UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

SECCIÓN DE MATEMÁTICA

TRABAJO DE GRADO:

"INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS "

PRESENTADO POR:

BRENDA ZULEYMA MARTÍNEZ SEGOVIA

INGRID LISETH RIVAS CAÑAS

JULIO ISMAEL TURCIOS RUBIO

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

DOCENTE DIRECTOR:

LIC. TOBÍAS HUMBERTO MARTÍNEZ LOVO

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, ENERO DE 2019

SAN MIGUEL EL SALVADOR CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

LIC. ROGER ARMANDO ARIAS

RECTOR

DR. MANUEL DE JESÚS JOYA

VICE-RECTOR ACADÉMICO

LIC. NELSON BERNABÉ GRANADOS

VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO

LIC. CRISTOBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ

SECRETARIO GENERAL

LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN

FISCAL GENERAL

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

ING. JOAQUÍN ORLANDO MACHUCA

DECANO

LIC. CARLOS ALEXANDER DÍAZ

VICEDECANO

LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNÁNDEZ

SECRETARIO

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

LIC.JOSÉ ALCIDES MARTÍNEZ

JEFE DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ING. DOLORES BENEDICTO SARAVIA

COORDINADOR DE LA SECCIÓN DE MATEMÁTICA

MTRO. JORGE PASTOR FUENTES CABRERA

DIRECTOR GENERAL DE PROCESOS DE GRADUACIÓN DE LA FMO

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

MSC. OSCAR ULISES LIZAMA VIGIL

COORDINADOR DE TRABAJOS DE GRADO

DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES

Y MATEMÁTICA

LIC. TOBÍAS HUMBERTO MARTÍNEZ LOVO

DOCENTE DIRECTOR

Índice general

Resumen

Se presenta una introducción a los Espacios Vectoriales Topológicos. Se cuenta con un capítulo de preliminares, en el cual se enuncian definiciones y resultados de Análisis Funcional, Álgebra y Topología, con el fin de trabajar cada resultado del tema con las herramientas necesarias a la mano y así se logre una mejor comprensión de los resultados posteriores.

El objetivo de este trabajo es estudiar los Espacios Vectoriales Topológicos, presentando los resultados básicos, estudiando la convexidad y analizando los mapeos lineales entre los Espacios Vectoriales Topológicos. Se Divide lo mencionado anteriormente en capítulos, todo esto se hace con detalle de forma que aquellos lectores con conocimiento básico de Topología, Álgebra y Análisis Funcional pueda comprender los principales resultados.

La metodología a usar es la recopilación de información de diferentes fuentes bibliográficas.

Palabras claves: Espacio Vectorial, Filtro, Hausdorff, Compacto, Denso, Topología, Bases, Embebimiento, Convexo, Entorno, Inmediación, Variedad.

Justificación

Como estudiantes de la carrera de Licenciatura en Matemática, a lo largo de la carrera, nos encontramos con ramas de la matemática muy interesantes como el Álgebra, Análisis Funcional y Topología. Se ha estudiado y comprendido bastante de estas ramas, pero se desea trabajar más con ellas. Es así como se decide trabajar con los Espacios Vectoriales Topológicos, el cual es un tema que reúne las tres ramas antes mencionadas.

Al realizar este trabajo se tiene la oportunidad de hacer uso del conocimiento adquirido durante la carrera y además conocer estos espacios que durante la carrera no se estudian. Investigar este tema es factible puesto que hay mucha información bibliográfica disponible.

Objetivos

Objetivo General

Estudiar los Espacios Vectoriales Topológicos.

Objetivos Específicos

Presentar los resultados básicos sobre los Espacios Vectoriales Topológicos

Analizar los mapeos lineales entre Espacios Vectoriales Topológicos.

Introducir el concepto de convexidad de los Espacios Vectoriales Topológicos.

Simbología

$\mathfrak{F}$, denota un filtro

$\mathfrak{F}_a$, denota el filtro principal de a

$\mathfrak{F}_A$, denota el filtro principal de A

$f_*\mathfrak{F}$, denota el filtro compuesto por las imágenes de miembros de $\mathfrak{F}$

$f^*\mathfrak{F}$, denota el filtro generado por el conjunto de preimágenes de miembros de $\mathfrak{F}$

$\mathfrak{T}$, denota una topología

$L(\mathfrak{T})$ denota al espacio vectorial topológico $(L, \mathfrak{T})$

$int(U), \overset{o}{U}$, denota el interior de U

$\overline{U}$, denota la clausura de U

$\mathcal{N}_x$, denota el filtro de entornos de x

$\mathfrak{U}$, denota una uniformidad

$U(a)$, denota que U es un entorno de a

$M + M$, denota el conjunto $\{a + b : \ a, b \in M\}$

$M - M$, denota el conjunto $\{a - b : \ a, b \in M\}$

λA, denota el conjunto $\{\lambda a : \ a \in A\}$

L^*, denota el dual algebraico de L

$x + M$, denota el conjunto $\{x + m : \ m \in M\}$

$\mathfrak{B}_x$, denota una base de entornos de x

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Topología General

Definición 1. *Sea X un conjunto. Un conjunto $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de X es llamado un **filtro** sobre X si satisface los siguientes axiomas:*

1) $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.

2) $F \in \mathfrak{F}$ y $F \subset G \subset X$ implica $G \in \mathfrak{F}$.

3) $F, G \in \mathfrak{F}$ implica que $F \cap G \in \mathfrak{F}$.

Ejemplo 1. *Dado un conjunto X, $\mathfrak{F} = \{X\}$ es el filtro indiscreto.*

Ejemplo 2. *Dado un conjunto X y $a \in X$, $\mathfrak{F}_a = \{U \subset X : a \in U\}$ es el filtro principal en a.*

Ejemplo 3. *Dado un conjunto X y $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $\mathfrak{F}_A = \{U \subset X : A \subset U\}$ es el filtro principal en A.*

Ejemplo 4. *Dado un conjunto X infinito, $\mathfrak{F}_{cof} = \{A \subset X : X - A \; es \; finito\}$ es el filtro cofinito.*

Ejemplo 5. *Dado un conjunto X no contable, $\mathfrak{F}_{coc} = \{A \subset X : X - A \text{ es contable}\}$ es el filtro contable.*

Ejemplo 6. *Dado un conjunto X, $\mathcal{P}(X)$ no es un filtro de X, ya que $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$.*

Definición 2. *Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre un conjunto X. Un refinamiento de $\mathfrak{F}$ es un filtro $\mathfrak{F}'$ sobre X tal que cada miembro de $\mathfrak{F}$ es también un miembro de $\mathfrak{F}'$.*

Definición 3. *Un conjunto $\mathfrak{B}$ de subconjuntos de X es un **filtro base** si :*
1) $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathfrak{B}$.
2) Si $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathfrak{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X y sea $f : X \longrightarrow X'$ una función. La colección $f_*\mathfrak{F} = \{f(F) : F \in \mathfrak{F}\}$ es un filtro sobre X'. Si $X \subset X'$ y f es la función inclusión nos referimos al filtro $f_*\mathfrak{F}$ como la extensión de $\mathfrak{F}$ sobre X'. En la otra dirección. Sea X' un espacio y $f : X' \longrightarrow X$ una función. Si las imágenes inversas de los miembros de $\mathfrak{F}$ son no vacías, entonces las condiciones para ser un filtro base se satisfacen y el filtro sobre X' generado por las imágenes inversas de los miembros de $\mathfrak{F}$ es llamado filtro inducido y se denota $f^*\mathfrak{F}$.

Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado no vacío. X es llamado **dirigido bajo** $\leq$ si cada subconjunto $\{x, y\}$ posee una cota superior. Si $x_0 \in X$, el subconjunto $\{x \in X : x_0 \leq x\}$ es llamado una **sección** de X, (más precisamente, la sección de X generada por x_0). Una familia $\{y_\alpha : \alpha \in A\}$ es **dirigida** si A es un conjunto dirigido; en particular las **secciones** de una familia dirigida son las subfamilias $\{y_\alpha : \alpha_0 \leq \alpha\}$, para cualquier $\alpha_0 \in A$, donde los y_α son elementos de algún conjunto.

Ejemplo 7. *Una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ en un conjunto X es dirigida y sea $n_0 \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{x_n : n_0 \leq n\}$ es una sección para la sucesión.*

Definición 4. *Un conjunto ordenado X es **inductivamente ordenado** si cada subconjunto totalmente ordenado posee una cota superior. En cada conjunto inductivamente ordenado, existen elementos máximos.*

Definición 5. *Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre un conjunto no vacío X, si $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$ entonces $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$, diremos que $\mathfrak{F}$ es maximal.*

Cada filtro base $\mathfrak{B}$ genera un único filtro $\mathfrak{F}$ sobre X tal que $F \in \mathfrak{F}$ si y sólo si $B \subset F$ para algún $B \in \mathfrak{B}$; $\mathfrak{B}$ es llamado una base para el filtro $\mathfrak{F}$. El conjunto de todos los filtros sobre un conjunto no vacío X es inductivamente ordenado por la relación $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$; si $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ se dice que $\mathfrak{F}_1$ es más grueso que $\mathfrak{F}_2$, o que $\mathfrak{F}_2$ es más fino que $\mathfrak{F}_1$. Cada filtro $\mathfrak{F}$ sobre X que es maximal con respecto a este orden, es llamado un **ultra filtro** sobre X.

Ejemplo 8. *Dado un conjunto X y $a \in X$, $\mathfrak{B}_a = \{\{a\}\}$ es base del filtro principal $\mathfrak{F}_a$.*

Ejemplo 9. *Dado un conjunto X y $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $\mathfrak{B}_A = \{A\}$ es base del filtro principal $\mathfrak{F}_A$.*

Ejemplo 10. $\mathfrak{B} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b, 0 \in (a,b)\}$ *es base de un filtro sobre $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 11. *Todo filtro es base de sí mismo.*

Ejemplo 12. $\mathfrak{B} = \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ *es base de un filtro sobre $\mathbb{R}$ llamado filtro de Fréchet sobre $\mathbb{R}$.*

Proposición 1. *Sea $\mathcal{G}$ una colección de subconjuntos de X tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $U_1,...,U_n \in \mathcal{G}$, tenemos que $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \neq \emptyset$. Entonces $\mathfrak{F} = \{U \subseteq X : \exists U_1,...,U_k \in \mathcal{G}$ tal que $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \subset U\}$, $k \in \mathbb{N}$ es un filtro que contiene a $\mathcal{G}$. El conjunto $\mathcal{G}$ es llamado una* ***subbase*** *para $\mathfrak{F}$.*

Demostración. Como $X \in \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ ya que $\forall n \in \mathbb{N}$ y $U_1,...,U_n \in \mathcal{G}$, tenemos que $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \neq \emptyset$. Sea $U \in \mathfrak{F}$ y $U \subset V \subset X$. Como $U \in \mathfrak{F}$, $\exists U_1,...,U_k$ tal que $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \subset U \subset V$, así, $V \in \mathfrak{F}$. Sean $U, V \in \mathfrak{F}$. Como $U, V \in \mathfrak{F}$, $\exists U_1,...,U_k, V_1,...,V_m \in \mathcal{G}$, $m \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \subset U$ y $\bigcap_{i=1}^{m} V_i \subset V$. Luego $(\bigcap_{i=1}^{k} U_i) \bigcap (\bigcap_{i=1}^{m} V_i) \subset U \cap V$, así, $U \cap V \in \mathfrak{F}$. Por definición $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}$. Por lo tanto, $\mathfrak{F}$ es un filtro que contiene a $\mathcal{G}$. $\square$

Lema 1. *Si $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia dirigida en X, las secciones de esta familia forman un filtro base sobre X; el correspondiente filtro es llamado el* ***filtro sección*** *de la familia.*

Demostración. Sea $C = \{x_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia dirigida en X, llamemos rango de la sección $\{\alpha \in A : \alpha \geq \lambda\} \subset A$ al conjunto $C_\lambda = \{x_\alpha : \alpha \geq \lambda\} \subset X$ y sea $\mathfrak{F} = \{C_\lambda\}$.
i)$\mathfrak{F} \neq \emptyset$ ya que $C_\alpha \in \mathfrak{F}$ y $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ puesto que $x_\lambda \in C_\lambda$, $\forall \lambda \in A$.
ii) Sea $C_{\lambda_1} \in \mathfrak{F}$, sea $B \subset X$ tal que $C_{\lambda_1} \subset B$, entonces B contiene los rangos de las secciones, asi $B \in \mathfrak{F}$,
iii) Sean C_{λ_1}, $C_{\lambda_2} \in \mathfrak{F}$, tal que si $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2}$ obtenemos el más pequeño, el cual sigue estando en $\mathfrak{F}$, así, $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2} \in \mathfrak{F}$. Por lo tanto, $\mathfrak{F}$ forma un filtro base. □

Definición 6. *Una **topología** sobre un conjunto X es una colección $\mathfrak{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

1) $\emptyset$ y X están en $\mathfrak{T}$.
2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathfrak{T}$ está en $\mathfrak{T}$.
3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathfrak{T}$ está en $\mathfrak{T}$.

Ejemplo 13. *Dado $(X, \mathfrak{T})$ y $x \in X$, $\mathfrak{F}_x$ es el filtro de entornos de x.*

Al par $(X, \mathfrak{T})$ se le llama **espacio topológico**. Los conjuntos $G \in \mathfrak{T}$ son llamados **abiertos**, sus complementos $F = X - G$ son llamados **cerrados**. Sea $A \subset X$, el conjunto $\overset{o}{A}$ que es la unión de todos los subconjuntos abiertos de A, es llamado el **interior** de A; El conjunto $\overline{A}$, el cual es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A, es llamado la **clausura** de A. Un elemento $x \in \overset{o}{A}$ es llamado **punto interior** de A, un elemento $x \in \overline{A}$ es llamado **punto adherente**.

Sean $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'$ dos topologías sobre un mismo espacio X. Si $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}'$, diremos que $\mathfrak{T}'$ es más fina que $\mathfrak{T}$ o que $\mathfrak{T}$ es más gruesa que $\mathfrak{T}'$.

Definición 7. *Si A y B son subconjuntos de X, B es **denso** relativo a A en X si $A \subset \overline{B}$, (B es **denso** en A si $B \subset A$ y $A \subset \overline{B}$).*

Definición 8. *Una familia de conjuntos de una topología $\mathfrak{T}$ es llamada **base** para la topología si todo abierto de la topología puede expresarse como unión de elementos de la base.*

Ejemplo 14. *La topología usual sobre* $X = \mathbb{R}$ *es la topología cuya base es el conjunto de intervalos abiertos* $\mathcal{A} = \{|a, b| : a \leq b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

Definición 9. *Un espacio topológico* X *es* ***separable*** *si* X *contiene un subconjunto contable y denso.*

Ejemplo 15. $\mathbb{R}$ *es un espacio separable ya que* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *y* $\mathbb{Q}$ *es denso y contable.*

Definición 10. *Un espacio topológico* X *es* ***conexo*** *si* X *no es la unión de dos subconjuntos no vacíos abiertos disjuntos. En otro caso se dice que* X *es* ***disconexo****.*

Ejemplo 16. *El vacío y los unipuntuales son conexos en cualquier espacio topológico.*

Definición 11. *Sea* X *un espacio topológico. Un subconjunto* $U \subset X$ *es un* ***entorno*** *de* x *si* $x \in \overset{o}{U}$*, y un entorno de* A*, si* $x \in A$ *implica que* $x \in \overset{o}{U}$*.*

Lema 2. *El conjunto de todos los entornos de* x *(respectivamente, de* A*) es un filtro sobre* X *llamado el* ***filtro de entornos*** *de* x *(respectivamente, de* A*) y se denota por* $\mathcal{N}_x$ *(respectivamente,* $\mathcal{N}_A$*); cada base de este filtro es una* ***base de entornos*** *de* x *(respectivamente, de* A*).*

Demostración. i) Como $X \in \mathcal{N}_x$, así $\mathcal{N}_x \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{N}_x$, dado que $x \in B$, $\forall B \in \mathcal{N}_x$.
ii) Sea $A \in \mathcal{N}_x$ y sea $B \in X$ tal que $A \subset B$, como A es entorno de x y $A \subset B$, entonces $x \in \mathring{A} \subset \mathring{B} \subset B$, así $B \in \mathcal{N}_x$.
iii) Sean A, $B \in \mathcal{N}_x$, entonces $A \cap B$ es entorno de x, así, $A \cap B \in \mathcal{N}_x$, por lo tanto, $\mathcal{N}_x$ es un filtro de entornos. $\square$

Definición 12. *Una biyección* $f : X \longrightarrow Y$ *de un espacio topológico* X *sobre otro espacio topológico* Y *tal que* $f(A)$ *es un abierto en* Y *si y sólo si* A *es abierto en* X*, es llamado un* ***homeomorfismo****;* X *e* Y *son* ***homeomorfos*** *si existe un homeomorfismo de* X *sobre* Y*.*

Definición 13. *Sean* X *e* Y *espacios topológicos y sea* $f : X \to Y$*,* f *es* ***continua*** *en* $x \in X$*, si para cada entorno* V *de* $y = f(x)$*,* $f^{-1}(V)$ *es un entorno de* x*.* f *es* ***continua*** *si* f *es continua en cada* $x \in X$*.*

Observación 1. *Si Z es también un espacio topológico y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son continuas, entonces $g \circ f : X \to Z$ es continua.*

Definición 14. *Un filtro $\mathfrak{F}$ sobre un espacio topológico X se dice que* ***converge*** *a $x \in X$ si $\mathfrak{F}$ es más fino que el filtro de entornos de x. Una sucesión en X* ***converge*** *a $x \in X$ si el filtro sección de la sucesión, converge a x.*

Ejemplo 17. *Sea $(X, \mathfrak{T})$, un espacio topológico, el filtro de entornos de x $\mathcal{N}_x$ converge a x.*

Demostración. $\mathcal{N}_x$ converge a x dado que $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{N}_x$. □

Ejemplo 18. *Sea $(X, \mathfrak{T}_{ind})$ un espacio topológico, todo filtro converge a cualquier punto del espacio.*

Demostración. Sea $\mathfrak{F}$ un filtro y $x \in X$, luego $\mathcal{N}_x = \{X\}$. Como $x \in X$ entonces $\mathcal{N}_x \subset \mathfrak{F}$, así $\mathfrak{F}$ converge a x. Por lo tanto todo filtro converge a cualquier punto del espacio. □

Ejemplo 19. *Sea $(X, \mathfrak{T}_{cof})$ un espacio topológico, $\mathfrak{F}_{cof}$ converge a todo punto del espacio.*

Definición 15. *Sea un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X y $x \in X$, x es un* ***punto adherente*** *de $\mathfrak{F}$ si $x \in \overline{F}$ para cada $F \in \mathfrak{F}$. Un* ***punto adherente*** *de una sucesión es un punto adherente del filtro sección de dicha sucesión.*

Ejemplo 20. *Sea $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico, sea $\mathfrak{F}$ el filtro indiscreto. Entonces, para cada $x \in X$, x es un punto adherente de $\mathfrak{F}$.*

Ejemplo 21. *Sea $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico, sea $A \neq \emptyset$ y $\mathfrak{F}_A$ el filtro principal asociado a A. Entonces, x es un punto adherente de $\mathfrak{F}_A$ si y sólo si $x \in \overline{A}$.*

Sea x un punto adherente de $\mathfrak{F}_A$, entonces $x \in \overline{F}$, $\forall F \in \mathfrak{F}_A$, así x está en la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A, así $x \in \overline{A}$.

Recíprocamente, sea $x \in \overline{A}$*, sea* $F \in \mathfrak{F}_A$*, entonces* $A \subset F$*, luego* $A \subset \overline{F}$*, así* $x \in \overline{F}$*, por lo tanto,* x *es punto adherente de* $\mathfrak{F}_A$*.*

Definición 16. *Sea* X *un conjunto,* $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *una familia de espacios topológicos. Si* $\{f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha : \alpha \in A\}$ *es una familia de mapeos, de* X *en* X_α*, la* ***topología proyección*** *sobre* X *con respecto a la familia* $\{(X_\alpha, f_\alpha) : \alpha \in A\}$ *es la topología más gruesa en la cual cada* f_α *es continua. También, si* $\{g_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X : \alpha \in A\}$ *es una familia de mapeos, de* X_α *a* X *respectivamente, la* ***topología inductiva*** *con respecto a la familia* $\{(X_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$ *es la topología más fina sobre* X *en la cual cada* g_α *es continua. Si* $A = \{1\}$ *y* $\mathfrak{T}_1$ *es la topología de* X_1*, la topología proyección sobre* X *con respecto a* (X_1, f_1) *es llamada* ***imagen inversa*** *de* $\mathfrak{T}_1$ *bajo* f_1*, y la topología inductiva con respecto a* (X_1, g_1) *es llamada* ***imagen directa*** *de* $\mathfrak{T}_1$ *sobre* g_1*.*

Definición 17. *Sea* X *un espacio topológico con topología* $\mathfrak{T}$*. Si* Y *es un subconjunto de* X*, la colección*

$$\mathfrak{T}_Y = \{Y \cap U : U \in \mathfrak{T}\}$$

es una topología sobre Y*, denominada* ***topología de subespacio****. Con esta topología,* Y *se denomina* ***subespacio topológico*** *de* X*; sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de* X *con* Y*.*

Definición 18. *Si* $(X, \mathfrak{T})$ *es un espacio topológico,* R *una relación de equivalencia sobre* X*,* $g : X \to X/R$ *el mapeo canónico, entonces* $\mathfrak{T}' = \{g(U) : U \in \mathfrak{T}\}$ *es llamada* ***cociente*** *de* $\mathfrak{T}$*; bajo esta topología,* X/R *es la* ***topología cociente*** *de* X *por* R*.*

Definición 19. *Sea* $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *una familia de espacios topológicos,* X *el producto cartesiano de dicha familia,* $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ *la aplicación proyección de* X *sobre* X_α*. La topología proyección sobre* X *con respecto a la familia* $\{(X_\alpha, f_\alpha) : \alpha \in A\}$ *es llamada la* ***topología producto*** *sobre* X*. Bajo esta topología,* X *es llamado el* ***producto topológico*** *de la familia* $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$

Definición 20. *Un espacio topológico X se denomina* ***espacio de Fréchet*** *o T_1 si para cada par x_1, x_2 de puntos distintos de X, existen entornos U_1, U_2 de x_1, x_2, respectivamente tales que $x_1 \notin U_2$ y $x_2 \notin U_1$.*

Definición 21. *Sea X un espacio topológico. X es un espacio* ***Hausdorff*** *o T_2 si para cada par de puntos distintos x, y existen respectivamente entornos U_x, U_y tales que $U_x \cap U_y = \emptyset$.*

Lema 3. *Cada conjunto con un número finito de puntos en un espacio de Hausdorff X es cerrado.*

Demostración. Es suficiente probar que cada conjunto unipuntual $\{x_0\}$ es cerrado. Si x es un punto de X distinto de x_0, entonces x y x_0 tiene entornos disjuntos U y V, respectivamente. Puesto que U no interseca a $\{x_0\}$, el punto x no puede pertenecer a la clausura del conjunto $\{x_0\}$. Como consecuencia, la clausura del conjunto $\{x_0\}$ es el propio $\{x_0\}$, por lo que es cerrado. $\square$

Proposición 2. *Sea X un espacio topológico. X es Hausdorff si y sólo si, cada filtro $\mathfrak{F}$ que converge en X, converge exactamente a un $x \in X$; x es llamado el* ***límite*** *de $\mathfrak{F}$.*

Demostración. Sea X un espacio Hausdorff y suponga que $\mathfrak{F}$ es un filtro en X que converge a dos puntos distintos $x, y \in X$. Como X es Hausdorff, existen U y V entornos de x e y respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$. Como $\mathfrak{F}$ converge a x e y, $U, V \in \mathfrak{F}$. Así $\emptyset = U \cap V \in \mathfrak{F}$ lo que es una contradicción, Por lo tanto, $\mathfrak{F}$ converge sólo a un punto de X.

Recíprocamente, razonando por contradicción, suponga que X no es Hausdorff y sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Tales que no existen entornos U, V de x e y respectivamente, que cumplan que $U \cap V = \emptyset$. Sean $\mathfrak{B}_x$, $\mathfrak{B}_y$ los filtros base de x e y respectivamnte. Luego $\mathfrak{B}_x \cup \mathfrak{B}_y$ es una subbase para un filtro $\mathfrak{F}$ ya que toda intersección finita de elementos de esta colección es distinta de vacío. Así $\mathfrak{F}$ converge a x e y, lo que es una contradicción. Así X es Hausdorff. $\square$

Definición 22. *Sea X un espacio topológico. X es llamado* ***regular*** *si es Hausdorff y para cada par formado por un punto x y un conjunto cerrado B que no contiene a x, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a x y B respectivamente.*

Ejemplo 22. *El espacio $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_u)$ es regular.*
Sea C un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ y z un punto tal que $z \notin C$. Luego para cada $x \in C$ se tiene que $x \neq z$ y, por tanto, como el espacio es de Hausdorff, existen dos abiertos disjuntos A_x y A_y tales que $x \in A_x$ e $y \in A_y$. Definimos

$$A = \bigcup_{x \in C} A_x$$

El conjunto A es abierto por ser unión de abiertos y, además, $A \cap A_y = \emptyset$ y $C \subset A$. Por tanto $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_u)$ es regular.

Proposición 3. *Sea X un espacio topológico Hausdorff. X es regular si y sólo si, cada punto posee una base de entornos cerrados.*

Demostración. Supongamos que X es regular. Sea $x \in X$ y U un entorno abierto de x. Sea $B = X \cap U^c$, B es un conjunto cerrado. Por hipótesis, existen conjuntos abiertos disjuntos V y W que contienen a x y B respectivamente. El conjunto $\overline{V}$ es disjunto de B, ya que si $y \in B$, el conjunto W es un entorno de y disjunto de V. Por tanto, $\overline{V} \subset U$. Así x tiene una base de entornos cerrados.

