Universidad de El Salvador
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Matemática

Trabajo de graduación titulado

El Teorema de Alaoglu y sus aplicaciones

Realizado por

Madeline Patricia Sibrián Morales

Para optar al grado de

Licenciada en Matemática

04 de febrero de 2022

Universidad de El Salvador
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Matemática

El teorema de Alaoglu y sus aplicaciones

Trabajo de graduación para optar al título de Licenciada en Matemática

Presentado por:
Madeline Patricia Sibrián Morales

Carnet:
SM15008

Asesores:
M.Sc. Gabriel Alexander Chicas Reyes
Dr. Aarón Ernesto Ramírez Flores

04 de febrero de 2022
Ciudad Universitaria, San Salvador, El Salvador.

Universidad de El Salvador

AUTORIDADES CENTRALES 2019-2023

M.Sc. Roger Armando Arias Alvarado
Rector

Dr. Raúl Ernesto Azcúnaga López
Vicerrector Académico

Ing. Juan Rosa Quintanilla
Vicerrector Administrativo

M.Sc. Francisco Antonio Alarcón Sandoval
Secretario General

Lic. Rafael Humberto Peña Marín
Fiscal General

Lic. Luis Antonio Mejía Lipe
Defensor de los Derechos Universitarios

Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

Lic. Mauricio Hernán Lovo Córdova
Decano

M.Sc. Zoila Virginia Guerrero Mendoza
Vicedecana

Lic. Jaime Humberto Salinas Espinoza
Secretario

Escuela de Matemática

Dr. Dimas Noé Tejada Tejada
Director Interino

M.Sc. Carlos Ernesto Gámez
Secretario Interino

A mi mamá, mi hermana, mis abuelitas y Diego.

Agradecimientos

A **Dios**, por permitirme culminar esta etapa de mi vida, aunque en ocasiones no lo veía posible; a **mi mamá**, por su apoyo constante a lo largo de mi carrera; a **mi hermana Rocío** por su compañía y estar presente cuando la necesitaba; a **mi abuelita** *"tita"* , pues siempre me tuvo presente en sus oraciones para que todo marchara bien; a **mi abuelita** *"mamaneche"* , quien ya no está presente; pero en todo momento se preocupaba y oraba por mi bienestar.

A **Diego Meléndez**, quien me ha acompañado a lo largo de estos años, por siempre apoyarme en todos los aspectos de mi vida personal y académica; por nunca dejarme sola y creer en mí; por ayudarme a buscar formas para sobrellevar situaciones complicadas y estar ahí cuando lo necesitaba; por estudiar juntos, su infinita paciencia, darme ánimos e impulsarme a ser mejor persona; por acompañarme a lo largo de esta tesis dando, por permitirme compartir todos estos años con él y darme cuenta qué es una persona excepcional de quién he aprendido mucho.

A **Javier Pleités** quien siempre se ofrece a ayudar y se preocupa de genuinamente por los demás; por ayudarme a estudiar cuando lo necesitaba; por su paciencia y motivación, también por permitirme compartir con él los últimos años de la carrera, en los cuales descubrí que es una gran persona, amigo y compañero. A **Marvin Ferman**, por siempre aconsejarme para obtener mejores resultados en la carrera; por apoyarme en momentos complicados; por estar ahí para escuchar, enseñar y compartir. A **Ariel Hidalgo**, por compartir los últimos años de la carrera conmigo, por ser un buen amigo y compañero, quien siempre compartía su conocimiento y lo explicaba de la mejor forma posible.

A **Geovany Rosales**, por acompañarme a estudiar y en cualquier ocurrencia, por siempre estar atento y dispuesto a escuchar. A **Moisés Rivera**, quién tiene la paciencia para explicarme las veces necesarias, por darme ánimos y estar ahí cuando lo necesitaba. A **Jony Hernández**, por siempre darme consejos sobre como estudiar mejor y explicarme cuando un tema no me quedaba claro. A **Carmen Parada**, por ser un gran apoyo en el último año y contagiarme de su optimismo para que las cosas salieran bien. A **Rodrigo Meléndez**, con quién en el último año formamos un gran equipo.

Al **M.Sc. Mario Ruíz**, por ser un docente de quien aprendí muchas cosas, quien confió en mí en un inicio y siempre tuvo la amabilidad tanto de explicarme, como de enseñarme cosas nuevas que me serian de gran utilidad en un futuro. Al **Dr. Dimas Tejada**, por darme uno de los consejos más valiosos a lo largo de mi carrera; por impulsarme a ser mejor estudiante y siempre estar dispuesto a escuchar. Al **Dr. Aarón Ramírez** por ser un excelente docente, quien me ayudo a comprender la Matemática pura; por su infinita paciencia y apoyo a lo largo de este proyecto, por su disponibilidad de solventar cualquier duda por muy pequeña que fuera y por siempre mostrar amabilidad a la hora de enseñar. Al **M.Sc. Gabriel Chicas** por aceptar ser parte de este proyecto, por su paciencia y tener la disponibilidad de responder cualquier pregunta. Finalmente, a la **Lic. Claudia Corcio**, por motivarme a mejorar la forma de enseñar y a dar lo mejor de mí en cada aspecto.

Índice

Resumen

Esta tesis pretende dar resultados sobre la compacidad de la bola cerrada unitaria, que no se tienen en espacios de dimensión infinita, y esto lo obtenemos gracias al Teorema de Alaoglu.

En particular, se utilizarán conceptos básicos tales como: una topología, el espacio dual y espacios vectoriales topológicos; para así, con ellos definir una topología débil-*. En específico, utilizaremos las bases locales de un espacio vectorial topológico, pues junto a la topología débil, son piezas claves para probar el Teorema de Alaoglu. Posteriormente, tendremos resultados inmediatos para espacios vectoriales topológicos normados y separables.

En la parte de Topología, el resultado más importante es el Teorema de Tychonoff.

***Teorema* 1** (Teorema de Tychonoff)**.** *El producto de cualquier colección arbitraria de espacios compactos, es compacto bajo la topología producto.*

Posteriormente, introduciremos la estructura de espacios vectoriales topológicos.

Definición 1 (Espacio vectorial topológico)**.** Sea X un conjunto no vacío. Dado (X, τ) un espacio topológico y $(X, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, decimos que X es un **espacio vectorial topológico**, si se verifica que:

1. Cada punto de X es un conjunto cerrado.

2. Las operaciones del espacio vectorial son continuas con respecto a τ.

Bajo este contexto, a τ le llamamos **topología vectorial**.

Esta noción de un espacio vectorial topológico es muy importante, pues nos permite definir una base local.

Definición 2 (Base local en a)**.** Sea X un espacio vectorial topológico y a un elemento de X. Una **base local en** a, es una colección de conjuntos que cumple las siguientes condiciones:

1. Todos los elementos de $\mathscr{B}_a$ son conjuntos abiertos.

2. Todo elemento $B \in \mathscr{B}_a$, cumple que $a \in B$.

3. Si U es conjunto abierto tal que $a \in U$, entonces existe $B \in \mathscr{B}_a$ tal que $a \in B \subseteq U$.

La importancia de una base local es el hecho que con ella se genera una base para la topología vectorial. Otra cualidad que destaca de estos espacios, es que tanto las traslaciones como las homotecias de conjuntos abiertos siguen siendo conjuntos abiertos.

De forma similar, revisaremos contenido fundamental del Análisis Funcional, entre ellos destaca: el espacio dual, las evaluaciones puntuales, y el isomorfismo entre los espacios medibles de Lebuesgue L^p y su dual L^q, siempre que $1 < p \leq \infty$ y q sea el conjugado de p.

Definición 3 (Espacio dual)**.** El conjunto de todos los funcionales lineales y continuos que van de un espacio vectorial topológico X a su campo $\mathbb{K}$, es llamado **espacio dual** de X y lo denotamos por X^*.

Otro concepto importante son las **evaluaciones puntuales**, $g_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$. Una característica importante de estos funcionales, es el hecho que la colección de todas las evaluaciones puntuales, es una familia que separa puntos de X.

En este punto, a pesar de que tenemos los fundamentos y las bases de nuestro tema de investigación, debemos definir diversos conceptos que son clave; en estos se observa una de las relaciones entre la Topología y el Análisis Funcional, con esto nos referimos a una $\mathscr{F}$-topología.

Definición 4 ($\mathscr{F}$- topología de X)**.** Sea X un conjunto no vacío, $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una colección de espacios topológicos y $\mathscr{F}$ una familia no vacía de aplicaciones, definida como

$$\mathscr{F} = \{f_{\alpha_i} \mid f_{\alpha_i} : X \longrightarrow Y_\alpha, \alpha \in I, i \in I_1\}.$$

Sea $\mathcal{S}$ la subbase de X, definida por $\mathscr{F}$

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha, \qquad S_\alpha = \left\{ f_{\alpha_i}^{-1}(V_\beta) \ : \ V_\beta \in \tau_\alpha, f_{\alpha_i} \in \mathscr{F}, \beta \in J \right\}.$$

La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$, es llamada **$\mathscr{F}$- topología de** X.

La importancia de la $\mathscr{F}$-topología, es el hecho que la topología débil y débil-* son un caso particular de esta.

Definición 5 (Topología débil)**.** Tomemos un espacio vectorial topológico X tal que su dual X^*, separa puntos de X. La X^*-topología de X es llamada **topología débil de X.**

Definición 6 (Topología débil-*)**.** Sea X un espacio vectorial topológico, τ su topología vectorial y $\mathbb{K}$ su campo de escalares. Consideramos la familia de las evaluaciones puntuales, definida por

$$\mathscr{F} = \{g_x \in X^{**} \mid g_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}, x \in X\}.$$

La $\mathscr{F}$-topología de X^* es llamada **topología débil-* de** X^*.

Lo interesante de recopilar toda la teoría mencionada anteriormente, es poder enunciar y demostrar el Teorema de Alaoglu.

***Teorema* 2** (Teorema de Alaoglu)**.** *Sea X un espacio vectorial topológico, τ su topología vectorial y $\mathbb{K}$ su campo de escalares. Si V es un vecindario abierto de 0, entonces el polar de V,*

$$P = \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1, x \in V\},$$

es débil- compacto.*

La importancia del Teorema de Alaoglu es debido a que en un espacio vectorial topológico de dimensión finita X, la bola unitaria de X^* no es compacta en su topología original; sin embargo, con este resultado se obtiene que la bola será compacta, inclusive si la dimensión de X es infinita, siempre y cuando trabajemos sobre la topología débil-*.

Una vez enunciado y demostrado el Teorema de Alaoglu, podremos obtener resultados inmediatos; entre los cuales, tenemos el siguiente teorema.

***Teorema* 3** (Teorema de Helly)**.** *Sea X un espacio vectorial topológico separable y V un vecindario abierto de 0, entonces el conjunto*

$$P = \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1, x \in V\},$$

es secuencialmente débil- compacto en X^*.*

En este punto, vuelve a radicar la importancia de trabajar sobre un espacio vectorial topológico; pues bajo dicha estructura, se cumple que las bolas cerradas de radio finito en X^* son débil-* compactas.

Finalmente, estudiaremos aplicaciones del Teorema de Alaoglu; En particular veremos 2 aplicaciones: en Álgebras de Banach y en los espacios medibles de Lebesgue sobre el Toro.

Definición 7 (Álgebra de Banach)**.** Sea A un espacio de Banach, el cual es un álgebra compleja con respecto a la norma. Si A satisface que para todo $x, y \in A$:

- $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.
- Existe $e \in A$ tal que $xe = ex = x$, con $\|e\| = 1$.

Decimos que A es un **álgebra de Banach compleja**; en particular, si A es un álgebra conmutativa, se dice que es un **álgebra de Banach compleja conmutativa**.

En las álgebras de Banach complejas, estudiaremos el espacio de los homomorfismos complejos de A, distintos del funcional trivial. A dicho espacio lo denotamos por

$$\mu(A) = \{\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \neq 0\}.$$

Se probará $\mu(A) \subseteq A^*$. Como consecuencia del Teorema de Alaoglu, mostraremos $\mu(\mathscr{A})$ es un espacio de Hausdorff, cerrado y compacto en la **topología de Gelfand**; dicha topología es más débil que la topología débil -*.

Por otro lado, estudiaremos el espacio medible de **Lebesgue sobre el toro**,

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C} \ \ : \ \ f \text{ es medible y } \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt < \infty \right\},$$

siempre que $1 < p < \infty$. Utilizando el Teorema de Helly (Corolario del Teorema de Alaoglu), se mostrará que existe una relación entre dicho espacio y las funciones armónicas sobre el disco unitario. Se probará, que para toda función armónica f sobre el disco, existe una función $g \in L^p(\mathbb{T})$ tal que f se puede representar como una convolución del núcleo de Poisson con g; es decir,

$$f(re^{i\theta}) = (P_r * g)(\theta), \text{ siempre que } re^{i\theta} \in D.$$

Con estas dos aplicaciones, daremos a conocer la utilidad de dicho teorema y observaremos como puede extenderse a diversas ramas de la Matemática; de esta forma, mostraremos que es un resultado sumamente importante, y se evidenciara que es un pilar fundamental del Análisis Funcional.

Introducción

El Teorema de Alaoglu es un resultado sumamente importante del Análisis Funcional, este resultado fue publicado inicialmente por ***Stefan Banach*** en 1932, donde demostró este teorema para espacios vectoriales normados separables; la primera prueba para el caso general fue publicada en 1940 por ***Leonidas Alaoglu***.

El objetivo de este trabajo va más allá de estudiar el Teorema de Alaoglu, es más bien, estudiar a fondo cada una de las herramientas necesarias para enunciarlo y demostrarlo; además, analizaremos diversas aplicaciones de este en otras ramas de la Matemática. La importancia del resultado, radica en que obtenemos la propiedad de compacidad de la bola cerrada unitaria sobre el espacio dual de un espacio vectorial topológico, trabajado con la topología débil-*, lo cual no sucede de forma general.

En el presente trabajo, los temas se abordan de forma gradual. Se expondrán desde conceptos básicos hasta definiciones más abstractas, la finalidad de esto, es que el lector pueda comprender por completo el contenido que se presentará. En el **Capítulo 1**, daremos un recorrido por los conceptos y resultados básicos de la Topología; para así, tener bases sólidas en esta área.

En el **Capítulo 2**, se abordan definiciones y resultados fundamentales de Análisis Funcional; en la Sección 2.1 se introducen, y estudian a profundidad, los espacios vectoriales topológicos; con el motivo de comprender, por qué la teoría posterior, se trabaja únicamente sobre estos espacios. Concluimos dicho capítulo dando algunos Teoremas de Separación donde se utilizan teoremas del tipo Hahn-Banach.

La parte principal de dicho trabajo, se desarrolla en el **Capítulo 3**. Iniciamos definiendo las convergencias débil y débil-*, así como, resultados esenciales de estas. Como siguiente punto, se definen las topologías débil y débil-*, en las cuales se observa una de las relaciones entre el Análisis Funcional y la Topología. Trabajando sobre estas, llegamos a la última parte, donde se enuncia y demuestra el Teorema de Alaoglu. Dicho teorema nos da las condiciones para que una bola cerrada unitaria sea compacta. Para finalizar el capítulo, se dan resultados inmediatos tales como el Teorema de Helly y el Teorema de Banach-Alaoglu.

Finalmente, en el **Capítulo 4**, se puede ver la importancia del Teorema de Alaoglu; pues estudiamos aplicaciones de este en Álgebras de Banach y en los espacios medibles de Lebesgue sobre el toro. Se probará que el espacio construido por homomorfismos complejos no triviales de un Álgebra de Banach, es Hausdorff y compacto, bajo la topología de Gelfand. Por otro lado, se da una caracterización de las funciones armónicas sobre el disco unitario, en términos de una convolución entre el núcleo de Poisson y una función de un espacio medible de Lebesgue. Lo anterior nos permite observar que el Teorema de Alaoglu es un resultado de gran importancia, que viene a ser el pilar de diversas teorías en la Matemática.

Capítulo 1

Fundamentos en Topología

"No hay rama de la Matemática, por lo abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real."

-Lobachevski.

En este capítulo, estudiaremos los fundamentos de una de las áreas más importantes en el presente trabajo, la Topología. Iniciaremos dando conceptos básicos, así como resultados de suma importancia, que son necesarios para estudiar el Teorema de Alaoglu. En el presente capítulo seguiremos el texto de [7], páginas 75-132, 147-157.

1.1. Topología y bases de una topología

La definición de un espacio topológico tomó mucho tiempo en ser establecida; lo que se deseaba era establecer un nuevo concepto matemático, que vendría a ser la generalización de un espacio métrico, y bajo este demostrar y generalizar diversos resultados.

Definición 1.1 (Topología)**.** Una **topología** de un conjunto X, distinto de vacío, es una colección de subconjuntos de X denotada por τ, que posee las siguientes propiedades:

1. $\emptyset$ y X están en τ.
2. La unión arbitraria de elementos $U_i \in \tau$, $i \in I$ está en τ, donde I es un conjunto de índices arbitrario.
3. La intersección finita de elementos $U_1, \ldots, U_n \in \tau$, $n \in \mathbb{N}$ está en τ.

El conjunto X, para el cual se construye τ, es llamado **espacio topológico** y se denota por la dupla (X, τ).

Definición 1.2 (Conjunto abierto)**.** Dado (X, τ) un espacio topológico, decimos que $U \subseteq X$ es un **conjunto abierto** en X, si U pertenece a la topología τ.

Observación. A partir de este punto, al decir que U es abierto en un espacio topológico (X, τ), omitiremos la topología y solo diremos que U es abierto en X.

Anteriormente, se definió un conjunto abierto U de un espacio topológico (X, τ); sin embargo, existen otras formas para poder afirmar que un conjunto es abierto. A continuación, se dará una caracterización de dicho concepto.

***Teorema* 1.1.** *Sea (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X. Si para todo $x \in A$, existe un conjunto U abierto en X tal que $x \in U \subseteq A$, entonces A es un conjunto abierto.*

Demostración. Por hipótesis, para todo $x \in A$ existe un conjunto $U_x \in \tau$, tal que

$$x \in U_x \subseteq A.$$

Utilizando la inclusión anterior, obtenemos la siguiente igualdad,

$$A = \bigcup_{x \in A} U_x, \quad U_x \in \tau.$$

Ya que A se ha reescrito como la unión arbitraria de conjuntos abiertos, se concluye que $A \in \tau$. □

Otro concepto muy común en las matemáticas son los vecindarios (también llamados entornos); a continuación veremos su definición, pues existe una relación entre ellos y los conjuntos abiertos.

Definición 1.3 (Vecindario en p)**.** Sea (X, τ) es un espacio topológico y p un elemento de X. Un subconjunto V de X es un **vecindario de p**, si existe un conjunto abierto U de X tal que

$$p \in U \subseteq V.$$

Observación. Es importante mencionar que los vecindarios no siempre son abiertos; sin embargo, todo conjunto abierto de X es en sí mismo un vecindario, el cual es llamado **vecindario abierto**.

En un conjunto X, distinto de vacío, podemos definir más de una topología, es decir, las topologías no son únicas. Veamos el siguiente ejemplo.

***Ejemplo* 1.1.**

1. **Topología trivial**. Sea X un conjunto no vacío. La siguiente colección,

$$\tau = \{\emptyset, X\},$$

   es una topología para X, la cual es llamada **topología trivial**.

2. **Topología discreta**. Sea X un conjunto no vacío. La siguiente colección,

$$\tau = \mathcal{P}(X),$$

   es una topología para X llamada **topología discreta**, donde $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto potencia de X.

Una pregunta que puede surgir es: si tenemos dos topologías sobre un mismo conjunto X no vacío, ¿las topologías están relacionadas de alguna forma? La respuesta es negativa, pues no siempre se pueden relacionar, para ello damos la siguiente definición.

Definición 1.4 (Comparación de topologías)**.** Sean τ y τ' dos topologías de un conjunto X no vacío. Si $\tau \subseteq \tau'$, decimos que τ es **más gruesa** o **más débil** que τ', equivalentemente; se dice que τ' es **más fina** o **más fuerte** que τ .

La inclusión de las topologías, es en el sentido que todo abierto en (X, τ), también es abierto en (X, τ').

Nota. En este texto, dadas dos topologías τ, τ' sobre X un conjunto no vacío; para referirnos al hecho que $\tau \subseteq \tau'$, utilizaremos el término ***más débil***; en este caso, τ es más débil que τ'.

A continuación, tenemos un resultado que nos será de utilidad cuando introduzcamos el término de bases.

Proposición 1.1. Sea X un conjunto no vacío. Si $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una colección de topologías sobre X, entonces $\bigcap\limits_{\alpha\in J}\tau_\alpha$ es una topología para X.

Demostración. Lo que haremos será probar que $\tau = \bigcap\limits_{\alpha\in J}\tau_\alpha$ es una topología para X.

1. Sabemos que $X, \emptyset \in \tau_\alpha$ para todo $\alpha \in J$, entonces que $X, \emptyset \in \tau$.

2. Sean $U_i \in \tau$, con $i \in I$. Para todo $i \in I$ se cumple que $U_i \in \tau_\alpha$, para cada $\alpha \in J$. Por definición de topología $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \tau_\alpha$, para cada $\alpha \in J$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \tau$.

3. Tomemos $U_i \in \tau$, con $i = 1, \ldots, n$, por lo que $U_i \in \tau_\alpha$ para cada $\alpha \in J$; así mismo, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in J$. Por lo tanto, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

Dado que hemos probado los tres axiomas de una topología, tenemos que (X, τ) es un espacio topológico. $\square$

En ocasiones, es muy complicado definir por completo una topología τ sobre un conjunto X no vacío; en su lugar, es más fácil definir una colección más pequeña de subconjuntos de X, mediante la cual podamos obtener una topología; sin embargo, esto solo sucede bajo algunas condiciones.

Definición 1.5 (Base)**.** Sea X un conjunto no vacío. Una colección de subconjuntos de X, denotada por $\mathscr{B}$, se dice **base** para una topología de X, si satisface que:

1. Para cada $x \in X$, existe un elemento $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$.

2. Para cada $x \in B_1 \cap B_2$, donde B_1, $B_2 \in \mathscr{B}$, existe un elemento $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_3$ y $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

A los elementos de la base $\mathscr{B}$ les llamamos **básicos**.

Definición 1.6 (Topología generada por una base)**.** Sea X un conjunto no vacío, $\mathscr{B}$ una base en X. Un subconjunto U de X se dice **abierto** en X con respecto a $\mathscr{B}$, si para cada $x \in U$, existe un básico $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.La colección de abiertos en X con respecto a $\mathscr{B}$, es llamada **topología generada por la base $\mathscr{B}$**.

Observación. Sea X un conjunto no vacío. Todos los elementos básicos de una base $\mathscr{B}$, son conjuntos de la topología generada por una base.

Proposición 1.2. Sea X un conjunto no vacío y $\mathscr{B}$ una base para una topología en X. Si τ es la topología generada por $\mathscr{B}$, entonces (X,τ) es un espacio topológico.

Demostración. Para probar que (X,τ) es un espacio topológico, debemos verificar que la colección de abiertos τ es una topología.

- Si $U=\emptyset$, este es abierto por vacuidad.
- Sea $U=X$. Por definición de base, para todo $x\in X$, existe un básico $B_x\in\mathscr{B}$, tal que $x\in B_x\subseteq X$, por lo que $X\in\tau$.
- Tomemos $U_i\in\tau$, con $i\in I$, definamos
$$U=\bigcup_{i\in I}U_i.$$
Sea $x\in U$, en consecuencia, existe $i\in I$ tal que $x\in U_i$. Ya que U_i es un conjunto abierto, en particular, para $x\in U_i$ se satisface que existe un básico B_x, tal que $x\in B_x\subseteq U_i\subseteq U$. Lo anterior se cumplirá para cualquier x, comprobando que $U\in\tau$.
- Dados $U_1,U_2,\dots,U_n\in\tau$, debemos probar que, $\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i\in\tau$. Lo haremos por inducción.

  Caso base: sean U_1, $U_2\in\tau$. Si $x\in U_1\cap U_2$, entonces $x\in U_1$ y $x\in U_2$; en consecuencia existen básicos B_1, B_2 tal que $x\in B_1\subseteq U_1$ y $x\in B_2\subseteq U_2$.

  Utilizando lo anterior, tenemos que $x\in B_1\cap B_2$; por definición, existe un básico B_3, tal que $x\in B_3\subseteq B_1\cap B_2\subseteq U_1\cap U_2$. Luego, ya que $x\in U_1\cap U_2$ era arbitrario, tenemos que $U_1\cap U_2\in\tau$.

  Hipótesis inductiva: dados $U_1,\dots,U_n\in\tau$, se cumple que
$$\bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\tau.$$

  Paso inductivo: sean $U_1,\dots,U_n,U_{n+1}\in\tau$. Por hipótesis inductiva,
$$U=\bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\tau.$$

  Utilizando el caso base, dado $U,U_{n+1}\in\tau$, tenemos que $U\cap U_{n+1}\in\tau$. Que es justamente lo que se deseaba demostrar.

De esta forma se ha comprobado que la colección τ, generada por la base, $\mathscr{B}$ es una topología. $\square$

A continuación, describiremos de forma específica los abiertos de la topología generada por una base.

***Lema* 1.1** (Topología generada por una base)**.** *Sea X un conjunto no vacío y $\mathscr{B}$ una base en X. Si τ es la topología generada por $\mathscr{B}$, entonces τ es la colección de uniones arbitrarias de básicos de $\mathscr{B}$.*

Demostración. Tenemos que $\mathscr{B}$ es una base para una topología τ de X. Por definición, si $B \in \mathscr{B}$, entonces $B \in \tau$; como consecuencia, la unión arbitraria de básicos $B \in \mathscr{B}$ pertenece a τ.

Al tomar un conjunto abierto $U \in \tau$, para cada $x \in U$, existe un básico $B_x \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$; esto nos lleva a redefinir a U como

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Concluyendo que $U \in \tau$, pues es la unión arbitraria de básicos de $\mathscr{B}$. □

Observación. Dado X un conjunto no vacío, si $\mathscr{B}$ es una base para una topología en X, entonces la topología τ generada por $\mathscr{B}$ es única.

El Lema 1.1, nos dice de forma específica, como son los abiertos de un espacio topológico (X, τ) en términos de una base $\mathscr{B}$. Así mismo, nos dice como generar una topología dada una base $\mathscr{B}$ en X; sin embargo, también podemos ir en el sentido opuesto: dada una topología, encontrar la base que la genera. El siguiente resultado nos da más detalles al respecto.

***Lema* 1.2.** *Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathscr{C}$ una colección de conjuntos abiertos de X. Si todo conjunto abierto U de X, satisface que: para cada $x \in U$, existe $C \in \mathscr{C}$ tal que $x \in C \subseteq U$, entonces $\mathscr{C}$ es base para una topología en X la cual se denota por τ'. Además, la topología generada por la base $\mathscr{B}$ coincide con la topología original.*

Demostración. Primero debemos probar que $\mathscr{C}$ es una base para X, para ello verificaremos que cumpla los dos axiomas de base.

1. Sea $x \in X$ arbitrario. Dado que X es en sí mismo un conjunto abierto, por hipótesis, se garantiza que existe un elemento $C \in \mathscr{C}$ tal que $x \in C \subseteq X$. Esto prueba el primer axioma de una base.

2. Tomemos $x \in C_1 \cap C_2$, con $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$. Por definición $C_1, C_2 \in \tau$, entonces $C_1 \cap C_2 \in \tau$. Por hipótesis, podemos garantizar que existe un elemento $C_3 \in \mathscr{C}$ tal que $x \in C_3 \subseteq C_1 \cap C_2$, probando el segundo axioma de una base.

De momento, hemos comprobado que la colección $\mathscr{C}$ es una base para X, denotemos por τ' a la topología generada por la base $\mathscr{C}$. Ahora, vamos a comprobar que dicha topología coincide con la topología original.

Tomemos un abierto en $U \in \tau$. Por hipótesis, para cada $x \in U$, existe un básico $C \in \mathscr{C}$ tal que $x \in C \subseteq U$; esto prueba que U es un abierto en τ', por definición de topología generada por una base.

Ahora, sea un abierto U en τ'. U se puede escribir como la unión arbitraria de elementos de $C \in \mathscr{C}$; además, si $C \in \mathscr{C}$, entonces $C \in \tau$. De esta forma, se garantiza que $U \in \tau$.

De esta forma se ha comprobado que la topología τ', coincide con la topología original. Es decir, $\tau = \tau'$. □

El resultado anterior es de suma importancia, pues nos dice como obtener una base para una topología τ, de un conjunto X, no vacío; sin embargo, podemos tomar una colección de abiertos de una topología τ que cumplan con ser una base y con esta generar una topología τ', pero esta topología no siempre coincidirá con τ (solamente lo hará cuando se cumpla lo establecido en el Lema 1.2). Para esclarecer lo mencionado anteriormente tenemos la siguiente Proposición.

