

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CC.NN. Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA



TRABAJO DE GRADO:

**“TEORÍA DE RAMSEY Y SU APLICACIÓN A LA TEORÍA
DE NÚMEROS”**

PRESENTADO POR:

CARLOS RODRÍGUEZ LARÍN
THANIA ITZEL GÓMEZ PARADA
MARVIN ANTONIO SORIANO RIVAS

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ASESOR DIRECTOR: LIC. PEDRO FLORES SÁNCHEZ
ASESOR METODOLÓGICO: DR. JOSÉ IBRAHIM
VILLANUEVA GUTIÉRREZ

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, 2019
SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

LIC. ROGER ARMANDO ARIAS
RECTOR

DR. MANUEL DE JESUS JOYA ABREGO
VICE-RECTOR ACADEMICO

MTRO. CRISTOBAL HERNÁN RÍOS BENITEZ
SECRETARIO GENERAL

LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN
FISCAL GENERAL

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL**

AUTORIDADES

**ING. JOAQUÍN ORLANDO MACHUCA
DECANO**

**LIC. CARLOS ALEXANDER DÍAZ
VICE-DECANO**

**LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNÁNDEZ
SECRETARIO**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL**

AUTORIDADES

**LIC. CARLOS ALEXANDER DÍAZ
JEFE DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y
MATEMÁTICA**

**ING. DOLORES BENEDICTO SARAVIA
COORDINADOR DE LA SECCIÓN DE MATEMÁTICA**

**MTRO. JORGE PASTOR FUENTES CABRERA
DIRECTOR GENERAL DE LOS PROCESOS DE GRADUACIÓN DE
LA FMO**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL**

AUTORIDADES

**MSC. ÓSCAR ULISES LIZAMA VIGIL
COORDINADOR DE LOS PROCESOS DE GRADUACIÓN DEL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

**LIC. PEDRO FLORES SÁNCHEZ
DOCENTE ASESOR DIRECTOR**

**DR. JOSÉ IBRAHIM VILLANUEVA GUTIÉRREZ
DOCENTE ASESOR METODOLÓGICO**

Índice general

Introducción General	I
Objetivos	III
1. Teoría de Grafos	1
1.1. Grafos no dirigidos	2
1.1.1. Tipos de Grafos	3
1.1.2. Caminos	12
1.1.3. Isomorfismos de grafos	13
1.1.4. Coloración de Grafos	14
1.2. Grafos Dirigidos	26
2. Teoría de Ramsey	28
2.1. Versión Finita	29
2.1.1. Número de Ramsey	32
2.2. Cotas para los Números de Ramsey	45
2.3. Versión Infinita	47
3. Aplicaciones	53
3.1. Teorema de Schur	58
3.2. Teorema de van der Waerden	60
Bibliografía	73

Introducción General

La Teoría de Ramsey, llamada así por Frank P. Ramsey (1903-1930), a pesar de no poseer una definición universal podríamos decir que es una arista de la combinatoria que estudia la preservación de propiedades bajo particiones de conjuntos. Sin haber llegado a sus 27 años, Ramsey contribuyó en gran medida a otras áreas tales como la lógica, la economía y la filosofía. En el año de 1928 con tan solo 25 años de edad escribió el trabajo titulado “On a problem of formal logic” (Un problema de lógica formal) el cual fue publicado de forma póstuma en el año de 1930, éste contenía la versión finita e infinita de lo que hoy conocemos como el Teorema de Ramsey o principio de Ramsey, el cual es el objetivo de estudio en este trabajo de graduación.

Antes de ahondar en materia, en el capítulo 1 haremos un estudio de la teoría de grafos, abarcando tanto los dirigidos como los no dirigidos. También estudiaremos los criterios básicos de coloración de grafos. Estos temas nos ayudarán para el desarrollo del capítulo 2 en el cual hablaremos de la Teoría de Ramsey comenzando por su versión finita. En nuestra tesis abordaremos solamente grafos simples.

A lo largo del trabajo denotaremos como \mathbb{N} y \mathbb{Z} , el conjunto de los números naturales y enteros, respectivamente. Para A y B conjuntos arbitrarios, si A es un subconjunto de B , escribiremos $A \subseteq B$. Denotamos $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$, la unión, la intersección y la diferencia de A y B , correspondientemente. Al producto cartesiano de A y B lo denotaremos por $A \times B$. Si A es finito denotaremos el cardinal de

A por $|A|$. Escribimos $\mathcal{P}(A)$ como el conjunto potencia de A , y para un $m \in \mathbb{N}$ definimos $P_m(A) = \{S \subseteq A / |S| = m\}$. Un conjunto con un único elemento lo llamaremos *singular* y un elemento en $P_m(S)$ lo llamamos m -subconjunto de S .

Objetivos

Objetivo General

Indagar en la teoría de Ramsey y su aporte a la teoría de números.

Objetivos Específicos

- Conocer los conceptos básicos de la teoría de grafos.
- Analizar la teoría de Ramsey en su versión finita é infinita.
- Mostrar algunas de las aplicaciones de la teoría de Ramsey en la teoría de números.

Capítulo 1

Teoría de Grafos

El inicio de la Teoría de Grafos tuvo lugar en 1736, en un artículo de Leonard Euler denominado “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis (Solución a la geometría de posición)”, el trabajo surgió de un problema conocido como “El problema de los Puentes de Königsberg¹, el cual para solucionarlo se tuvo que modelar el problema bajo un sistema grafos.

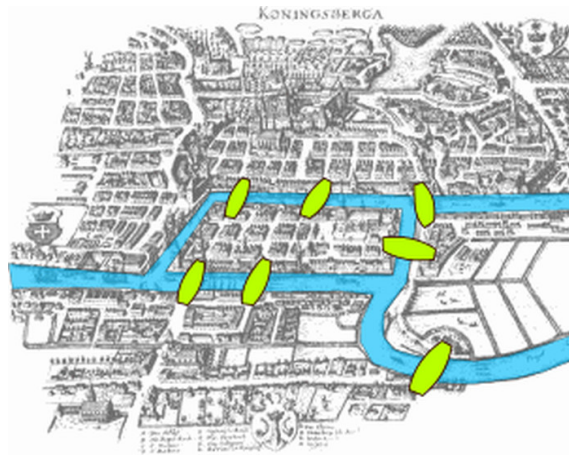


Figura 1.1: Ciudad de Königsberg

“Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregel dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿Es posible dar un

¹Extraída de: <http://elbustodepalas.blogspot.com/2010/09/los-puentes-de-konigsberg.html>

paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo sólo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?”.

A partir de éste se formaron numerosas investigaciones y en nuestra época es una herramienta indispensable en la creación de planos de metro, mapas de carretera, red de computadoras, entre otras.

1.1. Grafos no dirigidos

Definición 1.1.1

Llamaremos grafo G , al par ordenado (V_G, E_G) formado por un conjunto finito no vacío V_G y un conjunto E_G de pares no ordenados de elementos del mismo.

- V_G es el conjunto de los vértices o nodos del grafo.
- E_G será el conjunto de las aristas o arcos del grafo.

Utilizaremos la notación $G = (V_G, E_G)$ para designar al grafo cuyos conjuntos de vértices y aristas son, respectivamente, V_G y E_G .

Los cardinales $|V_G|$ y $|E_G|$ son llamados el orden y tamaño de G respectivamente. Un grafo $G = (V_G, E_G)$ admite una representación en el plano de la siguiente manera: A cada vértice $u \in V_G$ se le asigna un punto en el plano (puntos distintos se asignan a vértices distintos), y cada arista $\{u, v\} \in E_G$ se representa por una línea entre los puntos que le corresponden a los vértices "u" y "v". La arista $\{v, v\} \in E_G$ se llamará bucle.

Ejemplo 1.1.1

La siguiente figura representa el grafo dado por: $V_G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $E_G = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_5\}\}$.

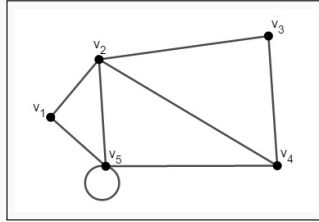


Figura 1.2

Una arista $\{u, v\} \in E_G$ será escrita usualmente como uv , de este modo tenemos que $uv = vu$ (esto es, para grafos no dirigidos). Para una arista $e = uv \in E_G$ diremos que los vértices u y v son sus extremos. Si un vértice v es extremo de alguna arista e diremos que e incide con v , y viceversa. Dos vértices $u, v \in G$ son adyacentes si $uv \in E_G$. Dos aristas $e, f \in E_G$ son adyacentes si tienen un extremo en común. Dos vértices o aristas no adyacentes serán llamados independientes. Más aun, un conjunto de vértices o aristas son independientes si no contienen algún par de elementos adyacentes. Llamaremos aristas paralelas a aquellas que tienen los mismos vértices en común.

1.1.1. Tipos de Grafos

✓ *Grafo Simple*: Es aquel que no posee bucles ni aristas paralelas.

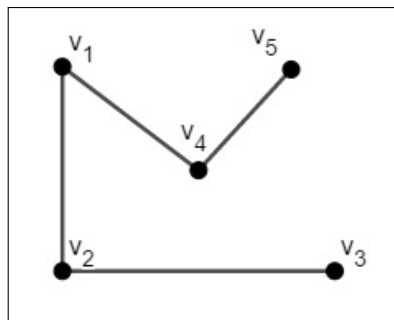


Figura 1.3: Grafo simple.

✓ *Grafo Geométrico*: Es el grafo en el que todas sus aristas son segmentos de recta.

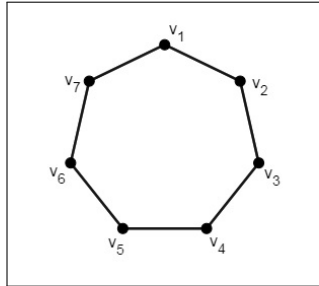


Figura 1.4: Grafo geométrico.

✓ *Grafo Lineal*: Diremos que un grafo es un L_n , un grafo lineal con n vértices ($n \geq 2$), de los que dos son de grado 1 y el resto si los hay de grado 2.

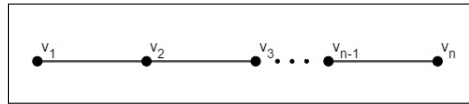


Figura 1.5: Grafo Lineal.

✓ *Grafo Regular*: Es un grafo donde cada vértice tiene el mismo grado o valencia. Un Grafo regular con vértices de grado k es llamado Grafo k -regular o Grafo regular de grado k .

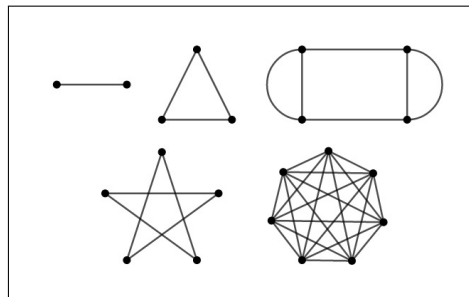


Figura 1.6: Algunos Grafos Regulares.

✓ *Grafo Vacío*: Un grafo es un grafo vacío si y solo si $E = \emptyset$

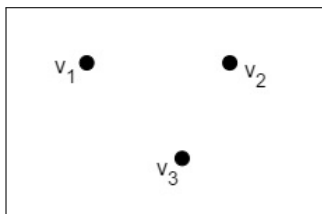


Figura 1.7: Grafo vacío.

✓ *Grafo Etiquetado*: Es un grafo cuyos vértices son etiquetados pero cuyas aristas no lo son.

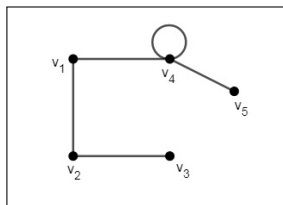


Figura 1.8: Grafo etiquetado.

✓ *Grafo no Etiquetado*: Es un grafo en el cual ni los vértices ni las aristas son etiquetados.

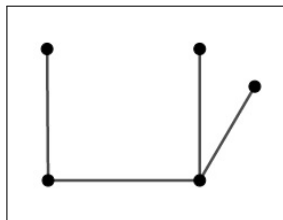


Figura 1.9: Grafo no etiquetado.

Definición 1.1.2

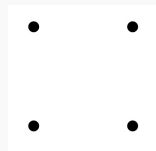
Un grafo G que satisface que todos sus pares de vértices son adyacentes es llamado un grafo completo. Un grafo completo de orden n se denota por K_n .

De la definición de grafo completo se sigue que:

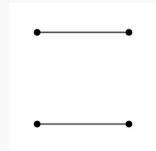
$$|E_{K_n}| = |P_2(V_{K_n})| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ejemplo 1.1.2

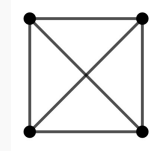
Las siguientes figuras muestran un grafo figura a) con un conjunto de 4 vértices independientes, un grafo figura b) con dos aristas independientes y un grafo completo figura c) de orden 4.



a)



b)



c)

Definición 1.1.3

La vecindad de un vértice u denotado como $N(u)$ está dado por los vértices adyacentes a u .

$$N(u) = \{v \in V_G : \{u, v\} \in E_G\}.$$

De modo que el grado $g(u)$ del vértice u es el número de vecinos que tiene $g(u) = |N(u)|$.

Lema 1.1.4 Lema del apretón de las manos

Sea $G = (V_G, E_G)$ un grafo simple, entonces

$$\sum_{v \in V_G} g(v) = 2|E_G|.$$

Demostración

Sea $G = (V_G, E_G)$ un grafo cuyo conjunto de vértices es

$$V_G = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$$

y sea $|E_G|$ el número de aristas de G . Cada una de las aristas une dos vértices luego al sumar los grados de éstos, las contamos exactamente dos veces, de aquí que

$$\sum_{i=1}^q g(v_i) = 2|E_G|$$

□

Ejemplo 1.1.3 El problema de la carta a los amigos

Cinco amigos salen de vacaciones al mismo tiempo y a diferentes lugares. Deciden que al llegar a su destino cada uno de ellos enviará una postal a tres de los restantes. ¿Es posible que cada amigo reciba postales de precisamente los tres amigos a los que él les envió las suyas?

Este problema se puede resolver modelizándolo mediante un grafo, en el que cada vértice representará a uno de los amigos y las aristas representarán las cartas que se envían entre ellos. Cada vértice tendrá entonces tres aristas incidentes, ya que cada amigo envía tres cartas. Por lo tanto, de existir dicho grafo tendría que ser regular de grado 3, con 5 vértices.

Veamos a continuación que es imposible que este grafo exista dado que contradice el lema del apretón de manos.

Efectivamente, aplicando este lema a este problema de los amigos, al tener el grafo asociado 5 vértices, cada uno de ellos incidente a 3 aristas, habría un número impar de vértices de grado impar, lo cual sería una contradicción con el lema. Por tanto, ese grafo (y por consiguiente, la situación que modela) no puede existir.

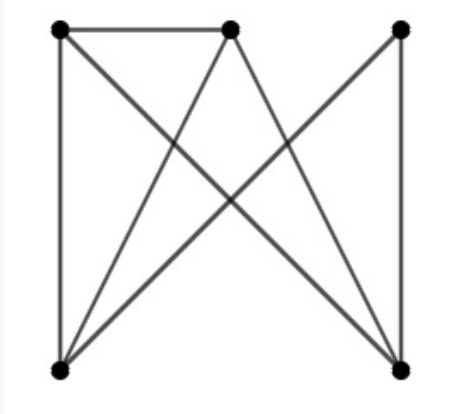


Figura 1.10

Este problema se podría ampliar preguntándonos qué habría sucedido si fueran 6 amigos en lugar de 5.

En este caso vemos que el grafo que modela la situación no contradice el lema del Apretón de manos y que sí podemos encontrar tal grafo que cumpla lo requerido. La siguiente figura muestra dos de estos grafos posibles

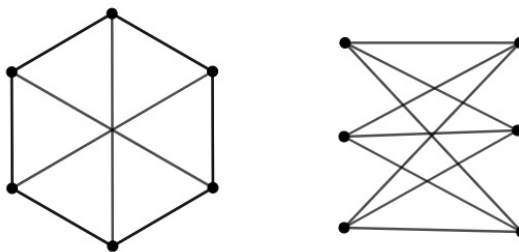


Figura 1.11

Ambos grafos son solución, y de hecho, ambos son isomorfos.