Recíprocamente, sea $x \in X$ y B un conjunto cerrado que no contiene a x. Sea $U = X \cap B^c$. Por hipótesis, existe un entorno cerrado V de x tal que $V \subset U$. Los conjuntos abiertos $\overset{o}{V}$ y $X \cap V^c$ son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a x y a B, respectivamente. Así, X es regular. $\square$

Definición 23. *Sea X un espacio topológico. X es llamado* ***normal*** *si es Hausdorff y para cada par A, B de subconjuntos cerrados disjuntos de X, existe un entorno U de A y un entorno V de B tal que $U \cap V = \emptyset$.*

Ejemplo 23. *Para cada $a \in \mathbb{R}$, sea $U_a = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ y sea $\mathfrak{T} = \{U_a : a \in \mathbb{R}\}$. Entonces $\mathfrak{T}$ es una topología sobre $\mathbb{R}$. Ya que no existen dos conjuntos cerrados no vacíos de $(\mathbb{R}, \mathfrak{T})$ que sean disjuntos, dos conjuntos cerrados disjuntos pueden separarse* *por conjuntos abiertos, más aún* $(\mathbb{R}, \mathfrak{T})$ *no es regular ya que* $C = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ *es un conjunto cerrado y* $1 \notin C$ *y si* U *es un abierto que contiene a* C *entonces* $U = \mathbb{R}$ *y* $1 \in U$.

Ejemplo 24. *El espacio* $\mathbb{R}_l$ *es normal.*

El espacio $\mathbb{R}_l$ *denota el conjunto de los números reales con la topología que tiene como base los intervalos de la forma* $[a, b)$. *Es inmediato comprobar que los unipuntuales son cerrados en este espacio. Para comprobar la normalidad, suponga que* A *y* B *son conjuntos cerrados disjuntos en* $\mathbb{R}_l$. *Para cada punto* a *de* A, *elijamos un elemento* $[a, x_a)$ *de la base que no intersecta a* B, *y para cada punto* b *en* B, *escojamos un elemento* $[b, x_b)$ *de la base que no intersecta a* A. *Luego los conjuntos abiertos*

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x_a) \quad y \quad V = \bigcup_{b \in B} [b, x_b)$$

Son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A *y a* B *respectivamente.*

Definición 24. *Un espacio Hausdorff* X *tal que para cada subconjunto cerrado* A *y cada* $b \notin A$, *existe una función continua* $f : X \to [0, 1]$ *con* $f(b) = 1$ *y* $f(x) = 0$, $\forall x \in A$, *es llamado* ***completamente regular***.

1.2. Espacios Uniformes

Los espacios uniformes son algo que está entre los espacios topológicos y los espacios métricos.

Esto quiere decir que la estructura que pasaremos a desarrollar generaliza a los espacios métricos, pero no tanto como los espacios topológicos. Al tener menos generalidad podemos mantener ciertos resultados métricos, en este contexto más general. Las propiedades que resistan el ataque de esta generalización serán las propiedades uniformes. En los espacios métricos podemos decir exactamente a que distancia están dos puntos x e y. En los espacios topológicos podemos decir que significa que un punto x este arbitrariamente cerca de un punto y. Podemos pensar en una noción de "distancia"que esté a medio camino entre ambas, una que nos permita, por ejemplo, decir que un punto x está más cerca de a de lo que y lo está de b.

En el teorema "toda función continua en un espacio métrico compacto es uniformemente continua", partimos de una premisa topológica (una función continua en un compacto), usamos que el espacio es compacto y concluimos que la función es uniformemente continua, una propiedad que tachamos de uniforme y que es más general que ser métrica. Podemos esperar que este teorema se mantenga cuando quitemos la estructura métrica y la reemplacemos por una uniforme.

Podemos caracterizar los espacios métricos mediante sucesiones. Ya sabemos que las sucesiones son inadecuadas en espacios topológicos en general, precisando de sucesiones de Cauchy (concepto que no tiene sentido en espacios topológicos).

Esperemos que esto sea suficiente motivación para la creación de una estructura diferente.

Definición 25. *Sea X un conjunto. Para conjuntos arbitrarios W y V de $X \times X$ escribimos $W^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in W\}$, y $V \circ W = \{(x,z) : \text{existe } y \in X \text{ tal que } (x,y) \in W,\ (y,z) \in V\}$. El conjunto $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ es llamado la* ***diagonal*** *de $X \times X$. Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre $X \times X$ que satisface los siguientes axiomas:*

a) Cada $W \in \mathfrak{F}$ contiene la diagonal Δ

b) $W \in \mathfrak{F}$ implica que $W^{-1} \in \mathfrak{F}$

c) Para cada $W \in \mathfrak{F}$, existe $V \in \mathfrak{F}$ tal que $V \circ V \subset W$.

d) Si $U, V \in \mathfrak{F}$, entonces $U \cap V \in \mathfrak{F}$.

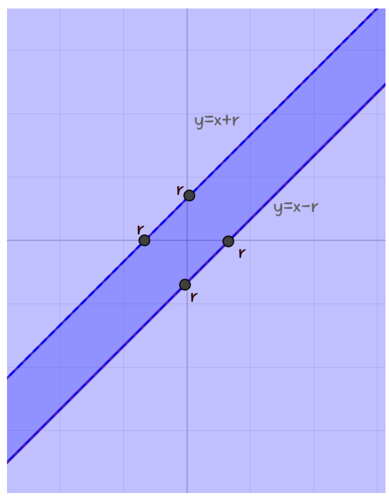
Decimos que $\mathfrak{F}$ define una ***uniformidad*** *sobre X, cada $W \in \mathfrak{F}$ es llamada* ***inmediación*** *de la uniformidad. Sea x, $y \in X$, diremos que x es W-cercano de y si $(x,y) \in W \in \mathfrak{F}$. Si $A \times A \subset W \in \mathfrak{F}$ diremos que A es W-pequeño. Denotaremos por $\mathfrak{U}$ a la uniformidad.*

Definición 26. *Sea $\phi : X \longrightarrow Y$ una función, donde X, Y son espacios uniformes. La uniformidad sobre X es inducida por ϕ a patir de la uniformidad sobre Y si la uniformidad sobre X es generada por las imágenes inversas, con respecto de $\phi \times \phi$ de* *las inmediaciones de Y.*

Ejemplo 25. *Dado cualquier conjunto X podemos dotarlo de diferentes uniformidades. Las uniformidades triviales son: $\mathfrak{U} = \{X \times X\}$ (la más gruesa, que llamaremos **uniformidad indiscreta**) y $\mathfrak{U} = \{U \subset X \times X : \Delta \subset U\}$ (la más fina, que llamaremos **uniformidad discreta**).*

Ejemplo 26. *La uniformidad usual para $\mathbb{R}$*

Dado $U_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x - y| < r\}$. Como $|x - y| < r$, entnces $x - y < r$ o $y - x < r$ de donde $y > x - r$ o $y < x + r$. Donde U_r son bandas diagonales. Luego, sea $\mathfrak{U} = \{U_r : \ r > 0\}$. $\mathfrak{U}$ es llamada uniformidad usual en $\mathbb{R}$



Definición 27. *Sea $(X, \mathfrak{U})$ un espacio uniforme. Decimos que $W \in \mathfrak{U}$ es una inmediación simétrica si $W^{-1} = W$.*

La siguiente proposición muestra que una uniformidad induce una topología.

Definición 28. *Dado un conjunto U en $X \times Y$, para todo $x \in X$ definimos $U[x] := \{y \in Y : (x, y) \in U\}$. Sea $M \in X$ definimos $U[M] = \{y \in Y : \exists x \in M$ tal que $(x, y) \in U\}$.*

Proposición 4. *Sea $\mathfrak{U}$ una uniformidad sobre X. La familia $\mathfrak{G}$ de todos los conjuntos G de X tales que $x \in G$ implica que existe $W \in \mathfrak{U}$ que satisface $W[x] = \{y : (x, y) \in W, \ y \in X\} \subset G$, es una topología sobre X.*

Demostración. Sea $x \in X$, luego para todo $W \in \mathfrak{U}$ se satisface que $W[x] \subset X$. Por vacuidad $\emptyset \in \mathfrak{G}$. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia arbitraria de $\mathfrak{G}$. Sea $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$. Así $x \in U_\alpha, \alpha \in \Lambda$. Como $U_\alpha \in \mathfrak{G}$, existe $W \in \mathfrak{U}$ tal que $\{y : (x, y) \in W\} \subset U_\alpha \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$. Así, $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \mathfrak{G}$

Sea $\{U_i : i = 1, 2, ..., n\}$ una familia finita de $\mathfrak{G}$. Sea $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$. Así, $x \in U_i$, $\forall i = 1, 2, ..., n$. Luego existe $W_i \in \mathfrak{U}$ tal que $\{y : (x, y) \in W_i\} \subset U_i$. Como $\mathfrak{U}$ es un filtro, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i \in \mathfrak{U}$. Además $\{y : (x, y) \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i\} \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$. Por lo tanto, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathfrak{G}$.

$\square$

El espacio $(X, \mathfrak{U})$, dotado con la topología $\mathfrak{T}$ derivada de la uniformidad $\mathfrak{U}$ en el sentido como en la proposición 4, es llamado un **espacio uniforme**. Un espacio topológico X es **uniformizable** si su topología puede derivarse de una uniformidad sobre X.

Definición 29. *Sea $(X, \mathfrak{U})$ un espacio uniforme. Un subconjunto $\mathcal{B} \subset \mathfrak{U}$ es una **base** para $\mathfrak{U}$ si y sólo si toda inmediación contiene un elemento de $\mathcal{B}$.*

Ejemplo 27. *La uniformidad discreta en X tiene como base al conjunto $\mathcal{B} = \{\Delta\}$.*

Ejemplo 28. *La uniformidad usual en $\mathbb{R}$ tiene como base al conjunto $\mathcal{B} = \{U_\epsilon : \epsilon > 0\}$, donde*

$$U_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| < \epsilon\}.$$

Proposición 5. *Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ un subconjunto no vacío. Entonces $\mathcal{B}$ es una base para alguna uniformidad en X si y sólo si:*

a) $\forall B \in \mathcal{B},\ \Delta \subset B$,

b) $\forall B \in \mathcal{B},\ \exists B' \in \mathcal{B}$ tal que $B' \subset B^{-1}$,

c) $\forall B \in \mathcal{B},\ \exists B' \in \mathcal{B}$ tal que $B' \circ B' \subset B$,

d) $\forall B, B' \in \mathcal{B},\ \exists B'' \in \mathcal{B}$ tal que $B'' \subset B \cap B'$.

Demostración. Si $\mathcal{B} \subset \mathfrak{U}$ donde $\mathfrak{U}$ es una uniformidad, entonces aplicando la definición de uniformidad: $\mathcal{B}$ satisface a). Satisface b) con $B' = B^{-1}$. Satisface c): $V \circ V \subset B$ para cierto $V \in \mathfrak{U}$ por ser $\mathfrak{U}$ uniformidad. Por ser $\mathcal{B}$ base, $B' \subset V \circ V$ para cierto $B \in \mathcal{B}$, entonces $B' \circ B' \subset B$. Satisface d) con $B'' = B \cap B'$.

Recíprocamente, sea $\mathfrak{U} = \{U \subset X \times X : B \subset U,\ B \in \mathcal{B}\}$. Si $\mathfrak{U}$ es una uniformidad entonces por definición tiene a $\mathcal{B}$ como base. Verifiquemos que $\mathfrak{U}$ es una uniformidad: aplicando la definición 25 se satisface a), satisface b): si $U \in \mathfrak{U}$, entonces $B \subset U$ para cierto $B \in \mathcal{B}$. Por b), $B' \subset B^{-1}$ para cierto $B' \in \mathbf{B}$. Tenemos entonces $B' \subset B^{-1} \subset U^{-1}$ luego $U^{-1} \in \mathfrak{U}$. Las propiedades c) y d) se prueban análogamente. □

Definición 30. *Sea X, Y espacios uniformes. Un mapeo $f : (X, \mathfrak{U}) \to (Y, \mathfrak{V})$ es **uniformemente continuo** si para cada inmediación V de Y, existe una inmediación U de X tal que $(x, y) \in U$ implica $(f(x), f(y)) \in V$.*

Definición 31. *Los espacios uniformes X, Y son **isomorfos** si existe una biyección $f : X \longrightarrow Y$ tal que f, f^{-1} son uniformemente continuas; f es llamado un **isomorfismo uniforme**.*

Proposición 6. *Sea $(X, \mathfrak{U})$, $(Y, \mathfrak{V})$ espacios uniformes. Si $\mathfrak{U}$ tiene base $\mathcal{B}$ y $\mathfrak{V}$ tiene base $\mathcal{C}$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es uniformemente continua si y sólo si $\forall V \in \mathcal{C}$, $\exists U \in \mathcal{B} : (x, y) \in U \longrightarrow (f(x), f(y)) \in V$.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ uniformemente continua y $V \in \mathcal{C} \subset \mathfrak{V}$. Como f es uniformemente continua, $\exists U' \in \mathfrak{U}$ tal que $(x, y) \in U' \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V$. Como $\mathcal{B}$ es base de $\mathfrak{U}$, $\exists U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset U'$, así, $(x, y) \in U \subset U' \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V$.

Recíprocamente, sea $V \in \mathfrak{V}$. Como $\mathfrak{V}$ tiene como base a $\mathcal{C}$, $\exists V' \in \mathcal{C}$ tal que $V' \subset V$. Luego para V', $\exists U \in \mathcal{B} \subset \mathfrak{U}$ tal que $(x, y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V' \subset V$. Por lo tanto, f es uniformemente continua. □

Ejemplo 29. *Cualquier función de un espacio uniforme discreto a otro espacio uniforme es uniformemente continua.*

Definición 32. *Sea (X, d) un espacio métrico. La **uniformidad métrica** $\mathfrak{U}_d$ en X inducida por d es la que tiene como base a los conjuntos*

$$U_\epsilon^d = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) < \epsilon\},$$

esto es, $\mathfrak{U}_d$ tiene como base al conjunto $\{U_\epsilon^d : \epsilon > 0\}$ de las bandas diagonales (en el sentido del ejemplo 26) de diámetro positivo.

Proposición 7. *Sean $(M,d),(N,d')$ espacios métricos. Entonces una función $f : M \longrightarrow N$ es uniformemente continua en el sentido usual en espacios métricos, si y sólo si es uniformemente continua como función entre espacios uniformes con las uniformidades inducidas.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, sean $U_\epsilon^d, V_\epsilon^{d'}$ los conjuntos de la base de $\mathfrak{U}_d$ y de $\mathfrak{U}_{d'}$ como en la definición de uniformidad métrica (definición 32). Entonces, usando la proposición 6 ,

$f : (M,\mathfrak{U}_d) \to (N,\mathfrak{U}_{d'})$ $es\ uniformemente\ continua\ en\ espacios\ uniformes$

$$\iff (\forall V \in \mathfrak{U}_{d'}\ \exists U \in \mathfrak{U}_d : (x,y) \in U \Rightarrow (f(x),f(y)) \in V)$$

$$\iff (\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : (x,y) \in U_\delta^d \Rightarrow (f(x),f(y)) \in V_\epsilon^{d'})$$

$$\iff (\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x),f(y)) < \epsilon)$$

$$\iff f : (M,d) \to (N,d')\ es\ uniformemente\ continua\ en\ espacios\ métricos.$$

□

Definición 33. *Sea X un espacio uniforme. Un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X es un **filtro Cauchy** si, para cada inmediación V, existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F \times F \subset V$. Si cada filtro Cauchy converge a un elemento de X, entonces X es llamado **completo**. Una **sucesión de Cauchy** en X es una sucesión cuyo filtro sección es un filtro Cauchy; si cada sucesión de Cauchy en X converge, entonces X se dice **semi-completo**.*

Proposición 8. *Sea $\phi : X \longrightarrow Y$ una función uniformemente continua, donde X,Y son espacios uniformes. Si $\mathfrak{F}$ es un filtro Cauchy sobre X, entonces $\phi_*\mathfrak{F}$ es un filtro Cauchy sobre Y.*

Demostración. Sea E una inmediación de Y. Entonces $D = (\phi \times \phi)^{-1}E$ es una inmediación de X. Como $\mathfrak{F}$ es un filtro Cauchy, existe un miembro M de $\mathfrak{F}$ tal que es

$D-$pequeño. Luego $\phi(M)$ es un miembro de $\phi_*\mathfrak{F}$ el cual es $E-$pequeño. Así $\phi_*\mathfrak{F}$ es un filtro Cauchy sobre Y. $\square$

Proposición 9. *Sea $\phi : X \longrightarrow Y$ una función, donde X, Y son espacios uniformes. Suponga que la uniformidad de X es inducida por ϕ de la uniformidad de Y. Si $\mathfrak{G}$ es un filtro Cauchy sobre Y talque $\phi^*\mathfrak{G}$ está definida, entonces $\phi^*\mathfrak{G}$ es un filtro Cauchy sobre X.*

Demostración. Sea D una inmediación de X. Para D, existe D' una inmediación en Y tal que $(\phi \times \phi)^{-1}D' \subset D$. Como $\mathfrak{G}$ es un filtro Cauchy, existe $M \in \mathfrak{G}$ tal que $M \times M \subset D'$. Luego $\phi^{-1}M \times \phi^{-1}M \subset D$. Así $\phi^*\mathfrak{G}$ es un filtro Cauchy sobre X.

$\square$

Proposición 10. *Sea A un subconjunto denso de un espacio uniforme X. Entonces X es completo si y sólo si la extensión de cada filtro Cauchy sobre A a X es convergente.*

Demostración. Si X es completo, la extensión de un filtro Cauchy sobre A es un filtro Cauchy sobre X y así es convergente.

Recíprocamente, sea $\mathfrak{F}$ un filtro Cauchy sobre X. Consideremos la inclusión $\phi : A \longrightarrow X$. Considere el filtro $\mathfrak{G}$ sobre X generado por los subconjuntos de la forma $D[M]$, donde D es una inmediación y M un miembro de $\mathfrak{F}$. Como $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$, basta probar que $\mathfrak{G}$ es convergente. Cada $D[M]$ contiene a M e intersecta a A; por lo tanto, $\phi^*\mathfrak{G}$ define a un filtro sobre A. Como $\mathfrak{G}$ es un filtro Cauchy, $\phi^*\mathfrak{G}$ también lo es, por proposición 9, y por lo tanto, $\phi_*\phi^*\mathfrak{G}$ es filtro Cauchy por proposición 8. Por hipótesis $\phi_*\phi^*\mathfrak{G}$ converge. Pero $\phi_*\phi^*\mathfrak{G}$ es un refinamiento de $\mathfrak{G}$, así converge también. $\square$

Teorema 1. *Para un espacio uniforme X, existe un espacio uniforme completo $\tilde{X}$ el cual tiene un subespacio W que es uniformemente isomorfo a X y es denso en $\tilde{X}$.*

Demostración. Sea X un espacio uniforme. Considere el conjunto $\tilde{X}$ de todos los filtros Cauchy sobre X. Sea $\sigma : X \longrightarrow \tilde{X}$ la función que asigna a cada punto x el filtro principal

$\mathfrak{F}_x$. Entonces σ es inyectiva y podemos hacer a $\tilde{X}$ un espacio uniforme tal que σ sea un embebimiento uniforme. Un filtro Cauchy $\mathfrak{F}$ sobre X, como punto de $\tilde{X}$ lo escribiremos $\mathfrak{F}'$. Sea D una inmediación simétrica de X, denotamos por D^* el subconjunto de $\tilde{X} \times \tilde{X}$ que consiste de los pares $(\mathfrak{F}_1', \mathfrak{F}_2')$ tal que los filtros Cauchy $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ sobre X tienen un D-pequeño en común. Se mostrará que la familia de subconjuntos D^*, con D recorriendo todas las inmediaciones simétricas de X, constituye una base para una uniformidad sobre $\tilde{X}$. Mostraremos que las condiciones para ser una base para una uniformidad se cumplen.

Primero, si $\mathfrak{F}$ es un filtro Cauchy sobre X, entonces $(\mathfrak{F}', \mathfrak{F}') \in D^*$ para cada inmediación simétrica D de X; así D^* contiene la diagonal de $\tilde{X}$. Segundo, D^* es simétrico ya que D es simétrico. Tercero, si D' es una inmediación simétrica de X tal que $D' \circ D' \subset D$, se afirma que $D'^* \circ D'^* \subset D^*$. Sean $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ filtros Cauchy tales que $(\mathfrak{F}_1', \mathfrak{F}_2') \in D'^*$ y $(\mathfrak{F}_2', \mathfrak{F}_3') \in D'^*$. entonces $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ tienen en común un miembro M D'-pequeño y $\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ tienen en común un miembro N D'-pequeño. Como $M, N \in \mathfrak{F}_2$ y $M \cap N \neq \emptyset$, $M \cup N$ es $D' \circ D'$-pequeño, así D-pequeño. Como $M \cup N$ es un miembro de $\mathfrak{F}_1$ y $\mathfrak{F}_3$, entonces $(\mathfrak{F}_1', \mathfrak{F}_3') \in D^*$. Por último, sean D_1, D_2 inmediaciones simétricas de X. Así $D_1 \cap D_2$ es también una inmediación simétrica de X. Además, si $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ son filtros Cauchy sobre X tales que $(\mathfrak{F}_1', \mathfrak{F}_2') \in D^*$, donde $D = D_1 \cap D_2$, entonces $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ tienen en común un miembro M D-pequeño. Entonces M es también un D_1-pequeño y D_2-pequeño ya que $D \subset D_1$ y $D \subset D_2$, así, $(\mathfrak{F}_1', \mathfrak{F}_2') \in D_1^* \cap D_2^*$. Por lo que $D^* \subset D_1^* \cap D_2^*$.

Por construcción $\sigma : X \to \tilde{X}$ es un embebimiento uniforme.

Mostraremos que $\tilde{X}$ es completo y que $\sigma(X)$ es denso en $\tilde{X}$.

Sea $\mathfrak{F}$ un filtro Cauchy sobre X. Sea D una inmediación simétrica de X. Entonces $\mathfrak{F}$ contiene un miembro M D-pequeño. Para cada $x \in M$ tenemos que $(\sigma(x), \mathfrak{F}') \in D^*$, es decir, $\sigma(x) \in D^*[\mathfrak{F}']$. Asi, $\sigma(X)$ es denso en $\tilde{X}$. Además, $\sigma(M) \subset D^*[\mathfrak{F}']$ y el filtro principal de $\sigma(x)$ converge al punto $\mathfrak{F}'$ en $\tilde{X}$. Como X es uniformemente equivalente a $\sigma(X)$ bajo σ, los filtros de la forma $\sigma_*(\mathfrak{F})$ sobre $\tilde{X}$ son precisamente la extensión de los filtros Cauchy sobre $\sigma(X)$. Así $\tilde{X}$ es completo. □

Definición 34. *Un espacio topológico es* ***metrizable*** *si su topología puede derivarse de una métrica.*

Ejemplo 30. *La topología discreta sobre cualquier conjunto X, es metrizable y la distancia asociada es la distancia métrica o trivial.*

$$d(x, y) = 0, \; si \; x = y$$
$$d(x, y) = 1, \forall x \neq y$$

Ejemplo 31. *Si X es un conjunto que contiene más de un punto y lo consideramos dotado de la topología trivial, $(X, \mathfrak{T}_I)$, no es un espacio metrizable, puesto que los únicos cerrados para esta topología son $\emptyset$ y X, pero sabemos que en un espacio métrico, los conjuntos finitos son cerrados, con lo cual deberían existir más cerrados.*

Definición 35. *Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio X se dice que **cubre** a X, o que es un **cubrimiento** de X, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ contiene a X. Se dice que $\mathcal{A}$ es una cubierta abierta de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X. Una subcubieta es un subconjunto de $\mathcal{A}$ que cubre a X.*

Ejemplo 32. *Considere el intervalo $(0, 1)$, como subespacio de $\mathbb{R}$. Entonces la colección $\{U_n\}$, con $U_n = (1/n, 1)$, $n = 1, 2, ...$, es una cubierta de $(0, 1)$: para que cualquier $x \in (0, 1)$, $\exists N$ tal que $\frac{1}{N} < x$, por lo que $x \in (\frac{1}{N}, 1)$, $(0, 1) = \bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{n}, 1)$.*

Ejemplo 33. *La colección de intervalos abiertos $\{(n-1, n+1)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forma una cubierta para $\mathbb{R}$: Dado $x \in \mathbb{R}$, existe un entero N tal que $N \leq x < N+1$ (Esto es llamado la propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$). Entonces $x \in (N-1, N+1)$, $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{R}} (n-1, n+1)$. Si $\{U_\alpha\}$ es una cubierta de A, una subcubierta es un subconjunto de $\{U_\alpha\}$, digamos $S = \{U_{\alpha_\beta}\}$, tal que $A \subset \bigcup_\beta U_{\alpha_\beta}$. Si S es un conjunto finito, digamos $S = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, U_{\alpha_3}, ..., U_{\alpha_K}\}$, entonces decimos que S es una subcubierta finita.*

Definición 36. *Sea X un espacio topológico Hausdorff, X es **compacto** si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.*

Ejemplo 34. *La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta, pues el cubrimiento de $\mathbb{R}$ por intervalos $\mathfrak{A} = \{(n, n+2) | n \in \mathbb{Z}\}$ no contiene ninguna subcolección finita que cubra a $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 35. *El siguiente subespacio de $\mathbb{R}$ es compacto: $X = \{0\} \cup \{1/n \; | n \in \mathbb{Z}_+\}$. Dado un cubrimiento $\mathfrak{A}$ de X, existe un elemento U de $\mathfrak{A}$ que contiene al 0. El conjunto U*

contiene a todos los puntos de la forma $1/n$ *excepto a un número finito de ellos; elijamos para cada uno de estos puntos que no están en* U *un elemento de* $\mathfrak{A}$ *que lo contenga. La colección de estos elementos de* $\mathfrak{A}$*, junto con el propio* U*, es una subcolección finita de* $\mathfrak{A}$ *que cubre a* X*.*

Definición 37. *Un espacio uniforme separado es llamado* ***precompacto*** *si su completación es compacta.*

Definición 38. *Un espacio topológico Hausdorff es llamado* ***localmente compacto*** *si cada uno de sus puntos posee un entorno compacto.*

Ejemplo 36. $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_u)$ *es localmente compacto, dado que para cada* $x \in \mathbb{R}$, $[x-1, x+1]$ *es un entorno compacto.*

Ejemplo 37. $(\mathbb{X}, \mathfrak{T}_{dis})$ *es localmente compacto, pues para cada* $x \in X$, $\{x\}$ *es un entorno compacto.*

Definición 39. *Sea* X *un espacio topológico,* A *un subconjunto de* X*.*
a) A *es llamado* ***denso en ninguna parte*** *en* X *si* $\overline{A}$ *tiene interior vacío.*
b) A *es llamado* ***delgado*** *en* X *si* A *es la unión de un conjunto contable de subconjuntos densos en ninguna parte de* X*. Un subconjunto* A *que no es delgado es llamado no delgado en* X*.*

Ejemplo 38. *En* $\mathbb{R}$ *cualquier conjunto finito y el conjunto de los enteros forman subconjuntos de la recta real los cuales son densos en ninguna parte.*

Ejemplo 39. *En* $\mathbb{R}^2$*, cualquier curva cerrada simple, forma un subconjunto denso en ninguna parte.*

Definición 40. *Si cada subconjunto abierto no vacío es no delgado en* X*, entonces* X *es llamado un* ***espacio de Baire****.*

Definición 41. *Un conjunto* G *con una operación* $*$*, definida sobre él, denotado por* $(G, *)$ *se dice que es un* ***grupo****, si satisface las siguientes propiedades:*

i) Clausura.

ii) Asociatividad

iii) Existencia de un elemento neutro.

iv) Existencia de un inverso.