Proposición 1.3. Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathscr{B}$ base de una topología en X. Si todos los elementos básicos de $\mathscr{B}$ son abiertos en τ, entonces la topología generada por $\mathscr{B}$, es más débil que la topología τ.

Demostración. Sea τ' la topología generada por $\mathscr{B}$. Sabemos que los elementos de la topología τ' son uniones arbitrarias de básicos $B \in \mathscr{B}$. Sin perdida de generalidad, podemos asumir que un conjunto $U \in \tau'$, es de la forma

$$U = \bigcup_{i \in I} B_i, \quad B_i \in \mathscr{B}.$$

Dado que cada básico $B_i \in \tau$, tenemos que $U \in \tau$; de esta forma, probamos que $\tau' \subseteq \tau$. □

Las bases son muy útiles, sobre todo a la hora de hablar sobre abiertos en un espacio topológico (X, τ); por ejemplo, dadas las bases de ciertas topologías sobre un mismo conjunto X, no vacío, podemos utilizarlas para comparar las topologías generadas por dichas bases.

***Lema* 1.3.** *Sea X un conjunto no vacío, $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$ bases para topologías en X, denotadas por τ y τ', respectivamente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *τ es más débil que τ'.*

2. *Sea $x \in X$ arbitrario y $B \in \mathscr{B}$. Si $x \in B$, entonces existe un básico $B' \in \mathscr{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B$.*

Demostración.

- "1 $\Longrightarrow$ 2" Por hipótesis, $\tau \subseteq \tau'$. Sean $x \in X$ y $B \in \mathscr{B}$, de modo que $x \in B$. Dado que τ es la topología generada por $\mathscr{B}$, se tiene que $B \in \tau$. Utilizando la hipótesis que $\tau \subseteq \tau'$, obtenemos que $B \in \tau'$.

- "2 $\Longrightarrow$ 1" Sea $U \in \tau$. Para todo $x \in U$ existe un básico $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Lo anterior, garantiza las hipótesis de la condición 2; en consecuencia, existe un básico $B' \in \mathscr{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B \subseteq U$. Probando que U es un abierto en τ'.

□

De momento, hemos encontrado otra forma de definir una topología, la cual consiste en tomar una colección de subconjuntos que cumple los axiomas de una base. Una pregunta que puede surgir es: ¿Existe una forma más fácil de obtener una topología? La respuesta es que sí, podemos tomar una colección de subconjuntos de X y con esta generar una topología; a diferencia de una base, lo interesante de esta colección, es el hecho que esta no debe cumplir ninguna condición que sea sumamente complicada de obtener.

Definición 1.7 (Subbase)**.** Sea X un conjunto no vacío. Una **subbase** es una colección de subconjuntos de X, denotada por $\mathcal{S}$ tal que la unión de todos los conjuntos de $\mathcal{S}$ es igual a X. Los elementos de la subbase $\mathcal{S}$ son llamados **subbásicos**.

Proposición 1.4. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{S}$ una subbase de X. La siguiente colección,

$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \;\middle|\; S_i \in \mathcal{S}, i = 1, \ldots, n \right\}$$

es una base para una topología en X.

Nota. Todo subbásico $S \in \mathcal{S}$, es un elemento de la colección $\mathscr{B}$; pues, es la intersección de un solo conjunto de la subbase.

Demostración. Probaremos que la colección $\mathscr{B}$, cumple todos los axiomas de una base.

1. Sea $x \in X$ arbitrario. Por hipótesis, $\mathcal{S}$ es una subbase, entonces
$$X = \bigcup_{i \in I} S_i.$$
Debido a esta igualdad, se garantiza que existe un $S_i \in \mathcal{S}$ tal que $x \in S_i$. Por definición, $S_i \in \mathscr{B}$, entonces existe un básico $B = S_i \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$. Cumpliendo el primer axioma de base.

2. Sea $x \in B_1 \cap B_2$, con B_1, $B_2 \in \mathscr{B}$. Por definición de los básicos en $\mathscr{B}$, se tiene que
$$B_1 \cap B_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} S_i' \right), \quad \text{con } S_i, S_i' \in \mathcal{S}.$$
La igualdad anterior garantiza que, $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$; pues, $B_1 \cap B_2$ se ha escrito como una intersección finita de elementos de $\in \mathcal{S}$. Probando así el segundo axioma de base.

□

Dada una subbase $\mathcal{S}$, podemos generar una topología para un conjunto X no vacío. A continuación estudiaremos la forma de generarla.

Definición 1.8 (Topología generada por una subbase)**.** Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{S}$ una subbase de X. La colección,
$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \;\middle|\; S_i \in \mathcal{S}, i = 1, \ldots, n \right\}$$
es una base para una topología en X, denotada por τ. A esta topología le llamamos **topología generada por la subbase $\boldsymbol{\mathcal{S}}$**.

Proposición 1.5. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{S}$ una subbase para una topología en X. Si τ es la topología generada por la subbase $\mathcal{S}$, entonces (X, τ) es un espacio topológico.

Demostración. Con la subbase $\mathcal{S}$, definimos la base
$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \;\middle|\; S_i \in \mathcal{S}, i = 1, \ldots, n \right\}.$$
Con dicha base generamos una topología τ en X, por la Proposición 1.2, (X, τ) es un espacio topológico. □

Proposición 1.6. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{S}$ una subbase de X. Si τ es la topología generada por la subbase $\mathcal{S}$, entonces τ se define como

$$\tau = \left\{ \bigcup_{i\in I} B_i \;\middle|\; B_i \in \mathscr{B}, \forall i \in I \right\}.$$

Donde $\mathscr{B}$, es la base que se construye a partir de la subbase $\mathcal{S}$.

Demostración. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{S}$ una subbase de X. La topología τ generada por la subbase, se crea mediante la base

$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{i=k}^{n} S_i \;\middle|\; S_i \in \mathcal{S}, i = k, \ldots, n \right\}.$$

Denotemos por τ, a la topología generada por la base $\mathscr{B}$. Por el Lema 1.1, la colección τ se puede definir como

$$\tau = \left\{ \bigcup_{i\in I} B_i \;\middle|\; B_i \in \mathscr{B}, \forall i \in I \right\}.$$

□

Cuando hablamos de una base sobre un conjunto no vacío X, observamos dos casos: dada una base $\mathscr{B}$, con ella podemos generar una topología, y dada una topología τ, podemos encontrar la base que la genera. Por otro lado, se estudió que podemos tomar una colección de abiertos que cumplan con ser un base y posteriormente generar una topología **más fina** que la original, ¿sucederá esto mismo con las subbases?, la respuesta es que sí. Para ello tenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 1.7. Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{S}$ una subbase. Si todos los elementos de $\mathcal{S}$ son abiertos, entonces dicha subbase genera una topología τ' tal que $\tau' \subseteq \tau$.

Demostración. La subbase $\mathcal{S}$, genera la colección,

$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \;\middle|\; S_i \in \mathcal{S} \right\}.$$

Que es una base en X. Por la Proposición 1.4, dicha base genera una topología en X denotada por τ'; luego, aplicando la Proposición 1.3, ya que $\mathscr{B} \subseteq \tau'$, tenemos que $\tau' \subseteq \tau$, que es justamente lo que deseábamos demostrar. □

Sea (X, τ) un espacio topológico, una pregunta que también puede surgir es ¿La topología generada por una subbase $\mathcal{S}$ sobre X denotada por τ coincidirá por completo con la topología original τ? En la prueba anterior verificamos $\tau' \subseteq \tau$; sin embargo, no siempre se cumple que $\tau \subseteq \tau'$. Veamos el siguiente ejemplo.

***Ejemplo* 1.2.** Sea $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$ un espacio topológico. La topología usual es generada por la base

$$\mathscr{B} = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}.$$

Sea $\mathcal{S}_1 = \{(-\infty, a)|a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, \infty)|a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \tau_{\text{usual}}$, esta colección es una subbase de $\mathbb{R}$, y con ella generamos la base

$$\mathscr{B}_1 = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \;\middle|\; S_i \in \mathcal{S}_1 \right\}.$$

Sea τ_1 la topología generada por $\mathscr{B}_1$. Por la Proposición 1.3, tendremos que $\tau_1 \subseteq \tau_{\text{usual}}$.

Para probar que $\tau_{\text{usual}} \subseteq \tau_1$, tomamos un básico (a,b) en $\mathscr{B}$. Notamos que

$$(a,b) = (-\infty, a) \cap (b, \infty).$$

Ya que $(-\infty, a) \cap (b, \infty)$ es un básico de $\mathscr{B}_1$, se garantiza la existencia de un básico

$$B_1 = (-\infty, a) \cap (b, \infty) \in \mathscr{B}_1$$

tal que $x \in B_1 \subseteq (a,b)$, lo cual verifica que $\tau_{\text{usual}} \subseteq \tau_1$. En este caso la topología usual y la topología generada por la subbase $\mathcal{S}_1$ coinciden.

Sea $\mathcal{S}_2 = \{(-\infty, a)|a \in \mathbb{R}\}\mathcal{S}_2 \subseteq \tau_{\text{usual}}$, esta colección es una subbase de $\mathbb{R}$, con la cual generamos la base

$$\mathscr{B}_2 = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} (-\infty, a_i) \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sea τ_2 la topología generada por $\mathscr{B}_2$, por la Proposición 1.3 tenemos que $\tau_2 \subseteq \tau_{\text{usual}}$.

Ahora, probaremos que $\tau_{\text{usual}} \subseteq \tau_2$. Para ello, tomamos el básico $(a,b) \in \mathscr{B}$. Notamos que (a,b) no se puede escribir como intersección finita de básicos de $\mathscr{B}_2$. La igualdad más cercana que tenemos es

$$\bigcap_{i=1}^{n} (-\infty, a_i) = (-\infty, c), \qquad \text{donde} \qquad c = \min\{a_i | i = 1, \ldots, n\}.$$

Lo anterior, no dice que no hay forma de garantizar que, $(-\infty, c) \subseteq (a,b)$, pues esto solo se cumplirá cuando

$$(a,b) = (-\infty, b).$$

Ya que los básicos de $\mathscr{B}$ no solo incluyen a los semi-intervalos, no podemos garantizar que $\tau_{\text{usual}} \subseteq \tau_2$.

De esta forma, se concluye que la topología no coincide con la topología generada por la subbase $\mathcal{S}_2$.

Del ejemplo anterior, obtuvimos que dado un espacio topológico (X, τ), la topología generada por una subbase no siempre coincide con la topología original; sin embargo, existe un resultado que nos permite saber cuando estas dos topologías coinciden.

***Lema* 1.4.** *Sea (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{S}$ una subbase de X y $\mathscr{B}$ la base generada por $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S} \subseteq \tau$ y para todo conjunto abierto U en τ, se cumple que: para cada $x \in U$, existe un básico $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$, entonces, la topología generada por la subbase y la original coinciden.*

Demostración. La subbase $\mathcal{S}$, genera una base denotada por $\mathscr{B}$, con la cual obtenemos la topología denotada por τ'.

Por hipótesis, $\mathcal{S} \subseteq \tau$ y para todo conjunto abierto $U \in \tau$, se cumple que: para cada $x \in U$ existe un básico $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Lo anterior, satisface todas las hipótesis del Lema 1.2, entonces $\tau = \tau'$. □

De momento, hemos definido una base $\mathscr{B}$ y una subbase $\mathcal{S}$, para un conjunto X no vacío. Así mismo, se han visto formas de encontrarlas dada una topología. A continuación, estudiaremos una propiedad que nos habla sobre la minimalidad de las topologías generadas por una base; en el sentido, que si $\mathscr{B}$ es una base que genera una topología, esta es la topología más pequeña en términos de inclusión que contiene a la colección $\mathscr{B}$.

***Lema* 1.5.** *Sea X un conjunto no vacío y $\mathscr{B}$ base para una topología en X. La topología generada por $\mathscr{B}$ es igual a la intersección de todas las topologías en X que contienen a $\mathscr{B}$.*

Demostración. Denotamos por $\mathscr{C}$, a la colección de todas las topologías de X que contienen a $\mathscr{B}$, definida como

$$\mathcal{C} = \{\tau_i \mid \text{ tal que } \mathscr{B} \subseteq \tau_i, \text{ con } i \in I\}.$$

Por la Proposición 1.1, $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ es una topología para X. Sea τ' a la topología generada por la base $\mathscr{B}$.

Debemos probar que $\tau = \tau'$. Sea U un abierto en τ, así que $U \in \tau_i$ para todo $i \in I$. Por definición, $\mathscr{B} \subseteq \tau'$, entonces $\tau' \in \mathcal{C}$. Utilizando lo anterior, tenemos que $U \in \tau'$; lo cual prueba que $\tau \subseteq \tau'$.

Veamos la otra implicación. Tomemos un abierto $U \in \tau'$, por la Proposición 1.6,

$$U = \bigcup_{i \in I} B_i, \text{ con } B_i \in \mathscr{B}.$$

Dado que $\mathscr{B}_i \subseteq \tau_i, \forall i \in I$, entonces $U \in \tau$. Probando de esta forma que $\tau = \tau'$. □

Proposición 1.8. Sea X un conjunto no vacío y $\mathscr{B}$ una base en X. Si τ es la topología generada por $\mathscr{B}$, entonces τ es la topología más pequeña (en términos de inclusión) que contiene a $\mathscr{B}$.

Demostración. Haremos dicha prueba por contradicción. Asumamos que existe otra topología τ' sobre X, que es la más pequeña tal que $\mathscr{B} \subseteq \tau'$; por el Lema 1.5, la topología generada por la base $\mathscr{B}$, denotada por τ es igual a la intersección de todas las topologías $\tau_i, i \in I$ tal que $\mathscr{B} \subseteq \tau_i$; en consecuencia, $\tau \subseteq \tau'$; sin embargo, esto contradice el hecho que τ' es la topología más pequeña que contiene a la colección $\mathscr{B}$. □

Del mismo modo daremos los resultados anteriores para subbases.

***Lema* 1.6.** *Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{S}$ una subbase para una topología X. La topología generada por $\mathcal{S}$ es igual a la intersección de todas las topologías en X que contienen a $\mathcal{S}$.*

Demostración. Denotamos por $\mathscr{C}$ a la colección de todas las topologías de X que contienen a $\mathcal{S}$. La cual se define como

$$\mathcal{C} = \{\tau_i \mid \text{ tal que } \mathcal{S} \subseteq \tau_i, \text{ con } i \in I\}.$$

Por la Proposición 1.1, $\tau = \bigcap\limits_{i \in I} \tau_i$ es una topología para X.

Sea τ' la topología generada por la subbase $\mathcal{S}$, para construirla es necesaria la siguiente base $\mathscr{B}$,

$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \;\middle|\; S_i \in \mathcal{S}, i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Por construcción, $\mathcal{S} \subseteq \tau$ y por ende $\mathscr{B} \subseteq \tau$; con dicha inclusión, garantizamos que $\mathscr{B} \subseteq \tau_i, i \in J$. Recordemos que τ' es la topología generada por la base $\mathscr{B}$, aplicando el Lema 1.5 podemos concluir que $\tau' = \tau$. □

Proposición 1.9. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{S}$ una subbase para una topología en X. Si τ es la topología generada por $\mathcal{S}$, entonces τ es la topología más pequeña (en términos de inclusión) que contiene a $\mathcal{S}$.

Demostración. Haremos dicha prueba por contradicción, asumamos que existe otra topología τ' sobre X que es la más pequeña tal que $\mathcal{S} \subseteq \tau'$.

Por el Lema 1.6, la topología τ generada por la subbase $\mathcal{S}$ es igual a la intersección de todas las topologías τ_i, $i \in I$ tal que $\mathcal{S} \subseteq \tau_i$. En consecuencia, $\tau \subseteq \tau'$, lo cual contradice el hecho que τ' es la topología más pequeña que contiene a la subbase $\mathcal{S}$. □

Inicialmente, hemos definido espacios topológicos; sin embargo, como es usual en Matemática, podemos tener la noción de un **"subespacio topológico"**, los cuales estudiaremos a continuación.

Definición 1.9 (Topología de subespacio)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico e Y un subconjunto de X. La colección,

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$$

es una topología en Y, la cual es llamada **topología de subespacio**. Bajo esta topología, Y es llamado **subespacio de** X; de forma específica, los conjuntos abiertos en Y consisten en todas las intersecciones de Y con subconjuntos abiertos U en X.

***Lema* 1.7.** *Sea (X, τ) un espacio topológico e Y un subconjunto de X. Si la topología τ es generada por una base $\mathscr{B}$, entonces la colección,*

$$\mathscr{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathscr{B}\},$$

es una base para la topología de subespacio τ_Y.

Demostración. Sea V un conjunto abierto en τ_Y, por lo que

$$V = U \cap Y, \quad \text{con} \quad U \in \tau.$$

Sea $y \in V$, por definición $y \in U$, $y \in Y$. Por hipótesis, $\mathscr{B}$ genera a la topología τ; dado que $y \in U$, se garantiza la existencia de un básico tal que

$$y \in B \subseteq U \quad \Longrightarrow \quad y \in B \cap Y \subseteq U \cap Y.$$

Lo cual indica que todo abierto de la topología de subespacio contiene un elemento de la colección $\mathscr{B}_Y$, es decir, hemos probado que $\mathscr{B}_Y \subseteq \tau_Y$.

Ya demostramos que $\mathscr{B}_Y \subseteq \tau_Y$, así que, se satisfacen todas las hipótesis del Lema 1.2; en consecuencia, si τ'_Y es la topología generada por $\mathscr{B}_Y$, sucederá que $\tau'_Y = \tau_Y$. □

Los abiertos de la topología de subespacio, tienen una relación con respecto a la topología original. La cual estudiaremos en el siguiente lema.

***Lema* 1.8.** *Sea (X, τ) un espacio topológico, Y un subespacio de X y U un conjunto abierto en la topología de subespacio de Y. U es abierto en τ si y solamente si Y es abierto en τ.*

Demostración. Denotemos por τ_Y a la topología de subespacio, como hipótesis general, $U \in \tau_Y$.

- " $\Longleftarrow$ " Tenemos que $U = V \cap Y$, donde $V \in \tau$. Por hipótesis, $Y \in \tau$, así que $U \in \tau$.
- " $\Longrightarrow$ " Se sabe que $U = V \cap Y$, donde $V \in \tau$; el conjunto U, está escrito como una intersección finita de conjuntos abiertos en τ, por ello $Y \in \tau$.

□

Nota. Este resultado también se puede demostrar para conjuntos cerrados.

Definición 1.10 (Conjunto cerrado)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto A de X, se dice **cerrado** si su complemento es abierto en X.

Observación. Una vez definido un conjunto cerrado sobre un espacio topológico (X, τ), podemos decir que un conjunto A, es abierto si su complemento es cerrado.

***Ejemplo* 1.3.**

1. El conjunto $[a, b]$ es cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$, pues

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty).$$

   Notamos, que su complemento se puede escribir como la unión de dos abiertos en la topología usual, por lo que $\mathbb{R} \setminus [a, b] \in \tau_{\text{usual}}$.

2. Sea X un conjunto, no vacío, dotado con la topología discreta. Sea A un subconjunto de X, por definición,

$$X \setminus A \subseteq X \in \mathcal{P}(X).$$

   Lo cual nos permite concluir que su complemento es abierto; es decir, A es un conjunto cerrado. En general hemos verificado que todo conjunto de la topología discreta es tanto abierto como cerrado.

A continuación, veremos un resultado que nos comenta como son los conjuntos cerrados en un subespacio de un espacio topológico.

Teorema 1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico e Y un subespacio de X. Un conjunto A, es cerrado en la topología de subespacio de Y si y solamente si $A = B \cap Y$, donde B es un conjunto cerrado en τ.*

Demostración.

- "$\Longrightarrow$" Asumamos que A es de la forma $A = Y \cap B$, donde B es cerrado en τ. Tenemos la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned} Y \setminus A &= Y \cap (A^{\complement}) \\ &= Y \cap (Y \cap B)^{\complement} \\ &= Y \cap ((Y^{\complement}) \cup (B^{\complement})) \\ &= (Y \cap (Y^{\complement})) \cup (Y \cap (B^{\complement})) \\ &= \emptyset \cup (Y \cap (B^{\complement})) \\ &= (Y \cap (B^{\complement})) \\ &= Y \cap (X \setminus B). \end{aligned}$$

  B es cerrado en τ, así que $X \setminus B$ es abierto en τ; en consecuencia

$$Y \cap (X \setminus B) = Y \setminus A \in \tau_Y.$$

- "$\Longleftarrow$"Por hipótesis, A es cerrado en Y, así que, $Y \setminus A$ es abierto en Y; en consecuencia, $Y \setminus A = U \cap Y$, donde $U \in \tau$. Tenemos la siguiente igualdad de conjuntos

$$\begin{aligned} Y \setminus (Y \setminus A) &= Y \setminus (U \cap Y) \\ A &= Y \cap (U \cap Y)^{\complement} \\ A &= Y \cap (U^{\complement} \cup Y^{\complement}) \\ A &= (Y \cap U^{\complement}) \cup (Y \cap Y^{\complement}) \\ A &= (Y \cap U^{\complement}) \cup (\emptyset) \\ A &= Y \setminus U. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} Y \setminus U &= Y \cap U^{\complement} \\ &= Y \cap (X \cap U^{\complement}) \\ &= Y \cap (X \setminus U). \end{aligned}$$

Hemos demostrado que $A = Y \cap (X \setminus U)$, donde $X \setminus U$ es cerrado en τ. Que es lo que deseábamos probar.

□

***Lema* 1.9.** *Sea (X, τ) un espacio topológico, Y un subespacio de X y C un conjunto cerrado en Y. C es cerrado en (X, τ) si y solamente si Y es cerrado en (X, τ).*

Demostración.

- " $\Longleftarrow$ " Sea C cerrado en (Y, τ_Y), así que $C = B \cap Y$, donde B es un cerrado en (X, τ). Por hipótesis Y es cerrado en (X, τ), entonces C es cerrado en (X, τ).

- " $\Longrightarrow$ " Por hipótesis, Y es cerrado en (X, τ). Si C es cerrado en (Y, τ_Y), entonces $C = C' \cap Y$, donde C' es cerrado en τ. Hemos visto que C es la intersección de conjuntos cerrados de τ, así que C es cerrado en (X, τ).

□

Cuando hablamos de conjuntos cerrados es muy usual definir la cerradura de un conjunto, pues en ocasiones, trabajar con ella facilita algunos resultados.

Definición 1.11 (Cerradura e interior de un conjunto)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un subconjunto de X. El **interior** de A, es la unión de todos los conjuntos abiertos que contienen a A, el cual se denota por $\operatorname{Int}(A)$ ó A°; la **cerradura** de A, es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A, la cual se denota por $\overline{A}$.

Nota. De la definición anterior tenemos las siguientes inclusiones. Sea A un subconjunto de un espacio topológico (X, τ), entonces

$$A \subseteq \overline{A}, \qquad \operatorname{Int}(A) \subseteq A.$$

Con dichas inclusiones, damos paso a la siguiente proposición; con la cual daremos otra caracterización para los conjuntos abiertos y cerrados.

Proposición 1.10. Sea (X, τ) un espacio topológico y A, B subconjuntos de X. Si A es abierto y B es cerrado, entonces

$$A = \mathrm{Int}(A), \qquad B = \overline{B}.$$

En el Teorema 1.3, veremos una caracterización de un conjunto cerrado en (X, τ).

***Teorema* 1.3.** *Sea un espacio topológico (X, τ) y A un subconjunto de X.*

a) $x \in \overline{A}$ si y solamente si todo vecindario abierto U de x, satisface que $U \cap A \neq \emptyset$.

b) Si la topología τ es generada por una base $\mathscr{B}$, entonces $x \in \overline{A}$ si y solamente si para cada básico $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$, se verifica que $B \cap A \neq \emptyset$.

Demostración.

a) Equivalentemente, probaremos que $x \notin \overline{A}$ si y solamente si existe un vecindario abierto U de x tal que $U \cap A = \emptyset$.

- " $\Longrightarrow$ " Si $x \notin \overline{A}$, entonces $x \in X \setminus \overline{A}$. Por construcción $X \setminus \overline{A}$ es un vecindario abierto de x, en consecuencia,

  $$\overline{A} \cap (X \setminus \overline{A}) = \emptyset.$$

  Además, tenemos las siguientes inclusiones

  $$A \cap (X \setminus \overline{A}) \subseteq \overline{A} \cap (X \setminus \overline{A}) = \emptyset.$$

  Obteniendo que $A \cap (X \setminus \overline{A}) = \emptyset$, lo cual garantiza que existe un vecindario abierto de x que no interseca a A.

- " $\Longleftarrow$ " Por hipótesis, existe un vecindario abierto U de x tal que $U \cap A = \emptyset$; en consecuencia, $X \setminus U$ es cerrado, donde $A \subseteq X \setminus U$.

  Por definición de cerradura, debe suceder que $\overline{A} \subseteq X \setminus U$; ya que $x \notin X \setminus U$, entonces $x \notin \overline{A}$.

b) Ahora probaremos que $x \notin \overline{A}$ si y solamente si para cada básico $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$, se verifica que $B \cap A = \emptyset$. Como hipótesis, la topología τ es generada por una base $\mathscr{B}$.

- " $\Longrightarrow$ " Si $x \notin \overline{A}$, entonces $x \in X \setminus \overline{A}$. Por construcción $X \setminus \overline{A}$ es un vecindario abierto de x; luego, por definición de base existe un básico $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subseteq X \setminus \overline{A}$. Por otro lado, notamos que $\overline{A} \cap (X \setminus \overline{A}) = \emptyset$, con lo cual se verifican las siguientes inclusiones

  $$A \cap B \subseteq A \cap (X \setminus \overline{A}) \subseteq \overline{A} \cap (X \setminus \overline{A}) = \emptyset.$$

  Obteniendo que $A \cap B = \emptyset$, lo cual garantiza la existencia de un básico que contiene a x el cual no interseca a A.

- " $\Longleftarrow$ " Por hipótesis existe un básico $B \in \mathscr{B}$ que contiene a x tal que no interseca a A; en consecuencia $X \setminus B$ es un conjunto cerrado, donde $A \subseteq X \setminus B$. Por definición de cerradura debe suceder que $\overline{A} \subseteq X \setminus B$; por lo que, si $x \notin X \setminus B$ en consecuencia $x \notin \overline{A}$.

$\square$

1.2. Continuidad

En el cálculo, de forma general se estudian las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$; sin embargo, la continuidad se vuelve un tanto más complicada de encontrar cuando las funciones se trabajan sobre espacios más generales, tales como: los espacios topológicos. En esta ocasión estudiaremos la continuidad de forma general.

Definición 1.12 (Continuidad de una función)**.** Sean (X, τ) e (Y, τ') espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice **continua**, si para todo conjunto abierto V en Y se cumple que $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

Nota. La notación $f^{-1}(A)$ denota la imagen inversa o preimagen de un conjunto. Definamos una función $f : X \longrightarrow Y$ y $A \subseteq Y$. La imagen inversa de A o la pre imagen de A, se define como

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \quad | \quad f(x) \in A\}.$$

Anteriormente, hemos hablado de bases, se ha podido observar que hay muchos resultados cuya prueba es más fácil al utilizarlas. Para nuestra suerte, el probar la continuidad no es la excepción.

Definición 1.13. Sean (X, τ) e (Y, τ') espacios topológicos,

1. Si la topología τ' es generada por una base $\mathscr{B}$, entonces la función $f : X \longrightarrow Y$ será continua, si todo básico $B \in \mathscr{B}$ cumple que $f^{-1}(B)$ es abierto en X.

2. Si la topología τ' es generada por una subbase $\mathcal{S}$, entonces la función $f : X \longrightarrow Y$ será continua, si todo subbásico $S_i \in \mathcal{S}$ cumple que $f^{-1}(S_i)$ es un conjunto abierto en X.

Algo importante del concepto de continuidad, es el hecho que ser continua o no, depende de la topología que tome tanto el conjunto de partida como el conjunto de llegada, (X, τ), (Y, τ') respectivamente. Para esclarecer lo anterior, veamos el siguiente ejemplo.

***Ejemplo* 1.4.** Estudiar la continuidad de la función identidad, $id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Primero analizaremos la función $id : (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_\ell)$. En este caso, el conjunto de partida se trabaja con la topología usual y el conjunto de llegada con la topología de límite inferior.

