$d(df) = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Ahora, sea  $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$ . Por (a), podemos restringirnos al caso  $\omega = \omega_I dx_I = \omega_I \wedge dx_I$  con  $\omega_I \neq 0$ . Por (b), tenemos que

$$d\omega = d(\omega_I \wedge dx_I) = d\omega_I \wedge dx_I + \omega_I \wedge d(dx_I).$$

Pero  $d(dx_I) = d(1 \wedge dx_I) = d(1) \wedge dx_I = 0 \wedge dx_I = 0$ . Por lo tanto,

$$d(d\omega) = d(d\omega_I \wedge dx_I) = d(d\omega_I) \wedge dx_I + d\omega_I \wedge d(dx_I) = 0,$$

ya que  $d(d\omega) = 0$  y  $d(dx_I) = 0$ , quedando probado (c).

d) Probaremos el resultado primero para una 0-forma. Sea  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable que asocia a cada  $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$  el valor  $g(y_1, \dots, y_m)$ . Entonces

$$\begin{aligned} f^*(dg) &= f^* \left( \sum_i \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i \right) = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \\ &= \sum_j \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j} dx_j = d(g \circ f) = d(f^*g). \end{aligned}$$

Ahora, sea  $\varphi = \sum_I \varphi_I dx_I$  una  $k$ -forma. Usando lo anterior, y el hecho que  $f^*$  conmuta con el producto exterior, obtenemos

$$\begin{aligned} d(f^*\varphi) &= d \left( \sum_I f^*(\varphi_I) f^*(dx_I) \right) \\ &= \sum_I d(f^*(\varphi_I)) \wedge f^*(dx_I) = \sum_I f^*(d\varphi_I) \wedge f^*(dx_I) \\ &= f^* \left( \sum_I d\varphi_I \wedge dx_I \right) = f^*(d\varphi) \end{aligned}$$

□

## 2.1. Resolución de Ejercicios

**Ejercicio 2.1.** Sea  $\nu$  la  $n$ -forma en  $\mathbb{R}^n$  definida por

$$\nu(e_1, \dots, e_n) = 1,$$

donde  $\{e_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Muestre que:

a. Si  $v_i = \sum a_{ij} e_j$ , entonces

$$\nu(v_1, \dots, v_n) = \det(a_{ij}).$$

(la forma  $\nu$  se llama el **elemento de volumen** de  $\mathbb{R}^n$ )

b.  $\nu = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ .

**Solución.**

a. Del corolario (2.2), se obtiene, para la base canónica  $\{e_i\}$ , una forma  $\nu$ , y un conjunto de vectores  $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$  que

$$\begin{aligned} \nu(v_1, \dots, v_n) &= \det(a_{ij}) \nu(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det(a_{ij})(1) \\ \nu(v_1, \dots, v_n) &= \det(a_{ij}) \end{aligned}$$



b. Considere  $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$ , entonces

$$\begin{aligned} \nu(v_1, \dots, v_n) &= \det(a_{ij}); \text{ por el literal anterior.} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} dx_1(v_1) & dx_1(v_2) & \cdots & dx_1(v_n) \\ dx_2(v_1) & dx_2(v_2) & \cdots & dx_2(v_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ dx_n(v_1) & dx_n(v_2) & \cdots & dx_n(v_n) \end{vmatrix}; dx_j(v_i) = a_{ij} \\ &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n(v_1, v_2, \dots, v_n) \end{aligned}$$

Por lo que,  $\nu = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ .

**Ejercicio 2.2.** Sea  $\varphi \in \Lambda^3(\mathbb{R}_p^3)$ . Pruebe que existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$\varphi = \alpha(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)_p.$$

**Solución.** Observemos primero que

$$\varphi(e_i, e_j, e_k) = \begin{cases} \pm\varphi(e_1, e_2, e_3), & i, j, k \text{ son diferentes} \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Esto se sigue del hecho que  $\varphi$  es alternante. Sea

$$\alpha = \varphi(e_1, e_2, e_3).$$

Mostraremos que  $\varphi = \alpha(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)_p$ . Sean  $x, y, z \in \mathbb{R}_p^3$ . Entonces

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j, \sum_{k=1}^3 z_k e_k\right) = \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \varphi(e_i, e_j, e_k) \\ &= \varphi(e_1, e_2, e_3)(x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1) \\ &= \alpha \det(x \ y \ z). \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.3.** Sean  $\varphi, \psi$  y  $\theta$  formas en  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= xdx - ydy, \\ \psi &= zdx \wedge dy + xdy \wedge dz, \\ \theta &= zdy. \end{aligned}$$

Calcular:  $\varphi \wedge \psi$ ,  $\theta \wedge \varphi \wedge \psi$ ,  $d\varphi$ ,  $d\psi$ ,  $d\theta$ .

**Solución.**

$$\begin{aligned}\varphi \wedge \psi &= (xz)dx \wedge dx \wedge dy + x^2dx \wedge dy \wedge dz - (yz)dy \wedge dx \wedge dy - (xy)dy \wedge dy \wedge dz \\ &= xz(dx \wedge dx) \wedge dy + x^2dx \wedge dy \wedge dz + yz(dy \wedge dy) \wedge dx - xy(dy \wedge dy) \wedge dz \\ &= x^2dx \wedge dy \wedge dz\end{aligned}$$

$$\text{Como } \theta \wedge \varphi \wedge \psi = (\theta \wedge \varphi) \wedge \psi = \theta \wedge (\varphi \wedge \psi)$$

Así

$$\begin{aligned}\theta \wedge (\varphi \wedge \psi) &= (x^2z)dx \wedge dy \wedge dz \wedge dy \\ &= -x^2zdx \wedge (dy \wedge dy) \wedge dz \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\varphi &= d(x) \wedge dx - d(y) \wedge dy \\ &= dx \wedge dx - dy \wedge dy \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\psi &= d(z) \wedge dx \wedge dy + d(x) \wedge dy \wedge dz \\ &= dz \wedge dx \wedge dy + dx \wedge dy \wedge dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(\theta) &= d(z) \wedge dy \\ &= dz \wedge dy\end{aligned}$$

**Ejercicio 2.4.** Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función diferenciable. Asumamos que  $m < n$  y sea  $\omega$  una  $k$ -forma de  $\mathbb{R}^n$ , con  $k > m$ . Mostrar que  $f^*\omega = 0$ .

**Solución.** De la definición (2.13),  $f^*$  aplica  $k$ -forma en  $k$ -formas. Luego  $f^*\omega$  es una  $k$ -forma sobre  $\mathbb{R}^m$ , donde  $k > m$ . Pero sobre  $\mathbb{R}^m$  no puede haber formas de grado mayor que  $m$ , así

$$\therefore f^*\omega = 0.$$

**Ejercicio 2.5.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función dada por

$$f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n),$$

y sea  $\omega = dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n$ . Mostrar que

$$f^*\omega = \det(df)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

**Solución.**

$$\begin{aligned}
f^*\omega &= f^*(dy_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_n) \\
&= f^*dy_1 \wedge f^*dy_2 \wedge \cdots \wedge f^*dy_n \\
&= \det \begin{pmatrix} f^*dy_1 & f^*dy_1 & \cdots & f^*dy_1 \\ f^*dy_2 & f^*dy_2 & \cdots & f^*dy_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^*dy_n & f^*dy_n & \cdots & f^*dy_n \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} df_1 & df_1 & \cdots & df_1 \\ df_2 & df_2 & \cdots & df_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ df_n & df_n & \cdots & df_n \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \sum \frac{df_1}{dx_i} dx_i & \sum \frac{df_1}{dx_i} dx_i & \cdots & \sum \frac{df_1}{dx_i} dx_i \\ \sum \frac{df_2}{dx_i} dx_i & \sum \frac{df_2}{dx_i} dx_i & \cdots & \sum \frac{df_2}{dx_i} dx_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum \frac{df_n}{dx_i} dx_i & \sum \frac{df_n}{dx_i} dx_i & \cdots & \sum \frac{df_n}{dx_i} dx_i \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_1} & \cdots & \frac{df_1}{dx_1} \\ \frac{df_2}{dx_2} & \frac{df_2}{dx_2} & \cdots & \frac{df_2}{dx_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_n} & \frac{df_n}{dx_n} & \cdots & \frac{df_n}{dx_n} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} dx_1 & dx_1 & \cdots & dx_1 \\ dx_2 & dx_2 & \cdots & dx_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ dx_n & dx_n & \cdots & dx_n \end{pmatrix} \\
&= \det(df)(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n)
\end{aligned}$$

**Ejercicio 2.6.** (Operación estrella de Hodge). Para una  $k$ -forma diferencial  $\omega$  en  $\mathbb{R}^n$ , definimos la  $(n - k)$ -forma diferencial  $*\omega$  como

$$*\omega = \sum_I \text{sgn}(I, J) \omega_I dx_J,$$

donde  $(I, J) = (i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_{n-k})$  es la permutación  $S_n$  tal que

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k \text{ y } j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k}.$$

Calcula  $*\omega$  para las siguientes formas diferenciales.

a. La 2-forma diferencial en  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$\omega = a_{12}dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}dx_1 \wedge dx_3 + a_{23}dx_2 \wedge dx_3.$$

b. La 1-forma diferencial en  $\mathbb{R}^2$  dada por

$$\omega = a_1dx_1 + a_2dx_2.$$

**Solución.**

a.

$$\begin{aligned} *\omega &= *(a_{12}dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}dx_1 \wedge dx_3 + a_{23}dx_2 \wedge dx_3) \\ &= *(a_{12}dx_1 \wedge dx_2) + *(a_{13}dx_1 \wedge dx_3) + *(a_{23}dx_2 \wedge dx_3) \\ &= a_{12}*(dx_1 \wedge dx_2) + a_{13}*(dx_1 \wedge dx_3) + a_{23}*(dx_2 \wedge dx_3) \\ &= a_{12}dx_3 - a_{13}dx_2 + a_{23}dx_1. \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} *\omega &= *(a_1dx_1 + a_2dx_2) \\ &= a_1*(dx_1) + a_2*(dx_2) \\ &= a_1dx_2 - a_2dx_1. \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.7. (La divergencia).** Un campo vectorial diferenciable  $v$  en  $\mathbb{R}^n$  puede considerarse como una función diferenciable  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Definiremos una función

$\operatorname{div}(v) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (llamada la divergencia de  $v$ ) como sigue:

$$(\operatorname{div}(v))(p) = \operatorname{traza}(dv)_p, \quad p \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $(dv)_p : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}_p^n$  es el diferencial de  $v$  en  $p$ .

a. Si  $v = \sum a_i e_i$ , donde  $\{e_i\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\operatorname{div}(v) = \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

- b. Si  $\omega$  denota la 1-forma diferencial obtenida desde  $v$  por el isomorfismo canónico inducido por el producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y  $\nu$  es el elemento volumen de  $\mathbb{R}^n$  (Ejercicio (2.1)), la divergencia puede obtenerse como sigue:

$$v \longrightarrow \omega \longrightarrow * \omega \longrightarrow d(*\omega) = (\operatorname{div}(v))\nu,$$

donde tenemos que usar la operación estrella introducida en el Ejercicio (2.6).

**Solución.**

- a. Podemos escribir a  $dv$  en forma matricial,

$$dv = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_n} & \frac{\partial a_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Y así,

$$\operatorname{div}(v) = \operatorname{traza}(dv) = \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

- b. Explícitamente, en  $\mathbb{R}^3$  a  $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ , tenemos

$$\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3,$$

y entonces

$$*\omega = a_1 dx_2 \wedge dx_3 - a_2 dx_1 \wedge dx_3 + a_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Por lo tanto,

$$d(*\omega) = \left( \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \left( \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) \nu.$$

# Capítulo 3

## Integrales de Línea

En este capítulo estudiaremos el caso especial de integración de formas diferenciales de grado 1 a lo largo de las curvas. Tales integrales son conocidas como integrales de línea. Nos limitaremos a curvas en  $\mathbb{R}^n$ . Vamos a definir con detalle la integración de 1-formas, antes de ello necesitaremos la siguiente definición.

**Definición 3.1.** Decimos que una curva es diferenciable a trozos  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  si es continua y existen  $t_0, t_1, \dots, t_p$  tales que  $a < t_0 < t_1 < \dots < t_p < b$  y es diferenciable en cada intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ .

**Definición 3.2.** Sea  $\omega = \sum \omega_i dx_i$  una 1-forma definida en un subconjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow U$  una curva diferenciable a trozos en  $U$ , i.e, existe una partición

$a = t_0, t_1, \dots, t_k, t_{k+1} = b$  de  $[a, b]$  tal que la restricción  $\mathbf{c}|_{[t_j, t_{j+1}]} = \mathbf{c}_j$  es diferenciable, con  $j = 0, 1, \dots, k$ . Así en cada intervalo  $[t_j, t_{j+1}]$ ,  $\mathbf{c}_j^* \omega$  es una forma en  $\mathbb{R}$  dada por

$$\mathbf{c}_j^* \omega = \sum_i \omega_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) \frac{dx_i}{dt} dt$$

donde  $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Definimos la integral de  $\omega$  como

$$\int_{\mathbf{c}(t)} \omega = \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathbf{c}_j^* \omega = \int_a^b \left( \sum_i \omega_i(\mathbf{c}(t)) \frac{dx_i}{dt} \right) dt$$

De la definición anterior podemos notar que la curva  $\mathbf{c}_j : [t_j, t_{j+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $[t_j, t_{j+1}] \subset \mathbb{R}$  es diferenciable y dada una forma  $\omega \in \mathbb{R}^n$  la forma  $\mathbf{c}_j^* \omega \in \mathbb{R}$  es igual a  $f(t)dt$  es decir

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathbf{c}_j^* \omega = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) dt$$

con  $f(t)dt$  una 1-forma, por ello ocasionalmente nos referiremos a  $\omega_i(\mathbf{c}(t))$  como  $\omega_i(t)$ .

Un **cambio de parametrización** de  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow U$  es un homeomorfismo diferenciable  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ . Decimos que  $\varphi$  *conserva la orientación* si  $\varphi$  es creciente; de otra manera, *invierte orientación*.

Si  $t = \varphi(\tau)$  y  $\varphi$  es creciente, obtenemos, usando la fórmula de cambio de variables para integrales,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}(t)} \omega &= \int_a^b \left( \sum_i \omega_i(t) \frac{dx_i}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \left( \sum_i \omega_i(\varphi(\tau)) \frac{dx_i}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right) dt \\ &= \int_c^d \left( \sum_i \omega_i(\tau) \frac{dx_i}{d\tau} \right) d\tau \\ &= \int_{\mathbf{c}(\tau)} \omega, \end{aligned}$$

que muestra que  $\int_{\mathbf{c}} \omega$  es invariante por un cambio de parametrización que conserva la orientación; de igual forma, si  $\varphi$  cambia la orientación,  $\int_{\mathbf{c}} \omega$  cambia signo. De una forma más general tenemos la siguiente proposición, donde la propiedad importante es que la integral de una forma no depende de la parametrización con la que se describe.

**Proposición 3.1.** *Sea  $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$  una función diferenciable, continua y creciente, con  $\phi(a) = a$  y  $\phi(b) = b$ . Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow U$  una curva y  $\omega$  una 1-forma diferencial continua en  $U$ . Entonces*

$$\int_{\mathbf{c} \circ \phi} \omega = \int_{\mathbf{c}} \omega$$

*Demostración.* Sea  $\omega = \sum_i \omega_i dx_i$  una 1-forma diferencial.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c} \circ \phi} \omega &= \int_a^b (\mathbf{c} \circ \phi)^* \omega \\ &= \int_a^b \sum_i \omega_i((\mathbf{c} \circ \phi)(t)) (\mathbf{c} \circ \phi)^* dx_i \\ &= \int_a^b \sum_i \omega_i(\mathbf{c}(\phi(t))) d(\mathbf{c}_i \circ \phi)(t) dt \\ &= \int_a^b \sum_i \omega_i(\mathbf{c}(\phi(t))) d(\mathbf{c}_i)(\phi(t)) d\phi(t) dt \end{aligned}$$

Si  $u = \phi(t)$ , entonces  $du = d\phi(t)dt$ . Por el teorema de cambio de variable de la integral en un intervalo en  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{c} \circ \phi} \omega &= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} \sum_i \omega_i(\mathbf{c}(u)) d(\mathbf{c}_i)(u) du \\
 &= \int_a^b \sum_i \omega_i(\mathbf{c}(u)) \mathbf{c}^*(dx_i)(u) \\
 &= \int_a^b \mathbf{c}^* \left( \sum_i \omega_i dx_i \right) \\
 &= \int_a^b \mathbf{c}^* \omega \\
 &= \int_{\mathbf{c}} \omega
 \end{aligned}$$

□

Si la función  $\phi$  es decreciente y  $\phi(a) = b$ ,  $\phi(b) = a$ , entonces la parametrización  $\mathbf{c} \circ \phi$  recorre a  $\mathbf{c}$  en sentido opuesto, y de la demostración anterior es fácil verificar que

$$\int_{\mathbf{c} \circ \phi} \omega = - \int_{\mathbf{c}} \omega.$$

Es decir, la curva recorrida en dirección opuesta no es nada más que una reparametrización en el sentido opuesto. De aquí en adelante denotaremos a  $-\mathbf{c}$  como la curva  $\mathbf{c}$  recorrida en orientación opuesta.

**Definición 3.3.** Sea  $\omega$  una forma diferencial.

a. Diremos que  $\omega$  es cerrada si  $d\omega = 0$ .

b.  $\omega$  es exacta en  $V \subset U$ , si existe una función diferenciable  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\omega = df$  en  $V$ .

**Definición 3.4.** Decimos que un conjunto abierto  $V \subset \mathbb{R}^n$  es **conexo** si, para cada  $x, y \in V$ , existe una curva diferenciable a trozos  $\mathbf{c}$  en  $V$  tal que  $\mathbf{c}(a) = x$  y  $\mathbf{c}(b) = y$ . (Fig. (3.1))

Desde ahora,  $\omega = \sum a_i dx_i$  es una forma diferencial definida en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ .



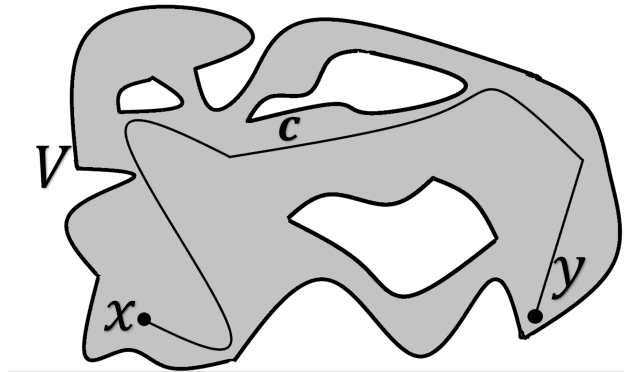


Figura 3.1.  $V$  es conexo si, para  $x, y \in V$ , existe una curva diferenciable a trozos  $\mathbf{c}$  en  $V$  tal que  $\mathbf{c}(a) = x$  y  $\mathbf{c}(b) = y$ .

**Proposición 3.2.** Sea  $\omega$  una 1-forma diferencial definida en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1.  $\omega$  es exacta en un conjunto conexo abierto  $V \subset U$ .
2.  $\int_{\mathbf{c}} \omega$  depende sólo de los extremos de  $\mathbf{c}$  para toda curva  $\mathbf{c} \subset V$ .
3.  $\int_{\mathbf{c}} \omega = 0$ , para toda curva cerrada  $\mathbf{c} \subset V$ .

*Demostración.* 1)  $\implies$  2) Suponga que  $\omega$  es exacta en un conexo abierto  $V \subset U$ , entonces, por definición, existe una función diferenciable  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\omega = df$  en  $V$ . Sea  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow V$  una curva, así,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{c}} \omega &= \int_{\mathbf{c}} df = \int_a^b \mathbf{c}^*(df) \\
 &= \int_a^b d(\mathbf{c}^*f) \\
 &= \int_a^b d(f \circ \mathbf{c}) = \int_a^b \frac{d(f \circ \mathbf{c})}{dt} dt; \quad f \circ \mathbf{c} \text{ es una función real} \\
 &= (f \circ \mathbf{c}) \Big|_a^b \\
 &= (f \circ \mathbf{c})(b) - (f \circ \mathbf{c})(a) = f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a))
 \end{aligned}$$

por lo tanto,  $\int_{\mathbf{c}} \omega$  depende sólo de los extremos de la curva  $\mathbf{c}$ .

2)  $\implies$  3) Suponga que  $\int_{\mathbf{c}} \omega$  depende sólo de los extremos de una curva cerrada  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow V$ , es decir,

$$\int_{\mathbf{c}} \omega = f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)),$$

pero, como  $\mathbf{c}$  es cerrada,  $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ , así,

$$f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)) = f(\mathbf{c}(a)) - f(\mathbf{c}(a)) = 0.$$

Por lo tanto,  $\int_{\mathbf{c}} \omega = 0$  para toda curva cerrada  $\mathbf{c}$ .

3)  $\implies$  2) Sea  $x, y \in V$  y considere las curvas  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 : [a, b] \rightarrow V$  con  $\mathbf{c}_1(a) = x, \mathbf{c}_1(b) = y$ ,  $\mathbf{c}_2(a) = x$  y  $\mathbf{c}_2(b) = y$ .

Hagamos  $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 \cup (-\mathbf{c}_2)$ , (Fig. (3.2)), así  $\mathbf{c}(a) = x = \mathbf{c}(b)$ , es decir,  $\mathbf{c}$  es cerrada.

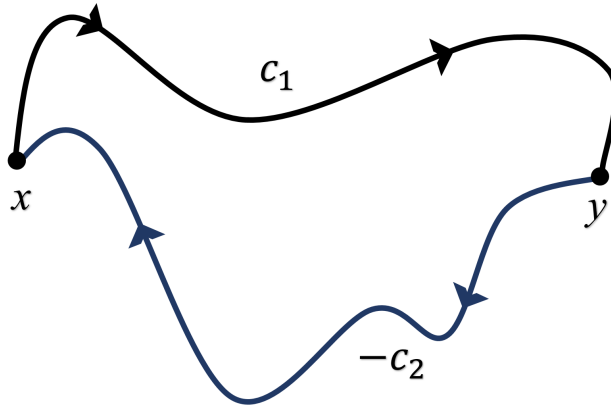


Figura 3.2. La curva  $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 \cup (-\mathbf{c}_2)$  es cerrada.

Por lo que,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \omega &= 0 \\ \int_{\mathbf{c}} \omega &= \int_{\mathbf{c}_1 \cup (-\mathbf{c}_2)} \omega = 0 \\ &= \int_{\mathbf{c}_1} \omega + \int_{-\mathbf{c}_2} \omega = 0 \\ &= \int_{\mathbf{c}_1} \omega - \int_{\mathbf{c}_2} \omega = 0 \end{aligned}$$

así,

$$\int_{\mathbf{c}_1} \omega = \int_{\mathbf{c}_2} \omega$$

Por lo tanto,  $\int_{\mathbf{c}} \omega$  sólo depende de los extremos.

2)  $\implies$  1) Fijemos  $x_0 \in V$ . Para  $x \in V$ , definimos

$$f(x) = \int_{\mathbf{c}} \omega,$$

donde  $\mathbf{c}$  es una curva diferenciable por trozos en  $V$  de  $x_0$  a  $x$ . La función  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  está bien definida porque  $V$  es conexo y la integral  $\int_{\mathbf{c}} \omega$  sólo depende de  $x_0$  y  $x$ . Debemos demostrar que  $\omega$  es exacta en  $V$ , para ello sólo mostremos que  $\omega = df$ .

Ya que  $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ , mostremos que  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = a_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Sea  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , donde 1 está en la  $i$ -ésima posición del vector, y considere la curva

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i : [0, 1] &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto x + t e_i \end{aligned}$$

que une a  $x$  con  $x + t e_i$  y está contenida en  $V$ .

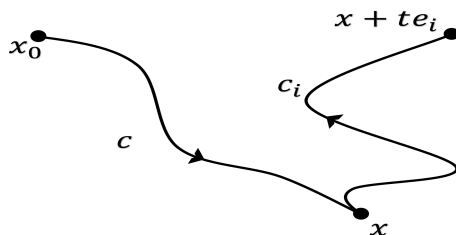


Figura 3.3.  $\mathbf{c} \cup \mathbf{c}_i$  une a  $x_0$  con  $x + t e_i$ .

Sea  $x = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , entonces

$\mathbf{c}_i(t) = x + t e_i = (x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_i = a_i + t, \dots, x_n = a_n)$ , por lo que  $\frac{dx_j}{dt} = 0$

salvo si  $j = i$ ,  $\frac{dx_i}{dt} = 1$ .

Además,  $f(x + t e_i) = \int_{\mathbf{c} \cup \mathbf{c}_i} \omega$ , ya que  $\mathbf{c}$  une a  $x_0$  con  $x$  y  $\mathbf{c}_i$  une a  $x$  con  $x + t e_i$ , así  $\mathbf{c} \cup \mathbf{c}_i$  une a  $x_0$  con  $x + t e_i$  (Fig. (3.3)). Calculemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} (f(x + t e_i) - f(x)) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} \left( \int_{\mathbf{c} \cup \mathbf{c}_i} \omega - \int_{\mathbf{c}} \omega \right) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} \left( \int_{\mathbf{c}} \omega + \int_{\mathbf{c}_i} \omega - \int_{\mathbf{c}} \omega \right) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} \int_{\mathbf{c}_i} \omega \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} \int_a^b \sum_j a_j(t) \frac{dx_j}{dt} dt \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} \int_0^t a_i(s) ds \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( A_i(s) \Big|_0^t \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (A_i(t) - A_i(0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A_i(0 + t) - A_i(0)}{t} \\ &= a_i(0) = a_i(\mathbf{c}_i(0)) \\ &= a_i(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\omega$  es exacta en  $V$ . □

La proposición (3.2) puede ser utilizada para verificar si una forma es exacta o no, como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.1.** *Considere la forma*

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

en  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Calculemos  $d\omega$ ,

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) dx dx + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) dx dy + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy dx \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy dy \\ &= 0 + \left[ \frac{(-1)(x^2 + y^2) - (-y)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \right] dx dy + \left[ \frac{(1)(x^2 + y^2) - (x)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \right] dy dx + 0 \\ &= \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy - \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \\ &= \left( \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lo que implica que  $\omega$  es cerrada. Pero  $\omega$  no es exacta, verificaremos esto: sea

$$\mathbf{c}(t) = (\cos 2\pi t, \sen 2\pi t) \quad t \in [0, 1],$$

el círculo unitario  $\mathbb{S}^1$ , el cual satisface  $\partial \mathbf{c} = 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \omega &= \int_0^1 \mathbf{c}^* \omega = \int_0^1 \mathbf{c}^* \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{-\sen 2\pi t}{\cos^2 2\pi t + \sen^2 2\pi t} \frac{d(\cos 2\pi t)}{dt} + \frac{\cos 2\pi t}{\cos^2 2\pi t + \sen^2 2\pi t} \frac{d(\sen 2\pi t)}{dt} \right] \\ &= \int_0^1 ((-\sen 2\pi t)(-2\pi \sen 2\pi t) + (\cos 2\pi t)(2\pi t)) dt \\ &= 2\pi \int_0^1 (\sen^2 2\pi t + \cos^2 2\pi t) dt = 2\pi \int_0^1 dt \\ &= 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\omega$  es una forma cerrada en  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  que no es exacta.

**Definición 3.5.** Sea  $\omega$  una forma en  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Decimos que la forma  $\omega$  es **localmente exacta** si, para cada  $x \in U$ , existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $\omega$  es exacta en  $B(x, \epsilon)$ .

**Teorema 3.1. (Lema de Poincaré para 1-formas )**

Sea  $\omega = \sum a_i dx_i$  definida en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces  $d\omega = 0$  si y sólo si para cada  $p \in U$  existe un entorno  $V \subset U$  de  $p$  y una función diferenciable  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  con  $df = \omega$  (es decir,  $\omega$  es localmente exacta).

*Demostración.*

$\Leftarrow$

Sea  $p \in U$  y suponga que  $\omega$  es localmente exacta, entonces existe  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $V$  un entorno de  $p$  tal que  $df = \omega$ , así  $d\omega = d(df) = d^2f = 0$ .

$\Rightarrow$

Suponga que  $d\omega = 0$ . Sin pérdida de generalidad supondremos  $\omega = a dx + b dy + c dz$  definida en  $U \subset \mathbb{R}^3$ . Para cada punto  $p \in U$ , sea  $B(p)$  una bola con centro en  $p = (x_0, y_0, z_0)$  contenida en  $U$ . Para cada  $q \in B(p)$ ,  $q = (x, y, z)$ , sea

$$\beta(t) = p + t(q - p) = (x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0)), \quad t \in [0, 1]$$

una recta que conecta a  $p$  con  $q$ . Ya que  $B(p)$  es una bola, se tiene que  $\beta(t) \subset B(p)$ . Definamos

$$\begin{aligned} f(q) &= \int_{\beta(t)} \omega = \int_0^1 \beta^* \omega = \int_0^1 \left( a(\beta(t)) \frac{d\beta_1}{dt} + b(\beta(t)) \frac{d\beta_2}{dt} + c(\beta(t)) \frac{d\beta_3}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^1 (a(\beta(t)) (x - x_0) + b(\beta(t)) (y - y_0) + c(\beta(t)) (z - z_0)) dt \end{aligned}$$

Queremos mostrar que  $df = \omega$ , mostrar esto significa,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(q) = a(q), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(q) = b(q), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(q) = c(q).$$

Note que, al desarrollar la condición  $d\omega = 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 = d\omega &= \frac{\partial a}{\partial x} dx dx + \frac{\partial a}{\partial y} dx dy + \frac{\partial a}{\partial z} dx dz \\ &+ \frac{\partial b}{\partial x} dy dx + \frac{\partial b}{\partial y} dy dy + \frac{\partial b}{\partial z} dy dz \\ &+ \frac{\partial c}{\partial x} dz dx + \frac{\partial c}{\partial y} dz dy + \frac{\partial c}{\partial z} dz dz \\ 0 &= \left( \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} \right) dy dx + \left( \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y} \right) dz dy, \end{aligned}$$

Se reduce a,

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}, \quad \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y}.$$

Consideremos el primer caso  $\frac{\partial f}{\partial x}(q) = a(q)$ . Diferenciando a  $f$  y usando las primeras dos identidades de la condición, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(q) &= \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (a(\beta(t))(x - x_0)) + \frac{\partial}{\partial x} (b(\beta(t))(y - y_0)) + \frac{\partial}{\partial x} (c(\beta(t))(z - z_0)) \right] dt \\
&= \int_0^1 \left[ \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} (x - x_0) + a \frac{\partial}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} (y - y_0) + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} (z - z_0) \right] dt \\
&= \int_0^1 \left[ \frac{\partial a}{\partial x} t (x - x_0) + a + \frac{\partial b}{\partial x} t (y - y_0) + \frac{\partial c}{\partial x} t (z - z_0) \right] dt \\
&= \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial a}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial a}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial a}{\partial z} (z - z_0) \right) t + a \right] dt \\
&= \int_0^1 \left[ \left( \frac{d}{dt} (a(\beta(t))) \right) t + a \right] dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} (a(\beta(t))t) dt \\
&= a(\beta(t))t \Big|_0^1 = a(\beta(1))(1) - a(\beta(0))(0) = a(\beta(1)) = a(q)
\end{aligned}$$

Y de manera similar, procedemos con

$$\frac{\partial f}{\partial y}(q) = b(q), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(q) = c(q).$$

Esto completa la demostración del teorema (3.1).  $\square$

Una de las aplicaciones interesantes del teorema (3.1) es para extender la definición de la integral de una forma cerrada sobre curvas que sólo son continuas. Para hacer esto, observemos que si  $\omega$  definida en  $U \subset \mathbb{R}^n$ , es cerrada y  $\mathbf{c} : [0, 1] \rightarrow U$ , una curva diferenciable, podemos elegir una partición

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = 1,$$

de  $[0, 1]$  de tal manera que la restricción  $\mathbf{c}|_{[t_i, t_{i+1}]} = \mathbf{c}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  está contenida en una bola  $B_i$  donde  $\omega$  es exacta, es decir, existe una función  $f_i : B_i \rightarrow \mathbb{R}$  con  $df_i = \omega$ . Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{c}} \omega &= \sum_i \int_{\mathbf{c}_i} \omega = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{c}_i^* \omega = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{c}_i^* (df_i) \\
&= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} d(\mathbf{c}_i^*(f_i)) = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} d(f_i \circ \mathbf{c}_i)
\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbf{c}} \omega = \sum_i [f_i(\mathbf{c}_i(t_{i+1})) - f_i(\mathbf{c}_i(t_i))] \quad (3.1)$$

Ahora, si  $\mathbf{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua únicamente, tal partición existe y definimos la integral  $\int_{\mathbf{c}} \omega$  por (3.1).

Debemos mostrar que este resultado es independiente de la partición escogida. Dada un partición  $\mathbf{P}$ , un refinamiento de  $\mathbf{P}$  es una nueva partición obtenida de  $\mathbf{P}$  añadiendo nuevos puntos a esta. Si añadimos un punto  $t' \in (t_i, t_{i+1})$ , tenemos que  $\mathbf{c}(t) \in B_i$ , ya que

$$[f_i(\mathbf{c}_i(t_{i+1})) - f_i(\mathbf{c}_i(t'))] + [f_i(\mathbf{c}_i(t')) - f_i(\mathbf{c}_i(t_i))] = [f_i(\mathbf{c}_i(t_{i+1})) - f_i(\mathbf{c}_i(t_i))],$$

el valor de la integral, para esta nueva partición, no cambia. Resulta que la integral es la misma bajo refinamientos de una partición dada. Ahora, dada dos particiones distintas, podemos formar una tercera añadiendo a la primera todos los puntos de la segunda (este es un refinamiento común). Esta integral debe ser igual a las integrales de la primera y segunda partición, que en efecto es así. Esto muestra la independencia requerida.

El teorema (3.1) nos lleva a hacernos la siguiente pregunta: sabemos que una forma cerrada es localmente exacta, ¿cuándo será globalmente exacta? Es necesaria alguna restricción al dominio de la forma cerrada, ya que en el ejemplo (3.1) la forma es cerrada en  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ , pero no es exacta ahí.

La respuesta a esta pregunta dependerá de cómo la integral de una forma cerrada a lo largo de una curva continua varía cuando deformamos la curva continuamente. Para hacer esta noción precisa, introducimos la noción de homotopía.

**Definición 3.6.** *Dos curvas continuas  $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1 : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  con los mismos puntos extremos  $\mathbf{c}_0(a) = \mathbf{c}_1(a)$  y  $\mathbf{c}_0(b) = \mathbf{c}_1(b)$  son **homotópicas** si existe una función continua*

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U, \quad (s, t) \in [a, b] \times [0, 1],$$

tal que

$$H(s, 0) = \mathbf{c}_0(s), \quad H(s, 1) = \mathbf{c}_1(s), \quad (3.2)$$

$$H(a, t) = \mathbf{c}_0(a) = \mathbf{c}_1(a), \quad H(b, t) = \mathbf{c}_0(b) = \mathbf{c}_1(b). \quad (3.3)$$

Por lo tanto, la homotopía  $H(s, t) = H_t(s)$  es una familia de curvas continuas parametrizadas por  $t \in [0, 1]$  que deforman la curva  $H_0(s) = \mathbf{c}_0(s)$  en la curva  $H_1(s) = \mathbf{c}_1(s)$  (condición (3.2)), manteniendo fijo los puntos finales  $H_t(a)$  y  $H_t(b)$  (condición (3.3)).

A veces es conveniente quitar la condición (3.3) de la definición de homotopía y dejar que los puntos extremos varíen; en este caso, decimos que  $H$  es una **homotopía libre** entre  $\mathbf{c}_0$  y  $\mathbf{c}_1$ .

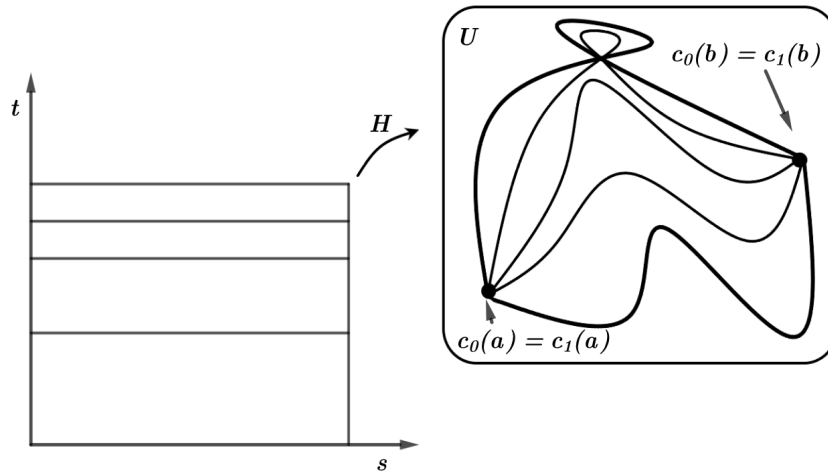


Figura 3.4. Representación gráfica de una homotopía  $H$ .

Resulta que las integrales de línea de formas cerradas son invariantes bajo homotopías. Más precisamente.

**Teorema 3.2.** *Sea  $\omega$  una 1-forma cerrada definida sobre un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Sean  $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1 : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  dos curvas continuas y homotópicas en  $U$ . Entonces*

$$\int_{\mathbf{c}_0} \omega = \int_{\mathbf{c}_1} \omega \quad (3.4)$$

*Demostración.* Ya que  $\omega$  es cerrada, i.e.,  $d\omega = 0$ , entonces  $\omega$  es localmente exacta. Considere  $\mathcal{B} = \{B_i\}$  la colección de bolas donde  $\omega$  es exacta. Sea  $H$  la homotopía entre  $\mathbf{c}_0$  y  $\mathbf{c}_1$ . Afirmamos que  $\mathcal{B}$  es una cubierta para  $H([a, b] \times [0, 1]) \subset U$ . Ya que  $[a, b], [0, 1]$  son compactos, entonces  $R = [a, b] \times [0, 1]$  es compacto también.

Además, la cubierta de  $R$  por  $\{H^{-1}(B_i)\} = W_i$  tiene un número de Lebesgue  $d$  (esto es, cada subconjunto de  $R$  con diámetro  $< d$  está contenido en algún  $W_i$ ). Dividamos a  $R$  en subrectángulos  $R_{j,k}$  a partir de las líneas  $t = \text{const.}$ ,  $s = \text{const.}$ , de tal manera que el diámetro de cada  $R_{j,k}$  sea más pequeño que  $d$ . Por exactitud local en cada subrectángulo, sea

$$\begin{aligned} \partial R_{j,k} &: [0, 1] \rightarrow U, \\ \partial R_{j,k} &= (-\beta_{j,k}) \cup (-\alpha_{j+1,k}) \cup \beta_{j,k+1} \cup \alpha_{j,k}. \end{aligned}$$



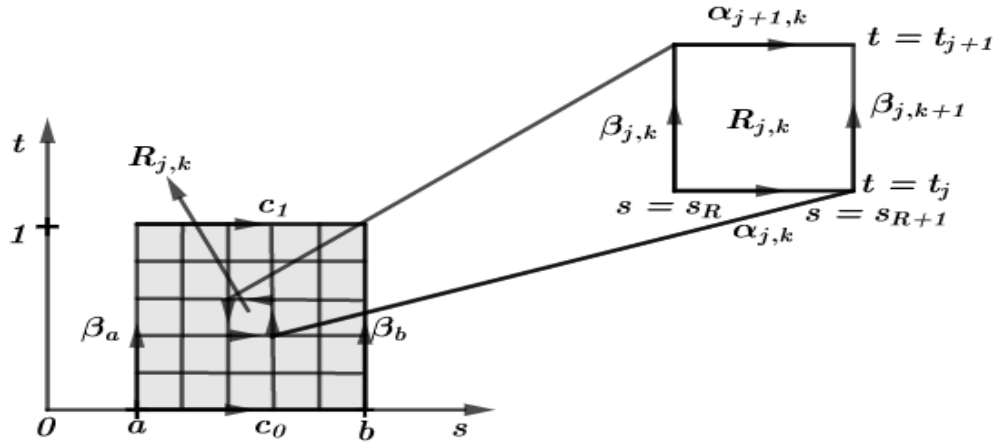


Figura 3.5. El subrectángulo  $R_{j,k}$  surge a partir de las líneas  $t = \text{const.}$ ,  $s = \text{const.}$ , de tal manera que el diámetro de cada  $R_{j,k}$  sea más pequeño que  $d$ .