Definición 42. *Un* ***grupo topológico*** G^**, es un grupo que es también un espacio topológico* T_1*, tal que la aplicación de* $G \times G$ *a* G *enviando* $x \times y$ *a* $x * y$*, y la aplicación de* G *a* G *que envía* x *a* x^{-1}*, son aplicaciones continuas.*

1.3. Álgebra Lineal

Definición 43. *Un campo* K *es un conjunto con una operación* $*$ *que satisface las siguientes propiedades:*

i) Es un grupo abeliano bajo la adición.

ii) Cerrado bajo la multiplicación.

iii) Asociativo bajo la multiplicación.

iv) Conmutativo bajo la multiplicación

v) Existencia del idéntico multiplicativo.

vi) Existencia del inverso multiplicatico.

vii) La multiplicación es distributiva respecto a la adición.

Definición 44. *Sea* L *un conjunto y* K *un campo (no necesariamente conmutativo), supongamos que están definidos los mapeos* $(x, y) \longmapsto x + y$ *de* $L \times L$ *en* L*, llamado adición y* $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ *de* $K \times L$ *en* L *llamado multiplicación por escalar, tal que los siguientes axiomas se satisfacen (*x*,* y*,* z *denotan elementos arbitrarios de* L *y* λ*,* μ *denotan elementos arbitrarios de* K*):*

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$.

2) $x + y = y + x$.

3) *Existe un elemento* $0 \in L$ *tal que* $x + 0 = x$ *para todo* $x \in L$.

4) *Para cada* $x \in L$, *existe* $z \in L$ *tal que* $x + z = 0$.

5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

8) $1x = x$.

Definición 45. *Dotado con la estructura definida en la definición anterior, L es llamado* ***espacio vectorial por la izquierda*** *sobre K y el elemento* 0 *postulado por 3) es único y es llamado el* ***elemento cero*** *de L.*

No distinguiremos notacionalmente entre el elemento cero de L y K.
Además, para algún $x \in L$ el elemento z postulado por 4) es único y denotado por $-x$; además, si tiene a uno $-x = (-1)x$, y se acostumbra escribir $x - y$ para $x + (-y)$.

Definición 46. *Si 1)-4) se mantienen como antes pero la multiplicación por escalar es escrita como* $(\lambda \,.\, x) \longrightarrow x\lambda$ *y 5)-8) son cambiadas convenientemente, L es llamado* ***espacio vectorial por la derecha*** *sobre K.*

Definición 47. *Por un* ***espacio vectorial*** *sobre K, siempre entenderemos un espacio vectorial por la izquierda sobre K.*

Entonces no hay punto de distinción entre espacio vectorial por la izquierda y por la derecha sobre K. Cuando K es conmutativo, no es necesario considerar el espacio vectorial por la derecha.

Definición 48. *Sea L un espacio vectorial sobre K. Un elemento $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_x$, donde $n \in \mathbb{N}$, es llamada una **combinación lineal** de elementos $x_i \in L$ $(i = 1, \cdots, n)$, esta se escribe $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ ó $\sum_i \lambda_i x_i$. Si $\{x_\alpha : \ \alpha \in H\}$ es una familia finita, la suma de los elementos x_α es denotado por $\sum_{\alpha \in H} x_\alpha$; por conveniencia, esta es extendida al conjunto vacío por definición $\sum_{x \in \emptyset} x = 0$.*

Esta no se debería confundir con el término $A + B$ para subconjuntos A , B de L, cuando por ya que el significado de esta es $\{x + y : \ x \in A \ y \in B\}$; así, si $A = \emptyset$, entonces $A + B = \emptyset$ para todo subconjunto $B \subset L$.

Definición 49. *Un subconjunto $A \subset L$ es llamado **linealmente independiente** si para cada subconjunto finito no vacío $\{x_i : i = 1, 2, \cdots, n\}$ de A, la relación $\sum_i \lambda_i x_i = 0$ implica $\lambda_i = 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.*

Observación 2. *Por la definición anterior, el conjunto vacío de L es linealmente independiente.*

Definición 50. *Un subconjunto linealmente independiente de L el cual es maximal (con respecto al conjunto inclusión) es llamado **base (base de Hamel)** de L.*

La existencia de bases en L conteniendo un subconjunto linealmente independiente dado, es garantizado por el **lema de Zorn's**.

Definición 51. *Dos bases de L tienen la misma cardinalidad d, la cual es llamada **dimensión** de L (sobre A).*

Definición 52. *Sea L un espacio vectorial sobre K. Un **subespacio vectorial (subespacio)** de L es un subconjunto no vacío M de L invariante bajo la adición y la multiplicación por escalar, es decir, $M + M \subset M$ y $KM \subset M$. El conjunto de todos los subespacios de L es claramente invariante bajo intersecciones arbitrarias.*

Definición 53. *Si A es un subconjunto de L la **estructura lineal** de A es la intersección M de todos los subespacios de L que contienen a A, M se dice que es un subespacio* *de L **generado** por A. **M** puede ser caracterizado como el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de A (incluida la sumatoria sobre el subconjunto vacío de A). En particular la estructura lineal de* $\emptyset$ *es* $\{0\}$.

Definición 54. *Si* M *es un subespacio de L, la relación* $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in M$ *es una relación de equivalencia en L. El conjunto cociente se convierte en un espacio vectorial sobre* K *por las definiciones* $\hat{x} + \hat{y} = x + y + M$, $\lambda\hat{x} = \lambda x + M$ *donde* $\hat{x} = x + M$ $\hat{y} = y + M$, *y es denotado por* L/M.

Definición 55. *Sean* L_1, L_2 *espacios vectoriales sobre* K, $f : L_1 \longrightarrow L_2$ *es llamado un **mapeo lineal** si* $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ *para todo* $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ *y* $x_1, x_2 \in L_1$. *Definiendo la adición por* $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ *y la multiplicación por escalar por* $(\lambda f)(x) = f(\lambda x)(x \in L_1)$.

Definición 56. *Definiendo* $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ *si* L_2 *es el espacio vectorial* K_0 *(*K_0 *denota al espacio vectorial topológico 1-dimensional obtenido al considerar a* K *como un espacio vectorial sobre sí mismo), nosotros obtenemos el **dual algebraico*** L_1^* *de* $\mathtt{L_1}$. *Los elementos de* L_1^* *son llamados **formas lineales** en* L_1.

Definición 57. L_1 *y* L_2 *se dicen **isomórficos** si existe un mapeo lineal biyectivo* $f : L_1 \longrightarrow L_2$*; tal mapeo es llamado **isomorfismo** de* L_1 *en* L_2.

Definición 58. *Si* $f : L_1 \longrightarrow L_2$ *es lineal. El subespacio* $N = f^{-1}(0)$ *de* L_1 *es llamado el **espacio nulo (kernel)** de* f. f *define un isomorfismo* f_0 *de* L_1/N *en* $M = f(L_1)$*;* f_0 *es llamado el mapeo biyectivo **asociado** con f.*

Definición 59. $\phi : L_1 \longrightarrow L_2/N$ *denota el mapeo cociente y* $\psi : M \longrightarrow L_2$ *denota el embebimiento canónico, entonces* $f = \psi \circ f_0 \circ \psi$ *es llamado **descomposición canónica** de* f.

Definición 60. *Sea* K *un campo, y considere el campo* $\mathbb{R}$ *con el valor absoluto usual. Una función* $\lambda \longrightarrow |\lambda|$ *de* K *en* $\mathbb{R}_+$ *(números reales* ≥ 0*) es llamado una **valuación absoluta** en* K *si satisface los siguientes axiomas:*

1) $|\lambda| = 0$ *es equivalente a* $\lambda = 0$.

2) $|\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|$.

3) $|\lambda\mu| = |\lambda||\mu|$.

Definición 61. *La función* $(\lambda\ ,\ \mu) \longrightarrow |\lambda - \mu|$ *es una métrica en* K *dotado con esta métrica y la correspondiente uniformidad,* K *es llamado un* ***campo valuado****. Los campos valuados* K *son llamados* ***no discretos*** *si la topología de este es no discreta (equivalentemente, si el rango de* $\lambda \longrightarrow |\lambda|$ *es distinto de* $\{0\ ,\ 1\}$*). Un campo valuado no discreto es necesariamente infinito.*

Definición 62. *Sea* L *un espacio vectorial sobre un campo valuado* K*, y sean* A*,* B *subconjuntos de* L*. Diremos que* A ***absorbe*** *a* B *si existe* $\lambda_0 \in K$*, tal que* $B \subset \lambda A$ *siempre que* $|\lambda| \geq |\lambda_0|$.

Definición 63. *Un subconjunto* U *de* L *es llamado* ***absorbente*** *si* U *absorbe cada subconjunto de* L.

Definición 64. *Un subconjunto* C *de* L *es* ***balanceado*** *si* $\lambda C \subset C$ *siempre que* $|\lambda| \leq 1$*. El conjunto de subconjuntos absorbentes de* L *es invariante bajo intersecciones finitas; el conjunto de subconjuntos balanceados de* L *es invariante bajo intersecciones arbitrarias si* $A \subset L$.

Definición 65. *La* ***estructura balanceada*** *de* A *es la intersección de todos los subconjuntos balanceados de* L *que contienen a* A.

Los campos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ de números reales y complejos, respectivamente, siempre se consideran dotados con sus valuaciones absolutas usuales, bajo las cuales son campos valuados no discretos. En adición, $\mathbb{R}$ siempre es considerado bajo ese orden usual.

Capítulo 2

Espacios Vectoriales Topológicos

2.1. Topología de Espacios Vectoriales

Definición 66. *Dado un espacio vectorial L sobre un campo valuado K no discreto y una topología $\mathfrak{T}$ sobre L, el par $(L\, ,\, \mathfrak{T})$ es llamado* ***espacio vectorial topológico*** *sobre K si se satisface que:*

$$
\begin{aligned}
(LT)_1 \quad + :\ & L \times L && \longrightarrow L \\
& (x\ ,\ y) && \longrightarrow x + y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(LT)_2 \quad \bullet :\ & K \times L && \longrightarrow L \\
& (\lambda\ ,\ x) && \longrightarrow \lambda x
\end{aligned}
$$

Son continuos.

Cada espacio vectorial topológico es un **grupo topológico abeliano**

Un espacio vectorial topológico $(L, \mathfrak{T})$ ocasionalmente lo denotaremos por $L(\mathfrak{T})$.

Ejemplo 40. *El conjunto de los números reales como espacio vectorial sobre él mismo y con la topología usual es un espacio vectorial topológico. En efecto; sean $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ y*

W un entorno de x_0+y_0. Luego existe $\epsilon>0$ tal que $B(x_0+y_0,\epsilon)\subseteq W$, pero existen $B(x_0,\epsilon/2)$ y $B(y_0,\epsilon/2)$ tal que: $B(x_0,\epsilon/2)+B(y_0,\epsilon/2)\subseteq B(x_0+y_0,\epsilon)\subseteq W$, lo que demuestra la continuidad de la adición. Para demostrar la continuidad de la multiplicación por escalar, sea $\alpha_0,x_0\in\mathbb{R}$ y W un entorno de α_0x_0, luego existe $\epsilon>0$ tal que $B(\alpha_0x_0,\epsilon)\subseteq W$. Demostraremos que existe un $\delta>0$ tal que $\alpha B(x_0,\delta)\subseteq W$, $\forall\alpha,\ \alpha\in B(\alpha_0,\delta)$.

$$\begin{aligned} \textit{Tenemos que } |\alpha x-\alpha_0x_0| &\le |\alpha x-\alpha_0x|+|\alpha_0x-\alpha_0x_0| \\ &= |\alpha-\alpha_0||x|+|\alpha_0||x-x_0|. \end{aligned}$$

Luego $(\alpha,x)\in B(\alpha_0,\delta)\times B(x_0,\delta)\Rightarrow|\alpha x-\alpha_0x_0|\le|\alpha-\alpha_0||x|+|\alpha_0||x-x_0|<\delta|x|+|\alpha_0|\delta$, pero $|x|\le|x-x_0|+|x_0|<\delta+|x_0|$. Luego $(\alpha,x)\in B(\alpha_0,\delta)\times B(x_0,\delta)\Rightarrow|\alpha x-\alpha_0x_0|<\delta(\delta+|x_0|+|\alpha_0|)$ y en consecuencia basta escoger $\delta>0$ de modo que :

$$\delta(\delta+|x_0|+|\alpha_0|)\le\epsilon.$$

Ejemplo 41. *Sea K un campo valuado y no discreto. Se puede considerar que $(K,+,*)$ es un espacio vectorial sobre sí mismo; también, derivada de la valuación, K tiene una topología y de acuerdo a la demostración del ejemplo anterior. No es difícil establecer la continuidad de la adición y multiplicación por escalar; es decir $(K,|\cdot|)$ tiene la estructura de espacio vectorial topológico.*

Ejemplo 42. *Todo espacio vectorial normado es un espacio vectorial topológico, como resultado del ejemplo 41. (Cambiar el módulo por la norma).*

Definición 67. *Dos espacios vectoriales topológicos L_1 y L_2 sobre un mismo campo K son llamados **isomorfos** si existe un mapeo lineal $u:L_1\longrightarrow L_2$ que es un **homeomorfismo**, u es llamado **isomorfismo** de L_1 en L_2.*

Proposición 11. *Si $(V\ ,\ \mathfrak{T})$ es un espacio vectorial topológico, entonces*
i) U es absorbente, $\forall U\in\mathfrak{B}_0$

ii) $\forall U\in\mathfrak{B}_0$ existe U' tal que $U'+U'\subset U$

Demostración. Para i) Sea $x \in V$. Luego considerando la continuidad del producto por escalar, se puede considerar $\epsilon > 0$ y $W \in \mathfrak{B}_x(V)$ tales que $\bullet(B_\epsilon(0) \times W) \subset U$; es decir, $\lambda x \in U$ siempre que $|\lambda| \leq \epsilon$, por tanto U es absorbente.

Para ii) Sea $U \in \mathfrak{B}_0$ y sea

$$\begin{array}{rll} + : & L \times L & \longrightarrow L \\ & (x\ ,\ y) & \longmapsto x + y \end{array}$$

Como U es un entorno de 0 y $+$ es continua por $(LT)_1$, entonces $(+)^{-1}(U)$ es un entorno de 0 en $L \times L$. Así existen V_1 y V_2 entornos abiertos de 0 tales que $V_1 \times V_2 \subset (+)^{-1}(U)$, por tanto $V_1 + V_2 \subset U$. Luego sea $U' = V_1 \cap V_2$, así $U' + U' = \{a + b : a \in V_1 \cap V_2$ y $b \in V$
entonces $U' + U' \subset V_1 + V_2 \subset U$. Así $U' + U' \subset U$. $\square$

Proposición 12. *Sea L un espacio vectorial topológico sobre K*

i) Para cada $x_0 \in L$ y cada $\lambda_0 \in K$, $\lambda_0 \neq 0$ el mapeo $f : L \longrightarrow L$ tal que $f(x) = \lambda_0 x + x_0$ es un homeomorfismo de L en sí mismo.

ii)Si U es un conjunto abierto de L, entonces $-a + U$ es abierto en L, $a \in L$

iii)Sea $a \in L$ y $\mathcal{N}_a(L)$ la familia de entornos de a en L. Entonces $\mathcal{N}_a(L) = a + \mathcal{N}_0(L)$.

iv) Para algún subconjunto A de L y alguna base $\mathfrak{B}_0$ del filtro de entornos de $0 \in L$, la clausura $\overline{A}$ esta dada por $\overline{A} = \cap \{A + U : U \in \mathfrak{B}_0\}$.

v) Si A es un subconjunto abierto de L, y B cualquier subconjunto de L, entonces $A + B$ es abierto.

vi) Si A es un subconjunto balanceado de L, entonces $\overline{\mathrm{A}}$ es balanceado y $\overset{o}{\mathrm{A}}$ es balanceado cuando $0 \in \overset{o}{\mathrm{A}}$

Demostración. i)Sea

$$\begin{aligned} f: \quad L &\longrightarrow L \\ x &\longmapsto \lambda_0 x + x_0 \end{aligned}$$

Probar que f y f^{-1} son continuas. Si $f(x) = f(y)$, entonces $\lambda_0 x + x_0 = \lambda_0 y + x_0$, así $\lambda_0 x = \lambda_0 y$ de donde $x = y$, ya que $\lambda_0 \neq 0$, por tanto, f es inyectiva. Luego, sea $x \in L$, como L es un espacio vectorial y $x_0 \in L$, entonces $x - x_0 \in L$, además $\frac{1}{\lambda_0} \in K$, pues $\lambda_0 \neq 0$, Así $\frac{x-x_0}{\lambda_0} \in L$.
Así, $f\left(\frac{x-x_0}{\lambda_0}\right) = \lambda_0\left(\frac{x-x_0}{\lambda_0}\right) + x_0 = x - x_0 + x_0 = x$. Por tanto f es sobre.
Sea

$$\begin{aligned} h: \quad L &\longrightarrow \{\lambda_0\} \times L \\ x &\longmapsto (\lambda_0\ ,\ x) \end{aligned} \qquad y \qquad \begin{aligned} g: \quad L &\longrightarrow L \times \{x_0\} \\ x &\longmapsto (x\ ,\ x_0) \end{aligned}$$

Sea $U \times \{x_0\}$ un elemento de la topología producto y como $U \subset L$, $g^{-1}(L \times \{x_0\}) = U$. Por tanto g es continua.
Además,

$$\begin{aligned} +: \quad L \times L &\longrightarrow L \\ (x\ ,\ y) &\longmapsto x + y \end{aligned} \qquad y \qquad \begin{aligned} \bullet: \quad K \times L &\longrightarrow L \\ (\lambda\ ,\ x) &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

son continuas por definición. Luego $f = + \circ g \circ \bullet \circ h$, como f es composición de funciones continuas, entonces f es continua. Además, $f(x) = \lambda_0 x + x_0$, así $f^{-1}(x) = \frac{x-x_0}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0}(x - x_0)$.
Sean

$$\begin{aligned} h': \quad L &\longrightarrow \left\{\frac{1}{\lambda_0}\right\} \times L \\ x &\longmapsto (\tfrac{1}{\lambda_0}\ ,\ x) \end{aligned} \qquad y \qquad \begin{aligned} g': \quad L &\longrightarrow L \times \{-x_0\} \\ x &\longmapsto (x\ ,\ -x_0) \end{aligned}$$

Análogamente a la prueba anterior de h y g continuas, se puede verificar que h' y g' también lo son. Luego $f^{-1} = \bullet \circ h' \circ + \circ g'$, como f^{-1} es composición de funciones continuas, entonces f^{-1} es continua. Por tanto, el mapeo $x \longmapsto \lambda_0 x + x_0$ es un homeomorfismo de L en sí mismo.

ii) Sea U un abierto en L, por i)

$$\begin{aligned} \phi: \quad L &\longrightarrow L \\ x &\longmapsto \lambda_0 x + x_0 \end{aligned}$$

es un homeomorfismo. Luego, tomamos $\lambda_0 = 1$ y $x_0 = -a$ y como $\phi(U)$ es abierto en L donde $\phi(U) = -a + U$, entonces $-a + U$ es un abierto en L

iii)Sea

$$\begin{aligned} f\colon \quad L &\longrightarrow L \\ x &\longmapsto x + a \end{aligned}$$

el cual es un homeomorfismo por i). Luego, sea $U \in \mathcal{N}_a$, como U es un entorno de a, existe $V' \subset U$ abierto tal que $a \in V'$. Luego, por ii) $-a + V'$ es abierto. Como $a \in V'$, $0 = -a + a \in -a + V'$, así $-a + V' \in \mathcal{N}_0(L)$. Luego $-a + V' \subset (-a + U) = W$ así, $W \in \mathcal{N}_0$ luego $a + W = U \in \mathcal{N}_0$. Por tanto, $U \in a + \mathcal{N}_0(L)$.
Recíprocamente, sea $U \in a + \mathcal{N}_0(L)$, como $U \in a + \mathcal{N}_0(L)$, $\exists V \in \mathcal{N}_0(L)$ tal que $U = a + V$. Como $V \in \mathcal{N}_0(L)$, $\exists V' \in \mathcal{N}_0$ abierto tal que $V' \subset V$, luego $a \in a + V' \subset a + V$, por ii) $a + V'$ es abierto, entonces $U \in \mathcal{N}_a$.

iv)Probar que $\bar{A} = \cap\{A + U : U \in \mathcal{N}_0\}$
$x \in \bar{A}$ si y sólo si $(x + V) \cap A \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{N}_0$, si y sólo si $x + v = a$ con $v \in V$ y $a \in A$, si y sólo si $x = a - v$ si y sólo si $x \in A - V, \forall V \in \mathcal{N}_0$, si y sólo si $x \in A + V, \forall V \in \mathcal{N}_0$ por i), si y sólo si $x \in \cap\{A + V : V \in \mathcal{N}_0\}$.

v) Sea $A + B = \bigcup_{b \in B}\{A + b\}$. Sea $a + b \in A + B$, con $a \in A$ y $b \in B$, luego $a + b \in A + b$, de donde $a + b \in \bigcup_{b \in B}\{A + b\}$.
Sea

$$\begin{aligned} f : \quad L &\longrightarrow L \\ x &\longmapsto x + b \end{aligned}$$

Por i) f es continua y como A es abierto, entonces $f(A) = A + b$ es abierto en L. Por tanto $A + B$ es abierto.

vi) Sea A un subconjunto balanceado de L. Si $y \in \bar{A}$, ($\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $|\lambda| \leq 1$), así $\lambda y \in \lambda\bar{A}$; podemos elegir $\left(x_\alpha^{(1)}\right)_{\alpha \in \Lambda}$ en A una sucesión que converge a y, por la continuidad de la multiplicación por escalar $\left(\lambda\left(x_\alpha^{(1)}\right)_{\alpha\in\Lambda}\right)$ converge a λy. Como A es balanceado $\left(\lambda\left(x_\alpha^{(1)}\right)_{\alpha\in\Lambda}\right) \subset A$, por lo tanto, $\lambda y \in \bar{A}$, entonces $\lambda\bar{A} \subset \bar{A}$. Por tanto $\bar{A}$ es balanceado. Para probar que el interior de un subconjunto balanceado es balanceado, sea $0 < |\lambda| \leq 1$, así $\lambda\overset{o}{A} = \left\{\lambda b : \ b \in \overset{o}{A}\right\}$, luego sea $\lambda b \in \lambda\overset{o}{A}$ así, $b \in \overset{o}{A}$; Por tanto, existe U abierto tal que $b \in U \subset A$. Luego $\lambda b \in \lambda U \subset \lambda A$, por tanto $\lambda b \in Int(\lambda A)$. Ahora sea $x \in Int(\lambda A)$, así existe V abierto tal que $x \in V \subset \lambda A \subset A$. Así $Int(\lambda A) \subset \lambda A \subset A$, luego $\frac{1}{\lambda}x \in \frac{1}{\lambda}V \subset A$ por tanto $\frac{1}{\lambda}x \in \overset{o}{A}$, así $x \in \lambda\overset{o}{A}$. Además si $\lambda = 0$, entonces $\lambda\overset{o}{A} = \{0\} \subset \overset{o}{A}$, así $Int(\lambda A) \subset \overset{o}{A}$. $\square$

Definición 68. *Una topología $\mathfrak{T}$ sobre un espacio vectorial L es llamado* ***invariante bajo traslaciones*** *si todas las traslaciones son homeomorfismos. Una topología tal, es completamente determinada por el filtro de entornos de algún punto $x \in L$. En particular por el filtro de entornos de 0.*

Proposición 13. *Una topología $\mathfrak{T}$ sobre un espacio vectorial L sobre K satisface los axiomas $(LT)_1$ y $(LT)_2$ si y sólo si $\mathfrak{T}$ es traslación invariante y posee una base de entorno para 0, $\mathfrak{B}$ con las siguientes propiedades:*

a) Para cada $V \in \mathfrak{B}$, existe $U \in \mathfrak{B}$ tal que $U + U \subset V$.

b) Cada $V \in \mathfrak{B}$ es absorbente y balanceado.

c) Existe $\lambda \in K, 0 < |\lambda| < 1$ tal que $V \in \mathfrak{B}$ implica que $\lambda V \in \mathfrak{B}$.