  La topología usual es generada por la base

$$\mathscr{B} = \{(a, b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Por otro lado, la topología de límite inferior es generada por la base

$$\mathscr{B}_\ell = \{[a,b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Sea $[a,b)$ un básico de $\mathscr{B}_\ell$, notamos que $[a,b)$ no es abierto en τ_{usual} pues, $id^{-1}([a,b)) = [a,b)$. Evidentemente, este conjunto no es abierto en τ_{usual}. Así que id no es continua.

- Ahora analizaremos la función $id : (\mathbb{R}, \tau_\ell) \longrightarrow (\mathbb{R}, \text{usual})$. A diferencia de la función anterior, el conjunto de partida se trabaja con la topología de límite inferior y en el conjunto de llegada con la topología usual.

  Sea (a,b) un básico de $\mathscr{B}$. Notamos que $id^{-1}((a,b)) = (a,b)$ es abierto en τ_ℓ, pues se puede escribir como la intersección de elementos básicos de $\mathscr{B}_\ell$

  $$id^{-1}((a,b)) = (a,b) = \bigcap_{i=1}^{n} \left[a + \frac{1}{n}, b\right).$$

  Así que, $(a,b) \in \tau_\ell$. Probando de esta forma que id es continua.

Sabemos que la topología de límite inferior es más débil que la topología usual. En este caso, se pudo observar que la función identidad es continua, cuando la topología del conjunto de llegada es más débil que la topología del conjunto de partida.

Proposición 1.11. Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ una aplicación continua, se tiene que:

1. Al sustituir una topología más fuerte en el conjunto de partida, se preserva la continuidad de la función f.
2. Al sustituir una topología más débil en el conjunto de llegada, se preserva la continuidad de la función f.

Demostración.

1. Sea τ_1 una topología del conjunto X, no vacío, tal que $\tau \subseteq \tau_1$. Lo que haremos, será verificar que $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau')$ es una función continua. Por hipótesis $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ es continua; en consecuencia, si $U \in \tau'$, entonces $f^{-1}(U) \in \tau$. Como $\tau \subseteq \tau_1$, entonces $f^{-1}(U) \in \tau_1$. De esta forma, probamos que la función $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau)$ es continua.
2. Sea τ_1' una topología del conjunto Y, no vacío, tal que $\tau_1' \subseteq \tau'$. Probaremos que $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_1')$ es una función continua. Por hipótesis, $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ es continua; en consecuencia, si $U \in \tau'$, entonces $f^{-1}(U) \in \tau$. Por construcción $\tau_1' \subseteq \tau'$, en particular al tomar $U \in \tau_1'$, se cumplirá que $f^{-1}(U) \in \tau$. Así, hemos probado que $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_1')$ es continua.

$\square$

Hay diversas formas equivalentes, para mostrar que una función sobre espacios topológicos es continua, para ello tenemos el siguiente teorema.

***Teorema* 1.4.** *Sean (X, τ), e (Y, τ') espacios topológicos. Definamos la función, $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) f es continua.

b) Si A es abierto en X, entonces $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

c) Si B es cerrado en Y, entonces $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.

d) Sea $x \in X$. Si V es un vecindario abierto $f(x)$, entonces existe un vecindario abierto U de x tal que $f(U) \subseteq V$.

Demostración. La demostración de este teorema será omitida. Véase [7], Capítulo 2, Sección 18, Teorema 18.1, página 104.

□

***Teorema* 1.5.** *Sean (X, τ) e (Y, τ') espacios topológicos. Definamos la función $f : X \longrightarrow Y$. Si f es continua y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente a x, entonces*

$$f(x_n) \longrightarrow f(x), \quad n \to \infty.$$

En particular, cuando X sea metrizable, si tenemos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a x tal que

$$f(x_n) \longrightarrow f(x), \quad n \to \infty,$$

entonces f es continua.

Demostración. La demostración de este teorema será omitida. Véase [7], Capítulo 2, Sección 21, Teorema 21.3, página 130. □

Podemos construir funciones continuas a partir de una función continua; para ser más específicos sobre que construcciones podemos hacer, tenemos el siguiente resultado.

***Teorema* 1.6.** *Sean (X, τ_1), (Y, τ_2), (Z, τ_3) espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, tenemos que:*

a) Si A es un subespacio de X, entonces la función $f : A \longrightarrow Y$ es continua.

b) Si Z es un subespacio de Y tal que $f(X) \subseteq Z$, entonces la función $f : X \longrightarrow Z$ es continua.

c) Si Z es un espacio tal que $Y \subseteq Z$, entonces la función $f : X \longrightarrow Z$ es continua.

Demostración. La demostración de este teorema será omitida. Véase [7], Capítulo 2, Sección 18, Teorema 18.1, página 108.

□

Una noción que viene acompañada de la continuidad son los homeomorfismos, los cuales definimos a continuación.

Definición 1.14 (Homeomorfismo)**.** Sean (X, τ) e (Y, τ') espacios topológicos. Definimos la función, $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ y su inversa $f^{-1} : (Y, \tau') \longrightarrow (X, \tau)$. Si ambas funciones son continuas, decimos que f es un **homeomorfismo**.

La importancia de los homemorfismos, es el hecho que nos brinda una correspondencia biyectiva entre dos espacios topológicos; con esto preservamos las propiedades topológicas, en el sentido que: si (X, τ) cumple alguna propiedad topológica, el espacio (Y, τ) también las cumplirá.

1.3. Topología producto

Si (X, τ) e (Y, τ') son espacios topológicos, existe una forma estándar de definir una topología en el producto cartesiano $X \times Y$. En esta sección, estudiaremos diversas topologías para dicho espacio y algunas de sus propiedades.

Definición 1.15. Sean (X, τ) e (Y, τ') espacios topológicos. La **topología producto** en $X \times Y$ es la topología generada por la base $\mathscr{B}$, la cual consiste de los conjuntos de la forma $U \times V$, donde U y V son abiertos en X e Y, respectivamente.

Anteriormente, hemos hablado de subbases de un espacio topológico; como se puede esperar, hay una forma de expresar la topología producto en términos de una subbase, para ello debemos definir las siguientes funciones llamadas proyecciones.

Definición 1.16 (Proyecciones)**.** Sean X e Y conjuntos no vacíos. Definimos las funciones π_1 y π_2,

$$\begin{aligned} \pi_1 : X \times Y &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \pi_2 : X \times Y &\longrightarrow Y \\ (x, y) &\longmapsto y. \end{aligned}$$

Estas funciones son llamadas **proyecciones** de $X \times Y$, al primer y segundo factor, X e Y respectivamente.

Lo que haremos como siguiente paso, es utilizar las imágenes inversas de π_1 y π_2, para mostrar otra forma de generar la topología producto.

Sean (X, τ), (Y, τ') espacios topológicos. Tomemos U y V abiertos en X e Y, respectivamente. Notamos que

$$\pi_1^{-1}(U) = U \times Y, \qquad \pi_2^{-1}(U) = X \times V.$$

Por definición de la topología producto, $U \times Y$, $X \times V$ son abiertos en $X \times Y$; además, son básicos de la base que genera a la topología producto, la cual denotamos por $\mathscr{B}$.

Proposición 1.12. Sean (X, τ) e (Y, τ'), espacios topológicos. La colección,

$$S = \{\pi_1^{-1}(U) \mid U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) \mid V \text{ es abierto en } Y\}$$

es una subbase para la topología producto de $X \times Y$.

Demostración. Dada la subbase $\mathcal{S}$, construimos la base $\mathscr{B}_S$ y con ella generamos la topología τ_1, que es la topología generada por la subbase $\mathcal{S}$. Sea τ_2 la topología producto; queremos probar que $\tau_1 = \tau_2$. Para comenzar, tenemos que

$$\begin{aligned} S &= \{\pi_1^{-1}(U) \mid U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) \mid V \text{ es abierto en } Y\}, \\ &= \{U \times Y \mid U \text{ es abierto en } X\} \cup \{X \times V \mid V \text{ es abierto en } Y\}. \end{aligned}$$

Lo anterior garantiza que $\mathcal{S} \subseteq \tau_2$, aplicando la Proposición 1.7 se tiene que $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Por otro lado, la topología producto τ_2, es generada por la base

$$\mathscr{B} = \{U \times V \mid U, V \text{ abiertos en } X, Y\}.$$

Sea $B = U \times V \in \mathscr{B}$, un básico arbitrario. Tenemos que

$$\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) = (U \times Y) \cap (X \times V) = (U \cap X) \times (V \cap Y) = U \times V = B.$$

Ya que hemos reescrito a $U \times V$ como un básico de τ_2, garantizamos la existencia de un básico $\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) \in \mathscr{B}_{\mathcal{S}}$ tal que $x \in \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2(V)^{-1} \subseteq U \times V$. Concluyendo de esta forma que $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Ya que tenemos ambas inclusiones, se verifica que $\tau_1 = \tau_2$; lo anterior, prueba que $\mathcal{S}$ es una subbase para la topología producto. □

De momento, hemos estudiado la topología producto sobre el producto de **dos espacios topológicos** $X \times Y$; ahora generalizaremos esta definición, sobre productos cartesianos finitos y arbitrarios

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \qquad \text{y} \qquad X_1 \times X_2 \times \cdots \times,$$

donde a cada conjunto X_i, le corresponde una topología τ_i. En el producto cartesiano arbitrario se pueden definir diversas topologías, entre ellas: la topología de cajas y la topología producto. Antes de describirlas, debemos generalizar las proyecciones.

Definición 1.17. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de conjuntos no vacíos. Definamos $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$.

La siguiente función

$$\begin{aligned} \pi_\alpha : X &\longrightarrow X_\alpha \\ (x_\alpha)_{\alpha \in I} &\longmapsto x_\alpha \end{aligned}$$

es llamada **proyección** asociada a α.

Proposición 1.13. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una colección de conjuntos no vacíos. Definamos $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. las proyecciones π_α, son sobreyectivas, para todo $\alpha \in I$.

Demostración. Tomemos $\alpha \in I$ fijo, $y_\alpha \in X_\alpha$ arbitrario.

Sabemos que $\exists x \in X$, de la forma $x = (x_1, \ldots, y_\alpha, x_{\alpha+1}, \ldots)$, de modo que $\pi_\alpha(x) = y_\alpha$; lo anterior se cumple para cualquier $y_\alpha \in X_\alpha$, verificando la sobreyectividad de π_α para todo $\alpha \in I$. $\square$

Proposición 1.14. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una colección de conjuntos no vacíos, los cuales definen los espacios topológicos (X_α, τ_α). Definamos el conjunto $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. La siguiente colección,

$$\mathscr{B} = \left\{ B_\alpha = \prod_{\alpha\in I} U_\alpha \;\middle|\; U_\alpha \in \tau_\alpha \text{ para todo } \alpha \in I \right\}$$

es una base para una topología de X. Si τ_c es la topología generada por $\mathscr{B}$, entonces (X, τ_c) es un espacio topológico.

Demostración. Primero verificaremos que $\mathscr{B}$ es una base.

1. Sea $x \in X$ arbitrario. X es un básico en sí mismo, pues para cada $\alpha \in I$, $X_\alpha \in \tau_\alpha$; de esta forma garantizamos que para todo $x \in X$ existe un básico que lo contiene (en este caso es el mismo X).

2. Sea $x \in B_1 \cap B_2$, con $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$. Por definición

$$B_1 \cap B_2 = \left(\prod_{\alpha\in I} U_\alpha\right) \bigcap \left(\prod_{\alpha\in I} V_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in I} (U_\alpha \cap V_\alpha), \qquad U_\alpha, V_\alpha \in \tau_\alpha.$$

   Por definición, hemos notado que $B_1 \cap B_2$, es un básico de $\mathscr{B}$, entonces si $x \in B_1 \cap B_2$, existe un básico tal que $x \in B_1 \cap B_2 \subseteq B_1 \cap B_2$. Verificando que $\mathscr{B}$ es una base.

Hemos probado que $\mathscr{B}$ es una base de X, la cual genera la topología τ_c; por la Proposición 1.2, (X, τ_c) es un espacio topológico. $\square$

Proposición 1.15. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una colección de conjuntos no vacíos, los cuales definen los espacios topológicos (X_α, τ_α). Definamos $X = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$. La colección,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta\in J} \mathcal{S}_\beta, \qquad \text{donde} \quad \mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \text{ abierto en } X_\beta\}$$

es una subbase para X. Si τ_p es la topología generada por $\mathcal{S}$, entonces (X, τ_p) es un espacio topológico.

Demostración. Verificaremos que $\mathcal{S}$ es una subbase para X

Tomemos $\pi_\beta^{-1}(X_\beta) \in \mathcal{S}$, se verifica la siguiente igualdad,

$$\pi_\beta^{-1}(X_\beta) = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_\beta \times X_{\beta_1} \times \cdots = X.$$

Utilizando lo anterior, notamos que $X \subseteq \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$. Por definición $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \subseteq X$, entonces

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X.$$

De esta forma se prueba que $\mathcal{S}$ es una subbase de X. Finalmente, si τ_p es la topología generada por la subbase, al aplicar la Proposición 1.5, tenemos que (X, τ_p) es un espacio topológico. □

Definición 1.18 (Topología de cajas)**.** Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de conjuntos no vacíos, los cuales definen los espacios topológicos (X_α, τ_α). Definimos $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. La siguiente colección,

$$\mathscr{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \;\middle|\; U_\alpha \in \tau_\alpha \text{ para cada } \alpha \in I \right\}$$

es una base para X. La topología τ_c generada por $\mathscr{B}$, es llamada **topología de cajas**.

De forma similar, podemos definir otra topología para el producto arbitrario de espacios topológicos; la cual se define a continuación.

Definición 1.19 (Topología producto)**.** Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de conjuntos no vacíos, los cuales definen los espacios topológicos (X_α, τ_α). Definimos $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, la siguiente colección,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in I} \mathcal{S}_\beta, \qquad \text{donde} \qquad \mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \in \tau_\beta\}$$

es una subbase para X. La topología τ_p generada por $\mathcal{S}$, es llamada **topología producto** y al espacio (X, τ) le llamamos **espacio producto**.

Ahora compararemos la topología producto y de cajas, sobre el producto cartesiano arbitrario de espacios topológicos.

Proposición 1.16. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de conjuntos no vacíos, los cuales definen los espacios topológicos (X_α, τ_α). Definamos $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Dadas la topología producto τ_p y la topología de cajas τ_c, se tiene que $\tau_p \subseteq \tau_c$.

Demostración. La base que genera la topología de cajas τ_c está dada por la colección

$$\mathscr{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \;\middle|\; U_\alpha \in \tau_\alpha \text{ para todo } \alpha \in I \right\}.$$

La base que genera la topología producto τ_p está dada por la colección $\mathscr{B}_1$, dada a continuación,

$$\mathscr{B}_1 = \left\{ \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \;\middle|\; U_\alpha = X_\alpha \text{ excepto para una cantidad finita, donde los } U_\alpha \in \tau_\alpha \right\}.$$

Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in X$. Por definición de base, $\exists B \in \mathscr{B}_1$ tal que $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in B$, donde

$$B = X_1 \times X_2 \times \cdots \times U_i \times U_{i+1} \times \cdots \times U_j \times X_{j+1} \times \cdots .$$

Como $X_m \in \tau_m$, $m = 1, \ldots i-1$, se cumple que $B \in \mathscr{B}$; por lo que $x \in B \subseteq B$. Finalmente, aplicando el Lema 1.3, tenemos que $\tau_p \subseteq \tau_c$. $\square$

Ya definimos la topología de cajas y la topología producto para el producto arbitrario de espacios topológicos; sin embargo, también podemos definir dichas topologías tomando bases de cada uno de los espacios topológicos. Para esclarecer esto, tenemos las siguientes proposiciones y teoremas.

Proposición 1.17. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de conjuntos no vacíos, los cuales definen los espacios topológicos (X_α, τ_α). Definamos $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Si cada topología τ_α es generada por una base $\mathscr{B}_\alpha$, entonces la siguiente colección,

$$\mathscr{C} = \left\{ \prod_{\alpha \in J} B_\alpha \;\middle|\; B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha \text{ para todo } \alpha \in J \right\}$$

es base para una topología de X.

Demostración. Primero verificaremos que $\mathscr{C}$ es una base para X.

1. Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in X$ arbitrario. Dado que $X_\alpha \in \tau_\alpha$, para cada $x_\alpha \in X_\alpha$ existe un básico $B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha$ tal que $x_\alpha \in B_\alpha \subseteq X_\alpha$. Con esto podemos definir el siguiente básico

$$C = \prod_{\alpha \in I} B_\alpha, \quad C \in \mathscr{C}.$$

   Por construcción $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in C \subseteq X$, probando así el primer axioma de base, pues esto es válido para cada $x\alpha \in I$.

2. Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in C_1 \cap C_2$, donde $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$. Por definición, se tiene que

$$C_1 \cap C_2 = \prod_{\alpha \in J} B_\alpha \bigcap \prod_{\alpha \in J} B'_\alpha = \prod_{\alpha \in J} (B_\alpha \cap B'_\alpha).$$

Donde B_α, $B'_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha$. Por construcción, $x_\alpha \in B_\alpha \cap B'_\alpha$ para cada $\alpha \in I$; de esta forma garantizamos la existencia de un básico $B''_\alpha \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B''_\alpha \subseteq B_\alpha \cap B'_\alpha$. Con ello podemos definir el básico,

$$C_3 = \prod_{\alpha \in I} B''_\alpha, \qquad C_3 \in \mathscr{C}.$$

Por construcción,

$$(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in C_3 \subseteq C_1 \cap C_2.$$

Lo cual verifica el segundo axioma de base.

De esta forma hemos probado que la colección $\mathscr{C}$ es base para una topología de X. □

Teorema 1.7. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de conjuntos no vacíos, los cuales definen los espacios topológicos (X_α, τ_α). Si cada topología τ_α es generada por una base $\mathscr{B}_\alpha$, entonces la topología generada por la base*

$$\mathscr{C} = \left\{ \prod_{\alpha \in J} B_\alpha \;\middle|\; B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha \text{ para todo } \alpha \in J \right\},$$

coincide con la topología de cajas.

Demostración. Para comenzar, recordemos que en la Proposición 1.17, se probó que $\mathscr{C}$ es una base para el conjunto X. Sea τ la topología generada por la base $\mathscr{C}$.

Denotemos por τ_c a la topología de cajas. Inicialmente, verificaremos que $\mathscr{C} \subseteq \tau_c$. Sabemos que τ_c es la topología generada por la base

$$\mathscr{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \;\middle|\; U_\alpha \in \tau_\alpha \text{ para todo } \alpha \in I \right\}.$$

Sea $C \in \mathscr{C}$, así que el básico es de la forma

$$C = \prod_{\alpha \in I} B_\alpha, \quad B_\alpha \in \tau_\alpha.$$

Evidentemente, C es en sí mismo un básico de $\mathscr{B}$ y esto prueba que $\mathscr{C} \subseteq \tau_c$.

Ahora verificaremos las hipótesis del Lema 1.2. Sea U abierto arbitrario de τ_c, para cada $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in U$, existe un básico $B \in \mathscr{B}$ tal que $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in B \subseteq U$.

El básico B es de la forma,

$$B = \prod_{\alpha \in I} U_\alpha, \quad U_\alpha \in \tau_\alpha.$$

Utilizando lo anterior, $x_\alpha \in U_\alpha$, para cada $\alpha \in I$. Por hipótesis, cada espacio topológico está generado por una base $\mathscr{B}_\alpha$, entonces para cada $\alpha \in I$, existe un básico $B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha$ tal que $x_\alpha \in B_\alpha \subseteq U_\alpha$. Tomando dichos B_α específicos, construimos el básico

$$B' = \prod_{\alpha \in J} B_\alpha \in \mathscr{C}.$$

Por construcción $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in B' \subseteq B \subseteq U$, esto satisface todas las hipótesis del Lema 1.2. En consecuencia, la topología generada por base $\mathscr{C}$ coincide con la topología producto. □

Ahora veremos este mismo resultado para la topología producto. Vale la pena mencionar que esta topología es la más común sobre la que se trabaja producto arbitrario de espacios topológicos.

Proposición 1.18. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una colección de conjuntos no vacíos, los cuales definen los espacios topológicos (X_α, τ_α). Definamos $X = \prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$. Si cada topología τ_α es generada por una base $\mathscr{B}_\alpha$, entonces la siguiente colección,

$$\mathscr{C} = \left\{ \prod_{\alpha\in I} B_\alpha \;\middle|\; B_\alpha = X_\alpha, \text{ excepto para una cantidad finita, donde } B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha \right\}$$

es base para el conjunto X.

Demostración. Primero verificaremos que $\mathscr{C}$ es una base para X.

1. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in X$ arbitrario y $A \subseteq I$ un subconjunto finito. Dado que cada X_α es un abierto en τ_α, podemos tomar x_β, $\beta \in A$; para cada uno de estos, garantizaremos la existencia de un básico $B_\beta \in \mathscr{B}_\beta$ tal que $x_\beta \in B_\beta \subseteq X_\beta$, y con ellos definimos el siguiente básico
$$C = \left(\prod_{\alpha\in(I\setminus A)} X_\alpha \right) \times \left(\prod_{\beta\in A} B_\beta \right).$$
Por construcción, $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in C \subseteq X$, probando así el primer axioma de base.

2. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in C_1 \cap C_2$, donde C_1 y $C_2 \in \mathscr{C}$. Para esta demostración definiremos dos subconjuntos finitos A_1, A_2 de I; también definimos
$$A_3 = A_1 \cap A_2, \quad A_4 = A_1 \cup A_2, \quad A_5 = A_1 \setminus A_3, \quad A_6 = A_2 \setminus A_3.$$
Estos conjuntos nos ayudarán para definir la intersección de básicos, $C_1 \cap C_2$.
$$\begin{aligned} C_1 \cap C_2 &= \left(\prod_{\alpha\in(I\setminus A_1)} X_\alpha \times \prod_{\alpha\in A_1} B_\alpha \right) \bigcap \left(\prod_{\alpha\in(I\setminus A_2)} X_\alpha \times \prod_{\alpha\in A_2} B'_\alpha \right) \\ &= \prod_{\alpha\in I\setminus A_4} X_\alpha \times \prod_{\alpha\in I\setminus A_5} B_\alpha \times \prod_{\alpha\in I\setminus A_6} B'_\alpha \times \prod_{\alpha\in I\setminus A_3} (B_\alpha \cap B'_\alpha), \end{aligned}$$

con B_α, $B'_\alpha \in \mathscr{B}$.

Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in C_1 \cap C_2$. Para cada $\alpha \in I \setminus A_3$, dado $x_\alpha \in B_\alpha \cap B'_\alpha$ existe un básico $B''_\alpha \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B''_\alpha \subseteq B_\alpha \cap B'_\alpha$. Con esto podemos definir el siguiente básico

$$C_3 = \prod_{\alpha\in I\setminus A_4} X_\alpha \times \prod_{\alpha\in I\setminus A_5} B_\alpha \times \prod_{\alpha\in I\setminus A_6} B'_\alpha \times \prod_{\alpha\in I\setminus A_3} B''_\alpha.$$

Por construcción,

$$(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in C_3 \subseteq C_1 \cap C_2.$$

Lo cual verifica el segundo axioma de base. De esta forma hemos probado que la colección $\mathscr{C}$ es una base para el conjunto X.

$\square$

***Teorema* 1.8.** *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una colección de conjuntos no vacíos, los cuales definen los espacios topológicos (X_α, τ_α). Definamos $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Si cada topología τ_α está generada por una base $\mathscr{B}_\alpha$, entonces la topología generada por la base*

$$\mathscr{C} = \left\{ \prod_{\alpha\in J} B_\alpha \;\middle|\; B_\alpha = X_\alpha \textit{ excepto para una cantidad finita, donde los } B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha \right\},$$

coincide con la topología producto.

Demostración. Para comenzar, recordemos que en la Proposición 1.17 se probó que $\mathscr{C}$ es una base para el conjunto X. Denotemos por τ a la topología generada por la base $\mathscr{C}$.

Inicialmente verificaremos que $\mathscr{C} \subseteq \tau_p$. Sabemos que τ_p es la topología generada por la base

$$\mathscr{B} = \left\{ \prod_{\alpha\in I} U_\alpha \;\middle|\; U_\alpha = X_\alpha \text{ excepto para una cantidad finita, donde } U_\alpha \in \tau_\alpha \right\}.$$

Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in C$, donde $C \in \mathscr{C}$. Para ver la forma de dicho básico tomemos $A \subseteq I$ un conjunto finito; tenemos que,

$$C = \prod_{\alpha\in J\setminus A} X_\alpha \times \prod_{\alpha\in A} B_\alpha, \quad \text{con} \quad B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha.$$

De la definición de base, tenemos que $B_\alpha \in \tau_\alpha$, por lo que C es en sí mismo un básico de $\mathscr{B}$; de esta forma hemos probado que $\mathscr{C} \subseteq \tau_p$.

Ahora probaremos que $\tau = \tau_p$. Sea U abierto en τ_p, para cada $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in U$, garantizamos la existencia de un básico $B \in \mathscr{B}$ tal que $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in B \subseteq U$. Dicho básico B es de la forma

$$B = \prod_{\alpha\in I\setminus A} X_\alpha \times \prod_{\alpha\in A} U_\alpha, \quad \text{con} \quad U_\alpha \in \tau_\alpha, \quad \forall\alpha \in I.$$

Por construcción, para cada $\alpha \in A$, $x_\alpha \in U_\alpha$; de la misma forma, para todo $\alpha \in I \setminus A$, $x_\alpha \in X_\alpha$. Por otro lado, recordemos que todo espacio topológico está generado por una base $\mathscr{B}_\alpha$; en consecuencia, para cada $\alpha \in A$, existe un básico $B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha$ tal que $x_\alpha \in B_\alpha \subseteq U_\alpha$. Tomando dichos B_α podemos definir el básico

$$C = \prod_{\alpha \in I \setminus A} X_\alpha \times \prod_{\alpha \in A} B_\alpha \in \mathscr{C}.$$

Por la forma en que definimos a C, se cumple que $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in C \subseteq B \subseteq U$. Al aplicar el Lema 1.2, se tiene que la topología generada por base la $\mathscr{C}$ coincide con la topología producto, es decir, $\tau = \tau_p$. $\square$

Ya hemos mencionado las proyecciones; sin embargo, estas funciones cumplen una propiedad muy importante, siempre y cuando dotemos a X con la topología de cajas o la topología producto, dicha propiedad es la continuidad.

Proposición 1.19. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de conjuntos no vacíos, los cuales definen los espacios topológicos (X_α, τ_α). Definamos $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Si dotamos a X con la topología producto, τ_p, entonces las proyecciones

$$\begin{aligned} \pi_\alpha : (X, \tau_p) &\longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha) \\ (x_\alpha)_{\alpha \in I} &\longmapsto x_\alpha, \end{aligned}$$

son funciones continuas, para todo $\alpha \in I$.

Demostración. Para comenzar, recordemos que la topología producto, τ_p, es generada por la subbase

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta, \qquad \text{donde} \qquad \mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \in \tau_\beta\}.$$

Es decir, τ_p es generada por la base,

$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \;\middle|\; S_i \in \mathcal{S} \right\}.$$

Dado, $\beta \in J$ fijo, tomemos un conjunto $U_\beta \in \tau_\beta$ arbitrario. Es evidente que $\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \in \mathscr{B}$, en consecuencia, $\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \in \tau_p$, lo cual prueba que π_α es continua. $\square$

Una vez que hemos probado la continuidad de las proyecciones para la topología producto, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.20. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de conjuntos no vacíos, los cuales definen los espacios topológicos (X_α, τ_α). Definamos $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Si dotamos a X con la topología de cajas τ_c, entonces las proyecciones

$$\begin{aligned} \pi_\alpha : (X, \tau_c) &\longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha) \\ (x_\alpha)_{\alpha \in I} &\longmapsto x_\alpha, \end{aligned}$$

son funciones continuas, para todo $\alpha \in I$.

Demostración. De la proposición 1.19, las proyecciones

$$\pi_\alpha : (X, \tau_p) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha)$$
$$(x_\alpha)_{\alpha\in I} \longmapsto x_\alpha$$

son continuas, donde τ_p denota a la topología producto. Luego, por la Proposición 1.16, $\tau_p \subseteq \tau_c$. Finalmente, de la Proposición 1.11, al sustituir la topología del conjunto de partida por una topología más fuerte, la continuidad se preserva; así que al dotar a X con la topología τ_c, las proyecciones

$$\pi_\alpha : (X, \tau_c) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha)$$
$$(x_\alpha)_{\alpha\in I} \longmapsto x_\alpha,$$

son continuas. □

Una particularidad de la topología producto, es el hecho que es la topología **más débil** donde las proyecciones son continuas.

Proposición 1.21. La topología producto, τ_p, es la topología más débil donde todas las proyecciones son continuas.