Corolario 1.1.5

En un grafo simple cualquiera, el número de vértices con grado impar es siempre un número par.

Demostración

En efecto, supongamos que de los q vértices que tiene G hay p con grado par (los p primeros) y el resto, es decir $q - p$, tiene grado impar. Entonces, por el Lema 1.1.4,

$$\sum_{i=1}^q g(v_i) = 2|E_G|$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} g(v_i) \text{ es par, } 1 \leq i \leq p &\implies g(v_i) = 2k_i, \text{ para } 1 \leq i \leq p \\ &\implies \sum_{i=1}^p g(v_i) = 2 \sum_{i=1}^p k_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(v_i) \text{ es impar, } p+1 \leq i \leq q &\implies g(v_i) = 2k_i + 1, \text{ para } p+1 \leq i \leq q \\ &\implies \sum_{i=p+1}^q g(v_i) = 2 \sum_{i=p+1}^q k_i + \sum_{i=p+1}^q 1 \\ &\implies \sum_{i=p+1}^q g(v_i) = 2 \sum_{i=p+1}^q k_i + (q - p) \end{aligned}$$

de aquí se sigue que sumando

$$\sum_{i=1}^p g(v_i) + \sum_{i=p+1}^q g(v_i) = 2 \sum_{i=1}^p k_i + 2 \sum_{i=p+1}^q k_i + (q - p)$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^q g(v_i) = 2 \sum_{i=1}^q k_i + (q - p)$$

por el lema del apretón de manos resulta

$$2 \sum_{i=1}^q k_i + (q - p) = 2|E_G|$$

y, consecuentemente,

$$q - p = 2|E_G| - 2 \sum_{i=1}^q k_i = 2(|E_G| - \sum_{i=1}^q k_i)$$

es decir, $q - p$ es par.

□

Definición 1.1.6

Dado un grafo G , diremos que:

- ✓ Un grafo H es un subgrafo de G , lo que denotaremos con $H \subseteq G$, si $V_H \subseteq V_G$ y $E_H \subseteq E_G$.
- ✓ $H = (V_H, E_H)$ es un subgrafo de G generado o inducido por U , si $V_H = U \subseteq V_G$ y $E_H = E_G \cap P_2(U)$.
- ✓ El grafo \overline{G} es el complemento de G , si $V_{\overline{G}} = V_G$ y $E_{\overline{G}} = P_2(V_G) - E_G$.

Observación

- Nótese que las aristas de H son todas las aristas de G que tienen sus extremos en U .
- Observe que $uv \in E_{\overline{G}}$ si y sólo si los vértices u, v son independientes en G .

Ejemplo 1.1.4

Sea G el grafo de la figura

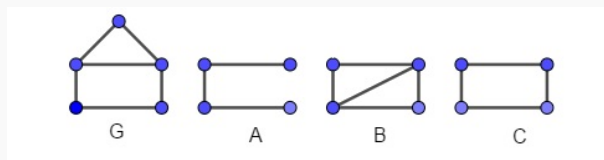


Figura 1.12

Tenemos que A no es un subgrafo inducido por un subconjunto de vértices de G , de la misma manera B . Pero C es un subgrafo inducido por un subconjunto de vértices de G .

Ejemplo 1.1.5

La siguiente figura muestra un grafo G y a su complemento \overline{G} .

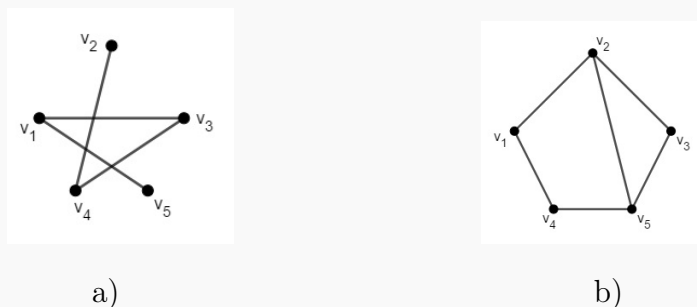


Figura 1.13: Un grafo G y su complemento \overline{G} .

En el inciso a) de la Figura 1.11 es fácil ver que el grafo $H = (V_H, E_H)$ dado por $V_H = \{v_1, v_3, v_4\}$ y $E_H = \{v_1v_3, v_3v_4\}$, es un subgrafo de G generado por $\{v_1, v_3, v_4\}$. En el inciso b) tenemos que el grafo $L = (V_L, E_L)$ dado por $V_L = \{v_2, v_3, v_5\}$ y $E_L = \{v_2v_3, v_3v_5, v_2v_5\}$ es un subgrafo \overline{G} , que además es generado por $\{v_2, v_3, v_5\}$.

1.1.2. Caminos

Definición 1.1.7

Dado un grafo G , un camino de longitud n en G es una secuencia alternada de vértices y aristas: $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n$, tal que $e_i = v_i v_{i+1}$ para $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Un camino en G se representa por la secuencia de vértices que lo componen.

Si v_0, v_1, \dots, v_n es un camino de G , diremos que el camino conecta v_0 con v_n . Los vértices v_0 y v_n son llamados los extremos del camino, donde v_0 es el vértice inicial y v_n el vértice final; los vértices v_1, \dots, v_{n-1} son los vértices internos. En caso que $v_0 = v_n$, el camino es llamado cerrado.

Los caminos que satisfacen que todos sus vértices son distintos es llamado camino simple. Un camino cerrado $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0$ es llamado un ciclo si v_0, v_1, \dots, v_{n-1} es un camino simple.

Ejemplo 1.1.6

En el siguiente grafo G se tiene que:

- ✓ $v_1, v_3, v_4, v_7, v_8, v_4, v_6, v_5$ es un camino de longitud 7 que conecta v_1 con v_5 .
- ✓ $v_2, v_6, v_4, v_7, v_8, v_4, v_1, v_2$ es un camino cerrado de longitud 7.
- ✓ v_1, v_4, v_6, v_5 es un camino simple de longitud 3.
- ✓ $v_1, v_3, v_4, v_7, v_6, v_2, v_1$ es un ciclo de longitud 6.

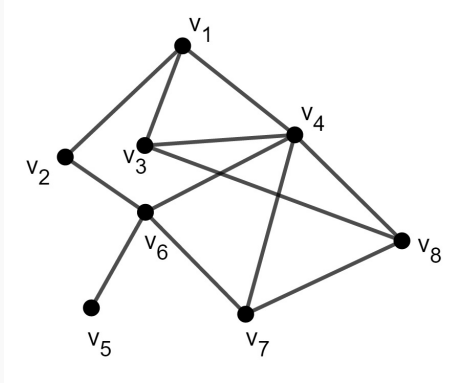


Figura 1.14

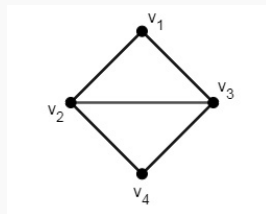
1.1.3. Isomorfismos de grafos

Definición 1.1.8

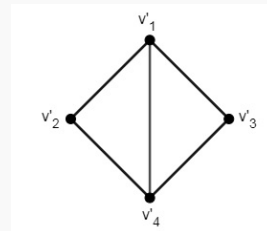
Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos. Se dirá que G y G' son isomorfos, si existe una función biyectiva $\varphi : V \rightarrow V'$ tal que $uv \in E$ si y sólo si $\varphi(u)\varphi(v) \in E'$ para todo $u, v \in V$. Una función φ que satisface lo anterior es llamada un isomorfismo de grafos. Si G y G' son isomorfos lo denotamos $G \simeq G'$.

Ejemplo 1.1.7

La siguiente figura muestra dos grafos isomorfos, G y G' . Un isomorfismo está dado por: $\varphi(v_1) = v'_1$, $\varphi(v_2) = v'_1$, $\varphi(v_3) = v'_4$, $\varphi(v_4) = v'_2$.



a) G



b) G'

Figura 1.15: Dos grafos isomorfos G y G' .

1.1.4. Coloración de Grafos

Definición 1.1.9

Sea C un conjunto con k elementos. Una k -coloración de un conjunto X es una función

$$c : X \longrightarrow C$$

Ahora, en general para un grafo G tenemos $E_G \subseteq P_2(V_G)$, si G es un grafo completo entonces $E_G = P_2(V_G)$.

Si S es el conjunto de vértices de algún grafo G , y haciendo $X = P_r(S)$ cuando $r = 2$, obtenemos la definición de k coloración de las aristas de G . Al igual que en el caso de la coloración de aristas de un grafo, una k -coloración de $P_r(S)$ puede considerarse como una partición $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de $P_r(S)$, donde cada clase C_i está dada por el conjunto de los r -subconjuntos a los que se les asigna el color i , esto es, $C_i = c^{-1}(i)$. Es claro que toda k -coloración queda totalmente determinada si se conocen las k clases de coloración, por tanto las k -coloraciones de $P_r(S)$ no se denotarán por la función de coloración, sino por la partición formada por las clases de coloración.

Sea S un conjunto finito, $r \in \mathbb{N}$, $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ una k -coloración de $P_r(S)$, y $A \subseteq S$ con $|A| \geq r$. Si se cumple que $P_r(A) \subseteq C_i$, para algún i con $1 \leq i \leq k$, se dice que $P_r(A)$ es monocromático de color i .

Definición 1.1.10

Sea G un grafo y C un conjunto con k elementos. Un k -coloramiento propio de G es una coloración de V_G en un conjunto C de cardinalidad k , tal que $C_i \neq C_j$, para todo $ij \in E_G$

Decimos que el grafo es coloreable si admite un k -coloramiento propio. A los elementos del conjunto C de cardinalidad k los llamaremos colores.

Entonces un k -coloramiento propio de un grafo G es una asignación de colores a sus vértices de manera que ningún par de vértices adyacentes tengan el mismo color.

Definición 1.1.11

Una partición cromática de un grafo general G es una partición de V_G en subconjuntos llamados clases cromáticas.

$$V_G = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$$

tal que para todo $1 \leq i \leq k$ el subgrafo inducido $\langle V_i \rangle$ no tiene aristas.

Cualquier k -coloramiento $c : V_G \rightarrow C$, induce una partición en el conjunto de vértices V_G , de la manera que dos vértices $i, j \in V_G$ están en la misma clase si $c(i) = c(j)$.

Definición 1.1.12

Si existe una k -coloración de G se dice que el grafo G es k -coloreable.

Definición 1.1.13 "Número Cromático"

Se define el número cromático $\chi(G)$ de un grafo G como el menor valor $k \in \mathbb{N}$ tal que G es k -coloreable. Si $k = \chi(G)$ se dice que el grafo G es k -cromático.

Definición 1.1.14 Polinomio Cromático

El polinomio cromático de un grafo calcula el número de maneras en las cuales puede ser coloreado el grafo usando un número de colores dado, de forma que dos vértices adyacentes no tengan el mismo color.

Notemos que si G tiene aristas, $\mathcal{X}(G)$ está siempre comprendido entre 2 y el número de vértices del grafo:

- Por un lado, $\mathcal{X}(G) \leq |V_G|$ para todo grafo G , porque un coloramiento que siempre es válido (aunque, desde luego, poco efectivo) es asignar a cada vértice un color distinto.
- Por otro, si el grafo contiene al menos una arista, entonces necesitaremos dos colores como mínimo. Es decir, si $|E_G| \geq 1$, entonces $\mathcal{X}(G) \geq 2$. (De hecho, $\mathcal{X}(G) = 1$ si y sólo si G no tiene aristas, es decir, si G es un grafo vacío).

Ejemplo 1.1.8

¿De cuántas maneras diferentes se puede colorear el siguiente grafo?

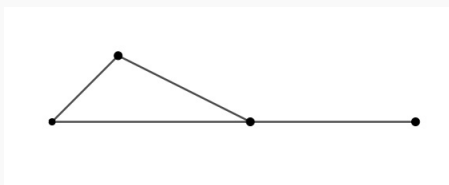


Figura 1.16

Observemos que contiene un triángulo. El mínimo número de colores para colorear un triángulo es 3 y como tiene 4 vértices el máximo número será 4.

a) con $k = 3$ colores:

Comenzando por el vértice inferior izquierdo tenemos 3 posibilidades de colorear, fijado ya un color, ¿de cuantas formas podemos colorear el vértice superior? serian 2 posibilidades de coloración (es decir, tengo un color prohibido

porque esos dos vértices son adyacentes), así ya tendría 6 posibilidades para colorear esos dos. ¿De cuantas maneras diferentes puedo colorear el vértice que falta del triángulo?.

Como es adyacente a los otros dos vértices solo nos queda una posibilidad, por lo cual de cada una de las 6 posibilidades anteriores tengo una para este vértice.

Ahora, ¿De cuantas formas puede colorear el vértice restante del grafo? Cómo solamente hay un color prohibido nos quedan 2 posibilidades, luego por cada una de las 6 posibilidades anteriores tenemos 2, es decir, el número de formas distintas es $(3)(2)(1)(2) = 12$.

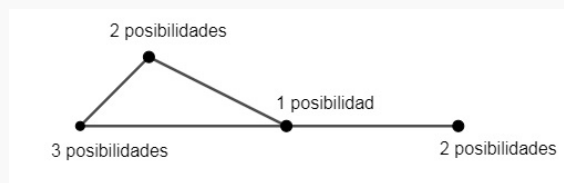


Figura 1.17

b) Con el mismo razonamiento anterior, con 4 colores

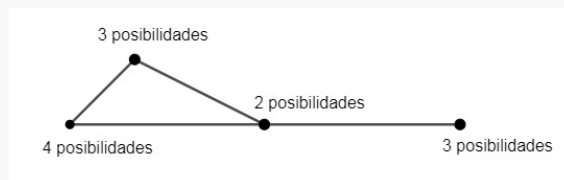


Figura 1.18

tenemos 72 posibilidades.

Ejemplo 1.1.9 grafo completo

Hallar el polinomio cromático de G , además de su número cromático.

Si tenemos un grafo completo de 5 vértices, tenemos una cantidad de aristas

$$\frac{5(5-1)}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Entonces tenemos:

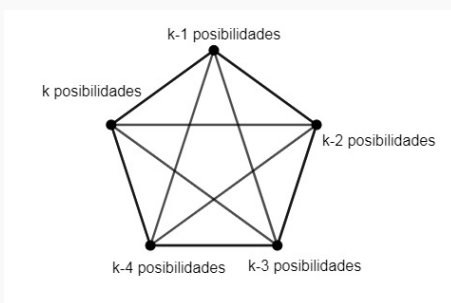


Figura 1.19

El polinomio cromático es pues:

$$C_G(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)$$

El número cromático es el mínimo k natural que no anula al polinomio cromático. Entonces

$$k = 1 \Rightarrow C_G(1) = 0.$$

$$k = 2 \Rightarrow C_G(2) = 0.$$

$$k = 3 \Rightarrow C_G(3) = 0.$$

$$k = 4 \Rightarrow C_G(4) = 0.$$

$$k = 5 \Rightarrow C_G(5) = 120.$$

$$\Rightarrow \mathcal{X}(G) = 5.$$

Usaremos la notación $\mathcal{X}(G)(k)$ para denotar el número de maneras de colorear G con a los mas k colores.

Proposición 1.1.15

Denotando por $\mathcal{X}(G)(k)$ al número de formas distintas en las que podemos colorear G con k colores entonces:

- i) $k \leq k' \Rightarrow \mathcal{X}(G)(k) \leq \mathcal{X}(G)(k')$
- ii) $k < \mathcal{X}(G) \Rightarrow \mathcal{X}(G)(k) = 0$
- iii) $k \geq \mathcal{X}(G) \Rightarrow \mathcal{X}(G)(k) \geq 1$
- iv) El número cromático de un grafo G es el menor número entero k a partir del cual no se anula $\mathcal{X}(G)(k)$

Demostración

A partir del polinomio cromático nos podemos preguntar cuántas coloraciones tiene el grafo, y el número cromático si hay alguna, así que cuál es el número cromático debe de quedar recogido dentro del propio polinomio cromático. En efecto,

1. Con menos de $\mathcal{X}(G)$ colores no podemos colorear el grafo, así que $\mathcal{X}(G)(k) = 0$ si $k < \mathcal{X}(G)$;
2. Pero con exactamente $\mathcal{X}(G)$ colores se puede colorear el grafo de al menos una forma; por tanto, $\mathcal{X}(G)(k) \geq 1$.
3. De un cierto grafo G ya conocemos $\mathcal{X}(G)(k)$, el número de coloraciones distintas con k colores. Supongamos que ahora en nuestra paleta de colores disponemos de algunos más, digamos $k' \geq k$. ¿Cuántas coloraciones podremos formar con esos k' colores? Lo que es seguro es que las que ya teníamos con k colores seguimos teniéndolas ahora; y seguramente algunas más. Por tanto,

si $k \leq k'$, entonces $\mathcal{X}(G)(k) \leq \mathcal{X}(G)(k')$.