Así  $\int_{\partial R_{j,k}} \omega = 0$ . Por lo tanto, si  $R_{j,k}$  tiene lados  $\alpha_{j,k}$ ,  $\beta_{j,k+1}$ ,  $\alpha_{j+1,k}$ ,  $\beta_{j,k}$  con orientación dada por  $s$ ,  $t$  creciente, se obtiene (Fig. (3.5))

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{R_{j,k}} \omega = \sum_j \sum_k \int_{\partial R_{j,k}} \omega = \sum_j \sum_k \left[ \int_{\alpha_{j,k}} \omega + \int_{\beta_{j,k+1}} \omega + \int_{-\alpha_{j+1,k}} \omega + \int_{-\beta_{j,k}} \omega \right] \\ &= \sum_j \sum_k \left[ \int_{\alpha_{j,k}} \omega + \int_{\beta_{j,k+1}} \omega - \int_{\alpha_{j+1,k}} \omega - \int_{\beta_{j,k}} \omega \right]. \end{aligned}$$

Pero los lados de  $R_{j,k}$  que son interiores a  $R$  aparecen dos veces con orientación opuesta en la suma de arriba. Por lo que, las correspondientes integrales se anulan,

$$0 = \int_{\mathbf{c}_0} \omega + \int_{\beta_b} \omega - \int_{\mathbf{c}_1} \omega - \int_{\beta_a} \omega, \quad (3.5)$$

y donde  $\beta_a$  es la curva  $H(a, t)$  y  $\beta_b$  es la curva  $H(b, t)$ . Dado que estas curvas se reducen a puntos las integrales correspondientes desaparecen, así

$$\int_{\mathbf{c}_0} \omega = \int_{\mathbf{c}_1} \omega,$$

como deseábamos. □

Podemos observar que si  $\mathbf{c}_0$  y  $\mathbf{c}_1$  son curvas cerradas (ie.,  $\mathbf{c}_0(a) = \mathbf{c}_0(b)$  y  $\mathbf{c}_1(a) = \mathbf{c}_1(b)$ ) que son libremente homotópicas, entonces, aunque las curvas  $\beta_a$  y  $\beta_b$  no se reduzcan a puntos, siempre son iguales. Por lo tanto, por (3.5), todavía se da la igualdad (3.4).

**Proposición 3.3.** Sea  $\omega$  una 1-forma cerrada definida en  $U$ , y sean  $\mathbf{c}_0$  y  $\mathbf{c}_1$  dos curvas cerradas libremente homotópicas en  $U$ . Entonces

$$\int_{\mathbf{c}_0} \omega = \int_{\mathbf{c}_1} \omega;$$

en particular, si  $\mathbf{c}_0$  es libremente homotópica a un punto,

$$\int_{\mathbf{c}_0} \omega = 0.$$

**Definición 3.7.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y conexo. Decimos que  $U$  es **simplemente conexo** si toda curva continua cerrada en  $U$  es libremente homotópica a un punto en  $U$ .

**Proposición 3.4.** Sea  $\omega$  una forma cerrada definida en un conjunto  $U$  simplemente conexo. Entonces  $\omega$  es exacta.

*Demostración.* Sea  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow U$  una curva continua y cerrada, por la definición anterior, como  $U$  es simplemente conexo, entonces  $\mathbf{c}$  es libremente homotópica a un punto  $p \in U$ . Por la proposición (3.3)

$$\int_{\mathbf{c}} \omega = 0,$$

y como  $U$  también es conexo, por la proposición ((3.2), 3 $\Rightarrow$ 1),  $\omega$  es exacta.  $\square$

### 3.1. Resolución de Ejercicios

**Ejercicio 3.1.** Muestre que la forma  $\omega = 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy$  es cerrada y calcule  $\int_{\mathbf{c}} \omega$ , donde  $\mathbf{c}$  es el arco de la parábola  $y = x^2$  desde  $(0, 0)$  a  $(x, y)$ .

**Solución.** Para mostrar lo primero, calculemos  $d\omega$

$$\begin{aligned} d\omega &= d(2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy) = d(2xy^3 dx) + d(3x^2y^2 dy) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3) dx dx + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3) dy dx + \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2) dx dy + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2) dy dy \\ &= 0 - 6xy^2 dx dy + 6xy^2 dx dy \\ d\omega &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que,  $\omega$  es cerrada. Ahora, calculemos lo segundo, para ello, considere la curva

$$\mathbf{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \rightsquigarrow \mathbf{c}(t) = (xt, x^2t^2),$$

que parametriza el arco de la parábola  $y = x^2$  desde  $(0, 0)$  a  $(x, y)$  (Fig. (3.6)), luego,

$$\begin{aligned} \int_c \omega &= \int_0^1 \mathbf{c}^*(\omega) = \int_0^1 2(xt)(x^2t^2)(xdt) + 3(xt)^2(x^2t^2)^2(2x^2tdt) \\ &= \int_0^1 (2x^8t^7 + 6x^8t^7)dt \\ &= \int_0^1 8x^8t^7 dt \\ &= 8x^8 \left( \frac{t^8}{8} \Big|_0^1 \right) = x^8 \end{aligned}$$

Así,  $\int_c \omega = x^8$ .

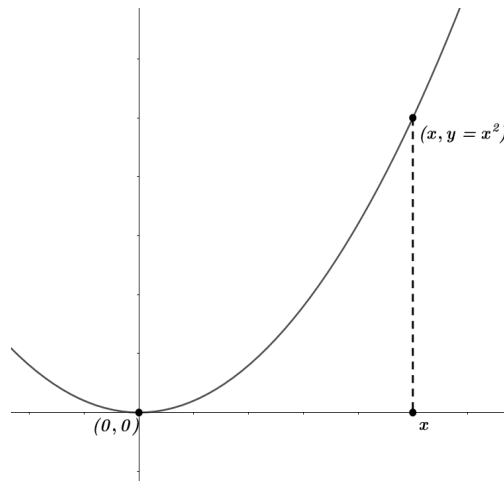


Figura 3.6. Arco de la parábola  $y = x^2$ .

**Ejercicio 3.2.** Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos abiertos simplemente conexos tales que  $U \cap V$  es conexo. Sea  $\omega$  una 1-forma cerrada tal que  $\omega$  es exacta en  $U$  y  $\omega$  es exacta en  $V$ . Muestre que  $\omega$  es exacta en  $U \cup V$ .

**Solución.** Debemos mostrar que, bajo cualquier curva cerrada en un conexo, la integral de  $\omega$  es cero.

Dado que,  $U$  y  $V$  son conjuntos abiertos simplemente conexos (conexos también), y por hipótesis  $U \cap V$  es conexo, entonces  $U \cup V$  es conexo. Recordemos, también que en  $U$  y  $V$ ,  $\omega$  es exacta, por la proposición (3.2), bajo curvas cerradas las integrales de  $\omega$  son cero. Considere las curvas según la figura (3.7). Sea

$$\mathbf{c} : \mathbf{c}_1 \cup \mathbf{c}_2 \cup \mathbf{c}_3 \cup \mathbf{c}_4 \cup \mathbf{c}_5 \cup \mathbf{c}_6.$$

Así,

$$\begin{aligned}
 \int_c \omega &= \int_{c_1 \cup c_2 \cup c_3 \cup c_4 \cup c_5 \cup c_6} \omega \\
 &= \int_{c_1} \omega + \int_{c_2} \omega + \int_{c_3} \omega + \int_{c_3} \omega + \int_{c_4} \omega + \int_{c_5} \omega + \int_{c_6} \omega \\
 &= \left( \int_{c_1} \omega + \int_{-c_7} \omega + \int_{c_6} \omega \right) + \left( \int_{c_2} \omega + \int_{c_8} \omega + \int_{c_5} \omega + \int_{c_7} \omega \right) \\
 &+ \left( \int_{c_3} \omega + \int_{c_4} \omega + \int_{-c_8} \omega \right) \\
 &= \left( \int_{c_1} \omega - \int_{c_7} \omega + \int_{c_6} \omega \right) + \left( \int_{c_2} \omega + \int_{c_8} \omega + \int_{c_5} \omega + \int_{c_7} \omega \right) \\
 &+ \left( \int_{c_3} \omega + \int_{c_4} \omega - \int_{c_8} \omega \right) \\
 &= 0 + 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\omega$  es exacta en  $U \cup V$ .

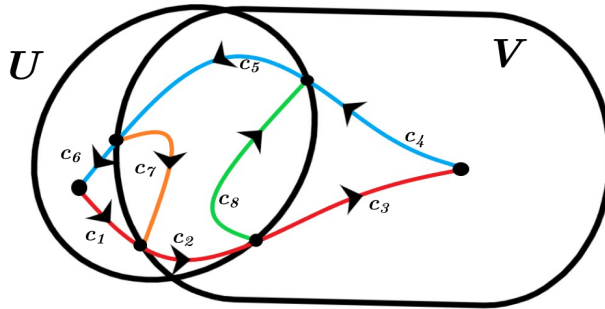


Figura 3.7.  $U \cup V$

# Capítulo 4

## Variedades Diferenciables

Hasta este momento sólo nos hemos detenido a hablar de las formas diferenciales y de integrales de 1-formas. Vamos adentrarnos más en lo que es la Geometría Diferencial y para ello hablaremos de las variedades diferenciables. Vamos a comenzar con el más conocido ejemplo de una variedad diferencial, es decir, una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ , para ello haremos uso de la siguiente definición y la proposición de cambio de parámetros.

**Definición 4.1.** *Un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si, para cada  $p \in S$ , existe un entorno  $V$  en  $\mathbb{R}^3$  y una aplicación  $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$  de un conjunto abierto  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S$  tal que:*

1.  *$f_\alpha$  es un homeomorfismo diferenciable. Como  $f_\alpha$  es continua por ser diferenciable, esto significa que  $f_\alpha$  admite una inversa  $f_\alpha^{-1} : V \cap S \rightarrow U_\alpha$  que es continua.*
2. *Para cada  $q \in U_\alpha$ , el diferencial  $(df_\alpha)_q : T_q(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva.*

La función  $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$  es llamada una parametrización de  $S$  entorno a  $p$

La más importante consecuencia de la definición anterior, es el hecho que el cambio de parámetros es un difeomorfismo. Más precisamente, por la proposición de **cambio de parámetros** si  $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  y  $f_\beta : U_\beta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  son dos parametrizaciones en  $S$  tal que  $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W$ , entonces las funciones

$$f_\beta^{-1} \circ f_\alpha : f_\alpha^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f_\alpha^{-1} \circ f_\beta : f_\beta^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

son un difeomorfismo, es decir, son diferenciables.

De ello se deduce que en una superficie, tiene sentido hablar de funciones diferenciables y la aplicación de métodos de Cálculo Diferencial.

El más serio problema con la definición anterior es su dependencia de  $\mathbb{R}^3$ . En efecto, la idea natural de una superficie abstracta es la de un objeto que es, en cierto sentido, de dimensión 2 y al que podemos aplicar, a nivel local, el Cálculo Diferencial en  $\mathbb{R}^2$ . Tal idea, de

una superficie abstracta (es decir, sin referencia a un espacio) se ha previsto desde Gauss<sup>1</sup>. Le tomó, sin embargo, cerca de un siglo para dar una definición definitiva que presentaremos más adelante. Una de las razones de este retraso fue que, incluso para las superficies en  $\mathbb{R}^3$ , el papel fundamental del **cambio de parámetros** no se entendía claramente.

Como no se gana nada limitándonos al espacio de dimensión 2, lo haremos de una forma más general para dimensión  $n$ .

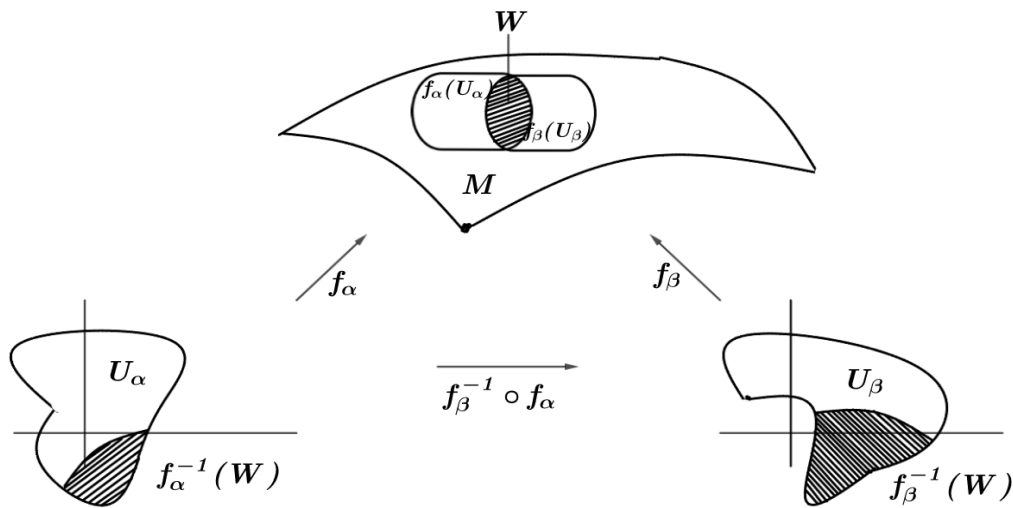


Figura 4.1. Condición 2. de la definición (4.2)

**Definición 4.2.** Una *variedad diferenciable de dimensión  $n$* , es un conjunto  $M$  junto con una familia de funciones inyectivas  $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de conjuntos abiertos  $U_\alpha$  en  $\mathbb{R}^n$  sobre  $M$  tal que:

- $\bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = M$ .

<sup>1</sup>Johann Carl Friedrich Gauss (30 de abril de 1777 - 23 de febrero de 1855) fue un matemático, astrónomo, geobotánico y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica.

2. Para cada par  $\alpha, \beta$ , con  $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , los conjuntos  $f_\alpha^{-1}(W)$  y  $f_\beta^{-1}(W)$  son conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^n$  y las funciones  $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha, f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$  son diferenciables. (Fig. (4.1))
3. La familia  $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$  es maximal (relativo al orden dado por la inclusión de conjuntos) entre todas las familias de entornos coordinados sobre  $M$  bajo las condiciones (1) y (2).

El par  $(U_\alpha, f_\alpha)$  con  $p \in f_\alpha(U_\alpha)$  es llamado una **parametrización** (o un **sistema coordinado** o **carta**) de  $M$  en  $p$ ;  $f_\alpha(U_\alpha)$  es entonces llamado un **entorno coordinado** de  $p$ . Una familia  $(U_\alpha, f_\alpha)$  que satisface las propiedades (1) y (2) es llamada una **estructura diferenciable** en  $M$ .

La condición (3) es una condición técnica. En realidad, siempre podemos extender una estructura diferenciable a una maximal, uniendo a la estructura dada todas las parametrizaciones que junto con alguna parametrización de tal estructura satisfacen la condición (2). Así con cierto abuso de lenguaje, podemos decir que una variedad diferenciable es un conjunto dotado con una estructura diferenciable, la extensión a una maximal, siendo asumido cuando sea necesario.

**Observación 3.** Una comparación entre la definición de una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$  y la definición de una variedad diferenciable, muestra que el punto crucial ha sido introducir la propiedad fundamental de cambio de parámetros (tal es un teorema para superficies) como un axioma de la definición (4.2). Como veremos pronto, esto transporta a variedades diferenciables todas las notaciones del cálculo diferencial en  $\mathbb{R}^n$ .

**Observación 4.** Una estructura diferenciable en un conjunto  $M$  que induce de forma natural una topología en  $M$ . Es suficiente definir que  $A \subset M$  es un conjunto abierto si

$f_\alpha^{-1}(A \cap f_\alpha(U_\alpha))$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ , para todo  $\alpha$ , verificamos que, si  $A = f_\alpha(U_\alpha)$ , entonces

$$\begin{aligned} f_\alpha^{-1}(A \cap f_\alpha(U_\alpha)) &= f_\alpha^{-1}(f_\alpha(U_\alpha)) \\ &= U_\alpha \text{ es un abierto en } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Es fácil verificar que esto define una topología en  $M$  para los cuales, los conjuntos,  $f_\alpha(U_\alpha)$  son abiertos, es decir,  $f_\alpha^{-1}(f_\alpha(U_\alpha)) = U_\alpha$  y las funciones  $f_\alpha$  son continuas, que en efecto se muestra  $f_\alpha^{-1}(A)$  es abierto en  $U_\alpha$ , entonces

$$\begin{aligned} f_\alpha^{-1}(A) &= f_\alpha^{-1}(A) \cap U_\alpha \\ &= f_\alpha^{-1}(A \cap f_\alpha(U_\alpha)) \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Así,  $f_\alpha^{-1}(A)$  es abierto en  $U_\alpha$ .

**Observación 5.** *La topología natural de una variedad diferenciable puede ser bastante extraña. En particular puede suceder si uno (o ambos) de los siguientes axiomas no son válidos:*

- (a) *Axioma de Hausdorff. Dado dos puntos distintos en  $M$ , existen entornos de estos puntos que no se intersectan.*
- (b) *Axioma de base numerable.  $M$  puede ser cubierto por un número numerable de entornos coordinados (decimos entonces que  $M$  tiene una base numerable).*

En el axioma (a) es esencial para probar que el límite de una sucesión convergente es única, y el axioma (b) es esencial para la existencia de una partición de la unidad, que es casi una herramienta indispensable para el estudio de la topología de variedades.

Asumiremos de ahora en adelante, que todas las variedades son consideradas de Hausdorff y tiene una base numerable.

#### Ejemplo 4.1.

1. *Una superficie regular  $S$  es una variedad diferenciable 2-dimensional con estructura  $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ , que por definición las  $f_\alpha$  son homeomorfismos diferenciables, cumpliendo*
  - a)  $\bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = S$ , y
  - b) *Por la proposición de cambio de parámetros se tiene que para  $\alpha, \beta$  tal que  $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , entonces  $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$  y  $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$  son diferenciables.*
2. *El espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  es una variedad diferenciable  $n$ -dimensional. En efecto, basta tomar como la estructura diferenciable a  $\{(\mathbb{R}^n, i_{\mathbb{R}^n} = i)\}$ , es decir, un atlas constituido por una sola carta formada por el abierto  $U = \mathbb{R}^n$  y el homeomorfismo coordinado  $\varphi = i$ , la identidad en  $\mathbb{R}^n$  que es biyectiva, con lo que se satisfacen las condiciones:*
  - a)  $\bigcup i(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ .
  - b)  $i^{-1}(i(\mathbb{R}^n)) = \mathbb{R}^n$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $i^{-1} \circ i = i$  es diferenciable.
3. *Un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  es una  $n$ -variedad diferenciable. Se verifica tomando el atlas  $\{(U \cap \mathbb{R}^n, i_n)\}$ , donde  $U \cap \mathbb{R}^n$  es un abierto y  $i_n$ , la función inclusión que es biyectiva, de aquí satisface que*
  - a)  $\bigcup i_n(U \cap \mathbb{R}^n) = U$



b)  $i_n^{-1}(i_n(U \cap \mathbb{R}^n)) = U$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y como  $i_n^{-1} \circ i_n = i$ , y la identidad es diferenciable, entonces  $i_n^{-1} \circ i_n$  es diferenciable.

**Ejemplo 4.2.** Si  $M$  es una  $n$ -variedad diferenciable, todo abierto  $U \subset M$  es de nuevo una  $n$ -variedad diferenciable, cuyo atlas viene dado por

$$\left\{ \left( f_\alpha^{-1}(U) \cap U_\alpha, f_\alpha \Big|_{f_\alpha^{-1}(U) \cap U_\alpha} \right) : \forall (U_\alpha, f_\alpha) \text{ carta de } M \right\}.$$

En efecto, los abiertos  $f_\alpha(U_\alpha)$  recubren a  $M$ , sea  $V_\alpha = f_\alpha^{-1}(U) \cap U_\alpha$ ,

$$\bigcup_{\alpha} f_\alpha \Big|_{V_\alpha} (V_\alpha) = \bigcup_{\alpha} f_\alpha(V_\alpha),$$

verificaremos que las  $f_\alpha \Big|_{V_\alpha} (V_\alpha)$  recubren a  $U$ , para ello:

“ $\subset$ ”

$$\begin{aligned} \bigcup_{\alpha} f_\alpha(V_\alpha) &= \bigcup_{\alpha} f_\alpha(f_\alpha^{-1}(U) \cap U_\alpha) \subset \bigcup_{\alpha} U \cap f_\alpha(U_\alpha) \\ &\subset U. \end{aligned}$$

“ $\supset$ ”

Recordemos que  $\bigcup_{\alpha} f_\alpha(U_\alpha) = M$  y que  $U \subset M$ .

$$\begin{aligned} y \in U &\implies \exists x \in U_\beta \text{ tal que } f_\beta(x) = y, \text{ algún } \beta \\ &\implies x \in f_\beta^{-1}(U) \cap U_\beta = V_\beta \\ &\implies y \in f_\beta(V_\beta) \\ &\implies y \in \bigcup_{\alpha} f_\alpha(V_\alpha) \\ &\implies U \subset \bigcup_{\alpha} f_\alpha(V_\alpha) \end{aligned}$$

$$\therefore \bigcup_{\alpha} f_\alpha \Big|_{V_\alpha} (V_\alpha) = \bigcup_{\alpha} f_\alpha(V_\alpha) = U$$

Denotemos por  $\phi$  las funciones  $\phi_\alpha = f_\alpha \Big|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow U$ . Sean  $\alpha, \beta$ , con  $\phi_\alpha(V_\alpha) \cap \phi_\beta(V_\beta) = W$ , luego

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^{-1}(W) &= \phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(V_\alpha) \cap \phi_\beta(V_\beta)) = \phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(V_\alpha)) \cap \phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta(V_\beta)) \\ &= V_\alpha \cap \phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta(V_\beta)); \text{ por inyectividad } \phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(V_\alpha)) = V_\alpha, \end{aligned}$$

Observemos que

$$\phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta(V_\beta)) = f_\alpha^{-1}(f_\beta(V_\beta)) = (f_\alpha^{-1} \circ f_\beta)(V_\beta),$$

pero  $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$  y  $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha = (f_\alpha^{-1} \circ f_\beta)^{-1}$  son diferenciables por lo tanto, son continuas también, así que

$$(f_\alpha^{-1} \circ f_\beta)(V_\beta) \text{ es abierto en } V_\alpha \subset \mathbb{R}^n,$$

entonces

$$V_\alpha \cap \phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta(V_\beta)) \text{ es abierto en } V_\alpha,$$

por lo que  $\phi_\alpha^{-1}(W)$  es abierto en  $V_\alpha$  igual que  $\phi_\beta^{-1}(W)$ . Además  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  y  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  son diferenciables porque son restricciones de funciones diferenciables sobre conjuntos abiertos.

**Ejemplo 4.3.** (*El plano real proyectivo*  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ). Denotaremos por  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  al conjunto de todas las líneas en  $\mathbb{R}^3$  que pasan por el origen  $(0, 0, 0)$  de  $\mathbb{R}^3$ , es decir,  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  es el conjunto de “direcciones” en  $\mathbb{R}^3$ .

Queremos introducir una estructura diferenciable en  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Para eso, sea  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , y note que  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  es el espacio cociente de  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  por la relación de equivalencia  $\sim$ :

$$(x, y, z) \sim (x_0, y_0, z_0) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ tal que } (x_0, y_0, z_0) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Verificaremos que  $\sim$  es una relación de equivalencia

1. (Reflexividad)

Dado que  $\lambda = 1 \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$(x, y, z) = 1(x, y, z),$$

por lo tanto,  $(x, y, z) \sim (x, y, z)$

2. (Simétrica)

Suponga que  $(x, y, z) \sim (x_0, y_0, z_0)$ , entonces existe  $\lambda_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$  tal que

$$(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1(x, y, z). \text{ Como } \lambda_1 \neq 0, \text{ entonces } \frac{1}{\lambda_1}x_0 = x, \frac{1}{\lambda_1}y_0 = y, \frac{1}{\lambda_1}z_0 = z, \text{ así,}$$

$$(x, y, z) = \frac{1}{\lambda_1}(x_0, y_0, z_0), \text{ por lo que } (x_0, y_0, z_0) \sim (x, y, z)$$

3. (Transitiva)

Suponga que  $(x, y, z) \sim (x_0, y_0, z_0)$  y que  $(x_0, y_0, z_0) \sim (x_1, y_1, z_1)$ . Entonces  $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$  tales que  $(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1(x, y, z)$  y  $(x_1, y_1, z_1) = \lambda_2(x_0, y_0, z_0)$ , así,  $x_0 = \lambda_1 x$  y  $x_1 = \lambda_2 x_0$ , entonces  $x_1 = \lambda_2 x_0 = \lambda_2 \lambda_1 x$ . Luego  $(x_1, y_1, z_1) = \lambda_2 \lambda_1(x, y, z)$ . Por lo tanto  $(x, y, z) \sim (x_1, y_1, z_1)$ .

$\therefore \sim$  es una relación de equivalencia.

Los elementos de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  los denotaremos por  $[x, y, z]$ .

Ahora, vamos a definir los conjuntos  $V_1, V_2, V_3$  en  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  por:

$$V_1 = \{[x, y, z] : x \neq 0\},$$

$$V_2 = \{[x, y, z] : y \neq 0\},$$

$$V_3 = \{[x, y, z] : z \neq 0\},$$

y las funciones  $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow V_i, i = 1, 2, 3$ , por

$$f_1(u, v) = [1, u, v], \quad f_2(u, v) = [u, 1, v], \quad f_3(u, v) = [u, v, 1],$$

donde  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ . Geométricamente  $V_2$ , por ejemplo, es el conjunto de las líneas de  $\mathbb{R}^3$  que pasan por el origen y no pertenecen al plano  $xOz$ . Afirmamos que la familia  $\{(f_i, \mathbb{R}^2)\}$  es una estructura diferenciable para  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

Debemos mostrar que las  $f_i$  son inyectivas (en efecto, son biyectivas). Supongamos, sin pérdida de generalidad, a  $i = 1$  y  $j = 2$ .

$$\begin{aligned} f_1(u, v) = f_1(u_0, v_0) &\Rightarrow [1, u, v] = [1, u_0, v_0] \\ &\Rightarrow (1, u, v) \sim (1, u_0, v_0) \\ &\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ tq. } (1, u_0, v_0) = \lambda(1, u, v) \\ &\Rightarrow 1 = \lambda \\ &\Rightarrow (u_0, v_0) = (u, v) \\ &\Rightarrow f_1 \text{ es inyectiva.} \\ &\therefore f_i \text{ son inyectivas.} \end{aligned}$$

No es difícil probar que  $f_i$  es sobreyectiva también,

$$\begin{aligned} [x, y, z] \in V_1 &\Rightarrow x \neq 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{x}(x, y, z) = \left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \\ &\Rightarrow [x, y, z] = \left[1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right] = f_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \\ &\Rightarrow f_1 \text{ es sobreyectiva.} \\ &\therefore f_i \text{ son sobreyectivas.} \end{aligned}$$

Por la sobreyectividad de  $f_i$  obtenemos que  $f_i(\mathbb{R}^2) = V_i$ .

Luego, debemos verificar que  $\bigcup_i f_i(\mathbb{R}^2) = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , la inclusión " $\subset$ " es inmediata (pues  $V_i \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ), sólo falta verificar " $\supset$ ".

$$\begin{aligned} [u, v, w] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) &\Rightarrow (u, v, w) \neq (0, 0, 0) \\ &\Rightarrow u \neq 0 \text{ o } v \neq 0 \text{ o } w \neq 0 \\ &\Rightarrow [u, v, w] \in V_1 \text{ o } [u, v, w] \in V_2 \text{ o } [u, v, w] \in V_3 \\ &\Rightarrow [u, v, w] \in \bigcup_{i=1}^3 V_i \end{aligned}$$

$$\therefore \bigcup_i f_i(\mathbb{R}^2) = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}).$$

Verifiquemos ahora que  $f_i^{-1}(V_i \cap V_j)$  es abierto en  $\mathbb{R}^2$ , tomemos  $i = 1, j = 2$ , extendamos a  $f_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$

$$f_1^{-1}(V_1 \cap V_2) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \neq 0\},$$

sea  $(u, v) \in f_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$  y considere  $B((u, v), |v|)$ , entonces  $B((u, v), |v|) \subset f_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ , por lo tanto  $f_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^2$ . En general  $f_i^{-1}(V_i \cap V_j)$  es abierto en  $\mathbb{R}^2$ .

Y por último mostremos que  $f_j^{-1} \circ f_i$  es diferenciable, tomemos  $i = 1, j = 2$ ,

$$(f_2^{-1} \circ f_1)(u, v) = f_2^{-1}(f_1(u, v)) = (f_2^{-1}([1, u, v])) = (f_2^{-1}\left(\left[\frac{1}{u}, 1, \frac{v}{u}\right]\right)) = \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)$$

es claramente diferenciable.

**Ejemplo 4.4. (El espacio real proyectivo).** El ejemplo anterior puede generalizarse fácilmente. Sea  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  y defina el **espacio real proyectivo  $n$ -dimensional**  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  como el espacio cociente de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  por la relación de equivalencia:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (y_1, \dots, y_{n+1}) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ tal que } (y_1, \dots, y_{n+1}) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}).$$

Los elementos de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  serán denotados por  $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ .

Defina los subconjuntos  $V_i \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ , como

$$V_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] : x_i \neq 0\},$$

y las funciones  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow V_i$  por

$$f_i(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_{n+1}].$$

De manera análoga como en el ejemplo anterior, se verifica que la familia  $\{(f_i, \mathbb{R}^n)\}$  es una estructura diferenciable en  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ .

**Ejemplo 4.5.** Se considera la esfera unitaria de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}.$$

En ella se define la proyección estereográfica desde el polo norte  $N = (0, \dots, 0, 1)$ ,  $\pi_1$  haciendo corresponder a cada punto de  $\mathbb{S}^n - \{N\}$  las  $n$  primeras componentes de la intersección de la recta que lo une a  $N$  con el plano  $x_{n+1} = 0$ . Si  $\pi_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = (z_1, \dots, z_n)$  ha de existir un único  $\lambda$  tal que  $(0, \dots, 0, 1) + \lambda[(x_1, \dots, x_{n+1}) - (0, \dots, 0, 1)] = (z_1, \dots, z_n, 0)$ .

Esto se produce para  $\lambda = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$  y entonces

$$\pi_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right).$$

De manera similar se define la proyección estereográfica desde el polo sur  $S = (0, \dots, 0, -1)$ ,  $\pi_2$ , en  $\mathbb{S}^n - \{S\}$  y se obtiene

$$\pi_2(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right).$$

El mapeo  $\pi_1$  es diferenciable, inyectiva y mapea a  $\mathbb{S}^n - \{N\}$  en el plano  $x_{n+1} = 0$ . Por lo tanto, las parametrizaciones  $(\mathbb{R}^n, \pi_1^{-1}), (\mathbb{R}^n, \pi_2^{-1})$  cubren  $\mathbb{S}^n$ , ya que

$$\pi_1^{-1}(\mathbb{R}^n) \cup \pi_2^{-1}(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{S}^n - \{N\}) \cup (\mathbb{S}^n - \{S\}) = \mathbb{S}^n.$$

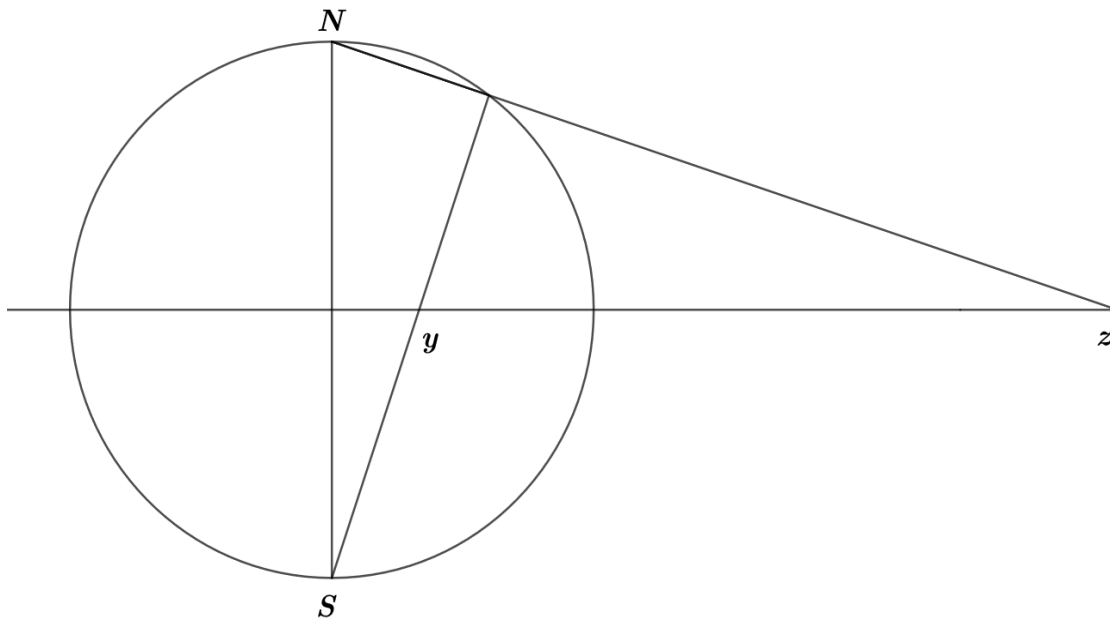


Figura 4.2. Cambio de proyección estereográfica.

Si escribimos  $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}(z) = y$  con  $z = (z_1, \dots, z_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , vemos por geometría euclidiana (Fig. (4.2)) que  $\|y\| = \frac{1}{\|z\|}$  e  $\frac{y}{\|y\|} = \frac{z}{\|z\|}$ , luego

$$\pi_2 \circ \pi_1^{-1}(z) = y = \|y\| \frac{z}{\|z\|} = \frac{z}{\|z\|^2},$$

de donde se deduce que  $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}$  es diferenciable. Así los cambios de coordenadas son diferenciables. Por lo que,  $\mathbb{S}^n$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Más adelante se

presentará otra estructura diferenciable que constará de más de dos cartas para que  $\mathbb{S}^n$  sea variedad diferenciable.

**Observación 6.** En el ejemplo anterior, haciendo  $n = 2$ , obtenemos la esfera unitaria de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , entonces las proyecciones estereográficas vienen dadas por

$$\pi_1(x, y, z) = \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right), \quad \pi_2(x, y, z) = \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right).$$

Calculemos  $\pi_1^{-1}, \pi_2^{-1}$ , para ello note que  $\pi_1^{-1}(u, v) = (x, y, z)$  si y sólo si  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $(x, y, z) \neq (0, 0, 1)$ , es decir,  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$ , y  $\pi_1(x, y, z) = (u, v)$ . De esta última identidad tenemos

$$u = \frac{x}{1-z}, \quad v = \frac{y}{1-z}.$$

Así,

$$u(1-z) = x, \quad v(1-z) = y.$$

Ahora usamos que  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ :

$$u^2(1-z)^2 + v^2(1-z)^2 = 1 - z^2,$$

Al simplificar( note que estamos usando a  $z \neq -1$  en  $\mathbb{S}^2$ , ya que si no dividiríamos por cero):

$$(u^2 + v^2)(1-z)^2 = 1 - z^2, \quad (u^2 + v^2)(1-z) = (1+z).$$

Y de aquí,

$$u^2 + v^2 - 1 = (1 + u^2 + v^2)z, \quad z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}$$

Luego,

$$1 - z = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}, \quad x = u(1 - z) = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = v(1 - z) = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1},$$

entonces

$$\pi_1^{-1}(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

De manera análoga para

$$\pi_2^{-1}(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - (u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Antes de presentar más ejemplos, necesitamos extender a una variedad diferenciable el cálculo diferencial local de  $\mathbb{R}^n$ .

De ahora en adelante, cuando denotemos una variedad diferenciable por  $M^n$ , el superíndice  $n$  denotará la dimensión de  $M$  ( $M = M^n$ ).

**Definición 4.3.** Sean  $M_1^n$  y  $M_2^m$  dos variedades diferenciables. Una función  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  es **diferenciable en un punto**  $p \in M_1$  si dada una parametrización  $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$  alrededor  $\varphi(p)$ , existe una parametrización  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$  alrededor  $p$  tal que

$$\varphi(f(U)) \subset g(V) \text{ y la función}$$

$$g^{-1} \circ \varphi \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

es diferenciable en  $f^{-1}(p)$ . (Fig. (4.3))

La función  $\varphi$  es **diferenciable en un conjunto abierto** de  $M_1$  si es diferenciable en todos los puntos de dicho conjunto.

La función  $g^{-1} \circ \varphi \circ f$  es la *expresión* de  $\varphi$  en las parametrizaciones  $f$  y  $g$ . Ya que el cambio de parámetros es diferenciable, el caso en que  $\varphi$  sea diferenciable no dependerá de la elección de la parametrización.

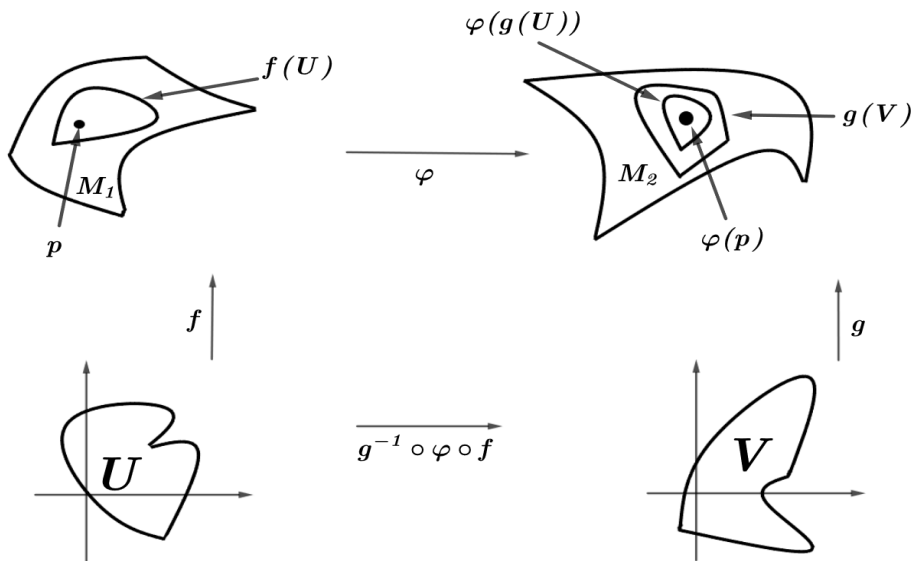


Figura 4.3. Función diferenciable.