Demostración. Sea W un entorno de 0. Como la multiplicación por escalar es continua, $\exists\ \epsilon > 0$ y $U \in \mathcal{N}_0$ tal que $\lambda U \subset W$ siempre que $|\lambda| < \epsilon$. Ahora $V = \cup\{\lambda U : |\lambda| < \epsilon\}$ es un entorno de 0 y $V \subset W$. Luego, si $\lambda_0 v \in \lambda_0 V$, entonces $v \in V$, así $v \in \lambda U$, para algún $|\lambda| < \epsilon$. Por tanto $\lambda_0 v \in \lambda_0\lambda U$ y como $|\lambda_0\lambda| \leq |\lambda_0||\lambda| < |\lambda_0|\epsilon < \epsilon$, así $\lambda_0 v \in V$. Por lo cual V es balanceado. Luego sea $\mathfrak{B} = \{U \in \mathcal{N}_0 : \ \ U \ \ es \ \ balanceado\}$. Por proposición 11 se cumple a) y por cómo se construyó $\mathfrak{B}$, se cumple b). Luego para c), ya que K es no discreto $\exists\lambda \in K$ tal que $0 < |\lambda| < 1$ y como $V \in \mathfrak{B}$, entonces V es

un entorno de 0, así λV es un entorno de 0, ahora probaremos que $\alpha(\lambda V) \subset \lambda V$ para $|\alpha| \leq 1$. Sabemos que $\alpha V \subset V$ para $|\alpha| \leq 1$ ya que $V \in \mathfrak{B}$. Luego, $\lambda\alpha V \subset \lambda V$ así $\alpha(\lambda V) \subset \lambda V$. Por tanto λV es balanceado. Luego $\lambda V \in \mathfrak{B}$. Además, por proposición 12. la topología de L es invariante bajo traslaciones.
Recíprocamente, sea $\mathfrak{T}$ una topología invariante bajo traslaciones que posee una base de entornos de 0 $\mathfrak{B}$, que cumple las propiedades a), b) y c). Para probar la continuidad de la adición, sean $(a, b) \in L \times L$ y V un entorno cualquiera de $a+b$. Así $U = V - (a+b)$ es un entorno de 0, entonces existe $U' \in \mathcal{B}$ tal que $U' + U' \subset V - (a + b)$. Luego $(a + U') + (b + U') \subset V$. Con $W = (a + U') \times (b + U')$ en $\mathfrak{T}_{L\times L}$, así $+(W) = (a + U') + (b + U')$, de donde $+(W) \subset V$, Por tanto el mapeo $(x, y) \longmapsto x + y$ es continuo. Para probar la continuidad del mapeo $(\lambda\ ,\ x) \longmapsto \lambda x$, sean λ_0 , x_0 elementos fijos de K y L respectivamente. Sea $V \in \mathfrak{B}$, por a) existe $W \in \mathfrak{B}$ tal que $W + W \subset V$. Como por b) W es absorbente, existe un número real $\epsilon > 0$ tal que $(\lambda - \lambda_0)x_0 \in W$ cuando $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$. Luego sea $\mu \in K$ que satisface c), entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu^{-n}| = |\mu|^{-n} \geq |\lambda_0| + \epsilon$. Sea $W \in \mathfrak{B}$ definido por $W = \mu^n U$. Como W es balanceado, la relación $x - x_0 \in W$ y $|\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon$, luego $\lambda(x - x_0) \in W$ y así la identidad $\lambda x = \lambda_0 x_0 + (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda(x - x_0)$ implica que $\lambda x \in \lambda_0 x_0 + W + W \subset \lambda_0 x_0 + V$. Por tanto, se cumple la continuidad del mapeo $(\lambda\ ,\ x) \longmapsto \lambda x$.

□

El siguiente resultado muestra que un filtro base induce una topología.

Corolario 1. *Si L es un espacio vectorial sobre K y $\mathfrak{B}$ es un filtro base en L teniendo las propiedades de la proposición 13, entonces $\mathfrak{B}$ es una base de entornos de 0 para una única topología $\mathfrak{T}$ tal que $(L\ ,\ \mathfrak{T})$ es un espacio vectorial topológico sobre K.*

Demostración. Sea $\mathfrak{T}$ una familia de subconjuntos de L definido como $\mathfrak{T} = \{V \subset L :\ \forall a \in V,\ \ \exists W \in$ *tal que* $a + W \subset V\}$. Luego $\mathfrak{T}$ es una topología en L, ya que $\emptyset \in \mathfrak{T}$ *y* $L \in \mathfrak{T}$. para probar que la unión arbitraria de elementos de $\mathfrak{T}$ se queda en $\mathfrak{T}$, se sigue por cómo está definida $\mathfrak{T}$. Luego, para probar que es estable con respecto a la intersección finita, sean V_1 , $V_2 \in \mathfrak{T}$, debemos probar que $V_1 \cap V_2 \in \mathfrak{T}$. Si $a \in V_1 \cap V_2$, entonces

$a \in V_1$ y $a \in V_2$ luego, para V_1 , V_2 existen W_1 , $W_2 \in \mathfrak{B}$ tal que $a + W_1 \subset V_1$ y $a + W_2 \subset V_2$, luego $a + (W_1 \cap V_2) \subset V_1 \cap V_2$. Como $W_1 \cap W_2 \in \mathfrak{B}$, existe $W_3 \in \mathfrak{B}$ tal que $W_3 \subset W_1 \cap W_2$ así $a + W_3 \subset V_1 \cap V_2$ por tanto $V_1 \cap V_2 \in \mathfrak{T}$. Luego, debemos probar que la topología $\mathfrak{T}$ coincide con la estructura del espacio vectorial en L. Primero probaremos que $\mathfrak{B}$ es una base de entornos de 0 en la topología $\mathfrak{T}$, por cómo esta definida $\mathfrak{T}$, si V es un entorno abierto de 0 en $\mathfrak{T}$, existe $W \in \mathfrak{B} \subset V$. Luego, es suficiente probar que todo conjunto en $\mathfrak{B}$ es de nuevo un entorno de 0. Ahora sea $W \in \mathfrak{B}$ y sea W^0 definido como $x \in W^0$ si y sólo si existe un conjunto $W_1 \in \mathfrak{B}$ tal que $x + W \subset W$. Luego $0 \in L$, está contenido en cada conjunto de $\mathfrak{B}$, ya que $0 \in W \subset W^0$. Ahora, probaremos que W^0 es un abierto en la topología $\mathfrak{T}$. Lo que implica que W sea un entorno de 0 en la topología. Es suficiente mostrar que para todo $a \in W^0$ podemos encontrar un conjunto $W_2 \in \mathfrak{B}$ tal que $a + W_2 \subset W^0$. Sea $a \in W^0$, entonces por como está definido W^0, existe $W_1 \in \mathfrak{B}$ tal que $a + W_1 \subset W$, por a) existe W_2 tal que $W_2 + W_2 \subset W_1$, así $a + (W_2 + W_2) \subset W$, así $(a + W_2) + W_2 \subset W$ es decir que $a + W_2 \subset W^0$ por tanto W es un entorno de 0. Así, $\mathfrak{B}$ es una base de entornos de 0 en $\mathfrak{T}$. Luego por como está definida $\mathfrak{T}$, es invariante bajo traslaciones. Ahora probar que $\mathfrak{T}$ es única, para ello sea $\mathfrak{T}'$ otra topología en L, que es compatible con la estructura del espacio vectorial, para la cual $\mathfrak{B}$ es una base de entornos de 0, entonces para todo conjunto de la forma $x + W$, donde $x \in L$ y $W \in \mathfrak{B}$, forman una base para $\mathfrak{T}'$ y $\mathfrak{T}$. Por tanto $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}$. Luego como $\mathfrak{B}$ es una base de entornos para 0 que satisface a), b) y c) y además $\mathfrak{T}$ es una traslación invariante, $(LT)_1$ y $(LT)_2$ se satisfacen, así $(L , \mathfrak{T})$ es un espacio vectorial topológico sobre K.

□

Proposición 14. *Si L es un espacio vectorial topológico y $x \in L$, cada entorno de x contiene un entorno cerrado de x. En particular la familia de todos los entornos cerrados de 0, forma una base de entornos para 0.*

Demostración. Sea U un entorno de 0, y sea $x \in L$. Como U es un entorno de 0, existe W entorno abierto de 0 tal que $W + W \subset U$, luego sea $y \in \bar{W}$ así $(y - W) \cap W \neq \emptyset$.

Así $\bar{W} \subset W + W \subset U$, así $\bar{W} \subset U$ de donde $\bar{W}$ es un entorno de 0. Además, como U es un entorno de 0, $x + U$ es un entorno de x, así $x + \bar{W}$ también es un entorno de x y como $\bar{W} \subset U$, entonces $x + \bar{W} \subset x + U$. Por tanto todo entorno de x contiene un entorno cerrado de x.

□

Corolario 2. *Si L es un espacio vectorial topológico y $\mathfrak{B}_0$ es alguna base de entornos de 0, entonces el cubrimiento balanceado cerrado del conjunto $U \in \mathfrak{B}_0$ forma nuevamente una base de entornos para 0.*

Demostración. Sea $U \in \mathfrak{B}_0$, luego U es un entorno de 0, así para U existe U' un entorno de 0 y un número real $\epsilon > 0$ tal que $\lambda U' \subset U$ cuando $|\lambda| < \epsilon$, por la continuidad del producto por escalar. Luego sea $W = \{\lambda U' : \ |\lambda| < \epsilon\} \subset U$ un entorno de 0, además W es balanceado. Ahora por la proposición 14, para W existe $\bar{W}$, un entorno cerrado de 0, y por proposición 12, $\bar{W}$ es balanceado. Así $\mathfrak{B'}_0 = \left\{\bar{W} : \bar{W} \ \ es \ \ un \ \ entorno \ \ balanceado \ \ cerrado \ \ de \ \ 0\right\}$ forma una base de entornnos para 0.

□

Corolario 3. *Un espacio vectorial topológico es Hausdorff si y sólo si para cada elemento diferente de cero $x \in L$, existe un entorno de cero U tal que $x \notin U$.*

Demostración. Sea $x \neq 0$. Como L es Hausdorff, $\exists V(x), U(0)$ tales que $U \cap V = \emptyset$, luego $x \notin U$.

Recíprocamente, sean $x, y \in L$ tales que $x \neq y$.
Si $x = 0$, entonces $y \neq 0$, luego por hipótesis $\exists U(0)$ tal que $y \notin U$ y por proposición 14, $\exists W \subset U$ un entorno cerrado de cero. Luego $0 \in int(W) \subset W \subset U$. Ya que $y \notin U$, entonces $y \in W^c$, donde W^c es abierto, luego L es Hausdorff.
Si $x \neq 0$, como $x \neq y$, $y - x \neq 0$. Por hipótesis $\exists U(0)$ talque $y - x \notin U$. Así $V = y + U$ es un entono de y. Afirmamos que $x \notin V$. Supongamos que $x \in V$, entonces

$x = y + z,\ z \in U$, luego $x - y = z \in U$ lo que es una contradicción. Por proposición 14, $\exists W \subset V$ entorno cerrado de y, luego $y \in int(W)$ y $x \in W^c$, por tanto L es Hausdorff.

$\square$

Corolario 4. *Todo espacio vectorial topológico Hausdorff X es un espacio regular.*

Demostración. Por definición un espacio regular es un espacio Hausdorff y que para cada punto existe una base de entornos cerrados. Por hipótesis, X es Hausdorff, basta probar que para cada punto existe una base de entornos cerrados. Sea $x \in X$, por proposición 14, para cada $U \in \mathcal{N}_x$ existe un entorno cerrado V de x tal que $V \subset U$. Sea $\mathfrak{B} = \{V : es\ un\ entorno\ cerrado\ de\ x\ y\ V \subset U,\ U \in \mathcal{N}_x\}$. Como $x \in V$, $\forall V \in \mathfrak{B}$, $\emptyset \notin \mathfrak{B}$, luego, sean $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}$. Como intersección finita de cerrados es cerrado y además $V_1 \cap V_2$ es entorno de x, $V_1 \cap V_2 \in \mathfrak{B}$. Así, $\mathfrak{B}$ es una base de entornos cerrados de x. Por lo tanto, X es regular. $\square$

Definición 69. *Sea L un espacio vectorial. $f : L \longrightarrow L$ definida por $f(x) = x + x_0$, donde $x_0 \in L$ fijo se llama una traslación en L.*

Definición 70. *Una uniformidad sobre un espacio vectorial L es llamada **invariante bajo traslaciones** si tiene una base $\mathcal{U}$ tal que $(x\ ,\ y) \in \mathrm{N}$ es equivalente a $(x+z\ ,\ y+z) \in \mathrm{N}$, para cada $z \in L$ y cada $\mathrm{N} \in \mathcal{U}$.*

Proposición 15. *Sea L un espacio vectorial topológico con una topología $\mathfrak{T}$. $\mathfrak{T}$ puede ser derivada de una única uniformidad $\mathcal{U}$ que es invariante bajo traslaciones. Si $\mathfrak{B}$ es alguna base de entorno de 0. la familia $\mathrm{N}_V = \{(x\ ,\ y)\ : x - y \in \mathrm{V}\}$; $\mathrm{V} \in \mathfrak{B}$ es una base para $\mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $(L, \mathfrak{T})$ un espacio vectorial topológico, sea $\mathfrak{B}$ la base de entornos de cero, probaremos que $P = \{N_V : V \in \mathfrak{B}\}$ forma una base para un filtro sobre $L \times L$.
i) $P \neq \emptyset$ puesto que $\forall\ V \in \mathfrak{B}$, $0 \in V$, entonces $(0,0) \in N_V$, $N_V \neq \emptyset$, $\forall N_V$ así $P \neq \emptyset$.
ii) $N_V\ ,\ N_W \in P$, entonces $\exists M \in \mathfrak{B}$ tal que $M \subset V \cap W$, luego $N_M \subset N_U \cap N_W$. Así P es una base de filtros sobre $L \times L$ para la uniformidad $\mathcal{U}$ invariante bajo la traslación

generando la topología $\mathfrak{T}$ de V. Si $\mathcal{U}_1$ es otra uniformidad con estas propiedades existe una base $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{U}_1$ constituida de conjuntos invariantes bajo traslación tal que los conjuntos $U_M = \{x - y/(x, y) \in M\}$, $M \in \mathfrak{M}$ forma una base de entornos de cero para $\mathfrak{T}$, puesto que $U_M \subset V$, entonces $M \subset N_V$, entonces tenemos que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1$. Así N_V es una base para $\mathcal{U}$ con $\mathfrak{B}$ la base de entornos de 0. □

Proposición 16. *Sea L un espacio vectorial topológico Hausdorff sobre K. Existe un espacio vectorial topológico Hausdorff completo $\tilde{L}$ sobre K que contiene a L como un subespacio denso; $\tilde{L}$ es único bajo isomorfismo. Además para alguna base de entornos $\mathfrak{B}$ en L la familia $\mathfrak{M} = \left\{\overline{V} : V \in \mathfrak{B}\right\}$ de cerraduras en $\tilde{L}$ es una base de entornos para 0 en $\tilde{L}$*

Demostración. Por teorema 1, se tiene que existe $\tilde{L}$ un espacio uniforme Hausdorff completo, el cual contiene a L como subespacio denso, tenemos que $\tilde{L}$ es único salvo isomorfismo, luego por proposición 12

$+ : L \times L \to \tilde{L}$

$(x, y) \mapsto x + y$

$* : K \times L \to \tilde{L}$

$(\lambda, x) \mapsto \lambda x.$

son uniformemente continuas. Como éste mapeo tiene una única extensión continua de $\tilde{L} \times \tilde{L}$ en $\tilde{L}$. Sea $\mathfrak{B}$ una base de entornos de cero en $\mathfrak{T}$, entonces N_V, $V \in \mathfrak{B}$ es base de $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}$. Luego por la continuidad de la adición, dado $T \in \mathfrak{T}$, $\exists S \times S \in \mathfrak{T} \times \mathfrak{T}$ tal que $S + S \subset T$, asociado a S tenemos N_S y a T tenemos N_T, ahora dado $\tilde{u} \in \tilde{U}$, $\exists u \in U_{\mathfrak{T}}$ tal que $u \subset \tilde{u}$, pero $\{N_V\}_{V \in \mathfrak{B}}$ es una base de $U_{\mathfrak{T}}$, entonces $\exists T \in \mathfrak{T}$ tal que $N_T \subset U$, luego $N_S + N_S \subset N_T \subset U \subset \tilde{U}$ tenemos que dado $\tilde{u} \in \tilde{U}$, $\exists N_S + N_S \in U_{\mathfrak{T}} \times U_{\mathfrak{T}}$ tal que $N_S + N_S \subset \tilde{U}$ lo que demuestra la continuidad uniforme. En efecto, $(a, b) \in N_S \Rightarrow a - b \in S$ y $(c, d) \in N_S \Rightarrow c - d \in S$, entonces $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in N_T$ dado que $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) \in T$, luego, $+ : \tilde{L} \times \tilde{L} \longrightarrow L$ y $* : K \times \tilde{L} \longrightarrow L$ transforman a $\tilde{L}$ en un espacio vectorial topológico sobre K. Puesto que $\{N_V : V \in \mathfrak{B}\}$ es base de la uniformidad de L, asi $\overline{N_V}$ es la base de la uniformidad $\tilde{U}$ de $\tilde{L}$ y además

$N_V = \overline{N_V}$. Luego $\tilde{\mathfrak{B}} = \{\overline{V} : V \in \mathfrak{B}\}$ es una base de entornos de cero en $\tilde{L}$. Ahora demostraremos que la topología $\tilde{\mathfrak{T}}$ definida por $\tilde{U}$ hace a $\tilde{L}$ un espacio vectorial topológico. Es claro que $\tilde{\mathfrak{T}}$ es invariante bajo traslaciones pues tomamos a $\overline{N_V} = N_{\overline{V}}$, también como $\mathfrak{B}$ satisface la proposición 13, $\tilde{\mathfrak{B}}$ satisface a) y c) puesto que: $\overline{U}+\overline{U} = \overline{U}+\overline{U} \subset \overline{V}$ y c) $V \in \mathfrak{B} \Rightarrow \lambda V \in \mathfrak{B} \Rightarrow \lambda\overline{V} \in \tilde{\mathfrak{B}}$ dado que $\overline{V} \in \tilde{\mathfrak{B}} \Rightarrow \lambda\overline{V} \in \tilde{\mathfrak{B}}$.

b) Sea $V \in \mathfrak{B}$, existe un entorno de cero balanceado tal que $\overline{U+U}$ en $\tilde{L}$ es entorno de cero balanceado y $\overline{U}+\overline{U} \subset \tilde{L}$, luego, sea $\tilde{X} \in \tilde{L}$, $\exists$ $\mathfrak{F}$ filtro de Cauchy en L convergente a $\tilde{X}$ y $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F - F \subset U$. Sea $x_0 \in F$ arbitrario, puesto que U es absorbente $\exists\lambda \in K$ tal que $x_0 \in \lambda U$ y como U es absorbente se asume que $|U| \geq 1$, además $F - x_0 \subset U \Rightarrow F \subset x_0 + U$ y $\tilde{X} \in F \subset \overline{U+U}$, es decir, $\lambda\tilde{X} \in \overline{U+U}$, $\forall\tilde{X} \in \tilde{L}$, así queda probado b), la unicidad se obtiene del hecho de que $(\tilde{L}, \tilde{\mathfrak{T}})$ es espacio uniforme. □

Proposición 17. *Sea L un espacio vectorial sobre K y sean $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}_2$ topologías Hausdorff bajo las cuales L es un espacio vectorial topológico y tal que $\mathfrak{T}_1$ es más fina que $\mathfrak{T}_2$. Si $(L, \mathfrak{T}_1)$ tiene una base de entornos para 0 que consiste de conjuntos completos en $(L, \mathfrak{T}_2)$, entonces $(L, \mathfrak{T}_1)$ es completo.*

Demostración. Sea $\mathfrak{F}$ un filtro de Cauchy en $(L, \mathfrak{T}_1)$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ las uniformidades asociadas a $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ respectivamente. Por hipótesis, existe $\mathfrak{B}_1$ una $\mathfrak{T}_1$-base de netornos de cero en L consistiendo de conjuntos completos en $(L, \mathfrak{T}_2)$. Sea $V_1 \in \mathfrak{B}_1$, luego $N_{V_1} \in \mathcal{M}_1$. Como $\mathfrak{F}$ es un filtro de Cauchy en $(L, \mathfrak{T}_1)$, por definición, existe $F_0 \in \mathfrak{F}$ tal que $F_0 \times F_0 \subset N_{V_1}$, y como $N_{V_1} = \{(x, y) \in L \times L :\ x - y \in V_1\}$, entonces $F_0 - F_0 \subset V_1$. Sea $y \in F_0$. La familia $\{y - F :\ F \in \mathfrak{F}\} = \mathfrak{F}'$ es un filtro base Cauhy para $\mathcal{M}_2$, para el cual V_1 es completo. Como $y - F_0 \subset V_1$ y $(L, \mathfrak{T}_2)$ es Hausdorff, $\exists!$ $\mathfrak{T}_2$-límite $y - x_0$ para $\mathfrak{F}'$. Como V_1 es completo en $(L, \mathfrak{T}_2)$, entonces es $\mathfrak{T}_2$-cerrado y tenemos que $F_0 - x_0 \subset V_1$ o que $F_0 \subset x_0 + V_1$, donde V_1 es arbitrario, esto muestra que $\mathfrak{F}$ es más fino que el filtro de entornos de x_0, así $(L, \mathfrak{T}_1)$ es completo. □

2.2. Espacio Producto, Subespacios, Suma Directa y Espacio Cociente

Definición 71. *Sea* $\{L_\alpha \,:\, \alpha \in \mathrm{A}\}$ *una familia de espacios vectoriales sobre el mismo campo* K*. El producto cartesiano* $L = \prod_\alpha L_\alpha$ *es un espacio vectorial sobre* K *si para* $x = (x_\alpha)$*,* $y = (y_\alpha) \in L$ *y* $\lambda \in K$ *la suma y la multiplicación por escalar están definidas por* $x + y = (x_\alpha + y_\alpha)$*,* $\lambda x = (\lambda x_\alpha)$*. Si* $(L_\alpha\ ,\ \mathfrak{T}_\alpha)$ $(\alpha \in A)$ *son espacios vectoriales topológicos sobre* K*, entonces* L *es un espacio vectorial topológico bajo la topología producto* $\mathfrak{T} = \prod_\alpha \mathfrak{T}_\alpha$ ***(Topología producto).***

Proposición 18. *Si* $(L, \mathfrak{T})$ *es un espacio vectorial topológico y* M *es un subespacio de* L*, la clausura* $\overline{M}$ *en* $(L, \mathfrak{T})$ *es también un subespacio de* L*.*

Demostración. Sea L un espacio vectorial topológico y sea $M \subset L$, ahora debemos probar que $\overline{M} \subset L$. Sean $a\ ,\ b \in \overline{M}$, sea $U(a+b)$, luego como $f : L \times L \to L$
$(a, b) \mapsto a + b$ es continua. Así $(a, b) \in f^{-1}(U)$ que es un abierto en $\overline{M} \times \overline{M}$, luego, $\exists V(a)$ y $W(b)$, Sean $a\ ,\ b \in V \times W \subset f^{-1}(U) \Rightarrow f(V \times W) \subset U$, como $V \cap M \neq \emptyset$ y $W \cap M \neq \emptyset$, entonces $(V \cap M) \times (W \cap M) \neq \emptyset$.
Sea $(x, y) \in (V \cap M) \times (W \cap M)$, entonces $x \in V \cap M$ e $y \in W \cap M$, así, $x + y \in U$ y $x + y \in M$, entonces $x + y \in U \cap M$, entonces $U \cap M \neq \emptyset$, es cerrado bajo la suma.
Sea $P : \mathbb{K} \times L \to L$,
$(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ con $v \in \overline{M}\ ,\ \lambda \in \mathbb{K}$, sea $U(\lambda v)$, como P es continua, $P^{-1}(U)$ es abierto, así $\exists W \subset \mathbb{K}$ y $Z \subset L$ tal que $(\lambda, v) \in W \times Z \subset P^{-1}(U)$, donde $Z \cap M \neq \emptyset$ y $W \times (Z \cap M) \neq \emptyset$. sea $(\lambda, x) \in W \times (Z \cap M) \subset P^{-1}(U)$, entonces $\lambda x \in U$ *y* $\lambda x \in M$, así, $U \cap M \neq \emptyset$, entonces es cerrado bajo el producto por escalar, por lo tanto $\overline{M} \subset L$. □

Definición 72. *Si* L *es un espacio vectorial,* M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *subespacios de* L *donde el cubrimiento lineal es* L *y tal que* $M_i \cap (\sum_{j \neq i} M_j) = \{0\}$ *para cada* i*, entonces* L *es llamado* ***suma directa algebraica*** *de los subespacios* $M_i (i = 1, 2, \ldots, n)$

Se sigue que cada $x \in L$ tiene una representación única $x = \sum_i x_i$ donde $x_i \in M_i$, y el mapeo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow \sum_i x_i$ es un isomorfismo algebraico de $\prod_i M_i$ sobre L. El mapeo $u_i \ : \ x \longrightarrow x_i$ es llamado **la proyección** de L sobre M_i asociado con la descomposición.

Por $(LT)_1$ es claro que el mapeo $\psi : (x_i, \ldots, x_n) \longrightarrow \sum_i x_i$ de $\prod_i M_i$ sobre L es continuo; si ψ es un isomorfismo (ver definición 31), L es llamado **suma directa** de los subespacios $M_i(i, \ldots, n)$ y podemos escribir $L = M_1 \bigoplus M_2 \bigoplus \ldots \bigoplus M_n$.