4. Reuniendo las tres propiedades anteriores, deducimos que

$$\begin{cases} \text{si } k \geq \mathcal{X}(G) \implies \mathcal{X}(G)(k) \geq 1, \\ \text{si } k < \mathcal{X}(G) \implies \mathcal{X}(G)(k) = 0. \end{cases}$$

Así que si tuviéramos la expresión del polinomio cromático, podríamos obtener el valor del número cromático como el menor valor entero de k en el que $\mathcal{X}(G)(k)$ no se anula.

□

Observación:

✓ Si G y G' son grafos isomorfos, entonces $\mathcal{X}(G)(k) = \mathcal{X}(G')(k)$ ya que las coloraciones de G son transformados por el propio isomorfismo en coloraciones de G' .

Proposición 1.1.16
 $\mathcal{X}(L_n)(k) = k(k-1)^{n-1}$, con $n \geq 1$ y L_n es el grafo lineal.

Demostración

Sea L_n el grafo lineal de vértices ordenados v_1, v_2, \dots, v_n . Para el primer vértice v_1 tenemos a disposición k -colores.

Una vez fijado el color del vértice v_1 tendremos disponible únicamente $k - 1$ colores para v_2 , debido a que no podemos usar el mismo color del vértice anterior.



Figura 1.20

Partiendo de ahí cada vértice tendrá un color prohibido que corresponde al color usado en el vértice anterior. Por lo tanto

$$\mathcal{X}(L_n)(k) = k(k-1)(k-1)\dots(k-1) = k(k-1)^{n-1}.$$

□

Ejemplo 1.1.10

Sea $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

- a) Calcular $P_0(S)$, $P_1(S)$, $P_2(S)$, $P_3(S)$ y $P_4(S)$.
- b) Verifique que $P_0(S)$ es el conjunto vacío.
- c) Demuestre que $P_1(S)$ y S son isomorfos como conjuntos (es decir existe una biyección entre $P_1(S)$ y S). Es decir $P_1(S)$ es el conjunto de vértices.
- d) ¿Cuántos elementos tiene $P_2(S)$ y $P_3(S)$?
- e) Demuestre que $P_2(S)$ se puede identificar con el conjunto de aristas del grafo completo K_4 .
- f) Demuestre que el grafo completo K_4 puede ser visto como un tetraedro.
- g) Demuestre que $P_3(S)$ se puede identificar con el conjunto de CARAS de un tetraedro.

h) ¿Si tenemos k colores ($k = 1, 2, 3, 4$) de cuántas maneras podemos pintar las caras de un tetraedro?

Solución

a) $P_0(S) = \emptyset$.

$$P_1(S) = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}\}.$$

$$P_2(S) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}\}.$$

$$P_3(S) = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4\}\}.$$

$$P_4(S) = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}\}.$$

b) Por el inciso a) tenemos que $P_0(S) = \emptyset$ ya que vacío es el único subconjunto de S que tiene cardinalidad 0.

c) Por el inciso a) tenemos que $P_1(S) = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}\}$ y además su cardinalidad es $|P_1(S)| = 4$. Por otra parte, sabemos que $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y su cardinalidad es $|S| = 4$.

Para determinar el isomorfismo necesitamos establecer una función biyectiva de S hacia $P_1(S)$. Si la biyección es

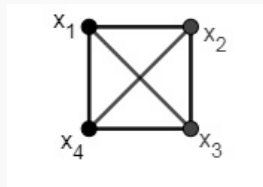
$$\begin{aligned}\varphi: S &\longrightarrow P_1(S) \\ x_i &\longmapsto \varphi(x_i) = \{x_i\}\end{aligned}$$

donde $1 \leq i \leq 4$.

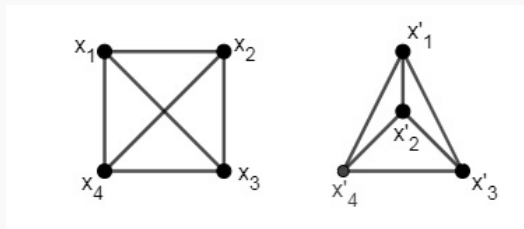
Por lo tanto, ambos conjuntos son isomorfos, es decir, $P_1(S)$ es el conjunto de vértices.

d) Los elementos que tiene $|P_2(S)| = 6$ y $|P_3(S)| = 4$.

e) Como ya calculamos $P_2(S)$ en el inciso a) podemos observar en la figura que efectivamente el conjunto $P_2(S)$ forma las arista del grafo completo de orden 4 (K_4).



f) Tenemos las siguientes figuras

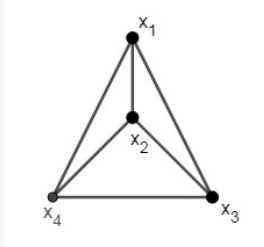


de ahí tenemos que existe una biyección entre ambos grafos, es decir

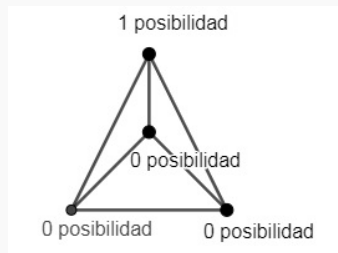
$$\varphi(x_1) = x'_1, \quad \varphi(x_2) = x'_2, \quad \varphi(x_3) = x'_3, \quad \varphi(x_4) = x'_4$$

Así ambos grafos son isomorfos, por lo que el grafo completo de orden 4 (K_4) puede ser visto como un tetraedro

g) Como se calculó en el inciso a) $P_3(S)$ entonces en la figura podemos observar que efectivamente, $P_3(S)$ es el conjunto de CARAS del tetraedro formado por S .

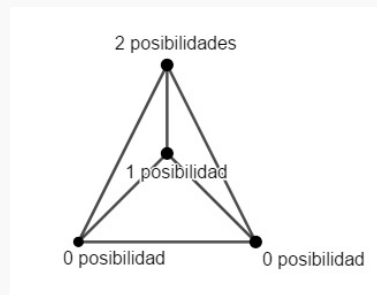


h) Con $k = 1$



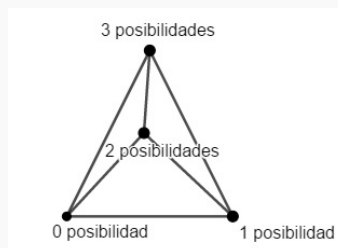
tenemos el polinomio cromático $k(k-1)(k-2)(k-3) = 1(1-1) = 0$.

Con $k = 2$



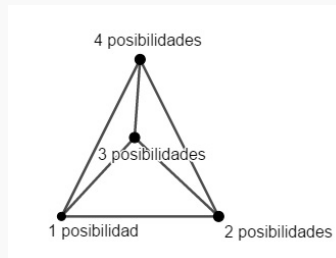
tenemos el polinomio cromático $k(k-1)(k-2)(k-3) = 2(2-1)(2-2) = 0$.

Con $k = 3$



tenemos el polinomio cromático $k(k - 1)(k - 2)(k - 3) = 3(3 - 1)(3 - 2)(3 - 3) = 0$.

Con $k = 4$



tenemos el polinomio cromático $k(k - 1)(k - 2)(k - 3) = 4(4 - 1)(4 - 2)(4 - 3) = 24$.

Una k -coloración de las aristas de un grafo G puede pensarse como una partición $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de E_G , donde cada conjunto C_i está definido como $C_i = e^{-1}(i)$, para $i = 1, \dots, k$. Los conjuntos C_i son llamados clases de coloración. Queda claro que una k -coloración está completamente definida si se conocen las k clases de coloración C_1, C_2, \dots, C_k . Por este motivo es común referirse a una k -coloración mediante sus clases de coloración.

Ejemplo 1.1.11

En el siguiente grafo se ha definido una 3-coloración de aristas. El conjunto de colores es $C = \{\text{azul}, \text{rojo}, \text{verde}\}$. Las clases de coloración son:

$$C_{\text{azul}} = \{v_1v_2, v_2v_7, v_3v_4\}, \quad C_{\text{rojo}} = \{v_1v_7, v_3v_7, v_4v_5, v_4v_7, v_5v_7\} \quad \text{y}$$

$$C_{\text{verde}} = \{v_3v_5, v_6v_7\}.$$

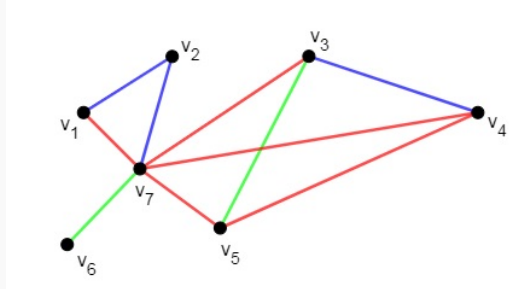


Figura 1.21: Una 3-coloración de un grafo.

Dada una k -coloración de las aristas del grafo G , diremos que el subgrafo $H \subseteq G$ es monocromático si $E_H \subseteq C_i$, para algún i con $1 \leq i \leq k$. En este último caso se dice que H es de color i . Por ejemplo, considerando el grafo del ejemplo 1.1.11, el subgrafo H generado por $V_H = \{v_1, v_4, v_5, v_7\}$ es monocromático de color rojo.

1.2. Grafos Dirigidos

Definición 1.2.1

Un grafo dirigido (o digrafo) D sobre un conjunto finito no vacío V_D consiste de los elementos de V_D , llamados vértices de D , y un subconjunto E_D , de $V \times V$, que contiene las aristas dirigidas de D . Escribiremos $D = (V_D, E_D)$ para denotar a un grafo dirigido.

Si $u, v \in V_D$ y $(u, v) \in E_D$, entonces existe una arista de u a v , la cual denotaremos por \vec{uv} . El vértice u es llamado el origen de la arista, mientras que el vértice v será llamado destino de la misma. Además diremos que v es adyacente desde u , y que u es adyacente hacia v . Si $u \neq v$ entonces $\vec{uv} \neq \vec{vu}$, una arista de la forma \vec{uu} es llamada un lazo en u . En este trabajo se considerarán solo grafos dirigidos sin lazos,

por lo que cuando se haga referencia a una arista dirigida \vec{uv} se sobreentiende que $u \neq v$.

Dado un grafo dirigido D , se puede asociar con este un grafo simple G sobre el mismo conjunto de vértices, reemplazando cada arista $\vec{uv} \in E_D$ por la correspondiente arista $uv \in E_G$. El grafo G así obtenido se llama grafo subyacente de D , y se representa por $G(D)$. También se puede obtener un grafo dirigido D a partir de un grafo arbitrario G , para ello se toma $V_D = V_G$ y se reemplaza cada arista $uv \in E_G$ por exactamente una de las posibles arista dirigidas: \vec{uv} o \vec{vu} . El grafo dirigido D que se obtiene es llamado una orientación de G .

Los grafos dirigidos, al igual que los grafos no dirigido, admiten una representación en el plano. Un grafo dirigido D se representa por un dibujo de su grafo subyacente $G(D)$, junto con flechas sobre las líneas que representa las aristas, cada flecha apuntando hacia el destino de dicha arista en D . Cuando las dos aristas \vec{uv} y \vec{vu} están en E_D , se dibujan dos líneas con flechas, una apuntando hacia v y la otra hacia u .

Ejemplo 1.2.1

El siguiente es una representación de un grafo dirigido $D = (V_D, E_D)$, donde $V_D = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $E_D = \{\vec{v_1v_2}, \vec{v_1v_4}, \vec{v_2v_3}, \vec{v_4v_1}, \vec{v_4v_3}\}$.

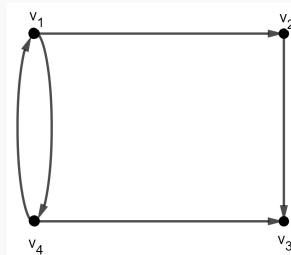


Figura 1.22: Una representación de un grafo dirigido D .

Los términos establecidos para grafos simples tienen su análogo en grafos dirigidos, sólo definiremos aquellos conceptos que se utilizarán en este trabajo.

Capítulo 2

Teoría de Ramsey

La teoría de Ramsey² afirma que, en general, en sistemas suficientemente grandes siempre existen subsistemas no pequeños con estructura, con orden, por ejemplo los resultados de esta teoría tienen la siguiente forma: *Dada una estructura discreta suficientemente grande y una partición finita de ésta, se asegura que cierta configuración está contenida en alguna de las clases de la partición.*



Figura 2.1: Frank Plumpton Ramsey

²Extraída de: <https://policonomics.com/es/frank-ramsey/>

2.1. Versión Finita

Teorema 2.1.1 "Forma General Principio del Palomar"

Si $n(r - 1) + 1$ objetos se distribuyen en n contenedores, entonces al menos uno de los contenedores tiene r o más objetos.

Demostración

Sean q_1, q_2, \dots, q_n enteros positivos, si $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ objetos son distribuidos en n contenedores, entonces se cumple que algún contenedor contiene al menos q_1 objetos o q_2 objetos, ..., o q_n objetos.

Si suponemos que eso no es posible tenemos que el número total de objetos contenidos en los n contenedores es a lo más:

$$(q_1 - 1) + (q_2 - 1) + \dots + (q_n - 1) = q_1 + q_2 + \dots + q_n - n \quad (\longrightarrow \cdot \longleftarrow)$$

Así para demostrar nuestro teorema basta hacer $q_1 = q_2 = \dots = q_n = r$

□

Corolario 2.1.2 (Principio del Palomar)

Si $n + 1$ objetos se distribuyen sobre n contenedores entonces algún contenedor contiene por lo menos dos objetos.

Demostración

Supongamos que no hay un contenedor con al menos dos objetos, es decir, cada contenedor tendrá un máximo de un objeto.

Así, el número total de objetos distribuidos será a lo más, tantos como la cantidad de contenedores que tenemos, es decir n .

□

Ejemplo 2.1.1

¿Puede un triángulo equilátero de 2 centímetros de lado, contener 5 puntos de forma que no hayan 2 a distancia menor o igual que 1?

Dividiremos el triángulo equilátero inicial en 4 triángulos cuyos lados midan 1 centímetro.

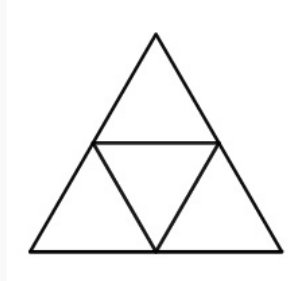


Figura 2.2

Se pueden observar 4 palomares, los cuales están conformados por los triángulos mostrados en la figura, y nuestras 5 palomas es decir 5 puntos cualesquiera, ubicando un punto en cada triángulo nos quedaríamos con un punto aún pendiente, el cual deberá estar contenido en alguno de los triángulos que ya poseen un punto, por lo que dichos puntos estarán a una distancia menor que 1.

Teorema 2.1.3

Si a, b, m y n son enteros positivos tales que $\text{mcd}(m, n) = 1$, entonces el sistema de congruencias:

$$x \equiv a \pmod{m}$$

$$x \equiv b \pmod{n}$$

tiene solución, donde a y b son residuos.