**Observación 7.** Note que, si hacemos  $M_2 = \mathbb{R}$  en la definición anterior, obtenemos el criterio de funciones reales diferenciables sobre variedades, en este sentido, la definición se traduce a: Sea  $M^n$  una variedad diferenciable y  $p \in M$ . Se dirá que  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable en  $p$ , si existe una parametrización alrededor de  $p$ ,  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  tal que

$$\varphi \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

es diferenciable en  $f^{-1}(p)$ .

**Ejemplo 4.6.** Considere a  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  con la carta  $(\mathbb{R}^2, \pi_1^{-1})$  y la función  $\varphi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $\varphi(x, y, z) = x - y + z$ . Entonces  $\varphi \circ \pi_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi \circ \pi_1^{-1}(u, v) &= \varphi \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) \\ &= \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} - \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} + \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}, \end{aligned}$$

que es diferenciable, ya que el punto  $(0, 0)$  se excluyó en la construcción.

**Ejemplo 4.7.** Considere a  $X$  como el conjunto de rectas en  $\mathbb{R}^3$  que pasan por el origen, salvo aquellas rectas con ecuaciones  $x = y = 0$  (el eje  $z$ ). Y considere, las parametrizaciones

$$\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow X$$

definida como  $\varphi(a, b)$  una ecuación de la forma  $ax + y = 0$  o  $bx + z = 0$ , y a  $\psi(A, B)$  una ecuación de la forma  $x + Ay = 0$  o  $By + z = 0$ . Se verifica fácilmente que  $\{(\mathbb{R}^2, \varphi), (\mathbb{R}^2, \psi)\}$  es una estructura diferenciable que hace a  $X$  una variedad diferenciable.

También considere a  $N$  el plano en  $\mathbb{R}^3$  con ecuación  $x = 1$ .  $N$  es el grafo sobre el plano  $yz$ , así que tiene un atlas con una sola carta con parametrización  $\sigma(y, z) = (1, y, z)$ . Tomando la estructura diferenciable  $\{(\mathbb{R}^2, \sigma)\}$ , se verifica que  $N$  es variedad diferenciable.

Sea  $F : X \rightarrow N$ , la función que lleva una recta  $\ell$  en  $X$  a su punto de intersección con  $N$ . Vamos a verificar que  $F$  es diferenciable. Tomemos las parametrizaciones en  $N$  a  $\sigma$  y en  $X$  a  $\varphi$ , tenemos entonces la expresión en término de estas parametrizaciones

$$\sigma^{-1} \circ F \circ \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

Como  $\varphi(u, v) = \ell$ , donde  $\ell = \{ux + y = 0, vx + z = 0\}$ ; calculemos  $F(\ell) =$  intersección de  $\ell$  con  $N$ , es decir,

$$\begin{cases} u \cdot 1 + y = 0 \\ v \cdot 1 + z = 0 \end{cases}$$

y así, el punto de intersección es  $(1, -u, -v)$ , por lo que  $F(\ell) = (1, -u, -v)$ , y  $\sigma^{-1} \circ F(\ell) = \sigma^{-1}(1, -u, -v) = (-u, -v)$  la cual claramente es diferenciable.

En particular, se deduce de lo anterior que podemos hablar de funciones diferenciables ( $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) y curvas diferenciables ( $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^n$ ) sobre una variedad diferenciable ( $I \subset \mathbb{R}$  siempre denotará un intervalo abierto de la línea real conteniendo al origen  $0 \in \mathbb{R}$ ).

Ahora, deseamos definir la noción de un vector tangente a una curva diferenciable sobre una variedad diferenciable. En el caso de curvas diferenciables  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  sobre una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ , el vector tangente  $\alpha'$  es simplemente la velocidad de  $\alpha$  como un vector en  $\mathbb{R}^3$ . Ya que no contamos con un “ambiente” agradable del espacio, debemos elegir una propiedad característica del vector tangente que no dependa del “ambiente” del espacio.



Para eso, sea  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva diferenciable en  $\mathbb{R}^n$ , con  $\alpha(0) = p \in \mathbb{R}^n$ , y escíbase

$$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Así,  $\alpha'(0) = (x'_1(0), \dots, x'_n(0)) = v \in \mathbb{R}^n$ . Ahora, sea  $\varphi$  una función real en  $\mathbb{R}^n$ , diferenciable en un entorno de  $p$ . Entonces la derivada de  $\varphi$  a lo largo de  $v$  en el punto  $p$  está dado por

$$\left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0} = \left( \sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \varphi.$$

Por lo tanto, la “derivada direccional a lo largo de  $v$ ” es un operador sobre funciones diferenciables que depende sólo de  $v$ . Esta es la propiedad característica de vectores que usaremos para extenderlos a variedades diferenciables.

**Definición 4.4.** Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva diferenciable sobre una variedad diferenciable  $M$ , con  $\alpha(0) = p \in M$ , y sea  $D$  el conjunto de funciones reales de  $M$  que son diferenciables en  $p$ . **El vector tangente** a una curva  $\alpha$  en  $p$  es la función  $\alpha'(0) : D \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha'(0) \varphi = \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha) \right|_{t=0}, \quad \varphi \in D.$$

Un **vector tangente** en  $p \in M$  es el vector tangente de alguna curva diferenciable  $\alpha : I \rightarrow M$  con  $\alpha(0) = p$ .

Queremos mostrar que el conjunto de vectores tangentes en un punto  $p \in M^n$  constituye un espacio vectorial real  $n$ -dimensional. Para esto, escoja una parametrización

$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  alrededor de  $p = f(0, \dots, 0)$ . Entonces una curva  $\alpha : I \rightarrow M$  y una función  $\varphi \in D$  pueden escribirse como:

$$(f^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

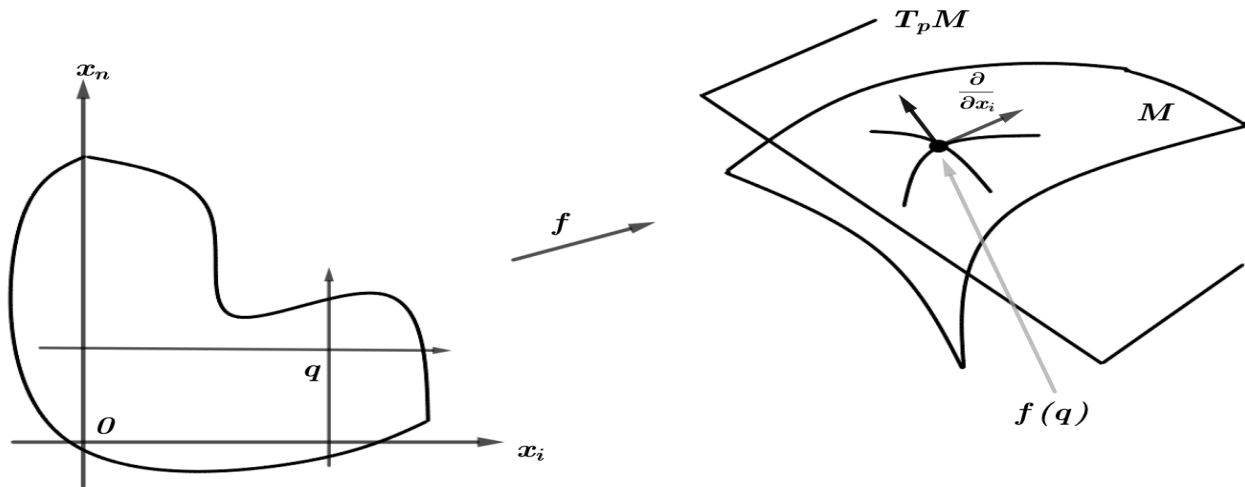
$$(\varphi \circ f)(q) = \varphi(x_1, \dots, x_n), \quad q = (x_1, \dots, x_n)$$

respectivamente. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha'(0) \varphi &= \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ f) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\varphi(x_1(t), \dots, x_n(t))) \right|_{t=0} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) \varphi, \end{aligned}$$

para que el vector tangente  $\alpha'(0)$  en  $p$  pueda escribirse como

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0. \quad (4.1)$$

Figura 4.4. Vector tangente en  $p$ .

Note que  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$  es el vector tangente en  $p$  a la “curva coordenada” (Fig. (4.4))

$$x_i \longrightarrow f(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0).$$

Ahora, sea  $T_f$  el espacio vectorial generado por  $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right\}, i = 1, \dots, n$ .

**Lema 4.1.** *El conjunto  $T_p M$  de los vectores tangentes a  $M$  en  $p$  es igual a  $T_f$ .*

*Demostración.* El desarrollo anterior hasta llegar a la ecuación (4.1) muestra que  $T_p M \subset T_f$ .

Ahora, sea  $v \in T_f$ , entonces  $v = \sum_i \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ . Sea  $\alpha : I \rightarrow M$ , una curva, dada en la parametrización  $f$  por  $x_i = \lambda_i t$ . Entonces  $\alpha'(0) = \sum_i x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ , pero  $x'_i(t) = \lambda_i$ , y  $x'_i(0) = \lambda_i$ , por lo que  $\alpha'(0) = \sum_i \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 = v$ , así,  $T_f \subset T_p M$ .  $\square$

La expresión (4.1) muestra que el vector tangente a la curva  $\alpha$  en  $p$  depende solamente de la derivada de  $\alpha$  en un sistema coordenado. Se sigue del lema (4.1) que el conjunto  $T_p M$ , con las operaciones usuales de funciones, forma un espacio vectorial de dimensión  $n$  que es llamado el **espacio tangente** de  $M$  en  $p$  y que la elección de una parametrización  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  determina una **base asociada**  $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0\right\}$ .

Con la noción de un espacio tangente podemos definir las nociones del diferencial de una función  $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^m$ .

**Proposición 4.1.** Sean  $M_1^n$  y  $M_2^m$  variedades diferenciables y sea  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  una función diferenciable. Para cada  $p \in M_1$  y para cada  $v \in T_p M_1$ , escojamos una curva diferenciable  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_1$  con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$ . La función  $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$  dado por  $d\varphi_p(v) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$  es una función lineal que no depende de la elección de  $\alpha$ . (Fig. (4.5))

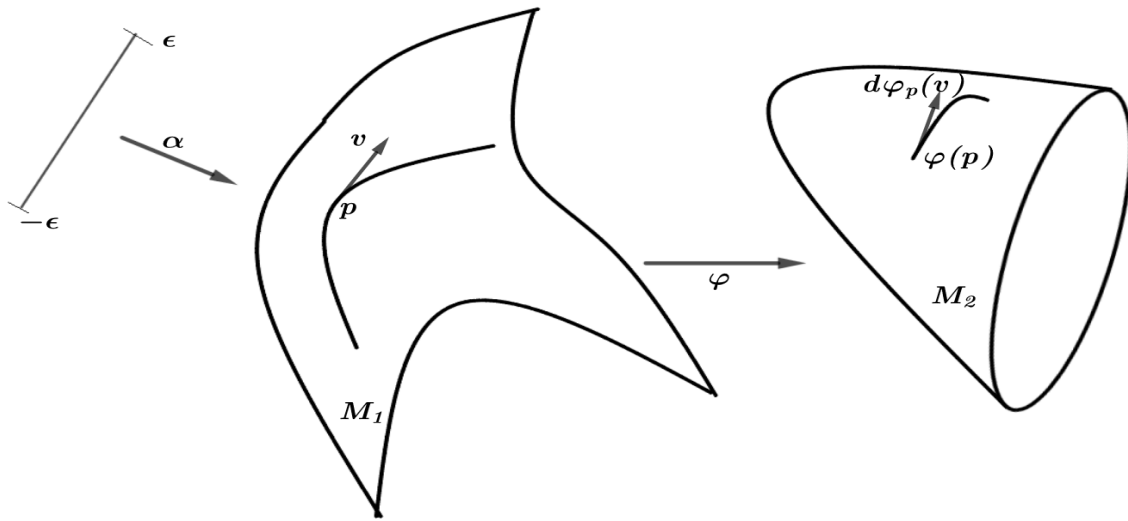


Figura 4.5. Representación de la función  $d\varphi_p$  de la Proposición (4.1)

*Demostración.* Sean  $f : U \rightarrow M_1$  y  $g : V \rightarrow M_2$  parametrizaciones en  $p$  y  $\varphi(p)$ , respectivamente. Expresando  $\varphi$  en estas parametrizaciones, podemos escribir

$$(g^{-1} \circ \varphi \circ f)(q) = (y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)), \quad q = (x_1, \dots, x_m) \in U, \quad (y_1, \dots, y_n) \in V.$$

Por otro lado, expresando a  $\alpha$  en la parametrización  $f$ , obtenemos

$$(f^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)).$$

Por lo tanto,

$$(g^{-1} \circ (\varphi \circ \alpha))(t) = (y_1(x_1(t), \dots, x_m(t)), \dots, y_n(x_1(t), \dots, x_m(t))).$$

Se sigue de la expresión para  $(\varphi \circ \alpha)'(0)$  con respecto a la base  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right\}$  de  $T_{\varphi(p)}M_2$  asociada a la parametrización  $g$ , está dada por

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial y_1}{\partial x_i} x'_i(0), \dots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial y_n}{\partial x_i} x'_i(0) \right). \quad (4.2)$$

La relación (4.2) muestra que  $(\varphi \circ \alpha)'(0)$  no depende de la elección de  $\alpha$ . Luego, (4.2) puede escribirse como

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = d\varphi_p(v) = \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) (x'_j(0)); \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m,$$

donde  $\left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)$  denota una matriz  $n \times m$  y  $x'_j(0)$  denota una matriz columna con  $m$  elementos. Por lo tanto,  $d\varphi_p$  es una función lineal de  $T_pM_1$  en  $T_{\varphi(p)}M_2$  cuya matriz en la base asociada obtenidas de las parametrizaciones  $f$  y  $g$  es precisamente  $\left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)$ .  $\square$

**Definición 4.5.** La función lineal  $d\varphi_p$  definida por la proposición (4.1) es llamado el **diferencial** de  $\varphi$  en  $p$ .

**Definición 4.6.** Sean  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables. Una función  $\varphi : M \rightarrow N$  es un **difeomorfismo** si este es diferenciable, biyectiva y si su inversa  $\varphi^{-1}$  es diferenciable. Se dice que  $\varphi$  es un **difeomorfismo local** en  $p \in M$  si existen entornos  $U$  de  $p$  y  $V$  de  $\varphi(p)$  tales que  $\varphi : U \rightarrow V$  es un difeomorfismo.

**Ejemplo 4.8.** Considere las variedades  $\mathbb{R}_1$  y  $\mathbb{R}_2$  con estructuras diferenciables  $\{(\mathbb{R}, \phi(t) = t^3)\}$  y  $\{(\mathbb{R}, \psi(t) = t)\}$ , respectivamente. Además, sea la función

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_1 &\longrightarrow \mathbb{R}_2 \\ t &\longmapsto F(t) = t^{1/3}. \end{aligned}$$

Afirmamos que  $F$  es difeomorfismo, ya que

1.  $F$  es diferenciable, esto debido a que su expresión local

$$\begin{aligned} \psi^{-1} \circ F \circ \phi(t) &= \psi^{-1} \circ F(t^3) \\ &= \psi^{-1}((t^3)^{1/3}) = \psi^{-1}(t) \\ &= t, \end{aligned}$$

es claramente diferenciable en  $\mathbb{R}$ .

2.  $F$  es biyectiva; la inyectividad es obvia, y note que  $\forall t \in \mathbb{R}, t = F(t^3)$ , lo que muestra la sobreyectividad.

3.  $F^{-1}(t) = t^3$  es diferenciable, debido a que su expresión local

$$\begin{aligned}\phi^{-1} \circ F^{-1} \circ \psi(t) &= \phi^{-1} \circ F^{-1}(t) \\ &= \phi^{-1}(t^3) \\ &= (t^3)^{1/3} \\ &= t,\end{aligned}$$

es claramente diferenciable en  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 4.9.** Sea  $F$  la función definida como

$$\begin{aligned}F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t).\end{aligned}$$

$F$  no es difeomorfismo ya que no es inyectiva. Pero si es un difeomorfismo local, ya que para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\bar{F} = F|_{(t-\pi, t+\pi)} \longrightarrow \mathbb{S}^1 - \{-F(t)\}$$

$\bar{F}$  es un difeomorfismo. Esto se verifica fácilmente.

La función lineal  $d\varphi_p$  puede ser pensado como una aproximación de primer orden de la función  $\varphi$  alrededor de  $p$ . Probablemente el teorema local más importante en Cálculo, que puede extenderse a las variedades diferenciables, es el *teorema de la función inversa* el cual enunciaremos a continuación.

**Teorema 4.1. (Teorema de la función inversa en variedades diferenciables)**

Sea  $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$  una función diferenciable y sea  $p \in M_1$ . Si  $d\varphi_p$  es un isomorfismo, entonces  $\varphi$  es un difeomorfismo local en  $p$ .

**Ejemplo 4.10. (El fibrado tangente).** Sea  $M^n$  una variedad diferenciable y sea

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\},$$

es decir,  $TM$  es el conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$ . Introduciremos en  $TM$  una estructura diferenciable (de dimensión  $2n$ ); con tal estructura,  $TM$  es llamada **el fibrado tangente** de  $M$ .

Sea  $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$  una parametrización de  $M$  con  $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) \in U_\alpha$ . Para  $w \in T_{f_\alpha(q)}M$ ,  $q \in U_\alpha$ , podemos escribirlo

$$w = \sum_i y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}.$$

Definamos una función  $F_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$  por

$$F_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, y_1^\alpha, \dots, y_n^\alpha) = \left( f_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_i y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right).$$

Afirmamos que si  $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$  es una estructura diferenciable para  $M$  entonces  $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, F_\alpha)\}$  es una estructura diferenciable para  $TM$ . Geométricamente, esto significa que tomamos como coordenadas de un punto  $(p, v) \in TM$  las coordenadas de  $p$  junto con las coordenadas de  $v$  en la base asociada. Procederemos a verificar que  $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, F_\alpha)\}$  es una estructura diferenciable para  $TM$ . Primero, verificaremos la inyectividad de  $F_\alpha$ , entonces

$$\begin{aligned} F_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, y_1^\alpha, \dots, y_n^\alpha) &= F_\beta(x_1^\beta, \dots, x_n^\beta, y_1^\beta, \dots, y_n^\beta) \\ \left( f_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_i y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right) &= \left( f_\beta(x_1^\beta, \dots, x_n^\beta), \sum_i y_i^\beta \frac{\partial}{\partial x_i^\beta} \right) \\ \Rightarrow f_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) = f_\beta(x_1^\beta, \dots, x_n^\beta) \quad \text{y} \quad \sum_i y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} &= \sum_i y_i^\beta \frac{\partial}{\partial x_i^\beta} \end{aligned}$$

debido que  $f_\alpha, f_\beta$  son parametrizaciones de  $M$ , entonces

$$f_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) = f_\beta(x_1^\beta, \dots, x_n^\beta) \Rightarrow (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) = (x_1^\beta, \dots, x_n^\beta),$$

y esto implica que  $\sum_i y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} = \sum_i y_i^\beta \frac{\partial}{\partial x_i^\beta}$  así

$$\sum_i (y_i^\alpha - y_i^\beta) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} = 0,$$

pero dado que  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right\}$  es una base, se tiene que  $y_i^\alpha - y_i^\beta = 0$ , por lo que

$$y_i^\alpha = y_i^\beta.$$

Por lo tanto,  $F_\alpha$  es inyectiva. Se verifica que  $\bigcup_\alpha F_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM$ , ya que  $\bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = M$  y  $(df_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{f_\alpha(q)}M$ , y así

$$\bigcup_\alpha F_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = \bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) \times (df_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = TM.$$

Sea

$$(p, v) \in F_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap F_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n) = W,$$

que es,

$$(p, v) = (f_\alpha(q_\alpha), df_\alpha(v_\alpha)) = (f_\beta(q_\beta), df_\beta(v_\beta)),$$

donde  $q_\alpha \in U_\alpha, q_\beta \in U_\beta, v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$ . Entonces

$$\begin{aligned} (F_\beta^{-1} \circ F_\alpha)(q_\alpha, v_\alpha) &= F_\beta^{-1}(f_\alpha(q_\alpha), df_\alpha(v_\alpha)) = (f_\beta^{-1}(f_\alpha(q_\alpha)), df_\beta^{-1}(df_\alpha(v_\alpha))) \\ &= ((f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)(q_\alpha), d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)(v_\alpha)). \end{aligned}$$

Ya que  $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$  es diferenciable, también lo es  $d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)$ . Esto muestra que  $F_\beta^{-1} \circ F_\alpha$  es diferenciable.

Para verificar que  $F_\alpha^{-1}(W) = (U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap F_\alpha^{-1}(F_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n))$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , observemos que, ya que  $U_\beta \times \mathbb{R}^n$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , y  $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$  es continua (por ser diferenciable), se tiene que  $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n)$  es abierto también en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , y luego la intersección de  $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  con  $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n)$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Así se satisfacen las condiciones (1) y (2) de la Definición (4.2).

**Definición 4.7.** Sean  $M^m$  y  $N^n$  variedades diferenciables. Una función  $\varphi : M \rightarrow N$  es una **inmersión** si  $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$  es inyectiva para todo  $p \in M$ . Si, además,  $\varphi$  es un homeomorfismo sobre  $\varphi(M) \subset N$ , donde  $\varphi(M)$  tiene la topología inducida por  $N$ ,  $\varphi$  es un **embebimiento** o **encajamiento**. Si  $M \subset N$  y la inclusión  $i : M \subset N$  es un embebimiento, decimos que  $M$  es una **subvariedad** de  $N$ .

**Ejemplo 4.11.** 1. La curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $\alpha(t) = (t^3, t^2)$  es una función diferenciable pero no es una inmersión ya que para  $t = 0$ ,  $\alpha'(t) = 0$ . Y la condición de inmersión en este caso es equivalente al hecho de que  $\alpha'(t) \neq 0$ , ya que el diferencial significa que sus funciones componentes tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes, es decir, implica que en cada punto existe una única recta tangente. (Fig. (4.6))

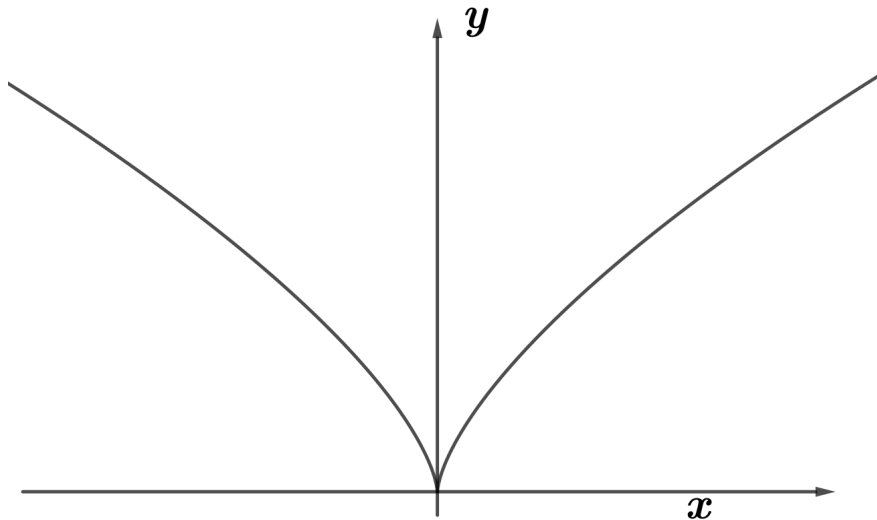


Figura 4.6. Traza de la curva  $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ .

2. La curva  $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$  es una inmersión ya que su diferencial es inyectiva, pero no es un embebimiento porque  $\alpha$  no es inyectiva, la curva se corta a sí misma en  $(0, 0)$  con  $t = 2, t = -2$  y por tanto no es un homeomorfismo. (Fig. (4.7))

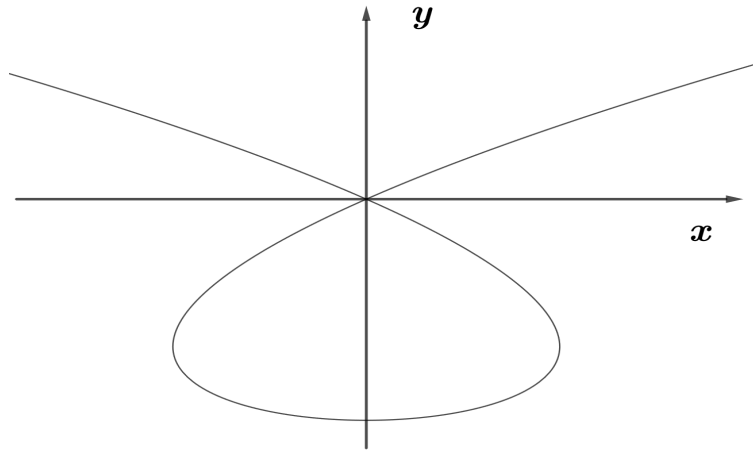


Figura 4.7. Traza de la curva  $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ .

3. la inclusión  $i : S^2 \subset \mathbb{R}^3$  para una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$  es un embebimiento. Esto por la condición (1) y (2) de la definición dada al inicio de este capítulo,  $i$  es un homeomorfismo y su diferencial es inyectiva.

**Ejemplo 4.12. (Superficie Regular en  $\mathbb{R}^n$ )** La generalización natural de la idea de una superficie en  $\mathbb{R}^3$  es la noción de una superficie  $k$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$ , con  $k < n$ . Un subconjunto  $M^k \subset \mathbb{R}^n$  es una superficie regular  $k$ -dimensional si para  $p \in M$  existe un abierto  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^n$  y una función  $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M \cap V$  de un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^k$  sobre  $M \cap V$  tal que

1.  $f$  es un homeomorfismo diferenciable.
2.  $(df)_q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  es inyectiva para cada  $q \in U$

La condición (1) significa que si escribimos

$$f(u_1, \dots, u_k) = (v_1(u_1, \dots, u_k), \dots, v_n(u_1, \dots, u_k)).$$

las funciones  $v_1(u_1, \dots, u_k), \dots, v_n(u_1, \dots, u_k)$  tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes de  $U$ , además  $f$  admite una inversa  $f^{-1} : M \cap V \rightarrow U$  que es continua; es decir,  $f^{-1}$  es la restricción de la función continua definida sobre un conjunto abiertos  $W$  que contiene a  $M \cap V$ , por último la condición (2) garantizará la existencia de un plano tangente en todos los puntos de  $M$ .



A excepción de las dimensiones involucradas, la definición es la misma que dada para superficies regulares en  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposición 4.2.** *Dadas dos parametrizaciones  $f_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ ,  $f_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ , con  $f_1(U_1) \cap f_2(U_2) = W \neq \emptyset$ , el cambio de parámetros  $f_1^{-1} \circ f_2 : f_2^{-1}(W) \rightarrow f_1^{-1}(W)$  es un difeomorfismo.*

*Demostración.* Sea  $h = f_1^{-1} \circ f_2 : f_2^{-1}(W) \rightarrow f_1^{-1}(W)$

Primero, observemos que  $h$  es un homeomorfismo por ser la composición de homeomorfismos.

Sea  $r \in f_2^{-1}(W)$  y  $q = h(r)$ . Sea  $(u_1, \dots, u_k) \in U_1$  y  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , escribimos a  $f_1$  en estas coordenadas como

$$f_1(u_1, \dots, u_k) = (v_1(u_1, \dots, u_k), \dots, v_n(u_1, \dots, u_k)).$$

Por la condición (b) de la definición de Superficie Regular en  $\mathbb{R}^n$ , podemos suponer que

$$\frac{\partial(v_1, \dots, v_k)}{\partial(u_1, \dots, u_k)}(q) \neq 0$$

Extendemos a  $f_1$  por la función  $F_1 : U_1 \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$F(u_1, \dots, u_k, t_{k+1}, \dots, t_n) = (v_1(u_1, \dots, u_k), \dots, v_k(u_1, \dots, u_k), \\ v_{k+1}(u_1, \dots, u_k) + t_{k+1}, \dots, v_n(u_1, \dots, u_k) + t_n),$$

donde  $(t_{k+1}, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ . Es claro que  $F$  diferenciable y que la restricción de  $F$  a  $U_1 \times \{(0, \dots, 0)\}$  coincide con  $f_1$ . Por un simple cálculo, podemos obtener que

$$\det(dF_q) = \frac{\partial(v_1, \dots, v_k)}{\partial(u_1, \dots, u_k)}(q) \neq 0.$$

Podemos aplicar el teorema de la función inversa que garantiza la existencia de un abierto  $V_1$  de  $f_1(q)$  donde  $F_1^{-1}$  existe y es diferenciable. Por la continuidad de  $f_2$ , existe un abierto  $V_2 \subset U_2$  de  $r$  tal que  $f_2(V_2) \subset V_1$ . Note que la restricción de  $h$  en  $V_2$ ,  $h|_{V_2} = F_1^{-1} \circ (f_2)|_{V_2}$  es una composición de funciones diferenciables. Entonces  $h$  es diferenciable en  $r$  por lo tanto, en  $f_2^{-1}(W)$ . Con un argumento similar  $h^{-1}$  es diferenciable.  $\square$

**Ejemplo 4.13. (El plano proyectivo revisado)** *El conjunto de líneas de  $\mathbb{R}^3$  que pasan por el origen, pueden ser visto como el espacio cociente de la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 : |p| = 1\}$  por la relación de equivalencia que identifica a  $p$  con el diametralmente opuesto  $-p$ . Para cada línea recta que pasa por el origen, determina en  $\mathbb{S}^2$  dos puntos diametralmente opuestos, y la correspondencia así obtenida es claramente biyectiva.*

Tomando esto en cuenta, vamos a introducir otra estructura diferenciable en  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Para eso, notamos que podemos cubrir la superficie regular  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  mediante una familia de parametrizaciones.

$$f_i^+ : U_i \longrightarrow \mathbb{S}^2, f_i^- : U_i \longrightarrow \mathbb{S}^2, i = 1, 2, 3$$

donde

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 = 0, x_2^2 + x_3^2 < 1\} \\ f_1^+(x_2, x_3) &= (D_1, x_2, x_3), \quad D_1 = \sqrt{1 - (x_2^2 + x_3^2)} \\ f_1^-(x_2, x_3) &= (-D_1, x_2, x_3); \\ U_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_2 = 0, x_1^2 + x_3^2 < 1\} \\ f_2^+(x_1, x_3) &= (x_1, D_2, x_3), \quad D_2 = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_3^2)} \\ f_2^-(x_1, x_3) &= (x_1, -D_2, x_3); \end{aligned}$$

Similarmente para  $i = 3$ . Es inmediato para comprobar que esto es de hecho una estructura diferenciable para  $\mathbb{S}^2$ .

$$1. \bigcup_i (f_i^+ \cup f_i^-) = \mathbb{S}^2.$$

2. Por la proposición de cambio de parámetros para dos parametrizaciones  $f_i^+, f_i^-$  con  $f_i^+(U_i) \cap f_i^-(U_i) = W \neq \emptyset$ , tenemos que  $(f_i^+)^{-1} \circ f_i^-$  y  $(f_i^-)^{-1} \circ f_i^+$  son diferenciables.

Sea  $\pi : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  la proyección canónica, es decir,  $\pi(p) = \{p, -p\}$  y note que  $\pi(f_i^+(U_i)) = \pi(f_i^-(U_i))$ . Vamos a definir  $g_i : U_i \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  por

$$g_i = \pi \circ f_i^+$$

como la restricción de  $\pi$  a  $f_i^+(U_i)$  es inyectiva, por ser composición de funciones inyectivas

$$g_i^{-1} \circ g_j = (\pi \circ f_i^+)^{-1} \circ (\pi \circ f_j^+) = (f_i^+)^{-1} \circ (f_j^+),$$

es decir, si tomamos  $i = 1; j = 2$

$$(f_1^+)^{-1} \circ (f_2^+)(x_1, x_3) = (f_1^+)^{-1}(x_1, D_2, x_3) = (D_2, x_3),$$

así para toda  $i, j = 1, 2, 3$  es diferenciable. De ello se deduce que  $g_i^{-1} \circ g_j$  es diferenciable, por lo tanto,  $\{(U_i, g_i)\}$  es una estructura diferenciable para  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

En realidad la estructura anterior y la del Ejemplo (4.3), determinarán la misma estructura maximal. Los abiertos coordenados son los mismos y los cambios de coordenadas se dan (para  $i = 1$ ) por

$$\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right) \leftrightarrow (D, x_2, x_3)$$

que es claramente diferenciable. Note también que de lo anterior se sigue que la proyección canónica  $\pi : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  es un difeomorfismo local en cada punto de  $\mathbb{S}^2$ .

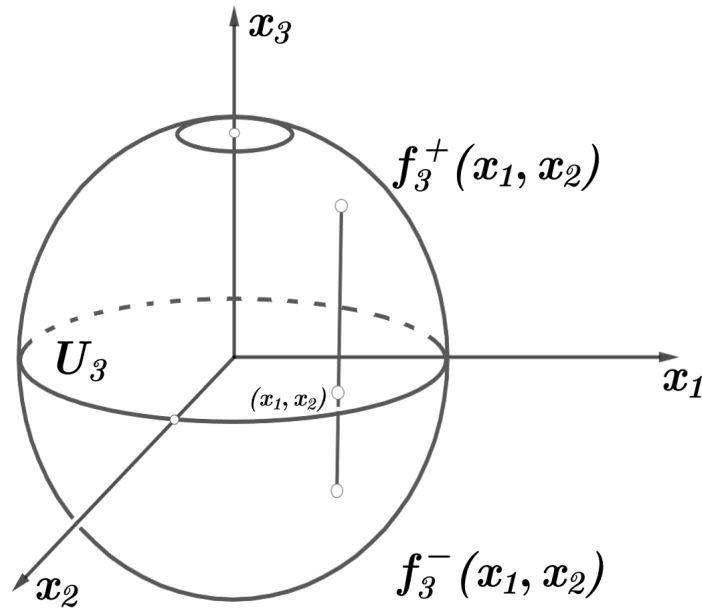


Figura 4.8. Para  $(x, y)$ , obtenemos  $f_3^+(x_1, x_2) = (x_1, x_2, D_3)$  y  $f_3^-(x_1, x_2) = (x_1, x_2, -D_3)$ .

**Ejemplo 4.14.** (Inmersión del plano proyectivo en  $\mathbb{R}^4$ ). Sea  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  una función dada por

$$\varphi(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Sea  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unitaria y sea  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  la proyección canónica de  $\mathbb{S}^2$  en el plano real proyectivo (ver ejemplo anterior). Note que  $\varphi(p) = \varphi(-p)$  es una función par, y define una función  $\theta : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$  por

$$\theta(\{p, -p\}) = \varphi(p).$$

Ya que  $\pi$  es un difeomorfismo local, debemos mostrar que  $\theta$  es una inmersión, es suficiente mostrar que la restricción de  $\varphi$  a la esfera  $\mathbb{S}^2$  es una inmersión. Para ello, elegimos la parametrización dada por el ejemplo anterior. Entonces  $f_3^+$ , por ejemplo, es dada por

$$f_3^+(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$$

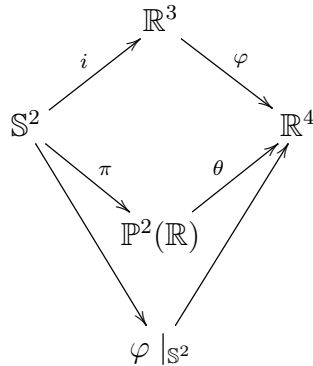
y

$$\varphi \circ f_3^+(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xD, yD).$$

Para mostrar que  $d(\varphi \circ f_3^+)$  es inyectiva, basta mostrar que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2x & y & D + xD_x & yD_x \\ -2y & x & xD_y & D + yD_y \end{pmatrix}$$

es igual a 2, (por Proposición ((1.2))) y esto es fácil de verificarlo, ya que el rango de una matriz es igual al número de filas linealmente independientes es decir las filas no son proporcionales. Similarmente, podemos verificar que se cumple para las demás parametrizaciones y así completar el ejemplo.



**Nota.** Una pregunta natural en la teoría de variedades diferenciables es saber si una determinada variedad diferenciable puede ser sumergido o embebido en algún espacio euclideo. Un teorema fundamental dual de Whitney establece que: **cada variedad diferenciable (Hausdorff y con una base contable) de dimensión  $n$  puede ser sumergida en  $\mathbb{R}^{2n}$  y puede ser embebida en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .**

**Proposición 4.3.** Sea  $\varphi : M^n \rightarrow N^m$ ,  $n \leq m$  una inmersión de la variedad diferenciable  $M$  sobre la variedad diferenciable  $N$ . Para cada  $p \in M$ . Mostrar que existe un entorno  $V \subset M$  de  $p$  tal que la restricción  $\varphi|_V$  de  $\varphi$  a  $V$  es un embebimiento.

*Demostración.* Este hecho es consecuencia del teorema de la función inversa.

Sea  $f_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  y  $f_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow N$  un sistema de coordenadas en  $p$  y  $\varphi(p)$  respectivamente y se denota por  $(x_1, \dots, x_n)$  las coordenadas de  $\mathbb{R}^n$  y por  $(y_1, \dots, y_m)$  las coordenadas de  $\mathbb{R}^m$ . En estas coordenadas, la expresión para  $\varphi$ , que es la función

$$\tilde{\varphi} = f_2^{-1} \circ \varphi \circ f_1 \text{ escrito como}$$

$$\tilde{\varphi} = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$$

Sea  $q = f_1^{-1}(p)$ . Como  $\varphi$  es una inmersión, podemos suponer reordenar las coordenadas si fuese necesario, de manera que

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(q) \neq 0$$

Para aplicar el teorema de función inversa, podemos introducir la función

$\phi = U_1 \times \mathbb{R}^{m-n=k} \longrightarrow \mathbb{R}^m$  dada por

$$\phi(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_k) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n), y_{n+1}(x_1, \dots, x_n) + t_1, \dots, \dots, y_{n+k}(x_1, \dots, x_n) + t_k)$$

donde  $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{m-n=k}$ . Es fácil verificar que  $\phi$  restringida a  $U_1$  coincide con  $\tilde{\varphi}$  y que

$$\det(d\phi_q) = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(q) \neq 0$$

Se sigue del teorema de la función inversa, que existe un entorno  $W_1 \subset U_1 \times \mathbb{R}^k$  de  $q$  y  $W_2 \subset \mathbb{R}^m$  de  $\phi(q)$  tal que la restricción  $\phi|_{W_1}$  es un difeomorfismo sobre  $W_2$ . Sea  $\tilde{V} = W_1 \cap U_1$ . Donde  $\phi|_{\tilde{V}} = \tilde{\varphi}|_{\tilde{V}}$  y  $f_i$  es un difeomorfismo, para  $i = 1, 2$ , concluimos que la restricción de  $V = f_1(\tilde{V})$  de la función  $\varphi = f_2 \circ \tilde{\varphi} \circ f_1^{-1} : V \longrightarrow \varphi(V) \subset N$  es un difeomorfismo, así es un embebimiento. □

Extenderemos ahora para variedades diferenciables la noción de una forma diferencial del Capítulo II. Dado un espacio vectorial  $V$ , denotaremos por  $\Lambda^k(V)$  el conjunto de funciones  $k$ -lineales y alternantes  $\omega : V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ , donde  $V \times \dots \times V$  contiene  $k$  factores.