Proposición 19. *Sea un espacio vectorial topológico L la suma directa algebraica de n subespacios $M_i(i = 1, \ldots, n)$, entonces $L = M_1 \bigoplus \ldots \bigoplus M_n$ si y sólo si las proyecciones asociadas u_i son continuas.*

Demostración. Sea L un espacio vectorial topológico, L es la suma directa algebraica de los n subespacios $M_i, \ \ i = 1, ..., n$, $u_i : L \to M_i$ las proyecciones asociadas, luego, sea $u_\alpha : L \to M_\alpha$. Sea $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in L$, donde $u_\alpha(x) = x_\alpha$, ahora, dado que $\psi : \prod M_i \to L$ ($\psi : (x_i, \ldots, x_n) \longrightarrow \sum_i x_i$) es continua, entonces $\psi^{-1} : L \to \prod M_i$ es continua, si hacemos la composición $u_\alpha = \pi_\alpha \circ \psi^{-1}$ observamos que u_α es continua, dado que $\pi_\alpha \circ \psi^{-1}(x) = \pi_\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = x_\alpha$, ψ^{-1} es continua y π_α es continua, composición de continuas es continua, así u_α es continua, por tanto las proyecciones asociadas son continuas.

Recíprocamente, las proyecciones u_i son continuas, demostrar que $\psi : \prod M_i \to L$ es un isomorfismo, por $(LT)_1$ ψ es continua. Ahora tenemos $\psi^{-1} : L \to \prod M_i$, sea $x = x_1 + x_2 + ... + x_n \in L$ entonces $\psi^{-1}(x) = (u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x))$ la cual es continua, sabemos $f : A \to C \times D$ es continua si $f_1 : A \to C$ y $f_2 : A \to D$ son continuas. así, ψ y ψ^{-1} son continuas, por lo tanto ψ es un isomorfismo. □

Nota 1. *Como el mapeo e (mapeo identidad) es continuo sobre L, la continuidad de $n - 1$ de estas proyecciones implican la continuidad de la última.*

Definición 73. *Un subespacio N de un espacio vectorial topológico L tal que $L = M \bigoplus N$ es llamado un subespacio* ***complementario*** *de M.*

Definición 74. *Sea $(L, \mathfrak{T})$ un espacio vectorial topológico sobre K y sea M un subespacio de L y sea $\phi : L \longrightarrow L/M$ el mapeo natural, donde $\phi(x) = x + M$. La **topología cociente** $\tilde{\mathfrak{T}}$ está definida como la topología más fina sobre L/M tal que ϕ es continuo. Por lo tanto los conjuntos abiertos en L/M son los conjuntos $\phi(H)$ tal que $H + M$ es abierto en L; ya que $G + M$ es abierto en L cuando G lo es, $\phi(G)$ es abierto en L/M para cada abierto $G \subset L$; por lo tanto ϕ es un mapeo abierto. Por lo tanto $(L/M, \tilde{\mathfrak{T}})$ es un espacio vectorial topológico sobre K llamado el **espacio cociente** de $(L\ ,\ \mathfrak{T})$ sobre M.*

Proposición 20. *Si L es un espacio vectorial topológico y si M es un subespacio de L, luego L/M es un subespacio de Hausdorff si y sólo si M es cerrado en L.*

Demostración. Como cada conjunto con un número finito de puntos en un espacio Hausdorff X es cerrado, $\{0\} \subset L/M$ es cerrado. Sea ϕ el mapeo natural de L sobre L/M. Como ϕ es continuo, $\phi^{-1}(\{0\}) = M$ es cerrado en L.

Recíprocamente, sea $\tilde{x} \neq 0 \in L/M$. Como $\tilde{x} \neq 0$, $\exists x \in L$ tal que $x \notin M$ con $\phi(x) = \tilde{x}$. Por hipótesis M es cerrado, así, M^c es un entorno de x y $\phi(M^c)$ es un entorno de $\tilde{x}$ que no contiene a 0. Luego por proposición 14 $\phi(M^c)$ contiene un entorno cerrado V de $\tilde{x}$ que no contiene a 0. Así V^c es un entorno de 0 que no contiene a $\tilde{x}$. Así, por corolario 3, L/M es Hausdorff. $\square$

Proposición 21. *Sea L un espacio vectorial topológico y sea L la suma directa algebraica de los subespacios M, L. Entonces L es la suma directa topológica de M y N, $L = M \bigoplus N$, si y sólo si el mapeo v que asocia a las clases de equivalencia módulo M su representación única en N es un isomorfismo del espacio vectorial topológico L/M sobre el espacio vectorial topológico N.*

Demostración. Sea μ la proyección de L sobre N y ϕ el mapeo natural de L sobre L/M, Entonces $\mu = v \circ \phi$. Sea $L = M \bigoplus N$. Como $v = \mu \circ \phi^{-1}$ y ϕ^{-1} y μ son continuas, v es continua. Luego $v^{-1} = \phi \circ \mu^{-1}$. Como ϕ y μ^{-1} son continuas, v^{-1} es continua. Por lo que v es un isomorfismo de L/M sobre N.

Recíprocamente, si v es un isomorfismo, entonces v es continua y luego μ es continua. Así por proposición 19, $L = M \bigoplus N$ $\square$

2.3. Espacios Vectoriales Topológicos de Dimensión Finita

Por la **dimensión** de un espacio vectorial topológico sobre K entenderemos la dimensión algebraica de L sobre K. K_0 denota el espacio vectorial topológico 1-dimensional obtenido al considerar a K como un espacio vectorial sobre si mismo.

Lema 4. *Sea L de dimensión finita y sea $\psi : L \longrightarrow K_0$ un mapeo lineal continuo. ψ es continuo si y sólo si es continuo en cero.*

Demostración. Por hipótesis ψ es continuo, entonces es continuo en todo punto, así es continuo en cero.
Recíprocamente, ψ es continuo en cero, entonces $\forall V(0_{K_0})$, $\exists U(0_L)$ tal que $\psi(U) \subset V$. Luego, sea $a \neq 0 \in L$, $a = \lambda x_0$, para algún $\lambda \in K$, sea $V(\psi(a)) = V(\lambda) = \lambda + V(0)$, así, $\exists U(0)$ tal que $\psi(U) \subset V$, $\lambda x_0 + U(0) = U(\lambda x_0)$, así, $\psi(\lambda x_0 + U(0)) = \lambda + \psi(U) \subset \lambda + V = V(\lambda)$, por tanto, ψ es continuo. □

Proposición 22. *Todo espacio vectorial topológico Hausdorff 1-dimensional L sobre K es isomorfo a K_0; más precisamente $\lambda \longrightarrow \lambda x_0$ es un isomorfismo de K_0 sobre L para cada $x_0 \in L$, $x_0 \neq 0$ y cada isomorfismo de K_0 sobre L es de esa forma.*

Demostración. Por $(LT)_2$ se sabe que para cada $x_0 \in L$, $\lambda \to \lambda x_0$ es continua. Además, como L es unidimensional, esta función es un isomorfismo algebraico de K_0 en L. Para ver que $\lambda x_0 \to \lambda$ es continua, es suficiente probar que lo es en cero, por lema anterior $\lambda x_0 \to \lambda$ es continua. Finalmente si u es un isomorfismo de K_0 sobre L tal que $u(1) = x_0$, entonces u es de la forma $\lambda \to \lambda x_0$. □

Teorema 2. *Todo espacio vectorial topológico Hausdorff L de dimensión finita n sobre un campo valuado K es isomorfo a K_o^n. Más precisamente, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longrightarrow \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ es un isomorfismo de K_o^n sobre L para cada base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de L y cada isomorfismo de K_0^n de L es de esta forma.*

Demostración. La prueba se hará por inducción. En el resultado anterior se probó que se cumple para $n = 1$. Supongamos que se cumple para $n = k-1$. Si $\{x_1, ..., x_n\}$ es una base de L y L es la suma algebraica de M y N con bases $\{x_1, ..., x_{n-1}\}$, $\{x_n\}$ respectivamente. Por hipótesis inductiva M es isomorfo con K_0^{n-1}; como K_0 es completo, M es completo y como L es Hausdorff, M es cerrado. Por proposición 20, L/M es Hausdorff y de dimensión 1. Así el mapeo v que asocia a cada clase de equivalencia módulo M su único representante en N es un isomorfismo por resultado anterior. Así por proposición 21, $L = M \bigoplus N$ lo que significa que $(x_1, ..., x_n) \to \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$ es un isomorfismo de $K_0^{n-1} \times K_0 = K_0^n$ sobre L. □

Proposición 23. *Sea L un espacio vectorial topológico sobre K y sea K completo. Si M es un subespacio cerrado de L y N es un subespacio de L de dimensión finita. Entonces $M + N$ es cerrado en L.*

Demostración. Sea ϕ el mapeo natural de L sobre L/M. L/M es Hausdorff por proposición 20. Como $\phi(N)$ es un subespacio de dimensión finita de L/M por teorema 2, es completo, así, $\phi(N)$ es cerrado en L/M, esto implica que $\phi^{-1}(\phi(N)) = M + N$ es cerrado por ser ϕ continuo. □

Proposición 24. *Sea K_0 completo, sea N un espacio vectorial topológico Hausdorff de dimensión finita sobre K, y sea L algún espacio vectorial topológico sobre K. Cada mapeo lineal de N en L es continuo.*

Demostración. Sea n la dimensión de N, si la dimensión de N es positiva, N es isomorfo con K_0^n por teorema 2, así cada mapeo de K_0^n en L es un isomorfismo de la forma $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n$ con $y_i \in L$, el cual es continuo por $(LT)_1$ y $(LT)_2$. Luego si la dimensión de N es cero se cumple por definición. □

Definición 75. *La codimensión de un subespacio M de un espacio vectorial L es la dimensión de L/M. N es un subespacio complementario de M si $L = M + N$ es una suma directa algebraica.*

Proposición 25. *Sea L un espacio vectorial topológico sobre el campo completo K y sea M un subespacio cerrado de codimensión finita, entonces $L = M \bigoplus N$ para cada subespacio algebraico complementario N de M.*

Demostración. Como L es un espacio vectorial topológico en L, y M es un subespacio cerrado de dimensión finita en L, entonces por proposición 20, L/M es un espacio vectorial topológico de Hausdorff de dimensión finita. Luego sea $v : L/M \longrightarrow N$, el mapeo que asocia a cada clase de equivalencia módulo M su único representante en N, v es continuo por proposición 21. Ahora sea $\phi : L \longrightarrow L/M$, ϕ es continuo ya que M es cerrado de dimensión finita, así $\phi(M)$ es un subespacio de dimensión finita de L/M, y L/M es completo, por teorema 2, así $\phi(M)$ es cerrado en L/M. Ahora sea la proyección $u = v \circ \phi$ es continua así por proposición 19, $L = M \bigoplus N$ □

Teorema 3. *Sea K completo si $L \neq \{0\}$ es un espacio vectorial topológico Hausdorff sobre K, entonces K es localmente compacto y L es de dimensión finita.*

Demostración. Sabemos por la proposición 22 que todo subespacio de dimensión 1 en L es completo, entonces es cerrado en L y por tanto localmente compacto, de ahí que K es localmente compacto. Ahora, sea V un entorno balanceado compacto de 0 en L, y sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión no nula en K que contiene elementos distintos de 0. Primero probaremos que $\{\lambda_n V : \ n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos de 0 en L, Dado U un entorno de 0, tomemos a W un entorno balanceado de 0 tal que $W + W \subset U$. Como V es compacto, existen elementos $x_i \in V$ $(i = 1, \cdots, n)$ que satisfacen $V \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k}(x_i + W)$ y existe $\lambda \in K, \ \lambda \neq 0$ tal que $|\lambda_n| \leq |\lambda|$ y $\lambda_n V \subset \lambda V \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k}(\lambda x_i + \lambda W) \subset W + W \subset U$. Ahora probar que $\{\lambda_n V : \ n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos de 0. Sea $\rho \in K$ que satisface $0 < |\rho| \leq 1/2$. Luego V es compacto y ρV es un entorno de 0, así existen elementos y_l $(l = 1, \cdots, m)$ en V para el cual $V \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m}(y_l + \rho V)$. Luego, denotemos por M al subespacio más pequeño de L que contiene a todos los y_l $(l = 1, \cdots, m)$ y probaremos que $M = L$, lo cual completaría la prueba. Supongamos que $M \neq L$, así existe $w \in L \cap M^c$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(w + \lambda_{n_0} V) \cap M \neq \emptyset$ para M el cual es de dimensión finita y es completo por teorema 2, así es cerrado en L donde $\{w + \lambda_n V : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos de w. Ahora sea μ algún número en K tal que $w + \mu V$ intersecta a M (si tal número existe entonces V es absorbente). y sea $\delta = inf|\mu|$. Claramente $\delta \geq |\lambda n_0| > 0$. Luego, tomemos $v_0 \in V$ tal que $y = w + \mu_0 v_0 \in M$, donde $\delta \leq |\mu_0| \leq 3\delta/2$. Por como se definió $\{y_l\}$, existe l_0, $1 \leq l_0 \leq m$, tal que $v_0 = y_{l_0} + \delta v_1$, donde $v_1 \in V$ y por tanto $w = y - \mu_0 v_0 = (y - \mu_0 y_{l_0}) - \mu_0 \rho v_1 \in M + \mu_0 \rho V$. Esto entra en contradicción con la forma que tiene δ. Entonces V es balanceado y entonces $|\mu_0 \rho| \leq 3\delta/4$ por tanto suponer que $M \neq L$ es absurdo. □

2.4. Variedades Lineales e Hiperplanos

Definición 76. *Si L es un espacio vectorial, una* ***variedad lineal*** *en L es un subconjunto que es una traslación de un subespacio $M \subset L$, esto es un conjunto F de la forma $x_o + M$ para algún $x_o \in L$.*

Definición 77. *Dos variedades lineales $x_0 + M$ y $x_1 + N$ se dicen* ***paralelas*** *si bien $M \subset N$ o $N \subset M$.*

Definición 78. *La* ***dimensión*** *de una variedad lineal es la dimensión del subespacio del cual es traslación.*

Definición 79. *Un* ***Hiperplano*** *H en L es una variedad lineal maximal (esto es si $H \subset J$, entonces $J = H$) de* L*.*

Definición 80. *Una línea D en $\mathbb{R}^n$ es llamada un* ***haz de Hiperplano****.*

Definición 81. *Para cada espacio vectorial L sobre K, denotaremos por L^* al* ***dual algebraico*** *de L, que es, el espacio vectorial por la derecha (sobre K) de todas las formas lineales en L.*

Proposición 26. *Dos variedades lineales $x_0 + M$ y $x_1 + N$ son iguales si y sólo si $M = N$ y $x_0 - x_1 \in M$.*

Demostración. Sean $x_0 + M$ y $x_1 + N$ dos variedades lineales, como $x_0 + M = x_1 + N$, tenemos que $x_0 - x_1 + M = N$, entonces, sea $0 \in N$, entonces existe $m \in M$ tal que $x_0 - x_1 + m = 0$, entonces $m = -(x_0 - x_1) \in M$, así $(x_0 - x_1) \in M$, luego también sabemos que $M = x_1 - x_0 + N$, $0 = x_1 - x_0 + n$, con $n \in N$ y $0 \in M$, entonces $n = x_0 - x_1$, así $x_0 - x_1 \in N$, por lo tanto, $x_0 - x_1 \in M$, luego como $x_0 + M = x_1 + N$ y $x_0 - x_1 \in M$, debemos probar que $M = N$, ahora razonando por contradicción, supongamos que $M \subsetneq N$, entonces $n \in x_0 - x_1 + M = \{x_0 - x - 1 + m : m \in M\}$, así $n = x_0 - x_1 + m \in M$, entonces $n \in M$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $M = N$.

Recíprocamente, si $M = N$ y $x_0 - x_1 \in M$, entonces, sea $x \in x_0 + M$, entonces $\exists\ n \in M$ tal que $x = x_0 + M$, ahora, $x = x_0 + x_1 + x_1 + m$, $x = x_1 + m - 1$, donde $m_1 = x_0 - x_1 + m$, así, $x \in x_1 + M$ y $x \in x_1 + N$, luego, sea $x \in x_1 + N$, entonces, $\exists\ n \in N$ tal que $x = x_1 + n$, luego como N es subespacio de L, entonces $-(x_0 - x_1) = x_1 - x_0$, entonces $x = x_1 + x_0 - x_0 + n$, así, $x = x_0 + n_1$, donde $n_1 = x_1 - x_0 + n$, entonces $x \in x_0 + N$ y $x \in x_0 + M$, por lo tanto $x_0 + M = x_1 + N$. □

Proposición 27. *Un subconjunto $H \subset L$ es un hiperplano si y sólo si $H = \{x : f(x) = \alpha\}$ para algún $\alpha \in K$ y algún $f \neq 0 \in L^*$.*

Demostración. Sea H un subconjunto de L, H un hiperplano, así $H = x_0 + M$, $x_0 \in L$ y M un subespacio de L, así $dim\ L/M = 1$, dado que H es maximal. Luego L/M es algebraicamente isomórfico a K_0. Ahora sean $\phi : L \longrightarrow L/M$ el mapeo natural y $g : L/M \longrightarrow K_0$ un isomorfismo, así $f = g \circ \phi$ es una forma lineal, $f \neq 0$ en L^* tal que $H = \{x : f(x) = \alpha\} = x_0 + M$, donde $\alpha = f(x_0)$. Si $H = \{x : f_1(x) = \alpha_1\} = x_0 + M$ es otra representación para H, tomando un $y \in M$ arbitrario, tenemos que $x_0 + y \in x_0 + M$, entonces $f_1(x_0 + y) = \alpha_1$, así, $f_1(x_0) + f_1(y) = \alpha_1$, entonces $f_1(y) = \alpha_1 - f_1(x_0)$, donde tenemos que $\alpha_1 - f_1(x_0)$ es constante $\forall y \in M$, como f_1 es lineal y M un subespacio vectorial, entoces $\alpha_1 - f_1(x_0) = 0$, así $f_1^{-1}(0) = M$, entonces tenemos que $f_1 = g_1 \circ \phi$, donde $g_1 : L/M \longrightarrow K_0$ es un isomorfismo, si ξ es un elemento de L/M para el cual $g(\xi) = 1$ y $g_1(\xi) = \beta$, entonces $f_1(x) = f(x)\beta$ para todo $x \in L$ y $\beta \neq 0 \in K$, por lo tanto, $H = \{x : f(x) = \alpha\}$.

Recíprocamente Sea $f \in L^*$, $f \neq 0$, entonces $M = f^{-1}(0)$ es un subespacio maximal propio de L. Más aún, sí $x_0 \in L$ es tal que $f(x_0) = \alpha$, entonces $H = \{x : \ f(x) = \alpha\} = x_0 + M$, así H es un hiperplano. $\square$

Proposición 28. *Un hiperplano H en un espacio vectorial topológico L es cerrado o denso; $H = \{x : \ f(x) = \alpha\}$ es cerrado si y sólo si f es continua.*

Demostración. Si un hiperplano $H \subset L$ es no cerrado, debe ser denso, ya que de lo contrario, su clausura sería una variedad lineal en L, lo que contradice la maximalidad de H.

Supongamos que H es un hiperplano cerrado homogéneo a la ecuación $f(x) = 0$. Luego L/M es entonces un espacio vectorial topológico Hausdorff de dimensión 1 en K. Luego sea $\phi : L \longrightarrow L/M$ el mapeo canónico y sea $g : L/M \longrightarrow K_0$ un mapeo lineal, g es continuo por proposicion 22, ahora podemos escribir $f = g \circ \phi$, por tanto f, es continua. Recíprocamente, probaremos que $f^{-1}(0)$ es cerrado si y sólo si f es continua. Si f es continua, $f^{-1}(0)$ es cerrado, entonces $\{0\}$ es cerrado en K. Si $f^{-1}(0)$ es cerrado en L, entonces $L/f^{-1}(0)$ es un espacio vectorial topológico Hausdorff (por proposición 20), de dimensión 1. Luego $f = g \circ \phi$ es continua. $\square$

2.5. Conjuntos Acotados

Definición 82. *Un conjunto A de un espacio vectorial topológico L es llamado **acotado** si para cada entorno U de 0 en L, existe $\lambda \in K$ tal que $A \subset \lambda U$.*

Definición 83. *Un sistema fundamental de conjuntos acotados de L es una familia $\mathfrak{B}$ de conjuntos acotados tal que cada subconjunto de L está contenido en uno de los miembros de $\mathfrak{B}$.*

Definición 84. *Un subconjunto B de un espacio vectorial topológico es llamado **totalmente acotado** si para cada entorno $U \in L$ de cero, existe un subconjunto finito $B_0 \subset B$ tal que $B \subset B_0 + U$.*

Proposición 29. *Sea L un espacio vectorial topológico sobre K y sean A y B subconjuntos acotados (totalmente acotados) de L. Entonces los siguientes son subconjuntos acotados (totalmente acotados) de L.*
i) Cada subconjunto de A.
ii) $\overline{A}$.
iii) $A \cup B$, $A + B$ y λA para cada $\lambda \in K$.

Demostración. i) Sea L un espacio vectorial topológico y sean A y B subconjuntos acotados de L, luego tomamos un subconjunto de A. Sea T un subconjunto de A, como A es acotado, existe $\lambda \in K$ y U un entorno de cero, tal que $A \subset \lambda U$, luego como $T \subset A$ entonces $T \subset A \subset \lambda U$, así, $T \subset \lambda U$, entonces para T, existe $\lambda \in K$ y U un entorno de cero, tal que $T \subset \lambda U$, entonces T es acotado, T es un subconjunto arbitrario, Por lo tanto, todo subconjunto de A es acotado.
ii) Por hipótesis tenemos que A es acotado, así para todo entorno U de cero, existe $\lambda \in K$ tal que $A \subset \lambda U$, luego por proposición 14, donde cada entorno de x contiene un entorno cerrado de x, $x \in L$, así, existe un entorno cerrado de cero $\overline{V} \subset U$, donde $A \subset \lambda \overline{V}$, entonces $\overline{A} \subset \overline{\lambda \overline{V}} = \lambda \overline{\overline{V}} = \lambda \overline{V} \subset \lambda U$, así, $\overline{A} \subset \lambda U$, por lo tanto, $\overline{A}$ es acotado.
iii) Sean A, B subconjuntos acotados de L.
a) Debemos probar que $A \cup B$ es acotado. Sean λ_1, $\lambda_2 \in K$ y U un entorno de cero, tal que $A \subset \lambda_1 U$ y $B \subset \lambda_2 U$ donde K es no discreto. Luego, sea $\lambda_0 \in K$ tal que $|\lambda_0| > Sup(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$, entonces $A \cup B \subset \lambda_0 U$, así, $A \cup B$ es acotado.
b) Ahora probar que $A + B$ es acotado, como A y B son acotados, existen λ_1, $\lambda_2 \in K$ y U un entorno de cero tal que $A \subset \lambda_1 U$ y $B \subset \lambda_2 U$, ahora $A + B \subset \lambda_1 U + \lambda_2 U$, entonces $A + B \subset \lambda_0 (U + U)$, pero sabemos que $U + U$ es entorno de cero, dado que U lo es, entonces $A + B$ es acotado.
c) Probar que λA es acotado, dado que A es acotado, existe $\lambda_1 \in K$ y U un entorno de cero tal que $A \subset \lambda_1 U$, luego sea $\lambda \in K$ tal que $\lambda A \subset \lambda \lambda_1 U$, donde $\lambda \lambda_1 \in K$, así, λA es acotado.
La prueba para totalmente acotados se hace de manera análoga.

□

Corolario 5. *Las propiedades, ser acotado y ser totalmente acotado son preservadas bajo la formación de sumas y uniones finitas y bajo dilataciones $x \to \lambda_0 x + x_0$.*

Demostración. La prueba se hará por inducción.

Sabemos por la proposición anterior que se cumple para $n = 2$. Supongamos que se cumple para $n = k - 1$,es decir, $A_1 + ... + A_{n-1}$ es acotado, si A_i es acotado. Debemos probar para $n = k$, luego $A_1 + A_2 + ... + A_k = (A_1 + A_2 + ... + A_{k-1}) + A_k$ donde $A_1 + A_2 + ... + A_k$ es la suma de dos conjuntos acotados, ya que $A_1 + A_2 + ... + A_{k-1}$ es acotado por hipótesis inductiva, así por el caso base tenemos que $A_1 + A_2 + ... + A_k$ es acotado. Por lo tanto las sumas finitas son acotadas.