Demostración. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una colección de conjuntos no vacíos, los cuales definen los espacios topológicos (X_α, τ_α). Definamos $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Por contradicción asumamos que existe otra topología τ', que es la más débil de X donde toda proyección π_α es continua.

Se ha tomado como hipótesis, que las proyecciones,

$$\pi_\alpha : (X, \tau) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha)$$

son continuas. Recordemos que τ_p es generada por la subbase,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{S}_\alpha, \qquad \text{donde} \qquad \mathcal{S}_\alpha = \{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \in \tau_\alpha\}.$$

Por la continuidad de π_α con respecto a τ, si $U_\alpha \in \tau_\alpha$, entonces $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \tau$; es decir $\mathcal{S} \subseteq \tau$.

Finalmente, de la Proposición 1.9, τ_p, es la topología más débil tal que $\mathcal{S} \subseteq \tau_p$; en consecuencia, $\tau_p \subseteq \tau$, pero esto contradice la hipótesis que τ es la topología más débil donde las proyecciones con continuas. De esta forma probado lo deseado. □

1.4. Espacios compactos

Una vez definido un espacio topológico (X, τ), vamos a introducir un nuevo concepto: **un espacio compacto**, estos espacios son de suma importancia en la topología, de hecho es la propiedad topológica que estamos buscando probar en el Teorema de Alaoglu.

Definición 1.20 (Cobertura)**.** Una colección de subconjuntos de un espacio topológico (X, τ), definida como

$$\mathcal{A} = \{A_i \mid A \subseteq X, i \in I\},$$

es una **cobertura de $\boldsymbol{X}$**, si se cumple que

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X.$$

En particular, si todos los conjuntos de $\mathcal{A}$ son abiertos, entonces es llamada **cobertura abierta de $\boldsymbol{X}$**.

Definición 1.21 (Espacio compacto)**.** Un espacio topológico (X, τ) se dice **compacto**, si toda cobertura abierta de X contiene una subcobertura finita de X.

Es decir, dada una cobertura abierta $\mathcal{A} = \{A_i \mid A \subseteq X, i \in I\}$; se cumple que

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X.$$

***Ejemplo* 1.5.** Sea $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$; este espacio topológico no es compacto, pues, de la siguiente cobertura abierta de $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

no podemos escoger una subcobertura finita de $\mathbb{R}$, ya que quedarían intervalos sin cubrirse. Como existe al menos una cobertura que cumple eso, decimos que $\mathbb{R}$ no es compacto.

Observación. Cualquier espacio topológico (X, τ) que contenga una cantidad finita de puntos, es compacto; ya que cualquier cobertura puede tener a lo más 2^n conjuntos, que sigue siendo una cantidad finita.

Como vemos, el ser compacto depende únicamente de la topología sobre la que estemos trabajando, ¿qué sucede si usamos una topología más débil o más gruesa? ¿Se seguirá manteniendo la compacidad? Responderemos dicha pregunta a continuación.

Proposición 1.22. Sea X un conjunto no vacío. Sean τ y τ' topologías sobre X tal que $\tau \subseteq \tau'$. Si (X, τ') es compacto, entonces (X, τ) es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una cobertura abierta arbitraria en (X, τ); por hipótesis, $\mathcal{A} \subseteq \tau'$. En consecuencia, $\mathcal{A}$ contendrá una subcobertura finita de X, así que (X, τ) es compacto. $\square$

El ser compacto es una propiedad muy importante en la topología. A continuación, tenemos una serie de resultados que relacionan la compacidad de un espacio topológico con otras propiedades topológicas, dadas anteriormente.

***Teorema* 1.9.** *Sea (X, τ) un espacio topológico compacto. Si Y es un subespacio cerrado de X, entonces Y es compacto.*

Demostración. Sea Y un subespacio cerrado de X y $\mathcal{A}$ una cobertura abierta arbitraria de Y. Utilizando el hecho que $X \setminus Y \in \tau$, definimos la siguiente cobertura abierta de X,

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{X \setminus Y\}.$$

Por la compacidad de X, $\mathcal{A}'$ posee una subcobertura finita, la cual denotamos por $\mathcal{A}'_n$ de X. Dicha subcobertura, finita tiene dos opciones: contener a $X \setminus Y$ o no.

- Si $\mathcal{A}'_n$ contiene a $X \setminus Y$, entonces la subcobertura contiene una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$ que cubren a X, aparte de $X \setminus Y$; En consecuencia, una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$ cubren a Y. En este caso, Y sería compacto.
- Si $\mathcal{A}'_n$ no contuviera a $X \setminus Y$, entonces $\mathcal{A}$ tiene una subcobertura finita que cubre a X y en consecuencia, también a Y. Así que, Y es compacto en este caso.

En general hemos demostrado que Y es compacto, siempre que Y sea cerrado. $\square$

***Teorema* 1.10.** *Sean (X, τ) e (Y, τ') dos espacios topológicos. Definamos $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ una función continua. Si X es compacto, entonces $f(X)$ es compacto.*

Demostración. Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ una función continua. Tomemos una cobertura abierta arbitraria de $f(X)$, denotada por $\mathcal{A}$. Con dicha cobertura, construyamos la colección

$$\mathcal{A}' = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Utilizando la continuidad de f, si $A \in \mathcal{A}$, entonces $f^{-1}(A) \in \tau$; además, notamos que

$$\mathcal{A}'_n = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right) = f^{-1}(f(X)) = X.$$

De esta forma se verifica que $\mathcal{A}'$ es una cobertura abierta de X. Por la compacidad de X, $\mathcal{A}'$ contiene una subcobertura finita de X; sin perdida de generalidad, podemos decir que dicha subcobertura está dada por

$$\{f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_n)\}.$$

En consecuencia,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_1) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Aplicando f, tenemos que

$$f(X) = f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

La igualdad anterior verifica que $\mathcal{A}$ tiene una subcobertura finita de $f(X)$, lo cual prueba que $f(X)$ es compacto. □

Sabemos que diversas propiedades se heredan bajo la topología de subespacio ¿la compacidad será una de estas? Con el siguiente resultado verificaremos que en efecto esto sucede.

***Teorema* 1.11.** *Sea (X, τ) un espacio topológico, Y un subespacio de X y τ_Y la topología de subespacio. Un conjunto $A \subseteq Y$, es compacto en (Y, τ_Y) si y solamente si A es compacto en (X, τ).*

Demostración. De forma general $A \subseteq Y$, ahora veremos ambas implicaciones.

- "$\Longrightarrow$" Asumamos que A es compacto en (Y, τ_Y). Sea $\mathcal{A} = \{U_i \ : \ U_i \in \tau, i \in I\}$ una cobertura abierta arbitraria de A en τ.

  De este modo, si $U_i \in \mathcal{A}$, entonces $U_i' = U_i \cap Y \in \tau_Y$; con estos conjuntos abiertos, construyamos la colección,

  $$\mathcal{A}' = \{U_i' \ : \ U_i' \in \tau_Y, i \in I\}.$$

  Por construcción, $\mathcal{A}'$ es una cobertura abierta de A en τ_Y. Por la compacidad de A en (Y, τ_Y), $\mathcal{A}'$ posee una subcobertura finita de Y; sin perdida de generalidad, asumamos que dicha subcobertura está dada por

  $$\{U_i' = U_i \cap Y \ : \ U_i' \in \mathcal{A}', i = 1, \ldots, n\} \quad \Longrightarrow \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i'.$$

  Con la colección anterior, definamos la subcobertura finita, $\{U_i \ : \ U_i \in \mathcal{A}, i = 1, \ldots, n\}$, de modo que

  $$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

  Lo cual prueba que la cobertura abierta arbitraria $\mathcal{A} \subseteq \tau$, posee una subcobertura finita de A; verificando que A es compacto en (X, τ).

- " $\Longleftarrow$ " Tenemos como hipótesis que A es compacto en (X,τ). Sea $\mathcal{A}$ una cobertura abierta de A en (Y,τ_Y), definida como

$$\mathcal{A} = \{U_i \ : \ U_i \in \tau_Y, i \in I\}.$$

Cada conjunto está definido como, $U_i = U_i' \cap Y$, con $U_i' \in \tau$; utilizando dichos U_i', podemos definir una cobertura abierta de A en (X,τ), dada por

$$\mathcal{A}' = \{U_i' \ : \ U_i' \in \tau, i \in I\}.$$

Por la compacidad de A en (X,τ), $\mathcal{A}'$ posee una subcobertura finita; sin perdida de generalidad, asumamos que dicha subcobertura está dada por

$$\{U_i' : U_i' \in \mathcal{A}, i = 1, \dots n\} \subseteq .$$

En consecuencia,

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i' \quad \Longrightarrow \quad A = A \cap Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_i' \cap Y).$$

Utilizando los conjuntos abiertos $U_i' \cap Y$, definimos la subcobertura finita

$$\{U_i = U_i' \cap Y : \ U_i' \in \mathcal{A}', i = 1, \dots n\} \subseteq \mathcal{A}.$$

Anteriormente, probamos que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i' \cap Y).$$

Lo anterior, verifica que $\mathcal{A}$ posee una subcobertura finita de A; garantizando la compacidad de A en (Y,τ_Y).

$\square$

De momento hemos hablado de compacidad general; sin embargo, existen diversos tipos de compacidad, las cuales definiremos a continuación.

Definición 1.22 (Compacidad secuencial y por punto límite)**.** Sea (X,τ) un espacio topológico. Si toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ posee una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente, entonces X se dice **secuencialmente compacto**. Además, si todo subconjunto de dimensión infinita $A \subseteq X$ tiene un punto límite, se dice que X es **compacto por punto límite**.

Nota. Sea (X,τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se dice que x es punto límite de A, si todo vecindario abierto U de x, satisface que

$$A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Como podemos ver, tanto la compacidad secuencial como la compacidad de punto límite, son muy diferentes a la compacidad general; sin embargo, bajo ciertos espacios topológicos estas coinciden. Para nuestra suerte, los espacios donde esto sucede son muy conocidos.

Definición 1.23 (Espacio metrizable)**.** Un espacio topológico (X, τ), se dice **metrizable**, si existe una métrica d que induce la topología τ.

Ahora, enunciaremos el resultado donde se relacionan los diversos tipos de compacidad.

***Teorema* 1.12.** *Si (X, τ) un espacio topológico metrizable, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X es compacto.

b) X es secuencialmente compacto.

c) X es compacto por punto límite.

Demostración. La demostración de este teorema será omitida. Véase [7], Capítulo 3, Sección 28, teorema 28.2, página 179. $\square$

De momento, hemos estudiado las propiedades más fundamentales que relacionan la compacidad; sin embargo, existen otras que iremos introduciendo más adelante, conforme tengamos las herramientas necesarias.

Se sabe que los espacios metrizables son de suma importancia, pues facilita el obtener diversas propiedades topológicas. Otros espacios que son de suma importancia, son los que aparecen en los axiomas de separación, los cuales definimos a continuación.

Definición 1.24 (Espacio de Hausdorff)**.** Un espacio topológico, (X, τ) es de **Hausdorff** si para cada par de puntos, $x, y \in X$, donde $x \neq y$, existen abiertos disjuntos U y V que contienen a x e y, respectivamente.

***Ejemplo* 1.6.** El espacio $(X, \tau_{\text{discreta}})$, es un espacio de Hausdorff.

Tomemos $x, y \in X$,tal que $x \neq y$. Sabemos que $\{x\}$, $\{y\} \in \tau_{\text{discreta}}$, así que ellos son los conjuntos abiertos disjuntos que necesitamos. De esta forma, se satisfacen las condiciones para que X sea un espacio de Hausdorff bajo la topología discreta.

Definición 1.25 (Espacio regular)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico, donde los conjuntos unipuntuales son cerrados. Si para cada par formado por un punto x y un conjunto cerrado B tal que $x \notin B$, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V que contienen a x y B respectivamente, decimos que X es **regular.**

***Ejemplo* 1.7.** El espacio $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ es regular.

Tomemos $x \in \mathbb{R}$ y A un conjunto cerrado tal que $x \notin A$. Por construcción, $x \in \mathbb{R} \setminus A$, donde $\mathbb{R} \setminus A$ es un conjunto abierto. Dado que la topología usual tiene como base a los intervalos, existirá un intervalo $(a, b) \in \mathbb{R}$ tal que $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$.

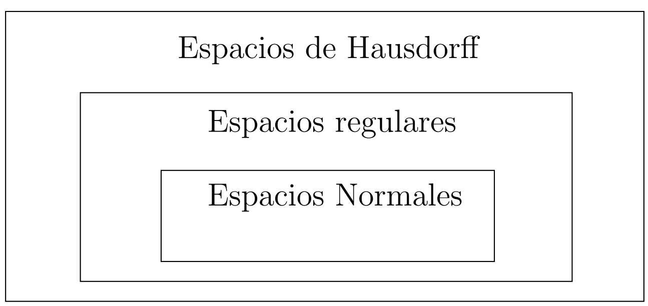
Por el principio del buen orden existen $c, d \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < x$ y $x < d < b$; con esto definimos el intervalo abierto (c, d). Además, se satisfacen las siguientes inclusiones,

$$A \subseteq \mathbb{R} \setminus (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus [c, d].$$

En consecuencia, existe un conjunto abierto $\mathbb{R} \setminus [c, d]$ tal que $A \subseteq \mathbb{R} \setminus [c, d]$. Po otro lado, $(\mathbb{R} \setminus [c, d]) \cap (c, d) = \emptyset$, verificando así todas las hipótesis para que $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ sea un espacio regular.

Definición 1.26 (Espacio normal)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico, donde los conjuntos unipuntuales son cerrados. Si para cada par formado por dos conjuntos cerrados disjuntos A y B, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V que contienen a A, B respectivamente, decimos que X es **normal**.

Las definiciones mencionadas anteriormente se relacionan entre sí, pues todo espacio normal es un espacio regular y de Hausdorff; todo espacio regular es un espacio de Haursdorff; sin embargo, los recíprocos no son válidos en general, para ejemplificar de mejor manera tenemos el siguiente diagrama.



***Teorema* 1.13.** *Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff. Si Y es un subespacio compacto de X, entonces Y es cerrado.*

Demostración. Sea Y un subespacio compacto de X, probaremos que $X \setminus Y$ es un conjunto abierto.

Sea $x_0 \in X \setminus Y$. Para cada $y_i \in Y$, con $i \in I$ tomaremos conjuntos abiertos disjuntos U_{y_i}, V_{y_i}, que contengan a x_0, y_i, respectivamente; esto se garantiza del hecho que X es un espacio de Hausdorff.

Sea $\mathcal{A}$ la colección de todos los conjuntos abiertos V_{y_i}, así que, $\mathcal{A}$ es una cobertura abierta de Y. Por la compacidad de Y, $\mathcal{A}$ posee una subcobertura finita para Y; sin perdida de generalidad, decimos que dicha subcobertura está dada por

$$\mathcal{A}_n = \{V_{y_i} \ : \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Definimos los siguientes conjuntos,

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}, \qquad U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}, \quad U, V \in \tau.$$

Por construcción, $Y \subseteq V$ y $x_0 \in U$. Sea $z \in V$ arbitrario, se garantiza que existe $V_{y_i} \in \mathcal{A}_n$ tal que $z \in V_{y_i}$. En consecuencia,

$$z \notin U_{y_i} \quad \Longrightarrow \quad z \notin U \quad \Longrightarrow \quad U \cap V = \emptyset.$$

Dado que $Y \subseteq V$, entonces $U \cap Y = \emptyset$; Por otro lado, tenemos la siguiente relación

$$x_0 \in U \subseteq X \setminus Y.$$

De esta forma, para cada $x_0 \in X \setminus Y$, se ha construido un conjunto abierto U tal que $U \subseteq X \setminus Y$; lo cual verifica que $X \setminus Y$ es un conjunto abierto por el Teorema 1.1, así que Y es cerrado. □

De momento hemos estudiado los espacios de Hausdorff, regulares y normales; una pregunta natural que nos podemos hacer es ¿si un espacio topológico posee alguna de estas propiedades las seguirá cumpliendo al cambiar la topología? Para responder dicha pregunta, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.23. Sean (X, τ) y (X, τ') dos espacios topológicos, donde $\tau \subseteq \tau'$.

a) Si (X, τ) es un espacio topológico de Hausdorff, entonces (X, τ') es de Hausdorff.

b) Si (X, τ) es un espacio topológico regular, entonces (X, τ') es regular.

c) Si (X, τ) es un espacio topológico normal, entonces (X, τ') es normal.

Demostración. Haremos la demostración cuando X es un espacio de Hausdorff. Para ver el caso cuando X es un espacio normal, en lugar de tomar el par de puntos $x, y \in X$ tal que $x \neq y$, tomaremos un punto y un conjunto cerrado A tal que $x \notin A$; cuando X sea regular, tomaremos dos conjuntos cerrados A, B tal que $A \cap B = \emptyset$.

Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff, para cada par de puntos $x, y \in X$ tal que $x \neq y$, existen dos conjuntos abiertos, disjuntos $U, V \in \tau$ que contienen a x, y, respectivamente.

Dado que $\tau \subseteq \tau'$, $U, V \in \tau'$; por lo que dichos conjuntos abiertos disjuntos que contienen a x, y, seguirán existiendo en τ'. Lo cual prueba que (X, τ') es un espacio de Hausdorff. □

Sea (X, τ) un espacio topológico, τ_1 y τ_2 dos topologías en X, donde $\tau_2 \subseteq \tau \subseteq \tau_1$. En la Proposición 1.23, se probó que, si (X, τ) es un espacio de Hausdorff, entonces (X, τ_1) también lo es; mientras que en la Proposición 1.22, probamos que, si (X, τ) es un espacio compacto, entonces (X, τ_2) también es compacto.

Se puede observar que las propiedades mencionadas anteriormente son "contrarias"; pues que al dotar a X con una topología más débil, la compacidad se preserva; sin embargo, si es Hausdorff esto no sucede. Por otro lado, al dotar a X con una topología más fuerte, el ser Hausdorff se preserva, pero la compacidad no. Es en este momento que surge la siguiente pregunta: ¿Qué sucederá si un espacio topológico (X, τ) que es compacto y Hausdorff, lo dotamos con una topología más débil o más fuerte? ¿Bajo qué condiciones se preservarán ambas propiedades? Para poder responder dicha pregunta, veamos el siguiente resultado.

***Teorema* 1.14.** *Sea X un conjunto distinto de vacío, sean τ_1 y τ_2 dos topologías en X, donde $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Si (X, τ_1) es un espacio de Hausdorff y (X, τ_2) es compacto, entonces las topologías coinciden.*

Demostración. Queremos probar que $\tau_1 = \tau_2$. Por hipótesis, $\tau_1 \subseteq \tau_2$, nos falta probar que $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Una forma de hacerlo es tomar un conjunto abierto arbitrario $U \in \tau_2$ y probar que $U \in \tau_1$; sin embargo, las topologías también se pueden definir en términos de cerrados (a pesar de que no es común hacerlo), entonces tomaremos un conjunto cerrado arbitrario en τ_2 y probaremos es un conjunto cerrado en τ_1.

Sea F un conjunto cerrado arbitrario en τ_2. Por la compacidad de (X, τ_2), al aplicar el Teorema 1.9, tenemos que F es compacto en τ_2.

Ahora probaremos que F es compacto en τ_1. Sea $\mathcal{A}$ una cobertura abierta arbitraria de F en τ_1. Por hipótesis, $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y F es compacto en τ_2, aplicando el Teorema 1.22 tenemos que F es compacto en τ_1.

Finalmente, dado que (X, τ_1) es un espacio de Hausdorff y F es compacto en τ_1, por el Teorema 1.13, F es cerrado en τ_1; comprobando de esta forma que $\tau_1 = \tau_2$. $\square$

***Corolario* 1.1.** *Sea X un conjunto distinto de vacío, sean τ_1 y τ_2 topologías en X, donde $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Si (X, τ_1) es un espacio de Hausdorff y (X, τ_2) es compacto, entonces (X, τ_1) y (X, τ_2) son espacios compactos y de Hausdorff.*

Demostración. Por hipótesis, tenemos dos topologías τ_1, τ_2 en X, donde $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Si (X, τ_1) es un espacio de Hausdorff y (X, τ_2) es compacto, se satisfacen todas las hipótesis del Teorema 1.14, obteniendo que $\tau_1 = \tau_2$.

Tenemos que, X es Hausdorff en τ_1 y τ_2; así mismo, X es compacto en τ_2 y en τ_1. De las dos afirmaciones anteriores podemos concluir que (X, τ_1) y (X, τ_2) son espacios compactos y de Hausdorff. $\square$

1.5. El Teorema de Tychonoff

El resultado más importante de este capítulo es el Teorema de Tychonoff, el cual nos dice bajo que condiciones un producto arbitrario de espacios topológicos compactos, seguirá siendo compacto; en particular, utilizaremos este resultado en la prueba del Teorema de Alaoglu.

Antes de enunciar y demostrar el Teorema de Tychonoff, vamos a estudiar dos resultados previos.

***Lema* 1.10.** *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una colección de conjuntos no vacíos, los cuales definen los espacios topológicos (X_α, τ_α). Definimos $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Si una cobertura abierta arbitraria de X posee solamente elementos de la forma $\pi^{-1}(V)$, con $V \in \tau_\alpha$, entonces dicha cobertura contiene una subcobertura finita.*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cobertura abierta arbitraria de X, que solo posee elementos de la forma $\pi_\alpha^{-1}(V)$, con $V \in \tau_\alpha$. Por construcción,

$$X = \left(\bigcup_{V\in\mathcal{U}_\alpha} \pi_\alpha^{-1}(V)\right), \qquad \text{donde} \quad \mathcal{U}_\alpha = \{V \in \tau_\alpha \mid \pi_\alpha^{-1}(V) \in \mathscr{U}\}.$$

Para facilitar la notación, diremos que $\left(\bigcup_{V\in\mathcal{U}_\alpha} \pi_\alpha^{-1}(V)\right) = \mathcal{U}$.

Mostraremos que existe un $\alpha \in I$ tal que $\mathcal{U}_\alpha$ es una cobertura abierta de X_α. Por contradicción, para todo $\alpha \in I$, existe $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $x_\alpha \notin \bigcup_{V\in\mathcal{U}_\alpha} V$; es decir, $\mathcal{U}_\alpha$ no es una cobertura abierta de X_α.

Definamos la proyección para un $\alpha \in I$, fijo,

$$\begin{aligned} \pi_\alpha : X &\longrightarrow X_\alpha \\ (x_\alpha)_{\alpha\in I} &\longmapsto x_\alpha. \end{aligned}$$

Utilizando la sobreyectividad de π_α, para el x_α dado anteriormente, $\exists (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in X$ tal que

$$\pi_\alpha((x_\alpha)_{\alpha\in I}) = x_\alpha.$$

Por construcción debería suceder que $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \notin \mathcal{U}$, lo cual se probará a continuación.

Por contradicción, $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \mathcal{U}$ así que

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \pi_\alpha^{-1}(V'), \text{ para algún } \alpha \in I \text{ y para algún } V' \in \mathcal{U}_\alpha \\ &\Longrightarrow \pi_\alpha((x_\alpha)_{\alpha\in I}) \in V', \text{ para algún } \alpha \in I \text{ y para algún } V' \in \mathcal{U}_\alpha \\ &\Longrightarrow x_\alpha \in V' \subseteq \bigcup_{V\in\mathcal{U}_\alpha} V. \end{aligned}$$

Lo anterior es una contradicción; pues por hipótesis, $x_\alpha \notin \bigcup_{V \in \mathcal{U}_\alpha} V$, lo cual comprueba que $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \notin \mathcal{U}$.

De momento, hemos probado $\exists (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in X$ tal que $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \notin \mathcal{U}$; es decir que $\mathcal{U}$ no es una cobertura de X, lo cual es una contradicción de la hipótesis inicial. Probando que existe al menos un $\alpha \in I$, tal que $\mathcal{U}_\alpha$ es una cobertura de X_α.

Sea $\alpha \in I$ tal que $\mathcal{U}_\alpha$ es una cobertura de X_α; por la compacidad de X_α, $\mathcal{A}_\alpha$ posee una subcobertura finita de X_α. Sin perdida de generalidad, asumamos que dicha subcobertura está dada por,

$$\mathcal{A}'_\alpha = \{V_i \;\;:\;\; V_i \in \mathcal{U}_\alpha, i = 1, \dots, n\}.$$

Con los conjuntos anteriores, definamos la siguiente colección,

$$\mathcal{V}_\alpha = \{\pi_\alpha^{-1}(V_i) \;\;:\;\; V_i \in \mathcal{A}'_\alpha, i = 1, \dots, n\}.$$

Además, notamos que

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{n} \pi_\alpha^{-1}(V_i) &= \bigcup_{i=1}^{n} (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{\alpha-1} \times V_i \times X_{\alpha+1} \times \cdots) \\
&= X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{\alpha-1} \times \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i \right) \times X_{\alpha+1} \times \cdots
\end{aligned}$$

Recordemos que $\mathcal{A}'_\alpha$ es una cobertura abierta finita para X_α, así que

$$X_\alpha = \bigcup_{i=1}^{n} V_i,$$

por lo cual se obtiene que

$$\bigcup_{i=1}^{n} \pi_\alpha^{-1}(V_i) \supseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{\alpha-1} \times X_\alpha \times X_{\alpha+1} \times \cdots = X,$$

comprobando que $\mathcal{V}_\alpha$ es una cobertura finita para X, que es lo que deseábamos demostrar. $\square$

***Lema* 1.11** (Lema de la subbase de Alexander)**.** *Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{S}$ una subbase que genera la topología τ de X. Si toda cobertura abierta de X conformada únicamente por elementos de $\mathcal{S}$ posee una subcobertura finita de X, entonces X es compacto.*

Demostración. Para realizar la prueba, lo haremos por la contradicción. X no es compacto, así que existe una cobertura abierta $\mathcal{C}$ de X que no posee una subcobertura finita.

Para comenzar denotaremos por $\mathscr{F}$, a la familia de coberturas abiertas de X que no poseen una subcobertura finita,

$$\mathscr{F} = \{ \text{ las coberturas abiertas de } X \text{ que no posee una subcobertura finita}\}.$$

Verificaremos que esta familia cumple las hipótesis del Lema de Zorn.

***Lema* 1.12** (Lema de Zorn)**.** *Si P es un conjunto no vacío, parcialmente ordenado, donde cada cadena no vacía de P posee una cota superior que pertenece a P, entonces el conjunto contiene al menos un elemento maximal.*

1. Por hipótesis, el conjunto X no es compacto, entonces existe una cobertura abierta de X que no posee una subcobertura finita de X; que sería un elemento de la familia $\mathscr{F}$, garantizando que $\mathscr{F} \neq \emptyset$.

2. $(\mathscr{F}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, donde la inclusión se define de la siguiente forma: sean A y $B \in \mathscr{F}$, coberturas abiertas de X, definidas como

$$A = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in I,\ \mathcal{U}_\alpha \in \tau\}, \quad B = \{\mathcal{U}_\beta \mid \beta \in J,\ \mathcal{U}_\beta \in \tau\}.$$

   Decimos que $A \subseteq B$, si $\mathcal{U}_\alpha \in B, \forall \alpha \in I$. Se verifica fácilmente que esta relación satisface los axiomas de un orden parcial.

3. Tomemos una colección no vacía $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{F}$, definida por $\mathscr{C} = \{\mathcal{C}_\alpha \mid \alpha \in I, \mathcal{C}_\alpha \in \mathscr{F}\}$, de modo que $\mathscr{C}$ es una cadena totalmente ordenada con respecto al orden total $(\mathscr{C}, \subseteq)$. Entonces al tomar $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{C}_j \in \mathscr{C}$, con $i, k \in I$, definidos como

$$\mathcal{C}_i = \{\mathcal{U}_{j_i} \mid j_i \in J_i,\ \mathcal{U}_{j_i} \in \tau\}, \quad \mathcal{C}_k = \{\mathcal{U}_k \mid j_k \in J_k,\ \mathcal{U}_{j_k} \in \tau\}$$

   se tiene que $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}_k$ o $\mathcal{C}_k \subseteq \mathcal{C}_i$; la relación "$\subseteq$" es en el sentido que si $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}_j$, entonces $U_{j_i} \in \mathcal{C}_k$, $\forall j_i \in J_i$. Una vez definido el orden total, debemos probar que $\mathscr{C}$ tiene una cota superior que pertenece a $\mathscr{F}$.

   Dada nuestra cadena totalmente ordenada, $\mathscr{C} = \{\mathcal{C}_\alpha \mid \alpha \in I, \mathcal{C}_\alpha \in \mathscr{F}\}$. El elemento

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\alpha, \quad \mathcal{C}_\alpha = \{\mathcal{U}_{j_\alpha} \mid j_\alpha \in J_\alpha,\ \mathcal{U}_{j_\alpha} \in \tau\},$$

   es nuestro candidato a cota superior.