**Definición 4.8.** Sea  $M^n$  una variedad diferenciable. Una  **$k$ -forma exterior** en  $M$  es la elección, para cada  $p \in M$ , de un elemento  $\omega(p)$  del espacio  $\Lambda^k(T_p M)$  de formas alternantes y  $k$ -lineales del espacio tangente  $T_p M$ .

Dada un  $k$ -forma exterior  $\omega$  y una parametrización  $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow M^n$ , alrededor de  $p \in f_\alpha(U_\alpha)$ , definimos la **representación** de  $\omega$  en esta parametrización como la  $k$ -forma exterior  $\omega_\alpha$  en  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  dada por

$$\omega_\alpha(v_1, \dots, v_k) = \omega(df_\alpha(v_1), \dots, df_\alpha(v_k)), \quad (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^n.$$

Si nosotros cambiamos coordenadas a  $f_\beta : U_\beta \longrightarrow M^n$ ,  $p \in f_\beta(U_\beta)$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} (f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^*(\omega_\beta)(v_1, \dots, v_k) &= \omega_\beta(d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)(v_1), \dots, d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)(v_k)) \\ &= \omega((df_\beta \circ d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha))(v_1), \dots, (df_\beta \circ d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha))(v_k)) \\ &= \omega_\alpha(v_1, \dots, v_k), \end{aligned}$$

que es,  $(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^*\omega_\beta = \omega_\alpha$ .

**Definición 4.9.** Una **forma diferencial de orden  $k$**  (o una  $k$ -forma diferencial) en un variedad diferenciable  $M^n$  es una  $k$ -forma exterior tal que, en todos los sistemas de coordenadas, su representación es diferenciable.

De lo anterior, se deduce que una  $k$ -forma diferencial en  $M^n$  es la elección, para cada parametrización  $(U_\alpha, f_\alpha)$  de  $M$ , de un  $k$ -forma diferencial  $\omega_\alpha$  en  $U_\alpha$  de tal manera que para cualquier otra parametrización  $(U_\beta, f_\beta)$ , con  $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$ , tenemos  $\omega_\alpha = (f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* \omega_\beta$ .

Es un hecho importante que todas las operaciones definidas para formas diferenciales en  $\mathbb{R}^n$  pueden extenderse a formas diferenciales en  $M^n$  a través de sus representaciones. Por ejemplo, si  $\omega$  es una forma diferencial en  $M$ ,  $d\omega$  es una forma diferencial en  $M$  cuya representación local es  $d\omega_\alpha$ . Ya que

$$d\omega_\alpha = d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* \omega_\beta = (f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* d\omega_\beta,$$

$d\omega$  es una forma bien definida sobre  $M$ .

Estrechamente asociado con las formas diferenciales es la noción de un campo vectorial.

**Definición 4.10.** *Un campo vectorial  $X$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es una correspondencia que asocia a cada punto  $p \in M$  un vector  $X(p) \in T_p M$ . El campo vectorial  $X$  es **diferenciable** si para toda función diferenciable  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X\varphi$  es de nuevo una función diferenciable.*

Sea  $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow M^n$  una parametrización de  $M$  y  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , la base asociada a la parametrización. Entonces un campo vectorial  $X$  puede en  $f_\alpha(U_\alpha)$  escribirse como

$$X = \sum_i a_i X_i, \quad \text{donde } a_i : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Además,  $X\varphi$  se escribe como

$$X\varphi = \sum_i a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \forall \varphi \in D.$$

Ya que un campo vectorial  $X$  sobre  $M$  es una operación sobre el espacio  $D$  de funciones diferenciables de  $M$ , podemos tomar las iteraciones de esta operación. Por ejemplo, si  $X$  y  $Y$  son campos vectoriales diferenciables y  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable, podemos considerar las funciones  $Y(X\varphi)$  y  $X(Y\varphi)$ . En general, tales operaciones iteradas no conducen a campos vectoriales, ya que implican derivadas de orden superior al primero. Sin embargo, lo siguiente es cierto.

**Lema 4.2.** *Sean  $X$  y  $Y$  campos vectoriales diferenciables sobre una variedad diferenciable  $M$ . Entonces existe un único campo vectorial  $Z$  sobre  $M$  tal que, para cada  $\varphi \in D$ ,*

$$Z\varphi = (XY - YX)\varphi.$$

*Demostración.* Probaremos primero que, tal  $Z$  existe, entonces esta es única. Para esto, sea  $f : U \rightarrow M$  una parametrización, y sean

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

las expresiones de  $X$  y  $Y$ , respectivamente, en la parametrización  $f$ . Entonces

$$XY\varphi = X \left( \sum_j b_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_j b_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \sum_{ij} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \sum_{ij} a_i b_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$YX\varphi = Y \left( \sum_i a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_i a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \sum_{ij} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_{ij} a_i b_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j},$$

por lo tanto,

$$(XY - YX)\varphi = \sum_j \left( \sum_i \left( a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \varphi.$$

Se deduce que si una  $Z$  existe con la propiedad requerida, debe expresarse de esta manera en todo sistema de coordenadas, por lo que es única.

Para probar existencia, acabamos de definir  $Z_\alpha$  en cada entorno coordenado  $f_\alpha(U_\alpha) \subset M$  por la anterior expresión. Por la unicidad,  $Z_\alpha = Z_\beta$  en  $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta)$ , por lo tanto,  $Z$  está bien definido sobre  $M$ .  $\square$

**Definición 4.11.** *El campo vectorial determinado por el lema anterior es llamado el **corchete (de Lie)**  $[X, Y] = XY - YX$  de  $X$  y  $Y$ , y este es claramente diferenciable.*

La operación corchete tiene las siguientes propiedades:

**Proposición 4.4.** *Sean  $X, Y$  y  $Z$  campos vectoriales diferenciables,  $a$  y  $b$  números reales, y  $\varphi$  y  $\theta$  funciones diferenciables. Entonces*

- $[X, Y] = -[Y, X]$ ,
- $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ ,
- $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  (*Identidad de Jacobi*)
- $[\theta X, \varphi Y] = \theta \varphi [X, Y] + \theta \cdot X(\varphi)Y - \varphi \cdot Y(\theta)X$  :

*Demostración.* Sean  $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  y  $Z = \sum_k c_k \frac{\partial}{\partial x_k}$  campos vectoriales

a.

$$\begin{aligned} [X, Y](\varphi) &= (XY - YX)(\varphi) = \sum_{ij} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \sum_{ij} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= - \left( \sum_{ij} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \sum_{ij} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \\ &= -(YX - XY)(\varphi) \\ &= -[Y, X](\varphi) \end{aligned}$$

b. Desarrollemos el miembro izquierdo,

$$(aX+bY)Z(\varphi) = a \sum_{ik} a_i \frac{\partial c_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + a \sum_{ik} a_i c_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} + b \sum_{jk} b_j \frac{\partial c_k}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + b \sum_{jk} b_j c_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$Z(aX+bY)(\varphi) = a \sum_{ki} c_k \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a \sum_{ki} c_k a_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} + b \sum_{kj} c_k \frac{\partial b_j}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + b \sum_{kj} c_k b_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= (aX + bY)Z - Z(aX + bY) \\ &= a \sum_{ik} a_i \frac{\partial c_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + b \sum_{jk} b_j \frac{\partial c_k}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - a \sum_{ki} c_k \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - b \sum_{kj} c_k \frac{\partial b_j}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \dots (*) \end{aligned}$$

Ahora, desarrollemos el miembro derecho,

$$a[X, Z](\varphi) = a(XZ - ZX)(\varphi) = a \sum_{ik} a_i \frac{\partial c_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - a \sum_{ki} c_k \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

$$b[Y, Z](\varphi) = b(YZ - ZY)(\varphi) = b \sum_{jk} b_j \frac{\partial c_k}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - b \sum_{kj} c_k \frac{\partial b_j}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

Así, sustituyendo en (\*), obtenemos que

$$[aX + bY, Z] = (aX + bY)Z - Z(aX + bY) = a[X, Z](\varphi) + b[Y, Z](\varphi).$$

c. Observemos que

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] &= [XY - YX, Z] = [XY, Z] - [YX, Z] = (XYZ - ZXY) - (YXZ - ZYX) \\ &= XYZ - ZXY - YXZ + ZYX \end{aligned}$$

Note que

$$[X, [Y, Z]] = -[[Y, Z], X] = -[YZ - ZY, X] = ZYX - YZX - XZY + XYZ$$

y

$$[Y, [Z, X]] = -[[Z, X], Y] = -[ZX - XZ, Y] = -ZXY + YZX + XZY - YXZ$$

Así,

$$[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]]$$



Se pueden verificar de la misma manera, las siguientes igualdades:

$$[[Y, Z], X] = [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]]$$

y

$$[[Y, Z], X] = [Z, [X, Y]] + [X, [Y, Z]]$$

Luego,

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Y, Z], X] &= 2[X, [Y, Z]] + 2[Y, [Z, X]] + 2[Z, [X, Y]] \\ &= -2[[Y, Z], X] - 2[[Z, X], Y] - 2[[X, Y], Z] \\ 0 &= -3[[X, Y], Z] - 3[[Z, X], Y] - 3[[Y, Z], X] \\ 0 &= -3([X, Y], Z) + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] \\ 0 &= [[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} [\theta X, \varphi Y] &= (\theta X)(\varphi Y) - (\varphi Y)(\theta X) = \theta \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi Y) - \varphi \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\theta X) \\ &= \theta \sum_i a_i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} Y + \varphi \frac{\partial}{\partial x_i} (Y) \right) - \varphi \sum_j b_j \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_j} X + \theta \frac{\partial}{\partial x_j} (X) \right) \\ &= \theta \sum_i a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot Y + \theta \sum_i a_i \varphi \frac{\partial}{\partial x_i} (Y) - \varphi \sum_j b_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \cdot X - \varphi \sum_j b_j \theta \frac{\partial}{\partial x_j} (X) \\ &= \theta \cdot X(\varphi) \cdot Y - \varphi \cdot Y(\theta) \cdot X + \theta \varphi \left( \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (Y) - \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j} (X) \right) \\ &= \theta \cdot X(\varphi) \cdot Y - \varphi \cdot Y(\theta) \cdot X + \theta \varphi (XY - YX) \\ &= \theta \cdot X(\varphi) \cdot Y - \varphi \cdot Y(\theta) \cdot X + \theta \varphi [X, Y] \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 4.15.** Sea  $M = \mathbb{R}^3$  con coordenadas  $(x, y, z)$  y sea  $X = 2xz \frac{\partial}{\partial x} + e^{yz} \frac{\partial}{\partial y}$  y

$Y = (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial}{\partial x} + 5 \frac{\partial}{\partial z}$  campos vectoriales sobre  $\mathbb{R}^3$ .

Calcularemos  $[X, Y]$ ,

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \left[ 2xz \frac{\partial}{\partial x} + e^{yz} \frac{\partial}{\partial y}, (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial}{\partial x} + 5 \frac{\partial}{\partial z} \right] \\
&= \left[ 2xz \frac{\partial}{\partial x}, (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial}{\partial x} \right] + \left[ 2xz \frac{\partial}{\partial x}, 5 \frac{\partial}{\partial z} \right] \\
&\quad + \left[ e^{yz} \frac{\partial}{\partial y}, (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial}{\partial x} \right] + \left[ e^{yz} \frac{\partial}{\partial y}, 5 \frac{\partial}{\partial z} \right] \\
\left[ 2xz \frac{\partial}{\partial x}, (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial}{\partial x} \right] &= 2xz \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial}{\partial x} \right) - (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( 2xz \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
&= 2xz \left( 2x \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \\
&\quad - (x^2 + y^2 + z^2) \left( 2z \frac{\partial}{\partial x} + 2xz \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \\
&= 2z (2x^2 - (x^2 + y^2 + z^2)) \frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Y se verifica que

$$\begin{aligned}
\left[ 2xz \frac{\partial}{\partial x}, 5 \frac{\partial}{\partial z} \right] &= 0 - 10x \frac{\partial}{\partial x} = -10x \frac{\partial}{\partial x}, \\
\left[ e^{yz} \frac{\partial}{\partial y}, (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial}{\partial x} \right] &= e^{yz} 2y \frac{\partial}{\partial x} - (x^2 + y^2 + z^2) \cdot 0 \frac{\partial}{\partial y} = e^{yz} 2y \frac{\partial}{\partial x}, \\
\left[ e^{yz} \frac{\partial}{\partial y}, 5 \frac{\partial}{\partial z} \right] &= e^{yz} \cdot 0 \frac{\partial}{\partial z} - 5ye^{yz} \frac{\partial}{\partial y} = -5ye^{yz} \frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$[X, Y] = (2x^2z - 2y^2z - 2z^3 - 10x + 2ye^{yz}) \frac{\partial}{\partial x} - 5ye^{yz} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Existe una relación interesante entre diferenciación exterior de formas diferenciales y la operación corchete. Para el caso de 1-formas, esta relación es como sigue.

**Proposición 4.5.** *Sea  $\omega$  una 1-forma diferencial sobre una variedad diferenciable  $M$  y sean  $X$  y  $Y$  campos vectoriales diferenciables sobre  $M$ . Entonces*

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]). \quad (4.3)$$

*Demostración.* Sea  $f : U \rightarrow M$  una parametrización de  $M$  y sean

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

las expresiones de  $X$  y  $Y$  en dicha parametrización. Observe que si (4.3) se cumple para  $X_i$  y  $Y_i$ , entonces también se cumple para  $\sum_i X_i$  y  $\sum_j Y_j$ . Luego, afirmamos que si (4.3) se cumple para  $X$  y  $Y$ , también se cumple para  $\theta X$  y  $\varphi Y$ , donde  $\theta$  y  $\varphi$  son funciones diferenciables.

Para verificar nuestra afirmación, primero notemos que, por hipótesis,

$$\begin{aligned} d\omega(\theta X, \varphi Y) &= \theta\varphi d\omega(X, Y); \quad d\omega \text{ es una forma en } M \\ &= \theta\varphi [X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])] \end{aligned}$$

Ahora, usando (d) de la Proposición (4.4), obtenemos

$$\begin{aligned} (\theta X)\omega(\varphi Y) - (\varphi Y)\omega(\theta X) - \omega([\theta X, \varphi Y]) &= \theta X(\varphi)\omega(Y) + (\theta\varphi X)\omega(Y) - \varphi Y(\theta)\omega(X) - (\varphi\theta Y)\omega(X) \\ &\quad - \theta\varphi\omega([X, Y]) - \theta X(\varphi)\omega(Y) + \varphi Y(\theta)\omega(X) \\ &= \theta\varphi X\omega(Y) - \varphi\theta Y\omega(X) - \theta\varphi\omega([X, Y]) \\ &= \theta\varphi [X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])] \\ &= d\omega(\theta X, \varphi Y) \end{aligned}$$

lo cual prueba nuestra afirmación.

Se deduce que, para probar (4.3) es suficiente probarlo para  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_j}$ . Se verifica que

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0,$$

puesto que

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] (\varphi) &= \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) (\varphi) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo que es suficiente mostrar que

$$d\omega \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \omega \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \omega \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \quad (4.4)$$

Note que si (4.4) se cumple para  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , se sigue satisfaciendo para  $\omega_1 + \omega_2$ . Por lo tanto, es suficiente mostrar que

$$d(\alpha dx_k) \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha dx_k \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha dx_k \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Donde  $\alpha$  es una función diferenciable. Lo anterior se reduce a

$$\begin{aligned} (d\alpha \wedge dx_k) \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \det \begin{pmatrix} d\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) & d\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ dx_k \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) & dx_k \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \end{pmatrix} \\ &= \delta_{kj} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} - \delta_{ki} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \end{aligned}$$

que se sostiene por la mera definición de producto exterior (o cuña). □

**Observación 8.** *Con esencialmente la misma prueba, se puede demostrar la siguiente generalización de la Proposición (4.5). Sea  $\omega$  una  $k$ -forma diferenciable y sean  $X_1, \dots, X_{k+1}$  campos vectoriales reales. Entonces*

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

donde  $\hat{X}_i$  significa que  $X_i$  no se encuentra.

Concluiremos este capítulo con la noción global de orientabilidad de una variedad.

**Definición 4.12.** *Una variedad diferenciable  $M$  es **orientable** si  $M$  tiene una estructura diferenciable  $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$  tal que para cada par  $\alpha, \beta$  con  $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$ , el diferencial del cambio de coordenadas  $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$  tiene determinante positivo. De otra forma, se dirá que  $M$  es **no orientable**.*

*Si  $M$  es orientable, la elección de una estructura diferenciable satisfaciendo lo anterior es llamada **una orientación** para  $M$ .*

**Observación 9.** *Note que cuando el diferencial de cambio de coordenadas tiene determinante positivo, nos referimos al hecho que el cambio de coordenada tiene determinante jacobiano positivo. La orientabilidad es equivalente a la existencia de una cubierta  $\{V_\alpha\}$  de entornos coordinados de  $M$  de manera que si un punto  $p$  pertenece a dos entornos de esta cubierta, entonces el cambio de coordenadas tiene jacobiano positivo en  $p$ .*

## 4.1. Resolución de Ejercicios

**Ejercicio 4.1.** Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables donde  $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$  es una estructura diferenciable de  $M$  y  $\{(V_\beta, g_\beta)\}$  una estructura diferenciable de  $N$ . Considere el producto cartesiano  $M \times N$  y la función  $h_{\alpha\beta} : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow M \times N$  dada por

$$h_{\alpha\beta}(x, y) = (f_\alpha(x), g_\beta(y)), \quad x \in U_\alpha, y \in V_\beta.$$

Muestre que  $\{(U_\alpha \times V_\beta, h_{\alpha\beta})\}$  es una estructura diferenciable para  $M \times N$  la cual es llamada la **variedad producto** de  $M$  y  $N$ .

**Solución.** Verificaremos que  $h_{\alpha\beta}$  es inyectiva.

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta}(u, v) = h_{\theta\gamma}(w, z) &\implies (f_\alpha(u), g_\beta(v)) = (f_\theta(w), g_\gamma(z)) \\ &\implies f_\alpha(u) = f_\theta(w), \quad g_\beta(v) = g_\gamma(z) \\ &\implies u = w, \quad v = z; \quad f_\alpha, f_\theta, g_\beta, g_\gamma \text{ son parametrizaciones de } M \text{ y } N \\ &\implies (u, v) = (w, z). \end{aligned}$$

Ahora, probemos que  $\bigcup_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta) = M \times N$ .

Ya está que  $\bigcup_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta) \subset M \times N$ , pues  $h_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta) \subset M \times N$ . Verifiquemos la otra inclusión

$$\begin{aligned} (x, y) \in M \times N &\implies x \in M, \quad y \in N \\ &\implies x \in \bigcup_{\alpha} f_\alpha(U_\alpha), \quad y \in \bigcup_{\beta} g_\beta(V_\beta) \\ &\implies \exists \alpha_0, \beta_0 \text{ tal que } x \in f_{\alpha_0}(U_{\alpha_0}), \quad y \in g_{\beta_0}(V_{\beta_0}) \\ &\implies x = f_{\alpha_0}(u), \quad y = g_{\beta_0}(v), \text{ para algún } u \in U_{\alpha_0}, \quad v \in V_{\beta_0} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} (x, y) &= (f_{\alpha_0}(u), g_{\beta_0}(v)) = h_{\alpha_0\beta_0}(u, v). \\ &\therefore \bigcup_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta) \supset M \times N. \\ &\therefore \bigcup_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta) = M \times N. \end{aligned}$$

Y por último, verificaremos que  $h_{\theta\gamma}^{-1} \circ h_{\alpha\beta}$  es diferenciable, así

$$\begin{aligned} h_{\theta\gamma}^{-1} \circ h_{\alpha\beta}(u, v) &= h_{\theta\gamma}^{-1}(f_\alpha(u), g_\beta(v)) \\ &= (f_\theta^{-1} \circ f_\alpha(u), g_\gamma^{-1} \circ g_\beta(v)), \end{aligned}$$

pero  $f_\theta^{-1} \circ f_\alpha$  y  $g_\gamma^{-1} \circ g_\beta$  son diferenciables. Por lo tanto,  $h_{\theta\gamma}^{-1} \circ h_{\alpha\beta}$  es diferenciable.

En consecuencia,  $\{(U_\alpha \times V_\beta, h_{\alpha\beta})\}$  es una estructura diferenciable para  $M \times N$ .

# Capítulo 5

## Integración sobre Variedades

### 5.1. Integración de Formas Diferenciales

En esta sección vamos a definir lo que es la integral de una  $n$ -forma en una variedad diferenciable  $n$ -dimensional. Vamos a empezar con el caso de  $\mathbb{R}^n$ , antes de ello enunciaremos la siguiente definición.

**Definición 5.1.** *Sea  $\omega$  una forma diferencial definida en un conjunto abierto  $U \subset M^n$ . El soporte  $K$  de  $\omega$  es la clausura del conjunto*

$$A = \{p \in M^n; \omega(p) \neq 0\}.$$

Recordemos que, si  $\omega$  es una  $n$ -forma en  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto, entonces existe una función  $a : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\omega = a dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ . Ahora definimos lo que es una integral de una  $n$ -forma de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 5.2.** *Sea  $\omega$  una  $n$ -forma y  $M^n = \mathbb{R}^n$ . Entonces*

$$\omega = a(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

*Supongamos que el soporte  $K$  de  $\omega$  es compacto y está contenido en  $U$ . Definamos*

$$\int_U \omega = \int_K a dx_1 \cdots dx_n,$$

*donde el lado derecho es la integral múltiple habitual en  $\mathbb{R}^n$ .*

Ahora procederemos a la definición de la integral de una  $n$ -forma sobre  $M^n$ . Para evitar más adelante la formulación de problemas, es conveniente asumir que  $M$  es compacto; entonces el soporte  $K$  de  $\omega$ , siendo un conjunto cerrado en un espacio compacto es también compacto. Como veremos más adelante, también es necesario asumir que  $M$  es orientable, es decir,  $M$  está cubierto por una familia de entornos coordenados  $\{V_\alpha\}$  tal que el cambio de

coordenadas tiene jacobianos positivos.

Supongamos inicialmente que  $K$  está contenido en algún entorno coordenado.

**Definición 5.3.** Si la representación local  $\omega_\alpha$  de  $\omega$  en  $U_\alpha$  es

$$\omega_\alpha = a_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

y  $K$  está contenido en algún entorno coordenado  $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$ . Entonces definimos

$$\int_M \omega = \int_{V_\alpha} \omega_\alpha = \int_{U_\alpha} a_\alpha dx_1 \cdots dx_n,$$

donde el lado derecho es una integral en  $\mathbb{R}^n$ .

Puede suceder que se encuentre en otro entorno coordenado  $V_\beta = f_\beta(U_\beta)$  en la misma familia, lo cual verificaremos en el siguiente lema.

**Lema 5.1.** La definición anterior es independiente de la elección del entorno coordenado.

*Demostración.* Para ello, podemos asumir, contrayendo  $U_\alpha$  y  $U_\beta$  si fuese necesario, que

$V_\alpha = V_\beta$ . Con el cambio de coordenadas

$$f = f_\alpha^{-1} \circ f_\beta : U_\beta \rightarrow U_\alpha$$

dada por

$$\begin{aligned} x_i &= f_i(y_1, \dots, y_n), & i &= 1, \dots, n \\ (x_1, \dots, x_n) &\in U_\alpha, & (y_1, \dots, y_n) &\in U_\beta. \end{aligned}$$

Ya que  $\omega_\beta = f^*(\omega_\alpha)$ , obtenemos que

$$\omega_\beta = \det(df) a_\beta dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n,$$

donde

$$a_\beta = a_\alpha(f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(y_1, \dots, y_n)).$$

Por otro lado, por el teorema de cambio de variables para integrales múltiples en  $\mathbb{R}^n$ , si  $f$  es un difeomorfismo, para cualquier función integrable  $a_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $(a_\alpha \circ f) \det(df)$  es integrable en  $U_\beta$ , entonces obtenemos que

$$\int_{U_\alpha} a_\alpha dx_1 \cdots dx_n = \int_{U_\beta} \det(df) (a_\alpha \circ f) dy_1 \cdots dy_n = \int_{U_\beta} \det(df) a_\beta dy_1 \cdots dy_n.$$

Por el teorema de función inversa, si  $f : U_\alpha \rightarrow U_\beta$  es inyectiva y diferenciable en  $U_\alpha$ , entonces el determinante jacobiano,  $(\det(df))$  es distinto de cero y como  $M$  es orientable  $\det(df) > 0$ , así,

$$\int_{V_\alpha} \omega_\alpha = \int_{V_\beta} \omega_\beta,$$

Así, podemos afirmar la independencia de la elección del entorno coordenado.  $\square$

Podemos notar que sin la hipótesis de orientabilidad para  $M$ , el signo de la integral de  $\omega$  no está bien definido. La elección de la orientación para  $M$ , fija un signo para la integral de  $\omega$  que cambia con el cambio de orientación.

Vamos a considerar ahora el caso donde el soporte  $K$  de  $\omega$  no está contenido en ningún entorno coordinado. Para ello necesitamos algunos preliminares, pero antes de entrar en detalles, vamos a presentar una noción de lo que pretendemos hacer.

Dada una cubierta  $\{V_\alpha\}$  de una variedad diferenciable compacta  $M$ , vamos a construir una familia finita de funciones diferenciables  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  tal que:

- $\sum_{i=1}^m \varphi_i = 1$ ,
- $0 \leq \varphi_i \leq 1$ , y el soporte de  $\varphi_i$  está contenido en algún  $V_{\alpha_i} = V_i$ .

La familia  $\{\varphi_i\}$  es llamada **una partición diferenciable de la unidad** subordinada que cubre a  $\{V_\alpha\}$ . (Cuando  $M$  es orientable, elegimos  $\{V_\alpha\}$  compatible con la orientación).

Supongamos por el momento la existencia de dicha familia. Asumamos además que  $M$  es orientable. Vamos a definir la integral de una  $n$ -forma  $\omega$  en  $M^n$  de la siguiente manera.

**Definición 5.4.** *El soporte de la forma  $\varphi_i\omega$  está contenido en  $V_i$ . Por la definición anterior podemos escribir*

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^m \int_M \varphi_i \omega$$

La única interrogante que nos podríamos hacer, es sí la definición anterior es independiente de la elección de la familia.

**Lema 5.2.** *La definición anterior es independiente de la elección de la familia.*

*Demostración.* Consideremos la posibilidad de otra cubierta  $\{W_\beta\}$  de  $M$ , que determina en  $M$  la misma orientación como  $\{V_\alpha\}$ , y sea  $\psi_j, j = 1, \dots, s$ , una partición de la unidad subordinada a  $\{W_\beta\}$ . Entonces  $\{V_\alpha \cap W_\beta\}$  será una cubierta para  $M$  y la familia  $\varphi_i\psi_j$  será la partición de la unidad subordinada a  $\{V_\alpha \cap W_\beta\}$ . Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^m \int_M \varphi_i \omega = \sum_{i=1}^m \int_M \varphi_i \left( \sum_{j=1}^s \psi_j \right) \omega = \sum_{ij} \int_M \varphi_i \psi_j \omega,$$

donde en la última igualdad fue utilizado que, para cada  $i$ , las funciones son definidas en  $V_i$ . Similarmente,



$$\sum_{j=1}^m \int_M \psi_j \omega = \sum_{i=1}^s \int_M \left( \sum_{i=-1}^m \varphi_i \right) \psi_j \omega = \sum_{ij} \int_M \varphi_i \psi_j \omega$$

Lo que muestra la independencia necesaria.  $\square$

**Nota.** Lo que hemos hecho básicamente fue lo siguiente. Observe que la integral de una forma diferencial cuyo dominio está contenido en un entorno coordenado, se reduce a una integral múltiple. Para integrar formas diferenciales en dominios más complicados, lo podemos hacer en cualquiera de las siguientes maneras:

1. Dividimos el dominio complicado en simples dominios y sumamos los resultados.
2. Descomponemos la forma en formas que son cero fuera de dominios simples y sumamos los resultados.

Ya que es más fácil trabajar con funciones que con dominios, la segunda alternativa es por lo general la manera preferida y es la que se utiliza.

Ahora entramos en la prueba de la existencia de una partición diferenciable de la unidad subordinada para una cubierta dada por entornos coordenados de una variedad diferenciable compacta  $M^n$  (no necesitaremos orientabilidad para esto).

En lo que sigue,  $B_r(\mathbf{0}) = \{p \in \mathbb{R}^n; |p| < r\}$ , donde  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ .

**Lema 5.3.** Existe una función diferenciable  $\varphi : B_3(\mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

- a.  $\varphi(p) = 1$ , si  $p \in B_1(\mathbf{0})$
- b.  $0 < \varphi(p) \leq 1$ , si  $p \in B_2(\mathbf{0})$
- c.  $\varphi(p) = 0$ , si  $p \in B_3(\mathbf{0}) - B_2(\mathbf{0})$ .

*Demostración.* Primero considere la posibilidad de una función  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por (Fig. (5.1(a)))

$$\begin{cases} \alpha(t) = e^{-\frac{1}{(t+1)(t+2)}}, & t \in (-2, -1) \\ \alpha(t) = 0, & t \notin (-2, -1) \end{cases}$$

Note que la función  $\alpha$  es una simple modificación de la conocida función  $e^{-\left(\frac{1}{x^2}\right)}$ , y el punto es de clase  $C^\infty$  en todas partes.

Tomemos la integral

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^t \alpha(s) ds$$

para obtener una función diferenciable  $\gamma$  (Fig. (5.1(b))) cuyo valor máximo (en  $t = -1$ ) está dado por  $\int_{-2}^{-1} \alpha(s)ds = A$ . Entonces, estableciendo  $\beta(t) = \frac{\gamma(t)}{A}$ , obtenemos una función diferenciable con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \beta(t) &= 0, \text{ si } t \leq -2 \\ 0 < \beta(t) &\leq 1, \text{ si } t \in (-2, -1) \\ \beta(t) &= 1, \text{ si } t \geq -1 \end{aligned}$$

La función requerida  $\varphi : B_3(\mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$  se obtiene por  $\varphi(t) = \beta(-|p|)$ ,  $p \in B_3(\mathbf{0})$ ; para el caso de  $\mathbb{R}^2$  tiene la forma de la Fig. (5.1(c)).

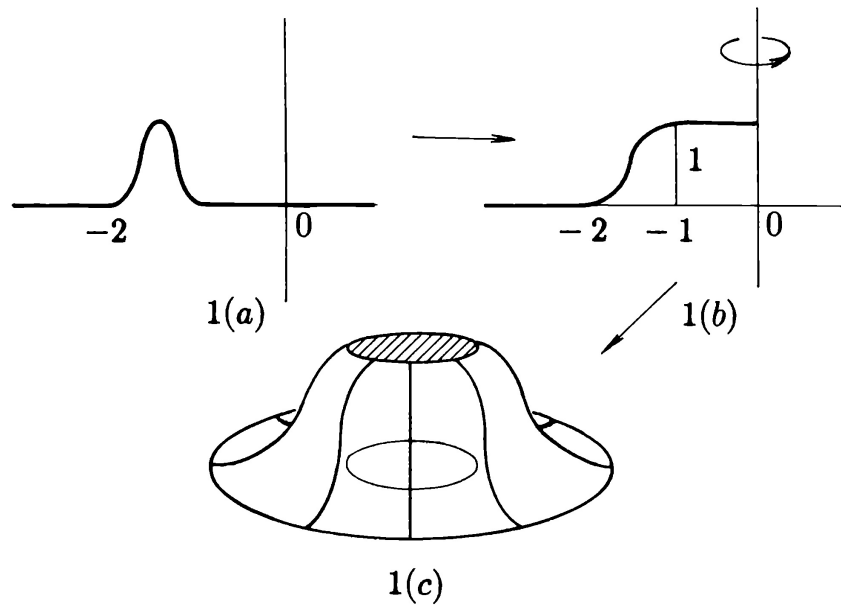


Figura 5.1. 1(a): Función  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . 1(b): Función  $\gamma$ . 1(c): El caso de  $\mathbb{R}^2$ .

□

**Lema 5.4.** Sea  $M^n$  una variedad diferenciable, sean  $p \in M$  y  $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  una parametrización alrededor de  $p$ . Entonces, es posible obtener una parametrización  $f : B_3(\mathbf{0}) \rightarrow M$  alrededor  $p$  de tal manera que  $f(B_3(\mathbf{0})) \subset g(U)$  y  $f^{-1}(p) = (0, \dots, 0)$ .

*Demostración.* Sea  $(x_1^0, \dots, x_n^0) \in U$  tal que  $g(x_1^0, \dots, x_n^0) = p$ . Ya que  $U$  es un abierto, existe un  $r > 0$  tal que  $B_r(x_1^0, \dots, x_n^0) \subset U$ . Sea  $T$  la traslación en  $\mathbb{R}^n$  que toma  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  en  $(0, \dots, 0)$ , y sea  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la función que a cada punto  $p \in \mathbb{R}^n$  asocia el punto  $\frac{3}{r}p$ . Entonces  $H \circ T$  toma  $B_r(x_1^0, \dots, x_n^0)$  en  $B_3(\mathbf{0})$ .

Definimos la parametrización  $f : B_3(\mathbf{0}) \rightarrow M$  por

$$f = g \circ T^{-1} \circ H^{-1}$$

que es fácil de verificar que cumple las condiciones requeridas.

$$\begin{aligned} f(B_3(\mathbf{0})) &= (g \circ T^{-1} \circ H^{-1})(B_3(\mathbf{0})) \\ &= g \circ T^{-1}(H^{-1}(B_3(\mathbf{0}))) \\ &= g \circ T^{-1}(B_r(\mathbf{0})) \\ &= g(B_r(x_1^0, \dots, x_n^0)), \text{ como } B_r(x_1^0, \dots, x_n^0) \subset U \\ &\subset g(U) \end{aligned}$$

$$\therefore f(B_3(\mathbf{0})) \subset g(U)$$

Sea  $f^{-1} = H \circ T \circ g^{-1}$  y sea  $p \in M$  entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(p) &= (H \circ T \circ g^{-1})(p) \\ &= H \circ T(g^{-1}(p)) \\ &= H \circ T(g^{-1}(x_1^0, \dots, x_n^0)) \\ &= H \circ T(x_1^0, \dots, x_n^0) \\ &= H(0, \dots, 0) \\ &= (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

$$\therefore f^{-1}(p) = (0, \dots, 0)$$

□

**Proposición 5.1. (Existencia de una partición diferenciable de la unidad).** *Sea  $M$  una variedad compacta y  $\{V_\alpha\}$  una cubierta de  $M$  por entornos coordinados. Entonces existen funciones diferenciables  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  tal que:*

a.  $\sum_{i=1}^m \varphi_i = 1$  con  $\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$

b.  $0 \leq \varphi_i \leq 1$ , y el soporte de  $\varphi_i$  está contenido en algún  $V_{\alpha_i}$  de la cubierta  $\{V_\alpha\}$ .

*Demostración.* Para cada  $p \in M$  consideremos la parametrización  $f_p : B_3(\mathbf{0}) \rightarrow M$  dado por el Lema (5.4) con  $f_p(B_3(\mathbf{0})) = V_p \subset V_\alpha$ , algunos  $V_\alpha$  de la cubierta  $\{V_\alpha\}$ . Establecemos  $W_p = f_p(B_1(\mathbf{0})) \subset V_p$ .

La familia  $\{W_p\}$  es una cubierta abierta de  $M$ . Ya que  $M$  es compacto, podemos seleccionar de él una cubierta finita  $W_1, \dots, W_m$ . El correspondiente  $V_1, \dots, V_m$  formará una cubierta de  $M$ .

Vamos a definir funciones  $\theta_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , por

$$\theta_i = \varphi \circ f_i^{-1} \text{ en } V_i; \quad \theta_i = 0 \text{ en } M - V_i$$

donde  $\varphi : B_3(\mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$  es la función dada por el Lema (5.3). Las funciones  $\theta_i$  son diferenciables por ser la composición de funciones diferenciables y el soporte de  $\theta_i$  está contenido en  $V_i$ . Finalmente definamos  $\varphi_i$  por

$$\varphi_i(p) = \frac{\theta_i(p)}{\sum_{j=1}^m \theta_j(p)}, \quad p \in M$$

Es inmediato que las funciones  $\varphi_i$  así construidas satisfacen las condiciones (a.) y (b.), es decir,

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i(p) = \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i(p)}{\sum_{j=1}^m \theta_j(p)} = 1$$

Por la misma construcción  $0 \leq \varphi_i \leq 1$  ya que el denominador siempre será mayor que el numerador y además como el soporte de  $\theta_i$  está contenido en  $V_i$  y  $\theta_i \neq 0$  en  $V_i$ , así el soporte de  $\varphi_i$  está contenido en algún  $V_{\alpha_i}$ .  $\square$

**Nota.** *La existencia de una partición diferenciable de la unidad es uno de los hechos más útiles para el estudio de preguntas globales sobre variedades diferenciables. La proposición (5.1) todavía se mantiene para variedades no compactas (con una base contable) considerando la cubierta localmente finita contable (localmente finita significa que a cada punto de la variedad, cumple sólo un número finito de miembros de la cubierta), y la prueba es esencialmente la misma.*

## 5.2. Teorema de Stokes

En esta sección intentaremos establecer el teorema de Stokes<sup>1</sup>. Para ello, necesitamos una serie de definiciones que harán posible establecer con claridad el teorema; una vez establecidas, la prueba del teorema será relativamente simple.

Para el caso dos-dimENSIONAL, una descripción aproximada del teorema es como sigue.

Sea  $\omega$  una 1-forma diferencial definida sobre una variedad dos-dimensional orientada  $M^2$ , y sea  $d\omega$  su diferencial exterior. Considere una región  $R$  de  $M^2$  **acotada** por una curva regular cerrada  $C = \partial R$ . La orientación de  $R$  induce una orientación para  $C$ , y la inclusión  $i : C \rightarrow M$  nos permite considerar la **restricción**  $i^*\omega$  de  $\omega$  a  $C$ . Bajo estas condiciones, el teorema de Stokes establece que la integral de la 2-forma  $d\omega$  en  $R$  es igual a la integral

<sup>1</sup>**George Gabriel Stokes**, primer Baronet (13 de agosto de 1819-1 de febrero de 1903) fue un matemático y físico irlandés que realizó contribuciones importantes a la dinámica de fluidos (incluyendo las ecuaciones de Navier-Stokes), la óptica y la física matemática (incluyendo el teorema de Stokes). Fue secretario y luego presidente de la Royal Society de Inglaterra.

de  $i^*\omega$  en  $\partial R = C$ . Así, en cierto sentido, el **operador**  $d$  (aplicado a formas) y  $\partial$  (aplica a “dominios lisos”) son duales el uno al otro.

Revisemos el enunciado clásico del Teorema de Stokes en  $\mathbb{R}^3$ .