Demostración

Ya que a es congruente módulo m con alguno de $\{0, \dots, m - 1\}$ y b es congruente módulo n con alguno de $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, podemos asumir que $0 \leq a < m$ y $0 \leq b < n$. Considérense los siguientes enteros:

$$a, a + m, a + 2m, \dots, a + (n - 1)m.$$

Claramente cada uno de estos enteros deja un residuo de a cuando es dividido por m . Analicemos ahora los residuos que dejan al ser divididos por n . Supongamos que hay dos que dejan el mismo residuo r al ser divididos por n , digamos $(a + im)$ y $(a + jm)$ donde $0 \leq i < j \leq n - 1$. Luego por el algoritmo de la división existen enteros q_i y q_j tales que:

$$a + im = q_i n + r \quad \text{y} \quad a + jm = q_j n + r.$$

Restando la primera igualdad de la segunda obtenemos:

$$(j - i)m = (q_j - q_i)n.$$

Ya que $\text{mcd}(m; n) = 1$, tenemos que $n | (j - i)$. Pero $0 < j - i \leq n - 1$, lo cual es una contradicción. Por tanto, los n enteros: $a, a + m, \dots, a + (n - 1)m$, dejan residuos diferentes al dividirlos por n . Así, por el Principio del Palomar, tenemos que cada uno de los números: $0, 1, \dots, n - 1$, aparece como residuo exactamente una vez. En particular el número b debe aparecer como residuo. Sea $a + km$ con $0 \leq k \leq n - 1$ el número que deja el residuo b cuando es dividido por n . Entonces por el algoritmo de la división, existe un entero q tal que $a + km = qn + b$. De aquí se sigue que el entero $x = a + km = qn + b$ es solución del sistema.

□

Ejemplo 2.1.2

Sea \mathcal{X} un conjunto arbitrario de 53 números naturales. Entonces, hay al menos dos elementos de \mathcal{X} cuya diferencia es un múltiplo de 52.

Para comprobarlo, distribuimos los números naturales en 52 “nidos”, según el resto módulo 52 que tengan

$$A_1 = \{n \in \mathbb{N} / n \equiv 0 \pmod{52}\}$$

$$A_2 = \{n \in \mathbb{N} / n \equiv 1 \pmod{52}\}$$

$$A_{52} = \{n \in \mathbb{N} / n \equiv 51 \pmod{52}\}$$

Los 53 elementos de \mathcal{X} serán las palomas. El principio del palomar nos dice que habrá dos elementos de \mathcal{X} con el mismo resto módulo 52; y, por tanto, su diferencia será un múltiplo de 52.

Teorema 2.1.4 Ramsey

Para cualesquiera enteros positivos $k \geq 1, r \geq 1$, y $q_1, q_2, \dots, q_k \geq r$, existe un entero positivo N tal que para todo conjunto finito S con $|S| \geq N$ se cumple lo siguiente. Para cada k -coloración $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de $P_r(S)$ existe al menos un $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y un q_i -subconjunto S_i de S tal que $P_r(S_i) \subseteq C_i$.

Definición 2.1.5

El menor entero N_0 que satisface el Teorema se llama número de Ramsey y se denota como $R(q_1, q_2, \dots, q_k; r)$.

Antes de dar una demostración de este resultado, se probará primero el caso en que $k = 2$.

2.1.1. Número de Ramsey

Teorema 2.1.6 Número de Ramsey

Para cualesquiera enteros positivos p, q, r tales que $p, q \geq r$, existe un entero positivo N tal que para todo conjunto finito S con $|S| \geq N$ se cumple lo siguiente. En cualquier 2-coloración $\{C_1, C_2\}$ de $P_r(S)$, existe un p -subconjunto S_1 de S tal que $P_r(S_1) \subseteq C_1$ o bien existe un q -subconjunto S_2 de S tal que $P_r(S_2) \subseteq C_2$.

$R(p, q)$ es el menor número de vértices que debe tener un grafo completo 2-

coloreado con azul y rojo para que o bien tenga un subgrafo K_p azul ó bien tenga un subgrafo K_q rojo.

El principio del Palomar, Interpretado a la Ramsey

El principio del palomar puede ser visto como un resultado del tipo Ramsey. Tenemos que

$$R(m, n; 1) = m + n - 1$$

Si tenemos un conjunto con $m + n - 1$ elementos y los coloreamos con dos colores, rojo y azul, por ejemplo, entonces o bien al menos m llevan el color rojo o bien al menos n el azul (si no fuera así, tendríamos como mucho $m - 1$ rojos y $n - 1$ azules y entre todos no tendríamos los $m + n - 1$ totales). Pero esto no es sino una de las formas del principio del palomar, si tenemos $m + n - 1$ objetos y los distribuimos en dos cajas, o bien una contiene al menos m o bien la otra al menos n .

Demostración (Número de Ramsey)

Basta con demostrar que $R(p, q; r)$ existe para cualesquiera enteros positivos p, q, r . La demostración será por inducción sobre p, q y r .

1) Si $r = 1$ el teorema se cumple para cada p y q , en este caso se tiene $R(p, q; 1) = p + q - 1$. En efecto, note que los elementos de $P_1(S)$ son los subconjuntos singulares de S , luego se tiene que $|P_1(S)| = |S|$. Sea $n = |S|$, ahora haciendo $q_1 = p$ y $q_2 = q$ en la forma general del Principio del Palomar, y tomando las clases de coloración C_1 y C_2 como los contenedores se sigue que con $n = p + q - 1$ se garantiza la existencia de p subconjuntos singulares: $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_p\} \in P_1(S)$ perteneciendo a C_1 , o q subconjuntos singulares: $\{y_1\}, \{y_2\}, \dots, \{y_q\} \in P_1(S)$ perteneciendo a C_2 . Tenemos pues dos casos:

- En el primer caso basta tomar $S_1 = \bigcup_{i=1}^p \{x_i\}$ para tener que $P_1(S) \subseteq C_1$.
- Para el segundo se toma $S_2 = \bigcup_{i=1}^q \{y_i\}$, con esto se garantiza que $P_1(S) \subseteq C_2$.

De lo anterior se deduce que $R(p, q; 1) \leq p + q - 1$.

Además de la demostración de la forma general del Principio del Palomar se sigue que $n = p + q - 1$ es el menor entero con el que se asegura que habrá al menos p subconjuntos singulares en C_1 o q subconjuntos singulares en C_2 . Por lo tanto $R(p, q; 1) \geq p + q - 1$ y así $R(p, q; 1) = p + q - 1$.

2) Para cualquier entero $r \geq 1$ se verifica que

$$R(r, q; r) = q \text{ y } R(p, r; r) = p.$$

En efecto, probaremos el caso en que $p = r$, cuando $q = r$ la demostración es análoga. Sea pues S un conjunto tal que $|S| = q$ y $\{C_1, C_2\}$ una 2-coloración de $P_r(S)$. Si $C_1 = \emptyset$, entonces $P_r(S) = C_2$ y tomando $S_2 = S$ tendríamos un q -subconjunto de S con $P_r(S_2) \subseteq C_2$. Si $C_1 \neq \emptyset$, entonces tomando un r -subconjunto $S_1 \in C_1$, se satisface que $P_r(S_1) = \{S_1\} \subseteq C_1$. De lo anterior se deduce que $R(r, q; r) \leq q$. Ahora supongamos que $|S| \leq q - 1$. Considerando la coloración $\{C_1 = \emptyset, C_2 = P_r(S)\}$ es claro que no existe un r -subconjunto $S_1 \subseteq S$ con $P_r(S) \subseteq C_1$ ni un q -subconjunto $S_2 \subseteq S$ con $P_r(S_2) \subseteq C_2$. Luego $R(r, q; r) \geq q$ y por tanto $R(r, q; r) = q$.

3) Supongamos que $p, q > r$ y que el teorema se verifica en los siguientes casos:

i) Para $(r - 1)$ y cada p, q .

ii) Para r, p y $(q - 1)$.

iii) Para $r, (p - 1)$ y q .

Probaremos que también se cumple para r, p y q , y en virtud de **1)** y **2)** se tendrá que el teorema ha quedado demostrado.

Procedamos por contradicción y supongamos que no es posible hallar el número $R(p, q; r)$. Elijamos un entero p_1 tan grande que si $|S| = p_1$ entonces existe un $(p - 1)$ -subconjunto $S_1 \subseteq S$ tal que $P_r(S_1) \subseteq C_1$ o un q -subconjunto $S_2 \subseteq S$ tal que $P_r(S_2) \subseteq C_2$. Esta elección de p_1 queda justificada por la hipótesis de inducción iii),

pues basta tomar $p_1 = R(p - 1, q; r)$.

Similarmente, por la hipótesis de inducción ii) podemos elegir un valor q_1 tan grande que si $|S| = q_1$ entonces existe un p -subconjunto $S_1 \subseteq S$ tal que $P_r(S_1) \subseteq C_1$ o un $(q - 1)$ -subconjunto $S_2 \subseteq S$ tal que $P_r(S_2) \subseteq C_2$, basta tomar $q_1 = R(p, q - 1; r)$.

Sea $N \geq R(p_1, q_1; r - 1) + 1$ y $|S| = N$. Tómesese un elemento $x \in S$ y consideremos el conjunto $S_1 = S \setminus \{x\}$. Es claro que $|S_1| = N - 1 \geq R(p_1, q_1; r - 1)$. Si $\{C; D\}$ es una 2-coloración de $P_r(S)$ definamos:

$$C_1 = \{A \in C : x \notin A\} \text{ y } D_1 = \{A \in D : x \notin A\}.$$

Obsérvese que $\{C_1, D_1\}$ es una 2-coloración de $P_r(S_1)$. Ahora consideremos los siguientes conjuntos:

$$C_x = \{A \in P_{r-1}(S_1) : A \cup \{x\} \in C\} \text{ y } D_x = \{A \in P_{r-1}(S_1) : A \cup \{x\} \in D\}.$$

Para cualquier $A \in P_{r-1}(S_1)$, se tiene que $A \cup \{x\} \in P_r(S)$, luego $A \cup \{x\} \in C$ o $A \cup \{x\} \in D$, esto último implica que $A \in C_x$ o $A \in D_x$. Luego $\{C_x, D_x\}$ es una 2-coloración de $P_{r-1}(S_1)$. Ya que $|S_1| \geq R(p_1, q_1; r - 1)$ y aplicando la hipótesis de inducción i), se debe cumplir alguna de las siguientes opciones:

a) Existe un p_1 -subconjunto $U \subseteq S_1$ tal que $P_{r-1}(U) \subseteq C_x$.

b) Existe un q_1 -subconjunto $V \subseteq S_1$ tal que $P_{r-1}(V) \subseteq D_x$.

En el caso a), dado que $p_1 = R(p - 1, q; r)$ y $\{C_1, D_1\}$ es una 2-coloración de $P_r(S_1)$, por la hipótesis de inducción iii) existe ya sea un $(p - 1)$ -subconjunto $U_1 \subseteq U$ tal que $P_r(U_1) \subseteq C_1 \subseteq C$ o un q -subconjunto $U_2 \subseteq U$ tal que $P_r(U_2) \subseteq D_1 \subseteq D$. Si lo que se tiene es el $(p - 1)$ -subconjunto U_1 , entonces $U_1 \cup \{x\}$ es un p -subconjunto de S . Si $A \subseteq U_1 \cup \{x\}$ es un r -subconjunto, tenemos que si $x \notin A$, entonces $A \subseteq U_1$, luego $A \in C$; si ocurre que $x \in A$, entonces $A \setminus \{x\}$ es un $(r - 1)$ -subconjunto de U , así $A \setminus \{x\} \in C_x$, y por tanto $A = (A \setminus \{x\}) \cup \{x\} \in C$. Lo anterior nos muestra que $U_1 \cup \{x\}$ es un r -subconjunto de S para el que $P_r(U_1 \cup \{x\}) \subseteq C$. Por otro lado, si lo

que se tiene es un q -subconjunto $U_2 \subseteq U$, entonces el propio U_2 es un q -subconjunto $U_2 \subseteq S$ tal que $P_r(U_2) \subseteq D$.

Para el caso b), como $q_1 = R(p, q - 1; r)$ y C_1, D_1 es una 2-coloración de $P_r(S_1)$, luego por la hipótesis de inducción ii), existe ya sea un p -subconjunto $U_1 \subseteq U$ tal que $P_r(U_1) \subseteq C_1 \subseteq C$ o un $(q - 1)$ -subconjunto $U_2 \subseteq U$ tal que $P_r(U_2) \subseteq D_1 \subseteq D$. Obsérvese que en el primer caso ya tenemos un p -subconjunto $U_1 \subseteq S$ con $P_r(U_1) \subseteq C$. En el último caso, tenemos que $U_2 \cup \{x\} \subseteq S$ es un q -subconjunto para el cual $P_r(U_2 \cup \{x\}) \subseteq D$.

De lo anterior se sigue que:

$$R(p, q; r) \leq R(R(p - 1, q; r), R(p, q - 1; r); r - 1) + 1.$$

Por las hipótesis de inducción se tiene que el lado derecho de la desigualdad existe y es finito, por lo tanto $R(p, q; r)$ existe para cada $p, q, r \in \mathbb{N}$ con $p, q \geq r$.

□

Ahora que la existencia del número de Ramsey $R(p, q; r)$ ha quedado establecida procederemos a exponer la demostración del caso general.

Demostración (Teorema de Ramsey)

De manera análoga a la prueba del teorema anterior, basta con demostrar que el número de Ramsey $R(q_1, q_2, \dots, q_k; r)$ existe. La demostración se hará por inducción sobre el número de colores.

Si $k = 1$, el teorema se verifica trivialmente pues $P_r(S)$ es una 1-coloración de $P_r(S)$ mismo. Si $k = 2$ estamos en el caso del teorema recién demostrado.

Supongamos que el teorema se verifica para $(k - 1)$ colores, es decir, para cualesquier enteros positivos $r \geq 1$ y q_1, q_2, \dots, q_{k-1} tales que $q_i \geq r$ ($1 \leq i \leq k - 1$) el número de Ramsey $R(q_1, q_2, \dots, q_{k-1}; r)$ existe.

Veamos que también se cumple para k colores.

En efecto, para $k \geq 3$, sean $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ k clases de coloración. A partir de éstas

formemos $k - 1$ clases de coloración de la siguiente manera: $\{C_1, C_2, \dots, C_{k-2}, D_{k-1}\}$, donde $D_{k-1} = C_{k-1} \cup C_k$. Del teorema anterior tenemos que $p_{k-1} := R(q_{k-1}, q_k; r)$ existe, y por hipótesis de inducción tenemos que $R(q_1, q_2, \dots, q_{k-2}, p_{k-1}; r)$ también existe.

Ahora si $|S| \geq R(q_1, q_2, \dots, q_{k-2}, p_{k-1}; r)$, dado que $\{C_1, C_2, \dots, C_{k-2}, D_{k-1}\}$ es una $(k - 1)$ -coloración de $P_r(S)$, entonces existe al menos un q_i -subconjunto $S_i \subseteq S$ tal que $P_r(S_i) \subseteq C_i$ donde $1 \leq i \leq k - 2$ o un p_{k-1} -subconjunto $U_{k-1} \subseteq S$ tal que $P_r(U_{k-1}) \subseteq D_{k-1}$. En el primer caso no hay nada que hacer, pues el teorema se seguiría de inmediato. Para el segundo caso, consideremos las siguientes clases:

$$E_{k-1} = \{A \in P_r(U_{k-1}) : A \in C_{k-1}\} \text{ y } E_k = \{A \in P_r(U_{k-1}) : A \in C_k\}.$$

Obsérvese que $\{E_{k-1}, E_k\}$ es una 2-coloración de $P_r(U_{k-1})$. Como $|U_{k-1}| = p_{k-1} = R(q_{k-1}, q_k; r)$, entonces existe un q_{k-1} subconjunto $S_{k-1} \subseteq U_{k-1}$ tal que $P_r(S_{k-1}) \subseteq E_{k-1}$ o un q_k -subconjunto $S_k \subseteq U_{k-1}$ tal que $P_r(S_k) \subseteq E_k$. Ahora note que por construcción se tiene que $E_{k-1} \subseteq C_{k-1}$ y $E_k \subseteq C_k$. Esto implica que existe ya sea un q_{k-1} -subconjunto $S_{k-1} \subseteq S$ tal que $P_r(S_{k-1}) \subseteq C_{k-1}$ o un q_k -subconjunto $S_k \subseteq S$ tal que $P_r(S_k) \subseteq C_k$. De lo anterior se sigue que:

$$R(q_1, q_2, \dots, q_k; r) \leq R(q_1, q_2, \dots, q_{k-2}, p_{k-1}; r).$$

El número de la parte derecha de la desigualdad existe en virtud de la hipótesis de inducción. Por tanto, $R(q_1, q_2, \dots, q_k; r)$ existe para cualesquier enteros positivos q_1, q_2, \dots, q_k, r para los que se verifique que $q_1, q_2, \dots, q_k \geq r$.