La prueba de las demás afirmaciones, se hacen de manera análoga. □

Corolario 6. *El rango de toda sucesión de Cauchy es acotado.*

Demostración. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en L, L es un espacio vectorial topológico. Sean V y W dos entornos balanceados de cero tal que, $V + V \subset W$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in V$, $\forall n, m \geq N$, esto implica que $x_0 \in x_N + V$, $\forall n \geq N$. Sea $s > 1$ tal que $x_n \in sV$, entonces $x_n \in sV + V \subset sV + sV \subset sW$, $\forall n \geq N$. Así, $x_n \in tW$, $\forall n$ y para todo t suficientemente grande, como V y W son balanceados y $\{x_1, x_2, ..., x_{N-1}\}$ es un conjunto finito, entonces toda sucesión de Cauchy es acotada, luego dado que el rango está definido como la misma función o sucesión, así, el rango de toda sucesión de Cauchy es acotado. □

Corolario 7. *La familia de todos los subconjuntos cerrados, balanceados y acotados de un espacio vectorial topológico L es un sistema fundamental de conjuntos acotados.*

Demostración. Sea L un espacio vectorial topológico y sea $\mathfrak{B}$ la familia de conjuntos balanceados, acotados y cerrados de L. Sea A un subconjunto acotado de L, como A es un subconjunto acotado de L y $\mathfrak{B}$ contiene a todos los subconjuntos acotados de L, así, $A \subset B$ donde B es un elemento de $\mathfrak{B}$. Por lo tanto $\mathfrak{B}$ es un sistema fundamental de conjuntos acotados de L. $\square$

Proposición 30. *Sea L un espacio vectorial topológico Hausdorff sobre K y sean A, B subconjuntos compactos de L. Entonces $A \cup B$, $A+B$, λA ($\lambda \in K$) son compactos; si K es localmente compacto, entonces también la estructura balanceada de A es compacta.*

Demostración. Sea L un espacio vectorial topológico.
i) Sean A y B subconjuntos compactos de L, como A es compacto, para toda cubierta abierta $\mathfrak{A}$, $\exists\{A_1, ..., A_n\}$ una subcubierta finita para A, como B es compacto, para toda cubierta abierta $\mathfrak{B}$ $\exists\{B_1, ..., B_n\}$ una subcubierta finita para B, ahora para $A \cup B$ tendremos que si unimos las dos subcubiertas finitas podemos obtener una cantidad finita de abiertos y esta cantidad finita funciona para $A \cup B$, así $A \cup B$ es compacto.
ii) Tenemos que la imagen del espacio compacto $A \times B$ bajo $(x, y) \longmapsto x+y$ es continua por $+$, así $A + B$ es compacto.
iii) Dado que la imagen del espacio compacto $K \times A$ bajo $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ es continua por $*$, así, λA es compacto. La estructura balanceada de A es la imagen continua $K \times A$ donde $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$, dado que K es compacto, así, la estructura balanceada de A es compacta. $\square$

Corolario 8. *La compacidad de subconjuntos de un espacio vectorial topológico Hausdorff es preservado bajo la formación de sumas finitas, uniones finitas y bajo dilataciones.*

Demostración. Se probará que la suma finita de subconjuntos compactos es compacta, para ello se trabajará por inducción. En la proposición anterior se probó que se cumple para $n = 2$. Suponemos que se cumple para $n = k - 1$; es decir, $A_1 + ... + A_{k-1}$ es compacto cuando A_i es compacto en L $n = 1, ..., k - 1$. Sean $A_1, ..., A_n$ conjuntos compactos,luego

$$A_1 + ... + A_k = (A_1 + ... + A_{k-1}) + A_k$$

por hipótesis inductiva $A_1 + ... + A_{k-1}$ es compacto. Luego, por caso base $(A_1 + ... + A_{k-1}) + A_k$ es compacto. Por lo tanto $A_1 + ... + A_k$ es compacto.
Las demás pruebas se hacen de manera análoga. □

Definición 85. ***Una sucesión nula*** *en un espacio vectorial topológico L, es una sucesión que converge a $0 \in L$.*

Proposición 31. *Un subconjunto A de un espacio vectorial topológico L es acotado si y sólo si para cada sucesión nula $\{\lambda_n\}$ en K y cada sucesión $\{x_n\}$ en A, $\{\lambda_n x_n\}$ es una sucesión nula en L.*

Demostración. Sea A acotado y sea V un entorno balanceado de 0 en L. Como A es acotado , $\exists \mu \in K$ $\mu \neq 0$ tal que $\mu A \subset V$. Si $\{\lambda_n\}$ es una sucesión nula en K, entonces existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n| \leq |\mu|$ cuando $n \geq n_0$, así tenemos que $\lambda_n x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$ y $\{x_n\} \subset A$; es decir, $\{\lambda_n x_n\}$ converge a 0.
Recíprocamente, sea A un subconjunto que cumple que para cada sucesión nula $\{\lambda_n\}$ en K y cada sucesión $\{x_n\}$ en A, $\{\lambda_n x_n\}$ es una sucesión nula en L.
Suponga que A es no acotado, entonces existe un entorno de cero U tal que A no está contenido en $\lambda_n U$ para una sucesión $\lambda_n \subset K$. Como K es no discreto, podemos escoger un λ_n tal que $|\lambda_n| \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sea $x_n \in A - \lambda_n U$ $(n \in \mathbb{N})$; así $\lambda_n^{-1} x_n \notin U$, $\forall n$, lo cual es una contradicción por que $\{\lambda_n^{-1}\}$ es una sucesión nula en K. Por lo tanto, A es acotado. □

Proposición 32. *Sean L y M espacios vectoriales topológicos sobre K y sea u un mapeo lineal continuo de L a M. Si B es un subconjunto acotado (totalmente acotado) de L, $u(B)$ es acotado (totalmente acotado) en M.*

Demostración. Si V un entorno de cero en M, entonces $u^{-1}(V)$ es un entorno de cero en L; como B es acotado, $\exists \lambda \in K$ talque $B \subset \lambda u^{-1}(V)$, lo que implica que $u(B) \subset \lambda V$. Por lo tanto, $u(B)$ es acotado.
Si B es totalmente acotado, entonces $B \subset B_0 + u^{-1}(V)$ para algún conjunto finito B_0, así $u(B) \subset u(B_0) + V$. Por lo tanto, $u(B)$ es totalmente acotado. □

Proposición 33. *Si* $\{L_\alpha : \alpha \in A\}$ *es una familia de espacios vectoriales topológicos y si* $L = \prod_\alpha L_\alpha$*, un subconjunto* B *de* L *es acotado si y sólo si* $B \subset \prod_\alpha B_\alpha$ *donde cada* B_α *(*$\alpha \in A$*) es acotado en* L_α*.*

Demostración. Supongamos que B es acotado, así $u_\alpha(B)$ es acotado en L_α, ya que las proyecciones u_α son continuas. Ademas $B \subset u_\alpha(B)$, donde los B_α son los $u_\alpha(B)$, por lo tanto B esta incluido en la productoria de los B_α.
Recíprocamente, sea V un entorno de cero en L. Como $0 \in L$, existe un básico C tal que $0 \in C \subset V$, $C = \prod C_\alpha$, donde $C_\alpha = L_\alpha$ excepto en una cantidad finita $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Como $B_{\alpha_1}, ..., B_{\alpha_n}$ son acotados, existen $\lambda_{\alpha_1}, ..., \lambda_{\alpha_n}$ tales que $B_{\alpha_i} \subset \lambda_{\alpha_i} C_{\alpha_i}$, $i = 1, ..., n$. Se afirma que $B \subset \lambda V$; *donde* $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\alpha_i}$. Sea $x = (x_\alpha) \in B$. Como $x \in B$, $x_\alpha \in \lambda_\alpha C\alpha$, donde $\lambda_\alpha = 1$, $C_\alpha = L_\alpha$ para $\alpha \notin \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Pero $\lambda_{\alpha_i} C_{\alpha_i} \subset \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\alpha_i} C_{\alpha_i}$. Luego, $x_\alpha \in \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\alpha_i} C_{\alpha_i}$. Asi $x \in (\sum_{i=1}^{n} \lambda_{\alpha_i}) \prod C_\alpha \subset \lambda V$. Por lo tanto B es acotado. $\square$

Definición 86. *Un espacio vectorial topológico es* ***quasi-completo*** *si cada subconjunto cerrado y acotado de* L *es completo.*

2.6. Metrizabilidad

Definición 87. *Un espacio vectorial topológico* $(L, \mathfrak{T})$ *es metrizable si la topología* $\mathfrak{T}$ *es metrizable, es decir, si existe una métrica en* L*, cuyas bolas abiertas forman una base para* $\mathfrak{T}$*.*

Teorema 4. *Un espacio vectorial topológico de Hausdorff* L *es metrizable si y sólo si posee una base de entornos contable de 0. En este caso existe una función* $x \longmapsto ||x||$ *en* L *sobre* $\mathbb{R}$ *tal que:*

i) $|\lambda| \leq 1$ *implica que* $||\lambda x|| \leq ||x||$ *para todo* $x \in L$*.*
ii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *para cada* $x \in L$*,* $y \in L$*.*

iii) $||x|| = 0$ *es equivalente con* $x = 0$.

iv) La métrica $(x\ ,\ y) \longmapsto ||x - y||$ *genera la topología de* L.

Demostración. i) Sea $\{ V_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ una base de entornos balanceados de 0 que satisface que

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n \tag{2.1}$$

Para cada subconjunto finito no vacío H de $\mathbb{N}$, definimos el entorno balanceado de 0, V_H por $V_H = \sum_{n\in H} V_n$ y el número real p_H por $p_H = \sum_{n\in H} 2^{-n}$.
Se sigue de la ecuación (2.1) por inducción sobre el número de elementos de H que estas implicaciones se mantienen.

$$p_H < 2^{-n} \Rightarrow n < H \Rightarrow V_H \subset V_n \tag{2.2}$$

Donde $n < H$ significa que $n < k$ para todo $k \in H$.
Definamos la función real valuada $x \longmapsto ||x||$ sobre L por $||x|| = 1$ si x no está contenido en algún V_H y por $||x|| = \underset{H}{inf}\ \{p_H :\ x \in V_H\}$ de otro modo; el rango de esta función está contenido en el intervalo real unitario. Luego, cada V_H es balanceado, por tanto se cumple i).

ii) Es evidente que para cada par $(x\ ,\ y)$ tal que $||x|| + ||y|| \geq 1$. Entonces supongamos que $||x|| + ||y|| < 1$. Sea $\epsilon > 0$ algún número real tal que $||x|| + ||y|| + 2\epsilon < 1$; existen subconjuntos finitos no vacíos H , K de $\mathbb{N}$ tal que $x \in V_H$, $y \in V_K$ y $p_H < ||x|| + \epsilon$, $p_K < ||y|| + \epsilon$
Luego $p_H + p_K < 1$, así existe un único subconjunto finito M de $\mathbb{N}$ para cada $p_M = p_H + p_K$, en virtud de (2,1), M tiene la propiedad que $V_H + V_K \subset V_M$
Se sigue que $x + y \in V_M$ y se tiene que $||x|| + ||y|| \leq p_M = p_H + p_K < ||x|| + ||y|| + 2\epsilon$. De donde se cumple ii).

iii) Para algún $\epsilon > 0$, sea $S_\epsilon = \{x \in L :\ ||x|| \leq \epsilon\}$ aseguramos que

$$S_{2^{-n-1}} \subset V_n \subset S_{2^{-n}} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.3}$$

La inclusión $V_n \subset S_{2^{-n}}$ es obvia, entonces $x \in V_n$ implica $||x|| \leq 2^{-n}$. Sobre el otro extremo, si $||x|| \leq 2^{-n-1}$, entonces existe H tal que $x \in V_H$ y $p_H < 2^{-n}$; entonces (2,2) implica que $x \in V_n$. Luego de (2,3) es claro que iii) se cumple.

iv) Como L es un espacio de Hausdorff, entonces $x = 0$ es equivalente con $x \in \cap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Más aún, (2,3) prueba que la familia $\{S_\epsilon : \epsilon > 0\}$, es una base de entornos de 0 en L. Luego la topología generada por la métrica $(x , y) \longmapsto ||x - y||$ es invariante bajo traslaciones. Así se cumple iv). □

Definición 88. *Una función real $x \to ||x||$ definida en un espacio vectorial topológico sobre K satisfaciendo i)-iii), es llamado* ***pseudonorma*** *en L.*

Definición 89. *Un espacio vectorial topológico L se dice* ***Localmente acotado*** *si L posee un entorno acotado de 0.*

Teorema 5. *Todo espacio vectorial topológico Hausdorff localmente acotado es metrizable.*

Demostración. Sea V un entorno de 0 acotado en L y sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de elementos distintos de 0 de K tal que $lim\lambda_n = 0$.
Si U es algún entorno balanceado de 0, existe $\lambda \in K$ tal que $V \subset \lambda U$, entonces V es acotado; si n es tal que $|\lambda_n\lambda| \leq 1$, entonces $\lambda_n V \subset U$. Luego U es balanceado. De ahí se sigue que $\{\lambda_n V : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos de 0, así L es metrizable por teorema 4. □

Proposición 34. *El espacio cociente de un espacio vectorial topológico metrizable L sobre un subespacio cerrado M es metrizable, y si L es completo entonces L/M es completo.Si $x \to ||x||$ es una pseudonorma generando la topología de L, entonces $\hat{x} \to ||\hat{x}|| = inf\{||x|| : x \in \hat{x}\}$ es una pseudonorma generando la topología de L/M.*

Demostración. Sea $\hat{x} \to ||\hat{x}|| = inf\{||x|| : x \in \hat{x}\}$, debemos probar que es una pseudonorma, para ello:

i) $|\lambda| \leq 1$, luego, $||\lambda\hat{x}|| = inf\{||x|| : x \in \hat{x}\} \leq inf\{||x|| : x \in \hat{x}\} = ||\hat{x}||$, entonces $||\lambda\hat{x}|| \leq ||\hat{x}||$, $\forall x \in L$.

ii) Sea $\epsilon > 0$, entonces $||x|| < ||\hat{x}|| + \epsilon$ y $||y|| = ||\hat{y}|| + \epsilon$, ahora, $||\hat{x} + \hat{y}|| \leq ||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \leq ||\hat{x}|| + \epsilon + ||\hat{y}|| + \epsilon = ||\hat{x}|| + ||\hat{y}|| + 2\epsilon$, tomando a $\epsilon = 1/2$ obtenemos: $||\hat{x} + \hat{y}|| \leq ||\hat{x}|| + ||\hat{y}||$.

iii) Claramente, $||\hat{0}|| = 0$ si $||\hat{x}|| = 0$, entonces, $0 \in \hat{x}$, ya que M es cerrado. Luego, sea $V_n = \{x : ||x|| < n^{-1}\}$ $n \in \mathbb{N}$, donde $\{V_n\}$ es una base de entornos de cero en L/M, ya que el mapeo natural $x \to \hat{x} = \psi(x)$ es abierto y continuo. $\hat{V_n} = \{\hat{x} : ||\hat{x}|| < n^{-1}\}$, donde $\hat{V_n} = \psi(V_n)$, para $n \in \mathbb{N}$. Luego, si $\hat{x} \in \hat{V_n}$, entonces existe $x \in \hat{x}$ tal que $x \in V_n$, así $\psi^{-1}(\hat{V_n}) \subset V_n + M$ lo que implica que $\hat{V_n} \subset \psi(V_n)$, así, $\hat{x} \to ||\hat{x}||$ genera la topología de L/M. Luego mostraremos que L/M es completo cuando L es completo. Dada una sucesión de Cauchy en L/M, entonces existe una subsucesión $\{\hat{x}_n\}$ tal que $||\hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n|| < 2^{-n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, así, existen representantes $y_{n+1} \in \hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n$ tal que $||y_{n+1}|| < 2^{-n}$. Sea $x_1 \in \hat{x}_1$, entonces $x_n = x_1 + (y_2 + ... + y_n) \in \hat{x}_n$, $\forall n \geq 2$, usando la condición ii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ por teorema 4 tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en L que converge a $x \in L$, luego como ψ es continuo, $\{\hat{x}_n\}$ converge en L/M, así la sucesión de Cauchy dada converge en L/M, por tanto, L/M es completo. □

2.7. Complexificación

Cualquier subcampo K de $\mathbb{C}$ se puede escribir como: $K = H + iH$ si contiene la unidad imaginaria i; $H = K \cap \mathbb{R}$ es un subcampo de $\mathbb{R}$. Si H es un subcampo de $\mathbb{R}$ denotaremos por $H(i) = H + iH$ a la **Extensión Compleja de** H. ¿Si L es un espacio vectorial sobre H con multiplicación escalar en L, se puede extender a $K = H(i)$?. Si se puede, entonces L posee un automorfismo u tal que $u^2 = -e$ donde $e : H \longrightarrow H$ es el automorfismo identidad (veáse proposición 35). Recíprocamente, si u es un automorfismo de L satisfaciendo $u^2 = -e$, entonces la definición $(\lambda, \mu \in H)$

$$(\lambda + i\mu)x = \lambda x + \mu u(x) \tag{2.4}$$

extiende la multiplicación por escalar a $K = H + iH$. Si L es un espacio vectorial (o espacio vectorial topológico sobre un campo $K = H(i)$ que contiene a i, entonces la restricción de la multiplicación por escalar a $H \times L$ vuelve a L en un espacio (o espacio vectorial topológico) L_0 sobre H. L_0 es llamado el **espacio subyacente real** de L. Una **forma lineal real** en L es una **forma lineal** en L_0. Un **hiperplano real** en L es un **hiperplano** en L_0.

Sea L un espacio vectorial sobre $K = H + iH$ y sea $f \in L^*$ una forma lineal sobre L. Entonces $f = g + ih$, donde g, h son únicas funciones sobre L; g y h son formas lineales reales sobre L, llamadas **parte real** y **parte imaginaria** de f, respectivamente. Ya que, $g(ix) + ih(ix) = f(ix) = ig(x) - h(x)$, $\forall x \in L$, tenemos,

$$f(x) = g(x) - ig(ix), \ (x \in L) \tag{2.5}$$

Proposición 35. *Si L es un espacio vectorial topológico sobre $H \subset \mathbb{R}$, la multiplicación escalar en L tiene una extensión continua a $H(i) \times L$ a L si y sólo si existe un automorfismo u satisface $u^2 = -e$.*

Demostración. L es un espacio vectorial topológico sobre H y posee multiplicación escalar, sea $H(i) \times L$ a L la extensión continua, donde $H(i) = H + iH$, luego, como K es un subcampo de $\mathbb{R}$, podemos extender a $K = H(i)$, así, L posee un automorfismo u tal que $u^2 = -e$, entonces $x \to ix$ es un automorfismo de L.
Ahora, sea u un automorfismo de L, que cumple que $u^2 = -e$, de la definición tenemos que $(\lambda + iu)x = \lambda x + \mu u(x)$, el cual extiende la multiplicación escalar a $K = H + iH$. Entonces si L es un espacio vectorial topológico sobre H y si u es un automorfismo de L tal que $u^2 = -e$, entonces $(\lambda + iu)x$ hace a L un espacio vectorial topológico sobre K. □

Proposición 36. *Sea L un espacio vectorial topológico sobre K y sea L_0 un espacio real subyacente, el mapeo $h : (L^*)_0 \longrightarrow (L_0)^*$ definido por $f(x) = g(x) - ig(ix)$ $(x \in L)$ es un isomorfismo de $(L^*)_0$ a $(L_0)^*$ que lleva al espacio de formas lineales continuas en L al espacio de formas lineales continuas en L_0.*

Proposición 37. *Sea L un espacio vectorial topológico sobre K. Cada hiperplano (cerrado) en L es la intersección de un determinado haz de hiperplanos reales (cerrados).*

Demostración. Por proposición 27, un hiperplano G en L es de la forma $G = \{x \in L : f(x) = \gamma\}$, donde $f \in L^*$ y $\gamma = \alpha + i\beta \in K = H + iH$. Si g es la parte real de f, entonces $G = G_1 \cap G_2$, donde $G_1 = \{x : g(x) = \alpha\}$, $G_2 = \{x : g(ix) = -\beta\}$. Ya que f es determinada por G agregando un factor diferente de cero, G_1 y G_2 determinan el único haz donde la intersección es G. Además por proposición 28 y proposición 36, G_1 y G_2 son cerrados si y sólo si G es cerrado en L. □

Si L es un espacio vectorial sobre un campo $H \subset \mathbb{R}$, y no existe un automorfismo u de L que satisfaga $u^2 = -e$. Considere el producto $L \times L$ sobre H. El mapeo $u := (x, y) \to (-y, x)$ es un automorfismo de $L \times L$ que satisface $u^2 = -e$; la multiplicación puede extenderse a $K \times L \times L$ a $L \times L$ por (2.4). Luego $i(y, 0) = (0, y)$, y escribiremos $(x, 0) = x$ para todo $x \in L$, entonces cada $z \in L \times L$ tiene una única representación $z = x + iy$ con $x, y \in L$. Si L es un espacio vectorial topológico sobre H, entonces $L \times L$ sobre K es un espacio vectorial topológico tal que $(L \times L)_0 = L \bigoplus iL$. Este tipo de embebimiento es llamado **complexificación** de un espacio vectorial (o espacio vectorial topológico) definido sobre un subcampo de $\mathbb{R}$.

Capítulo 3

Espacios Vectoriales Topológicos Localmente Convexos

3.1. Conjuntos Convexos y Seminormas

Definición 90. *Un conjunto A de un espacio vectorial L es convexo si $x \in A$, $y \in A$ implican que $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$ para todos los escalares λ satisfaciendo $0 \leq \lambda <\leq 1$. Los conjuntos $\{\lambda x + (1-\lambda)y : \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ y $\{\lambda x + (1-\lambda)y : \ 0 < \lambda < 1\}$ son llamados segmentos lineales cerrados o abiertos respectivamente uniendo a x e y.*

Observación 3. *La convexidad de un conjunto $A \subset L$ se preserva bajo traslaciones invariantes.*

Observación 4. *A es convexo si y sólo si $x_0 + A$ es convexo para cada $x_0 \in L$.*

Proposición 38. *Sea A un subconjunto convexo de un espacio vectorial topológico L, si x está en el interior de A e y en la clausura de A, el segmento lineal abierto que une a x e y está en el interior de A.*

Demostración. Sea $0 < \lambda < 1$ fijo, y A un subconjunto convexo, debemos probar que $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathring{A}$. Luego, sea $p = \lambda x + (1-\lambda)y$, así $0 = \lambda x + (1-\lambda)y - p = \lambda(x-p) + (1-\lambda)(y-p)$. Así $y - p = \alpha(x-p)$ donde $\alpha = \frac{-\lambda}{1-\lambda} < 0$. Ahora $w \longmapsto \alpha w$

es un homeomorfismo de $-p+\mathring{A}$ a $-p+\bar{A}$, además $x-p \in -p+\mathring{A}$ y $y-p \in -p+\overline{A}$, entonces $\exists z-p \in -p+\mathring{A}$ tal que $\alpha(z-p) \in -p+A$, ya que $-p+\bar{A} \subset -p+A$ y $\alpha(z-p) \in -p+\bar{A}$ luego sea $\mu = \frac{\alpha}{\alpha-1} = \lambda,\ \ 0<\mu<1$. Así $\lambda(z-p)+(1-\lambda)\frac{-\lambda}{1-\lambda}(z-p) = 0$. Luego $U = \left\{\mu w + (1-\mu)\alpha(z-p):\ w \in -p+\mathring{A}\right\}$ es un entorno para 0. Y como $w \longmapsto \mu w + (1-\mu)\alpha(z-p)$ es un homeomorfismo, si $z-p \in \mathring{A}$, $z-p \longmapsto 0$. Pero $w \in \mathring{A}$, y $z-p \in -p+A$, así $U \subset -p+A$ y A es convexo, así $0 \in -p+\mathring{A}$. Por tanto $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathring{A}$ □

Proposición 39. *Sea L un espacio vectorial topológico y sean A y B subconjuntos convexos de L, entonces $\overset{o}{A}$, $\bar{A}$, $A+B$ y αA $(\alpha \in K)$ son convexos.*

Demostración. i) Probar que $\overset{o}{A}$ es convexo

Sea A un subconjunto convexo de L. Luego, como $\overset{o}{A} \subset A$, para $t \in [0\ 1]$ se tiene que $t\overset{o}{A} + (1-t)\overset{o}{A} \subset A$. Pero $t\overset{o}{A}$ y $(1-t)\overset{o}{A}$ son abiertos ya que $\overset{o}{A}$ es abierto. Así $t\overset{o}{A} + (1-t)\overset{o}{A}$ es abierto. Luego $t\overset{o}{A} + (1-t)\overset{o}{A} \subset \overset{o}{A}$. Por lo tanto $\overset{o}{A}$ es convexo.

ii) Probar que $\bar{A}$ es convexo

Sea A un subconjunto convexo de L. Luego sean $y,\ z \in \bar{A}$ y $t \in [0\ 1]$, así podemos elegir $\left(x_\alpha^{(1)}\right)_{\alpha\in\Lambda}$ y $\left(x_\alpha^{(2)}\right)_{\alpha\in\Lambda}$ dos sucesiones en A tales que $x_\alpha^{(1)}$ converge a y, $x_\alpha^{(2)}$ converge a z en L, entonces por la continuidad de la multiplicación por escalares y suma de vectores $tx_\alpha^{(1)} + (1-t)x_\alpha^{(2)}$ converge a $ty+(1-t)z$. Además, $\left(tx_\alpha^{(1)} + (1-t)x_\alpha^{(2)}\right)_{\alpha\in\Lambda}$ es una sucesión en A, por tanto $ty+(1-t)z \in \bar{A}$. Así $\bar{A}$ es convexo.

iii) Probar que $A+B$ es convexo

Sean A, B subconjuntos convexos en L y sean a_1+b_1 , $a_2+b_2 \in A+B$ con $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$ y sea $t \in [0\ 1]$. Como A y B son convexos se tiene que $ta_1+(1-t)a_2 \in A$ y $tb_1+(1-t)b_2 \in B$. Así $ta_1+(1-t)a_2+tb_1+(1-t)b_2 \in A+B$. Pero $ta_1+(1-t)a_2+tb_1+(1-t)b_2 = ta_1+tb_1+(1-t)a_2+(1-t)b_2 = t(a_1+b_1)+(1-t)(a_2+b_2)$. De donde $t(a_1+b_1)+(1-t)(a_2+b_2) \in A+B$. Por tanto $A+B$ es convexo.

iv) Probar que αA ($\alpha \in K$) es convexo

Sea A un subconjunto convexo de L y $\alpha \in K$. Luego sean $x, y \in \alpha A$. Así, existen $x_1, y_1 \in A$ tales que $x = \alpha x_1$ y $y = \alpha y_1$ así, por la convexidad de A para cualquier $t \in [0\ 1]$ se tiene que $tx_1 + (1-t)y_1 \in A$. Luego $\alpha(tx_1 + (1-t)y_1) \in \alpha A$ con $\alpha \in K$. Pero $\alpha(tx_1 + (1-t)y_1) = \alpha t x_1 + \alpha(1-t)y_1 = t\alpha x_1 + (1-t)\alpha y_1 = tx + (1-t)y)$. Así $tx + (1-t)y) \in \alpha A$. Por lo tanto αA ($\alpha \in K$) es convexo

□

Proposición 40. *Si* A *es convexo con interior no vacío, entonces la clausura de* A *es igual a la clausura de* $\mathring{\mathrm{A}}$*, y el interior de* A *es igual al interior de* $\bar{\mathrm{A}}$*.*

Demostración. i) Probar que $\bar{\mathrm{A}} = \bar{\mathring{\mathrm{A}}}$

Sea A un subconjunto convexo de L con interior no vacío. Sabemos que $\mathring{\mathrm{A}} \subset A$, así $\bar{\mathring{\mathrm{A}}} \subset \bar{\mathrm{A}}$, luego, por proposición (38) $\bar{\mathrm{A}} \subset \bar{\mathring{\mathrm{A}}}$. Por tanto, $\bar{\mathrm{A}} = \bar{\mathring{\mathrm{A}}}$

ii) Probar que $\mathring{\mathrm{A}} = \mathring{\bar{\mathrm{A}}}$

Sea A un subconjunto convexo de L con interior no vacío. Debemos probar que $0 \in \mathring{\bar{\mathrm{A}}}$ implica que $0 \in \mathring{\mathrm{A}}$. Sea $0 \in \mathring{\bar{\mathrm{A}}}$, luego existe un entorno balanceado V de 0 tal que $V \subset \bar{\mathrm{A}}$. Como $\bar{\mathrm{A}} = \bar{\mathring{\mathrm{A}}}$, entonces 0 está en la clausura de $\mathring{\mathrm{A}}$. Luego $\mathring{\mathrm{A}}$ y V se intersectan. Sea $y \in \mathring{\mathrm{A}} \cap V$, como $V \subset \bar{\mathrm{A}}$ y V es balanceado, tenemos que $-y \in \bar{\mathrm{A}}$. Así $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(-y) = 0 \in \mathring{\mathrm{A}}$ por proposición (38).