El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada simple  $\gamma \in \mathbb{R}^3$ , con la integral sobre una superficie de la cual  $\gamma$  es la frontera. Es decir, si se tiene  $S$  una superficie orientada con vector normal unitario  $N$  y frontera una curva cerrada  $\gamma$  y un campo vectorial  $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ , se cumple que

$$\int_S \text{rot}(F) \cdot N \, dS = \int_\gamma F,$$

donde el rotacional del campo  $F$  está dado por

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Otra forma de escribir la igualdad de estas integrales es la siguiente:

$$\int_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz,$$

Si, en particular, cuando  $S$  es una región del plano  $xy$  ( $\mathbb{R}^2$ ) encerrada por una curva cerrada simple a trozos  $C = \partial S$ , el teorema de Stokes se reduce a la fórmula de Green:

$$\int_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_{\partial S} Pdx + Qdy.$$

**Ejemplo 5.1.** Sea  $S$  la porción de la esfera que corta al plano  $z = 0$  en la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ . Sea  $F(x, y, z) = (y, -x, e^{xz})$  un campo vectorial. Calcular

$$\int_S \text{rot}(F) \cdot N \, dS.$$

Parametrizamos  $C$  mediante

$x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 0$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ). Por el teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \int_S \text{rot}(F) \cdot N \, dS &= \int_C F \, dr = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) t dt = -2\pi, \end{aligned}$$

el valor de la integral pedida.

Ahora, comenzaremos a presentar las definiciones que necesitamos, las cuales son útiles en otros contextos. Lo primero, es una extensión de la noción de una variedad que incluye variedades con borde (o “límite”). La definición de una variedad no lo incluye, por ejemplo, el conjunto  $M$ , dado por

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z \leq z_0, z_0 > 0\}$$

( $M$  es el conjunto cerrado del paraboloide de rotación delimitado anteriormente por  $z = z_0$ ), porque la intersección  $V \cap M$  de algún entorno  $V$  de un punto  $p = (x, y, z_0)$  en el borde de  $M$ , con  $M$  no es homeomorfo a un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  (Fig. (5.2)). Note que, sin embargo,  $V \cap M$  es homeomorfo a un conjunto abierto del semiespacio cerrado  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0\}$ , mientras que los puntos de  $M$  que no están en el borde se comportan como puntos en una 2-variedad. Esto sugiere una nueva definición que incluya la anterior situación.

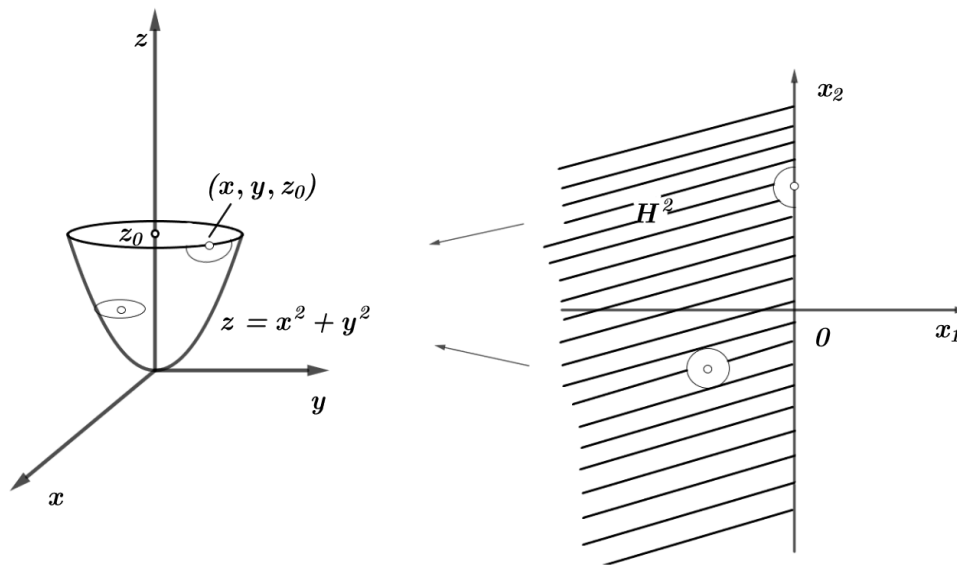


Figura 5.2. El semiespacio  $H^2$ .

**Definición 5.5.** Un *semiespacio* de  $\mathbb{R}^n$  es el conjunto

$$H^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\}.$$

Un conjunto abierto de  $H^n$  es la intersección con  $H^n$  de un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Decimos que una función  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un conjunto abierto  $V$  de  $H^n$  es diferenciable si existe un conjunto abierto  $U \supset V$  y una función diferenciable  $\bar{f}$  en  $U$  tal que la restricción de  $\bar{f}$  a  $V$  es igual a  $f$ . En este caso, el diferencial  $df_p$ ,  $p \in V$ , de  $f$  en  $p$  está definida por  $df_p = d\bar{f}_p$ .

Cuando  $V$  no contiene puntos con la forma  $(0, x_2, \dots, x_n)$ ,  $V$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y la definición de  $df_p$  está de acuerdo con la usual. Si  $p$  es de la forma  $(0, x_2, \dots, x_n)$ ,  $df_p$  está definida para todo vector tangente de curvas en  $U$  pasando a través de  $p$ , es decir, para todo vector en  $\mathbb{R}^n$  con origen en  $p$ . Usando tales curvas es fácil mostrar que la definición de  $df_p$  es independiente de la extensión  $\bar{f}$  de  $f$ .

De manera similar, definimos una función diferenciable  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Definición 5.6.** Una *variedad n-dimensional diferenciable con borde (regular)* es un conjunto  $M$  y una familia de funciones inyectivas  $f_\alpha : U_\alpha \subset H^n \rightarrow M$  de conjuntos abiertos de  $H^n$  a  $M$  tales que:

1.  $\bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = M$ .
2. Para todo par  $\alpha, \beta$  con  $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , los conjuntos  $f_\alpha^{-1}(W)$  y  $f_\beta^{-1}(W)$  son abiertos en  $H^n$  y las funciones  $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ ,  $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$  son diferenciables.
3. La familia  $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$  es maximal (relativo al orden dado por la inclusión de conjuntos) entre todas las familias de entornos coordinados sobre  $M$  bajo las condiciones (1) y (2).

Un punto de  $p \in M$  se dice que es un **punto en el borde de  $M$**  si para cualquier parametrización  $f : U \subset H^n \rightarrow M$  alrededor de  $p$  se tiene que,  $f(0, x_2, \dots, x_n) = p$ .

**Lema 5.5.** La definición de puntos en el borde no depende de la parametrización.

*Demostración.* Sea  $f_1 : U_1 \rightarrow M$  una parametrización alrededor de  $p$  tal que  $f_1(q) = p$ ,  $q = (0, x_2, \dots, x_n)$ . Supongamos por contradicción, que para alguna parametrización  $f_2 : U_2 \rightarrow M$  alrededor de  $p$ , tenemos que  $f_2^{-1}(p) = q_2 = (x_1, \dots, x_n)$  con  $x_1 \neq 0$ . (Fig. (5.3))

Sea  $W = f_1(U_1) \cap f_2(U_2)$ . La función

$$f_1^{-1} \circ f_2 : f_2^{-1}(W) \rightarrow f_1^{-1}(W)$$

es un difeomorfismo, pues estamos tomando parametrizaciones en  $\partial M$  que es una superficie regular. Ya que  $x_1 \neq 0$ , existe un entorno  $U$  de  $q_2$ , con  $U \subset f_2^{-1}(W)$ , que no interseca el eje  $x_1$ . Restringiendo  $f_1^{-1} \circ f_2$  a  $U$ , tenemos una función diferenciable

$$f_1^{-1} \circ f_2 : U \rightarrow H^n$$

tal que el determinante de  $d(f_1^{-1} \circ f_2)_{q_2}$  es diferente de cero, por lo que  $d(f_1^{-1} \circ f_2)_{q_2}$  es un isomorfismo, y por el teorema de la función inversa,  $f_1^{-1} \circ f_2$  tomará un entorno  $V \subset U$  de  $q_2$

difeomorficamente sobre  $f_1^{-1} \circ f_2(V)$ . Pero, entonces  $f_1^{-1} \circ f_2(V)$  podría contener puntos de la forma  $(x_1, \dots, x_n)$  con  $x_1 > 0$  los cuales no están en  $H^n$ . Este resultado es una contradicción y así se completa la prueba.  $\square$

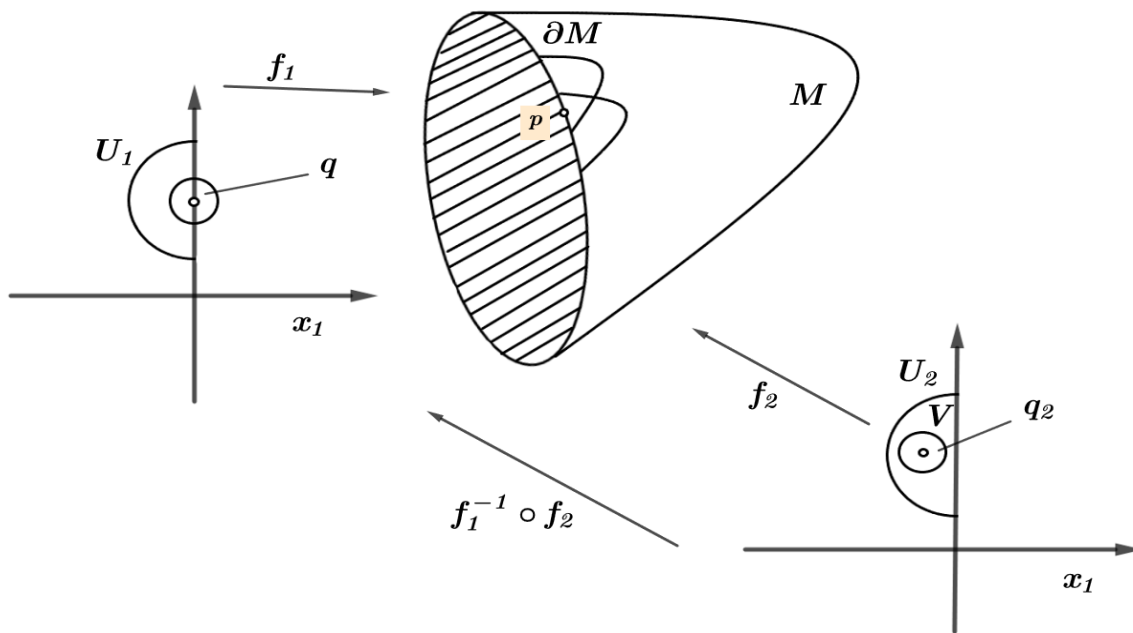


Figura 5.3. Parametrizaciones  $f_1 : U_1 \rightarrow M$  y  $f_2 : U_2 \rightarrow M$  alrededor de  $p$ .

El conjunto de puntos en el borde de  $M$  está por lo tanto, bien definida; el cual es llamado **el borde de  $M$**  y se denota por  $\partial M$ . Si  $\partial M = \emptyset$ , la Definición (5.6) coincide con la definición de una variedad diferenciable dada en el capítulo anterior. Las definiciones de funciones diferenciables, espacio tangente, orientabilidad, etc, para variedades con borde son introducidos de la misma forma como en las correspondientes definiciones para variedades diferenciables, con el cuidado de reemplazar  $\mathbb{R}^n$  por  $H^n$ .

**Proposición 5.2.** *El borde  $\partial M$  de una variedad diferenciable  $n$ -dimensional  $M$  con borde es una variedad  $(n - 1)$ -diferenciable. Además, si  $M$  es orientable, una orientación para  $M$  induce una orientación para  $\partial M$ .*

*Demostración.* Sea  $p \in M$  un punto en el borde de  $M$  y sea  $f_\alpha : U_\alpha \subset H^n \rightarrow M^n$  una parametrización alrededor de  $p$ . Entonces  $f_\alpha^{-1}(p) = q = (0, x_2, \dots, x_n) \in U_\alpha$ . Sea

$$\bar{U}_\alpha = U_\alpha \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}.$$



Identificando el conjunto  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$  con  $\mathbb{R}^{n-1}$ , observamos que, debido a que  $\bar{U}_\alpha$  es la intersección del conjunto  $\mathbb{R}^{n-1}$  con  $U_\alpha$  que es abierto en  $H^n$ ,  $\bar{U}_\alpha$  es abierto en  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Al denotar por  $\bar{f}_\alpha$  la restricción de  $f_\alpha$  a  $\bar{U}_\alpha$ , observamos que: a) las  $\bar{f}_\alpha$  son inyectivas,

b) los cambios de parámetros  $\bar{f}_\alpha^{-1} \circ \bar{f}_\beta$  son diferenciables y c) por Lema (5.5) se tiene que  $\bar{f}_\alpha(\bar{U}_\alpha) \subset \partial M$ , y así  $\bigcup_\alpha \bar{f}_\alpha(\bar{U}_\alpha) = \partial M$ . Finalmente, dejando que  $p$  recorra los puntos de  $\partial M$ , es fácil verificar que la familia  $\{(\bar{U}_\alpha, \bar{f}_\alpha)\}$  es una estructura para  $\partial M$ . Esto prueba la primera parte de la Proposición.

Para probar la segunda parte, asuma que  $M$  es orientable y escoja una orientación para  $M$ , es decir, una estructura diferenciable  $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$  tal que el cambio de coordenada tiene jacobiano positivo. Considere los elementos de la familia que satisfagan la condición  $f_\alpha(U_\alpha) \cap \partial M \neq \emptyset$ . Entonces la familia  $\{(\bar{U}_\alpha, \bar{f}_\alpha)\}$  descrita en la primera parte es una estructura diferenciable para  $\partial M$ . Queremos mostrar que si  $\bar{f}_\alpha(\bar{U}_\alpha) \cap \bar{f}_\beta(\bar{U}_\beta) \neq \emptyset$ , el cambio de coordenada tiene jacobiano positivo, es decir, que

$$\det(d(\bar{f}_\alpha^{-1} \circ \bar{f}_\beta^{-1})_q) > 0,$$

para todo  $q$  cuya imagen, por alguna parametrización, está en el borde.

Observe que el cambio de coordenada  $f_\alpha \circ f_\beta^{-1}$  toma un punto de la forma  $(0, x_2^\beta, \dots, x_n^\beta)$  y devuelve un punto de la forma  $(0, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ . Así, para un punto  $q$  cuya imagen está en el borde,

$$\det(d(f_\alpha^{-1} \circ f_\beta)) = \frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_1^\beta} \det(d(\bar{f}_\alpha^{-1} \circ \bar{f}_\beta^{-1})).$$

Pero  $\frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_1^\beta} > 0$ , porque  $x_1^\alpha = 0$  en  $q = (0, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ , y ambos  $x_1^\alpha$  y  $x_1^\beta$  son negativos en un entorno de  $p$ . Ya que  $\det(d(f_\alpha^{-1} \circ f_\beta)) > 0$ , por hipótesis, concluimos que  $\det(d(\bar{f}_\alpha^{-1} \circ \bar{f}_\beta^{-1})) > 0$ , como queríamos.  $\square$

Ahora podemos establecer y probar el teorema de Stokes.

**Teorema 5.1.** *Sea  $M^n$  una variedad diferenciable con borde, compacta y orientada. Sea  $\omega$  una  $(n-1)$ -forma diferencial en  $M$ , y sea  $i : \partial M \rightarrow M$  la función inclusión del borde  $\partial M$  a  $M$ . Entonces*

$$\int_{\partial M} i^* \omega = \int_M d\omega.$$

*Demostración.* Sea  $K$  el soporte de  $\omega$ . Consideraremos los siguientes casos:

A)  $K$  está contenido en algún entorno coordenado  $V = f(U)$  de una parametrización  $f : U \subset H^n \rightarrow M$ . En  $U$ ,

$$\omega = \sum_{j=1}^n a_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

donde  $a_j = a_j(x_1, \dots, x_n)$  es una función diferenciable sobre  $U$ . Así,

$$d\omega = \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

A.1) Asuma primero que  $f(U) \cap \partial M = \emptyset$ . Entonces  $\omega$  es cero en  $\partial M$  y  $i^*\omega = 0$ . Así,

$$\int_{\partial M} i^*\omega = 0.$$

Mostraremos que

$$\int_M d\omega = \int_U \left( \sum_j (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \cdots dx_n = 0.$$

Para eso, extendemos las funciones  $a_j$  a  $H^n$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} a_j(x_1, \dots, x_n) &= a_j(x_1, \dots, x_n), & \text{si } (x_1, \dots, x_n) \in U \\ a_j(x_1, \dots, x_n) &= 0, & \text{si } (x_1, \dots, x_n) \in H^n - U \end{aligned}$$

Ya que  $f^{-1}(K) \subset U$ , las funciones  $a_j$  así definidas son diferenciables en  $H^n$ . Ahora, sea  $Q \subset H^n$  un paralelepípedo dado por  $s_j^1 \leq x_j \leq x_j^0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , y conteniendo a  $f^{-1}(K)$  en su interior (Fig. (5.4)).

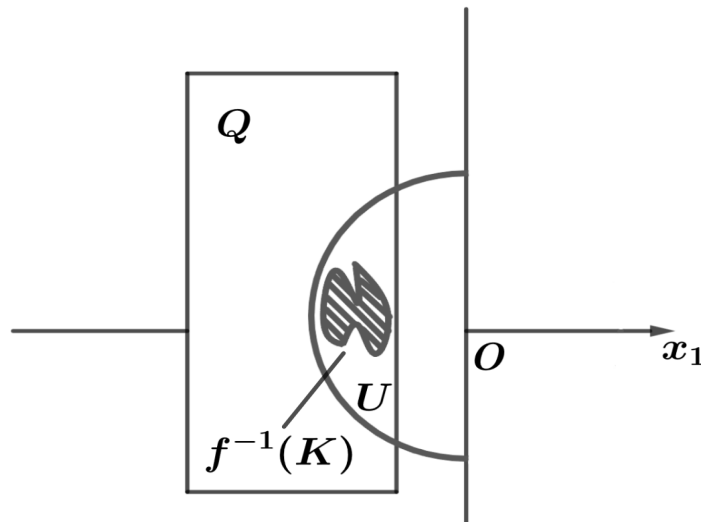


Figura 5.4. Caso A.1

Entonces

$$\begin{aligned} \int_U \left( \sum_j (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \cdots dx_n &= \sum_j (-1)^{j-1} \int_Q \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \sum_j (-1)^{j-1} \int [a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &\quad - a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^1, x_{j+1}, \dots, x_n)] dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n = 0, \end{aligned}$$

ya que  $a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, \dots, x_n) = a_j(x_1, \dots, x_j^1, \dots, x_n) = 0$ , para todo  $j$ .

A.2) Asuma ahora que  $f(U) \cap \partial M \neq \emptyset$ . Entonces la función inclusión  $i$  puede ser escrita como:  $x_1 = 0$ ,  $x_j = x_j$ . Así, usando la orientación sobre el borde,

$$i^* \omega = a_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Como en el caso (A.1), extenderemos las funciones  $a_j$  a  $H^n$ , y consideremos el paralelepípedo  $Q$  dado por

$$x_1^1 \leq x_1 \leq 0, \quad x_j^1 \leq x_j \leq x_j^0, \quad j = 2, \dots, n$$

y tal que la unión del interior de  $Q$  con el hiperplano  $x_1 = 0$  conteniendo  $f^{-1}(K)$ .

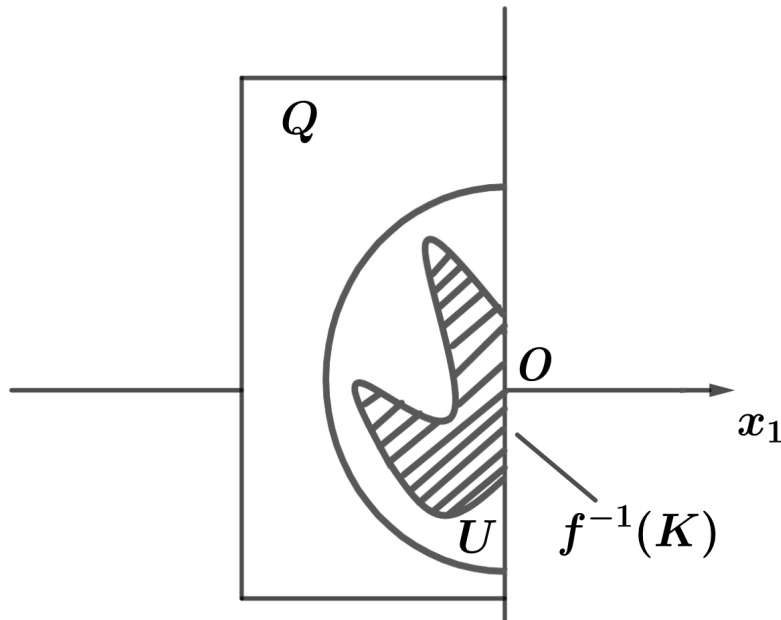


Figura 5.5. Caso A.2

Entonces

$$\int_M d\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_Q \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \cdots dx_n = \int_Q [a_1(0, x_2, \dots, x_n) - a_1(x_1^1, x_2, \dots, x_n)] dx_2 \cdots dx_n$$

$$+ \sum_{j=2}^n (-1)^{j-1} \int_Q [a_j(x_1, \dots, x_j^0, \dots, x_n) - a_j(x_1, \dots, x_j^1, \dots, x_n)] dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n.$$

Ya que  $a_j(x_1, \dots, x_j^0, \dots, x_n) = a_j(x_1, \dots, x_j^1, \dots, x_n) = 0$ , para  $j = 2, \dots, n$ , y  $a_1(x_1^1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , obtenemos

$$\int_M \omega = \int a_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n = \int_{\partial M} i^* \omega.$$

B) Consideremos el caso general. Sea  $\{V_\alpha\}$  una cubierta de  $M$  por entornos coordinados compatibles con la orientación, y sea  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  una partición diferenciable de la unidad subordinada para  $V_\alpha$ . Las formas  $\omega_j = \varphi_j \omega$ ,  $j = 1, \dots, m$  satisfaciendo las condiciones del caso A. Además, ya que  $\sum_j d\varphi_j = 0$ , tenemos

$$\sum \omega_j = \omega, \quad \sum d\omega_j = d\omega.$$

Por lo tanto,

$$\int_M d\omega = \sum_{j=1}^m \int_M d\omega_j = \sum_{j=1}^m \int_{\partial M} i^* \omega_j$$

$$= \int_{\partial M} i^* \sum_j \omega_j = \int_{\partial M} i^* \omega.$$

□

**Ejemplo 5.2.** Sea  $M$  una región acotada de  $\mathbb{R}^3$  tal que el borde  $\partial M$  de  $M$  es una hipersuperficie regular de  $\mathbb{R}^3$ ;  $M$  es entonces una variedad compacta 3-dimensional con borde  $\partial M$ . Sea  $v$  un campo vectorial diferenciable en  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $\omega$  una 1-forma en  $\mathbb{R}^3$  dual a  $v$  en el producto interno natural de  $\mathbb{R}^3$ . Entonces  $d(*\omega) = (\operatorname{div}(v))\nu$ , donde  $\nu$  es el elemento volumen de  $\mathbb{R}^3$ .

Ahora escojamos una orientación para  $\mathbb{R}^3$  y sea  $N$  el vector normal unitario de  $\partial M$  en la orientación inducida. Finalmente, sea  $\sigma$  el elemento de área de  $\partial M$ .

Considere, en un entorno  $U \subset \mathbb{R}^3$  del punto  $p \in M$ , campos diferenciables ortonormal  $e_1, e_2, N$  tal que, en los puntos de  $\partial M$ ,  $e_1$  y  $e_2$  son tangentes a  $\partial M$ . Entonces, como  $\omega$  es una 1-forma dual al campo  $v$ ,  $\omega$  está definida como  $\omega(u) = \langle v, N \rangle^2$ , con  $u$  un vector en  $\mathbb{R}^3$ .

---

<sup>2</sup>véase en la Observación (1).

Explícitamente tenemos, expresando al campo  $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$  en la base de  $\mathbb{R}^3$ , a  $\omega$  escrita de la siguiente forma

$$\omega = v_1dx_1 + v_2dx_2 + v_3dx_3,$$

calculando  $*\omega$  tenemos,

$$*\omega = v_1dx_2dx_3 - v_2dx_1dx_3 + v_3dx_1dx_2,$$

y evaluando

$$*\omega(e_1, e_2) = v_1dx_2dx_3(e_1, e_2) - v_2dx_1dx_3(e_1, e_2) + v_3dx_1dx_2(e_1, e_2) = v_1(0) - v_2(0) + v_3(1) = v_3,$$

luego, como  $\omega(N) = \langle v, N \rangle = v_1(0) + v_2(0) + v_3(1) = v_3$ . Por lo que, obtenemos las siguientes igualdades,

$$i^* * \omega(e_1, e_2) = \omega(N) = \langle v, N \rangle,$$

es decir,  $i^*(*\omega) = \langle v, N \rangle \sigma$ , donde  $\sigma = dx_1dx_2$ . Así, en este caso, Teorema Stokes

$$\int_M d(*\omega) = \int_{\partial M} i^*(*\omega)$$

puede escribirse como

$$\int_M (\operatorname{div} v) \nu = \int_{\partial M} \langle v, N \rangle \sigma$$

el cual es el conocido Teorema de Divergencia del Análisis.

### 5.3. Lema de Poincaré

En esta sección generalizaremos el lema de Poincaré, con el que nos familiarizamos en la integración de 1-formas. Además definiremos lo que son formas exactas y cerradas en una variedad diferenciable.

**Definición 5.7.** Sea  $M^n$  una variedad diferenciable. Una  $k$ -forma diferencial  $\omega$  se dice que es **exacta** si existe una  $(k-1)$ -forma  $\beta$  tal que  $d\beta = \omega$ ; y diremos que  $\omega$  es **cerrada** si  $d\omega = 0$ . Ya que  $d^2 = 0$ , una forma exacta es cerrada.

El inverso de la definición anterior no se cumple en general. Por ejemplo:

**Ejemplo 5.3.** Sea la forma

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

definida en  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} = U$ . Por el Ejemplo (3.1)  $d\omega = 0$ , es decir  $\omega$  es cerrada pero no existe una función diferenciable  $g$  en  $U$  tal que  $dg = \omega$ ; de lo contrario, por teorema de Stokes,

$$\int_C \omega = \int_C dg = \int_{\partial C} g = 0, \quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$$

y esto contradice el hecho anterior, por el Ejemplo (3.1)  $\int_C \omega = 2\pi$ . Es posible, sin embargo, para mostrar que para cada  $p \in U$  existe un entorno  $V \subset U$  de  $p$  y una función diferenciable  $g_V$  en  $V$  tal que  $dg_V = \omega$

En esta sección vamos a mostrar que la situación del ejemplo es completamente general, es decir que la condición  $d\omega = 0$  es una condición suficiente para que  $\omega$  sea localmente exacta. En realidad vamos a probar el resultado de una manera un poco más general, que es más conveniente para las aplicaciones.

**Definición 5.8.** Una variedad diferenciable  $M$  es **contractible** (a algunos puntos  $p_0 \in M$ ) si existe una función diferenciable  $H : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ ,  $H(p,t) \in M$ ,  $p \in M$ ,  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$H(p,1) = p, \quad H(p,0) = p_0, \quad \text{para todo } p \in M$$

Es fácil ver que  $\mathbb{R}^n$  es contractible a un punto arbitrario  $p_0 \in \mathbb{R}^n$ ; es suficiente definir

$$H : M \times \mathbb{R} \rightarrow M; \quad H(p,t) = p_0 + (p - p_0)t$$

$$\begin{aligned} H(p,1) &= p_0 + (p - p_0)(1) \\ &= p_0 + p - p_0 = p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(p,0) &= p_0 + (p - p_0)(0) \\ &= p_0 \end{aligned}$$

El mismo argumento muestra que la bola  $B_r(0) = \{p \in \mathbb{R}^n; |p| < r\}$  es contractible al origen  $0$ . De ello se deduce que cualquier variedad es localmente contractible.

**Teorema 5.2. (Lema de Poincaré)** Sea  $M$  una variedad diferenciable contractible, y sea  $\omega$  una  $k$ -forma diferenciable en  $M$  con  $d\omega = 0$ . Entonces  $\omega$  es exacta, es decir, existe una  $(k-1)$ -forma  $\alpha$  en  $M$  tal que  $d\alpha = \omega$ .

**Nota.** La diferencia entre formas cerradas y exactas es la base para definir los grupos de cohomología. Las formas exactas son cerradas, así que los espacios vectoriales de  $k$ -formas junto con la derivada exterior son un complejo de cocadenas. Los espacios vectoriales de las formas cerradas módulo las formas exactas se llaman los grupos de **Cohomología de De Rham**. Cada grupo de cohomología es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, y además el producto cuña dota a la suma directa de esos grupos con una estructura de anillo. Se obtiene así la estructura de  **$\mathbb{R}$ -álgebra graduada**.

## 5.4. Resolución de Ejercicios

**Ejercicio 5.1.** Sean  $\omega = xdy - ydx$  y  $j : M \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  la función inclusión de una región acotada con borde regular  $\partial M$ . Muestre que el área de  $M$  viene dado por

$$\frac{1}{2} \int_{\partial M} j^* \omega.$$

**Solución.** Por Teorema de Stokes, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} j^* \omega &= \int_M d\omega = \int_M d(xdy - ydx) \\ &= \int_M \frac{\partial x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial x}{\partial y} dy dy + \frac{\partial(-y)}{\partial x} dx dx + \frac{\partial(-y)}{\partial y} dy dx \\ &= \int_M dx dy + 0 + 0 - dy dx = \int_M dx dy + dx dy \\ &= 2 \int_M dx dy = 2 \text{Área}(M) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Área}(M) = \frac{1}{2} \int_{\partial M} j^* \omega.$$

**Ejercicio 5.2.** Sean  $\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$  y  $j : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  la función inclusión de una región acotada con borde regular  $\partial M$ . Muestre que el volumen de  $M$  viene dado por

$$\frac{1}{3} \int_{\partial M} j^* \omega.$$

**Solución.** Por Teorema de Stokes, obtenemos

$$\int_{\partial M} j^* \omega = \int_M d\omega = \int_M d(xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy)$$

Calculemos

$$d\omega = d(xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy)$$

$$\begin{aligned} d(xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy) &= \frac{\partial x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial x}{\partial y} dy dy dz + \frac{\partial x}{\partial z} dz dy dz \\ &\quad + \frac{\partial(-y)}{\partial x} dx dx dz + \frac{\partial(-y)}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial(-y)}{\partial z} dz dy dz \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial x} dx dx dy + \frac{\partial z}{\partial y} dy dx dy + \frac{\partial z}{\partial z} dz dx dy \\ &= dx dy dz - dy dx dz + dz dx dy \\ &= 3 dx dy dz. \end{aligned}$$

Así,

$$\int_{\partial M} j^* \omega = \int_M d\omega = 3 \int_M dx dy dz = 3 \text{ Volumen}(M).$$

Por lo tanto,

$$\text{Volumen}(M) = \frac{1}{3} \int_{\partial M} j^* \omega.$$

**Ejercicio 5.3.** Generalice los resultados anteriores para el caso de  $\mathbb{R}^n$ .

**Solución.** Con el mismo razonamiento anterior, si  $\omega$  representa una  $(n-1)$  forma y  $j : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  la función inclusión de una región acotada con borde regular  $\partial M$ . Entonces

$$\text{Volumen}(M) = \frac{1}{n} \int_{\partial M} j^* \omega.$$

**Ejercicio 5.4.** Sean  $\omega_1$  y  $\omega_2$  formas diferenciales sobre una variedad diferenciable  $M$ . Asuma que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son formas cerradas y que  $\omega_2$  es exacta. Muestre que  $\omega_1 \wedge \omega_2$  es cerrada y exacta.

**Solución.** Ya que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son formas cerradas, se cumple que

$$d\omega_1 = 0 = d\omega_2,$$

y como  $\omega_2$  es exacta, existe una forma  $\beta$  tal que  $d\beta = \omega_2$ . Entonces mostremos que

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = 0 \text{ para verificar que } \omega_1 \wedge \omega_2 \text{ es cerrada, a saber,}$$

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2 = 0 + 0 = 0.$$

Luego, para mostrar que  $\omega_1 \wedge \omega_2$  es exacta, encontremos una forma  $\alpha$  tal que  $d\alpha = \omega_1 \wedge \omega_2$ , para ello note que

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge d\beta + \beta \wedge d\omega_1 = d(\omega_1 \wedge \beta).$$

Por lo tanto,  $\omega_1 \wedge \omega_2$  es exacta.

**Ejercicio 5.5.** Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  funciones diferenciables en  $\mathbb{R}^3$  y considere el sistema diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C \end{cases}$$

donde  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son funciones desconocidas en  $\mathbb{R}^3$ .

Muestre que una condición suficiente y necesaria para la existencia de una solución del sistema anterior es que

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$



**Solución.** Considere en  $\mathbb{R}^3$  la forma diferencial

$$\omega = A dydz + B dzdx + C dx dy,$$

si diferenciamos

$$d\omega = \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Por el Lema de Poincaré,  $d\omega = 0$  si y sólo si existe una forma  $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$  tal que  $d\alpha = \omega$ , en este sentido

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\partial P}{\partial x} dx dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q}{\partial y} dy dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz dy + \frac{\partial R}{\partial x} dx dz + \frac{\partial R}{\partial y} dy dz + \frac{\partial R}{\partial z} dz dz \\ &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz. \end{aligned}$$

Luego, como  $d\alpha = \omega$

$$\left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = A dy dz + B dz dx + C dx dy$$

y así,

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C.$$

Por lo que, para el sistema diferencial, existe una solución si y sólo si

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

# Capítulo 6

## Geometría Diferencial en Superficies

### 6.1. Ecuaciones de Estructura de $\mathbb{R}^n$

Ahora aplicaremos lo que sabemos de formas diferenciales para estudiar geometría diferencial. Comenzaremos con unas pocas definiciones.

**Definición 6.1.** Una **variedad riemanniana** es una variedad diferenciable  $M$ , y una correspondencia que asocia a cada punto  $p \in M$ , un producto interno positivo definido<sup>1</sup>  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  en  $T_p M$  que varía de forma diferenciable con  $p$  en el siguiente sentido: Si  $X$  y  $Y$  son campos vectoriales diferenciables en  $M$ , la función  $p \mapsto \langle X, Y \rangle_p$  es diferenciable en  $M$ . El producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es llamado usualmente la **métrica riemanniana** sobre  $M$ .

La noción de equivalencia entre variedades riemannianas es la noción de **isometría**.

**Definición 6.2.** Un difeomorfismo  $\varphi : M \rightarrow M'$  entre variedades riemannianas  $M$  y  $M'$ , es una **isometría** si para cada todo  $p$  y para todo par  $x, y \in T_p M$ , tenemos

$$\langle x, y \rangle_p = \langle d\varphi_p(x), d\varphi_p(y) \rangle_{\varphi(p)}.$$

La importancia de la noción de variedades riemannianas es que podemos definir sobre ella las nociones de una métrica usual (longitud, área, ángulos, etc) de la geometría euclídea. En realidad, la geometría euclídea es justo el estudio de las nociones de métrica en la más simple geometría riemanniana, a saber,  $\mathbb{R}^n$  dotado con el siguiente producto interno:

si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, \dots, y_n)$  son vectores en  $\mathbb{R}^n$ , se define

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

A pesar que  $\mathbb{R}^n$  es la más simple variedad riemanniana, esta es, en cierto sentido, la variedad riemanniana universal. Esperamos hacer esto más claro en lo que sigue del contenido. Comenzaremos, por lo tanto, por establecer las llamadas **ecuaciones de estructura** de  $\mathbb{R}^n$ .

---

<sup>1</sup>Esto significa que, el producto de un elemento con sí mismo, es mayor que cero; y el producto interno es igual a cero si y sólo si el elemento es el elemento nulo.

**Definición 6.3.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y sean  $e_1, \dots, e_n$ ,  $n$  campos vectoriales tales que, para cada  $p \in U$ , entonces

$$\langle e_i, e_j \rangle_p = \delta_{ij}$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j. \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Dicho conjunto de campos vectoriales es llamado un **marco móvil<sup>2</sup> ortonormal** (también llamado  $n$ -edro.)

Desde ahora, omitiremos el adjetivo ortonormal.

Dado un marco móvil  $\{e_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , podemos definir 1-formas diferenciales  $\omega_i$  por la condición  $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ; en otras palabras, en cada  $p$ , la base  $\{(\omega_i)_p\}$  es la base dual de  $\{(e_i)_p\}$ . El conjunto de formas  $\{\omega_i\}$  es llamado el **comarco asociado** a  $\{e_i\}$ .

Cada campo vectorial  $e_i$  es una función diferenciable  $e_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . El diferencial en  $p \in U$ ,  $(de_i)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es una función lineal. Así, para cada  $p$  y cada  $v \in \mathbb{R}^n$  podemos escribir

$$(de_i)_p(v) = \sum_j (\omega_{ij})_p(v) e_j.$$

Es fácil verificar que la expresión  $(\omega_{ij})_p(v)$ , arriba definida, depende linealmente sobre  $v$ . Así,  $(\omega_{ij})_p$  es una forma lineal en  $\mathbb{R}^n$  y, ya que  $e_i$  es un campo vectorial diferenciable,  $\omega_{ij}$  es una 1-forma diferencial. De acuerdo con esto, escribamos lo anterior como

$$de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j \tag{6.1}$$

Las  $n^2$  formas  $\omega_{ij}$  así definidas son llamadas las **formas de conexión** de  $\mathbb{R}^n$  en el marco móvil  $\{e_i\}$ . No todas de las formas  $\omega_{ij}$  son independientes. Si diferenciamos  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ , obteniendo

$$\begin{aligned} d(\delta_{ij}) &= d(\langle e_i, e_j \rangle) \\ 0 &= \langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle \\ 0 &= \left\langle \sum_j \omega_{ij} e_j, e_j \right\rangle + \left\langle e_i, \sum_i \omega_{ji} e_i \right\rangle \\ 0 &= \sum_{i \neq j} \omega_{ij} \langle e_i, e_j \rangle + \omega_{ij} \langle e_j, e_j \rangle + \sum_{i \neq j} \omega_{ji} \langle e_i, e_j \rangle + \omega_{ji} \langle e_i, e_i \rangle \\ 0 &= 0 + \omega_{ij} + 0 + \omega_{ji} \\ 0 &= \omega_{ij} + \omega_{ji}, \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Se llaman marcos móviles porque intuitivamente pueden entenderse como un conjunto de vectores que se parecen “moverse” sobre una variedad al considerar puntos sobre una curva de dicha variedad.

esto es, las formas de conexión  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$  son antisimétricas en los índices  $i, j$ .

El punto crucial en el método del marco móvil es que las formas  $\omega_{ij}$  y  $\omega_{ji}$  satisfacen las ecuaciones de estructura de Élie Cartan<sup>3</sup>.