□

Teorema 2.1.7

Sean $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ tales que $p_1, p_2, \dots, p_k \geq 2$. El número de Ramsey $R(p_1, p_2, \dots, p_k; 2)$ es el orden del grafo completo más pequeño el cual al ser sus aristas k -coloreadas, posee un K_{p_i} monocromático de color i , para algún $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Demostración

En efecto, si G es un grafo completo se tiene que $E_G = P_2(V_G)$, luego el enunciado del teorema anterior no es otra cosa que el Teorema de Ramsey para el caso en que $r = 2$.

□

Presentamos a continuación un resultado no trivial relativo a grafos, el cual fue probado por Erdős y Szekeres.

Teorema 2.1.8

Dados $k, l \in \mathbb{N}$, se cumple que cualquier grafo G con $|V_G| \geq R(k, l; 2)$ contiene un subconjunto independiente U con $|U| = k$, o un subgrafo completo K_l .

Demostración

Sea G un grafo tal que $|V_G| \geq R(k, l; 2)$. Consideremos la siguiente 2-coloración de aristas para el grafo completo sobre $|V_G|$ vértices. Dada una arista $e \in K_{|V_G|}$, ésta será coloreada de rojo si $e \in E_{\bar{G}}$, mientras que si $e \in E_G$ será coloreada de azul. Luego por el Teorema de Ramsey se sigue que G debe contener ya sea un K_k rojo o un K_l azul. En el primer caso tendríamos que los vértices de K_k forman un subconjunto independiente de G . Mientras que en el segundo caso tendríamos un subgrafo completo de orden l .

□

Teorema 2.1.9

Para los números de Ramsey se verifica lo siguiente:

- a) $R(p_1, p_2, \dots, p_k; 1) = p_1 + p_2 + \dots + p_k - k + 1$.
- b) $R(p, r; r) = R(r, p; r) = p$.
- c) $R(p, q; r) \leq R(R(p-1, q; r), R(p, q-1; r); r-1) + 1$.

$$d) R(p, q; 2) \leq R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2).$$

e) $R(p, q; 2) < R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2)$, siempre que $R(p-1, q; 2)$ y $R(p, q-1; 2)$ son ambos pares.

$$f) R(p_1, p_2, \dots, p_k; r) \leq R(p_1, p_2, \dots, p_{k-2}, R(p_{k-1}, p_k; r); r).$$

Demostración

El inciso *a)* es el Teorema del palomar forma general y los incisos *b)* y *c)* fueron establecidos en la demostración del Teorema 2.1.4.

El inciso *d)* se sigue de *a)* y *c)*, pues por *c)* se tiene:

$$R(p, q; 2) \leq R(R(p-1, q; 2), R(p, q-1; 2); 1) + 1,$$

y aplicando *a)* al lado izquierdo de la desigualdad se obtiene:

$$R(p, q; 2) \leq (R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2) - 2 + 1) + 1 = R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2).$$

Veamos la prueba de *e)*. Sea $G = (V, E)$ un grafo arbitrario con $|V| = R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2) - 1$. Si probamos que en G existe un subconjunto U de p vértices intepedientes o un subgrafo completo K_q , en virtud del Teorema 2.1.8 tendríamos que $R(p, q; 2) \leq R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2) - 1 < R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2)$, y el teorema se seguiría. Veamos que, en efecto, esto sucede.

Si ocurre que para algún vértice $v \in V$, $g(v) \geq R(p, q-1; 2)$ entonces el subgrafo generado por los vértices adyacentes a v tiene p vértices independientes o un subgrafo completo de $q-1$ vértices que, junto con v generan un K_q . Por otro lado, si en vez de que $g(v) \geq R(p, q-1; 2)$ se tuviera que $g(v) \geq R(p, q-1; 2) - 2$ para algún vértice v , entonces al menos tendríamos $R(p-1, q; 2)$ vértices no adyacentes a v , luego el grafo generado por estos vértices posee $p-1$ vértices independientes, que junto con v forman un subconjunto independiente de p vértices, o un subgrafo completo K_q . Si no ocurre ninguno de los casos anteriores, entonces se tendría que $g(v) \geq R(p, q-1; 2) - 1$

para todo $v \in V$, pero esto es imposible ya que entonces tendríamos un grafo con un número impar de vértices con grado impar. Por tanto, en G siempre existe un subconjunto independiente U de p vértices o una subgrafo completo de orden q . Así, $R(p, q; 2) < R(p - 1, q; 2) + R(p, q - 1; 2)$.

Por último, el inciso f) se sigue del Teorema 2.1.6 inciso 3) de la demostración.

□

Ejemplo 2.1.3

$R(3, 3; 2) = 6$. Es decir, K_6 es el grafo completo de menor orden que satisface cualquier 2-coloración, digamos con los colores rojo y azul, hay un K_3 rojo o un $K_{[3]}$ azul.

De la siguiente 2-coloración de K_5 se tiene que $R(3, 3; 2) > 5$. Pues claramente no hay un K_3 rojo o azul.

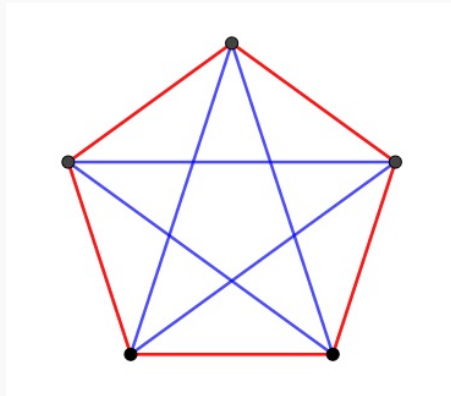


Figura 2.3

Ahora veamos $R(3, 3; 5) \leq 6$, en efecto dado que cada vértice de K_6 incide con 5 aristas, por el Principio del Palomar tenemos que para cada 2-coloración de las aristas de K_6 con los colores rojo y azul, cada vértice incide en al menos 3 aristas azules, o al menos 3 aristas rojas. Supongamos que algún vértice es incidente con al menos 3 aristas azules:

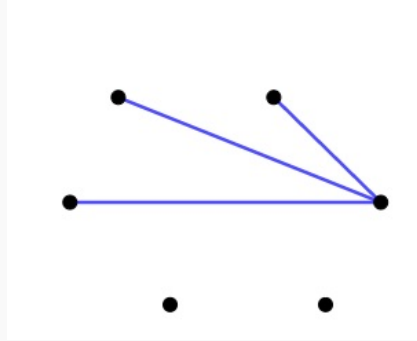


Figura 2.4

Si las aristas que unen estos vértices son rojas, ya terminamos pues tendríamos un K_3 rojo:

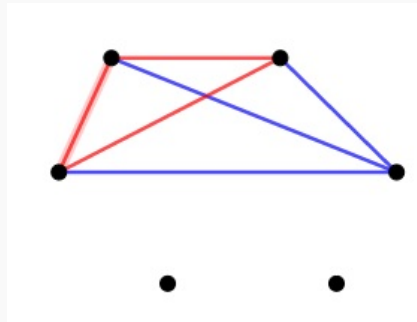


Figura 2.5

Si este no es el caso, entonces al menos una de las aristas entre estos vértices es azul, luego esta arista azul junto con las otras dos aristas azules que unen estos vértices con nuestro vértice inicial forman un K_3 azul.

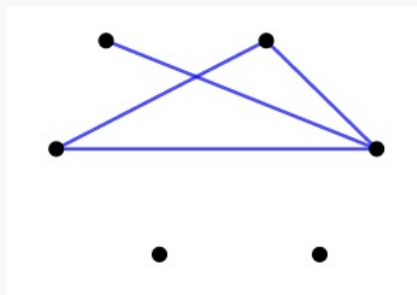


Figura 2.6

Si no hay un vértice en el cual incidan 3 aristas azules, entonces en todos los vértices inciden al menos 3 aristas rojas, y por un razonamiento análogo al anterior obtendríamos de igual manera un K_3 monocromático. Por lo tanto $R(3, 3; 2) = 6$.

Ejemplo 2.1.4

$R(3, 4; 2) = 9$. Es decir, en cualquier 2-coloración de K_9 con colores rojo y azul, hay un K_3 rojo o un K_4 azul. No obstante, para $n < 9$ existen coloraciones de K_n que no contienen K_3 rojos ni K_4 azules.

Por el inciso b) del Teorema 2.1.9 tenemos que $R(2, 4; 2) = 4$, además por lo recién visto $R(3, 3; 2) = 6$, luego por el inciso e) del Teorema 2.1.9, se cumple que:

$$R(3, 4; 2) < R(2, 4; 2) + R(3, 3; 2) = 10.$$

Así que $R(3, 4; 2) \leq 9$. Ahora obsérvese que en la siguiente 2-coloración de K_8 no hay K_3 rojos, ni K_4 azules.

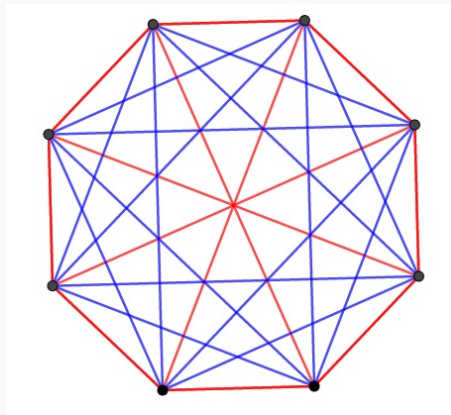


Figura 2.7

De esto se sigue que $R(3, 4; 2) > 8$, y por lo tanto $R(3, 4; 2) = 9$.

Ejemplo 2.1.5 [18]

$R(3, 5; 2) = 14$. Esto es, en cualquier 2-coloración de K_{14} con los colores rojo y azul, hay un K_3 rojo o un K_5 azul. Pero existen 2-coloraciones de K_n , para $n < 14$, que no contienen ni K_3 rojas ni K_5 azules.

Tenemos que $R(2, 5; 2) = 5$ y por el ejemplo 2.1.4 $R(3, 4; 2) = 9$, luego por el inciso *d*) del Teorema 2.1.9 tenemos que:

$$R(3, 5; 2) \leq R(2, 5; 2) + R(3, 4; 2) = 14.$$

Además de la siguiente 2-coloración de K_{13} se sigue que $R(3, 5; 2) > 13$. Pues como puede observarse esta no contiene K_3 rojos o K_5 azules.

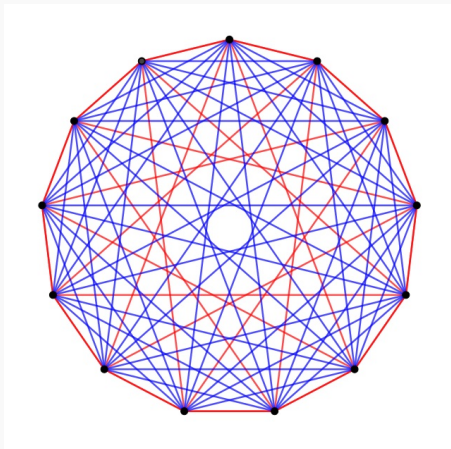


Figura 2.8

Teorema 2.1.10 Teorema de la Amistad

En cualquier grupo de seis personas, existen tres personas que son mutuamente conocidas o mutuamente desconocidas.

Demostración

Consideremos el grafo $G = (V_G, E_G)$ donde $V_G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, representa a cada una de las seis personas, el número de aristas esta dado por la fórmula

$$|E_{K_6}| = \frac{6(6-1)}{2} = 15$$

Usando los principios de coloración de grafos, denotaremos en azul a las personas mutuamente conocidas y rojo las mutuamente desconocidas. Por el principio del palomar sea cual sea el vértice que tomemos del grafo G , en este caso tomemos v_3 tendremos como mínimo 3 aristas que son del mismo color ya que el número de aristas incidentes en cada uno de los vértices es 5.

Sean v_4, v_5, v_6 , los otros vértices extremos de estas tres aristas, todas del mismo color, por ejemplo rojo. Si alguna de las aristas v_4v_5, v_5v_6, v_4v_6 es roja, entonces esta arista junto con las dos aristas incidentes a v_3 forman los lados de un triángulo rojo. Si ninguna de las aristas v_4v_5, v_5v_6, v_4v_6 es roja, entonces las tres aristas son de color azul y se tiene un triángulo azul de vértices $v_3v_4v_6$.

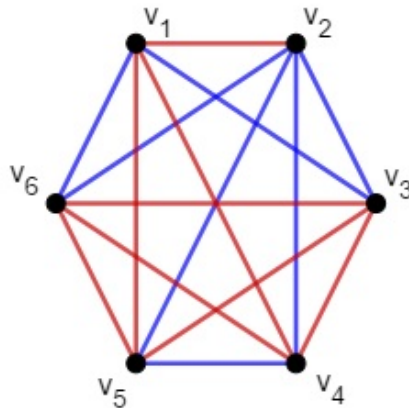


Figura 2.9: Posible coloración de $P_2(K_6)$.

Teorema 2.1.11 Teorema (Erdős y Szekeres)

Si tenemos una sucesión de $n^2 + 1$ números reales, $n + 1$ de ellos forman una subsucesión monótona.

Demostración

Consideremos $n^2 + 1$ números reales $\{x_i\}$. Para cada x_i , formamos la sucesión creciente más larga que comienza en x_i , y llamaremos $1 + r(x_i)$ a su longitud. Cada $r(x_i)$ es positivo, y si hay algún $r(x_i) \geq n$, habremos terminado. Supongamos por lo contrario que cada $r(x_i) \in \{0, \dots, n - 1\}$. Como hay $n^2 + 1$ de estos $r(x_i)$, por el principio del palomar algún valor de $\{0, \dots, n - 1\}$ se debe tomar $n + 1$ veces, digamos el valor k . Es decir, una sucesión de $n + 1$ números x_{i_0}, \dots, x_{i_n} tales que para todos ellos, $r(x_{i_0}) = k$. Pero entonces la sucesión de $\{x_{i_0}\}$ es decreciente: si algún término de la sucesión, digamos x_{i_t} fuera mayor que uno anterior, x_{i_s} , los k números de la sucesión creciente que empieza en x_{i_t} más el propio x_{i_t} constituirían una sucesión creciente de $k + 1$ para x_{i_s} , algo imposible.

□

2.2. Cotas para los Números de Ramsey

Ya que el propio Ramsey había observado que $R(k, k) \leq 2^{\frac{k(k-1)}{2}}$, que luego mejoró obteniendo que $R(k, k) \leq k!$; aunque él mismo aventuraba que la cota podía reducirse. Para obtener cotas superiores, empecemos probando la siguiente relación:

Teorema 2.2.1

Para cualesquiera enteros $p, q \geq 2$, $R(p, q) \leq R(p, q - 1) + R(p - 1, q)$.

Demostración

Llamaremos $r = R(p, q - 1) + R(p - 1, q)$ y coloreemos las aristas de un grafo completo K_r con dos colores. Queremos probar que existe un K_p rojo o un K_q azul. Para ello, fijemos un vértice $v \in K_r$ y consideremos sus $r - 1$ aristas. Habrá un cierto número de ellas rojas y otras cuentas azules. Como $r - 1 = R(p, q - 1) + R(p - 1, q) - 1$, el principio del palomar nos dice que habrá al menos $R(p - 1, q)$ aristas rojas o bien al menos $R(p, q - 1)$ aristas azules. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

el número de aristas rojas es $\geq R(p-1, q)$. Fijémonos en los vértices conectados a v mediante estas aristas y consideremos el grafo completo formado por $R(p-1, q)$ de ellos. Por la definición del número de Ramsey, tendremos o bien un K_{p-1} rojo o bien un K_q azul. En el segundo caso habríamos terminado, para el primero basta observar que si añadimos las aristas que conectan los $p-1$ vértices con v (todas rojas) tendremos un K_p monocromático rojo.