   Para todo $\alpha \in I$ se cumple que, $\mathcal{C}_\alpha \subseteq \mathcal{C}$, lo cual verifica que $\mathcal{C}$ es cota superior de $\mathscr{C}$.

   Ahora probaremos que $\mathcal{C} \in \mathscr{F}$. Por contradicción supongamos que $\mathcal{C} \notin \mathscr{F}$; sin perdida de generalidad, asumamos que $\mathcal{C}$ es de la forma

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in K,\ \mathcal{U}_\alpha \in \tau\}.$$

Por hipótesis, $\mathcal{C}$ posee una subcobertura finita de X, la cual está dada por la colección,

$$\mathcal{C}' = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{C}, \alpha = 1, \ldots, n, \}.$$

Ya que $\mathcal{C}$ es la unión arbitraria de todos los elementos de la cadena $\mathscr{C}$, debe suceder que, $\exists \mathcal{C}_\alpha \in \mathscr{C}$ tal que $\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{C}_\alpha$, para todo $\alpha = 1, \ldots, n$.

A continuación, probaremos que

$$C'' = \bigcup_{\alpha=1}^{n} \mathcal{C}_\alpha \in \mathscr{C}.$$

Por el orden total de $\mathscr{C}$, al tomar $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n \in \mathscr{C}$, se garantiza la existencia de un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C}_k, \forall m = 1, \ldots, n$; en consecuencia, $C'' = \mathcal{C}_k \in \mathscr{C}$.

Al ser $\mathcal{C}'$ una subcobertura finita de X se tiene que

$$X = \bigcup_{\alpha=1}^{n} \mathcal{U}_\alpha, \qquad \mathcal{U}_\alpha \in \mathscr{C}', \text{ donde } \quad \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{C}_\alpha \subseteq \mathcal{C}_k, \quad \forall \alpha = 1, \ldots, n.$$

La igualdad anterior, implica que $\mathcal{C}_k$ posee una cobertura finita de X; sin embargo, esto es una contradicción, pues anteriormente se probó que $\mathcal{C}_k \in \mathscr{C}$ y por ende $\mathcal{C}_k \in \mathscr{F}$. De esta forma hemos demostrado que $\mathcal{C}$ posee una cota superior $\mathcal{C} \in \mathscr{F}$.

Hasta este punto, hemos probado que la familia $\mathscr{F}$ cumple todas las hipótesis del Lema de Zorn, garantizando, que $\mathscr{F}$ contiene al menos un elemento maximal. Sea $\mathcal{M} \in \mathscr{F}$ el elemento maximal, definido como

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in I, U_\alpha \in \tau\} \quad \Longrightarrow \quad X = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha.$$

Por definición, al ser el maximal, si $\exists \mathcal{A} \in \mathscr{F}$ tal que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{M} = \mathcal{A}$.

Por hipótesis, $\mathcal{S}$ es la subbase que genera la topología τ de X, la cual definimos a continuación

$$\mathcal{S} = \{S_\beta \mid \beta \in J\}, \quad S_\beta \subseteq X, \text{ donde } X = \bigcup_{\beta \in I} S_\beta.$$

Con dicha subbase, construyamos la siguiente colección de conjuntos abiertos,

$$\mathcal{D} = \mathcal{M} \cap \mathcal{S} = \{\mathcal{U}_\alpha \cap S_\beta \mid \alpha \in I, \beta \in J, \text{ con } \mathcal{U}_\alpha \cap S_\beta \subseteq X\}.$$

Probaremos que $\mathcal{D}$ es una cobertura abierta de X, es decir,

$$X = \bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \beta \in J}} (\mathcal{U}_\alpha \cap S_\beta).$$

Haremos dicha prueba por contradicción. Vamos a suponer que $\mathcal{D}$ no es una cobertura abierta de X, es decir,

$$X \not\subseteq \bigcup_{\substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}} (\mathcal{U}_\alpha \cap S_\beta).$$

La relación anterior, nos dice que $\exists x \in X$ tal que $x \notin (\mathcal{U}_\alpha \cap S_\beta)$, $\forall \alpha \in I$, $\forall \beta \in J$. Por hipótesis, $\mathcal{M}$ es la cobertura maximal, entonces $\exists \alpha \in I$ tal que $x \in \mathcal{U}_\alpha$.

Por otro lado, dado que $\mathcal{U}_\alpha \in \tau$, y τ es generada por la subbase $\mathcal{S}$, el conjunto $\mathcal{U}_\alpha$ es de la forma

$$\mathcal{U}_\alpha = \bigcup_{k\in K} B_k, \text{ donde } B_k = \bigcap_{\beta=1}^{n} S_\beta, \quad S_\beta \in \mathcal{S}.$$

En consecuencia, $\exists k \in K$ tal que $x \in B_k$; además, si $x \in B_k$, entonces $x \in S_\beta$, $\forall \beta = 1, \ldots, n$.

A continuación, probaremos que $S_\beta \notin \mathcal{D}$, $\forall \beta = 1, \ldots, n$. Por contradicción, si $S_\beta \in \mathcal{D}$, $\forall \beta = 1, \ldots, n$, debe ser que

$$x \in \mathcal{U}_\alpha \subseteq B_k \subseteq S_\beta, \quad \forall \beta = 1, \ldots, n,$$

por lo que $x \in \mathcal{U}_\alpha \cap S_\beta$; en consecuencia, se verificará que $X \subseteq \bigcup_{\substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}} (\mathcal{U}_\alpha \cap S_\beta)$; es decir, $\mathcal{D}$ es una cobertura de X; sin embargo, esto contradice la hipótesis general que $\mathcal{D}$ no es una cobertura de X; de esta forma probamos que $S_\beta \notin \mathcal{D}$, $\forall \beta = 1, \ldots, n$.

De momento se ha demostrado que $S_\beta \notin \mathcal{D}$, $\forall \beta = 1, \ldots, n$. Al ser $\mathcal{M}$ la cota maximal de $\mathscr{F}$, se tiene que

$$\mathcal{M} \cup \{S_\beta\} \notin \mathscr{F}, \quad \forall \beta = 1, \ldots, n.$$

Así que, $\mathcal{M} \cup \{S_\beta\}$ posee una subcobertura abierta de X, la cual denotaremos por $\mathcal{M}'$; esta tiene dos opciones: $\{S_\beta\} \in \mathcal{M}'$ o $\{S_\beta\} \notin \mathcal{M}'$. Analizaremos ambos casos.

- Si $\{S_\beta\} \in \mathcal{M}'$, definimos

  $$\mathcal{M}' = \{S_\beta\} \cup \{\mathcal{U}_\alpha \mid \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{M}, \alpha = 1, \ldots, m\}.$$

  Obtenemos la siguiente igualdad,

  $$X = S_\beta \cup \left(\bigcup_{\alpha=1}^{m} \mathcal{U}_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha=1}^{m} (S_\beta \cap \mathcal{U}_\alpha), \quad \forall \beta = 1, \ldots, n.$$

De lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} X &= \bigcap_{\beta=1}^{n}\left(S_\beta \cup \left(\bigcup_{\alpha=1}^{m}\mathcal{U}_\alpha\right)\right) \\ &= \left(\bigcap_{\beta=1}^{n} S_\beta\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha=1}^{m}\mathcal{U}_\alpha\right) \\ &= B_k \cup \left(\bigcup_{\alpha=1}^{m}\mathcal{U}_\alpha\right) \\ &\subseteq \mathcal{U}_\alpha \cup \left(\bigcap_{\alpha=1}^{m}\mathcal{U}_\alpha\right). \end{aligned}$$

Lo cual prueba que la colección $\{\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_m\}$ es una cobertura finita de X, donde $\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{M}$, así que $\mathcal{M}$ tiene una cobertura finita de X; pero esto es una contradicción, ya que $\mathcal{M} \in \mathscr{F}$. De esta forma, se prueba que $\mathcal{D} = \mathcal{M} \cap \mathcal{S}$ es una cobertura abierta de X.

- Si $\{S_\beta\} \notin \mathcal{M}'$, definimos

$$\mathcal{M}' = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{M}, \alpha = 1, \ldots, m\}.$$

$\mathcal{M}'$ es una subcobertura finita, donde $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$; pero esto es una contradicción, ya que $\mathcal{M} \in \mathscr{F}$. De esta forma probamos que $\mathcal{D} = \mathcal{M} \cap \mathcal{S}$ es una cobertura abierta de X.

Ya demostramos que,

$$\mathcal{D} = \mathcal{M} \cap \mathcal{S} = \{V_k \mid V_k = \mathcal{U}_\alpha \cap S_\beta, \alpha \in I, \beta \in J, k \in K \text{ con } \mathcal{U}_\alpha \cap S_\beta \subseteq X\}$$

es una cobertura abierta de X. Por definición de subbase sucede que

$$X = \bigcup_{\beta \in J} S_\beta.$$

En consecuencia, $\forall k \in K$, $\exists \beta \in J$ tal que $V_k \subseteq S_\beta$; con estos elementos podemos definir la siguiente colección

$$\mathcal{S}' = \{S_\beta \mid V_k \subseteq S_\beta, k \in K, \beta \in J'\}, \text{ con } J' \subseteq J.$$

Dado que $\mathcal{D}$ es una cobertura abierta de X, obtendremos que

$$X = \bigcup_{k \in K} V_k \subseteq \bigcup_{\beta \in J'} S_\beta.$$

Es decir $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ es una cobertura abierta de X. Por hipótesis, toda cobertura abierta que posea elementos de $\mathcal{S}$, tiene una subcobertura finita de X; por lo anterior, la cobertura abierta $\mathcal{S}'$ posee una cobertura finita de X; sin perdida de generalidad, asumamos que es de la forma

$$\mathcal{S}'' = \{S_\beta \mid S_\beta \in \mathcal{S}', \beta = 1, \dots t\}.$$

Recordemos que $\mathcal{M}$ es una cobertura abierta de X y $\mathcal{S}''$ es una cobertura abierta finita de X; debe suceder que $\forall \beta = 1, \dots, t$, $\exists \alpha \in I$ tal que $S_\beta \subseteq \mathcal{U}_\alpha$, donde $\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{M}$. Con dichos conjuntos definimos la siguiente colección

$$\mathcal{M}'' = \{\mathcal{U}_\alpha \mid S_\beta \subseteq \mathcal{U}_\alpha,\ \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{M}, \beta = 1, \dots, t, \alpha \in I'\},$$

de modo que $I' \subseteq I$, donde I' es una colección finita de índices. La siguiente inclusión,

$$X = \bigcup_{\beta=1}^{t} S_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in I'} \mathcal{U}_\alpha,$$

verifica que $\mathcal{M}'$ es una subcobertura finita de X; dado que $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$, se concluye que $\mathcal{M}$ posee una cobertura finita de X, por lo que $\mathcal{M} \notin \mathscr{F}$; en consecuencia. $\mathscr{F} = \emptyset$. Probando que X es un conjunto compacto, ya que no existe ninguna cobertura abierta de X que no posea una subcobertura finita. $\square$

Ahora que ya hemos demostrado los dos lemas anteriores, finalmente estamos listos para probar el Teorema de Tychonoff.

***Teorema* 1.15** (Teorema de Tychonoff). *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de conjuntos no vacíos, los cuales definen los espacios topológicos (X_α, τ_α). Si todos los espacios topológicos (X_α, τ_α) son compactos, entonces el siguiente conjunto,*

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

es compacto bajo la topología producto.

Demostración. Queremos mostrar que X es compacto bajo la topología producto τ_p si y solamente todos los espacios topológicos (X_α, τ_α) son compactos.

"$\Longrightarrow$" Dado el espacio producto (X, τ_p), podemos definir la proyección,

$$\pi_\alpha : (X, \tau_p) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha).$$

Por la Proposición 1.19, las proyecciones π_α son continuas $\forall \alpha \in I$; por el Teorema 1.10, al ser π_α una función continua, y su conjunto de partida X es compacto bajo τ_p, tendremos que la imagen $\pi_\alpha(X)$ es compacto en τ_α; por la Proposición 1.13, las proyecciones son sobreyectivas, así que, $\pi_\alpha(X) = X_\alpha$ es compacto en τ_α.

"$\Longleftarrow$" Como hipótesis, (X_α, τ_α) es compacto $\forall \alpha \in I$. Sabemos que la topología producto τ_p, es generada por la subbase $\mathcal{S}$, la cual está definida como sigue

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{S}_\alpha, \quad \text{donde} \quad \mathcal{S}_\alpha = \{\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) : V_\alpha \in \tau_\alpha\}, \qquad \forall \alpha \in I.$$

Por hipótesis, (X_α, τ_α) son espacios topológicos compactos $\forall \alpha \in I$. Definamos el producto arbitrario de espacios topológicos compactos,

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha.$$

A continuación, probaremos que: una cobertura abierta arbitraria $\mathcal{A}$ de X que solo posee elementos de la forma $\pi_\gamma^{-1}(V_\beta)$, tiene una subcobertura finita de X. Definamos

$$\mathcal{A} = \{\pi_\alpha^{-1}(V_\beta) \mid V_\beta \in \tau_\alpha, \alpha \in J, \beta \in K\} \subseteq \mathcal{S}, \quad \text{donde } J \subseteq I \text{ es un conjunto arbitrario,}$$

entonces

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{\substack{\alpha \in J \\ \beta \in K}} \pi_\alpha^{-1}(V_\beta) \\ &= \bigcup_{\beta \in K} (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{\alpha-1} \times V_\beta \times X_{\alpha+1} \times \cdots) \\ &= X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{\alpha-1} \times \left(\bigcup_{\beta \in K} V_\beta \right) \times X_{\alpha+1} \times \cdots . \end{aligned}$$

Dada la igualdad de conjuntos, debe suceder que

$$X_\alpha = \bigcup_{\beta \in K} V_\beta,$$

es decir, la colección $\mathcal{V}' = \{V_\beta : V_\beta \in \tau_\alpha, \beta \in K\}$ es una cobertura abierta de X_α; por la compacidad de X_α, $\forall \alpha \in I$, la cobertura abierta $\mathcal{V}$ posee una subcobertura finita, dada por $\mathcal{V}'' = \{V_\beta : V_\beta \in \tau_\gamma, \beta = 1, \ldots, n\}$. Por lo que

$$X_\alpha = \bigcup_{\beta=1}^{n} V_\beta.$$

Con lo anterior, tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} X &= X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{\alpha-1} \times \left(\bigcup_{\beta \in K} V_\beta \right) \times X_{\alpha+1} \times \cdots , \\ &= X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{\alpha-1} \times \left(\bigcup_{\beta=1}^{k} V_\beta \right) \times X_{\alpha+1} \times \cdots , \\ &= \bigcup_{\beta=1}^{k} (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{\alpha-1} \times V_\beta \times X_{\alpha+1} \times \cdots) \\ &= \bigcup_{\substack{\alpha \in J \\ \beta = 1, \ldots, k}} \pi_\alpha^{-1}(V_\beta). \end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathcal{A}' = \{\pi_\alpha^{-1}(V_\beta) \mid V_\beta \in \tau_\alpha, \alpha \text{ fijo }, \beta = 1, \ldots, n\} \subseteq \mathcal{A},$$

es subcobertura finita de $\mathcal{A}$; de este modo, probamos que cualquier cobertura abierta que solo posee elementos de la forma $\pi_\gamma^{-1}(V_\beta)$, posee una subcobertura finita; garantizando las hipótesis del Lema de la subbase de Alexander 1.11, concluyendo que (X, τ_p) es un espacio topológico compacto. □

A continuación, vamos a introducir la noción de categoría, pues es necesaria para enunciar el Teorema de Categorías de Baire; dicho resultado nos ayudará, para demostrar diversas propiedades en la sección de las convergencias débil y débil-*; es importante mencionar que las categorías se definen sobre espacios métricos, que vienen a ser espacios topológicos metrizables. Antes de dar dichas definiciones veremos algunos conceptos básicos de espacios métricos.

Definición 1.27 (Espacio métrico completo)**.** Un espacio métrico (X, d), se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X.

***Ejemplo* 1.8.** El subconjunto de los reales $\mathbb{R} \cap (0, 1]$, con la métrica dada por $d(x, y) = |x - y|$ no es un espacio completo.

Otra noción muy importante de los espacios métricos son los subconjuntos acotados, los cuales introducimos a continuación.

Definición 1.28 (Conjunto acotado)**.** Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice **acotado** si existe un $r > 0$ tal que $d(x, x) < r$, para todo $x, y \in X$. También podemos decir que $A \subseteq X$ es **acotado** si existe una bola $B_r(x_0)$ tal que

$$A \subseteq B_r(x_0).$$

De hecho podemos relacionar la compacidad con espacios métricos, utilizando el siguiente resultado.

Proposición 1.24. Sea (X, τ) un espacio métrico compacto. Si K es un subconjunto compacto en τ, entonces K es acotado.

Demostración. Sea $x \in K$ fijo. La colección de bolas,

$$\{B_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

es una cobertura abierta de K. Por la compacidad de K, esta posee una subcobertura finita de K tal que

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} B_n(x) \subseteq B_m(x).$$

Lo cual prueba que K es acotado. □

Ya que hemos introducido las propiedades más fundamentales de un espacio métrico, finalmente definiremos las categorías.

Definición 1.29. Sea (X,d) un espacio métrico y M un subconjunto de X.

a) M es **disperso** en X (o en ninguna parte denso), si $\overline{M}$ no tiene puntos interiores (y por ende no contiene ningún subconjunto abierto no vacío).

b) M es **escaso** en X (o de 1era categoría), si M es la unión contable de conjuntos dispersos en X.

c) M es **no escaso** en X (o de 2da categoría), si M no cumple con ser un conjunto escaso en X.

***Ejemplo* 1.9.**

- El conjunto de Cantor $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\left[\frac{3k+0}{3^n}, \frac{3k+1}{3^n} \right] \cup \left[\frac{3k+2}{3^n}, \frac{3k+3}{3^n} \right] \right)$ es un **conjunto disperso**, pues
$$\mathrm{Int}(C) = \mathrm{Int}(\overline{C}) = \emptyset.$$

- El conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ es de **1era categoría** en $\mathbb{R}$, dado que
$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}, \qquad \{r_n\} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \forall m \in \mathbb{Z} \right\},$$
donde $\{r_n\}$ es un conjunto disperso.

- $\mathbb{R}$ es de **2da categoría** en sí mismo.

Para explicar por qué $\mathbb{R}$ es de 2da categoría, tenemos el siguiente resultado.

***Teorema* 1.16** (Teorema de categorías de Baire)**.** *Si (X,d) es un espacio métrico completo, entonces X no es escaso en sí mismo. En consecuencia, si X es un espacio métrico completo tal que*
$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \qquad \textit{donde } A_k \textit{ es cerrado,}$$
entonces debe existir un A_k que contiene un subconjunto abierto no vacío de X.

Demostración. La demostración de este teorema será omitida. Véase [5], Capítulo 4, Sección 4.7, Teorema 4.7-2, páginas 247-248. □

***Ejemplo* 1.10.** El espacio $\mathbb{R}$ es de **segunda categoría**, pues es un espacio métrico completo con la métrica usual.

Capítulo 2

Fundamentos en Análisis Funcional

"La Matemática es la más hermosa y más potente creación del espíritu humano."

-Stefan Banach.

2.1. Espacios normados y de Banach

En esta sección iniciaremos con las nociones básicas de espacios vectoriales, de las cuales el lector probablemente tenga conocimiento; el propósito de esto es tener las bases para definir los espacios normados y de Banach.

Definición 2.1 (Espacio vectorial)**.** Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, es un conjunto X no vacío, dotado de dos operaciones: la adición y multiplicación por escalar, definidas como

$$\begin{aligned} + : X \times X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x + y, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times X &\longrightarrow X, \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha \cdot x. \end{aligned}$$

Donde, para todo x, y, $z \in X$, α, $\beta \in \mathbb{K}$, se cumple que:

EV1) $x + y = x + y$.

EV2) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

EV3) $\forall x \in X$, $\exists e \in X$ tal que $x + e = x$.

EV4) $\exists (-u) \in X$ tal que $x + (-x) = e$.

EV5) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$.

EV6) $\exists e \in \mathbb{K}$ tal que $e \cdot u = u$.

EV7) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

EV8) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$.

A un $\mathbb{K}-$espacio vectorial X, lo denotaremos por la dupla $(X, \mathbb{K})$.

Se puede intuir que existen los subespacios vectoriales, estos se definen a continuación.

Definición 2.2 (Subespacio vectorial)**.** Sea $(X, \mathbb{K})$ un espacio vectorial. Un subconjunto Y de X se dice **subespacio vectorial**, si satisface las siguientes condiciones:

S1) $0 \in Y$.

S2) $\beta Y + \alpha Y \subseteq Y$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Un subconjunto de un espacio vectorial $(X, \mathbb{K})$ nos permite generar nuevos subconjuntos dentro del mismo espacio vectorial; estos nuevos subconjuntos se clasifican según la forma en que se construyen.

Definición 2.3. Sean $(X, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, A y B subconjuntos de X, $\alpha \in \mathbb{K}$, definimos:

- **Traslación de un conjunto**,
  $x + A = \{x + a : a \in A\}$.
- **Homotecia de un conjunto,**
  $\alpha A = \{\alpha \cdot a : a \in A\}$.
- **Suma de conjuntos,**
  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Además de los conjuntos anteriores, existen otros tipos de espacios vectoriales, los cuales estaremos muy interesados en estudiar.

Definición 2.4 (Conjunto convexo). Sea $(X, \mathbb{K})$ un espacio vectorial. Un subconjunto A de X, se dice **convexo** si

$$tA + (1-t)A \subseteq A, \qquad \text{siempre que } 0 \leq t \leq 1.$$

***Ejemplo* 2.1.**

- En $\mathbb{R}$, los intervalos son subconjuntos convexos.
- En $\mathbb{R}^2$, los polígonos regulares sólidos son conjuntos convexos.
- En $\mathbb{R}^2$, el conjunto $S = \{(x,y) | x = 0 \vee y = 0\}$ no es convexo.

Definición 2.5 (Conjunto balanceado). Sea $(X, \mathbb{K})$ un espacio vectorial. Un subconjunto A de X se dice **balanceado**, si $\alpha A \subseteq A$ siempre que $\alpha \in \mathbb{K}$ y $|\alpha| \leq 1$.

***Ejemplo* 2.2.**

- Los conjuntos balanceados de $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ son: $\mathbb{C}$, $\emptyset$, las bolas abiertas y las bolas cerradas con centro $(0,0)$.
- Los conjuntos balanceados de $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ son: las rectas cuyo punto medio es $(0,0)$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$ y las bolas tanto abiertas como cerradas con centro $(0,0)$.
- En $(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, el conjunto $S = \{(x,y) \in R^2 \mid x = 0 \vee y = 0\}$ es balanceado.
- En $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, las bolas con centro cero son convexas.

Definición 2.6 (Conjunto simétrico). Sea $(X, \mathbb{K})$ un espacio vectorial. Un subconjunto A de X es **simétrico**, si $-A = A$.

Proposición 2.1. Sea $(X, \mathbb{K})$ un espacio vectorial,

a) Si A es balanceado, entonces A es simétrico.

b) Si Y es un subespacio vectorial de X, entonces es un conjunto balanceado.

Demostración.

a) Sea $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha| \leq 1$. Al tomar $\alpha = -1$, se cumplirá que

$$-A \subseteq A \quad \Longrightarrow \quad A \subseteq -A,$$

lo cual demuestra que A es simétrico.

b) Dado que Y un subespacio vectorial de X, se cumple que:

- $0 \in Y$.
- $\beta Y + \alpha Y \subseteq Y$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

En particular, al tomar α, $\beta \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha| \leq 1$ y $\beta = 0$, se tiene que

$$0Y + \alpha Y \subseteq Y.$$

Notamos que, $0Y = \{0 \cdot y : y \in Y\} = \{0\}$, así que

$$0Y + \alpha Y = \{0\} + \alpha Y = \alpha Y \subseteq Y.$$

Probando que $\alpha Y \subseteq Y$, siempre que $|\alpha| < 1$; es decir, Y es balanceado.

□

Nota. A la dimensión de un espacio vectorial $(X, \mathbb{K})$, la denotamos como $\dim(X)$.

Proposición 2.2. Sea $(X, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial de dimensión finita. Si Y es un subespacio vectorial, se satisface que $\dim Y \leq \dim X$.

Proposición 2.3. Los únicos subespacios de $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ son: $\emptyset$ y $\mathbb{R}$.

Sabemos que $\dim(\mathbb{R}) = 1$, por la Proposición 2.2, la dimensión de los subespacios de $\mathbb{R}$ debe ser 0 o 1; los únicos subespacios que satisfacen esto, son $\emptyset$ y $\mathbb{R}$.

2.1.1. Espacios normados

Una vez hemos definido un espacio vectorial podemos definir un espacio normado, los cuales están relacionados directamente con los espacios de Banach.

Definición 2.7 (Espacios normados)**.** Un espacio vectorial $(X, \mathbb{K})$ con una norma definida sobre el, es llamado **espacio normado**; el cual denotaremos por la dupla $(X, \|\cdot\|)$.

Proposición 2.4. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces satisface la **desigualdad triangular inversa**.

$$|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Demostración. Sabemos que la norma cumple la desigualdad triangular. Así que, al tomar $x, y \in A$, se cumple que

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \quad \Longrightarrow \quad \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|.$$

De forma similar, al intercambiar x con y se obtiene que

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| = \|y - x\| \Longrightarrow -\|y - x\| \leq \|y\| - \|x\|.$$

Uniendo ambas desigualdades, tenemos que

$$-\|y - x\| \leq \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|.$$

Es decir, $|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|, \forall x, y \in X$, que es lo que se deseaba probar. □

Proposición 2.5. La norma es una función continua en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, tomemos $\delta = \varepsilon$. Asumamos que $\|x - y\| < \delta$, aplicando la desigualdad triangular inversa, tenemos que

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon.$$

Lo cual prueba que la norma continua para todo $x, y \in X$. □

En los espacios métricos, se sabe que la cerradura de la bola cerrada de forma general no coincide con la bola cerrada; sin embargo, coinciden en los espacios normados. Veremos dicho resultado en la siguiente proposición.

Proposición 2.6. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces $\overline{B_r(x_0)} = \overline{B}_r(x_0)$; donde $\overline{B}_r(x_0)$ es la bola cerrada con centro x_0 y radio r, y $\overline{B_r(x_0)}$ es la cerradura de la bola abierta con centro x_0 y radio r.

Demostración.
" $\subseteq$ " Por definición de cerradura, $\overline{B_r(x_0)}$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a $B_r(x_0)$; $\overline{B}_r(x_0)$ es un conjunto cerrado que evidentemente contiene a $B_r(x_0)$, entonces debe ser que

$$\overline{B_r(x_0)} \subseteq \overline{B}_r(x_0).$$

" $\supseteq$ " Sea $y \in \overline{B}_r(x_0)$, tenemos dos casos

Caso 1) Si $\|y - x_0\| < r$, entonces $y \in B_r(x_0)$; por definición $B_r(x_0) \subseteq \overline{B_r(x_0)}$, así que $y \in \overline{B_r(x_0)}$.

Caso 2) $\|y - x_0\| = r$; para probar que $y \in \overline{B_r(x_0)}$, debe existir una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge al elemento $y \in \overline{B_r(x_0)}$.

Construyamos la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde

$$y_n = x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(y - x_0), \quad \forall n = 1, 2, 3, \cdots .$$

Además, notamos que

$$\begin{aligned}
\|y_n - x_0\| &= \left\| \left(1 - \frac{1}{n}\right)(y - x_0) \right\| \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|y - x_0\| \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right) r \\
&< r.
\end{aligned}$$

Con la desigualdad anterior, demostramos que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B_{x_0}(r)$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, tomemos $r > 0$; por la propiedad arquimediana existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$N\varepsilon > r \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon/r > 1/N, \qquad \text{para todo } n > N.$$

Por lo cual

$$\begin{aligned}
\|y_n - y\| &= \left\| x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(y - x_0) - y \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{n}x_0 - \frac{1}{n}y \right\| \\
&= \frac{1}{n}\|x_0 - y\| \\
&= \frac{1}{n}r \\
&< \frac{\varepsilon}{r}r = \varepsilon,
\end{aligned}$$

Lo anterior, prueba que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y. De esta forma, se verfica que $y \in \overline{B_r(x_0)}$.

□

Proposición 2.7. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces toda bola cerrada $\overline{B}_r(x_0)$ es convexa.