**Proposición 6.1.** (Las ecuaciones de estructura de  $\mathbb{R}^n$ )

Sea  $\{e_i\}$  un marco móvil en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $\{\omega_i\}$  el comarco asociado a  $\{e_i\}$  y  $\omega_{ij}$  las formas de conexión de  $U$  en el marco  $\{e_i\}$ . Entonces

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki}, \quad (6.2)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (6.3)$$

*Demostración.* Sea  $a_1 = (1, \dots, 0), \dots, a_n = (0, \dots, 1)$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , y sea

$x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  la función que asigna al punto  $(x_1, \dots, x_n)$  su  $i$ -ésima coordenada. Entonces  $dx_i$  es una 1-forma diferencial sobre  $U$  y, ya que  $dx_j(a_i) = \delta_{ij}$ , concluimos que  $\{dx_i\}$  es el comarco asociado a  $\{a_i\}$ . Ahora escribamos

$$e_i = \sum_j \beta_{ij} a_j, \quad (6.4)$$

donde  $\beta_{ij}$  es una función diferenciable sobre  $U$ . Antes de continuar, note que la matriz, para cada  $p \in U$

$$(\beta_{ij}(p)) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(p) & \beta_{12}(p) & \cdots & \beta_{1n}(p) \\ \beta_{21}(p) & \beta_{22}(p) & \cdots & \beta_{2n}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1}(p) & \beta_{n2}(p) & \cdots & \beta_{nn}(p) \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal, es decir que al efectuar el producto de  $(\beta_{ij}(p))$  con  $(\beta_{ij}(p))^T$  resulta la identidad, eso se verifica tomando en cuenta que,

$$1 = \langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = \sum_{i=j} \beta_{ij}^2,$$

y notando además que,

$$(\beta_{ij})^T = \begin{pmatrix} \beta_{11}(p) & \beta_{21}(p) & \cdots & \beta_{n1}(p) \\ \beta_{12}(p) & \beta_{22}(p) & \cdots & \beta_{n2}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{1n}(p) & \beta_{2n}(p) & \cdots & \beta_{nn}(p) \end{pmatrix},$$

<sup>3</sup>Élie Joseph Cartan (9 de abril 1869 - 6 de mayo 1951) fue un matemático francés, que llevó a cabo trabajos fundamentales en la teoría de grupos de Lie y sus usos geométricos. Definió la noción general de forma diferencial antisimétrica, del modo en el que se utiliza actualmente

por lo que

$$(\beta_{ij}(p))(\beta_{ij}(p))^T = \begin{pmatrix} \sum_{i=j} \beta_{ij}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{i=j} \beta_{ij}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ya que  $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$ ,

$$\begin{aligned} \omega_i(e_j) &= \omega_i \left( \sum_j \beta_{ij} a_j \right) \\ &= \sum_j \beta_{ij} \omega_i(a_j) \\ &= \sum_j \beta_{ij} dx_j(e_j) \\ \omega_i &= \sum_j \beta_{ij} dx_j. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Primero probaremos que  $d\beta_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \beta_{kj}$ . En efecto si en (6.1) sustituimos (6.4),

$$de_i = \sum_k \omega_{ik} e_k = \sum_k \omega_{ik} \left( \sum_j \beta_{kj} a_j \right) = \sum_{jk} \omega_{ik} \beta_{kj} a_j.$$

Luego, diferenciando a (6.4),  $de_i = \sum_j d\beta_{ij} a_j$ , y comparando con la expresión anterior tenemos

$$\sum_j d\beta_{ij} a_j = \sum_{jk} \omega_{ik} \beta_{kj} a_j,$$

y así,

$$d\beta_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \beta_{kj}. \tag{6.6}$$

Para obtener la primera ecuación de estructura (6.2), diferenciamos (6.5) y usamos (6.6), obtenemos

$$d\omega_i = d \left( \sum_j \beta_{ij} dx_j \right) = \sum_j d(\beta_{ij}) \wedge dx_j = \sum_j \left( \sum_k \omega_{ik} \beta_{kj} \right) \wedge dx_j = \sum_{jk} \omega_{ik} \beta_{kj} \wedge dx_j$$

$$d\omega_i = \sum_{jk} \omega_{ik} \wedge \beta_{kj} dx_j = \sum_k \omega_{ik} \wedge \sum_j \beta_{kj} dx_j = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_k = - \left( - \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki} \right),$$

y así,

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki}.$$

Para la segunda ecuación (6.3), diferenciamos (6.6), obteniendo

$$\begin{aligned} d(d\beta_{ij}) &= d\left(\sum_k \omega_{ik}\beta_{kj}\right) \\ 0 &= \sum_k d(\omega_{ik}\beta_{kj}) \\ &= \sum_k (d\omega_{ik} \wedge \beta_{kj} - \omega_{ik} \wedge d\beta_{kj}) = \sum_k d\omega_{ik}\beta_{kj} - \sum_k \omega_{ik} \wedge d\beta_{kj}, \end{aligned}$$

esto es,

$$\sum_k d\omega_{ik}\beta_{kj} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \sum_s \omega_{ks}\beta_{sj},$$

esto puede verse en matrices como

$$\sum_k d\omega_{ik}\beta_{kj} = \begin{pmatrix} \beta_{11}d\omega_{i1} & \beta_{12}d\omega_{i1} & \cdots & \beta_{1n}d\omega_{i1} \\ \beta_{21}d\omega_{i2} & \beta_{22}d\omega_{i2} & \cdots & \beta_{2n}d\omega_{i2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1}d\omega_{in} & \beta_{n2}d\omega_{in} & \cdots & \beta_{nn}d\omega_{in} \end{pmatrix}$$

luego multiplicando por la matriz  $(\beta_{kj})^{-1} = (\beta_{kj})^T$ ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \beta_{11}d\omega_{i1} & \cdots & \beta_{1n}d\omega_{i1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1}d\omega_{in} & \cdots & \beta_{nn}d\omega_{in} \end{pmatrix} (\beta_{kj})^T &= \begin{pmatrix} (\sum_{j=1}^n \beta_{1j}^2)d\omega_{i1} & \cdots & (\sum_{j=1}^n \beta_{1j}\beta_{nj})d\omega_{i1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\sum_{j=1}^n \beta_{nj}\beta_{1j})d\omega_{in} & \cdots & (\sum_{j=1}^n \beta_{nj}^2)d\omega_{in} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d\omega_{i1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & d\omega_{in} \end{pmatrix} = d\omega_{ir} \end{aligned}$$

Para la otra matriz,

$$\sum_s \sum_k \beta_{sj}\omega_{ik} \wedge \omega_{ks} = \begin{pmatrix} \beta_{11} \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k1} & \beta_{12} \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k1} & \cdots & \beta_{1n} \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k1} \\ \beta_{21} \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k2} & \beta_{22} \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k2} & \cdots & \beta_{2n} \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kn} & \beta_{n2} \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kn} & \cdots & \beta_{nn} \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kn} \end{pmatrix}$$

luego multiplicando por la matriz  $(\beta_{kj})^{-1} = (\beta_{kj})^T$

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k1} & \cdots & \beta_{1n} \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kn} & \cdots & \beta_{nn} \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kn} \end{pmatrix} (\beta_{kj})^T$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} (\sum_{j=1}^n \beta_{1j}^2) \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k1} & \cdots & (\sum_{j=1}^n \beta_{1j} \beta_{nj}) \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\sum_{j=1}^n \beta_{nj} \beta_{1j}) \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kn} & \cdots & (\sum_{j=1}^n \beta_{nj}^2) \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kn} \end{pmatrix} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kr}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d\omega_{ir} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kr},$$

como queríamos.  $\square$

**Observación 10.** Si denotamos por  $x : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  la función inclusión, decir que las formas  $\omega_i$  son el dual del marco  $\{e_i\}$  es equivalente a decir que  $dx = \sum_i \omega_i e_i$ . Intuitivamente, las expresiones que definen  $\omega_i$  y  $\omega_{ij}$ , esto es,

$$dx = \sum \omega_i e_i, \quad de_i = \sum \omega_{ij} e_j,$$

describen cómo el marco móvil  $x, e_1, \dots, e_n$  varía a medida que nos movemos (a lo largo de una curva  $x(t)$ ) en  $U$ . Así fue como Elie Cartan introdujo el método de los marcos móviles. Las ecuaciones de estructura fueron entonces las consecuencias de las relaciones “necesarias”:

$$d(dx) = 0, \quad d(de_i) = 0.$$

Por ejemplo, la primera ecuación estructura puede obtenerse como sigue:

$$\begin{aligned}
0 &= d(dx) = \sum_i d\omega_i e_i - \sum \omega_i \wedge de_i \\
&= \sum_j d\omega_j e_j - \sum_i \omega_i \wedge \sum_j \omega_{ij} e_j = \sum_j \left( d\omega_j - \sum_i \omega_{ji} \wedge \omega_i \right) e_j \\
0 &= d\omega_j - \sum_i \omega_{ji} \wedge \omega_i \\
d\omega_j &= \sum_i \omega_{ji} \wedge \omega_i = - \left( - \sum_i \omega_i \wedge \omega_{ij} \right) = \sum_i \omega_i \wedge \omega_{ij}
\end{aligned}$$

La principal idea del método de Cartan para estudiar la geometría de subvariedades de  $\mathbb{R}^N$  puede describirse como sigue: Sea  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  una inmersión de una variedad diferenciable  $M^n$  en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Es una consecuencia del teorema de la función inversa que para cada  $p \in M$  existe un entorno  $U \subset M$  de  $p$ , tal que la restricción  $x|_U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  es un embebimiento. (Vea la Proposición (4.3) del capítulo 4).

**Definición 6.4.** Sea  $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$  un entorno de  $x(p)$  en  $\mathbb{R}^{n+k}$  tal que  $V \cap M = x(U)$ . Asuma que  $V$  es tal que existe un marco móvil  $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_k\}$  en  $V$  con la propiedad que, cuando restringimos a  $x(U)$ , los vectores  $e_1, \dots, e_n$  son tangente a  $x(U)$ ; tal marco móvil es llamado **un marco adaptado**.

En  $V$  tenemos, asociado al marco  $\{e_i\}$ , el comarco de formas  $\omega_i$  y las formas de conexión  $\omega_{ij}$  que satisfacen las ecuaciones de estructura (6.2) y (6.3). La función  $x : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+k}$  induce formas  $x^*(\omega_i), x^*(\omega_{ij})$  en  $U$ . Ya que  $x^*$  conmuta con el diferencial exterior y productos exteriores, tales formas en  $U$  satisfacen nuevamente las ecuaciones de estructura (6.2) y (6.3). Resulta que la geometría métrica local de  $U \subset M$  está toda contenida en las ecuaciones de estructura, y esto refleja el “carácter universal” de  $\mathbb{R}^n$ .

En la siguiente sección podremos aplicar el método de los marcos móviles a un simple pero importante caso, a saber, superficies en  $\mathbb{R}^3$ . Para eso, necesitaremos unos lemas preliminares que estableceremos ahora.

**Lema 6.1. (Lema de Cartan).**

Sea  $V^n$  un espacio vectorial de dimensión  $n$ , y sean  $\omega_1, \dots, \omega_r : V^n \rightarrow \mathbb{R}, r \leq n$ , formas lineales en  $V$  que son linealmente independientes. Asuma que existen formas

$\theta_1, \dots, \theta_r : V \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \theta_i = 0$ . Entonces

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j, \quad \text{con} \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

*Demostración.* Completamos las formas  $\omega_i$  en una base  $\omega_1, \dots, \omega_r, \omega_{r+1}, \dots, \omega_n$  de  $V^*$  y escribamos

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j + \sum_l b_{il} \omega_l, \quad l = r+1, \dots, n.$$

Al usar la hipótesis, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \theta_i = \sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \left( \sum_j a_{ij} \omega_j + \sum_l b_{il} \omega_l \right) = \sum_{ij} a_{ij} \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{il} b_{il} \omega_i \wedge \omega_l \\ &= \sum_{i < j} (a_{ij} - a_{ji}) \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i < l} b_{il} \omega_i \wedge \omega_l. \end{aligned}$$

Ya que  $\omega_k \wedge \omega_s, k, s = 1, \dots, n$  son linealmente independientes (por observación (2)), concluimos que  $b_{il} = 0$  y  $a_{ij} = a_{ji}$ .  $\square$

**Lema 6.2.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  y sean  $\omega_1, \dots, \omega_n$  1-formas diferenciales linealmente independientes en  $U$ . Asuma que existe un conjunto de 1-formas diferenciales  $\{\omega_{ij}\}, i, j = 1, \dots, n$  que satisfacen las condiciones:

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}, \quad d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj}.$$

Entonces tal conjunto es único.



*Demostración.* Suponga la existencia de otro conjunto  $\bar{\omega}_{ij}$  con

$$\bar{\omega}_{ij} = -\bar{\omega}_{ji}, \quad d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \bar{\omega}_{kj}.$$

Al igualar  $d\omega_j$  con la del lema, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj} &= \sum_k \omega_k \wedge \bar{\omega}_{kj} \\ \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj} - \sum_k \omega_k \wedge \bar{\omega}_{kj} &= 0 \\ \sum_k (\omega_k \wedge \omega_{kj} - \omega_k \wedge \bar{\omega}_{kj}) &= \sum_k \omega_k \wedge (\omega_{kj} - \bar{\omega}_{kj}) = 0 \\ &= - \sum_k \omega_k \wedge (\bar{\omega}_{kj} - \omega_{kj}) = 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_k \omega_k \wedge (\bar{\omega}_{kj} - \omega_{kj}) = 0,$$

y, por el Lema de Cartan,

$$\bar{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = \sum_i B_{ki}^j \omega_i, \quad B_{ki}^j = B_{ik}^j.$$

Note que

$$\bar{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = -\bar{\omega}_{jk} - (-\omega_{jk}) = -(\bar{\omega}_{jk} - \omega_{jk})$$

y

$$\bar{\omega}_{jk} - \omega_{jk} = \sum_i B_{ji}^k \omega_i,$$

y así,

$$\bar{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = \sum_i B_{ki}^j \omega_i = -(\bar{\omega}_{jk} - \omega_{jk}) = - \sum_i B_{ji}^k \omega_i, \quad (6.7)$$

por lo que,

$$\begin{aligned} \sum_i B_{ki}^j \omega_i &= - \sum_i B_{ji}^k \omega_i \\ \sum_i B_{ki}^j \omega_i + \sum_i B_{ji}^k \omega_i &= 0 \\ \sum_i (B_{ki}^j + B_{ji}^k) \omega_i &= 0, \end{aligned}$$

y, ya que los  $\omega_i$  son linealmente independientes,  $B_{ki}^j = -B_{ji}^k$ . Al usar la simetría anterior, obtenemos finalmente que

$$B_{ji}^k = -B_{ki}^j = -B_{ik}^j = B_{jk}^i = B_{kj}^i = -B_{ij}^k = -B_{ji}^k = 0$$

$$B_{ji}^k = -B_{ji}^k \implies B_{ji}^k + B_{ji}^k = 0 \implies B_{ji}^k = 0,$$

por lo que en (6.7),

$$\bar{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = 0,$$

esto es

$$\bar{\omega}_{kj} = \omega_{kj}.$$

□

**Observación 11.** *El método de marcos móviles de Élie Cartan se basa en tomar un marco móvil que se adapte al problema particular que es estudiado. Por ejemplo, dada una curva en el espacio, los primeros tres vectores derivados de la curva pueden en general dar un marco en un punto de ella (de aquí la clásica expresión: método del triedro móvil (se asume que la torsión no es cero)).*

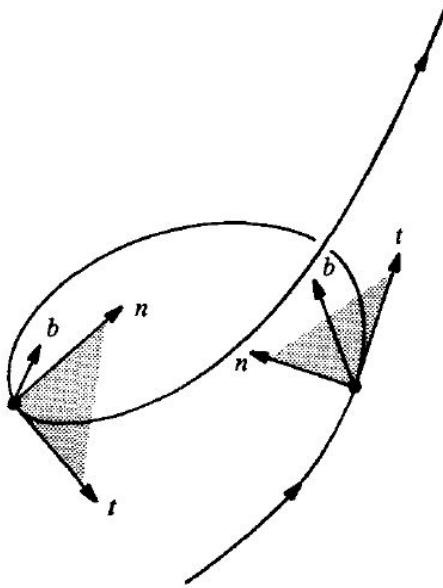


Figura 6.1.  $t$  es el vector tangente,  $n$  es el vector normal y  $b$  es el vector binormal.

## 6.2. Superficies en $\mathbb{R}^3$

Ahora aplicaremos el método del marco móvil para el caso especial de superficies en  $\mathbb{R}^3$ .

Sea  $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión de una variedad diferenciable de dimensión 2 en  $\mathbb{R}^3$ . Para cada punto  $p$  en  $M$ , un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  es definido en  $T_p M$  por la regla:

$$\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle d\mathbf{x}_p(v_1), d\mathbf{x}_p(v_2) \rangle_{\mathbf{x}(p)}$$

donde el producto interno en el lado derecho es el producto interno canónico en  $\mathbb{R}^3$ .

**Lema 6.3.**  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  es diferenciable y define una métrica riemanniana en  $M^2$ . Esta es la **métrica inducida por la inmersión  $\mathbf{x}$** .

Vamos a estudiar la geometría local de  $M^2$  alrededor de un punto  $p \in M^2$ .

Sea  $U \subset M$  un entorno de  $p$  tal que la restricción  $\mathbf{x}|_U$  es un embebimiento. Sea  $V \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $V \cap \mathbf{x}(M) = \mathbf{x}(U)$ , y que es posible elegir en  $V$  un marco móvil adaptado  $e_1, e_2, e_3$ ; esto significa que, cuando restringimos a  $\mathbf{x}(U)$ ,  $e_1$  y  $e_2$  son tangentes a  $\mathbf{x}(U)$  (donde  $e_3$  es normal a  $\mathbf{x}(U)$ ).

En  $V$  tenemos, asociado al marco  $\{e_i\}$ , el comarco de formas  $\omega_i$  y las formas de conexión  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  que satisfacen las ecuaciones de estructura:

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_2 \wedge \omega_{21} + \omega_3 \wedge \omega_{31}, \\ d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_{12} + \omega_3 \wedge \omega_{32}, \\ d\omega_3 &= \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23}, \\ d\omega_{12} &= \omega_{13} \wedge \omega_{32}, \\ d\omega_{13} &= \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \\ d\omega_{23} &= \omega_{21} \wedge \omega_{13}. \end{aligned}$$

La inmersión  $\mathbf{x} : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$  induce formas  $\mathbf{x}^*(\omega_i), \mathbf{x}^*(\omega_{ij})$  en  $U$ . Ya que  $\mathbf{x}^*$  conmuta con  $d$  y  $\wedge$ , tales formas todavía satisfacen las ecuaciones de estructura. Note que  $\mathbf{x}^*(\omega_3) = 0$ , ya que para todo  $q \in U$  y para todo  $v \in T_q M$

$$\mathbf{x}^*(\omega_3)(v) = \omega_3(d\mathbf{x}(v)) = \omega_3(a_1 e_1 + a_2 e_2) = a_1 \omega_3(e_1) + a_2 \omega_3(e_2) = 0,$$

donde  $v = a_1 e_1 + a_2 e_2$ .

Con un ligero abuso de notación, podemos escribir

$$\mathbf{x}^*(\omega_i) = \omega_i, \quad \mathbf{x}^*(\omega_{ij}) = \omega_{ij}.$$

Esto equivale a considerar a  $U$  como un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  por la inclusión  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  (note que  $\mathbf{x}|_U$  es un embebimiento), y mirar las formas  $\omega_i$  y  $\omega_{ij}$  como restringidas a  $U$ . Estas formas restringidas, satisfacen las ecuaciones de estructura anteriores con la relación adicional  $\omega_3 = 0$ .

Ya que  $\omega_3 = 0$ ,

$$d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0,$$

por lo tanto, por el lema de Cartan,

$$\omega_{13} = h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2, \quad (6.8)$$

$$\omega_{23} = h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2, \quad (6.9)$$

donde  $h_{ij} = h_{ji}$  son funciones diferenciables en  $U$ .

Podemos obtener una interpretación geométrica de las funciones  $h_{ij}$ . Para eso, observe que la función  $e_3 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  toma valores en la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , ya que  $\|e_3\| = 1$ . Fijando orientaciones de  $U$  y  $\mathbb{R}^3$ , podemos elegir el marco  $\{e_i\}$  de tal manera que, para cada  $q \in U$ ,  $\{e_1, e_2\}$  tiene la orientación de  $U$  y,  $\{e_1, e_2, e_3\}$  tiene la orientación de  $\mathbb{R}^3$ . En este caso  $e_3 : U \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  está bien definida, no depende de la elección del marco, y es llamada la **función (normal) de Gauss** en  $U$ .

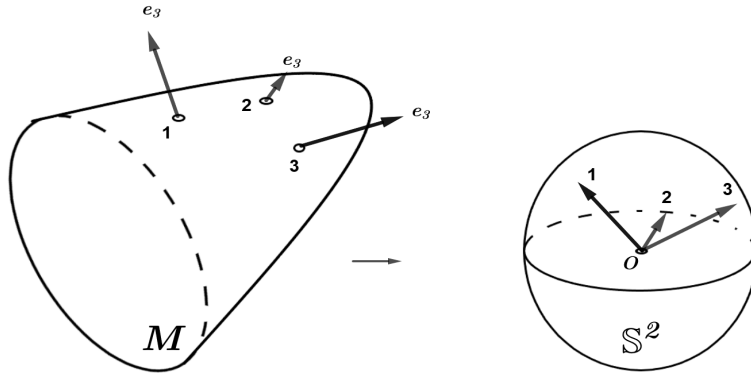


Figura 6.2. La función de Gauss.

Notamos el hecho importante que si  $M$  es orientable, la función de Gauss puede definirse globalmente sobre  $M$ .

Ahora, ya que  $de_3 = \omega_{31}e_1 + \omega_{32}e_2$ , sustituyendo (6.8) y (6.9)

$$de_3 = (h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2)e_1 - (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2)e_2$$

obtenemos que, para cada  $q \in U$  y para todo  $v = a_1e_1 + a_2e_2 \in T_qM$ ,

$$\begin{aligned} de_3(v) = de_3(a_1e_1 + a_2e_2) &= (h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2)(a_1e_1 + a_2e_2)e_1 - (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2)(a_1e_1 + a_2e_2)e_2 \\ &= (h_{11}\omega_1(a_1e_1 + a_2e_2) + h_{12}\omega_2(a_1e_1 + a_2e_2))e_1 \\ &\quad - (h_{21}\omega_1(a_1e_1 + a_2e_2) + h_{22}\omega_2(a_1e_1 + a_2e_2))e_2 \\ &= (h_{11}a_1 + h_{12}a_2)e_1 - (h_{21}a_1 + h_{22}a_2)e_2 \end{aligned}$$

así,

$$de_3(v) = - \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

es decir,  $(-h_{ij})$  es la matriz del diferencial de la función de Gauss  $e_3 : U \rightarrow \mathbb{S}^2$  en la base  $\{e_1, e_2\}$  que es la interpretación geométrica que estábamos buscando.

Al calcular la matriz transpuesta

$$(-h_{ij})^T = - \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix},$$

y usando el hecho que  $h_{ij} = h_{ji}$  obtenemos que,

$$(-h_{ij})^T = - \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = (-h_{ij}).$$

Lo que significa que  $(-h_{ij})$  es una matriz simétrica, de lo cual concluimos inmediatamente que el diferencial  $de_3 : TM \rightarrow T\mathbb{S}^2$  de la función de Gauss  $e_3 : U \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal autoadjunta, es decir una aplicación simétrica. A partir de un buen reconocido resultado del Álgebra Lineal, por ser simétrica puede diagonalizarse (Teorema Espectral) con eigen-valores reales  $-\lambda_1, -\lambda_2$  y eigen-vectores ortogonales.

**Definición 6.5.** Definimos la **curvatura Gaussiana**  $K$  de  $M$  en  $p$  por

$$K = \det(de_3)_p = \lambda_1 \lambda_2 = h_{11} h_{22} - h_{12}^2$$

y la **curvatura media**  $H$  de  $M$  en  $p$  por

$$H = -\frac{1}{2}(\text{traza } de_3)_p = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{h_{11} + h_{22}}{2},$$

donde las funciones involucradas son calculadas en  $p$ .

Claramente  $K$  y  $H$  no dependen de la elección del marco móvil. Note que  $H$  cambia de signo con un cambio de orientación, pero  $K$  sigue siendo el mismo bajo tal cambio. Las expresiones de  $K$  y  $H$  en términos de un marco móvil son inmediatamente obtenidas:

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= \omega_{13} \wedge \omega_{32} \\ &= -(h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) \wedge (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2) \\ &= -(h_{11}h_{21}\omega_1 \wedge \omega_1 + h_{12}h_{21}\omega_2 \wedge \omega_1 + h_{11}h_{22}\omega_1 \wedge \omega_2 + h_{12}h_{22}\omega_2 \wedge \omega_2) \\ &= -(-h_{12}h_{21}\omega_1 \wedge \omega_2 + h_{11}h_{22}\omega_1 \wedge \omega_2) \\ &= -(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= -K\omega_1 \wedge \omega_2, \end{aligned}$$

así,

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$$

y

$$\begin{aligned} \omega_{13} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_{23} &= (h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2) \\ &= h_{11}\omega_1 \wedge \omega_2 + h_{22}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= (h_{11} + h_{22})\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= 2H\omega_1 \wedge \omega_2, \end{aligned}$$

así,

$$\omega_{13} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_{23} = 2H\omega_1 \wedge \omega_2.$$

La expresión  $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$  nos permite probar uno de los más importantes teoremas en la teoría de superficies en  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 6.1. (Gauss).**

*K sólo depende de la métrica inducida de  $M^2$ ; esto es, si  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  son dos inmersiones con las mismas métricas inducidas, entonces  $K(p) = K'(p)$ ,  $p \in M$ , donde  $K$  y  $K'$  son la curvaturas Gaussianas de las inmersiones  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$ , respectivamente.*

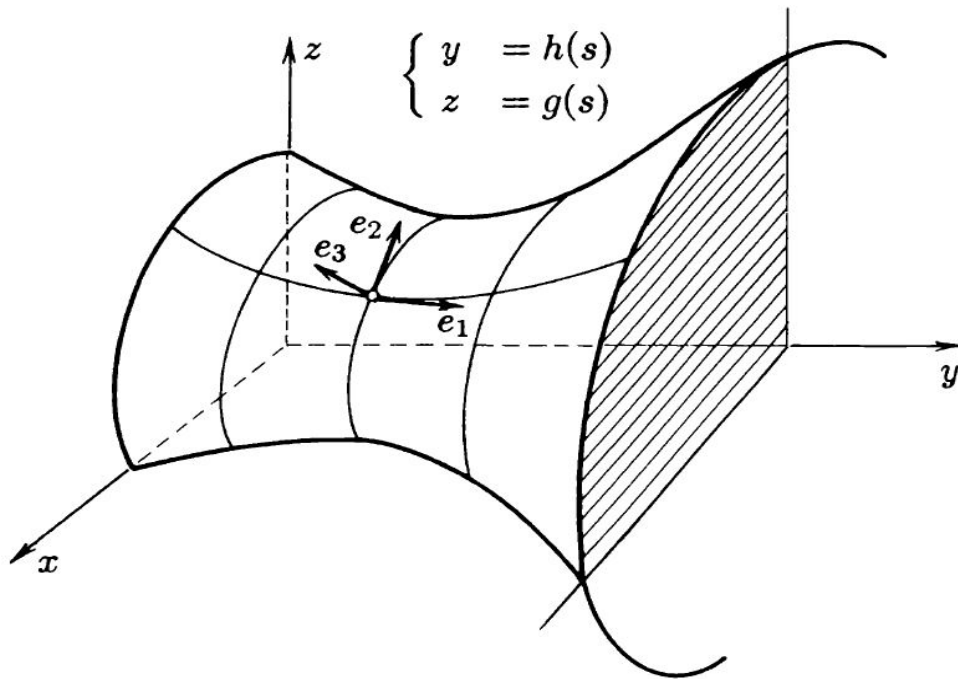
*Demostración.* Sea  $U \subset M$  un entorno de  $p$  y considere el marco móvil  $\{e_1, e_2\}$  en  $U$ , ortonormal en la métrica inducida. El conjunto  $\{d\mathbf{x}(e_1), d\mathbf{x}(e_2)\}$  puede extenderse en un marco adaptado en  $V \supset \mathbf{x}(U)$  y, similarmente, el conjunto  $\{d\mathbf{x}'(e_1), d\mathbf{x}'(e_2)\}$  puede extenderse en un marco adaptado en  $V' \supset \mathbf{x}'(U)$ .

Denotemos por prima las entidades que se refieren a la inmersión  $\mathbf{x}'$ . Entonces,  $\omega_1 = \omega'_1$ ,  $\omega_2 = \omega'_2$ , por ser ambos duales de la misma base. Por la unicidad del Lema (6.3),  $\omega_{12} = \omega'_{12}$ . Resulta que

$$\begin{aligned} d\omega_{12} = d\omega'_{12} &\Rightarrow -K\omega_1 \wedge \omega_2 = -K'\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &\Rightarrow -K\omega_1 \wedge \omega_2 + K'\omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \\ &\Rightarrow (-K + K')\omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \\ &\Rightarrow -K + K' = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto,  $K = K'$ . □

El teorema de Gauss significa que la curvatura de Gauss, cuya definición hizo uso del espacio ambiente  $\mathbb{R}^3$ , sólo depende de las medidas realizadas en la superficie. Esto llevó a Gauss, alrededor de 1827, a imaginar la existencia de geometrías que fueran independientes del espacio ambiente. Porque le faltaban herramientas adecuadas (en particular la noción de una variedad diferenciable), Gauss no desarrolló estas ideas que fueron más tarde (1852) tomadas por Riemann. En general, las entidades geométricas en  $M$  que pueden calcularse

Figura 6.3. Superficie de rotación con eje  $y$ .

desde  $\omega_1, \omega_2$  y  $\omega_{12}$  dependen sólo en la métrica inducida en el sentido descrito anteriormente, y deberíamos ser capaces de definirlos sin mencionar la inmersión  $\mathbf{x}$ . Volveremos a eso en la siguiente sección.

**Ejemplo 6.1.** Consideremos la inmersión  $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $U$  es

$$U = \{(s, v) \in \mathbb{R}^2; -\infty < s < \infty, 0 < v < 2\pi\},$$

y  $\mathbf{x}$  está dada por

$$\mathbf{x}(s, v) = (h(s) \sin v, h(s) \cos v, g(s)).$$

Donde  $h(s) \neq 0$  y  $g(s)$  es una función diferenciable que satisface

$$\left(\frac{dh}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dg}{ds}\right)^2 = 1.$$

La imagen  $\mathbf{x}(U)$  es una superficie de rotación con eje  $y$  cuya curva generadora  $y = h(s)$ ,  $z = g(s)$  es parametrizada por la longitud del arco  $s$  (ver Fig. (6.3)).

Queremos mostrar que la curvatura Gaussiana de esta superficie es  $K = -(\frac{h''}{h})$ , donde prima denota la derivada relativa a  $s$ .

Observe que  $\frac{v}{h}$  mide el perímetro del círculo en la sección transversal  $\mathbf{x}$  (constante  $v$ ). Así, diferenciando  $\mathbf{x}$  encontramos

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= (h' \operatorname{sen} v, h' \cos v, g')ds + (-h \cos v, -h \operatorname{sen} v, 0)dv \\ &= ds\mathbf{e}_1 + hdv\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

donde tomamos,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (h' \operatorname{sen} v, h' \cos v, g') \\ \mathbf{e}_2 &= (\cos v, -\operatorname{sen} v, 0) \\ \mathbf{e}_3 &= (g' \operatorname{sen} v, g' \cos v, h') \end{aligned}$$

son vectores tangentes ortonormales a  $\mathbf{x}(U)$ . Junto con el vector unitario  $\mathbf{e}_3$  normal a  $\mathbf{x}(U)$ , constituyen un marco adaptado a la inmersión  $\mathbf{x}$ .

Como  $d\mathbf{x} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2$ , es inmediato comprobar que  $\omega_1 = ds$ ,  $\omega_2 = hdv$ . Por otro lado

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_1 &= (h'' \operatorname{sen} v, h'' \cos v, g'')ds + (h' \cos v, -h' \operatorname{sen} v, 0)dv \\ &= h'dv\mathbf{e}_2 + \frac{g''}{h'}ds\mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_2 &= (0, 0, 0)ds + (-\operatorname{sen} v, -\cos v, 0)dv \\ &= -h'dv\mathbf{e}_1 + g'dv\mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_3 &= (g'' \operatorname{sen} v, -g'' \cos v, h'')ds + (g' \cos v, -g' \operatorname{sen} v, 0)dv \\ &= -\frac{g''}{h}ds\mathbf{e}_1 - g'dv\mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

donde se utilizó el hecho que  $-g''g' = h''h'$  resultado de la condición  $\left(\frac{dh}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dg}{ds}\right)^2 = 1$ .

De esto se sigue que la matriz de formas de conexión es

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h'dv & \frac{g''}{h'}ds \\ -h'dv & 0 & h'dv \\ -\frac{g''}{h'}ds & -g'dv & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos calcular

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= \frac{g''}{h'}ds = \frac{g''}{g'}\omega_1, \\ \omega_{23} &= g'dv = \frac{g'}{h}\omega_2. \end{aligned}$$



Finalmente obtenemos la matriz de forma

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g''}{h'} & 0 \\ 0 & \frac{g'}{h} \end{pmatrix}$$

donde  $K = h_{11}h_{22} = \frac{g''g'}{h'h} = -\frac{h''}{h}$ . Además,  $\omega_{12} = h' dv$ , y

$$d\omega_{12} = h'' ds \wedge dv = \frac{h''}{h} \omega_1 \wedge \omega_2 = -K \omega_1 \wedge \omega_2,$$

y esto produce la expresión requerida.

**Ejemplo 6.2.** Un caso particular del ejemplo anterior es la esfera de radio  $R$ , haciendo  $h(s) = R \cos(\frac{s}{R})$ , vamos a verificar que  $K = \frac{1}{R^2}$ . Entonces,

$$\mathbf{x}(s, v) = \left( R \cos \frac{s}{R} \operatorname{sen} v, R \cos \frac{s}{R} \cos v, R \operatorname{sen} \frac{s}{R} \right)$$

Diferenciando a  $\mathbf{x}$  tenemos

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \left( -\operatorname{sen} \frac{s}{R} \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} \frac{s}{R} \cos v, \cos \frac{s}{R} \right) ds \\ &\quad + \left( R \cos \frac{s}{R} \cos v, -R \cos \frac{s}{R} \operatorname{sen} v, 0 \right) dv \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \left( -\operatorname{sen} \frac{s}{R} \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} \frac{s}{R} \cos v, \cos \frac{s}{R} \right) \\ \mathbf{e}_2 &= (\cos v, -\operatorname{sen} v, 0) \end{aligned}$$

Como  $d\mathbf{x} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2$ , así,  $\omega_1 = ds$  y  $\omega_2 = R \cos \frac{s}{R} dv$ .

Encontremos el vector normal  $\mathbf{e}_3$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\operatorname{sen} \frac{s}{R} \operatorname{sen} v & -\operatorname{sen} \frac{s}{R} \cos v & \cos \frac{s}{R} \\ \cos v & -\operatorname{sen} v & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\cos \frac{s}{R} \operatorname{sen} v) i - (\cos \frac{s}{R} \cos v) j + (\operatorname{sen} \frac{s}{R} \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen} \frac{s}{R} \cos^2 v) k \\ &= \left( \cos \frac{s}{R} \operatorname{sen} v, \cos \frac{s}{R} \cos v, \operatorname{sen} \frac{s}{R} \right) \end{aligned}$$

ahora diferenciando  $e_1, e_2, e_3$

$$\begin{aligned} de_1 &= \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R} \operatorname{sen} v, -\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R} \cos v, -\frac{1}{R} \operatorname{sen} \frac{s}{R}\right) ds \\ &\quad + \left(-\operatorname{sen} \frac{s}{R} \cos v, \operatorname{sen} \frac{s}{R} \operatorname{sen} v, 0\right) dv \\ &= -\frac{1}{R} ds e_3 - \operatorname{sen} \frac{s}{R} dv e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} de_2 &= (0, 0, 0) ds + (-\operatorname{sen} v, -\cos v, 0) dv \\ &= \operatorname{sen} \frac{s}{R} dv e_1 - \cos \frac{s}{R} dv e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} de_3 &= \left(-\frac{1}{R} \operatorname{sen} \frac{s}{R} \operatorname{sen} v, -\frac{1}{R} \operatorname{sen} \frac{s}{R} \cos v, \frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}\right) ds \\ &\quad + \left(\cos \frac{s}{R} \cos v, -\cos \frac{s}{R} \operatorname{sen} v, 0\right) dv \\ &= \frac{1}{R} ds e_1 \cos \frac{s}{R} - dv e_2 \end{aligned}$$

y formamos la matriz de formas de conexión

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{sen} \frac{s}{R} dv & -\frac{1}{R} ds \\ \operatorname{sen} \frac{s}{R} dv & 0 & -\cos \frac{s}{R} dv \\ \frac{1}{R} ds & \cos \frac{s}{R} dv & 0 \end{pmatrix}$$

de donde calculamos

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= -\frac{1}{R} ds = -\frac{1}{R} \omega_1 \\ \omega_{23} &= -\cos \frac{s}{R} dv = -\frac{1}{R} \omega_2 \end{aligned}$$

así,

$$K = \begin{vmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{vmatrix} = \frac{1}{R^2}.$$

Además,  $\omega_{12} = -\operatorname{sen} \frac{s}{R} dv$ , entonces

$$d\omega_{12} = -\cos \frac{s}{R} ds \wedge dv = -\frac{1}{R^2} \omega_1 \wedge \omega_2$$

### 6.3. Geometría intrínseca de Superficies

En el estudio de las superficies  $M^2$  en  $\mathbb{R}^3$  hemos visto que ciertas entidades geométricas, por ejemplo, la curvatura Gaussiana, sólo depende de la métrica riemanniana de  $M^2$ . Un sorprendente número de propiedades geométricas de superficies están en la misma situación que la curvatura de Gauss, es decir, sólo dependen de la métrica riemanniana, y constituyen la geometría intrínseca de superficies. En esta sección, vamos a presentar un estudio más sistemático de tales propiedades utilizando el método del marco móvil.

Nuestro punto de partida es una variedad diferenciable  $M^2$  de dimensión 2 junto con una métrica riemanniana  $\langle, \rangle$ . Para cada punto  $p \in M$ , escogemos un entorno  $U \subset M$  de  $p$  tal que en cada uno puede definirse campos vectoriales ortonormales  $e_1$  y  $e_2$  en  $U$ . De este marco móvil  $\{e_1, e_2\}$  podemos definir un correspondiente comarco  $\{\omega_1, \omega_2\}$  por la condición  $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ . La pregunta ahora es si podemos definir formas diferenciales que desempeñen el papel de las formas de conexión.

La elección que hacemos a continuación puede estar motivada por las siguientes consideraciones. Si  $U$  podría ser isométricamente embebido (esto es, de tal manera que el producto interno Riemanniano  $\langle, \rangle$  en  $M^2$  es inducido por  $\mathbb{R}^3$ ), podríamos obtener un marco móvil  $e_1, e_2, e_3$  en un conjunto abierto  $V \supset U$  de  $\mathbb{R}^3$  que extiende el marco  $e_1, e_2$  en  $U$ . De las formas  $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$ , y de las ecuaciones de estructura

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_{12} \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 &= \omega_{21} \wedge \omega_1, \\ d\omega_3 &= \omega_{13} \wedge \omega_3, \\ d\omega_{12} &= \omega_{13} \wedge \omega_{32}, \\ d\omega_{13} &= \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \\ d\omega_{23} &= \omega_{21} \wedge \omega_{13}, \end{aligned}$$

sólo las formas  $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$  y las dos primeras ecuaciones no contienen elementos relacionados con el vector externo  $e_3$ . Por lo tanto, es razonable esperar que existan en  $U$  una forma única  $\omega_{12} = -\omega_{21}$  de tal manera que las dos primeras ecuaciones se mantengan. Este es de hecho el caso.