□

Definición 91. *Un cono C de vértice* 0 *es un subconjunto de un espacio vectorial L invariante bajo todo mapeo $x \longmapsto \lambda x$ donde λ es estrictamente positivo. Si, además, C es convexo, entonces C es llamado cono convexo de vértice* 0

Definición 92. *Un cono convexo de vértice* 0 *es un subconjunto de L tal que $C + C \subset C$ y $\lambda C \subset C$ para todo $\lambda > 0$.*

Definición 93. *Un cono convexo de vértice x_0 es un conjunto $x_0 + C$ donde C es cono convexo de vértice* 0*.*

Definición 94. *La estructura balanceada de A es el conjunto $\{\lambda a : \ a \in A$ y $|\lambda| \leq 1\}$ si $A \neq \emptyset$.*

Definición 95. *La estructura convexa de A es el conjunto $\{\sum \lambda_v a_v\}$ done $\lambda_v > 0, \ \sum \lambda_v = 1$ y $\{a_v\}$ son los rangos sobre los subconjuntos finitos no vacíos de A.*

Definición 96. *La estructura convexa balanceada de A denotada por Γ_A, es la estructura convexa de la estructura balanceada de A. Por $\Gamma_\alpha A_\alpha$, denotaremos la estructura convexa balanceada de A de la unión de una familia $\{A_\alpha : \ \alpha \in A\}$.*

Definición 97. *La estructura convexa cerrada de $A \subset L$ es la cerradura de la estructura convexa de A.*

Definición 98. *La estructura convexa balanceada cerrada de A es la cerradura de la estructura balanceada convexa de A.*

Definición 99. *La estructura convexa de un conjunto absorbente es del tipo subconjunto absorbente convexo de un espacio vectorial L.*

Definición 100. *Si M es algún subconjunto absorbente de L, la función real no negativa en L, $x \longmapsto p_M(x) = inf\,\{\lambda > 0 : \ x \in \lambda M\}$ es llamada función de Minkowski de M.*

Definición 101. *Si M es un subconjunto absorbente en L y $M \subset N$ entonces $p_N(x) \leq p_M(x)$ para todo $x \in L$.*

Definición 102. *Una seminorma en L es un función de Minkowski de un subconjunto absorbente, balanceado y convexo de L.*

Proposición 41. *Sea L un espacio vectorial, una función real $p : L \longrightarrow \mathbb{R}$ es una seminorma si y sólo si*

a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y); \ x, y \in L$

b) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), x \in L, \ \lambda \in K$.

Demostración. a) Sea p una seminorma en L, donde $p(x) = p_M(x)$ donde M es absorbente, balanceado y convexo. Si dados $x, y \in L$ y $\lambda_1 \leq p(x)$, $\lambda_2 \leq p(y)$, entonces $x + y \in \lambda_1 M + \lambda_2 M$. Luego, como M es convexo se tiene que $\lambda_1 M + \lambda_2 M = (\lambda_1 + \lambda_2)\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} M + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} M\right] \subset (\lambda_1 + \lambda_2)M$, lo cual implica que $p(x + y) \leq \lambda_1 + \lambda_2$. Por tanto, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

b)Observemos que $\lambda x \in \mu M$ es equivalente a $|\lambda| x \in \mu M$. Como M es balanceado, entonces si $\lambda \neq 0$, $p(\lambda x) = inf\left\{\mu > 0 : \ x \in |\lambda|^{-1} \mu M\right\}_{\mu>0} = inf\left\{|\lambda|\mu : \ x \in \mu M\right\} = |\lambda| p(x)$ ya que $p(x) \geq 0$.

Recíprocamente, asumiendo que p es una función que satisface a) y b), y sea $M = \{x : \ p(x) < 1\}$. Ya que M es absorbente y balanceado se sigue de a) y b) que M es convexo. Ahora, probaremos que $p = p_M$. Se sigue de b) que $\{x : \ p(x) < \lambda\} = \lambda M$, para todo $\lambda > 0$; luego si $p(x) = \alpha$, entonces $x \in \lambda M$, para todo $\lambda > \alpha$ pero no para $\lambda < \alpha$, con lo que se prueba que $p(x) = inf\left\{\lambda > 0 : \ x \in \lambda M\right\} = p_M(x)$. □

Proposición 42. *Sea p una semi-norma en el espacio vectorial topológico L. Entonces las propiedades de p son equivalentes:*

a) p es continuo en $0 \in L$.

b) $M_0 = \{x : p(x) < 1\}$ es abierto en L.

c) p es uniformemente continuo en L.

Demostración. $a) \Rightarrow c)$ Por proposición 15. Si B es una base de entornos de $0 \in L$, entonces la familia $\{N_V = \{(x, y) : x - y \in V\} : V \in \mathfrak{B}\}$ es una base para una uniformidad $\mathfrak{R}$ sobre L, luego, sabemos que: $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$, entonces $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$, así, $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$. Sea $\mathfrak{B}_L$ una base de entornos de $0 \in L$, como p es continua en 0, sea $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ una base de entornos de $0 \in \mathbb{R}$ de la forma $\{(-a, a), a \in \mathbb{R}^+\}$. Luego, sea N_V una inmediación de $\mathbb{R}$, entonces, $N_V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in V, \ V = (-a, a) \subset \mathbb{R}\}$, sea $N_{p^{-1}(V)} = \{(x, y) \in L^2 : x - y \in p^{-1}(V)\}$ es una inmediación de L. Si $(x, y) \in N_{p^{-1}(V)}$ entonces $x - y \in p^{-1}(V)$, $p(x - y) \in V = (-a, a)$, $p(x - y) < a$, entonces $p(x) - p(y) \in V \Rightarrow (p(x), p(y)) \in N_V$, por lo tanto, p es uniformemente continua.

c) $\Rightarrow$ *b)* Sea $M_0 = \{x : p(x) < 1\}$, entonces si tomanos $M_0 = p^{-1}[(-\infty, 1)]$ y lo intersectamos con $p^{-1}(L)$ tenemos: $M_0 = p^{-1}[(-\infty, 1)] \cap p^{-1}(L)$ donde esta intersección es abierta por la continuidad de p, así, $M_0 = \{x : p(x) < 1\}$ es abierto en L.

b) $\Rightarrow$ *a)* Sea $V(p(0_L)) = V(0_{\mathbb{R}})$ con $0 \in L$ un entorno de cero, sabemos que $M_0 = \{x : p(x) < 1\}$ es un entorno de cero en $\mathbb{R}$, luego, $M_0 \cap p^{-1}(V)$ es un entorno de cero en L, entonces, $p(M_0 \cap p^{-1}(V)) \subset V$, por tanto p es continua en $0 \in L$. □

Definición 103. *Un subconjunto de un espacio vectorial topológico L que es cerrado, convexo y que posee interior no vacío es llamado* ***cuerpo convexo*** *en L.*

Ejemplo 43. *Si p es una semi-norma continua en L, $M_1 = \{x : p(x) \leq 1\}$ es un cuerpo convexo en L.*

3.2. Norma Y Espacios Normables

Definición 104. *Una* ***norma*** *en un espacio vectorial L es una aplicación $||\cdot|| : L \longrightarrow K$, que a cada vector $x \in L$ hace corresponder un número real $||x||$ verificando las tres condiciones siguientes:*

i) $||\lambda x|| = |\lambda|\ ||x||,\ \forall\ \lambda \in K\ ,\ x \in L$

ii) $||x + y|| \leqq ||x|| + ||y||, \forall\ x, y \in L$

iii) $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

Se define como **espacio normado** al par $(L, ||\cdot||)$, donde L lleva la topología generada por la métrica $(x, y) \to ||x-y||$. Un **espacio normable** es un espacio vectorial topológico L cuya topología está obtenida por la norma $||\cdot||$ en L con la métrica $(x, y) \to ||x - y||$.

Un espacio normado completo es llamado un **espacio de Banach**

Proposición 43. *Un espacio vectorial topológico Hausdorff es normable si y sólo sí L posee un entorno convexo acotado de 0.*

Demostración. Sea L un espacio vectorial topológico Hausdorff, sea $||\cdot||$ la norma que genera la topología de L. Luego tomemos la bola unitaria $V = \{x : ||x|| \leq 1\}$ la cual es un entorno convexo, acotado de 0, así la bola unitaria forma un entorno de 0 convexo, acotado y cerrado.

Recíprocamente, sea V un entorno de cero convexo y acotado, entonces V posee un entorno de cero balanceado convexo y acotado. Sea U este entorno, definamos $||x|| = \mu_U(x)$, $x \in L$, donde μ_U es el funcional de Minkowski de U, luego $W = \{rU : r > 0\}$ forma una base local para la topología de L. Dado que U es abierto tenemos: $rU = \{x : ||x|| < r\} = \{x : \mu_U(x) < r\}$, $\forall r > 0$, si $x \neq 0$, entonces, $\exists r > 0$ tal que $x \notin rU$ y así, $||x|| \geq r$, entonces, $||x|| = \mu_U(x)$ es una norma, donde la topología de la norma coincide con la topología original por ser U un entorno acotada. Por lo tanto, L es normable. □

Proposición 44. *El producto de espacios normables es normable si y sólo si el número de factores* $\neq \{0\}$ *es finito.*

Demostración. Sea $A = \prod L_\alpha$, como A es normable, entonces A posee un entorno B de 0 convexo y acotado, luego como B es acotado, entonces $B \subset \prod B_\alpha$, donde B_α es acotado en L_α, como B es entorno de cero, entonces $\prod B_\alpha$ es entorno de cero. Ahora, $0 \in \mathring{\prod} B_\alpha$, entonces $\exists V$ un básico tal que $0 \in V \subset \mathring{\prod} B_\alpha$, así, $V = \prod C_\alpha$, donde $C_\alpha = L_\alpha$ excepto en una cantidad finita de $\alpha' s$, entonces $B_\alpha = L_\alpha$ excepto en una cantidad finita de $\alpha' s$, entonces L_α es acotado en L_α excepto en una catidad finita de $\alpha' s$, entonces $\forall$ W_α entorno de cero, $\exists$ λ_W tal que $L_\alpha \subset \lambda_W W_\alpha$, entonces $L_\alpha = \lambda_W W_\alpha$, para todo entorno de cero, entonces $L_\alpha = \{0\}$ excepto en una cantidad finita de elementos. Por lo tanto, el número de factores $\neq \{0\}$ es finito.

Recíprocamente, sea $A = \prod L_\alpha$, debemos probar que A es normable, por hipótesis sabemos que cada L_α es normable, es decir, cada L_α es acotado y convexo. Luego, como cada L_α es acotado y el producto de acotados es acotado, así, A es acotado. Ahora, sean $x = (x_\alpha)$, $y = (y_\alpha)$, entonces, debemos probar que: $\lambda x + (1 - \lambda) y \ \in A$,

$\forall \lambda \in [0,1]$, para eso fijamos un λ, Sea $\lambda \in [0,1]$.
$\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda(x_\alpha) + (1-\lambda)(y_\alpha) = (\lambda x_\alpha) + ((1-\lambda)y_\alpha) = (\lambda x_\alpha + (1-\lambda)y_\alpha)$, donde $(\lambda x_\alpha + (1-\lambda)y_\alpha) \in A$, asi, A es convexo. Por lo tanto, A es normable. □

Proposición 45. *El espacio cociente de un espacio vectorial topológico normal (y completo) L sobre un subespacio cerrado M es normal (y completo). Si $(L, ||\cdot||)$ es un espacio normado, la norma $\hat{x} \to ||\hat{x}|| = inf\{||x|| : x \in \hat{x}\}$ genera la topología de L/M.*

Demostración. Como M es cerrado en L, entonces L/M es Hausdorff por proposición 20, dado que el mapeo natural ψ de L a L/M es lineal, abierto y continuo, $\psi(V)$ es un entorno de cero convexo y acotado de L/M por proposición 32. Si V es un entorno de cero convexo y acotado en L, entonces L/M es normal por proposición 43. Luego, por proposición 34 L/M es completo dado que L lo es, la pseudonorma $\hat{x} \to ||\hat{x}||$ es una norma que genera la topología de L/M. Por lo tanto, la norma $\hat{x} \to ||\hat{x}|| = inf\{||x|| : x \in \hat{x}\}$ genera la topología de L/M. □

Los conjuntos acotados en un espacio normado L son exactamente esos conjuntos en los que $x \to ||x||$ son acotados, por lo tanto, si L, N son espacios normados sobre K y u es un mapeo lineal continuo en L a N se sigue de la proposición 32 que el número $||u|| = sup\{||u(x)|| : x \in L\ ,\ ||x|| \leqq 1\}$
es finito.

Ejemplo 44. *Si X es un espacio topológico y $\mathfrak{C}(X)$ el conjunto de todas las funciones continuas de $B(X)$, $\mathfrak{C}(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$.*

Sea H es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y sea $(x\ ,y) \to [x\ ,y]$ una función en $H \times H$ tal que satisface las condiciones siguientes(α^* denota el conjugado complejo de $\alpha \in \mathbb{C}$):
(i) Para cada $y \in H$, $x \to [x\ ,y]$ es una forma lineal en H.
(ii) $[x\ ,y] = [y\ ,x]^*$, $\forall x\ ,y \in H$.
(iii) $[x\ ,x] \geqq 0$, $\forall x \in H$.
(iV) $[x\ ,x] = 0\ \Rightarrow x = 0$.

El mapeo $(x\ ,y) \to [x\ ,y]$ es llamado una **forma hermitiana definida positiva** (o producto interno); $x \to ([x,y])^{1/2}$ es una norma $||\cdot||$ en H y $(H,||\cdot||)$ es llamado **espacio pre-Hilbert** (o espacio con producto interno). El producto interno satisface la desigualdad Cauchy-Schawarz':$|[x,y]| \leqq ||x||\ ||y||$. Si el espacio normado $(H,||\cdot||)$ es completo (por tanto un espacio Banach) se llama **espacio de Hilbert**. La noción correspondiente de espacio de producto interno real o espacio real de Hilbert, respectivamente, se obtiene al asumir $(x,y) \to [x,y]$ es real valuado y H es un espacio vectorial real. Una función en $H \times H$ satisfaciendo (i) mediante (iii) pero no necesariamente (iv) es llamada una **forma Hermitiana semi-definida positiva**, en estas circunstancias, $x \to ([x,y])^{1/2} = p(x)$ es una semi-norma en H y el espacio cociente $H/p^{-1}(0)$ es un espacio de producto interno bajo $(\hat{x},\hat{y}) \to [x,y]$, donde $x \to \hat{x}$ denota el mapeo canónico de H a $H/p^{-1}(0)$.

3.3. El Teorema de Hahn-Banach

Lema 5. *Sea L un espacio vectorial topológico Hausdorff sobre $\mathbb{R}$ de dimensión al menos 2. Si B es un conjunto abierto convexo de L que no contiene a 0, entonces existe un subespacio uno-dimensional de L no intersectando a B.*

Demostración. Sea B un conjunto abierto y convexo en L y sea E un subespacio fijo de L de dimensión 2, luego si $E \cap B = \emptyset$, entonces existe un subespacio de L uno-dimensional que no intersecta a B, Si $E \cap B \neq \emptyset$, sea $B_1 = E \cap B \neq \emptyset$, B_1 es convexo y abierto en E, también $0 \notin B_1$, luego tenemos que B_1 es isomorfo a $\mathbb{R}^2_0$, luego proyectamos a B_1 en un subconjunto del circulo unitario S^1 de E mediante el mapeo:

$$\begin{array}{rrc} f: & B_1 \longrightarrow & S^1 \\ & (x,y) \longmapsto & \left(\frac{x}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{y}{x^2+y^2}\right) \end{array}$$

Luego como B_1 es convexo, entonces B_1 es conexo, entonces $f(B_1)$ es conexo, así, $f(B_1)$ es un arco, como f es continuo en B_1, entonces $f(B_1)$ es abierto en S^1, Luego, sabemos que $f(B_1) = f(E \cap B) = f(E) \cap f(B) = S^1 \cap f(B)$, entonces $f(B_1)$ subtiende un ángulo $\alpha \leq \pi$ en 0, si $\alpha > \pi$, existirián dos puntos los cuales formarían un segmento, entonces los puntos del segmento estarían en E y también en B, entonces $0 \in B$ ($\rightarrow\leftarrow$), dado que por hipótesis $0 \notin B$. Dado que B_1 es convexo, existe una línea recta en E que pasa por 0 y no intersecta a B. $\square$

Teorema 6. *Sea L un espacio vectorial topológico. Sea M una variedad lineal en L y sea A un subconjunto no vacío abierto convexo de L que no intersecta a M. Entonces existe un hiperplano cerrado en L que contiene a M y no intersecta a A.*

Demostración. Después de una traslación, si es necesario, podemos tener que $0 \in M$, asi M es un subespacio de L. Consideremos el conjunto $\mathfrak{M}$ de todos los subepacios cerrados de L que contienen a M y no intersectan a A, $\mathfrak{M}$ es no vacío ya que $\overline{M} \in \mathfrak{M}$.

Ordenamos a $\mathfrak{M}$ por la inclusión $\subset$. Si $\{M_\alpha\}$ es un subconjunto totalmente ordenado de $\mathfrak{M}$. Luego $\overline{\bigcup_\alpha M_\alpha}$ es la cota superior , por el Lema de Zorn existe un elemento maximal H_0 de $\mathfrak{M}$. Si L_0 denota el espacio subyacente real de L, el espacio cociente L_0/H_0 es Hausdorff por proposición 20. Como $A \neq \emptyset$, L_0/H_0 tiene dimensión ≥ 1. Suponga que L_0/H_0 es de dimensión ≥ 2. Como el mapeo natural ϕ de L_0 sobre L_0/H_0 es lineal y abierto, $B = \phi(A)$ es un subconjunto convexo abierto de L_0/H_0 que no contiene a 0, ya que H_0 no intersecta a A . Por lo tanto, por el lema anterior, existe un subespacio unidimensional N de L_0/H_0 que no intersecta a B, esto implica que $H = \phi^{-1}(N)$ es un subespacio cerrado de L_0 que contiene a H_0 y no intersecta a A, lo que contradice que H es maximal. Por lo tanto, L_0/H_0 es de dimensión 1 y H_0 es un hiperplano cerrado que contiene a M y no intersecta a A. Esto completa la prueba si L es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$.

Si L es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{C}$, entonces $M = iM$ (asumiendo que $0 \in M$, ya que M es subespacio de L. Así $H_1 = H_0 + iH_0$, donde es un hiperplano cerrado en L que no intersecta a A y contiene a M. $\square$

Corolario 9. *Si L es un espacio vectorial topológico, entonces existe un mapeo lineal* *continuo $f : L \longrightarrow L$, $f \neq 0$ sobre L, si y sólo si L contiene un subconjunto convexo abierto A no vacío distinto de L.*

Demostración. Si $f \neq 0$ es un mapeo lineal continuo sobre L. Sea el subconjunto $A = \{x : |f(x)| < 1\}$.
Como $f \neq 0$, entonces $\exists x \in L$ tal que $|f(x)| = \alpha \neq 0$. Luego $1 = \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}|f(x)| = |f(\frac{1}{\alpha}x)|$, así $\frac{1}{\alpha}x \notin A$, por lo que $A \neq L$.
Sean $x, y \in A$

$$\begin{aligned}
|f(\lambda x + (1-\lambda)y)| &= |f(\lambda x) + f((1-\lambda)y)| \\
&\leq |f(\lambda x)| + |f((1-\lambda)y)| \\
&= |\lambda f(x)| + |(1-\lambda)f(y)| \\
&\leq \lambda|f(x)| + (1-\lambda)|f(y)| \\
&< \lambda(1) + (1-\lambda)(1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

A es convexo, por tanto $A = f^{-1}(f(L) \cap \{x : |x| < 1\})$. Como f es continuo y $\cap\{x : |x| < 1\}$ es abierto, así A es abierto en L.

Recíprocamente, sea $A \subset L$ convexo y abierto, y $x_0 \notin A$. Como $x_0 \notin A$, por teorema 6, x_0 está contenido en un hiperplano cerrado que por proposicion 28 implica la existencia de una forma lineal continua. $\square$

Teorema 7. ***(Hahn-Banach)***
Sea L un espacio vectorial, sea p una seminorma sobre L, y sea M un subespacio de L. Si f es una forma lineal sobre M tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M$, existe una forma lineal f_1 que es la extensión de f sobre L y tal que $|f_1(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in L$.

Demostración. Para $f = 0$, $f_1 = 0$ cumple. Sea $f \neq 0$, así $f(x) \neq 0$ para algún $x \in M$.

Sea $V_n = \{x \in L : p(x) < n^{-1}\}, n \in \mathbb{N}$. Sean $x, y \in V_n$

$$\begin{aligned}|p(\lambda x + (1-\lambda)y)| &\leq p(\lambda x) + p((1-\lambda)y) \\ &= |\lambda|p(x) + |1-\lambda|p(y) \\ &< n^{-1}\end{aligned}$$

V_n es convexo.

Sea $x \in V_n,\ \lambda \in K,\ |\lambda| \leq 1$

$$\begin{aligned}p(\lambda x) &\leq |\lambda|p(x) \\ &\leq p(x) \\ &< n^{-1}\end{aligned}$$

V_n es balanceado. Así, por proposición 13, $V_n,\ n \in \mathbb{N}$ forman una base de entornos de cero para una topología $\mathfrak{T}$ bajo la cual L es un espacio vectorial topológico. Sea $H = \{x \in M : f(x) = 1\}$; H es un hiperplano en M y una variedad lineal en L. Sea $A = V_1$; A es abierto por proposición 42 y $A \cap H = \emptyset$ ya que $p(x) \geq 1,\ \forall x \in H$. Por teorema 6 existe un hiperplano H_1 en L, que contiene a H y no intersecta a A. Como $H_1 \cap M \neq M$ ya que $0 \notin H_1$ y $H \subset H_1$ se sigue que $H_1 \cap M = H$. Como H y $H_1 \cap M$ son hiperplanos en M, por proposición 27, tenemos que $H_1 = \{x : f_1(x) = 1\}$ para alguna forma lineal f_1 sobre L, Luego $H = H_1 \cap M$ implica que $f(x) = f_1(x),\ \forall x \in M$, así f_1 es una extensión de f. De $H_1 \cap A = \emptyset$, se sigue que $|f_1(x)| \leq p(x),\ \forall x \in L$. □

Corolario 10. *Si $(L, ||\cdot||)$ es un espacio normado, M es un subespacio de L y f es una forma lineal sobre M tal que $|f(x)| \leq ||x||,\ (x \in M)$, entonces f tiene una extensión lineal f_1 que satisface $|f_1(x)| \leq ||x||,\ \forall x \in L$*

Demostración. La prueba es análoga a la prueba anterior. □

3.4. Espacios Localmente Convexos

Definición 105. *Un espacio vectorial topológico E sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ es llamado **localmente convexo** si este es Hausdorff y cada entorno de cualquier $x \in E$ contiene un entorno* *convexo de x.*

Una topología sobre un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, no necesariamente Hausdorff, pero si satisface $(LT)_1$ *y* $(LT)_2$ y posee una base de entornos convexos de cero, es llamada **topología localmente convexa**.

Por el dual topológico de un espacio vectorial topológico L, entenderemos el espacio vectorial L' de formas lineales continuas sobre L, L' es un subespacio de el dual algebraico L^*

Analíticamente una topología localmente convexa sobre E es determinada por una familia arbitraria $\{p_\alpha : \alpha \in A\}$ de seminormas.
Para cada $\alpha \in A$, sea $U_\alpha = \{x \in E : p_\alpha(x) \leq 1\}$ y considere la familia $\mathfrak{B} = \{n^{-1}U\}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y U se mueve sobre todas las intersecciones finitas de conjuntos U_α $(\alpha \in A)$. Esta familia $\mathfrak{B}$ satisface las condiciones indicadas anteriormente y por lo tanto es una base de 0 para una topología $\mathfrak{T}$ localmente convexa sobre E, llamada **la topología generada** por la familia $\{p_\alpha\}$, equivalentemente $\{p_\alpha\}$ es llamada **Familia generadora de seminormas** para $\mathfrak{T}$.