Demostración. Tomemos $0 \leq t \leq 1$. Sea $x, y \in \overline{B}_r(x_0)$, así que $\|y - x_0\| \leq r$, $\|z - x_0\| \leq r$. Deseamos probar que $ty + (1-t)z \in \overline{B}_r(x_0)$. Notamos que

$$\begin{aligned}
\|ty + (1-t)z - x_0\| &= \|ty + (1-t)z - tx_0 - (1-t)x_0\| \\
&= \|t(y - x_0) + (1-t)(z - x_0)\| \\
&\leq \|t(y - x_0)\| + \|(1-t)(z - x_0)\| \\
&= t\|y - x_0\| + (1-t)\|z - x_0\| \\
&\leq tr + (1-t)r \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

La desigualdad anterior, prueba que $ty + (1-t)z \in \overline{B}_r(x_0)$. Por lo tanto, $\overline{B}_r(x_0)$ es un conjunto convexo. □

En Matemática es de suma importancia la definición de un conjunto acotado (que es muy conocida en espacios métricos); sin embargo, podemos seguir teniendo noción de estos en los espacios normados.

Definición 2.8 (Conjunto acotado)**.** Sea un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Un subconjunto M se dice **acotado** si y solamente si existe un número c positivo tal que $\|x\| \leq c$ para todo $x \in M$.

Al igual que en espacios métricos, podemos definir un conjunto acotado en términos de una bola, dicho resultado lo estudiamos a continuación.

Proposición 2.8. Sea $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado. Un subconjunto M es **acotado** si existe $0 < r < \infty$ tal que

$$M \subseteq B_r(0).$$

Demostración. M es un conjunto acotado; por definición existe un número c positivo tal que $\|x\| \leq c$, para todo $x \in M$. Al tomar $r = c + 1$, podemos crear la bola $B_r(0)$.

Obteniendo que

$$\|x\| \leq c \Longrightarrow \|x\| < c + 1 \Longrightarrow x \in B_r(0).$$

Como esto se verifica para todo $x \in M$, se puede concluir que $M \subseteq B_r(0)$. □

Proposición 2.9. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces la bola cerrada $\overline{B}_r(x_0) \subseteq X$ es un conjunto cerrado y acotado en X.

Demostración. Ya que estamos en un espacio normado, por la Proposición 2.6 tenemos que $\overline{B}_r(x_0) = \overline{B_r(x_0)}$; así que $\overline{B}_r(x_0)$ es un conjunto cerrado.

Tomando $\varepsilon = \|x_0\|$, podemos definir la bola $B_{\varepsilon+r}(0)$. Al tomar $y \in \overline{B_r(x_0)}$ se cumple que $\|y - x_0\| < r$; además, se puede ver que

$$\|y\| = \|y - x_0 + x_0\| \leq \|y - x_0\| + \|x_0\| < r + \varepsilon.$$

La desigualdad anterior prueba que $y \in B_{\varepsilon+r}(0)$ y por ende que $\overline{B_r}(x_0)$ es acotado, por la Proposición 2.8. □

***Lema* 2.1.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$, un espacio normado de dimensión arbitraria. Si $x_1, \ldots, x_n \in X$ son vectores linealmente independientes, entonces existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_1|).$$

Para cualquier colección $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Demostración. La demostración de este lema será omitida. Véase [5], Capítulo 2, Sección 2.4, Lema 2.4-1, página 72-73. □

Nota. La constante c depende únicamente de x_1, x_2, …, x_n. Además, se tiene que

$$\dim(X) \geq n.$$

2.1.2. Espacios de Banach

La importancia de los espacios normados estudiados anteriormente, son las propiedades que se cumplen sobre ellos; además, nos ayudan a definir otro tipo de espacios vectoriales que son muy importantes en las Matemáticas; nos referimos a los espacios de Banach, estos son llamados así en honor del Matemático polaco *Stefan Banach*.

Definición 2.9 (Espacio de Banach)**.** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si X es un espacio completo, decimos que X es un **espacio de Banach**.

Nota. Recordemos que el espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, es un espacio métrico donde la métrica inducida por la norma $d(x, y) = \|x - y\|$.

***Ejemplo* 2.3.**

- El conjunto de los racionales $\mathbb{R} \cap (0, 1]$, con la norma dada por $\|x - y\| = |x - y|$, no es un espacio de Banach. (Véase Ejemplo (1.8))
- Los reales $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ son un espacio de Banach. (Véase [5], Capítulo 1, Sección 1.5, Ejemplo 1.5-1, página 33).
- $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach bajo la norma-p, definida por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}, \quad x = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \text{ con } a_n \in \mathbb{C},$$

  siempre que tomemos un p fijo tal que $1 \leq p < \infty$. (Ver [5], Capítulo 1, Sección 1.5, Ejemplo 1.5-2, página 33-32).

Siempre que estudiamos un tipo de espacio, es normal definir un subespacio. A continuación, definimos un subespacio normado.

Definición 2.10 (Subespacio normado)**.** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si Y es un subespacio vectorial de X, entonces Y será un **subespacio normado** de X bajo la norma $\|\cdot\|_Y$.

La norma $\|\cdot\|_Y$ es la restricción del dominio de la norma X a Y.

***Teorema* 2.1.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un espacio de Banach si y solamente si Y es un subespacio cerrado en X.*

Demostración.
" $\Longrightarrow$ ". Suponemos que $(X, \|\cdot\|_Y)$ es un espacio de Banach. Debemos probar que Y es cerrado, es decir $\overline{Y} = Y$; por definición de cerradura $Y \subseteq \overline{Y}$, así que nos falta probar que $\overline{Y} \subseteq Y$.

Sea $x \in \overline{Y}$, así que, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y \subseteq X$ tal que

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x, \quad n \to \infty.$$

Por la completitud de X, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X, y por ende en Y; en consecuencia, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en Y, es decir, existe $y \in Y$ tal que

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y, \quad n \to \infty.$$

Por la unicidad del límite, debe ser que $x = y$, así que $x \in Y$; de esta forma concluimos que $\overline{Y} \subseteq Y$ y probamos que Y es cerrado.

" $\Longleftarrow$ " Suponemos que Y es un subconjunto cerrado en X, es decir $Y = \overline{Y}$.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ una sucesión de Cauchy arbitraria, evidentemente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y \subseteq X$; en consecuencia, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X. Ya que X es un espacio de Banach, dicha sucesión es convergente en X, es decir $\exists x \in X$ tal que

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x, \quad n \to \infty.$$

Por definición de cerradura, dado que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y = \overline{Y}$, obtenemos que $x \in Y$; en otras palabras, hemos probado que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en Y, lo cual verifica que toda sucesión de Cauchy es convergente en Y; por tanto, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un espacio de Banach. $\square$

***Ejemplo* 2.4.** Sea $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ un espacio de Banach. $(0,1]$ no es un subespacio cerrado de $\mathbb{R}$, entonces $(\mathbb{R} \cap (0,1], |\cdot|)$ no es un espacio de Banach. (Ver Ejemplo (1.8))

A continuación, introduciremos conceptos que son muy comunes en los espacios vectoriales; sin embargo, daremos su definición de forma más general, para espacios topológicos.

Definición 2.11 (Espacio denso, separable y total)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto M es **denso**, si se cumple que

$$\overline{M} = X.$$

X es **separable**, si posee un subconjunto denso y numerable; un subconjunto M se dice **total**, si $\mathrm{Span}(M)$ es denso en X.

El siguiente resultado es de gran utilidad para identificar cuando un espacio o un subespacio es de Banach.

***Teorema* 2.2.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, Y un subespacio normado.*

a) Si $\dim(Y) < \infty$, entonces $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un espacio de Banach.

b) Si X es un espacio normado de dimensión finita, entonces X es un espacio de Banach.

Demostración.

a) Suponemos que $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un subespacio normado de $(X, \|\cdot\|)$, donde $\dim(Y) < \infty$. Dada la dimensión finita, definimos la siguiente colección,

$$\{e_1, \cdots, e_n\}$$

la cual es una base del subespacio Y. Tomemos $\{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq Y$ una sucesión de Cauchy en Y, cada $y_m \in Y$ tiene una representación única como combinación lineal de elementos de la base, dada por,

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n,$$

donde $\alpha_1^{(m)}, \ldots, \alpha_n^{(m)} \in \mathbb{K}$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Por el Lema 2.1, podemos garantizar la existencia de una constante $c > 0$ (la cual depende $e_1, \ldots, e_n$) tal que

$$\|\tilde{\alpha_n} e_1 + \cdots + \tilde{\alpha_n} e_n\| \geq c(|\tilde{\alpha_1}| + \cdots + |\tilde{\alpha_n}|),$$

para cualesquiera $\tilde{\alpha_1}, \ldots, \tilde{\alpha_n} \in \mathbb{K}$.

Al ser de Cauchy, sucede que $\forall \varepsilon$, $\exists N \in \mathbb{N}$, si $r > m > N$, se tiene que

$$\|y_m - y_r\| < \varepsilon.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> \|y_m - y_r\| \\
\varepsilon &> \left\|(\alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n) - (\alpha_1^{(r)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(r)} e_n)\right\| \\
\varepsilon &> \left\|(\alpha_1^{(m)} - \alpha_1^{(r)}) e_1 + \cdots + (\alpha_n^{(m)} - \alpha_n^{(r)}) e_n\right\| \\
\varepsilon &> c\left|(\alpha_1^{(m)} - \alpha_1^{(r)}) + \cdots + (\alpha_n^{(m)} - \alpha_n^{(r)})\right| \\
\varepsilon/c &> \left|(\alpha_1^{(m)} - \alpha_1^{(r)}) + \cdots + (\alpha_n^{(m)} - \alpha_n^{(r)})\right|.
\end{aligned}$$

De la desigualdad anterior, notamos que para cada $i = 1, \ldots, n$, se cumple que

$$\left|\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}\right| < \frac{\varepsilon}{c} < \varepsilon.$$

De momento, para todo $\varepsilon > 0$ hemos garantizado que $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que, si $r > m > N$, entonces $\left|\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}\right| < \varepsilon$; lo cual prueba, que la sucesión $\{\alpha_i^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, es de Cauchy en $\mathbb{K}$, para cada $i = 1, \cdots, n$. Recordemos que $\mathbb{K}$ es un espacio de Banach, así que, dicha sucesión es convergente; es decir,

$$\alpha_i^{(m)} \longrightarrow \alpha_i, \quad m \to \infty.$$

Como siguiente punto, vamos a definir $y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$.

Por la convergencia de $\{\alpha_i^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N_i \in N$ tal que si $m > N_i$, entonces $|\alpha_i^{(m)} - \alpha_i| < \varepsilon$; esto se cumple para cada $i = 1, \cdots, n$. Al tomar $N = \max\{N_i : i = 1, \cdots, n\}$, si $m > N$, entonces

$$\left|\alpha_i^{(m)} - \alpha_i\right| < \varepsilon, \text{ para todo } i = 1, \cdots, n.$$

En particular, dicha desigualdad se cumplirá para $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{(n\|e_i\|)}$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, si $m > N$, entonces

$$\begin{aligned}
\|y_m - y\| &= \left\|\alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\right\| \\
&= \left\|(\alpha_1^{(m)} - \alpha_1)e_1 + \cdots + (\alpha_n^{(m)} - \alpha_n)e_n\right\| \\
&\leq \left\|(\alpha_1^{(m)} - \alpha_1)e_1\right\| + \cdots + \left\|(\alpha_n^{(m_k)} - \alpha_n)e_n\right\| \\
&\leq \left|(\alpha_1^{(m)} - \alpha_1)\right|\|e_1\| + \cdots + \left|(\alpha_n^{(m)} - \alpha_n)\right|\|e_n\| \\
&< \frac{\varepsilon}{n\|e_1\|}\|e_1\| + \cdots + \frac{\varepsilon}{n\|e_n\|}\|e_n\| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

De esta forma, hemos probado que

$$y_m \longrightarrow y, \quad m \to \infty, \qquad \text{donde } y = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in Y.$$

Dicha convergencia, muestra que toda sucesión de Cauchy es convergente en Y; por lo tanto, Y es un espacio de Banach.

b) X es un subespacio normado en sí mismo. Al aplicar el literal a) que acabamos de probar, ya que X tiene dimensión finita, tenemos que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

$\square$

Ahora veremos un resultado que nos brinda una caracterización de los subespacios de dimensión finita con respecto a la cerradura de estos.

***Teorema* 2.3.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado. Si Y es un subespacio normado de dimensión finita, entonces Y es cerrado en X.*

Demostración. Tenemos que $\dim(Y) < \infty$, por el Teorema (2.1) literal a), $(Y, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Debemos probar que $Y = \overline{Y}$, por definición de cerradura $Y \subseteq \overline{Y}$. Solamente nos falta probar la otra inclusión.

Tomemos $y \in \overline{Y}$, sabemos que $\exists \{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq Y$ tal que

$$y_m \longrightarrow y, \qquad m \to \infty.$$

Ya que Y es un espacio de Banach, la sucesión $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy en Y, por ende, dicha sucesión converge a un elemento $z \in Y$. Utilizando la unicidad del límite, tenemos que $z = y \in Y$, lo cual muestra que $\overline{Y} \subseteq Y$. Probando que Y es cerrado en X. □

Nota. En la demostración del Teorema 2.3, solamente se utilizó el hecho que $Y \subseteq X$ es un espacio completo; en general Y será cerrado siempre que sea completo y esto es independiente del hecho que X sea un espacio completo o no.

2.2. Espacios vectoriales topológicos

A continuación, introduciremos una nueva estructura, donde se relacionan los espacios topológicos con los espacios vectoriales; con ella, obtendremos resultados específicos que se logran únicamente trabajando sobre dicha estructura. En esta sección estudiaremos nos guiaremos el texto de [8], capítulo 1, páginas 3 - 41.

En el Capítulo 1 y en la Sección 2.1 mencionamos algunas propiedades de los espacios vectoriales y estudiamos los espacios topológicos; con esto, finalmente estamos listos para definir la estructura más importante de dicho trabajo, los **espacios vectoriales topológicos**.

Nota. A partir de este punto, denotaremos, de forma indistinta por $\mathbb{K}$ al cuerpo de los reales o los complejos.

Definición 2.12 (Espacio vectorial topológico)**.** Sea X un conjunto no vacío. Dado (X, τ) un espacio topológico y $(X, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, decimos que X es un **espacio vectorial topológico**, si se verifica que:

1. Cada punto de X es un conjunto cerrado.

2. Las operaciones del espacio vectorial son continuas con respecto a τ.

Bajo este contexto, a τ le llamamos **topología vectorial**.

Recordemos que las operaciones del espacio vectorial (adición y multiplicación por escalar) están definidas por.

$$\begin{aligned} + : X \times X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x + y, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times X &\longrightarrow X \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha \cdot x. \end{aligned}$$

Cuando hablamos de la continuidad de estas dos operaciones, nos referimos a la continuidad bajo topología producto en $X \times X$ y en $\mathbb{K} \times X$, la cual depende de la topología vectorial.

Una de las ventajas de trabajar sobre un espacio vectorial topológico, es el hecho que existen formas alternativas de probar la continuidad. A continuación, veremos un resultado que nos permitirá probar la continuidad de la adición y multiplicación por escalar de una forma diferente.

***Teorema* 2.4.** *Sea X un espacio vectorial topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La adición es continua.*
2. *Dados x_1, $x_2 \in X$ arbitrarios. Para todo vecindario abierto V de $x_1 + x_2$, existen vecindarios abiertos V_1 y V_2 de x_1 y x_2, respectivamente, tal que $V_1 + V_2 \subseteq V$.*

Demostración.
"$\Longrightarrow$" $+$ es una función continua. Por el Teorema 1.4 literal d), para todo $(x_1, x_2) \in X \times X$ y cada vecindario abierto V de $+(x_1, x_2)$, existe un vecindario abierto V' de (x_1, x_2) tal que

$$+(V') \subseteq V.$$

Tenemos que V' es un vecindario abierto de (x_1, x_2). Por otro lado, el espacio $X \times X$ se trabaja con la topología producto 1.15, en consecuencia, deben existir dos vecindarios abiertos V_1 y V_2 de x e y, respectivamente tal que

$$V' = V_1 \times V_2.$$

Dada la continuidad $+$, tenemos la siguiente relación,

$$+(V_1 \times V_2) = +(V') \subseteq V.$$

Notamos que $+(V_1 \times V_2) = V_1 + V_2$, entonces

$$+(V_1 \times V_2) = V_1 + V_2 \subseteq V.$$

Probando lo que se deseaba.

"$\Longleftarrow$" Como hipótesis, sean x_1, $x_2 \in X$, arbitrarios. Si V es un vecindario arbitrario de $x_1 + x_2$, entonces existen vecindarios abiertos V_1 y V_2 de x_1 y x_2, respectivamente, tal que

$$V_1 + V_2 \subseteq V. \tag{2.1}$$

Notamos que $V_1 \times V_2$ es un vecindario abierto de (x_1, x_2) en $X \times X$ (pues trabajamos sobre la topología producto). Utilizando el hecho que $+(V_1 \times V_2) = V_1 + V_2$ y la inclusión (2.1), tenemos que

$$V_1 + V_2 = +(V1 \times V_2) \subseteq V \quad \Longrightarrow \quad +(V1 \times V_2) \subseteq V,$$

lo cual prueba que $+$ es una función continua, según el literal d) del Teorema 1.4. $\square$

Ahora probaremos un resultado análogo para la multiplicación por escalar.

***Teorema* 2.5.** *Sea X un espacio vectorial topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La multiplicación por escalar es continua.*
2. *Sean $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ arbitrarios. Si V es un vecindario abierto arbitrario de $\alpha \cdot x$, entonces existen $r \in \mathbb{K}$, $r > 0$ y un vecindario abierto W de x tal que*

$$\beta W \subseteq V, \quad \textit{siempre que} \quad |\beta - \alpha| < r.$$

Demostración.
"$\Longrightarrow$"$\cdot$ es continua. Por el Teorema 1.4, dado $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times X$ arbitrario, si V es un vecindario abierto de $\cdot(\alpha, x)$, entones existe un vecindario abierto V' de (α, x) tal que

$$\cdot(V') \subseteq V.$$

V' es un vecindario abierto de (α, x), en $X \times \mathbb{K}$; por ello

$$V' = V_1 \times V_2,$$

donde V_1 y V_2, son vecindarios abiertos de α y x, respectivamente.

Recordemos que $\mathbb{K}$ es el campo de los reales o los complejos. La colección de las bolas abiertas es base para la topología usual, tanto de los reales como de los complejos; en consecuencia, $\exists r > 0$ tal que

$$B_r(\alpha) = \{\beta \in \mathbb{K} \mid |\beta - \alpha| < r\} \subseteq V_1.$$

Por la continuidad de $\cdot$, tenemos la siguiente relación

$$\cdot(V_1 \times V_2) = \cdot(V') \subseteq V.$$

Notamos lo siguiente

$$\cdot(B_r(\alpha) \times V_2) \subseteq \cdot(V_1 \times V_2) \quad \Longrightarrow \quad \cdot(B_r(\alpha) \times V_2) \subseteq V$$

Donde

$$\cdot(B_r(\alpha) \times V_2) = B_r(\alpha) \cdot V_2 = \bigcup_{\beta \in B_r(\alpha)} \beta \cdot V_2.$$

Con dicha igualdad obtenemos que

$$\beta \cdot V_2 \subseteq V, \qquad \text{siempre que,} \quad \beta \in B_r(\alpha).$$

Demostrando lo que se deseaba.

"$\Longleftarrow$" Como hipótesis, dados $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ y un vecindario abierto arbitrario V de $\alpha \cdot x$, entonces existen $\exists r \in \mathbb{R}, r > 0$ y un vecindario abierto W de x tal que

$$\beta W \subseteq V \quad \text{siempre que} \quad |\beta - \alpha| < r.$$

Con los elementos anteriores definimos el conjunto

$$\{\beta \in \mathbb{K} \mid |\beta - \alpha| < r\} = B_r(\alpha) = V_1,$$

que es un vecindario abierto de α en $\mathbb{K}$. Por definición de la topología producto, $V_1 \times W$ es un vecindario abierto de (α, x) en $\mathbb{K} \times X$.

Por hipótesis,

$$\text{si } \beta \in B_r(\alpha) \quad \Longrightarrow \quad \beta W \subseteq V,$$

es decir,

$$\bigcup_{\beta \in B_r(\alpha)} \beta W \subseteq \bigcup_{\beta \in B_r(\alpha)} V = V.$$

Además, $\cdot(V_1 \times W) = \bigcup_{\beta \in V_1} \beta \cdot W$, de esta forma se concluye que,

$$\cdot(V_1 \times W) \subseteq V.$$

Probando que la multiplicación por escalar es continua bajo un espacio topológico, utilizando el literal d) del Teorema 1.4. □

Nota. Cuando digamos que X es un espacio vectorial topológico, asumiremos que trabajaremos con una topología vectorial arbitraria y con el cuerpo $\mathbb{K}$, excepto que se especifique tanto la topología τ, como el campo $\mathbb{K}$.

***Ejemplo* 2.5.** $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial topológico, con la topología usual como su topología vectorial y bajo el campo $\mathbb{R}$. A continuación, probaremos que cumple todos los criterios de un espacio vectorial topológico.

1. Sea $\{x\}$ un unipuntual arbitrario de $\mathbb{R}$, tenemos que

   $$\mathbb{R} \setminus \{x\} = (-\infty, x) \cup (x, \infty) \in \tau_{\text{usual}}.$$

   Así que $\{x\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$, probando así la primera condición.

2. Probaremos que la adición y la multiplicación por escalar son continuas.

   - Sean $r > 0 \in \mathbb{R}$ y $B_r(x+y)$ un vecindario arbitrario de $x+y$. Construyamos los vecindarios abiertos $B_{r/2}(x)$ y $B_{r/2}(y)$ de x e y, respectivamente; en consecuencia, $B_{r/2}(x) \times B_{r/2}(y)$ es un abierto en la topología producto. Deseamos verificar que

     $$+(B_{r/2}(x) \times B_{r/2}(y)) \subseteq B_r(x+y).$$

     Tomemos un punto arbitrario,

     $$x_1+y_1 \in +(B_{r/2}(x)\times B_{r/2}(y)) = B_{r/2}(x)+B_{r/2}(y), \qquad x_1 \in B_{r/2}(x), y_1 \in B_{r/2}(y).$$

     En consecuencia, $|x - x_1| < r/2$ y $|y - y_1| < r/2$. Tenemos la siguiente desigualdad

     $$\begin{aligned} |x+y-(x_1+y_1)| &= |x+y-x_1-y_1| \\ &= |(x-x_1)+(y-y_1)| \\ &\leq |x-x_1| + |y-y_1| \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\ &< r. \end{aligned}$$

     Esto prueba que $+(B_{r/2}(x) \times B_{r/2}(y)) \subseteq B_r(x+y)$, verificando la continuidad de la adición.

   - Sean $r > 0 \in \mathbb{R}$ y $B_r(\alpha \cdot x)$ un vecindario arbitrario de $\alpha \cdot x$. dado que x, r son fijos, podemos definir

     $$\delta = \sqrt{\frac{r}{3(|x|+|\alpha|+1)}}.$$

     Con dicho $\delta > 0$ definimos los vecindarios abiertos $B_\delta(\alpha)$ y $B_\delta(x)$ de α y x, respectivamente. Además, $B_\delta(\alpha) \times B_\delta(x)$ es abierto en la topología producto. Lo que haremos, será verificar que

     $$\cdot(B_\delta(\alpha) \times B_\delta(x)) \subseteq B_r(\alpha \cdot x).$$

     Tomemos un punto arbitrario

     $$\beta \cdot x_1 \in \cdot(B_\delta(\alpha) \times B_\delta(x)), \qquad \beta \in B_\delta(\alpha), x_1 \in B_\delta(x).$$

     En consecuencia, $|\alpha - \beta| < \delta$ y $|x - x_1| < \delta$. Tenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
|\alpha \cdot x - (\beta \cdot x_1)| &= |\alpha \cdot x - \alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot x_1 - \beta \cdot x_1| \\
&\leq |\alpha \cdot x - \alpha \cdot x_1| + |\alpha \cdot x_1 - \beta \cdot x_1| \\
&\leq |\alpha \cdot (x - x_1)| + |(\alpha - \beta) \cdot x_1| \\
&\leq |\alpha||x - x_1| + |\alpha - \beta||x_1| \\
&< |\alpha|\delta + \delta|x_1| \\
&< \delta|\alpha| + \delta(\delta + |x|) \\
&< \sqrt{\frac{r}{3(|\alpha| + |x| + 1)}}|\alpha| + \frac{r}{(3(|\alpha| + |x| + 1))} + \sqrt{\frac{r}{3(|\alpha| + |x| + 1)}}|x| \\
&< \frac{r}{3(|\alpha| + |x| + 1)}|\alpha| + \frac{r}{(3(|\alpha| + |x| + 1))} + \frac{r}{3(|\alpha| + |x| + 1)}|x| \\
&< \frac{r}{3} + \frac{r}{3} + \frac{r}{3} \\
&< r.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\cdot(B_\delta(\alpha) \times B_\delta(x)) \subseteq B_r(\alpha \cdot x)$, lo cual implica la continuidad de la multiplicación por escalar.

De esta forma, se probó que el espacio $\mathbb{R}$ con la topología usual como su topología vectorial y $\mathbb{R}$ como su campo de escalares, es un espacio vectorial topológico.

A continuación estudiaremos otro espacio vectorial topológico, el cual intuitivamente parece tener dicha estructura, pero es necesario comprobarlo.

Proposición 2.10. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces es un espacio vectorial topológico; donde la topología inducida por su norma τ es topología vectorial y $\mathbb{K}$ es su campo de escalares.

Demostración. Para probar que X es un espacio vectorial topológico, debemos verificar los dos axiomas de un espacio vectorial topológico dados en la definición 2.12.

Recordemos que la norma induce la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$ y con dicha métrica se induce la topología τ, la cual es generada por la base

$$\mathscr{B} = \{B_r(x) : x \in X, \;\; r > 0\}.$$

Con esto en mente, probaremos que X es un espacio vectorial topológico.

- Sea $\{x\}$ un conjunto unipuntual arbitrario, probaremos que $X \setminus \{x\}$ es abierto.

  Sea $y \in X \setminus \{x\}$ arbitrario y $\varepsilon = \|x - y\| > 0$. Para probar que U es abierto, debemos verificar la inclusión
  $$B_\varepsilon(y) \subseteq U.$$

  Sea $z \in B_\varepsilon(y)$, por lo que $\|y - z\| < \varepsilon$. Además se cumple que

  $$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &< \|x - z\| + \varepsilon. \end{aligned}$$

  Con la desigualdad anterior obtenemos que,

  $$\begin{aligned} \varepsilon &< \|x - z\| + \varepsilon \\ 0 &< \|x - z\|, \end{aligned}$$

  lo que implica que $x \neq z$; es decir, $z \in U = X \setminus \{x\}$. Por tanto, U es abierto, y por ende $\{x\}$ es cerrado.

- Probando que la adición es continua.

  Sea $V \in \tau_{\text{usual}}$ un vecindario abierto de $+(x_1, x_2) = x_1 + x_2$; en consecuencia, existe un $r > 0$ tal que
  $$B_r(x_1 + x_2) \subseteq V.$$

  Con dicho r, construyamos los vecindarios abiertos, $B_{r/2}(x_1)$ y $B_{r/2}(x_2)$ de x_1 y x_2, respectivamente. Al tomar

  $$y_1 \in B_r(x_1), \quad y_1 \in B_r(x_1) \qquad \Longrightarrow \qquad y_1 + y_2 \in B_r(x_1) + B_r(x_2),$$

  en consecuencia, $\|x_1 - y_1\| < r/2$, $\|x_2 - y_2\| < r/2$. Utilizando lo anterior, tenemos la siguiente desigualdad

  $$\begin{aligned} \|x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)\| &\leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| \\ &< (r/2) + (r/2) \\ &< r. \end{aligned}$$

  Con esto probamos que $x_1 + x_2 \in B_r(x_1 + x_2) \subseteq V$, lo que implica que

  $$B_{r/2}(x_1) + B_{r/2}(x_2) \subseteq V.$$

  De esta forma, hemos demostrado que la adición es continua.

- Probando que la multiplicación por escalar es continua.

  Sean $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. V es un vecindario abierto arbitrario de $\alpha \cdot x$ en X, así que, existe un $r > 0$ tal que $B_r(\alpha \cdot x) \subseteq V$.