**Lema 6.4.** (Teorema de Levi-Civita<sup>4</sup>).

Sea  $M^2$  una variedad riemanniana. Sea  $U \subset M$  un conjunto abierto donde un marco móvil ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  está definido, y sea  $\{\omega_1, \omega_2\}$  un comarco asociado. Entonces existe

<sup>4</sup>Tullio Levi-Civita (1873-1941) fue un matemático italiano, famoso por su trabajo sobre cálculo tensorial. Su trabajo incluye artículos fundamentales en matemáticas puras y aplicadas, la mecánica celeste (notable en el problema de los tres cuerpos) e hidrodinámica.

una única 1-forma  $\omega_{12} = -\omega_{21}$  tal que

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1.$$

*Demostración.* La unicidad ya ha sido probada en Lema (6.2) de la Sección 6.1. Para probar la existencia, sólo definimos

$$\begin{aligned} \omega_{12}(e_1) &= d\omega_1(e_1, e_2), \\ \omega_{12}(e_2) &= d\omega_2(e_1, e_2), \end{aligned}$$

y verificamos las propiedades requeridas, por ejemplo,

$$d\omega_1(e_1, e_2) = \omega_{12}(e_1) = \omega_{12}(e_1)\omega_2(e_2) - \omega_{12}(e_2)\omega_2(e_1) = (\omega_{12} \wedge \omega_2)(e_1, e_2),$$

donde  $\omega_2(e_2) = 1$  y  $\omega_2(e_1) = 0$ . □

El problema ahora es obtener entidades geométricas (esto es, independiente de la elección del marco) de las formas  $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$ . Para eso, es conveniente ver cómo cambian tales formas bajo un cambio de marco.

**Definición 6.6.** Sea  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  otro marco en  $U$ . Si  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  tiene la misma orientación como  $\{e_1, e_2\}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= fe_1 + ge_2 \\ \bar{e}_2 &= -ge_1 + fe_2, \end{aligned}$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables en  $U$ , y  $f^2 + g^2 = 1$ ; por otra parte, si las orientaciones de  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  y  $\{e_1, e_2\}$  son opuestas, obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= fe_1 + ge_2 \\ \bar{e}_2 &= ge_1 - fe_2. \end{aligned}$$

El cambio de marco deberá tener una orientación preservada, es decir cuando las orientaciones son las mismas, la matriz de cambio de base tiene determinante 1. Además, el sistema será ortonormal, es decir,  $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$  y  $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle$ .

**Lema 6.5.** Si  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  y  $\{e_1, e_2\}$  tienen la misma orientación, entonces

$$\omega_{12} = \bar{\omega}_{12} - \tau,$$

donde  $\tau = fdg - gdf$ . Si las orientaciones anteriores son opuestas entonces,

$$\omega_{12} = -\bar{\omega}_{12} - \tau.$$

*Demostración.* Si las orientaciones son las mismas, obtenemos que

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1 &= f\omega_1 + g\omega_2 \\ \bar{\omega}_2 &= -g\omega_1 + f\omega_2,\end{aligned}$$

por definición su transformación inversa esta dada por

$$\omega_1 = f\bar{\omega}_1 - g\bar{\omega}_2, \quad (6.10)$$

$$\omega_2 = g\bar{\omega}_1 + f\bar{\omega}_2. \quad (6.11)$$

Diferenciando (6.10), obtenemos

$$d\omega_1 = df \wedge \bar{\omega}_1 + fd\bar{\omega}_1 - dg \wedge \bar{\omega}_2 - gd\bar{\omega}_2.$$

Usando las ecuaciones de estructura para  $d\bar{\omega}_1$  y  $d\bar{\omega}_2$ , y el hecho de que  $\bar{\omega}_{12} = -\bar{\omega}_{21}$  y  $\bar{\omega}_1 = f\omega_1 + g\omega_2$  y  $\bar{\omega}_2 = -g\omega_1 + f\omega_2$  resulta que

$$\begin{aligned}d\omega_1 &= df \wedge \bar{\omega}_1 + f\bar{\omega}_{12} \wedge \bar{\omega}_2 - dg \wedge \bar{\omega}_2 - g(-\bar{\omega}_{12} \wedge \bar{\omega}_1) \\ &= df(f\omega_1 + g\omega_2) + f\bar{\omega}_{12} \wedge (-g\omega_1 + f\omega_2) - dg \wedge (-g\omega_1 + f\omega_2) \\ &\quad -g(-\bar{\omega}_{12} \wedge (f\omega_1 + g\omega_2)) \\ &= df \wedge \omega_1 + gdf \wedge \omega_2 - fg\bar{\omega}_{12} \wedge \omega_1 + f^2\bar{\omega}_{12} \wedge \omega_2 + gdg \wedge \omega_1 - fdg \wedge \omega_2 - g(-f\bar{\omega}_{12} \wedge \omega_1 \\ &\quad -g\bar{\omega}_{12} \wedge \omega_2) \\ &= fdf \wedge \omega_1 + gdf \wedge \omega_2 - fg\bar{\omega}_{12} \wedge \omega_1 + f^2\bar{\omega}_{12} \wedge \omega_2 + gdg \wedge \omega_1 - fdg \wedge \omega_2 \\ &\quad + fg\bar{\omega}_{12} \wedge \omega_1 + g^2\bar{\omega}_{12} \wedge \omega_2 \\ &= (f^2 + g^2)\bar{\omega}_{12} \wedge \omega_2 + (fdf + gdg) \wedge \omega_1 + (gdf - fdg) \wedge \omega_2.\end{aligned}$$

Ya que  $f^2 + g^2 = 1$ ,  $fdf + gdg = 0$  y  $-\tau = gdf - fdg$ . Así,

$$d\omega_1 = \bar{\omega}_{12} \wedge \omega_2 - \tau \wedge \omega_2 = (\bar{\omega}_{12} - \tau) \wedge \omega_2.$$

Similarmente, diferenciando (6.11), obtenemos

$$d\omega_2 = -(\bar{\omega}_{12} - \tau) \wedge \omega_1.$$

Por la unicidad de la forma de conexión, concluimos finalmente que

$$\omega_{12} = \bar{\omega}_{12} - \tau,$$

y esto prueba la primera parte del lema, el caso en el que las orientaciones son opuestas es análogo.  $\square$

Una interpretación geométrica para la 1-forma  $\tau$  está dada abajo y afirma que, a lo largo de una curva en  $U$ ,  $\tau$  es el diferencial de la “función ángulo” entre  $e_1$  y  $e_2$  a lo largo de la curva; en realidad, lo que haremos es mostrar que es posible definir tal función de una manera que sea diferenciable.

**Lema 6.6.** Sea  $p \in U \subset M$  un punto y sea  $\gamma : I \rightarrow U$  una curva tal que  $\gamma(t_0) = p$ . Sea  $\varphi_0 = \text{angulo}(e_1(p), \bar{e}_1(p))$ . Entonces

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \left( f \frac{dg}{dt} - g \frac{df}{dt} \right) dt + \varphi_0$$

es una función diferenciable tal que:

$$\cos \varphi(t) = f, \quad \text{sen } \varphi(t) = g, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad d\varphi = \gamma^* \tau.$$

*Demostración.* Primero verificaremos los enunciados más sencillos. Recuerde que la integral de una función continua es diferenciable, por lo tanto,  $\varphi(t)$  es diferenciable. Se verifica que  $\varphi(t_0) = \varphi_0$ , ya que

$$\varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} \left( f \frac{dg}{dt} - g \frac{df}{dt} \right) dt + \varphi_0 = 0 + \varphi_0 = \varphi_0.$$

Ahora mostraremos que

$$f(t) \cos \varphi(t) + \text{sen}(t)\varphi(t) = 1 \tag{6.12}$$

Para ver eso, note que a partir de la definición de  $\varphi$ , tenemos que  $\varphi' = fg' - df'$ . Así,

$$\begin{aligned} (f \cos \varphi + g \text{sen } \varphi)' &= f' \cos \varphi - f \text{sen } \varphi \varphi' + g' \text{sen } \varphi + g \cos \varphi \varphi' \\ &= f' \cos \varphi - f \text{sen } \varphi (fg' - gf') + g' \text{sen } \varphi + g \cos \varphi (fg' - gf') \\ &= f' \cos \varphi - f^2 g' \text{sen } \varphi + fgf' \text{sen } \varphi + g' \text{sen } \varphi + fgf' \cos \varphi - g^2 f' \cos \varphi \\ &= (g' + ff'g - f^2 g') \text{sen } \varphi + (f' - g^2 f' + fgg') \cos \varphi \\ &= (g' - g^2 g' - f^2 g') \text{sen } \varphi + (f' - g^2 f' - f^2 f') \cos \varphi \\ &= (g' - g'(g^2 + f^2)) \text{sen } \varphi + (f' - f'(g^2 + f^2)) \cos \varphi \\ &= (g' - g') \text{sen } \varphi + (f' - f') \cos \varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donde en la última igualdad hemos utilizado que,  $f^2 + g^2 = 1$ ,  $ff' = -gg'$ .

Por lo tanto,  $f \cos \varphi + g \text{sen } \varphi = \text{const.}$ , y por equivalencia de la hipótesis  $\varphi_0 = \text{angulo}(e_1(p), \bar{e}_1(p))$ , es decir,  $\cos \varphi_0 = f(t_0)$  y  $\text{sen } \varphi_0 = g(t_0)$

$$\begin{aligned} f(t_0) \cos \varphi(t_0) + g(t_0) \text{sen } \varphi(t_0) &= f(t_0)f(t_0) + g(t_0)g(t_0) \\ &= (f^2 + g^2)(t_0) = 1 \end{aligned}$$

concluimos (6.12).

Resulta que

$$\begin{aligned} (f - \cos \varphi)^2 + (g - \text{sen } \varphi)^2 &= f^2 + g^2 - 2f \cos \varphi - 2g \text{sen } \varphi + 1 \\ &= 2 - 2(f \cos \varphi + g \text{sen } \varphi) \\ &= 2 - 2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo que obliga

$$\begin{aligned} f - \cos \varphi &= 0 \quad \text{y} \quad g - \text{sen } \varphi = 0 \\ \cos \varphi(t) &= f(t), \quad \text{sen } \varphi(t) = g(t). \end{aligned}$$

Por último, note que

$$f(\gamma(t)) \frac{dg(\gamma(t))}{dt} - g(\gamma(t)) \frac{df(\gamma(t))}{dt} = \gamma^* \tau(t),$$

por lo tanto,  $\varphi$  puede ser escrito como

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \gamma^* \tau dt + \varphi_0(t),$$

y usando el Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos

$$d\varphi = \gamma^* \tau,$$

y el lema se sigue inmediatamente. □

Ahora estamos en condiciones de desarrollar la geometría intrínseca de superficies.

La primera observación es que (6.8) y (6.9) se deduce que en una superficie orientada, la 2-forma

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= (f\bar{\omega}_1 - g\bar{\omega}_2) \wedge (g\bar{\omega}_1 + f\bar{\omega}_2) \\ &= fg\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_1 + f^2\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 - g^2\bar{\omega}_2 \wedge \bar{\omega}_1 - fg\bar{\omega}_2 \wedge \bar{\omega}_2 \\ &= f^2\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 + g^2\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 \\ &= (f^2 + g^2)\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 \\ &= \bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 \\ &= \sigma \end{aligned}$$

no depende de la elección del marco y por lo tanto, se define globalmente en  $M^2$ . El significado geométrico de la forma  $\sigma$  es obtenido de la siguiente manera. Si  $v_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2$ ,

$v_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2$ , son vectores linealmente independientes en un punto  $p \in M$ , entonces

$$\begin{aligned} \sigma(v_1, v_2) &= \omega_1 \wedge \omega_2(v_1, v_2) \\ &= \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \omega_1(v_2) \\ \omega_2(v_1) & \omega_2(v_2) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \omega_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2) & \omega_1(a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\ \omega_2(a_{11}e_1 + a_{12}e_2) & \omega_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \text{area}(v_1, v_2) \end{aligned}$$

donde  $(v_1, v_2)$  denota el paralelogramo generado por  $v_1$  y  $v_2$ . Por eso,  $\sigma$  es llamado el **elemento de área** de  $M$

El siguiente objeto de la geometría intrínseca es motivado por el Teorema de Gauss.

**Proposición 6.2.** *Sea  $M^2$  una variedad riemanniana de dimensión 2. Para cada  $p \in M$ , podemos definir un número  $K(p)$  eligiendo un marco móvil  $\{e_1, e_2\}$  alrededor de  $p$  y acomodando*

$$d\omega_{12}(p) = -K(p)(\omega_1 \wedge \omega_2)(p).$$

Entonces  $K(p)$  no depende de la elección del marco, y es llamado **curvatura gaussiana** de  $M$  en  $p$ .

*Demostración.* Sea  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  otro marco móvil alrededor de  $p$ . Asumamos primero que las orientaciones de los dos marcos móviles son la misma, entonces

$$\omega_{12} = \bar{\omega}_{12} - \tau.$$

Ya que  $\tau = fdg - gdf$ ,  $d\tau = 0$ , donde  $d\omega_{12} = d\bar{\omega}_{12}$ . Resulta que

$$\begin{aligned} d\omega_{12} = d\bar{\omega}_{12} &\Rightarrow -K\omega_1 \wedge \omega_2 = -\bar{K}\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 \\ &\Rightarrow -K\omega_1 \wedge \omega_2 = -\bar{K}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &\Rightarrow -K\omega_1 \wedge \omega_2 + \bar{K}\omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \\ &\Rightarrow (-K + \bar{K})\omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \\ &\Rightarrow -K + \bar{K} = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$K = \bar{K},$$

como deseábamos.

Si las orientaciones son opuestas, obtenemos

$$d\omega_{12} = -d\bar{\omega}_{12}, \quad \omega_1 \wedge \omega_2 = -\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2$$

y se mantiene la misma conclusión. □

Otra entidad que no depende de la elección del marco es la derivada (covariante) de vectores.

**Definición 6.7.** *Sea  $M^2$  una variedad riemanniana y sea  $Y$  un campo vectorial diferenciable en  $M$ . Sea  $p \in M$ ,  $x \in T_p M$ , y considere la curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  con  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = x$ . Para definir la **derivada covariante**  $(\nabla_x Y)(p)$  de  $Y$  **relativo a  $x$  en  $p$** , nosotros elegimos un marco móvil  $\{e_i\}$  alrededor de  $p$  expresado  $Y(\alpha(t))$  en este marco*

$$Y(\alpha(t)) = \sum y_i(t)e_i, \quad i = 1, 2,$$



y el conjunto

$$(\nabla_x Y)(p) = \sum_i \left( \frac{dy_i}{dt}(0) + \sum_j \omega_{ji}(x)y_j(0) \right) e_i, \quad i, j = 1, 2,$$

donde se hace la convención que  $\omega_{ii} = 0$ .

**Lema 6.7.** *La derivada covariante no depende de la elección del marco.*

*Demostración.* Sea  $\{e_1, e_2\}$  y  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  dos marcos ortonormales alrededor de  $p$ . Asumamos que ellos tienen la misma orientación. Entonces

$$\begin{cases} y_1 &= f\bar{y}_1 - g\bar{y}_2 \\ y_2 &= g\bar{y}_1 + f\bar{y}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} e_1 &= f\bar{e}_1 - g\bar{e}_2 \\ e_2 &= g\bar{e}_1 + f\bar{e}_2 \end{cases} \quad (6.13)$$

donde  $Y(\alpha(t)) = \sum y_i(t)e_i = \sum \bar{y}_i(t)\bar{e}_i$ , y  $f, g$  son funciones diferenciables con  $f^2 + g^2 = 1$ . Por definición

$$\nabla_x Y = \left( \frac{dy_1}{dt} + \omega_{21}(x)y_2 \right) e_1 + \left( \frac{dy_2}{dt} + \omega_{12}(x)y_1 \right) e_2$$

donde las funciones son tomadas en  $t = 0$ . Utilizando (6.13), y el hecho que  $\omega_{12} = \bar{\omega}_{12} - \tau$  y  $ff' + gg' = 0$ , llegamos después de un cálculo largo pero sencillo que

$$\nabla_x Y = \left( \frac{d\bar{y}_1}{dt} + \bar{\omega}_{21}(x)\bar{y}_2 \right) \bar{e}_1 + \left( \frac{d\bar{y}_2}{dt} + \bar{\omega}_{12}(x)\bar{y}_1 \right) \bar{e}_2$$

que prueba el lema en este caso.

Cuando las orientaciones de los marcos son opuestas, la prueba es similar.  $\square$

La noción de derivada covariante puede usarse para dar una interpretación geométrica de la forma de conexión  $\omega_{12}$  asociada al marco móvil  $\{e_1, e_2\}$ . De hecho, ya que  $e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$ , con  $y_1 = 1$  y  $y_2 = 0$  obtenemos  $\nabla_x e_1 = \omega_{12}(x)$ , por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_x e_1, e_2 \rangle &= \langle \omega_{12}(x)e_2, e_2 \rangle \\ &= \omega_{12}(x) \langle e_2, e_2 \rangle \\ &= \omega_{12}(x). \end{aligned}$$

Así, la forma aplicada a un vector  $x$  es la  $e_2$ -componente de la derivada covariante  $\nabla_x e_1$ .

**Nota.** *La derivada covariante fue introducida por Levi-Civita en 1916. Para la métrica inducida de la superficie  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ , se puede mostrar que la derivada covariante  $\nabla_x Y$  es justo la proyección sobre el plano tangente de  $M$  de la derivada usual en  $\mathbb{R}^3$  de  $Y$  a lo largo de la curva tangente a  $x$ . Así, en cierto sentido,  $\nabla_x Y$  es la derivada de  $Y$  como “se ve desde la superficie”.*

## 6.4. Resolución de Ejercicios

**Ejercicio 6.1.** Sea  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Probar que no existe un campo vectorial diferenciable  $X$  en  $\mathbb{S}^2$ .

*Demostración.* Razonemos por contradicción. Suponga que existe el campo vectorial  $X$  distinto de cero. Sea  $e_1 = \frac{X}{\|X\|}$  y sea  $e_2$  tal que  $\{e_1, e_2\}$  es un marco ortonormal. Sea  $\{\omega_1, \omega_2\}$  el comarco asociado correspondiente. Ya que  $X$  es distinto de cero,  $\{e_1, e_2\}$  es un marco global sobre  $\mathbb{S}^2$ . Recuerde que la curvatura Gaussiana de  $\mathbb{S}^2$  es 1 en cada punto. Usando que  $\omega_1 \wedge \omega_2$  es el elemento área de  $\mathbb{S}^2$ , podemos calcular el área

$$\text{area}(\mathbb{S}^2) = \int_{\mathbb{S}^2} \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Usando la relación  $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$ , obtenemos

$$\text{area}(\mathbb{S}^2) = - \int_{\mathbb{S}^2} d\omega_{12}.$$

Ahora, aplicando el teorema de Stokes, y debido a que  $\mathbb{S}^2$  no tiene borde, tenemos que la integral será cero:

$$\text{area}(\mathbb{S}^2) = - \int_{\partial\mathbb{S}^2} \omega_{12} = 0,$$

pero esto es una contradicción, porque la superficie de una esfera unitaria tiene un área de  $4\pi$ .

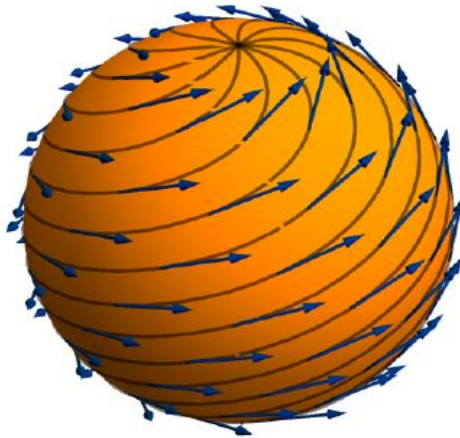


Figura 6.4. Un ejemplo de campo vectorial sobre  $\mathbb{S}^2$ .

□

**Ejercicio 6.2.** La ecuación en coordenadas cartesianas de un toro  $\mathbb{T}$  cuyo eje es el eje  $z$  es:

$$\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = r^2.$$

Calcule su curvatura gaussiana.

**Solución.** Comenzamos con la superficie parametrizada.

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = (c + a \cos v) \cos u \\ y = (c + a \cos v) \sin u \\ z = a \sin v \end{cases}$$

Calculamos las primeras derivadas,

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= (-(c + a \cos v) \sin u, (c + a \cos v) \cos u, 0)du + (-a \cos u \sin v, -a \sin u \sin v, a \cos v)dv \\ &= (c + a \cos v)(-\sin u, \cos u, 0)du + a(-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v)dv \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (-\sin u, \cos u, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v), \end{aligned}$$

con  $\omega_1 = (c + a \cos v)du$  y  $\omega_2 = adv$ . Como el vector normal se denota por

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

entonces, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ -\cos u \sin v & -\sin u \sin v & \cos v \end{pmatrix} \\ &= i \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ -\sin u \sin v & \cos v \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ -\cos u \sin v & \cos v \end{vmatrix} \\ &\quad + k \begin{vmatrix} -\sin v & \cos u \\ -\cos u \sin v & -\sin u \sin v \end{vmatrix} \\ &= (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin^2 u \sin v + \cos^2 u \sin v) \\ &= (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v(\sin^2 u + \cos^2 u)) \\ &= (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \end{aligned}$$

ahora diferenciando  $e_1, e_2, e_3$

$$\begin{aligned} de_1 &= (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0)du + (0, 0, 0)dv \\ &= \operatorname{sen} v e_2 du - \cos u e_3 du \\ de_2 &= (\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, -\cos u \operatorname{sen} v, 0)du + (-\cos u \cos v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} v)dv \\ &= -\operatorname{sen} v e_1 du - e_3 dv \\ de_3 &= (-\operatorname{sen} u \cos v, \cos u \cos v, 0)du + (-\cos u \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v)dv \\ &= \cos v e_1 du + e_2 dv \end{aligned}$$

así, formamos la matriz de formas de conexión

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{sen} v du & -\cos u dv \\ \operatorname{sen} v du & 0 & -dv \\ \cos v du & dv & 0 \end{pmatrix}$$

de donde calculamos

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= -\cos u dv = -\frac{\cos u}{(c + a \cos v)} \omega_1 \\ \omega_{23} &= -dv = -\frac{1}{a} \omega_2 \end{aligned}$$

así,

$$K = \begin{vmatrix} -\frac{\cos v}{c + a \cos v} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} \end{vmatrix} = \frac{\cos v}{a(c + a \cos v)}.$$

**Ejercicio 6.3.** (El toro plano) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por

$$f(x, y) = (\cos x, \operatorname{sen} x, \cos y, \operatorname{sen} y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pruebe que:

1.  $f$  es una inmersión y  $f(\mathbb{R}^2)$  es homeomorfo a un toro.
2. El marco  $e_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $e_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$  en  $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^4$  es ortonormal en la métrica de  $f(\mathbb{R}^4)$  inducido por  $\mathbb{R}^4$ . Calcule  $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$ .
3. La curvatura gaussiana en la métrica inducida es idénticamente cero.

**Solución.**

1. Al calcular el rango de

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} x & \cos x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen} y & \cos y \end{pmatrix}$$

obtenemos 2, por lo que  $f$  es una inmersión. Se verifica fácilmente que  $f(\mathbb{R}^2)$  es homeomorfo a un toro.

2. Al hacer los debidos cálculos, siguiendo el procedimiento del ejercicio anterior obtenemos, utilizando el marco ortonormal  $e_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $e_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$  en  $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^4$  en la métrica de  $f(\mathbb{R}^4)$  inducido por  $\mathbb{R}^4$ , que  $\omega_1 = dx$ ,  $\omega_2 = dy$  y  $\omega_{12} = 0$ .

3. Al calcular la curvatura Gaussiana con los resultados anteriores obtenemos

$$K = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

así, la curvatura en la métrica inducida es idénticamente cero.

# Capítulo 7

## Teorema de Gauss-Bonnet y Teorema de Morse

### 7.1. Teorema de Gauss-Bonnet

Las consideraciones del capítulo anterior fueron estrictamente locales. Sin embargo, una de las características más interesantes de la geometría diferencial es la conexión entre las propiedades locales y las propiedades que dependen de toda la superficie. Una de las propiedades más interesante es el llamado teorema de Gauss-Bonnet que pretendemos demostrar en esta sección.

En su obra fundamental (*Considerations on curved surface*, 1827), Gauss demostró el caso especial de este teorema para los triángulos geodésicos y previó su importancia para el desarrollo de la geometría diferencial. El teorema para regiones más generales se debe a Pierre Ossian Bonnet<sup>1</sup>(*Jour. Ecole Polytech.* 19(1848), 1-146). Con la llegada de la topología, pronto quedó claro que una formulación global del teorema de Gauss-Bonnet sería un vínculo importante entre la geometría y la topología.

Antes de comenzar, queremos hacer la observación general de que a cualquier variedad diferenciable  $M^n$  (Hausdorff y con una base numerable) se le puede dar una métrica riemanniana. La prueba depende de la existencia de una partición de la unidad. Para el caso compacto ( el cual es el único que usaremos), basta definir arbitrariamente un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle^\alpha$  sobre cada entorno coordinado  $f_\alpha(U_\alpha)$  de una estructura diferenciable finita de

---

<sup>1</sup>**Pierre Ossian Bonnet** (22 de diciembre de 1819, Montpellier - 22 de junio de 1892) fue un matemático francés. Hizo algunas contribuciones importantes a la geometría diferencial de las superficies, incluido el teorema de Gauss-Bonnet.

$M^n$ , y definir

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(p) \langle \cdot, \cdot \rangle_p^{\alpha}, \quad p \in M^n,$$

donde  $\varphi_{\alpha}$  es una partición diferenciable de la unidad subordinada para la cubierta (finita)  $f_{\alpha}(U_{\alpha})$ .

Desde ahora,  $M$  denotará una variedad diferenciable compacta, orientada de dimensión dos.

**Definición 7.1.** *Sea  $X$  un campo vectorial diferenciable sobre  $M$ . Un punto  $p \in M$  es un punto singular de  $X$  si  $X(p) = 0$ ; un punto singular  $p$  es **aislado** si existe un entorno de  $p$ ,  $V \subset M$  que no contiene otro punto singular que no sea  $p$ .*

En lo que sigue, es conveniente escoger  $V$  homeomórficamente a un disco abierto en el plano.

**Lema 7.1.** *El número de puntos singulares aislados es finito.*

*Demostración.* Como la variedad  $M$  es compacta, existe un número finito de entornos coordenados  $f_i(U_i)$  tal que  $M = \bigcup_{i=1}^n f_i(U_i)$ , para cada punto singular aislado  $p \in M$ , existe un entorno de  $p$ ,  $V_p = f_i(U_i)$  que no contiene otros puntos singulares. Así, como existe un número finito de entornos coordenados, entonces existen finitos puntos singulares aislados.  $\square$

A cada punto singular aislado de  $X$ , vamos a asociar un entero llamado el **índice** de  $X$  en  $p$ , como sigue: primero, escoja una métrica riemanniana sobre  $M$ , y considere el marco móvil  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ , donde  $\bar{e}_1 = X/\|X\|$  y  $\bar{e}_2$  es un campo vectorial unitario ortogonal a  $\bar{e}_1$  y en la orientación de  $M$ . Esto determina formas diferenciales  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_{12}$  en  $V - \{p\}$ . Luego, escoja otro marco móvil  $\{e_1, e_2\}$ , en la misma orientación anterior, definido a lo largo de  $V$ , obteniendo así formas  $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$  en  $V$ . La diferencia

$$\bar{\omega}_{12} - \omega_{12} = \tau$$

está definida en  $V - \{p\}$ .

Ahora considere una curva simple cerrada  $C$  que encierra una región compacta de  $V$  conteniendo a  $p$  en su interior, y su parametrización  $\gamma : I \rightarrow C$ ;  $C$  se orientará como el borde de esa región. Por Lema (6.6) del Capítulo 6, la restricción de  $\tau$  a  $C$  es el diferencial del ángulo  $\varphi(t)$  entre  $e_1$  y  $\bar{e}_1$  a lo largo de  $C$ . Por lo tanto

$$\int_C \tau = \int_C d\varphi = 2\pi I.$$

El entero  $I$  es llamado **índice** de  $X$  en  $p$ .

Podemos usar lo anterior para formalizar la siguiente definición.

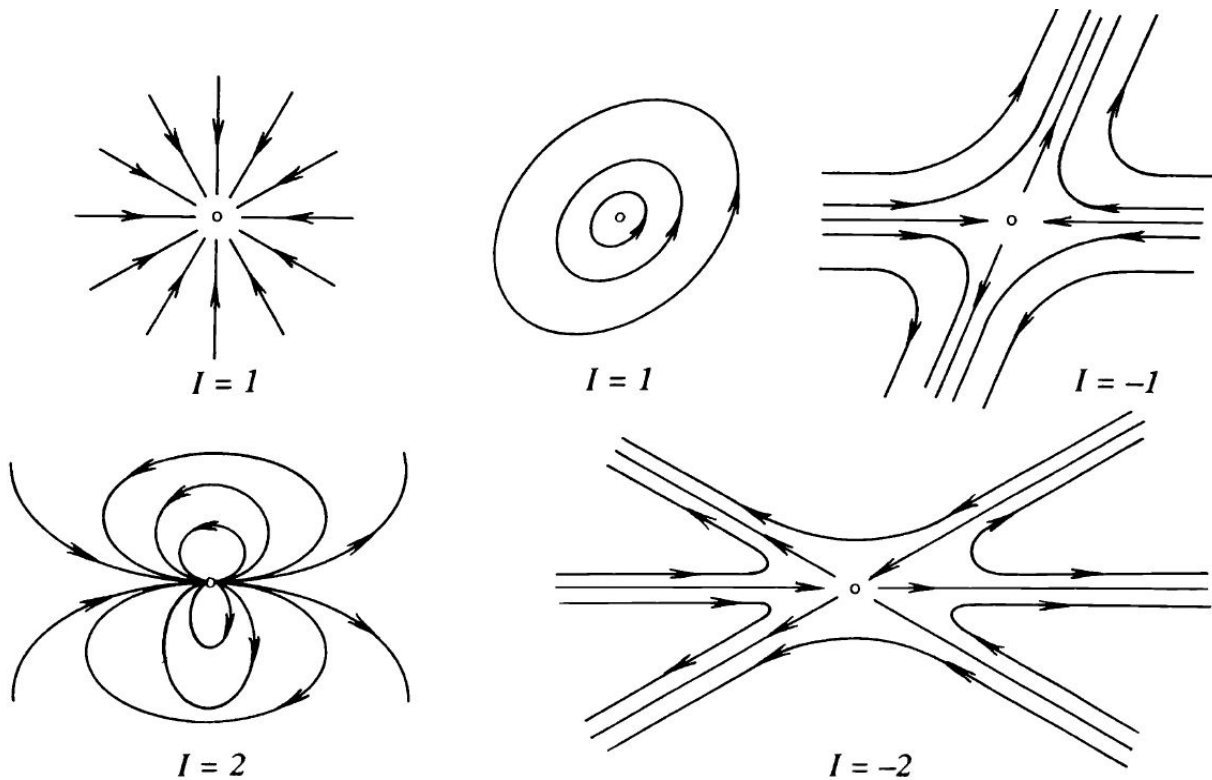


Figura 7.1. Algunos campos vectoriales en el plano con singularidades aisladas y sus índices respectivos.

**Definición 7.2.** Usando las mismas variables de arriba. El **índice**  $I$  de  $X$  en  $p$  se define como

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_C \tau.$$

Note que en la definición de índice hacemos varias elecciones, a saber, la elección de una métrica riemanniana, la elección de un marco  $\{e_1, e_2\}$ , y la elección de una curva  $C$ . Es necesario mostrar que el índice  $I$  no depende de esas elecciones. Antes de eso, veamos algunos ejemplos de singularidades de campos vectoriales en el plano. Intuitivamente, el índice es el número de “giros” dados por el campo vectorial a medida que avanzamos por una curva cerrada simple alrededor de una singularidad aislada. La figura (7.1) muestra algunos campos vectoriales en el plano (descritos por sus trayectorias) con singularidades aisladas y sus índices respectivos.

**Ejemplo 7.1.**

1. En  $M = \mathbb{R}^2$ , sea

$$X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$



El origen es la única singularidad de  $X$ . Tomando el marco estándar  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$  como el marco de referencia y  $C$  como el círculo unitario, obtenemos

$$\tau = d(\arctan \frac{y}{x}) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Si parametrizamos a  $C$  como  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_C \tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos t(\cos t dt) - \sin t(-\sin t dt)}{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2\pi} (2\pi - 0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Y, de hecho,  $X$  hace exactamente un giro completo a lo largo de  $C$ .

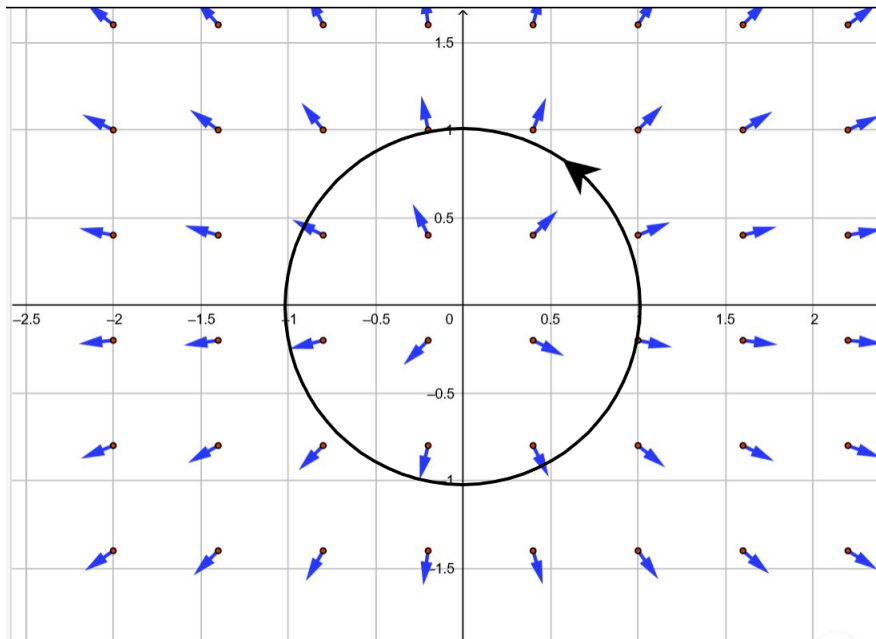


Figura 7.2. La singularidad  $(0, 0)$  del campo  $X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$  tiene índice 1.

2. Ahora considere

$$X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}.$$

El origen es un punto singular de  $X$ . Tomando a  $C$  y el marco como en el ejemplo anterior. Entonces

$$\tau = d(\arctan \frac{-y}{x}) = \frac{-xdy + ydx}{x^2 + y^2}.$$

Así,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-\cos t(\cos t dt) + \sin t(-\sin t dt)}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\cos^2 t - \sin^2 t dt \\ &= \frac{1}{2\pi}(-2\pi + 0) = -1. \end{aligned}$$

En la figura (7.3), observamos que el campo hace exactamente un giro pero en dirección opuesta.

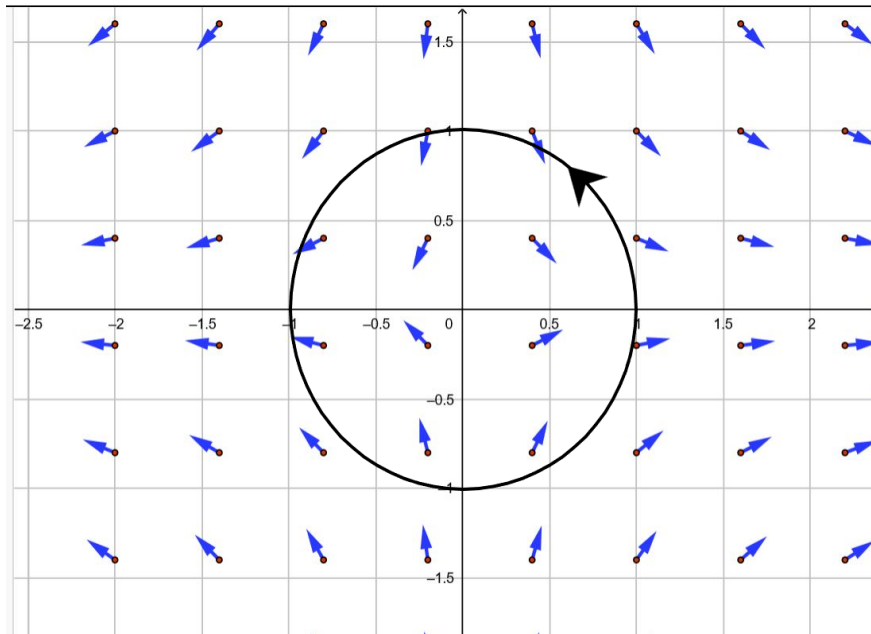


Figura 7.3. La singularidad  $(0, 0)$  del campo vectorial  $X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$  tiene índice  $-1$ .

3. Consideremos el campo

$$X(x, y) = (x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y}.$$

Tomemos la singularidad  $(0,0)$ , Tomando a  $C$  y el marco como en los ejemplos anteriores. Entonces

$$\tau = d\left(\arctan \frac{2xy}{x^2 - y^2}\right) = \frac{2xdy - 2ydx}{(x^2 + y^2)}.$$

Así,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2 \cos t (\cos t dt) - 2 \operatorname{sen} t (-\operatorname{sen} t dt)}{(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 \cos^2 t + 2 \operatorname{sen}^2 t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{\pi} (2\pi - 0) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Observamos en la figura (7.4), que el campo  $X$  da dos giros a lo largo y en la misma dirección de la curva  $C$ .

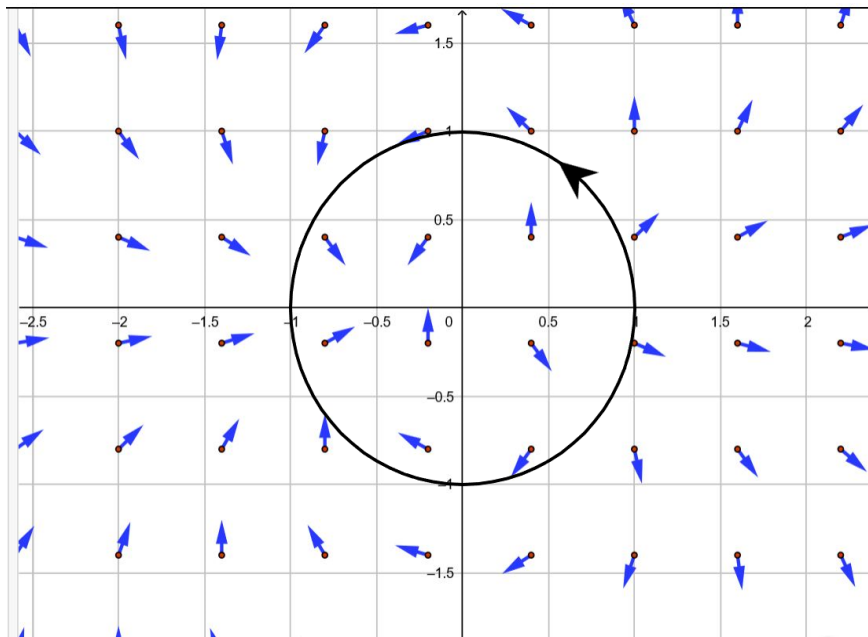


Figura 7.4. La singularidad  $(0,0)$  del campo  $X(x, y) = (x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y}$  tiene índice 2.