□

A partir de esta expresión podemos obtener una cota explícita para los números de Ramsey $R(p, q)$:

Teorema 2.2.2

Para todo par de enteros $p, q \geq 1$,

$$R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}.$$

Demostración

Lo probaremos por inducción. Podemos probar los primeros casos directamente:

$$\begin{aligned} R(1, q) = R(p, 1) = 1 &\Rightarrow \binom{q-1}{0} = \binom{p-1}{0} = 1, \\ R(2, q) = q \quad \text{y} \quad R(p, 2) = p &\Rightarrow \binom{q}{1} = q \quad \text{y} \quad \binom{p}{1} = p, \\ R(3, 3) = 6 &\Rightarrow \binom{4}{2} = 6, \end{aligned}$$

Llamaremos n a la suma de los dos parámetros del número de Ramsey y supongámoslo probado para $n-1$. Para $n = p+q$, utilizando el teorema anterior y la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} R(p, q) &\leq R(p-1, q) + R(p, q-1) \\ R(p, q) &\leq \binom{p+q-3}{p-2} + \binom{p+q-3}{p-1}. \end{aligned}$$

Para terminar, sólo queda recordar la propiedad de los coeficientes binómicos

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}.$$

□

2.3. Versión Infinita

Teorema 2.3.1 Ramsey Infinito

Dado un conjunto X infinito numerable, si coloreamos k -subconjuntos con r colores, entonces existe un subconjunto infinito $Y \subset X$ cuyos k -subconjuntos son todos monocromáticos.

En el lenguaje de grafos (para el caso $k = 2$), el teorema reza que si K es un grafo completo con un conjunto infinito numerable de vértices, entonces para cualquier coloración de sus aristas con dos colores existe un subgrafo completo (con un número infinito de vértices) monocromático. Es interesante señalar que el resultado no es cierto si el conjunto de los vértices no es numerable. Por ejemplo, si el grafo completo tiene como vértices los números reales y coloreamos sus aristas con dos colores, entonces no tiene por qué existir necesariamente un subgrafo completo monocromático cuyos vértices sean un subconjunto no numerable de los reales.

Corolario 2.3.2 (Teorema de Bolzano)

Toda sucesión infinita de números reales contiene una subsucesión infinita que es creciente o decreciente.

Demostración

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y consideremos el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+k} \forall k \in \mathbb{N}\}$ que intuitivamente detecta los términos que son mayores o iguales que todos los que les siguen. Distinguiremos dos casos según que el conjunto A sea infinito o no.

- Supongamos que A es infinito. Intuitivamente, seleccionando los términos x_n con $n \in A$ debemos obtener una sucesión parcial decreciente. Para comprobar esto, usaremos el principal resultado obtenido al estudiar los conjuntos numerables. Por ser A un subconjunto infinito de \mathbb{N} , sabemos que existe una aplicación biyectiva $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow A$ verificando además que si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n < m$, entonces $\sigma(n) < \sigma(m)$. Podemos ver σ como una aplicación estrictamente creciente de \mathbb{N} en sí mismo, luego $x_{\sigma(n)}$ es una sucesión parcial de x_n . Además, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $\sigma(n) \in A$, luego $x_{\sigma(n)} \geq x_{\sigma(n)+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y tomando $k = \sigma(n+1) - \sigma(n)$ obtenemos que $x_{\sigma(n)} \geq x_{\sigma(n+1)}$. Por tanto, la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ es decreciente.
- Supongamos que A es un conjunto finito, incluyendo la posibilidad $A = \emptyset$. En todo caso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset \{n \in \mathbb{N} : n < m\}$. Intuitivamente, podemos seleccionar términos a partir del m -ésimo para conseguir una sucesión parcial creciente, y eso es precisamente lo que vamos a hacer. Para definir por inducción una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$, empezamos tomando $\sigma(1) = m$. Supuesto definido $\sigma(n) \geq m$, sabemos que $\sigma(n) \notin A$, así que el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : x_{\sigma(n)} < x_{\sigma(n)+k}\}$ no es vacío. Definimos entonces $\sigma(n+1) = \sigma(n) + p$, donde p es el mínimo de dicho conjunto. Es claro que $\sigma(n+1) > \sigma(n) \geq m$, y también $x_{\sigma(n)} < x_{\sigma(n+1)}$, luego $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial creciente de $\{x_n\}$.

Otra solución es

Sea X la sucesión infinita de números reales. Coloreemos sus 3-subconjuntos con 4 colores (azul, rojo, verde y negro) dependiendo de la disposición de los tres números



Figura 2.10

El Teorema de Ramsey nos garantiza que existe un subconjunto de X monocromático. Es fácil comprobar que sólo puede ser de los colores azul o negro, es decir, corresponder a una sucesión creciente o decreciente.

□

Teorema 2.3.3

Si $k \geq 2$ y $p_1, p_2, \dots, p_k \geq 3$, entonces:

$$R(p_1, p_2, \dots, p_k; 2) \leq R(p_1 - 1, p_2, \dots, p_k; 2) + R(p_1, p_2 - 1, \dots, p_k; 2) + \dots + R(p_1, p_2, \dots, p_k - 1; 2) - k + 2.$$

Demostración

Para $1 \leq i \leq k$ definamos

$$R_i = R(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i - 1, p_{i+1}, \dots, p_k; 2).$$

Sea $n = R_1 + R_2 + \dots + R_k - k + 2$, basta probar que en cualquier k -coloración del grafo completo K_n con las clases de coloración $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ y un subgrafo completo K_{p_i} monocromático de color i .

Sea $u \in V_{K_n}$ arbitrario, y consideremos el conjunto

$$[V_i] = \{w \in V_{K_n} | w \neq u \text{ y } uw \in C_i\}.$$

Ahora como

$$\sum_{i=1}^k |V_i| = n - 1 = \sum_{i=1}^k R_i - k + 1.$$

Por el Principio del palomar en su forma general, se sigue que para algún $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ se tiene $|V_i| \geq R_i$. Luego, el subgrafo generado por V_i contiene un subgrafo completo K_{p_j} monocromática de color j , para algún $j \neq i$, o contiene un subgrafo completo $K_{p_i - 1}$ de color i . Si ocurre el primer caso ya hemos terminado, y si ocurre el segundo, entonces los vértices de $K_{p_i - 1}$ y el vértice u generan un subgrafo completo K_{p_i} monocromático de color i .

□

Lema 2.3.4

Para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$[ek!] = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!}$$

Demostración

Por inspección puede observarse que la igualdad anterior se cumple si $k = 1, 2$. Entonces para $k > 2$ se tiene:

$$[ek!] = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{n!} \right] = \left[\sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{k!}{n!} \right];$$

como $\sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!}$ es entero se sigue que

$$\begin{aligned} [ek!] &= \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!} + \left[\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{k!}{n!} \right] \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!} + \left[\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Dado que: $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$, $\frac{1}{(k+1)(k+2)} < \frac{1}{k^2}$, $\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} < \frac{1}{k^3}$, ..., entonces

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots \right] &\leq \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \dots \right] \\ &= \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{k}} - 1 \right] \\ &= \left[\frac{k}{k-1} - 1 \right] \\ &= 0. \quad (\text{pues } k > 2). \end{aligned}$$

A partir de lo anterior ya se puede afirmar que para todo entero positivo k ,

$$[ek!] = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!}.$$

□

Teorema 2.3.5 [18]

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$R(\underbrace{3, \dots, 3}_n; 2) \leq [e(n!)] + 1.$$

Donde e es la base del logaritmo natural, y $[x]$ es la parte entera de x , es decir, el mayor entero que es menor o igual a x .

Demostración

Por inducción sobre n . Si $n = 1$ trivialmente se tiene que $R(3, 2) = 3 = [e(1!)] + 1$.

También si $n = 2$ por el ejemplo 2.1.3 se tiene que

$$6 = R(3, 3; 2) \leq [e(2!)] + 1 = 5 + 1.$$

Ahora supongamos que el teorema se verifica para $n = k - 1$, es decir, que

$$R(\underbrace{3, \dots, 3}_{k-1}; 2) \leq [e(k-1)!] + 1.$$

Veamos también se cumple para $n = k$. En efecto, por el Teorema 2.3.3 se sigue que:

$$\begin{aligned} R(\underbrace{3, \dots, 3}_k; 2) &\leq R(2, 3, \dots, 3; 2) + R(3, 2, \dots, 3; 2) + \dots + R(3, 3, \dots, 2; 2) - k + 2; \\ &= kR(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_{k-1}; 2; 2) - k + 2; \\ &\leq kR(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_{k-2}, R(3, 2; 2); 2) - k + 2; \text{ ((Inciso f) del Teorema 2.1.9)} \\ &= kR(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_{k-1}; 2) - k + 2. \text{ (Pues } R(3, 2; 2) = 3). \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción se sigue que:

$$\begin{aligned} R(\underbrace{3, \dots, 3}_k; 2) &\leq k([e(k-1)!] + 1) - k + 2 \\ &= k[e(k-1)!] + 2. \end{aligned}$$

Si tuviéramos que $k([e(k-1)!]) = [ek!] - 1$, la demostración habría concluido. Pues ya se tendría que:

$$\begin{aligned} R(\underbrace{3, \dots, 3}_k; 2) &\leq ([e(k!)] - 1) + 2 \\ &= [e(k!)] + 1. \end{aligned}$$

Veamos pues que esto en verdad ocurre. Para ello a partir del Lema 2.3.4 tenemos que

$$\begin{aligned} k[e(k-1)!] &= k \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{k!}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!} - \frac{k!}{k!} \\ &= [ek!] - 1. \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Aplicaciones

En el Ejemplo 2.1.5 se mostró que $R(3, 5; 2) = 14$. La 2-coloración de K_{13} sin K_3 rojos ni K_5 azules, presentada ahí, resultó clave para obtener el número de Ramsey. Si bien en aquella ocasión no se dijo nada de la idea que llevo a R. E. Greenwood y A. M. Gleason a obtener esa coloración, en el presente capítulo se desea aclarar esta situación. Para ello será necesario introducir la siguiente definición.

Definición 3.0.1

Sea p un número primo impar y a un entero tal que $\text{mcd}(a, p) = 1$. Si la congruencia cúbica $x^3 \equiv a \pmod{p}$ tiene solución, entonces a se dice que es un *residuo cúbico de p* .

Ejemplo 3.0.1

Para ilustrar la definición anterior calculemos los residuos cúbicos de 13.

Basta con probar con que elementos son congruentes los cubos de los miembros de la clase de residuos módulo 13. Esto es

$$1^3 \equiv 1 \pmod{13}$$

$$2^3 \equiv 8 \pmod{13}$$

$$3^3 \equiv 1 \pmod{13}$$

$$4^3 \equiv 12 \pmod{13}$$

$$5^3 \equiv 8 \pmod{13}$$

$$6^3 \equiv 8 \pmod{13}$$

$$7^3 \equiv 5 \pmod{13}$$

$$8^3 \equiv 8 \pmod{13}$$

$$9^3 \equiv 1 \pmod{13}$$

$$10^3 \equiv 1 \pmod{13}$$

$$11^3 \equiv 5 \pmod{13}$$

$$12^3 \equiv 12 \pmod{13}$$

De aquí se sigue que los residuos cúbicos de 13 son aquellos que sean congruentes módulo 13 con alguno de: 1, 5, 8 o 12.

Para obtener la coloración de K_{13} considerense los 13 elementos del campo \mathbb{Z}_{13} numerados de 0 a 12, y tómesese cada elemento de este campo como el vértice de una gráfica completa.

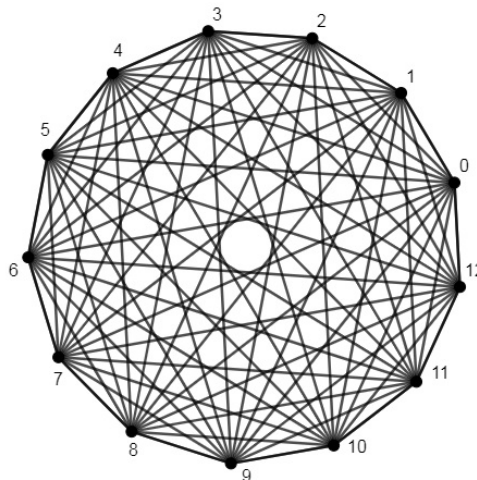


Figura 3.1

La coloración de las aristas de K_{13} será como sigue, si la diferencia de dos vértices es un residuo cúbico, es decir, congruente con 1, 5, 8 y 12 ($\pmod{13}$), la arista que

los uno se colorea de rojo, en otro caso se colorea de azul. Como 1 y -1 son ambos residuos cúbicos, el orden en que se efectúa la diferencia carece de importancia. Se afirma que en esta coloración de K_{13} no hay K_3 rojos ni K_5 azules.

En efecto, veamos primero que no puede haber K_3 rojos. Si $x < y < z$ son vértices de K_{13} tales que $y - x$ y $z - y$ son ambos residuos cúbicos entonces la tercer diferencia $z - x = (z - y) + (y - x)$ debe tomar alguno de los siguiente valores: $1 + 1$, $1 + 5$, $1 + 8$, $1 + 12$, $5 + 5$, $5 + 8$, $5 + 12$, $8 + 8$, $8 + 12$, $12 + 12$, ya que tanto $z - y$ como $y - x$ son residuos cúbicos. Pero ninguna de estas sumas es un residuo cúbico. Por tanto, $y - x$, $z - y$ y $z - x$ no pueden ser todos residuos cúbicos y así no hay K_3 rojos.

Para ver que tampoco puede haber K_5 azules, tomemos un vértices v de K_{13} y formemos la lista más grade de vértices tal que la diferencia de cualesquier dos elementos de la lista no sea congruente con 1, 5, 8 o 12 ($\text{mod } 13$) y que satisfaga que v sea elemento de dicha lista. Como queremos que la diferencia de dos vértices no sea congruente con 1 ($\text{mod } 13$), entonces eliminamos vértices consecutivos, luego los posibles candidatos para estar en la lista se reduce a:

$$v, v + 2, v + 4, v + 6, v + 8, v + 10, v + 12.$$

Como tampoco puede haber vértices con diferencia de 12, los candidatos se reducen a:

$$v, v + 2, v + 4, v + 6, v + 8, v + 10.$$

Es claro que hasta el momento no se tienen dos vértices cuya diferencia sea 5. Pero cuando se eliminan los vértices cuya diferencia es 8 solo quedan 4 posibles elementos, pues $v + 8$ se elimina y además uno de $v + 2$ o $v + 10$ también tiene que descartarse. Así, la lista de vértices tales que no hay dos con diferencia congruente a 1, 5, 8,

$12 \pmod{13}$ es a lo más de tamaño 4, haciendo imposible la ocurrencia de un K_5 azul.

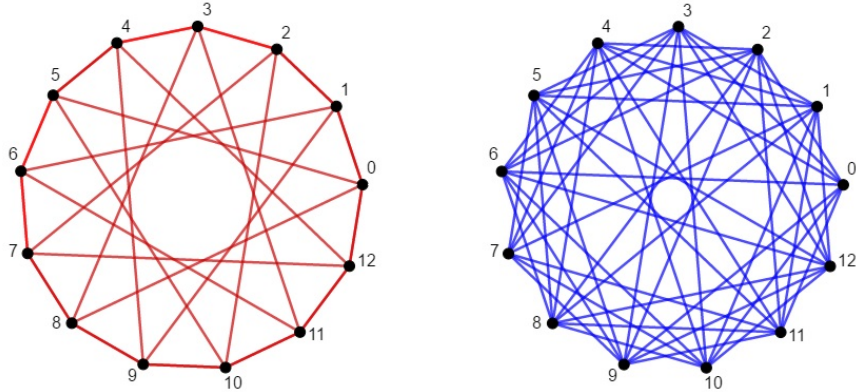


Figura 3.2: Las aristas rojas y azules de K_{13} .

Proposición 3.0.2

Sea $N > 1$ un entero primo relativo con 10, es decir, $\text{mcd}(N; 10) = 1$. Entonces si $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$, se cumple que N divide a alguno de los elementos de la sucesión dada por

$$x_1 = a, \quad x_2 = aa, \quad \dots \quad x_n = \underbrace{aa\dots a}_{n\text{-digitos}}, \dots$$

Demostración

Basta con mostrar que uno de los primeros N elementos de la sucesión es divisible por N . Para esto consideremos los residuos que resultan al dividir los primeros N elementos de la sucesión por N . Si uno de estos residuos es 0 hemos terminado. Supongamos pues que todos estos residuos son distintos de 0, es decir, que solo toman valores entre 1 y $N - 1$. Como tenemos N residuos, por el Principio del Palomar debe haber al menos dos términos que dejan el mismo residuo al dividirlos por N . Sean x_i y x_j los términos que cumplen lo anterior, sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$.

Como x_i y x_j tienen el mismo residuo cuando se dividen por N , por el algoritmo de

la división tenemos que existen enteros positivos q_i, q_j y r con $r < N$ tales que:

$$x_i = q_i N + r$$

$$x_j = q_j N + r.$$

De aquí se sigue que

$$x_j - x_i = (q_j - q_i)N,$$

luego $(x_j - x_i)$ es divisible por N .