  Con dicho r, definamos $\delta = r/2(\|x\| + |\alpha|)$ y consideremos el vecindario abierto $B_\delta(x)$ de x; a su vez, tomemos los escalares, $\beta \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha - \beta| < \delta$. Deseamos verificar que $\beta \cdot B_\delta(x) \subseteq V$

  Tomemos $y \in B_\delta(x)$, así que $\beta \cdot y \in \beta \cdot B_\delta(x)$. Utilizando lo anterior, tenemos la siguiente desigualdad,

$$\begin{aligned}
\|\alpha x - \beta y\| &= \|\alpha x - \beta x + \beta x - \beta y\| \\
&\leq \|\alpha x - \beta x\| + \|\beta x - \beta y\| \\
&\leq |\alpha - \beta|\|x\| + |\beta|\|x - y\| \\
&< \delta\|x\| + |\beta|\delta \\
&< \frac{r}{2(\|x\| + |\alpha|)}\|x\| + |\beta|\frac{r}{2(\|x\| + |\alpha|)} \\
&< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\
&< r.
\end{aligned}$$

  Dicha igualdad, prueba que

$$\beta B_\delta(x) \subseteq B_r(\alpha x) \subseteq V \quad \Longrightarrow \quad \beta B_\delta(x) \subseteq V.$$

  Con esto, hemos demostrado que la multiplicación por escalar es continua.

De esta forma hemos probado que todo espacio normado es un espacio vectorial topológico, donde la topología vectorial es la topología inducida por la norma. □

En los espacios vectoriales topológicos, existen diversas definiciones que podemos reescribir al trabajar en esta estructura. Ahora, definimos un conjunto acotado bajo un espacio vectorial topológico.

Definición 2.13 (Conjunto Acotado)**.** Sea X un espacio vectorial topológico. Un subconjunto A se dice **acotado**, si para todo vecindario abierto V de 0, existe un número $s > 0$ tal que $A \subseteq tV$, siempre que $t > s$.

Existen algunos conjuntos los cuales a simple vista podemos decir si son acotados o no. La siguiente proposición nos brinda una forma "más sencilla" de identificar los conjuntos acotados en un espacio vectorial topológico.

Proposición 2.11. Sea X un espacio vectorial topológico, entonces:

a) Todo subespacio $Y \subseteq X$ distinto del trivial, no es acotado.

b) Los conjuntos finitos son acotados.

Demostración.

a) Sea Y es un subespacio no trivial.

Tomemos $y \in Y \setminus \{0\}$. Por definición, $X \setminus \{y\}$ es un vecindario abierto, pues los unipuntuales son cerrados en X.

Sea $y \in Y$ dado anteriormente, tenemos que

$$y \notin X \setminus \{y\} \quad \Longrightarrow \quad ty \notin t(X \setminus \{y\})$$

para cualquier escalar $t \in \mathbb{K}$; en particular, lo anterior se cumple para $t = 1$, entonces $\exists y \in Y$ tal que

$$y \notin t(X \setminus \{y\}) \quad \Longrightarrow \quad Y \nsubseteq t(X \setminus \{y\}).$$

De esta forma, se concluye que Y no es acotado, pues encontramos un vecindario abierto de 0 que no satisface las condiciones necesarias para garantizar que Y es acotado.

b) Sea A un subconjunto finito de X. Sin perdida de generalidad asumiremos que posee un solo elemento $A = \{x\}$.

Sean $x \in A$, $0 \in \mathbb{K}$ y V un vecindario abierto arbitrario de $x \cdot 0 = 0$. Por la continuidad de la multiplicación por escalar, $\exists r >\in \mathbb{R}$ y W un vecindario abierto de x tal que

$$\beta W \subseteq V \text{ siempre que } |\beta| < r.$$

Con r dado, definamos $\delta = 1/r > 0$. En particular, la inclusión anterior se cumple para $\beta = \delta$, entonces

$$\delta W \subseteq V \Longrightarrow W \subset (1/\delta)V = rV$$

$$\text{por construcción, } A \subseteq W \Longrightarrow A \subseteq rV$$

$$A \subseteq rV \Longrightarrow A \subseteq \gamma V.$$

De esta forma, se verifica que si $r > 0$, entonces $A \subseteq \gamma V$, siempre que $\gamma > r$. Como V era un vecindario arbitrario de 0, se ha demostrado que A es acotado.

□

De la proposición anterior puede surgir una pregunta: ¿Qué sucede si un conjunto contiene un subespacio no trivial? ¿Podría ser acotado? Para responder dicha pregunta tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.12. Sean X un espacio vectorial topológico e Y un subespacio no trivial de X. Si U es un conjunto abierto tal que $Y \subseteq U$, entonces U no es acotado.

Demostración. Haremos esta prueba por contradicción, asumiremos que U es acotado.

Sea $y \in Y$. Dado que Y no es el subespacio trivial, $y \neq 0$. Definamos $V = X \setminus \{y\}$, el cual es un conjunto abierto, pues $\{y\}$ es cerrado por definición de un espacio vectorial topológico.

Ya que U es acotado, para todo vecindario abierto W de 0, $\exists s > 0$ tal que $U \subseteq tW$. siempre que $t > s$. En particular, la inclusión anterior se debe cumplir para $V = X \setminus \{y\}$; así que, $\exists s > 0$ tal que

$$U \subseteq tV \quad \text{siempre que} \quad t > s.$$

Al ser Y un subespacio vectorial, $\forall k \in \mathbb{K}$, se cumple que $kY \subseteq Y \subseteq U$, y se obtiene que

$$ty \in Y \implies ty \in U \implies ty \in tV \implies y \in V.$$

Lo anterior es una contradicción, pues por construcción $y \notin V$. De esta forma probamos que U es acotado. □

Probablemente, alguna vez hemos escuchado el término invarianza, el cual es muy usual en espacios métricos; sin embargo, también podemos dar una definición de invarianza en espacios vectoriales topológicos.

Definición 2.14 (Invarianza)**.** Sea X un espacio vectorial topológico. A cada elemento $a \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$, le asociamos el **operador traslación $\boldsymbol{T_a}$** y el **operador multiplicación $\boldsymbol{M_\lambda}$** respectivamente. Cada uno de ellos está definido como sigue:

$$\begin{aligned} T_a : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto a + x, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} M_\lambda : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \lambda x. \end{aligned}$$

Una vez definidas estas dos aplicaciones veremos una propiedad que cumplen tanto la traslación como la multiplicación, en la cual podremos ver de primera mano el porqué de su importancia. Vale la pena mencionar que a partir de este momento, utilizaremos con mucha frecuencia dichas aplicaciones.

Proposición 2.13. Sean X un espacio vectorial topológico, a un elemento de X y λ un elemento de $\mathbb{K}$, donde $\lambda \neq 0$. Las aplicaciones T_a y M_λ son homeomorfismos de X en X.

Demostración. Para probar que una aplicación es un homeomorfismo, debemos probar que es biyectivo y que tanto la aplicación como su inversa son continuas.

- **Probando que T_a es un homeomorfismo.** Inicialmente, verificaremos que es inyectivo. Sean $T_a(x)$, $T_a(y) \in X$ tal que

$$\begin{aligned} T_a(x) &= T_a(y) \\ a + x &= a + y \\ x &= y. \end{aligned}$$

Así que, T_a es inyectivo. Sea $y \in T_a(X)$, sabemos que $\exists x \in X$, tal que $y = x + a$, por lo que T_a es sobreyectivo. De esta forma hemos probado que T_a es biyectivo.

Ahora verifiquemos la continuidad de T_a.

Sea U un vecindario abierto arbitrario de $T_a(x) = a + x$, entonces $-a + U$ es un vecindario abierto de x, pues $-a + (a + x) = x \in -a + U$.

Sea $y \in T_a(-a + U)$, entonces $\exists x' \in -a + U$ tal que $y = T_a(x')$; tomamos $x' \in -a + U$, donde $x' = -a + x''$ con $x'' \in U$. Utilizando dichos elementos, obtenemos que

$$\begin{aligned} y &= T_a(x') \\ &= T_a(-a + x'') \\ &= a + (-a + x'') \\ &= a - a + x'' \\ &= x''. \end{aligned}$$

Hemos obtenido que $y = x''$, es decir $y \in U$; lo anterior, prueba que $T_a(-a + U) \subseteq U$, y se demuestra que T_a es una función continua por el literal d) del Teorema 1.4.

Ahora debemos verificar la continuidad de T_a^{-1}, dicha aplicación se define como

$$\begin{aligned} T_a^{-1} : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x - a. \end{aligned}$$

La prueba de su continuidad es análoga a la prueba que T_a es continua, por lo que se omitirá. Por tanto, hemos probado que T_a es un homeomorfismo.

- **Probando que M_λ es un homeomorfismo.** Inicialmente, verificamos que es inyectivo. Sean $M_\lambda(x)$, $M_\lambda(y) \in X$ tal que

$$\begin{aligned} M_\lambda(x) &= M_\lambda(y) \\ \lambda x &= \lambda y \\ x &= y, \text{ pues } \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

Así que M_λ es inyectivo. Sea $y \in M_\lambda(X)$ con $y = \lambda x$, sabemos que $\exists x \in X$, tal que $M_\lambda(x) = \lambda x$, por lo que M_a es sobreyectivo, demostrando que T_a es biyectivo.

Ahora verifiquemos la continuidad de la aplicación M_λ.

Sea U un vecindario arbitrario de $M_\lambda(x) = \lambda x \in U$, al mismo tiempo $(1/\lambda)U$ es un vecindario de x, pues $\lambda x \in U$ y por ende $(1/\lambda)(\lambda x) = x \in (1/\lambda)U$.

Sea $y \in M_\lambda((1/\lambda)U)$, así que $\exists x' \in (1/\lambda)U$ tal que $y = M_\lambda(x')$; por definición $x' = (1/\lambda)x''$, donde $x'' \in U$, así que

$$\begin{aligned} y &= M_\lambda(x') \\ &= M_\lambda((1/\lambda)x'') \\ &= \lambda((1/\lambda)x'') \\ &= x''. \end{aligned}$$

Como $y = x''$, entonces $y \in U$. Con ello probamos que $M_\lambda((1/\lambda)U) \subseteq U$, es decir que M_λ es continua, según el literal d) del Teorema 1.4.

Ahora debemos verificar la continuidad de M_λ^{-1}, dicha aplicación está definida como

$$\begin{aligned} M_\lambda^{-1} : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto (1/\lambda)x. \end{aligned}$$

La prueba de su continuidad es análoga a la prueba que M_λ es continua, por ello la omitiremos. De esta forma hemos probado que T_a es un homeomorfismo.

$\square$

La importancia de la proposición mostrada anteriormente, es el hecho que cada topología vectorial es invariante a traslaciones y homotecias; además, los homeomorfismos son aplicaciones abiertas y cerradas; por ello, al aplicar M_λ y T_a a un conjunto abierto arbitrario U de (X, τ), se cumple que tanto $T_a(U) = a + U$ como $M_\lambda(U) = \lambda U$ son conjuntos abiertos en (X, τ). Es decir, que las homotecias y traslaciones de conjuntos abiertos siguen siendo abiertos; análogamente, sucede lo mismo al aplicar dichas aplicaciones a conjuntos cerrados.

Dado que hemos hablado de vecindarios abiertos en espacios vectoriales topológicos, sabemos que todos ellos pertenecen a la topología vectorial. Por otro lado, recordemos que cuando tenemos una topología es usual hablar de bases. Resulta que bajo un espacio vectorial topológico es común trabajar con bases locales, la cuales se definen a continuación.

Definición 2.15 (Base local en a)**.** Sea X un espacio vectorial topológico y a un elemento de X. Una **base local en a** es una colección de conjuntos que cumple las siguientes condiciones:

1. Todos los elementos de $\mathscr{B}_a$ son conjuntos abiertos.
2. Todo elemento $B \in \mathscr{B}_a$, cumple que $a \in B$.
3. Si U es conjunto abierto tal que $a \in U$, entonces existe $B \in \mathscr{B}_a$ tal que $a \in B \subseteq U$.

Nota. En muchos libros de textos o fuentes bibliográficas, cuando aparece el término base local se refiere a una base local en 0. En el presente texto **no** se utilizará lo mencionado anteriormente.

Para ejemplificar de mejor manera lo que es una base local, damos el siguiente ejemplo en $\mathbb{R}$.

***Ejemplo* 2.6.** $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial topológico, con τ_{usual} como su topología usual y $\mathbb{K}$ su campo de escalares (ver ejemplo (2.5)).

Ahora probaremos que la siguiente colección es una base local en x, donde $x \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{B} = \left\{ \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Los $\mathscr{B}$, son intervalos abiertos. Por definición, se tiene que

$$\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) \in \tau_{\text{usual}}.$$

   En consecuencia, la colección $\mathscr{B} \subseteq \tau_{\text{usual}}$.

2. Por definición, $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right)$, $x \in \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right)$. Verificando el segundo axioma de base local.

3. Sea U un conjunto abierto de $\mathbb{R}$. Sabemos que τ_{usual} es generada por la base

$$\mathscr{B}_{\text{usual}} = \{(a, b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

   Entonces $\forall x \in U$, $\exists (a, b) \in \mathscr{B}_{\text{usual}}$ tal que $x \in (a, b) \subseteq U$, así que, $a < x < b$; al tomar un $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, de modo que

$$x - (1/n) \geq a, \quad \text{y} \quad x + (1/n) \leq b.$$

   Se satisface, que

$$x \in (x - (1/n), x + (1/n)) \subseteq (a, b) \subseteq U.$$

   Con ello probamos el tercer axioma de una base local.

Ahora veremos otro ejemplo, donde estudiaremos una base local para $\mathbb{K}$.

***Ejemplo* 2.7.** Sea $\mathbb{K}$ el espacio vectorial topológico, τ_{usual} es su topología vectorial y $\mathbb{K}$ es su campo de escalares. Lo que haremos será verificar que la colección,

$$\mathscr{B}_\alpha = \{B_r(\alpha) : r > 0\} = \{\beta \in \mathbb{K} : |\beta - \alpha| < r\}$$

es una base local de $\alpha \in \mathbb{K}$. Para ello probaremos los tres axiomas de una base local.

1. Sea $r > 0$ arbitrario, entonces la bola abierta $B_r(\alpha)$ es un conjunto abierto en τ_{usual}, así que, $\mathscr{B}_\alpha \subseteq \tau_{\text{usual}}$. Verificando así el primer axioma de una base local.

2. Tomemos $r > 0$ arbitrario. Tenemos que

$$|\alpha - \alpha| = |0| = 0 < r.$$

   Dicha desigualdad. verifica que $\alpha \in B_r(\alpha)$, entonces α pertenece a todo elemento $B_r(\alpha)$ de la base $\mathscr{B}_\alpha$.

3. Sea U un conjunto abierto en τ_{usual} tal que $\alpha \in U$. La colección

$$\mathscr{B} = \{B_{r'}(\alpha) : r' > 0\},$$

   es una base para τ_{usual}. En consecuencia, para $\alpha \in U$, existe $r' > 0$ tal que

$$\alpha \in B_{r'}(\alpha) \subseteq U.$$

   De esta forma, probamos que todo conjunto abierto que contiene a α, también contiene un elemento de la base local $\mathscr{B}_\alpha$. Conprobando el tercer axioma de una base local.

Una de las características más importantes de los espacios vectoriales topológicos, es el hecho que diversas propiedades se preservan bajo traslaciones. A continuación veremos uno de estos resultados.

Proposición 2.14. Sea X un espacio vectorial topológico y a un elemento de X.
Si $\mathscr{B}_a = \{B \ : \ a \in B\}$ es una base local de a en X, entonces la colección,

$$\mathscr{B}_{a+b} = \{B + b \ : \ B \in \mathscr{B}_a\}$$

es una base local de $a + b$ en X.

Demostración. Denotemos por τ a la topología vectorial de X. Debemos verificar que la colección $\mathscr{B}_{a+b}$ cumple los axiomas de una base local.

1. Sea $B \in \mathscr{B}_a$ un conjunto arbitrario. B es abierto, por ello $B + b$ también lo es; en consecuencia, $\mathscr{B}_{a+b} \subseteq \tau$. Probando el primer axioma de base local.

2. Sea $b + B \in \mathscr{B}_{a+b}$, donde $B \in \mathscr{B}_a$. Por definición $a \in B$, entonces $a + b \in b + B$. Por tanto, hemos comprobado el segundo axioma.

3. Sea U un conjunto abierto tal que $a+b \in U$, por ello, $a \in -b+U$. Dado que U es un conjunto abierto de a, existe un elemento $B \in \mathscr{B}_a$ tal que

$$B \subseteq -b+U \quad \Longrightarrow \quad b+B \subseteq U.$$

Es decir que existe un elemento $b+B \in \mathscr{B}_{a+b}$ tal que $b+B \subseteq U$. Lo cual verífica el tercer axioma de base local.

De esta forma hemos probado que la colección $\mathscr{B}_{a+b}$ es una base local de $a+b$. □

De momento, hemos definido una base local en un punto $a \in X$, donde X es un espacio vectorial topológico; a continuación, vamos a definir la base local de a en X, asumiendo que la topología vectorial τ es generada por una base $\mathscr{B}$.

Proposición 2.15. Sea X un espacio vectorial topológico y a un elemento de X. Si la topología vectorial está generada por la base $\mathscr{B}$, entonces la colección,

$$\mathscr{B}_a = \{B \ : \ a \in B, \ B \in \mathscr{B}\}$$

es una base local de a en X.

Demostración. Dado el espacio vectorial topológico X, denotemos por τ a su topología vectorial. Lo que haremos será probar que la colección $\mathscr{B}_a = \{B : a \in B, B \in \mathscr{B}\}$ cumple los axiomas de una base local.

1. $\mathscr{B}_a$ es una colección de básicos, entonces cada $B \in \mathscr{B}_a$ es abierto en sí mismo; por lo que $\mathscr{B}_a \subseteq \tau$, probando así el primer axioma de una base local.

2. Por definición de la colección $\mathscr{B}_a$, si $B \in \mathscr{B}_a$, entonces $a \in B$; verificando el segundo axioma de base local.

3. Sea U es conjunto abierto arbitrario tal que $a \in U$. Al ser U un abierto,

$$\forall y \in U, \exists B \in \mathscr{B} \quad \text{tal que} \quad y \in B \subseteq U.$$

En particular, para $a \in U$, $\exists B \in \mathscr{B}_a$ tal que $a \in B \subseteq U$, donde $B \in \mathscr{B}_a$. Verificando así el tercer axioma de una base local.

Dado que hemos verificado los tres axiomas, se tiene que $\mathscr{B}_a$ es una base local de a. □

Una propiedad muy interesante de las bases locales, es el hecho que estas pueden determinar por completo una topología dada.

Proposición 2.16. Sea X un espacio vectorial topológico. Si $\mathscr{B}_0 = \{B : 0 \in B\}$ es una base local de 0 en X, entonces la siguiente colección,

$$\mathscr{B} = \bigcup_{x \in X} \{x+B : B \in \mathscr{B}_0\}$$

es base para una topología en X.

Demostración. Dado el espacio vectorial topológico, denotaremos por τ a su topología vectorial. Debemos probar que la colección $\mathscr{B}$ cumple los axiomas para ser base de una topología en X.

1. Sea $x \in X$. Por definición de base local, $0 \in B$ para todo $B \in \mathscr{B}_0$. Consideremos el conjunto $x + B$. Ya que $0 \in B$, entonces $0 + x = x \in x + B$; es decir, $x + B$ es un vecindario abierto de 0. Por definición, se tiene que

$$\forall x \in X, \exists B' = x + B \in \mathscr{B} \quad \text{tal que} \quad x \in B'.$$

2. Sea $x \in B_1 \cap B_2$, con B_1 y $B_2 \in \mathscr{B}$. Además, tenemos que $B_1 = x + B_1'$, $B_2 = x + B_2'$, con B_1', $B_2' \in \mathscr{B}_0$.

   - Sea $x \in B_1$. Consideremos el conjunto $-x + B_1$; notamos que

   $$-x + x = 0 \in -x + B_1,$$

   en consecuencia, $-x + B_1$ es un vecindario abierto de 0. Por definición de base local, al ser $-x + B_1$ un vecindario abierto de 0, $\exists B_3' \in \mathscr{B}_0$ tal que

   $$B_3' \subseteq -x + B_1 \quad \Longrightarrow \quad x + B_3' \subseteq B_1.$$

   Por otro lado, $x \in x + B_3'$, pues B_3' es un vecindario abierto de 0.

   - Sea $x \in B_2$. Consideremos el conjunto $-x + B_2$; notamos que $-x + B_2$ es un vecindario abierto de 0. Por definición de base local, $\exists B_4'$ tal que

   $$B_4' \subseteq -x + B_2 \quad \Longrightarrow \quad x + B_4' \subseteq B_2.$$

   Por otro lado, $x \in x + B_4'$, pues B_4' es un vecindario abierto de 0.

   En resumen, hemos obtenido que $x \in x + B_3'$, $x \in x + B_4'$, $0 \in B_3'$ y $0 \in B_4'$; en consecuencia,

   $$0 \in B_3' \cap B_4' \quad \Longrightarrow \quad x \in (x + B_3' \cap B_4').$$

   Tenemos que $B_3' \cap B_4'$ es un vecindario abierto de 0. Por definición de base local de 0, $\exists B_5' \in \mathscr{B}_0$ tal que

   $$B_5' \subseteq B_3' \cap B_4' \quad \Longrightarrow \quad x + B_5' \subseteq x + (B_3' \cap B_4').$$

   Por construcción, $x + B_5' \in \mathscr{B}$ y $x \in x + B_5'$; con ello obtenemos las siguientes relaciones,

   $$x \in x + B_5' \subseteq x + (B_3' \cap B_4') \subseteq (x + B_3') \cap (x + B_4') \subseteq B_1 \cap B_2.$$

   Con esto demostramos el segundo axioma de base, y se verifica que $\mathscr{B}$ es una base para X.

□

Ahora veremos la generalización de la Proposición 2.19, cuando tengamos una base local en cualquier punto a de X.

Proposición 2.17. Sea X un espacio vectorial topológico y a un elemento de X.
Si $\mathscr{B}_a = \{B \ : \ a \in B\}$ una base local de $a \in X$, entonces la siguiente colección,

$$\mathscr{B} = \bigcup_{x \in X} \{x - a + B \ : \ B \in \mathscr{B}_a\}$$

es una base para una topología en X.

Demostración. Denotemos por τ a la topología vectorial del espacio vectorial topológico X. Tenemos que la colección $\mathscr{B}_a = \{B \ : \ a \in B\}$, es una base local de a; por la Proposición 2.14,

$$\mathscr{B}_0 = \{-a + B : 0 \in -a + B\}$$

es una base local de 0.

La colección $\mathscr{B}_0$, es una base local de 0. Aplicando la Proposición 2.16, tenemos que

$$\mathscr{B} = \bigcup_{x \in X} \{x + B' \ : \ B' \in \mathscr{B}_0\} = \bigcup_{x \in X} \{x - a + B \ : \ B \in \mathscr{B}_a\},$$

es una base de X, que es lo que deseábamos probar.

$\square$

La importancia de las bases locales es el hecho, que con ellas podemos definir bases para una topología; a continuación, mostraremos que la topología generada por la base que se construye a partir de una base local coincide con la topología vectorial.

Proposición 2.18. Sea X un espacio vectorial topológico y $\mathscr{B}_0$ una base local de 0. La topología en X generada por la base,

$$\mathscr{B}' = \bigcup_{x \in X} \{x + B : B \in \mathscr{B}_0\}$$

coincide con la topología vectorial en X.

Demostración. Denotemos τ a la topología vectorial del espacio vectorial topológico X. En el Lema 1.2, tenemos un criterio para determinar si la topología generada por una base coincide con la topología original.

Nuestra base está conformada por traslaciones de conjuntos abiertos, así que

$$\mathscr{B}' = \bigcup_{x \in X} \{x + B \ : \ B \in \mathscr{B}_0\} \subseteq \tau.$$

Ahora tomemos un conjunto abierto, no vacío $U \in \tau$; lo anterior, garantiza que $\exists x \in X$ tal que $x \in U$. En consecuencia, U es un vecindario abierto de x.

Consideremos el conjunto $-x+U$; notamos que, $-x+U$ es un vecindario abierto de 0. Por definición de base local, $\exists B_1' \in \mathscr{B}_0$ tal que

$$B_1' \subseteq -x+U \quad \Longrightarrow \quad x+B_1' \subseteq U.$$

Además, se observa que $x+0 = x \in x+B_1'$, por ello $x+B_1' \in \mathscr{B}$; de esta forma garantizamos la existencia de un elemento $B_2 = x+B_1' \in \mathscr{B}$ tal que

$$x \in B_2 \subseteq U.$$

Hemos probado la segunda hipótesis del Lema 1.2; en consecuencia, si τ' es la topología generada por la base $\mathscr{B}'$, se tiene que $\tau' = \tau$. $\square$

Proposición 2.19. Sea X un espacio vectorial topológico, a un elemento de X y $\mathscr{B}_a$ una base local de a. La topología en X generada por la base,

$$\mathscr{B} = \bigcup_{x\in X}\{x-a+B \ : \ B \in \mathscr{B}_a\}$$

coincide con la topología vectorial.

Demostración. Dado el espacio vectorial topológico X, denotamos por τ a su topología vectorial. Ya que $\mathscr{B}_a$ es una base local de a, por la Proposición 2.14, la colección,

$$\mathscr{B}_0 = \{-a+B \quad : \quad B \in \mathscr{B}_a\}$$

es una base local de 0. Aplicando la Proposición 2.17 a la base local $\mathscr{B}_0$, tenemos que la colección,

$$\mathscr{B}' = \bigcup_{x\in X}\{x-a+B : B \in \mathscr{B}_a\} = \bigcup_{x\in X}\{x+B' : B' \in \mathscr{B}_0\}$$

es base de una topología en X. Finalmente, por la Proposición 2.18, tenemos que la topología generada por la base $\mathscr{B}'$ coincide con la topología original, que es lo que deseábamos probar. $\square$

Basándonos en lo mencionado anteriormente, podemos afirmar que cualquier espacio vectorial topológico está determinado por una base local $\mathscr{B}$ de a; lo cual, nos permite concluir que los conjuntos abiertos de X son uniones arbitrarias de traslaciones de conjuntos abiertos de una base local de a.

A continuación, daremos algunos resultados que nos permitirán ver la topología de un subespacio topológico en términos de una base local.

Proposición 2.20. Sea X un espacio vectorial topológico, a un elemento de X y $\mathscr{B}_a$ una base local de a. Si Y es un subconjunto de X tal que $a \in Y$, entonces la siguiente colección,

$$\mathscr{B}_{Y_a} = \{B \cap Y : B \in \mathscr{B}_a\}$$

es una base local de a en Y.

Demostración. Dado el espacio vectorial topológico X, denotemos por τ a su topología vectorial. Lo que haremos será probar que la colección $\mathscr{B}_{Y_a}$ cumple los axiomas de una base local.

1. Para comenzar, $\mathscr{B}_a$ es una colección de conjuntos abiertos. $B \in \mathscr{B}_a$ es un abierto en X, y por ende $B \cap Y$ es un abierto en la topología de subespacio. Lo anterior prueba que $\mathscr{B}_{Y_a} \subseteq \tau_Y$, verificando el primer axioma de una base local.

2. Por definición, $a \in B$, $\forall B \in \mathscr{B}_a$ y por hipótesis $a \in Y$, en consecuencia $a \in B \cap Y$.

   Definamos $B' = B \cap Y$, notamos que $a \in B'$ para cualquier $B' \in \mathscr{B}_{Y_a}$. Esto verifica el segundo axioma de base local.

3. Sea $U' \in \tau_Y$ tal que $a \in U'$. Por la topología de subespacio,

   $$U' = U \cap Y, \quad U \in \tau.$$

   Por construcción, debe ser que $a \in U$. De la definición de base local, existe $B \in \mathscr{B}_a$ tal que

   $$a \in B \subseteq U \quad \Longrightarrow \quad a \in B \cap Y \subseteq U \cap Y = U'.$$

   De esta forma concluimos que, $\exists B \cap Y \in \mathscr{B}_{Y_a}$ tal que $a \in B \cap Y \subseteq U'$ y se verifica el tercer axioma de una base local.

De esta forma hemos, verificado que $\mathscr{B}_{Y_a}$ es una base local de a. □

Proposición 2.21. Sea X un espacio vectorial topológico, a un elemento de X e Y es un subespacio de X tal que $a \in Y$. Si $\mathscr{B}_{Y_a}$ una base local de a en Y, entonces la colección,

$$\mathscr{B}_Y = \bigcup_{y \in Y} \{y - a + B : B \in \mathscr{B}_{Y_a}\}$$

es una base para el subespacio topológico Y.

Demostración. Iniciamos denotando por τ a la topología vectorial y por τ_Y a la topología de subespacio. Debemos probar que $\mathscr{B}_Y$ cumple los axiomas para ser una base de una topología en Y.