**Lema 7.2.** *La definición de  $I$  no depende de la curva  $C$ .*

*Demostración.* Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos curvas simples cerradas al rededor de  $p$ , como en la definición de índice. Asuma primero que  $C_1$  y  $C_2$  no se intersectan y considere  $\Delta$  como la región anular acotada por  $C_1$  y  $C_2$  (Fig.(7.5)). Sean  $I_1$  y  $I_2$  los índices calculados con  $C_1$  y  $C_2$ ,

respectivamente. Por Teorema de Stokes, y usando el hecho que  $d\tau = 0$ , obtenemos

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \tau - \frac{1}{2\pi} \int_{C_2} \tau = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{C_1} \tau - \int_{C_2} \tau \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Delta} \tau = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} d\tau = 0,$$

por lo que

$$I_1 = I_2.$$

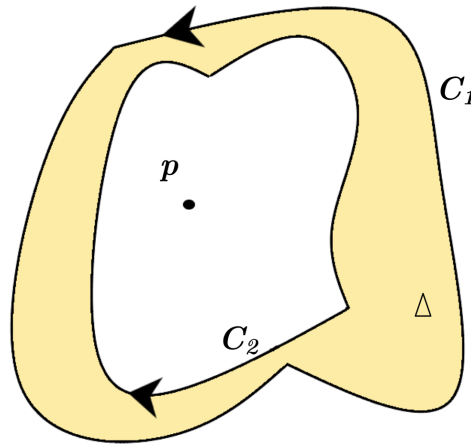


Figura 7.5. En el caso que dos curvas cerradas simples no se intersecan.

Si  $C_1$  y  $C_2$  se intersecan, escogemos una curva  $C_3$  en el interior de la intersección de  $C_1$  y  $C_2$ , de manera que  $C_3$  esté alrededor de  $p$  (Fig. (7.6)). Por el resultado del caso anterior obtenemos que  $I_3 = I_1$  y que  $I_3 = I_2$ , por lo que

$$I_3 = I_2 = I_1.$$

□

**Lema 7.3.** *La definición de  $I$  no depende de la elección del marco  $\{e_1, e_2\}$ . Más precisamente, sea  $S_r = \partial B_r$  el borde de un disco de radio  $r$  con centro en  $p$ , y considere el marco  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  de la definición. Entonces, el límite*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{S_r} \bar{\omega}_{12} = \bar{I}$$

existe, y  $\bar{I} = I$ .

*Demostración.* Primero, probemos que el límite existe. Para ello usemos el criterio de convergencia de Cauchy. Suponga, sin pérdida de generalidad que,  $r_2 < r_1$ . Sean  $S_{r_1}, S_{r_2}$  círculos

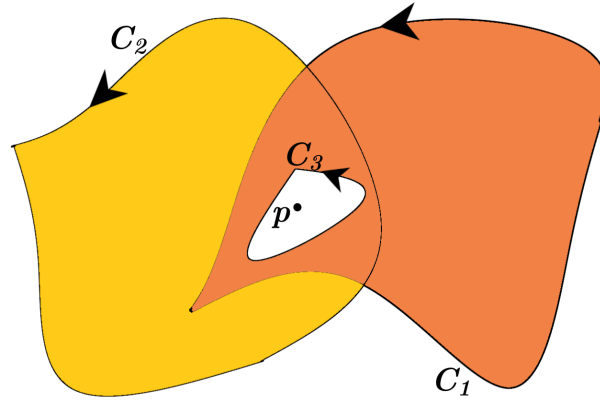


Figura 7.6. En el caso que dos curvas cerradas simples se intersecan, se construye  $C_3$  que encierre  $p$ .

concéntricos, y sea  $\Delta$  la región anular acotada por  $S_{r_1}$  y  $S_{r_2}$  (Parecido a la fig. (7.5)). Usando el Teorema de Stokes, obtenemos que

$$\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} - \int_{S_{r_2}} \bar{\omega}_{12} = \int_{\partial\Delta} \bar{\omega}_{12} = \int_{\Delta} d\bar{\omega}_{12} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } r_1, r_2 \rightarrow 0.$$

Note que  $\bar{\omega}_{12}$  no está definida en  $B_{r_2}$ ; sin embargo,  $d\bar{\omega}_{12} = -K\sigma$  es ciertamente definida en todas partes. Se deduce que cualquier sucesión

$$\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12}, \dots, \int_{S_{r_n}} \bar{\omega}_{12}, \dots,$$

con  $\{r_n\} \rightarrow 0$ , es una sucesión de Cauchy, por lo tanto converge. Así, el límite

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r} \bar{\omega}_{12} = \bar{I}$$

existe.

Ahora, mostremos que  $I = \bar{I}$ . Sea  $r_1$  arbitrariamente pequeño pero fijo y sea  $r_2 < r_1$ . Tomemos el límite cuando  $r_2$  tiende a cero. Entonces por Teorema de Stokes tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} &= \lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{S_{r_1} - S_{r_2}} \bar{\omega}_{12} + \lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{S_{r_2}} \bar{\omega}_{12} \\ &= \int_{B_{r_1}} d\bar{\omega}_{12} + 2\pi\bar{I} = - \int_{B_{r_1}} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 + 2\pi\bar{I}. \\ \int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} &= - \int_{B_{r_1}} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 + 2\pi\bar{I}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Recuerde que  $\bar{\omega}_{12} = \omega_{12} + \tau$ . Calculando la integral sobre  $S_{r_1}$  tenemos

$$\begin{aligned} \int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} &= \int_{S_{r_1}} \omega_{12} + \int_{S_{r_1}} \tau = \int_{B_{r_1}} d\omega_{12} + 2\pi I = - \int_{B_{r_1}} K\omega_1 \wedge \omega_2 + 2\pi I. \\ \int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} &= - \int_{B_{r_1}} K\omega_1 \wedge \omega_2 + 2\pi I. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Al igualar (7.1) con (7.2), obtenemos

$$\begin{aligned} - \int_{B_{r_1}} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 + 2\pi \bar{I} &= - \int_{B_{r_1}} K\omega_1 \wedge \omega_2 + 2\pi I \\ \bar{I} &= I. \end{aligned}$$

□

**Lema 7.4.** *El índice no depende de la métrica.*

*Demostración.* Sean  $\langle, \rangle_0$  y  $\langle, \rangle_1$  dos métricas riemannianas sobre  $M$ . Sea  $t \in [0, 1]$  y defina para todo  $t$  la siguiente métrica:

$$\langle, \rangle_t = t\langle, \rangle_1 + (1-t)\langle, \rangle_0.$$

Entonces es fácil verificar que  $\langle, \rangle_t$  es un producto interno positivo definido sobre  $M$  el cual varía diferencialmente con  $p$ . Por lo tanto,  $\langle, \rangle_t$  es una familia 1-paramétrica de métricas sobre  $M$  que inicia con  $\langle, \rangle_0$  y termina con  $\langle, \rangle_1$  (esto es equivalente a decir que  $\langle, \rangle_t$  es una homotopía entre métricas riemannianas  $\langle, \rangle_0$  y  $\langle, \rangle_1$  y que además es una métrica riemanniana sobre  $M$  para cada  $t \in [0, 1]$ ).

Sean  $I_0$ ,  $I_t$  e  $I_1$  los índices correspondientes. Por el proceso de ortonormalización de Gramm-Schmidt se obtienen marcos y comarcos que dependen continuamente sobre  $t$ . Por lo tanto, las formas de conexión son también continuas. Esto significa que la diferencia  $\tau$  y  $I_t$  es también continua. Y como el índice es un valor entero. La única función continua y de valor entero es la función constante, es decir,  $I_t = \text{const.}$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Por lo tanto,  $I_0 = I_1$ , como queríamos. □

Podemos ahora establecer y probar el Teorema de Gauss-Bonnet de la siguiente manera.

**Teorema 7.1. (Gauss-Bonnet)**

*Sea  $M^2$  una variedad diferenciable compacta orientada. Sea  $X$  una campo vectorial diferenciable sobre  $M$  con puntos singulares aislados  $p_1, \dots, p_k$  cuyos índices son  $I_1, \dots, I_k$ . Entonces, para alguna métrica riemanniana sobre  $M$ ,*

$$\int_M K\sigma = 2\pi \sum_{i=1}^k I_i,$$

donde  $K$  es la curvatura Gaussiana de la métrica y  $\sigma$  es su elemento de área.

*Demostración.* Considere en  $M^2 - \cup_i \{p_i\}$  el marco  $\{\bar{e}_1 = \frac{X}{\|X\|}, \bar{e}_2\}$ , donde  $\bar{e}_2$  es un campo vectorial unitario ortogonal a  $\bar{e}_1$  en la orientación de  $M$ . Denotemos por  $B_i$  una bola con centro en  $p_i$ , que es tal que no contiene un punto singular que no sea  $p_i$ . Calculando la integral de  $d\bar{\omega}_{12}$ , obtenemos que

$$\int_{M - \cup_i B_i} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 = - \int_{M - \cup_i B_i} d\bar{\omega}_{12},$$

al usar el teorema de Stokes debemos tener en cuenta que, como  $\partial B_i$  tiene la orientación inducida por  $B_i$  (esta es opuesta a la orientación de  $M - B_i$ ), esto hace un cambio de signo, por lo que obtenemos

$$- \int_{M - \cup_i B_i} d\bar{\omega}_{12} = - \left( \int_{\cup_i \partial B_i} \bar{\omega}_{12} + \int_{\partial M} \bar{\omega}_{12} \right),$$

como  $\partial M = \emptyset$ , la integral sobre  $\partial M$  es cero, y dado que todas las bolas  $B_i$  son disjuntas, tenemos que

$$\int_{\cup_i \partial B_i} \bar{\omega}_{12} = \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_i} \bar{\omega}_{12}.$$

Ahora tomemos el límite cuando el radio de las bolas tienden a cero. Note que  $\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2$  es independiente de la elección del marco y representa un “elemento de área” de la variedad. Debido a que el área de las bolas  $B_i$  tienden a cero, la integral

$$\int_{M - \cup_i B_i} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 \longrightarrow \int_M K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2.$$

y

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\cup_i \partial B_i} \bar{\omega}_{12} = \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_i} \bar{\omega}_{12} = \sum_{i=1}^k \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B_i} \bar{\omega}_{12}.$$

Por Lema (7.3) obtenemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B_i} \bar{\omega}_{12} = 2\pi I_i,$$

por lo tanto,

$$\int_M K\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{i=1}^k \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B_i} \bar{\omega}_{12} = 2\pi \sum_{i=1}^k I_i.$$

□

**Nota.** El lado derecho no depende del campo vectorial  $X$  y el lado izquierdo no depende de la métrica. Por lo tanto, obtenemos la sorprendente conclusión que  $\sum I_i$  es la misma para todo campo vectorial con singularidades aisladas, y  $\int_M K\sigma$  es la misma para toda métrica riemanniana sobre  $M$ .

**Definición 7.3.** El número

$$\sum_{i=1}^k I_i$$

es llamada la **característica de Euler-Poincaré** de  $M$ , y es también denotado por  $\chi(M)$ .

**Corolario 7.1.**  $\chi(M)$  es invariante por difeomorfismos, y  $\frac{1}{2\pi} \int_M K \sigma$  no depende de la métrica de  $M$  y se mantiene igual ante dicha invariante.

Otra manera de introducir  $\chi(M)$ , es la siguiente.

**Definición 7.4.** Una **triangulación de  $M$** , donde  $M$  es una superficie compacta, es una descomposición de  $M$  en un número finito de triángulos curvilíneos de tal manera que la intersección de dos de tales triángulos es bien, vacía, un borde en común o un vértice común de dichos triángulos.

**Definición 7.5.** Definimos

$$\chi(M) = V - A + F,$$

donde  $F$  denota el número total de triángulos,  $V$  el número total vértices y  $A$  el número total de aristas de tal triangulación.

**Teorema 7.2.** Si dos superficies son invariantes bajo homotopía, entonces tienen la misma característica de Euler-Poincaré.

*Demostración.* Vea la prueba en [9, página 44] □

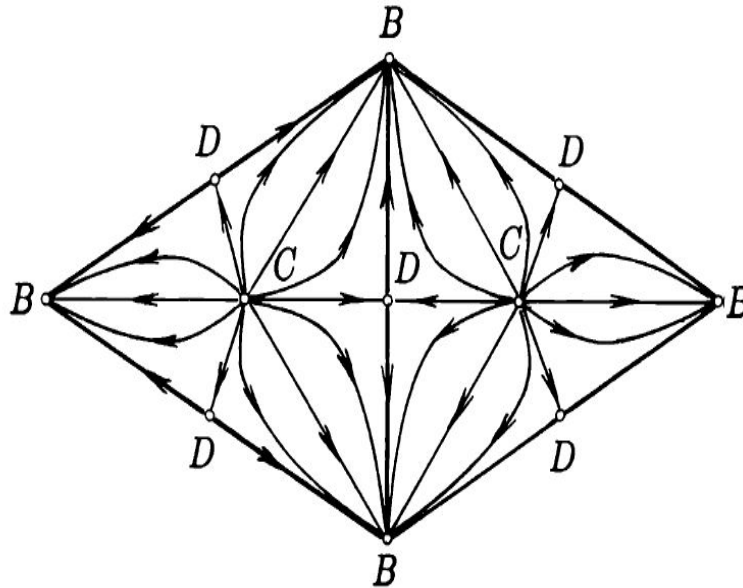


Figura 7.7. Mostramos el campo en dos triángulos de la triangulación.



**Lema 7.5.** Cuando  $M$  es orientable, la definición (7.5) concuerda con la definición (7.4).

*Demostración.* Escoja una triangulación para  $M$ , y considere el campo vectorial en  $M$  indicado por sus trayectorias en la Fig. (7.7) (en realidad sólo mostramos el campo en dos triángulos de la triangulación). Los índices de los campos vectoriales en los puntos  $B, C$  y  $D$  son, respectivamente, 1, 1 y  $-1$ . Por lo tanto, la suma total de los índices es

$$\sum_i I_i = V - A + F.$$

ya que  $\sum_I I_i = \chi(M)$  no depende del campo elegido, concluimos que  $V - A + F = \chi(S)$ .  $\square$

**Ejemplo 7.2.** Calcule la característica de Euler-Poincaré de la esfera  $\mathbb{S}^2$  y el toro  $\mathbb{T}$ .

Para la esfera, escojamos la métrica inducida por  $\mathbb{R}^3$  sobre  $\mathbb{S}^2 = \{p \in \mathbb{R}^3; \|p\| = 1\}$  en la cual  $K = 1$  (véase Ejemplo (6.2)). El área de dicha superficie es  $4\pi$ , por lo que

$$\int_{\mathbb{S}^2} K \sigma = \int_{\mathbb{S}^2} 1(4\pi) = 4\pi,$$

y por teorema de Gauss-Bonnet

$$4\pi = 2\pi\chi(\mathbb{S}^2),$$

y así,  $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ .

Si usamos la definición (7.5), sabiendo que la esfera puede triangularse en 8 triángulos, al trazar el ecuador y el meridiano; así, obtenemos de la triangulación, 6 vértices y 12 aristas,

$$\chi(\mathbb{S}^2) = V - A + F = 6 - 12 + 8 = 2.$$

Por lo tanto, obtenemos la misma característica de Euler-Poincaré al usar el teorema de Gauss-Bonnet y la definición (7.5).

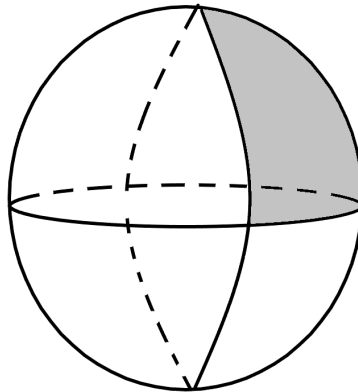


Figura 7.8. Triangulación de la esfera  $\mathbb{S}^2$  con 8 triángulos.

Para el toro  $\mathbb{T}$ . Sabemos que es posible introducir en  $\mathbb{T}$  una métrica de tal forma que la curvatura Gaussiana sea  $K = 0$  (véase Ejercicio (6.3)). Ya que  $\chi(\mathbb{T})$  no depende de la métrica, obtenemos que

$$\chi(\mathbb{T}) = 0.$$

En la figura (7.9) mostramos una triangulación de un toro, considerado como un cuadrado con los lados opuestos identificados; tal triangulación tiene 18 triángulos, 9 vértices y 27 aristas, por lo que, al usar la definición (7.5), obtenemos

$$\chi(\mathbb{T}) = V - A + F = 9 - 27 + 18 = 0.$$

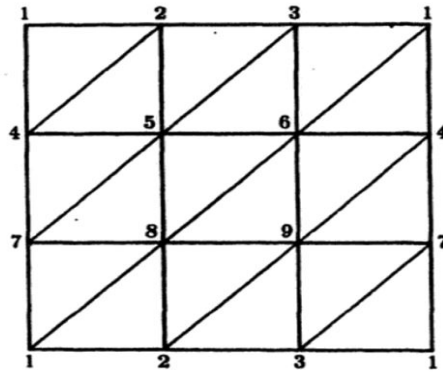


Figura 7.9. Una triangulación del toro  $\mathbb{T}$ .

## 7.2. El Teorema de Morse

Estrechamente relacionado con el teorema de Gauss-Bonnet es una relación, debida a *Marston Morse*<sup>2</sup>, entre puntos críticos de una cierta clase de funciones en una superficie compacta  $M^2$  y la topología de  $M^2$ . En esta sección intentaremos establecer dicha relación.

El tipo de funciones que tomaremos en cuenta pueden describirse como sigue. Como siempre,  $M^2$  denotará una variedad diferenciable compacta orientada de dimensión 2.

**Definición 7.6.** Sea  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable sobre  $M^2$ . El punto  $p \in M$  es un **punto crítico** de  $f$  si  $df_p = 0$ . Si escogemos alguna métrica sobre  $M^2$ , definimos un campo vectorial  $\text{grad}(f)$  por

$$\langle \text{grad}(f)(p), v \rangle = df_p(v), \text{ para algún } v \in T_p M^2.$$

<sup>2</sup>**Harold Calvin Marston Morse** (24 de marzo de 1892-22 de junio de 1977) fue un matemático estadounidense conocido por su trabajo sobre el cálculo de variaciones generalizado, un tema en el que introdujo la técnica de la topología diferencial que ahora se conoce como “Teoría de Morse”.

**Lema 7.6.**  *$p$  es un punto crítico de  $f$  si y sólo si, para cualquier métrica sobre  $M^2$ ,  $p$  es un punto singular del  $\text{grad}(f)$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$

Suponiendo a  $p$  un punto crítico de  $f$ , obtenemos  $df_p(v) = 0, \forall v \in T_p M$ , así,

$$0 = \langle \text{grad}(f)(p), v \rangle,$$

y por definición de producto interno,  $\text{grad}(f)(p) = 0$ , por lo que  $p$  es un punto singular del campo  $\text{grad}(f)$ .

$\Leftarrow$

Suponiendo a  $p$  como un punto singular del campo  $\text{grad}(f)$ , obtenemos que  $\text{grad}(f)(p) = 0$ , así,

$$df_p(v) = \langle 0, v \rangle = 0, \forall v \in T_p M.$$

Por lo tanto  $p$  es punto crítico de  $f$ . □

**Definición 7.7.** *Un punto crítico  $p$  de  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es llamado **no degenerado** si para toda parametrización  $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M^2$  alrededor de  $p = g(0, 0)$ , tenemos que  $\det(A) \neq 0$ , donde  $A$  es la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2(f \circ g)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2(f \circ g)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2(f \circ g)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2(f \circ g)}{\partial y^2} \end{pmatrix} (0, 0), \quad (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2.$$

Ya que en un punto crítico la primera derivada se desvanece, es fácil verificar que el hecho que  $\det(A) \neq 0$  no depende de la parametrización  $g$ .

Lo primero se verifica fácilmente al tomar el diferencial de la 0-forma  $f$ , de la siguiente manera

$$df_p(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) dx_p + \frac{\partial f}{\partial y}(p) dy_p = 0,$$

note que los elementos  $\{dx_p, dy_p\}$  son base del espacio dual del espacio tangente en  $p$ , así,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Los puntos críticos no degenerados son el tipo más simple de puntos críticos.

El comportamiento de la función  $f \circ g = h$  en un entorno de tal punto puede ser descrito usando la expansión de Taylor:

$$\begin{aligned} d = h(x, y) - h(0, 0) &= \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_0 x + \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)_0 y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_0 x^2 \\ &+ \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right)_0 xy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right)_0 y^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_0 x^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right)_0 xy + \left( \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right)_0 y^2 \right\} \end{aligned}$$

De hecho, si  $x^2 + y^2$  es suficientemente pequeño, y  $\det(A) \neq 0$ , el signo de  $d$  está determinado por el signo de la forma cuadrática en el lado derecho. Así, si  $\det(A) > 0$ , tenemos una de las siguientes alternativas:

- $d < 0$  en algún entorno de  $p$ ;  $p$  es entonces un **punto máximo** para  $f$ .
- $d > 0$  en algún entorno de  $p$ ;  $p$  es entonces un **punto mínimo** para  $f$ .

De otra manera, si  $\det(A) < 0$ , entonces existen exactamente dos direcciones distintas para que dicha forma cuadrática se desvanezca; para todas las demás direcciones,  $d$  es positiva (una dirección de mínimo) o negativa (una dirección de máximo). Tal punto es llamado un **punto de ensilladura**.

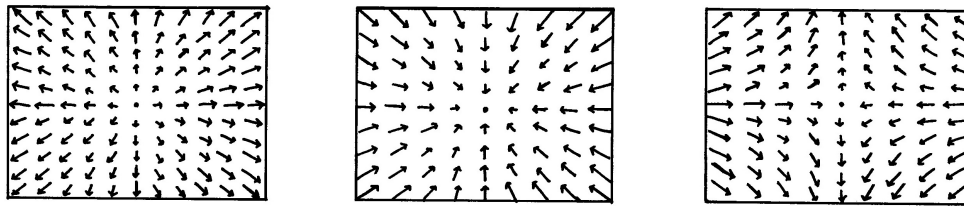


Figura 7.10. El campo vectorial según el punto crítico mínimo, máximo o punto de silla.

Ahora, podemos establecer la relación que queremos probar.

**Teorema 7.3. (Morse).**

Sea  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable sobre una superficie compacta orientada  $M^2$  tal que todos sus puntos críticos son no degenerados. Denotaremos por  $M, m,$  y  $s$  el número de puntos máximos, mínimos y sillas, respectivamente, de  $f$ . Entonces  $M - s + m$  no depende de  $f$ ; más precisamente,

$$M - s + m = \chi(M^2).$$

Antes de entrar en la prueba, necesitamos algunas consideraciones preliminares.

Desde ahora, asuma que hemos escogido una métrica riemanniana sobre  $M^2$ . Como hemos visto,  $p$  es un punto crítico de  $f$  si y sólo si el campo vectorial  $\text{grad}(f)$  tiene una singularidad en  $p$ . ¿Cómo se refleja el hecho de que  $p$  es un punto crítico no degenerado en el campo  $\text{grad}(f)$ ? Para responder esa pregunta, necesitamos una definición.

**Definición 7.8.** Sean  $X$  un campo vectorial diferenciable sobre  $M^2$ ,  $p$  un punto singular de  $X$  y  $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  una parametrización alrededor de  $p = g(0, 0)$ . En la base,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ ,  $(x, y) \in U$ , asociada a la parametrización  $g$ , podemos escribir a  $X$  como

$$X = \alpha(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \beta(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son funciones diferenciables en  $U$ , y, ya que  $p$  es un punto singular, se tiene que

$$X(p) = \alpha(0,0) \frac{\partial}{\partial x} + \beta(0,0) \frac{\partial}{\partial y} = 0,$$

así,  $\alpha(0,0) = \beta(0,0) = 0$ . Sea  $A_g$  la matriz de la **parte lineal** de  $X$ ,

$$A_g = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0 & \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)_0 \\ \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)_0 & \left( \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)_0 \end{pmatrix}$$

Decimos que  $p$  es una **singularidad simple** de  $X$  si  $\det(A_g) \neq 0$ .

**Lema 7.7.** *La definición de singularidad simple no depende de la parametrización.*

Podemos responder ahora nuestra pregunta.

**Proposición 7.1.** *Sea  $p \in M^2$  un punto crítico de una función diferenciable  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sobre una variedad riemanniana  $M^2$ . Entonces  $p$  es un punto crítico no degenerado de  $f$  si y sólo si  $p$  es una singularidad simple de  $\text{grad}(f)$ .*

*Demostración.* Sea  $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M^2$  una parametrización alrededor de  $p = g(0,0)$  tal que  $\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = 0$ , para todo  $(x,y) \in U$  (tal parametrización siempre existe (revise [1, página 187])). Calculemos  $\text{grad}(f)$  en esta parametrización.

Sea  $\text{grad}(f) = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}$ , y sea  $Y = y_1 \frac{\partial}{\partial x} + y_2 \frac{\partial}{\partial y}$  un vector arbitrario de  $T_{g(x,y)}M^2$ . Por la definición,

$$\langle \text{grad}(f), Y \rangle = df(Y),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} df(Y) = \langle \text{grad}(f), Y \rangle &= \left\langle \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}, y_1 \frac{\partial}{\partial x} + y_2 \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\ &= \alpha \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, y_1 \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \alpha \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, y_2 \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle + \beta \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, y_1 \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \beta \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, y_2 \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\ &= \alpha y_1 \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \alpha y_2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle + \beta y_1 \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \beta y_2 \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\ &= \alpha y_1 \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + 0 + 0 + \beta y_2 \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\ &= \alpha y_1 \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \beta y_2 \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \end{aligned}$$

vamos a denotar  $\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle = g_{11}$  y  $\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = g_{22}$ , por otro lado si  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x, y) \mapsto f(g(x, y))$  obtenemos

$$\begin{aligned} df(Y) &= \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x} dx(Y) + \frac{\partial(f \circ g)}{\partial y} dy(Y) \\ &= \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x} dx(y_1 \frac{\partial}{\partial x} + y_2 \frac{\partial}{\partial y}) + \frac{\partial(f \circ g)}{\partial y} dy(y_1 \frac{\partial}{\partial x} + y_2 \frac{\partial}{\partial y}) \\ &= \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x} y_1 + \frac{\partial(f \circ g)}{\partial y} y_2, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x} y_1 + \frac{\partial(f \circ g)}{\partial y} y_2 &= \alpha y_1 g_{11} + \beta y_2 g_{22}; \quad \forall (y_1, y_2) \\ \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x} y_1 - \alpha y_1 g_{11} + \frac{\partial(f \circ g)}{\partial y} y_2 - \beta y_2 g_{22} &= 0 \\ \left( \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x} \frac{1}{g_{11}} - \alpha \right) y_1 g_{11} + \left( \frac{\partial(f \circ g)}{\partial y} \frac{1}{g_{22}} - \beta \right) y_2 g_{22} &= 0 \end{aligned}$$

Luego, como  $Y$  es arbitrario eligiendo  $y_1 = 1$  y  $y_2 = 0$  o  $y_1 = 0$  y  $y_2 = 1$ , obtenemos

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x} \frac{1}{g_{11}} - \alpha = 0, \quad \frac{\partial(f \circ g)}{\partial y} \frac{1}{g_{22}} - \beta = 0,$$

y así,

$$\alpha = \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x} \frac{1}{g_{11}}, \quad \beta = \frac{\partial(f \circ g)}{\partial y} \frac{1}{g_{22}},$$

se obtiene

$$\text{grad}(f) = \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x} \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial(f \circ g)}{\partial y} \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Observe ahora que es posible elegir la parametrización  $g$  para que, en  $p$ ,  $g_{11}(p) = g_{22}(p) = 1$ . Así, la parte lineal de  $\text{grad}(f)$  está dada en esta parametrización, por

$$A_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2(f \circ g)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2(f \circ g)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2(f \circ g)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2(f \circ g)}{\partial y^2} \end{pmatrix} (0, 0).$$

Ahora basta observar que ambos sentidos en la declaración de la Proposición son equivalente a que  $\det(A_g) \neq 0$ .  $\square$

Resulta que las singularidades simples de los campos vectoriales son todas aisladas.

**Lema 7.8.** *Sea  $p \in M^2$  una singularidad simple de un campo vectorial  $X$  sobre  $M$ . Entonces  $p$  es un punto singular aislado de  $X$ .*

*Demostración.* Sea  $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  una parametrización alrededor de  $p = g(0, 0)$ , y sea

$$X = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}$$

la expresión de  $X$  en dicha parametrización.

Considere la función  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\varphi(x, y) = (\alpha(x, y), \beta(x, y))$ . Ya que  $p$  es una singularidad simple,

$$\det(d\varphi_0) = \det \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0 & \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)_0 \\ \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)_0 & \left( \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)_0 \end{pmatrix} = \det(A_g) \neq 0, \quad \text{en } p.$$

Por el teorema de la función inversa, existen entornos  $V \subset U$  de  $(0, 0)$  donde  $\varphi$  es biyectiva. Por lo tanto, si tomamos otro punto  $(x, y) \in V$  singular,  $X(g(x, y)) = 0$  y así,

$\alpha(x, y) = \beta(x, y) = 0$ , de donde  $\alpha(0, 0) = \alpha(x, y)$  y  $\beta(0, 0) = \beta(x, y)$ , por ser  $\varphi$  inyectiva sus funciones componentes también lo son y por lo tanto  $x = y = 0$ , esto es, en  $g(V)$  no hay otro punto singular aparte de  $p$ .  $\square$

**Corolario 7.2.** *Los puntos críticos no degenerados de  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable son aislados.*

*Demostración.* Sea  $p$  un punto crítico no degenerado, entonces  $p$  es de singularidades simple, y ya que todo punto singular simple es singular aislado, todo punto crítico no degenerado es aislado.  $\square$

Del Lema (7.8) se deduce que tiene sentido hablar del índice de una singularidad simple. Mostraremos ahora son fácil calcularlos.

**Proposición 7.2.** *Sea  $p \in M^2$  un punto de singularidad simple de un campo vectorial  $X$  sobre  $M$ . Entonces el índice de  $X$  en  $p$  es, ya sea,  $+1$  (si el determinante de la parte lineal de  $X$  es positivo) o  $-1$  (si el determinante de la parte lineal de  $X$  es negativo).*

*Demostración.* Ya que el índice es local y no depende de la elección de la métrica, podemos tomar  $M^2 = \mathbb{R}^2$  con la métrica canónica, y asumir que  $p = (0, 0) = 0$ . Por lo tanto,

$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una función diferenciable con  $X(0) = 0$ .

Recordemos que la derivada de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  en un punto  $q$  es  $df_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por la formula  $df_q(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f(q + th)) - f(q)}{t}$ , por lo tanto en  $q = 0$

$$dX_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad dX_0(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(tp)}{t}, \quad p \in \mathbb{R}^2.$$

Vamos a definir una función  $F : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$F(p, t) = \begin{cases} \frac{X(tp)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ dX_0(p) & \text{si } t = 0 \end{cases}, \quad (p, t) \in \mathbb{R}^2 \times I.$$

Verificaremos que  $F$  es continua. Para confirmarlo, necesitamos el siguiente resultado del Cálculo: Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable y  $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}(tx_1, \dots, tx_n) dt \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt; \end{aligned}$$

entonces, acomodando,

$$h_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt$$

obteniendo que  $h_i$  es diferenciable,  $h_i(0, \dots, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \dots, 0)$ , y

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_i x_i h_i(x_1, \dots, x_n).$$

Se sigue, al acomodar,

$$X(x_1, x_2) = (\alpha(x_1, x_2), \beta(x_1, x_2)), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

que podemos escribir:

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, x_2) &= \sum_i x_i h_{1i}(x_1, x_2), \\ \beta(x_1, x_2) &= \sum_i x_i h_{2i}(x_1, x_2), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

donde  $h_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  son funciones diferenciables. Ya que, incluso para  $t = 0$ ,

$$F((x_1, x_2), t) = \left( \sum_i x_i h_{1i}(tx_1, tx_2), \sum_i x_i h_{2i}(tx_1, tx_2) \right),$$



concluimos que  $F$  es continua, como queríamos.

$F$  mapea continuamente el campo vectorial  $dX_0 = F(p, 0)$  a el campo vectorial  $X = F(p, 1)$ . Por lo tanto, el índice de  $X$  en 0 es igual al índice de  $dX_0$  en 0, y esto es suficiente para probar lo último.

Para ello, considere el círculo

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Si  $q_1, q_2 \in C$  y  $q_1 \neq q_2$ , ya que  $dX_0$  es no singular,  $dX_0(q_1) \neq dX_0(q_2)$ .

Si  $\det(dX_0) > 0$ , el índice  $I$  de  $dX_0$  es positivo y, al ser  $dX_0$  inyectiva no puede dar más de un giro, así, no puede ser mayor que uno; por lo tanto,  $I = 1$ .

Si  $\det(dX_0) < 0$ , el índice  $I$  de  $dX_0$  es negativo y, usando el mismo razonamiento, no puede dar más de un giro en sentido opuesto; por lo tanto,  $I = -1$ . Esto prueba la Proposición.  $\square$

Con todos estos preliminares, la prueba del Teorema de Morse es más que inmediata.

*Demostración.* (del Teorema de Morse)

Escojamos una métrica riemanniana sobre  $M$ . Ya que los puntos críticos de  $f$  son no degenerados, la singularidad de  $\text{grad}(f)$  son aislados y simples. Por lo tanto, el índice de  $\text{grad}(f)$  es 1, en un punto donde  $f$  es un máximo o un mínimo, o el índice de  $\text{grad}(f)$  es  $-1$ , en un punto silla de  $f$ . Se sigue que  $M - s + m$  es igual a la suma de los índices las singularidades de  $\text{grad}(f)$ . Por el Teorema de Gauss-Bonnet, tal suma no depende de la elección de la métrica o del campo  $\text{grad}(f)$ , y esta es igual a  $\chi(M^2)$ .  $\square$

**Ejemplo 7.3.** La función altura  $h$  sobre la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ . Está claro que  $h$  tiene dos puntos críticos, el polo norte y el polo sur.

Considerando la parametrización del hemisferio norte  $(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$  obtenemos que la función altura viene dada por  $h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , donde el polo norte se corresponde con el origen de estas coordenadas. Realizando cálculos elementales, se obtiene la matriz de segundas derivadas:

$$A_{h(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{1 - y^2}{(1 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-xy}{(1 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-xy}{(1 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{1 - x^2}{(1 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

Así, el determinante de  $A_{h(0,0)} \neq 0$ , por tanto, el polo norte es un punto crítico no degenerado. Análogamente, obtenemos que el polo sur también es no degenerado.

Ahora aplicando el teorema de Morse tenemos un punto crítico máximo y un mínimo, así

$$\begin{aligned} M - s + m &= \chi(\mathbb{S}^2) \\ 1 - 0 + 1 &= \chi(\mathbb{S}^2) \\ 2 &= \chi(\mathbb{S}^2) \end{aligned}$$

### 7.3. Resolución de Ejercicios

**Ejercicio 7.1.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ . (superficie llamada **silla del mono**) Sea  $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ . Muestre que:

- $p$  es un punto crítico aislado de  $f$ .
- $p$  es punto crítico degenerado.
- El índice del gradiente de  $f$  en  $p$  es igual a  $-2$ .

**Solución.** Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -6y, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -6xy, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -6y, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -6x. \end{aligned}$$

- Que  $p = (0, 0)$  sea punto crítico de la función  $f$  se sigue, ya que

$$df_p = \frac{\partial f(p)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(p)}{\partial y} dy = (3x^2 - 3y^2)(0, 0)dx + (-6xy)(0, 0)dy = 0.$$

Para mostrar que  $p$  es crítico aislado, debemos mostrar que existe un entorno de  $p = (0, 0)$  que no contenga otro punto crítico. Y dado que en  $df$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$  y  $\frac{\partial f}{\partial y} = -6xy$  se hacen simultáneamente cero en  $(0, 0)$ , podemos tomar cualquier entorno de  $(0, 0)$  y tenemos seguridad que él es el único punto crítico en ese entorno.

- Al calcular el determinante de la siguiente matriz

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix} = -36x^2 - 36y^2 = -36(x^2 + y^2),$$

obtenemos que  $\det(A) = 0$  en  $p = (0, 0)$ , por lo que  $p$  es degenerado.

- Calculando el  $\text{grad}(f)$ , tenemos

$$\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} = (3x^2 - 3y^2) \frac{\partial}{\partial x} + (-6xy) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Tomando el marco estándar  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$  como el marco de referencia y  $C$  como el círculo unitario, obtenemos

$$\tau = d \left( \arctan \frac{-6xy}{3x^2 - 3y^2} \right) = \frac{2ydx - 2xdy}{x^2 + y^2}.$$

Parametrizando la curva  $C$  por  $x = \cos t$  y  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Tenemos que el índice del campo  $\text{grad}(f)$  en  $p$  es,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2 \sin t(-\sin t dt) - 2 \cos t(\cos t dt)}{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= \frac{-2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{-1}{\pi} \int_0^{2\pi} dt = \frac{-1}{\pi} (2\pi - 0) = -2. \end{aligned}$$

# Bibliografía

- [1] MANFREDO. P. DO CARMO, *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alhambra, 1990. [Libro]
- [2] MANFREDO. P. DO CARMO, *Differential Forms and Applications* Springer, 1994.[Libro]
- [3] JAMES R. MUNKRES, *Topología 2 Edición* Madrid, 2002. [Libro]
- [4] GABRIELA JERONIMO, JUAN SABIA Y SUSANA TESAURI, *Álgebra lineal*. Buenos Aires, Agosto 2008. [Folleto]
- [5] RICARDO A. SÁENZ, *Análisis de Varias Variables*. Colima, Agosto 2008. [Folleto]
- [6] ANGEL MONTESDEOCA, *Apuntes de Introducción a las Variedades Diferenciables*. La Laguna, 1997. [Folleto]
- [7] TOBÍAS HUMBERTO MARTÍNEZ, *Notas de Topología General*. Universidad de El Salvador, 2016. [Folleto]
- [8] MURRAY R. SPIEGEL, SEYMOUR LIPSCHUTZ, DENNIS SPELLMAN, *Análisis vectorial 2 Edición*. México, 2009. [Libro]
- [9] ANDRIES SALM, *The Gauss-Bonnet Theorem*. Universiteit Utrecht Países Bajos, 2015. [Folleto]
- [10] O. JAIBI, *Gaussian Curvature and the Gauss-Bonnet Theorem*. Universiteit Leiden Holanda, 2013. [Folleto]
- [11] SLOBOBAN N. SIMIC, *An Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet theorem*. San Jose State University, Estados Unidos. [Folleto]
- [12] SPIVAK MICHAEL, *Cálculo en variedades*. España. 1988. [Libro]
- [13] FISCHER G, *Mathematical Model*. Vieweg. Wiesbaden, 1986. [Libro]
- [14] HISRH M., *Differential Topology*. Springer-Verlag. Berlin, 1976. [Libro]