Observe que si bien hemos logrado probar que $x_j - x_i$ es divisible por N , este entero no forma parte de nuestra sucesión. Para obtener un elemento de la sucesión que sea divisible por N , basta con fijarse que el entero $x_j - x_i$ está formado por $j - i$ dígitos iguales a a e i dígitos iguales a 0. Esto es:

$$x_j - x_i = \underbrace{a \dots a}_{j-i} \underbrace{0 \dots 0}_i = x_{j-i} 10^i.$$

De aquí igualamos las dos ecuaciones anteriores

$$x_{j-i} 10^i = (q_j - q_i)N$$

Ahora como $\text{mcd}(N, 10) = 1$, se sigue que también $\text{mcd}(N, 10^i) = 1$ y así N debe dividir a x_{j-i} .

□

Ejemplo 3.0.2

Entre los miembros de la sucesión: $\{3, 33, 333, 3333, \dots\}$ existe uno que es divisible por 10001.

Por la proposición 3.0.2 tenemos que

$$11 = 11 * 1$$

$$1111 = 101 * 11$$

$$111111 = 1001 * 111$$

entonces

$$11111111 = 10001 * 1111$$

Así $33333333 = 10001 * 3333$.

3.1. Teorema de Schur

El teorema de Schur afirma que para cualquier coloración de los números naturales siempre es posible hallar subsucesiones monocromáticas arbitrariamente largas con la propiedad de que el término mayor de la subsucesión es la suma de los que le preceden.

Se denomina k -coloración de los números naturales a una aplicación que asigna un color a cada número natural.

$$c : \mathbb{N} \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$$

Los conjuntos $C_i = c^{-1}(i)$, para $i = 1, \dots, k$, se denominan clases de coloración de c . $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ forman una partición de los números naturales. Una k -coloración está completamente definida si se conocen las k clases de coloración C_1, C_2, \dots, C_k . Por esta razón es habitual referirse a una k -coloración mediante sus clases de coloración.

Teorema 3.1.1

Para cualesquiera enteros positivos k, l con $l \geq 2$ existe un número natural $N(k, l) \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N(k, l)$ y $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ es una k -coloración de $\{1, 2, \dots, n\}$, entonces existe una clase de coloración C_t y $x_1, x_2, \dots, x_l \in$

$\{1, 2, \dots, n\}$ (no necesariamente distintos), tales que

$$\{x_1, x_2, \dots, x_l\} \subset C_t \text{ y } x_l = \sum_{i=1}^{l-1} x_i$$

Demostración

Veamos que si $N(k, l) = R(\underbrace{l, l, \dots, l}_{k\text{-veces}}; 2)$, donde $R(\underbrace{l, l, \dots, l}_{k\text{-veces}}; 2)$ es el mínimo entero para el que cualquier coloración con estos k colores se cumple lo especificado en el teorema.

En efecto, sea $n \geq R(\underbrace{l, l, \dots, l}_{k\text{-veces}}; 2)$ y $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ una k -coloración de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Sea $P_2(\{1, 2, \dots, n\})$ el conjunto de todos los 2-subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ y definamos una k -coloración $\{A_1, \dots, A_k\}$ de $P_2(\{1, 2, \dots, n\})$ como: $\{x, y\} \in A_i$ si y solo si $|x - y| \in C_i$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Esta k -coloración de $P_2(\{1, 2, \dots, n\})$ es válida, pues si se tiene que $\{x, y\} \in A_i \cap A_j$, entonces, por definición, $|x - y| \in C_i$ y $|x - y| \in C_j$, como $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ es una k -coloración se tiene que $i = j$, luego $A_i = A_j$.

Por el Teorema de Ramsey, existe un $t \in \{1, 2, \dots, k\}$ y un l -subconjunto $U = \{u_1, u_2, \dots, u_l\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $P_2(U) \subset A_t$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u_1 < u_2 < \dots < u_l$. Luego $\{u_i, u_j\} \in A_t$ y $u_j - u_i \in C_t$ para todo $i < j$. Finalmente para $1 \leq i \leq l - 1$ sea $x_i = u_{i+1} - u_i$ y $x_t = u_l - u_1$. De este modo se tiene que $x_i \in C_t$ para todo $1 \leq i \leq l$ y $x_t = \sum_{i=1}^{l-1} x_i$.

□

A continuación vemos un ejemplo, pero antes de ello definamos que se entiende por número de Schur.

Definición 3.1.2

Se denomina número de Schur al valor mínimo que puede tomar $N(k, l)$ el cual denotaremos como $N_0(k, l)$. Así de la demostración del teorema 3.1.1 se sigue que $N_0(k, l) \leq R(\underbrace{l, l, \dots, l}_{k\text{-veces}}; 2)$.

Ejemplo 3.1.1

$$N_0(2, 3) = 5.$$

Como $k = 2$, supongamos que los colores son rojo y azul; y sabemos que $N_0(2, 3) \leq R(3, 3; 2) = R(3, 3) = 6$.

Veamos hasta donde podemos llegar coloreando los enteros positivos sin que se cumpla la propiedad del teorema 3.1.1

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el 1 se ha coloreado de rojo, luego el 2 tiene que ser azul ya que $2 = 1 + 1$, análogamente el 4 debe ser rojo pues $4 = 2 + 2$; de esto se sigue que el 3 es azul pues $4 = 1 + 3$. Hasta este punto tenemos la siguiente 2-coloración del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$1, 2, 3, 4.$$

Pero ahora el 5 no puede colorearse sin que se cumpla que es suma monocromática de dos números monocromáticos, pues $5 = 1 + 4 = 2 + 3$. De lo anterior se sigue que $N_0(2, 3) \leq 5$. Por otra parte en la coloración: 1, 2, 3, 4 no existen tres números con la propiedad del teorema 3.1.1. Por lo tanto $N_0(2, 3) > 4$, y así $N_0(2, 3) = 5$.

3.2. Teorema de van der Waerden

Sea S cualquier subconjunto de los números \mathbb{N} . Supongamos que hemos pintado los elementos de S usando los colores de un conjunto C de k colores diferentes. Entonces diremos que hemos especificado una k -coloración de S . Téngase en cuenta

que el número k se refiere a la cantidad de colores que podemos usar para colorear, sin embargo en general no pedimos que en una k -coloración forzosamente aparezca cada uno de los k colores disponibles; en otros términos: la aplicación $f : S \rightarrow C$ no tiene que ser sobreyectiva necesariamente. Diremos que una progresión aritmética dentro de S es monocromática si todos sus elementos están pintados de un mismo color.

Ejemplo 3.2.1

¿Existe alguna 2-coloración de $S = \{1, \dots, 9\}$ con la cual no se tenga ninguna progresión aritmética monocromática de longitud 3 dentro de S ?

Intentaremos responder de manera ingenua. Colorearemos los elementos de S empezando por los menores y cada vez que elijamos un color tendremos cuidado de no generar progresiones monocromáticas. Igual que antes usaremos como colores dos tonalidades de gris, $C = \{\text{claro}, \text{oscuro}\}$. Al escoger los colores para los cuatro primeros elementos, lo único que tenemos que evitar es pintar a tres consecutivos del mismo color. Una de las posibilidades, por ejemplo, es la siguiente:



Figura 3.3

Como ahora no queremos tener progresiones monocromáticas, ni la casilla 5 se puede pintar clara (si la pintásemos gris claro los números 1, 3 y 5 formarían una progresión aritmética monocromática), ni la casilla 6 se puede pintar oscura:

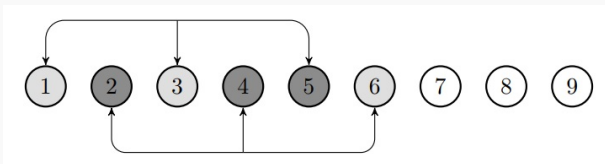


Figura 3.4

Por la misma razón que antes no se puede pintar oscura la casilla 8, ni clara la 9:

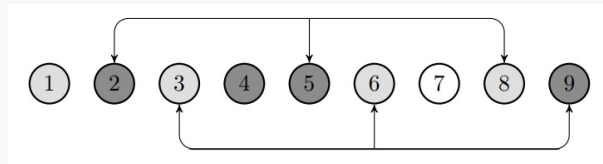


Figura 3.5

Llegados a este punto, es imposible pintar la casilla 7 impidiendo que aparezca una progresión aritmética monocromática de longitud tres:

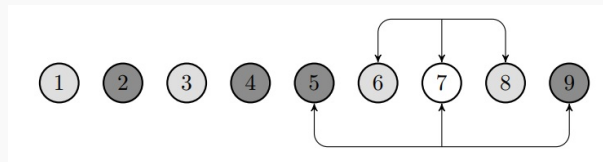


Figura 3.6

No hemos podido encontrar una coloración que evitase progresiones monocromáticas partiendo de la coloración que hemos dado a los cuatro primeros números. Lo mismo hubiera ocurrido partiendo de cualquier otra coloración inicial: una vez elegidos los colores de los cuatro primeros números, los colores de los números siguientes van quedando determinados por el requisito de que no haya progresiones monocromáticas de longitud tres, hasta que se llega una situación como la anterior en la que un número no puede ser pintado con ninguno de los dos colores sin dar lugar a una progresión de longitud tres monocromática.

Teorema 3.2.1

No es posible dar una 2-coloración al conjunto $\{1,2,\dots, 17\}$ evitando que aparezcan progresiones monocromáticas de longitud tres.

Demostración

Sea $S = \{1, 2, \dots, 17\}$ y supongamos que existe una 2-coloración de S ,

$$f : S \longrightarrow \{\text{claro, oscuro}\},$$

careciendo de progresiones monocromáticas de longitud 3. Veamos cómo esto nos llevará a una contradicción. Dado un elemento i de $\{1, \dots, 15\}$ consideremos el siguiente vector de colores: $F(i) = (f(i), f(i + 1), f(i + 2))$. Dado que usamos dos colores, hay $2^3 = 8$ formas de pintar tres elementos consecutivos; de entre estas tenemos que descartar las dos coloraciones monocromáticas (claro, claro, claro) y (oscuro, oscuro, oscuro), que inmediatamente darían una progresión monocromática de longitud 3. En consecuencia, los vectores $F(1), F(2), \dots, F(15)$ toman sus valores en un conjunto de seis elementos. Lo que implica que al menos dos de los vectores $F(1), \dots, F(7)$ coinciden: llamémoslos $F(a) = F(a + d)$, donde a, d son números naturales tales que $a, a + d \in \{1, \dots, 7\}$, de manera que $a + 2d \leq 13$. Fijémonos ahora en la cadena $F(a)$. Como tiene tres elementos tomados de un conjunto de dos colores, uno de estos colores ha de repetirse; supongamos que

$$f(a') = f(a' + d') = \text{claro},$$

en donde a', d' son números naturales que satisfacen $a', a' + d' \in \{a, a + 1, a + 2\}$ de manera que $a' + 2d' \leq a + 4$. Puesto que $F(a) = F(a + d)$, también tenemos que $f(a') = f(a' + d) = f(a' + d + d')$. Consideremos el siguiente diagrama

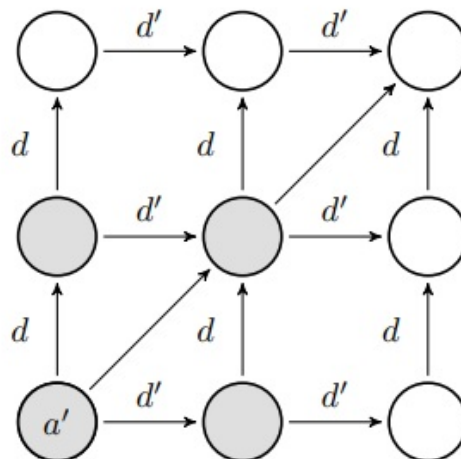


Figura 3.7

A pesar de estar dispuestos en una matriz 3×3 , los círculos de este diagrama representan elementos del conjunto S . El círculo de la esquina inferior izquierda representa a' , y los números representados por los otros círculos están determinados por el requisito de que, al pasar de un círculo a otro a través de una flecha vertical u horizontal, sumemos —respetando la orientación— la cantidad indicada por la flecha (haciendo estas operaciones nunca salimos del conjunto S , ya que $a' + 2d + 2d' \leq a + 4 + 2d \leq 13 + 4 = 17$). Entonces las tres filas, las tres columnas y la diagonal indicada en el diagrama representan progresiones aritméticas de tres elementos diferentes (la diagonal que no hemos dibujado no tiene por qué corresponderse con tres elementos diferentes, a menos que $d \neq d'$).

Para evitar ahora que haya columnas o filas monocromáticas es preciso pintar de gris oscuro los cuatro círculos que indicamos en la figura siguiente.

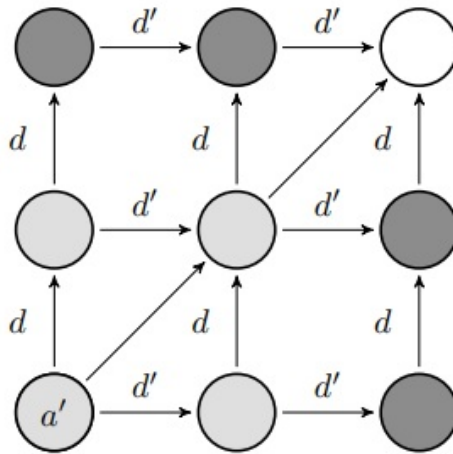


Figura 3.8

Pero entonces no es posible asociar un color a la esquina superior derecha evitando la aparición de una progresión monocromática: si la pintamos clara, la diagonal indicada representa una progresión clara de longitud 3; y, si la coloreamos oscura, tanto la columna derecha como la fila superior representan progresiones oscuras de

longitud 3. En consecuencia la coloración f que habíamos tomado necesariamente ha de tener alguna progresión monocromática de longitud 3, lo que contradice nuestra hipótesis de partida.

□

Un resultado basado en el teorema de Ramsey es el siguiente teorema sobre progresiones aritméticas:

Teorema 3.2.2 "Teorema de van der Waerden"

Dados cualesquiera números naturales n, k existe un número $W(n, k)$ con la siguiente propiedad: para todo número natural $N \geq W(n, k)$, cualquier k -coloración de $1, \dots, N$ contiene al menos una progresión aritmética monocromática de longitud n .

Demostración

Utilizaremos inducción del modo que en seguida precisaremos. Si n, k son números naturales, consideremos la afirmación siguiente

$T(n, k) :=$ existe $W(n, k)$ de manera que, si $N \geq W(n, k)$, cualquier k -coloración de $1, \dots, N$ contiene una progresión aritmética monocromática de longitud n .

Comencemos observando que, dada cualquier cantidad de colores k , la afirmación $T(1, k)$ es cierta y de hecho podemos tomar $W(1, k) = 1$. Efectivamente, cualquier número es, en tanto que subconjunto de \mathbb{N} de un elemento, una progresión aritmética de longitud 1, que para cualquier coloración obviamente será monocromática. En consecuencia, para probar el teorema de Van der Waerden es suficiente que demos el siguiente: Paso inductivo. Sea $n \geq 1$ un entero; supongamos que, para cualquier entero $l \geq 1$, la afirmación $T(n, l)$ es cierta; entonces, para cualquier entero $k \geq 1$, la afirmación $T(n + 1, k)$ es cierta.

Es de sentido común que el teorema de Van der Waerden es consecuencia de

la validez de $T(1, k)$ para todo k y del que hemos llamado paso inductivo; este argumento es un ejemplo de demostración por inducción. Probemos entonces el paso inductivo. Tomemos un entero $n \geq 1$ y asumamos que, para cualquier entero $l \geq 1$, la afirmación $T(n, l)$ es cierta. Es decir, supongamos que existe, para todo l , un entero $W(n, l)$ con la propiedad especificada por $T(n, l)$. Tomemos un número natural k . Nuestro objetivo es demostrar $T(n + 1, k)$ usando la hipótesis inductiva. (Notemos que $T(n + 1, 1)$ es trivialmente cierta tomando $W(n + 1, 1) = n + 1$. Por tanto, es preciso que $k \geq 2$ para que $T(n + 1, k)$ no sea trivial. Aun así los argumentos que siguen son válidos incluso cuando $k = 1$.) Para hacer la lectura más cómoda hemos organizado la prueba dividiéndola en cuatro pasos.