Proposición 46. *La completación $\widetilde{E}$ de un espacio localmente convexo E es un espacio localmente convexo cuya topología es generada por las extensiones continuas a $\widetilde{E}$ de los miembros de una familia generadora de seminormas sobre E.*

Demostración. Si p es un miembro de la familia generadora de seminormas $\mathfrak{P}$ sobre E, p tiene una única extensión continua $\widetilde{p}$ sobre $\widetilde{E}$ por proposición 42. Si $U = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$, entonces $\widetilde{U} = \{x \in \widetilde{E} : \widetilde{p}(x) \leq 1\}$ es la clausura de U en $\widetilde{E}$. Se sigue de la proposición 16 que $\widetilde{E}$ es un espacio localmente convexo (ya que $\widetilde{U}$ es convexo) y que $\{\widetilde{p} : p \in \mathfrak{P}\}$ es la familia generadora de seminormas sobre $\widetilde{E}$. □

Teorema 8. *Sea E un espacio vectorial topológico cuya topología es localmente convexa. Si f es una forma lineal definida y continua en un subespacio M de E, luego f posee una extensión lineal continua en E.*

Demostración. Sea E un espacio vectorial topológico dotado con una topología localmente convexa, y sea f una forma lineal que está definida y es continua en M, donde M es un subespacio de E. Como f es continua en M, entonces $V = \{x : |f(x)| \leq 1\}$ es un entorno de 0 en M. Luego, existe un entorno de cero balanceado y convexo U en E tal que $U \cap M \subset V$; como la función de Minkowski p de U es una seminorma continua en E tal que $|f(x)| \leq p(x)$ en M, así $U \cap M \subset V$. Luego por el teorema 7 existe una extensión lineal f_1 de f sobre E tal que $|f_1(x) - f_1(y)| \leq \epsilon$ siempre que $x - y \in \epsilon U$ con $\epsilon > 0$ □

Corolario 11. *Dados n $(n \in \mathbb{N})$ elementos linealmente independientes x_v de un espacio localmente convexo E, existen n formas lineales continuas f_μ en E tal que $f_\mu(x_v) =$*
$$\delta_{\mu v} = \begin{cases} 1 & \mu = v \\ 0 & \mu \neq v \end{cases}, \ (\mu, v = 1, 2, \cdots, n)$$

Demostración. Sea E un espacio localmente convexo, $n \in \mathbb{N}$ y x_v los elementos linealmente independientes de E. Luego, denotemos por M al subespacio n-dimensional con base x_v en E. Luego por la proposición 24, las formas lineales g_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$ de M que son determinados por $g_\mu = \delta_{\mu v}$, donde $\delta_{\mu\mu} = 1$ y $\delta_{\mu v} = 0$ para $\mu \neq v$ $(\mu, v = 1, 2, \ldots, n)$ son continuos. Luego, algún conjunto $\{f_\mu\}$, de extensiones continuas de las respectivas formas g_μ para E, tiene las propiedades requeridas. □

Corolario 12. *Algún subespacio M de dimensión finita de un espacio localmente convexo E tiene un subespacio complementario.*

Demostración. Sea E un espacio localmente convexo y $M \subset E$ de dimensión n. Sean $\{f_\mu\}$ n formas lineales continuas en E las cuales están restringidas por M a ser linealmente independientes, por el corolario anterior, luego sea $N = \bigcap\limits_{\mu=1}^{n} f_\mu^{-1}(0)$ un subespacio cerrado de E, así por la proposición 25 se sigue que N es un subespacio algebraico complementario de M □

Corolario 13. *En todo espacio localmente convexo, la estructura convexa y la extructura balanceada convexa de un conjunto precompacto es precompacta*

Demostración. Como la estructura balanceada de un conjunto precompacto es precompacta, se cumple que la estructura balanceada convexa de un conjunto precompacto es precompacta. Ahora necesitamos probar que la estructura convexa de un conjunto precompacto es compacta. Notemos sin embargo que la siguiente prueba también es aplicable para la estructura balanceada convexa. Observemos primero que la estructura convexa P de un conjunto finito $\{a_i : \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ es compacto, pero P es la imagen del compacto $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \longmapsto \sum \lambda_i a_i$. Ahora sea $B \subset E$ precompacto y C la estructura convexa de B, luego sea V un entorno convexo arbitrario de 0 en E. Si suponemos que B es no vacío, entonces existe un elemento $a_i \in B$ $(i = 1, ...,)$ tal que $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (a_i) + V$. La estructura convexa P de $\{a_i : \ i = 1, 2, ..., n\}$ es compacta y $C \subset P + V$, luego $P + V$ es convexo y contiene a B, entonces tenemos que $P \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} (b_j + V)$ para un subconjunto finito adecuado $\{b_j : j = 1, ..., m\}$ de P, por lo que se sigue que $C \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} (b_j + 2V)$, lo cual prueba que C es precompacta. $\square$

3.5. Topologías Proyectivas

Definición 106. *Sean E y E_α, $\alpha \in A$ espacios vectoriales sobre K, sea f_α un mapeo lineal de E a E_α y sea $\mathfrak{T}_\alpha$ la topología localmente convexa en E_α, $\alpha \in A$. La* ***topología proyectiva*** *$\mathfrak{T}$ en E con respecto a la familia $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, f_\alpha) : \alpha \in A\}$ es la topología más gruesa en E para la cual cada uno de los mapeos f_α, $\alpha \in A$ de E a $(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha)$ es continuo.*

Proposición 47. *La topología proyectiva en E con respecto a la familia $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, f_\alpha) : \alpha \in A\}$ es una topología Hausdorff si y sólo si para cada $x \in E$, $x \neq 0$, existe un $\alpha \in A$ y un entorno de cero $U_\alpha \subset E_\alpha$ tal que $f_\alpha(x) \notin U_\alpha$.*

Demostración. Sea E un espacio vectorial, si $\mathfrak{T}$ es Hausdorff y $x \in E$, $x \neq 0$, por corolario 3, existe un entorno de cero U en $(E, \mathfrak{T})$ no conteniendo a x , ya que existen entornos de cero $U_\alpha \subset E_\alpha$ y un subconjunto finito $H \subset A$ con $\bigcap\limits_{\alpha \in H} f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subset U$, (por la definición de subbase) debemos tener que $f_\alpha(x) \notin U_\alpha$, para algún $\alpha \in H$. Recíprocamente, sea $f_\alpha(x) \notin U_\alpha$, entonces $x \notin f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, así, $\mathfrak{T}$ es una topología Hausdorff.

□

Proposición 48. *Un mapeo u de un espacio topológico F a E, donde E es dotado de la topología proyectiva definida por la familia $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, f_\alpha) : \alpha \in A\}$ es continuo si y sólo si para cada $\alpha \in A$, $f_\alpha \circ u$ es continuo de F a $(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha)$.*

Demostración. Sea u un mapeo de F a E, luego u es continua, entonces sabemos por definición que los mapeos f_α de E a $(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha)$ son continuas, entonces $f_\alpha \circ u$ es continua. Recíprocamente, vamos a mostrar que u es continua. Sea G_α cualquier subconjunto abierto de E_α; entonces $u^{-1}[f_\alpha^{-1}(G_\alpha)]$ es un subconjunto abierto de F. Ahora, cada subconjunto G de F es la unión de una familia de intersecciones finitas de subconjuntos $f_\alpha^{-1}(G_\alpha)$, entonces $u^{-1}(G)$ es abierto en F. Por lo tanto, u es continua. □

Definición 107. *Sea M un subespacio del espacio localmente convexo $(E, \mathfrak{T})$; la topología de M (es decir, la topología inducida en M por $\mathfrak{T}$) es la topología proyectiva en M con respecto al embebimiento canónico $M \to E$.*

Definición 108. *Sea $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ una familia de espacios vectoriales topológicos, cada $\mathfrak{T}_\alpha$ es una topología localmente convexa. La topología producto $\mathfrak{T}$ en $E = \prod_\alpha E_\alpha$ es localmente convexo; $\mathfrak{T}$ es la topología proyectiva en E con respecto a las proyecciones $E \to E_\alpha$ $(\alpha \in A)$.*

Definición 109. *Sea $\{\mathfrak{T}_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de topologías localmente convexas en un espacio vectorial E; su cota inferior $\mathfrak{T}$ es una topología localmente convexa la cual es una topología proyectiva. $\mathfrak{T}$ es la topología proyectiva con respecto a la familia $\{(E, \mathfrak{T}_\alpha, e)\ \alpha \in A\}$, donde e es el mapeo identidad de E.*

Definición 110. *Sea E un espacio vectorial sobre K y sea F un subconjunto de E^* no vacío. Fijando $E_f = K_0$, para cada $f \in F$, la topología proyectiva en E con respecto* *a la familia* $\{(E_f, f) : \ f \in F\}$ *es llamada la* ***topología débil*** *generada por* F *y es denotada por* $\sigma(E, F)$.

Definición 111. *Sea* A *un conjunto de índices ordenado bajo una relación* $\leq$, *sea* $\{E_\alpha \ : \alpha \in A\}$ *una familia de espacios localmente convexos sobre* K, *denotemos cuando* $\alpha \leq \beta$ *por* $g_{\alpha\beta}$ *al mapeo lineal continuo de* E_β *a* E_α.

Definición 112. *Sea* E *el subespacio de* $\prod_\alpha E_\alpha$ *cuyos elementos* $x = (x_\alpha)$ *satisfacen la relación* $x_\alpha = g_{\alpha\beta}(x_\beta)$ *cuando* $\alpha \leq \beta$; E *es llamado el* ***límite proyectivo*** *de la familia* $\{E_\alpha : \ \alpha \in A\}$ *con respecto al mapeo* $g_{\alpha\beta}(\alpha, \ \beta \in A; \ \alpha \leq \beta)$ *denotado por* $\varprojlim g_{\alpha\beta} E_\beta$.

Proposición 49. *Todo espacio localmente convexo completo* E *es isomorfo a un límite proyectivo de una familia de espacios de Banach; esta familia puede ser elegida tal que su cardinalidad es igual a la cardinalidad de una base de entornos de cero en* E.

Demostración. $\{U_\alpha : \ \alpha \in A\}$ denota una base de entornos de cero convexa y balanceada en E. A es dirigida bajo la relación $\alpha \leq \beta$, definida por "$\alpha \leq \beta$ si $U_\beta \subset U_\alpha$", donde p_α denota la función de Minkowski de U_α y fijando $F_\alpha = E/V_\alpha$, donde $V_\alpha = p_\alpha^{-1}(0)$ $(\alpha \in A)$. Si x_α es la clase de equivalencia de $x \in E$ módulo V_α, entonces $x_\alpha \to ||x_\alpha|| = p_\alpha(x)$ es una norma en F_α generando la 0| topología $\mathfrak{T}_\alpha$ que es más gruesa que la topología del espacio cociente E/V_α. Si $\alpha \leq \beta$, cada clase de equivalencia módulo V_β, x_β está contenida en una única clase de equivalencia módulo V_α, x_α ya que $V_\beta \subset V_\alpha$; entonces el mapeo $g_{\alpha\beta} : x_\beta \to x_\alpha$ es lineal y continuo de $(F_\beta, \mathfrak{T}_\beta)$ a $(F_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha)$, dado que $||x_\alpha|| \leq ||x_\beta||$, luego formemos el límite proyectivo $F = \varprojlim g_{\alpha\beta} F_\alpha(\mathfrak{T}_\beta)$, entonces el mapeo $x \to (x_\alpha)$ de E a F es lineal y uno a uno, ya que E es Hausdorff, se muestra que este mapeo está en F. Sea H un subconjunto finito no vacío de A y sea $z = (z_\alpha)$ un elemento fijo de F, entonces, $\exists x_H \in E$ tal que la clase de equivalencia de x_H modulo V_α es z_α, para cada $\alpha \in H$. Ahora, si $\alpha \in H_1$ y $\alpha \in H_2$, entonces $x_{H_1} - x_{H_2} \in U_\alpha$ que muestra el filtro de secciones de $\{x_H\}$, donde para cada $H \neq \emptyset$ finito y x_H es un filtro Cauchy en E, ya que E es completo, $\{x_H\}$ es un límite y en E para cada $y_\alpha = z_\alpha$ $(\alpha \in A)$ dado que $x \to (x_\alpha)$ es continuo. Además, $x \to (x_\alpha)$ es un homeomorfismo y por lo tanto un isomorfismo de E a F. Ahora, F es un subespacio denso del límite proyectivo

$\text{lím}\, \bar{g}_{\alpha\beta}\tilde{F}_\beta$ donde $\tilde{F}_\alpha$ $(\alpha \in A)$ es la completación de $(F_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha)$ y $\bar{g}_{\alpha\beta}$ la extensión continua de $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha \leq \beta)$ a $\tilde{F}_\beta$ con valores en $\tilde{F}_\alpha$, pero F siendo isomorfo con E es completo y por lo tanto, $F = \varprojlim \bar{g}_{\alpha\beta}\tilde{F}_\beta$. □

3.6. Topologías Inductivas

Definición 113. *Sea E y E_α $(\alpha \in A)$espacios vectoriales sobre K y sea g_α mapeos lineales de E_α a E y sea $\mathfrak{T}_\alpha$ una topología localmente convexa sobre E_α $(\alpha \in A)$. La* ***topología inductiva*** *sobre E con respecto a la familia $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, g_\alpha) : \ \alpha \in A\}$ es la topología localmente convexa más fina con la cual cada mapeo g_α $(\alpha \in A)$ es continuo de $(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha)$ a E.*

Proposición 50. *Un mapeo lineal v sobre un espacio vectorial E a un espacio vectorial topológico localmente convexo F es continua para una topología inductiva sobre E si y sólo si cada mapeo $v \circ g_\alpha$ $(\alpha \in A)$ es continuo de $(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha)$ a F.*

Demostración. Si el mapeo v es continuo para la topología inductiva sobre E, $v \circ g_\alpha$ es continua $\forall \alpha \in A$ ya que g_α es continuo y composición de mapeos continuos es continuo. Recíprocamente, sea cada $v \circ g_\alpha$ $(\alpha \in A)$ continuo y sea W un entorno convexo absorbente de 0 en F. Entonces $(v \circ g_\alpha)^{-1}(W) = g_\alpha^{-1}[v^{-1}(W)]$ es un entorno de cero en E_α $(\alpha \in A)$, lo que implica que $v^{-1}(W)$ es un entorno de cero para la topología inductiva sobre E. □

Definición 114. *Si E es un espacio vectorial topológico localmente convexo y M es un subespacio de E. Si $\mathfrak{T}$ denota la topología de E, la* ***topología cociente*** *es la topología inductiva con respecto a la familia $\{(E, \mathfrak{T}, \phi)\}$, donde ϕ es el mapeo canónico de E a E/M.*

Proposición 51. *Si E un espacio vectorial topológico localmente convexo y M un subespacio de E, entonces E/M con la topología cociente es un espacio vectorial topológico localmente convexo.*

Demostración. Sea U entorno de $\widetilde{x}$ en E/M. Luego $\phi^{-1}(U)$ es un entorno de x en E, así $\phi^{-1}(U)$ contiene un entorno convexo V de x. Sean $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \phi(V)$. Como $x, y \in V$, entonces $\lambda x + (1-\lambda)y \in V;\ 0 < \lambda < 1$. Así $\lambda\widetilde{x} + (1-\lambda)\widetilde{y} \in \phi(V);\ 0 < \lambda < 1$. Por lo tanto E/M es un espacio vectorial topológico localmente convexo. □

Definición 115. *Si $\{E_\alpha :\ \alpha \in A\}$ es una familia de espacios vectoriales sobre K. La* ***suma directa algebraica*** *$\bigoplus_\alpha E_\alpha$ se define como el subespacio de $\prod_\alpha E_\alpha$ de los elementos x tales que todos menos un nùmero finito de las proyecciones $x_\alpha = p_\alpha(x)$ son cero. Denote por g_α $(\alpha \in A)$ el mapeo inyectivo (o embebimiento canónico) $E_\alpha \longrightarrow \bigoplus_\alpha E_\alpha$. La* ***suma directa localmente convexa*** *de la familia $\{E_\alpha(\mathfrak{T}_\alpha) :\ \alpha \in A\}$ de espacios vectoriales topológicos localmente convexos es definida $\bigoplus_\alpha E_\alpha$ bajo la topología inductiva con respecto a la familia $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, g_\alpha) :\ \alpha \in A\}$. Cuando se desea hacer referencia a esta topología, denotaremos $E(\mathfrak{T}) = \bigoplus_\alpha E_\alpha(\mathfrak{T}_\alpha)$.*

Ya que $\mathfrak{T}$ es más fina que la topología inducida sobre E por $\prod_\alpha E_\alpha(\mathfrak{T}_\alpha)$, $\mathfrak{T}$ es Hausdorff y por lo tanto $E(\mathfrak{T})$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo. De lo comentado anteriormente se deduce que una base de entornos de cero de $\bigoplus_\alpha E_\alpha(\mathfrak{T})$ está provista por todos los conjuntos de la forma $U = \Gamma_\alpha g_\alpha(U_\alpha)$; esto es

$$U = \{\sum \lambda_\alpha g_\alpha(x_\alpha) :\ \sum |\lambda| \leq 1,\ x_\alpha \in U_\alpha\}$$

donde $\{U_\alpha :\ \alpha \in A\}$ es una familia de entornos de cero respectivamente en los espacios E_α. Para simplificar la notación, escribiremos x_α en lugar de $g_\alpha(x_\alpha)$, identificando asi E_α con la imagen canónica $g_\alpha(E_\alpha)$ en $\phi_\beta E_\beta$.

Proposición 52. *La suma directa localmente convexa $\bigoplus_\alpha E_\alpha$ de una familia de espacios vectoriales topológicos localmente convexos es completo si y sólo si cada sumando E_α es completo.*

Demostración. Sea $E = \bigoplus_\alpha E_\alpha$ completo. Como cada proyección p_α de E sobre E_α es continua, entonces cada sumando E_α es cerrado en E y por lo tanto es completo.

Recíprocamente, suponga que cada E_α ($\alpha \in A$) es completo. Denote por $\mathfrak{T}_1$ la única topología que es traslación invariante sobre E para la cual una base de entornos de cero está dada por los conjuntos $E \cap V$, donde $V = \prod_\alpha V_\alpha$ y V_α es un entorno de cero en E_α. Entonces $\mathfrak{T}_1$ es más gruesa que la topología de la suma directa localmente convexa $\mathfrak{T}$ sobre E y $(E, \mathfrak{T}_1)$ es un espacio vectorial topológico. Los conjuntos V forman una base de entornos de cero en $F = \prod_\alpha E_\alpha$ para una única topología que es traslación invariante donde F es un grupo topológico completo con respecto a la adición. Si $z \in F$ esta en la clausura de E, entonces para cada V existe $x \in E$ tal que $x - z \in V$; esto implica que $z \in E$, así E es cerrado en F. Por lo tanto $(E, \mathfrak{T}_1)$ es completo.
Para probar que $(E, \mathfrak{T})$ es completo, por proposición 17 es suficiente probar que $\overline{U}$ con respecto a $\mathfrak{T}$ son cerrados en $\mathfrak{T}_1$, donde $U = \Gamma_\alpha U_\alpha$ donde U_α es un entorno convexo y balanceado de cero en E_α. Sea $U = \Gamma_\alpha U_\alpha$ donde U_α es un entorno convexo y balanceado de cero en E_α y $\mathfrak{G}$ un filtro Cauchy en $\mathfrak{T}_1$ sobre $\overline{U}$ con limite $x = (x_\alpha)$ con respecto a $\mathfrak{T}_1$. Denote por H el conjunto finito de índices $\{\alpha : \ x_\alpha \neq 0\}$ y escribamos $E_H = \bigoplus\{E_\alpha : \ \alpha \in H\}$ (sea $E_H = 0$ si $H = \emptyset$ y $E_\beta = \bigoplus\{E_\beta : \ \beta \in A \cap H^c\}$. Finalmente sea p la proyección $E \longrightarrow E_H$ que se anula en E_β. Luego p es continua con respecto a $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}$, además satisface que $p(\overline{U}) \subset \overline{U}$. Así $p(\mathfrak{G})$ es un filtro base sobre $\overline{U} \cap E_H$ que converge a $p(x) = x$(ya que $x \in E_H$) con respecto a $\mathfrak{T}_1$. Ya que H es finito, las topologías $\mathfrak{T}$ *y* $\mathfrak{T}_1$ coinciden sobre E_H, $p(\mathfrak{G})$ también converge a x con respecto a $\mathfrak{T}$; resulta que $x \in \overline{U}$, lo que completa la prueba.

□

Proposición 53. *Un subconjunto B de una suma directa localmente convexa $\bigoplus\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ es acotado si y sólo si existe un subconjunto finito $H \subset A$ tal que $p_\alpha(B) = \{0\}$ para $\alpha \notin H$ y $p_\alpha(B)$ es acotado en E_α si $\alpha \in H$.*

Demostración. Sea B un conjunto acotado en $\bigoplus_\alpha E_\alpha$, como hemos mencionado anteriormente la proyección p_α de la suma directa sobre E_α es continua. $p_\alpha(B)$ es acotado para todo $\alpha \in A$ por proposición 32. Suponga que existe un subconjunto infinito $H \subset A$ tal que $p_\alpha(B) \neq 0$ cuando $\alpha \in H$; entonces H contiene una sucesión α_n de índices distintos. Así existe una sucesión $\{y^{(n)}\} \subset B$ tal que $y^{(n)}_{\alpha_n} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tal que $y^{(n)}_{\alpha_n} \notin nV_n$, donde V_n es entorno balanceado de cero en E_{α_n}. Ahora si $U \subset \bigoplus_\alpha E_\alpha$ es un entorno de la forma $U = \{\sum \lambda_\alpha g_\alpha(x_\alpha) : \sum |\lambda_\alpha| \leq 1,\ x_\alpha \in U_\alpha\}$ donde $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de entornos de cero respectivamente en los espacios E_α tal que $U_{\alpha_n} = V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $n^{-1}y^{(n)} \in U$ para algún $n \in \mathbb{N}$, lo que contradice que B es acotado por proposición 31. Recíprocamente, la condición es suficiente para ser B un conjunto acotado. $\square$

Definición 116. *Sea $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios vectoriales topológicos localmente convexos sobre K, donde A es un conjunto dirigido de índices con relación "$\leq$" y denotemos cuando $\alpha \leq \beta$ por $h_{\beta\alpha}$ un mapeo lineal continuo de E_α a E_β. Sea $F = \bigoplus_\alpha E_\alpha$ y denote por H el subespacio de F generado por los rangos de los mapeos lineales $g_\alpha - g_\beta \circ h_{\beta\alpha}$ (g_α es el embebimiento canónico de E_α a F) de E_α a F, donde (α, β) recorre todos los pares tales que $\alpha \leq \beta$. Si el espacio cociente F/H es Hausdorff (o si H es cerrado en F) el espacio vectorial topológico localmente convexo F/H es llamado* ***límite inductivo*** *de la familia $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ con respecto a los mapeos $h_{\beta\alpha}$ y es denotado por $\underrightarrow{lim} h_{\beta\alpha} E_\alpha$.*

Los requerimientos para la construcción de un límite inductivo se realizan a menudo de la forma siguiente: $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de subespacios de un espacio vectorial E tal que $U_\alpha \neq U_\beta$ para $\alpha \neq \beta$, dirigido bajo inclusión y satisface que $E = \cup_\alpha E_\alpha$; entonces A es dirigido bajo "$\alpha \leq \beta$ *si* $E_\alpha \subset E_\beta$". Además en cada E_α ($\alpha \in A$) una topología Hausdorff localmente convexa $\mathfrak{T}_\alpha$ es dada tal que cuando $\alpha \leq \beta$ la topología inducida por $\mathfrak{T}_\beta$ sobre E_α es más gruesa que $\mathfrak{T}_\alpha$. Denotando por g_α ($\alpha \in A$) el mapeo canónico de E_α a E y por $h_{\beta\alpha}$ el embebimiento canónico de E_α a E_β ($\alpha \leq \beta$) y suponga que la topología inductiva $\mathfrak{T}$ sobre E con respecto a la familia $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$ es Hausdorff, el límite inductivo $\underrightarrow{lim} h_{\beta\alpha} E_\alpha$ existe y es isomorfo a con $E(\mathfrak{T})$. En estas circunstancias $E(\mathfrak{T})$ es llamado el límite inductivo de la familia $\{E_\alpha(\mathfrak{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ de subespacios.

Bibliografía

[1] (AUTH.), W. B. *Additive Subgroups of Topological Vector Spaces*, 1 ed. Lecture Notes in Mathematics 1466. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1991.

[2] BERGE, C. *Topological Spaces: Including a Treatment of Multi-Valued Functions, Vector Spaces and Convexity.* Dover Pubn Inc, 1997.

[3] BOURBAKI, N. *Topological vector spaces: Chapters 1-5.* Springer, 1987.

[4] (EDS.), L. W. *Summer School on Topological Vector Spaces*, 1 ed. Lecture Notes in Mathematics 331. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1973.

[5] I.F., W. *Functional Analysis. Topological Vector Spaces.* 2003.

[6] JAMES, I. *Topological and uniform spaces*, 1 ed. Undergraduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1987.

[7] PERESSINI, A. L. *Ordered topological vector spaces*, 1st ed. Harper's series in modern mathematics. Harper Row, 1967.

[8] SCHAEFER, H. *Topological vector spaces*, 1st ed. 1967. corr. 3rd printing ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1971.

[9] STADLER, M. M. *Topología general.* Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, 2002.

[10] TREVES, F. *Topological vector spaces, distributions and kernels.* Academic Press, 1970.

[11] V.I. Bogachev, O. S. a. *Topological Vector Spaces and Their Applications*, 1 ed. Springer Monographs in Mathematics. Springer International Publishing, 2017.