Paso 1. Definimos una sucesión de números naturales N_0, N_1, \dots, N_k así:

$$N_0 = 1, \quad N_j = 2W(n, k^{N_{j-1}}) + N_{j-1} \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq k$$

Veremos que cualquier k -coloración de $S = 1, \dots, N_k$ contiene alguna progresión monocromática de longitud $n + 1$, de manera que podemos tomar $W(n + 1, k) = N_k$.

Paso 2. Sea C un conjunto de k elementos (los colores) y sea

$$f : S \longrightarrow C$$

una aplicación cualquiera (la coloración). En este paso construiremos, para todo entero j del conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$:

- tres conjuntos $S_j'' \subset S_j' \subset S_j$ y
- una progresión aritmética

$$\{a_j, a_j + d_j + \dots + a_j + (n - 1)d_j\} \subset S_j''$$

con la propiedad de que para todo $0 \leq t \leq N_{j-1}$ y todo $0 \leq r \leq n - 1$ se cumple

$$f(a_j + t) = f(a_j + rd_j + t)$$

y que, además,

$$a_j + nd_j \in S'_j. \quad (3.1)$$

Estos conjuntos también satisfarán

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_k = S.$$

Procederemos por inducción descendente, empezando con $j = k$ y disminuyendo j una unidad en cada paso. Definimos:

$$\begin{aligned} S_k &= \{1, 2, \dots, 2W(n, k^{N_{k-1}}) + N_{k-1}\} = \{1, 2, \dots, N_k\} = S, \\ S'_j &= \{1, 2, \dots, 2W(n, k^{N_{k-1}})\}, \\ S''_j &= \{1, 2, \dots, W(n, k^{N_{k-1}})\}. \end{aligned}$$

Consideremos ahora la aplicación

$$f_k : S''_k \longrightarrow C^{N_{k-1}}, \quad f_k(t) = (f(t), f(t+1), f(t+2), \dots, f(t+N_{k-1}-1))$$

La aplicación f_k está bien definida, ya que si $t \in S''_k$ entonces $t+N_{k-1}-1 \in S_k = S$. La clave es que podemos contemplar a f_k como una nueva coloración, donde el conjunto de colores C se ha sustituido por el conjunto $C^{N_{k-1}}$ (que, en general, tiene muchísimos más elementos que C). Por tanto, podemos aplicar la hipótesis inductiva (que afirma la existencia de $W(n, l)$ para cualquier número de colores l , en particular para $l = k^{N_{k-1}}$) y deducir que existe una progresión aritmética

$$a_k, a_k + d_k, \dots, a_k + (n-1)d_k \in S''_k,$$

donde $d_k \geq 1$, monocromática respecto de la coloración f_k . Además, de las definiciones de los conjuntos S''_k y S'_k se deduce que

$$a_k + nd_k \in S'_k.$$

Efectivamente, por un lado $a_k + (n-1)d_k \in S''_k$, y por otro lado $d_k \leq W(n, k^{N_{k-1}})$, ya que d_k es la diferencia de una progresión aritmética de longitud ≥ 2 contenida en

un conjunto formado por $W(n, k^{N_{k-1}})$ enteros consecutivos; dado que S'_k se obtiene añadiendo a S''_k los $W(n, k^{N_{k-1}})$ enteros que están a continuación del elemento más grande de S''_k , resulta que $a_k + (n-1)d_k + d_k = a_k + nd_k$ pertenece a S'_k . Sea ahora j un elemento del conjunto $1, 2, \dots, k-1$ y supongamos que ya hemos definido $S_{j+1}, S'_{j+1}, S''_{j+1}, a_{j+1}, d_{j+1}$. Entonces definimos, siguiendo la misma idea de antes,

$$\begin{aligned} S_j &= \{a_{j+1}, a_{j+1} + 1, \dots, a_{j+1} + 2W(n, k^{N_{j-1}}) + N_{j-1} - 1\}, \\ &= \{a_{j+1}, a_{j+1} + 1, \dots, a_{j+1} + N_j - 1\}, \\ S'_k &= \{a_{j+1}, a_{j+1} + 1, \dots, a_{j+1} + 2W(n, k^{N_{j-1}}) - 1\}, \\ S''_k &= \{a_{j+1}, a_{j+1} + 1, \dots, a_{j+1} + W(n, k^{N_{j-1}}) - 1\}. \end{aligned}$$

Observemos que $S_j \subset S_{j+1}$, ya que:

1. el elemento mas pequeño de s_j , a_{j+1} , pertenece a $S''_{j+1} \subset S'_{j+1} \subset S_{j+1}$,
2. S_j consta de N_j elementos consecutivos y
3. S_{j+1} se obtiene añadiendo a S'_{j+1} los N_j números consecutivos que siguen al número más grande de S'_{j+1}

Consideremos la aplicación

$$f_j : S''_j \longrightarrow C^{N_{j-1}}, \quad f_j(t) = (f(t), f(t+1), f(t+2), \dots, f(t+N_{j-1}-1)),$$

que está bien definida por los mismos argumentos que hemos usado para justificar la definición de $f-k$ juntamente con el hecho de que S_j . Aplicando la hipótesis inductiva, deducimos que existe una progresión aritmética

$$a_j, a_j + d_j, \dots, a_j + (n-1)d_j \subset S''_j,$$

donde $d_j \geq 1$, monocromática respecto a la coloración f_j . Por el mismo argumento que antes sabemos además que se cumple

$$a_j + nd_j \in S'_j$$

como de hecho queríamos.

Ejemplo 3.2.2

En el caso de dos colores. Cuando $k = 2$, las construcciones anteriores se realizan de manera parecida a como hemos representado gráficamente las ideas de la demostración del teorema 1:

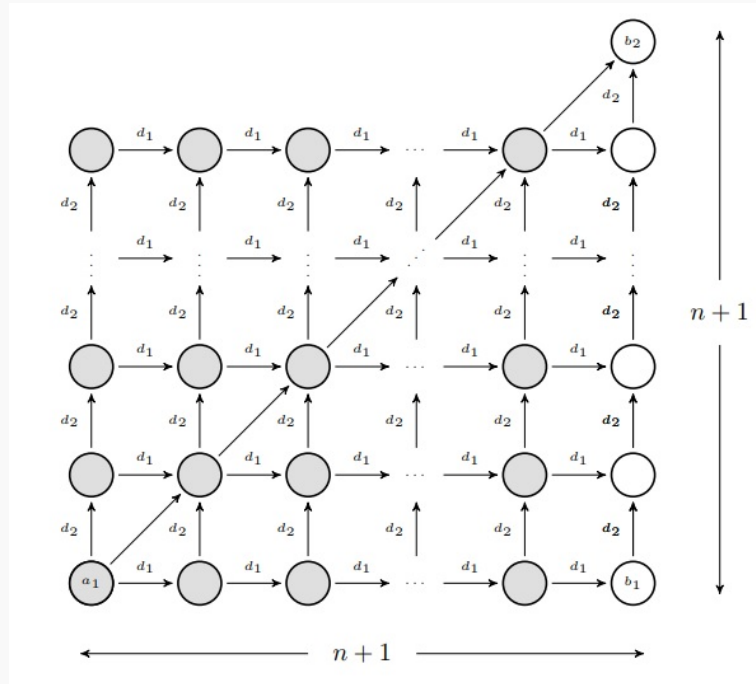


Figura 3.9

Cada círculo representa un elemento de S . La esquina inferior izquierda representa a a_1 . Cuando pasamos de un círculo a otro siguiendo una flecha etiquetada d_j saltamos de un elemento de S al elemento que se obtiene después de sumarle d_j . Por consiguiente, tanto las filas como las columnas como la diagonal indicada representan progresiones aritméticas en S . Para comprender cómo esta configuración resulta de la construcción especificada anteriormente, notemos que podemos mirar a las filas del diagrama como elementos de una progresión aritmética monocromática. Cada fila es a su vez una progresión aritmética, de manera que, si ignoramos el círculo superior de la columna de la derecha (que hemos etiquetado b_2), el diagrama es una «progresión aritmética formada por

progresiones aritméticas». En este caso se puede terminar la demostración de la manera siguiente: dado que tenemos dos colores nada más, para evitar formar progresiones aritméticas de longitud $n + 1$ de color oscuro, es preciso que todos los círculos de la columna derecha sean claros. Pero entonces la columna de la derecha formaría una progresión aritmética de longitud $n + 1$ de color claro. Por lo tanto, en cualquier caso obtenemos una progresión monocromática de longitud $n + 1$. Si en lugar de dos colores usamos una cantidad $k \geq 3$, el argumento anterior no funciona ya que podríamos utilizar uno distinto de los dos ya usados, para el círculo b_2 . Esto motiva que, en general, tengamos que construir una «estructura k -dimensional» análoga a la que hemos representado en el caso $k = 2$.

Paso 3. En los dos lemas siguientes demostraremos algunas propiedades de la construcción anterior que nos permitirán concluir la demostración.

Lema 3.2.3

Para todo entero $1 \leq j \leq k$ se cumple $a_1 + nd_1 + nd_2 + \dots + nd_j \in S_j$.

Demostración

Razonamos por inducción ascendente. Cuando $j = 1$ hay que ver que $a_1 + nd_1 \in S_1$, que es 3.1. Supongamos ahora que $j > 1$ y que $a_1 + nd_1 + \dots + nd_{j-1} \in S_{j-1}$. Para demostrar que $a_1 + nd_1 + nd_2 + \dots + nd_j \in S_j$ es suficiente que probemos que, para todo elemento $t \in S_{j-1}$, se cumple $t + nd_j \in S_j$. Ahora bien, todo elemento t de S_{j-1} puede ser escrito en la forma $t = a_j + u$, siendo $0 \leq u \leq N_{j-1} - 1$, de manera que $t + nd_j = a_j + nd_j + u$. Gracias a 3.1 sabemos que $a_j + nd_j \in S'_j$. Pero como $0 \leq u \leq N_{j-1}$, el mismo argumento que hemos utilizado antes permite deducir, de la última relación de pertenencia, que $a_j + nd_j + u \in S_j$.

□

Para cualquier conjunto de coeficientes $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda := \{0, \dots, n\}^k$, escribiremos

$$a(\lambda) = a(\lambda_1, \dots, \lambda_k) := a_1 + \sum_j \lambda_j d_j.$$

El lema anterior implica que $a(\lambda) \in S$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Para todo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda$ definimos

$$\lambda^* := \begin{cases} (0, \dots, 0) \in \Lambda & \text{si } \lambda_j \leq n-1 \text{ para todo } j \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_i, 0, \dots, 0) \in \Lambda & \text{si } \lambda_i = n \text{ y } \lambda_j \leq n-1 \text{ para todo } j > i. \end{cases}$$

Lema 3.2.4

Para todo $\lambda \in \Lambda$ se cumple que $f(a(\lambda)) = f(a(\lambda^*))$.

Demostración

Sea $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Para comprobar que $f(a(\lambda)) = f(a(\lambda^*))$ es suficiente demostrar que:

$$f(a(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j, 0, \dots, 0)) = f(a(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, 0, 0, \dots, 0)) \quad (3.2)$$

siempre que $\lambda_j \leq n-1$. Consideremos la suma parcial

$$p = a(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, 0, 0, \dots, 0) = a_1 + \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i d_i.$$

Por el lema 3.2.3 sabemos que $p \in S_{j-1}$. Como $\{a_j, a_j + d_j, \dots, a_j + (n-1)d_j\} \subset S_j''$ es monocromática respecto a f_j y $S_{j-1} = \{a_j, a_j + 1, \dots, a_j + N_{j-1} - 1\}$, resulta que para todo $t \in S_{j-1}$ y todo $0 \leq r \leq n-1$ se cumple la igualdad $f(t) = f(t + rd_j)$. En particular, tomando $t = p$ y $r = \lambda_j$ tenemos $f(p + \lambda_j d_j) = f(p)$, que es la igualdad 3.2 que queríamos demostrar.

□

Paso 4. Definimos, para todo $0 \leq j \leq k$,

$$b_j = a_1 + \sum_{i=0}^j n d_i = a(\overbrace{n, \dots, n}^j, \overbrace{0, \dots, 0}^{k-j}).$$

(Cuando $k = 2$ los números b_1, b_2 coinciden con los indicados en el diagrama que hemos mostrado al final del paso 2, mientras que $b_0 = a_1$.) Como las imágenes $\{f(b_0), f(b_1), \dots, f(b_k)\}$ toman valores en un conjunto de k elementos, tiene que haber un par de imágenes iguales. Es decir, han de existir $0 \leq p < q \leq k$ con $f(b_p) = f(b_q)$. Consideremos ahora, para todo $0 \leq l \leq n$,

$$c_l = a_1 + \sum_{i=0}^p nd_i + \sum_{i=p+1}^q ld_i = b_p + \frac{l}{n}(b_q - b_p).$$

Entonces, por el lema 3.2.4, sabemos que

$$f(c_0) = f(c_1) = \dots = f(c_{n-1}).$$

Por otro lado, $c_0 = b_p$ y $c_n = b_q$. En consecuencia $f(b_p) = f(b_q)$ implica que $f(c_n) = f(c_0)$. Combinándolo con las igualdades anteriores deducimos que

$$f(c_0) = f(c_1) = \dots = f(c_{n-1}) = f(c_n).$$

Por tanto, los números c_0, c_1, \dots, c_n forman una progresión aritmética monocromática de longitud n . Esto termina la demostración del teorema.

□

Bibliografía

- [1] J. A. Bondy, U. S. R. Morty. Graph Theory. Graduate Text in Mathematics, Vol. 244, Springer, Berlin.
- [2] F. R. K. Chung, C. M. Grinstead, A survey of bounds for classical Ramsey numbers, Journal of Graph Theory 7 (1983), 25-37.
- [3] F. R. K. Chung, R. L. Graham, Forced convex n-gons in the plane, Discrete and Computacional Geometry 19(3) (1998), 367-371.
- [4] V. Chvátal, J. Komlós, Some combinatorial theorems on monotonicity, Canad. Math. Bull.14 (1971), 151-157.
- [5] Reinhard Diestel. Graph Theory. Third Edition. Graduate Text in Mathematis, Vol. 173, Springer, Berlin.
- [6] P. Erdős, Z. Tuza, P. Valtr, Ramsey-remainder, Eur. J. Comb. 17(6) (1996), 519-532.
- [7]] P. Erdős, G. Szekeres, On some extremum problems in elementary geometry, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. 3-4 (1961), 53-62.
- [8]] P. Erdős, G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, Compositio Mathematica 2 (1935), 463-470.
- [9] G. Tóth, P. Valtr, The Erdős-Szekeres theorem: upper bounds and related results, Combinatorial and Computational Geometry 52 (2005), 557-568.

- [10] G. Szekeres, L. Peters, Computer solution to the 17-point Erdős-Szekeres problem, ANZIAM J. 48 (2006), 151-164.
- [11] G. Tóth, P. Valtr, Note on the Erdős-Szekeres theorem, Discrete and Computational Geometry 19 (1998), 457-459.
- [12] Kenneth H. Rosen. Discrete Mathematics and Its Applications. McGraw Hill, 7th ed.
- [13] F. P. Ramsey, On a problem of formal logic, Proceedings of the London Mathematical Society 30 (1930), 264-286.
- [14] José Héber Nieto Said. Teoría Combinatoria. La Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela, 1996.
- [15] T. S. Motzkin, Cooperative classes of finite sets in one and more dimensions, J. Combin. Theory 3 (1967), 244-251.
- [16] M. Lewin, A new proof of a theorem of Erdős-Szekeres, The Mathematical Gazette 60(412) (1976), 136-138.
- [17] Scott Johnson, A new proof of the Erdős-Szekeres convex k-gon result, Journal of Combinatorial Theory Series A 42 (1986), 318-319.
- [18] R. E. Greenwood, A. M. Gleason, Combinatorial relations and chromatic graphs, Canadian Journal of Mathematics 7 (1955), 1-7.
- [19] P. Erdős, Z. Tuza, P. Valtr, Ramsey-remainder, Eur. J. Comb. 17(6) (1996), 519-532.
- [20] La Gaceta de la RSME, Vol 14 (2011), Núm. 44, Págs 715-737.
- [21] Ramsey Theory - University of Oxford.