1. Sea $y \in Y$. Por definición, si $B \in \mathscr{B}_{Y_a}$, entonces $a \in B$. Consideremos el conjunto $y - a + B$, donde

   $$y = y - a + a \in (y - a + B).$$

   Lo anterior garantiza que $\forall y \in Y$, $\exists B' = (y - a + B) \in \mathscr{B}_Y$ tal que $y \in B'$. Probando así el primer axioma de base.

2. Sea $y \in B_1 \cap B_2$, con $B_1,\, B_2 \in \mathscr{B}_Y$. Por definición,

$$B_1 = y - a + B_1 \cap Y, \quad B_2 = y - a + B_2 \cap Y, \qquad \text{donde} \quad B_1, B_2 \in \mathscr{B}_a.$$

- Sea $y \in B_1$. Consideremos el conjunto $-y + B_1$, notamos que

$$0 = -y + y \in -y + B_1.$$

  En consecuencia, $a - y + B_1$ es un vecindario abierto de a en Y. Por definición de base local, $\exists B_3' \in \mathscr{B}_{Y_a}$ tal que

$$B_3' \subseteq a - y + B_1 \quad \Longrightarrow \quad y - a + B_3' \subseteq B_1.$$

  Una de las consecuencias de la inclusión anterior, es que $y \in y - a + B_3'$.

- Sea $y \in B_2$. Consideremos el conjunto $-y + B_2$, notamos que

$$0 = -y + y \in -y + B_2.$$

  En consecuencia, $a - y + B_2$ es un vecindario abierto de a en Y. Por definición de base local $\exists B_4' \in \mathscr{B}_{Y_a}$ tal que

$$B_4' \subseteq a - y + B_2 \quad \Longrightarrow \quad y - a + B_4' \subseteq B_4.$$

  Una de las consecuencias de la inclusión anterior, es el hecho que $y \in y - a + B_2'$.

Por definición $a \in (B_3' \cap B_4')$, entonces $y \in (y - a + B_3' \cap B_4')$. Por otro lado, ya que $B_3' \cap B_4'$ es un vecindario abierto de a en Y, entonces $\exists B_5' \in \mathscr{B}_{Y_a}$ tal que

$$B_5' \subseteq B_3' \cap B_4' \quad \Longrightarrow \quad y - a + B_5' \subseteq y - a + (B_3' \cap B_4').$$

Notamos que $y - a + B_5' \in \mathscr{B}_Y$; además, $y \in y - a + B_5$. Usando lo anterior, tenemos las siguientes relaciones

$$y - a + B_5' \subseteq y - a + (B_3' \cap B_4') \subseteq (y - a + B_3') \cap (y - a + B_4') \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Obteniendo que

$$y \in y - a + B_5' \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Con esto demostramos el segundo axioma de base. Por lo tanto, $\mathscr{B}$ es una base para Y.

□

Proposición 2.22. Sea X un espacio vectorial topológico, a un elemento de X, Y un subespacio tal que $a \in Y$ y $\mathscr{B}_{Y_a}$ una base local de a en Y. La topología en Y generada por la siguiente base

$$\mathscr{B}_Y = \bigcup_{y \in Y} \{y - a + B : B \in \mathscr{B}_{Y_a}\},$$

coincide con la topología de subespacio.

Demostración. Para comenzar, denotemos por τ_Y a la topología de subespacio de Y. Del Lema 1.2, tenemos un criterio para determinar si la topología generada por una base de un espacio topológico coincide con la topología original. Ya que (Y, τ_Y) es un espacio topológico, podemos aplicar dicho resultado.

Nuestra base está conformada por traslaciones de conjuntos abiertos de τ_Y, por ello

$$\mathscr{B}_Y = \bigcup_{y \in Y} \{y - a + B \ : \ B \in \mathscr{B}_{Y_a}\} \subseteq \tau_Y.$$

Sea U conjunto abierto no vacío en Y. La suposición anterior garantiza la existencia de un elemento $y \in Y$ tal que $y \in U$; es decir, U es un vecindario abierto de y. En consecuencia, $-y + a + U$ es un vecindario abierto de a. Por la base local $\exists B_1 \in \mathscr{B}_{Y_a}$ tal que

$$B_1 \subseteq (-y + a + U) \quad \Longrightarrow \quad y - a + B_1 \subseteq U.$$

Por construcción, $y - a + B_1 \in \mathscr{B}_Y$; de esta forma, existe $B_2 \in \mathscr{B}_Y$ tal que

$$y \in B_2 \subseteq U, \qquad \text{donde } B_2 = y - a + B_1.$$

De esta forma tenemos todas las hipótesis del Lema 1.2; en consecuencia, la topología generada por $\mathscr{B}_Y$ coincide con la topología de subespacio. $\square$

Ahora que hemos hablado de bases y bases locales de espacios vectoriales topológicos, es un buen momento para definir otros tipos de espacios vectoriales topológicos.

Definición 2.16 (Clasificación de espacios vectoriales topológicos)**.** Sea X un espacio vectorial topológico.

- X se dice **localmente convexo**, si existe una base local $\mathscr{B}$ de 0 cuyos elementos son convexos.
- X se dice **localmente acotado**, si existe un vecindario abierto U de 0 acotado.
- X se dice **localmente compacto**, si existe un vecindario abierto U de 0 tal que su cerradura es compacta.

En topología una propiedad que se busca con mucha frecuencia, es que un espacio topológico sea un espacio de Hausdorff, ¿habrá alguna relación entre estos y los espacios vectoriales topológicos? Para responder dicha pregunta vamos a enunciar y demostrar una serie de resultados, que nos serán de gran utilidad para responderla formalmente.

***Lema* 2.2.** *Sea X un espacio vectorial topológico. Si W es un vecindario abierto de 0, entonces existe un vecindario abierto simétrico U de 0 tal que $U + U \subseteq W$.*

Demostración. Al trabajar sobre un espacio vectorial topológico, la adición es continua; en consecuencia, al tomar un vecindario abierto W de $+(0,0) = 0$, se garantiza la existencia de dos vecindarios abiertos V_1 y V_2 de 0 tal que $V_1 + V_2 \subseteq W$. Consideremos el conjunto,

$$U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2).$$

Dado que $0 \in V_1, V_2, -V_1, -V_2$, entonces $0 \in U$. Además, U es abierto pues es la intersección finita de conjuntos abiertos; así que, U es un vecindario abierto de 0.

A continuación, demostraremos que U es un conjunto simétrico.

$$\begin{aligned} -U &= (-V_1) \cap (-V_2) \cap (-(-V_1)) \cap (-(-V_2)) \\ &= (-V_1) \cap (-V_2) \cap V_1 \cap V_2 \\ &= V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2) \\ &= U. \end{aligned}$$

Por construcción $U \subseteq V_1$ y $U \subseteq V_2$; así que,

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow && U \times U \subseteq V_1 \times V_2 \\ &\Longrightarrow && +(U \times U) \subseteq +(V_1 \times V_2) \\ &\Longrightarrow && U + U \subseteq V_1 + V_2 \\ &\Longrightarrow && U + U \subseteq W. \end{aligned}$$

Que es lo que deseábamos demostrar. □

Como resultado inmediato del Lema 2.2, tenemos el siguiente corolario.

***Corolario* 2.1.** *Sea X un espacio vectorial topológico. Si W es un vecindario abierto de 0, entonces existe vecindario abierto simétrico U de 0 tal que*

$$U + U + U + U \subseteq W.$$

Demostración. Sea W un vecindario abierto de 0. Por el Lema 2.2 podemos garantizar la existencia de un vecindario abierto simétrico, U_1 de 0 tal que

$$U_1 + U_1 \subseteq W.$$

Ahora volveremos a aplicar el Lema 2.2, tomando a U_1 como nuestro vecindario abierto de 0, garantizamos la existencia un vecindario simétrico U de 0 tal que $U + U \subseteq U_1$. Ahora analizamos las siguientes inclusiones,

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow && (U + U) \times (U + U) \subseteq U_1 \times U_1 \\ &\Longrightarrow && +((U + U) \times (U + U)) \subseteq +(U_1 \times U_1) \\ &\Longrightarrow && U + U + U + U \subseteq U_1 + U_1 \\ &\Longrightarrow && U + U + U + U \subseteq W. \end{aligned}$$

De esta forma, hemos probado que $U + U + U + U \subseteq W$.

$\square$

Ya que hemos demostrado el Lema 2.2 y el Corolario 2.1, estamos listos para finalmente probar unos de los resultados más importantes de la teoría de espacios vectoriales topológicos.

***Teorema* 2.6.** *Sea X un espacio vectorial topológico. Si K es un conjunto compacto y C es un conjunto cerrado tal que $K \cap C = \emptyset$, entonces existe un vecindario abierto V de 0 tal que*

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset.$$

Demostración. Vamos a denotar por τ, a la topología vectorial del espacio vectorial topológico X.

Iniciaremos analizando el caso cuando $K = \emptyset$. Si $K = \emptyset$, entonces $K + V = \emptyset$, por lo que

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset \cap (C + V) = \emptyset.$$

Verificando lo deseado de forma inmediata.
Ahora asumamos que $K \neq \emptyset$. Sea $x \in K$ un punto arbitrario. A continuación, realizaremos la prueba de dos igualdades.

- Probaremos que al tomar un vecindario abierto simétrico V_x de 0, se cumple que

  $$(x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \emptyset.$$

  Ya que C es un conjunto cerrado, entonces $X \backslash C \in \tau$. Notamos que

  $$x \in K \quad \Longrightarrow \quad x \notin C \quad \Longrightarrow \quad x \in X \setminus C.$$

  Lo anterior, nos permite decir que $(-x) + x = 0 \in -x + X \backslash C$; es decir, $X \setminus C$ es un vecindario abierto de 0.

  Al aplicar el Corolario 2.1 al conjunto $-x + X \backslash C$, se garantiza la existencia de un vecindario simétrico V_x de 0 tal que

  $$V_x + V_x + V_x + V_x \subseteq -x + X \backslash C.$$

  Por otro lado, tenemos la siguiente igualdad,

  $$V_x + V_x + V_x + V_x = \bigcup_{x' \in V_x} (x' + V_x + V_x + V_x)$$

  $$\Longrightarrow \bigcup_{x' \in V_x} (x' + V_x + V_x + V_x) \subseteq -x + X \backslash C.$$

  En particular se cumplirá que

  $$0 + V_x + V_x + V_x \subseteq \bigcup_{x' \in V_x} (x' + V_x + V_x + V_x) \subseteq -x + X \backslash C.$$

La inclusión anterior, nos permite obtener las siguientes inclusiones

$$
\begin{aligned}
0 + V_x + V_x + V_x &\subseteq -x + X \backslash C \\
\Longrightarrow x + V_x + V_x + V_x &\subseteq X \backslash C \\
\Longrightarrow (x + V_x + V_x + V_x) \cap C &\subseteq (X \backslash C) \cap C \\
\Longrightarrow (x + V_x + V_x + V_x) \cap C &\subseteq \emptyset.
\end{aligned}
$$

Con la última inclusión, concluimos que $(x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \emptyset$.

- Ahora probaremos que $(x+V_x+V_x) \cap (C+V_x) = \emptyset$, siempre que $(x+V_x+V_x+V_x) \cap C = \emptyset$.

  Para realizar dicha prueba lo haremos por contradicción. Asumiremos que

  $$(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \exists z \in (x + V_x + V_x) \cap (C + V_x).$$

  Tenemos que el elemento z, se define como

  $$
  \begin{aligned}
  z &= x + x' + x'', \quad \text{con } x', x'' \in V_x, \\
  z &= c + x''', \quad \text{con } x''' \in V_x \text{ y } c \in C,
  \end{aligned}
  $$

  Utilizando lo anterior, tenemos la siguiente igualdad

  $$
  \begin{aligned}
  x + x' + x'' &= c + x''' \\
  c &= x + x' + x'' - x''',
  \end{aligned}
  $$

  Por la simetría de V_x, $-x''' \in -V_x = V_x$, así que,

  $$c \in x + V_x + V_x + V_x.$$

  De esta forma garantizamos que

  $$\exists c \in (x + V_x + V_x + V_x) \cap C \quad \Longrightarrow \quad (x + V_x + V_x + V_x) \cap C \neq \emptyset.$$

  Pero, la igualdad anterior es una contradicción, pues por hipótesis se tenía que $(x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \emptyset$. De esta forma, hemos probado que $(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \emptyset$, siempre que $(x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \emptyset$.

Sea $x_i \in K$ arbitrario, consideremos el conjunto

$$K = \bigcup_{i \in I} x_i.$$

Para cada x_i construyamos un vecindario abierto simétrico V_{x_i} de 0; y con el, definamos el vecindario abierto $x_i + V_{x_i}$de x_i. La siguiente colección,

$$\mathcal{A} = \{x_i + V_{x_i} \;\; : \;\; x_i \in K, i \in I\}$$

es cobertura abierta de K. Por la compacidad de K podemos escoger una subcobertura finita, denotada por $\mathcal{A}' = \{x_i + V_{x_i} \ : \ i \in 1, \ldots, n\}$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i}).$$

Consideremos el vecindario abierto, simétrico $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$, de 0.

Tenemos la siguiente inclusión,

$$K \times V \subseteq \bigcup_{i=k}^{n} (x_i + V_{x_i}) \times V \quad \Longrightarrow \quad +(K \times V) \subseteq + \left(\bigcup_{i=k}^{n} (x_i + V_{x_i}) \times V \right).$$

Por otro lado, tenemos la siguiente igualdad de conjuntos,

$$+ \left(\bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i}) \times V \right) = \bigcup_{i=1}^{n} +((x_i + V_{x_i}) \times V) = \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V),$$

en consecuencia,

$$+(K \times V) \subseteq + \left(\bigcup_{i=k}^{n} (x_i + V_{x_i}) \times V \right)$$

$$\Longrightarrow K + V \subseteq \bigcup_{i=k}^{n} (x_i + V_{x_i} + V).$$

Utilizando el hecho que $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$, se obtiene que

$$x_i + V_{x_i} + V \subseteq x_i + V_{x_i} + V_{x_i},$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}).$$

Con dicha inclusión, tenemos que

$$K + V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V),$$

$$\Longrightarrow K + V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}).$$

Anteriormente, se probó que $(x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \emptyset$, donde x era un punto arbitrario de K y V_x es un vecindario simétrico abierto de 0; en particular, lo anterior se cumplirá para $x_i \in K$ y para el vecindario abierto simétrico V_{x_i} de 0, entonces

$$(x_i + V_{x_i} + V_{x_i} + V_{x_i}) \cap C = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}) \cap (C + V_{x_i}) = \emptyset, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Ahora, analicemos la intersección

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n}(x_i + V_{x_i} + V_{x_i})\right) \cap (C + V).$$

Por construcción,

$$V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \quad \Longrightarrow \quad C + V \subseteq C + V_{x_i},$$

con dicha inclusión, se obtiene que

$$\Longrightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{n}(x_i + V_{x_i} + V_{x_i})\right) \cap (C + V) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n}(x_i + V_{x_i} + V_{x_i})\right) \cap (C + V_{x_i}).$$

Finalmente, analicemos el conjunto $(K + V) \cap (C + V)$.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow K + V \subseteq \bigcup_{i=k}^{n}(x_i + V_{x_i} + V_{x_i}) \\
&\Longrightarrow (K + V) \cap (C + V) \subseteq \bigcup_{i=k}^{n}(x_i + V_{x_i} + V_{x_i}) \cap (C + V) \\
&\Longrightarrow (K + V) \cap (C + V) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n}(x_i + V_{x_i} + V_{x_i})\right) \cap (C + V_{x_i}) \\
&\Longrightarrow (K + V) \cap (C + V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}((x_i + V_{x_i} + V_{x_i}) \cap (C + V_{x_i})) \\
&\Longrightarrow (K + V) \cap (C + V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \emptyset = \emptyset \\
&\Longrightarrow (K + V) \cap (C + V) \subseteq \emptyset.
\end{aligned}$$

La inclusión anterior, nos permite concluir que $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$, que es lo que deseábamos demostrar. □

La importancia del Teorema 2.6, es el hecho que el conjunto $K + V$ lo podemos reescribir de la forma,

$$K + V = \bigcup_{x \in K}(x + V); \tag{2.2}$$

es decir, que $K + V$ es un conjunto abierto, pues es la unión arbitraria de traslaciones del vecindario abierto V de 0. Por otro lado, dado que $0 \in V$, entonces $K + V$ es un vecindario abierto de x. También, se verifica que, si $x \in K$, entonces $x + 0 = x \in K + V$; es decir $K \subseteq K + V$. De forma análoga, sucede que $C \subseteq C + V$.

Sea K compacto y C cerrado donde $K \cap C = \emptyset$. Por el Teorema 2.6, se garantiza la existencia de un vecindario abierto V de 0, con el cual se construyen los vecindarios abiertos $K + V$ y $C + V$ que contienen a K y C, respectivamente.

De momento hemos comentado de forma superficial algunas consecuencias directas del Teorema 2.6. A continuación, veremos otras consecuencias inmediatas pero con un mayor grado de detalle.

Corolario 2.2. *Sea X un espacio vectorial topológico. Si K es compacto y C es cerrado donde $K \cap C = \emptyset$, entonces existe un vecindario abierto V de 0 tal que*

a) $\overline{(K + V)} \cap (C + V) = \emptyset$.

b) $\overline{(K + V)} \cap C = \emptyset$.

Demostración. Dado el espacio vectorial topológico, denotaremos por τ a su topología vectorial. Para comenzar, K es compacto y C es cerrado, donde $K \cap C = \emptyset$. Lo anterior garantiza las hipótesis del Teorema 2.6, entonces existe un vecindario abierto V de 0 tal que $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.

a) Por contradicción asumiremos que $\overline{(K + V)} \cap (C+V) \neq \emptyset$; por ello $\exists y \in \overline{(K + V)} \cap (C+V)$. Notamos que

$$C + V = \bigcup_{x \in C} (x + V),$$

con esto se verifica que $C + V$ es un conjunto abierto, pues es la unión arbitraria de traslaciones de un vecindario abierto de cero. Por otro lado, $C + V$ es un vecindario abierto de y, pues $y \in C + V$.

Sea $y \in \overline{(K + V)}$. Por definición de cerradura, todo vecindario abierto U de y, cumple que $U \cap (K + V) \neq \emptyset$; en particular, debe cumplirse para $C + V$, así que,

$$(C + V) \cap (K + V) \neq \emptyset.$$

La igualdad anterior es una contradicción, pues como hipótesis general se tiene que

$$(C + V) \cap (K + V) = \emptyset.$$

De esta forma hemos probado que $\overline{(K + V)} \cap (C + V) = \emptyset$.

b) Para comenzar probaremos que $C \subseteq C + V$. Sea $y \in C$ un elemento arbitrario, V es un vecindario abierto de 0, entonces $y + 0 \in C + V$; de esta forma probamos que, $C \subseteq C + V$ y obtenemos las siguientes inclusiones

$$C \subseteq C + V$$

$$\implies C \cap \overline{(K + V)} \subseteq (C + V) \cap \overline{(K + V)}.$$

Por el literal a), mostrado anteriormente, tenemos que $\overline{(K+V)} \cap (C+V) = \emptyset$,

$$\Longrightarrow C \cap \overline{(K+V)} \subseteq \emptyset$$

$$\Longrightarrow C \cap \overline{(K+V)} = \emptyset.$$

Que es lo que deseábamos demostrar.

□

Observación. Recordemos, que en un espacio topológico (X, τ), cada subconjunto finito $A \subseteq X$ es compacto, en particular los unipuntuales son compactos.

Teorema 2.7. *Sea X un espacio vectorial topológico X y $\mathscr{B}_0$ una base local de 0 en X. Para cada $B_1 \in \mathscr{B}_0$ existe un elemento $B_2 \in \mathscr{B}_0$ tal que*

$$\overline{B_2} \subseteq B_1.$$

Demostración. Sea $B_1 \in \mathscr{B}_0$, entonces $C = X \backslash B_1$ es cerrado; el conjunto $K = \{0\}$ es compacto, y se tiene que $K \cap C = \emptyset$. Aplicando el literal a) del Corolario 2.7, garantizamos la existencia de un vecindario abierto V de 0 tal que

$$\overline{(K+V)} \cap (C+V) = \emptyset.$$

Ya que V es un vecindario abierto de 0, debe suceder que $\exists B_2 \in \mathscr{B}_0$ tal que $B_2 \subseteq V$; con ello obtenemos las siguientes inclusiones

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow &\quad C + B_2 \subseteq C + V \\
\Longrightarrow &\quad \overline{(K+V)} \cap (C+B_2) \subseteq \overline{(K+V)} \cap (C+V) \\
\Longrightarrow &\quad \overline{(K+V)} \cap (C+B_2) \subseteq \emptyset \\
\Longrightarrow &\quad \overline{(K+V)} \cap (C+B_2) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Del mismo modo, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\quad B_2 \subseteq V \\
\Longrightarrow &\quad K + B_2 \subseteq K + V \\
\Longrightarrow &\quad \overline{K+B_2} \subseteq \overline{K+V} \\
\Longrightarrow &\quad \overline{K+B_2} \cap (C+B_2) \subseteq \overline{K+V} \cap (C+B_2) \\
\Longrightarrow &\quad \overline{K+B_2} \cap (C+B_2) \subseteq \emptyset \\
\Longrightarrow &\quad \overline{K+B_2} \cap (C+B_2) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Al aplicar el literal b) del Corolario 2.2, tenemos que

$$\overline{K+B_2} \cap (C+B_2) = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \overline{K+B_2} \cap C = \emptyset.$$

Recordemos que $K = \{0\}$ y $C = X \backslash B_1$, entonces

$$\overline{K+B_2} \cap C = \overline{B_2} \cap (X \backslash B_1) = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \overline{B_2} \subseteq B_1,$$

que es justo lo que deseábamos demostrar. □

Finalmente, responderemos la pregunta, por la cual hemos demostrado la serie de resultados anteriores. El siguiente resultado nos brindará una propiedad importante que cumplen todos los espacios vectoriales topológicos.

***Teorema* 2.8.** *Si X un espacio vectorial topológico, entonces X es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Tomemos $K = \{x\}$ como conjunto compacto y $C = \{y\}$ como conjunto cerrado, aplicando el Teorema 2.6, garantizamos que existe un vecindario abierto V de 0 tal que

$$(\{x\} + V) \cap (\{y\} + V) = \emptyset. \tag{2.3}$$

Además, se cumple que

$$\{x\} \subseteq \{x\} + V \quad \text{y} \quad \{y\} \subseteq \{y\} + V,$$

donde tanto $\{x\} + V$, como $\{y\} + V$, son vecindarios abiertos de x e y respectivamente.

Así que $\{x\} + V$ y $\{y\} + V$, son vecindarios abiertos de x, y, disjuntos por (2.3), lo cual verifica que X es un espacio de Hausdorff. □

La importancia del Teorema 2.8, es el hecho que nos brinda una **condición necesaria** para que un conjunto X no vacío sea un espacio vectorial topológico, es decir, si X no es un espacio Hausdorff no puede ser un espacio vectorial topológico; sin embargo, dicha condición no es suficiente, pues un espacio X puede ser un espacio de Hausdorff y no ser un espacio vectorial topológico.

Como hemos podido observar es muy usual trabajar con la cerradura y el interior de un conjunto. En el siguiente Teorema 2.9, obtendremos algunas propiedades que relacionan la cerradura y el interior de subconjuntos de espacios vectoriales topológicos.

***Teorema* 2.9.** *Sea X un espacio vectorial topológico, tenemos que:*

a) Si $A \subseteq X$, entonces $\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} (A + V)$, donde $\mathcal{V} = \{V \ : \ V \in \tau, 0 \in V\}$; es decir $\mathcal{V}$ es la colección de todos los vecindarios abiertos de 0.

b) Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$, entonces $\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A + B}$.

c) Si Y un subespacio de X, entonces $\overline{Y}$ es un subespacio de X.

d) Si $C \subseteq X$ un conjunto convexo, entonces C° y $\overline{C}$ son conjuntos convexos de X.

e) Si $B \subseteq X$ es un conjunto balanceado, entonces $\overline{B}$ es un conjunto balanceado de X; además, si B° es un vecindario abierto de 0, entonces B° es balanceado.

f) Si $E \subseteq X$ es un conjunto acotado, entonces $\overline{E}$ es un subconjunto acotado de X.

Demostración. Dado el espacio vectorial topológico, denotaremos por τ a su topología vectorial.

a) Sea $A \subseteq X$ y $\mathcal{V}$ es la colección de todos los vecindarios abiertos de 0, definida como

$$\mathcal{V} = \{V \ : \ V \in \tau, 0 \in V\}.$$

Vamos a verificar que,

$$\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} (A + V).$$

"$\subseteq$" Sea $x \in \overline{A}$. Por definición de cerradura, cualquier vecindario abierto U de x, cumple que

$$U \cap A \neq \emptyset.$$

$x + V$ es un vecindario abierto de x, entonces se debe cumplir que

$$(x + V) \cap A \neq \emptyset.$$

La igualdad anterior, garantiza que $\exists y \in A$, $y \in x + V$ tal que

$$\begin{aligned}
&y = x + v, \text{ con } v \in V, \\
\Longrightarrow\ &x = y - v, \text{ con } y \in A, -v \in -V \\
\Longrightarrow\ &x \in A + (-V), \text{ donde } -V \in \mathcal{V} \\
\Longrightarrow\ &x \in A + V', \text{ con } V' \in \mathcal{V}.
\end{aligned}$$

Esto sucede para cualquier vecindario V de 0, entonces $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{V}} (A + U)$.

"$\supseteq$" Sea $y \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}} (A+V)$, así que,

$$
\begin{aligned}
& y \in A+V, \quad \forall V \in \mathcal{V} \\
\Longrightarrow\ & y = a+v, \text{ con } a \in A, v \in V.
\end{aligned}
$$

En particular $0 \in V$, entonces

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow\ & y = a+0, \text{ con } a \in A, v \in V \\
\Longrightarrow\ & y \in A \subseteq \overline{A}.
\end{aligned}
$$

Con esto probamos que $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} (A+V) \subseteq \overline{A}$, y por ende la igualdad.

b) Sea $y \in \overline{A} + \overline{B}$, así que $y = a+b$, con $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$. Por la continuidad de la adición, si W un vecindario abierto arbitrario de $+(a,b) = a+b = y$, entonces existe un vecindario abierto W' de (a,b) tal que
$$+(W') \subseteq W.$$
Dado que W' es vecindario un abierto en la topología producto de $X \times X$, deben existir dos vecindarios abiertos W_1 y W_2 de a y b, respectivamente, tal que $W' = W_1 \times W_2$. Utilizando lo anterior, obtenemos que

$$+(W') \subseteq W \quad \Longrightarrow \quad +(W_1 \times W_2) \subseteq W \quad \Longrightarrow \quad W_1 + W_2 \subseteq W.$$

Por definición de cerradura, al ser W_1 un vecindario abierto de a, se tiene que $W_1 \cap A \neq \emptyset$; del mismo modo, $W_2 \cap B \neq \emptyset$. Con esto garantizamos que $\exists a', b' \in A, B$ tal que $a', b' \in W_1, W_2$, respectivamente. Definamos $y' = a' + b'$, con $y' \in A+B$, $y' \in W_1 + W_2$, entonces

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & y' = a' + b' \in W_1 + W_2, \\
\Longrightarrow \quad & y' \in W, \\
\Longrightarrow \quad & (A+B) \cap W \neq \emptyset.
\end{aligned}
$$

Lo cual implica que $y \in \overline{A+B}$.

c) Sean $y_1, y_2 \in \overline{Y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Por la definición de cerradura, $\exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n'\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ tal que

$$y_n \longrightarrow y_1, \quad n \to \infty, \qquad\qquad y_n' \longrightarrow y_2, \quad n \to \infty.$$

Por otro lado, dado que $y_n, y_n' \in Y$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\alpha y_n + \beta y_n' \in Y$, pues Y es un subespacio vectorial. Definamos la siguiente sucesión $\{\alpha y_n + \beta y_n'\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$, donde

$$\alpha y_n + \beta y_n' \longrightarrow \alpha y_1 + \beta y_2, \quad n \to \infty.$$

Con eso probamos que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \overline{Y}$.

d) Dada la convexidad de C, al tomar $\alpha \in \mathbb{K}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, se verifica que $\alpha C + (1-\alpha)C \subseteq C$.

- Tenemos que
$$\alpha C^\circ + (1-\alpha)C^\circ = \bigcup_{y \in \alpha C^\circ} (y + (1-\alpha)C^\circ).$$
Con dicha igualdad hemos mostrado que el conjunto $\alpha C^\circ + (1-\alpha)C^\circ$ es abierto, pues se ha reescrito como homotecias de conjuntos abiertos. Por la convexidad de C se cumplirá que
$$\alpha C^\circ + (1-\alpha)C^\circ \subseteq \alpha C + (1-\alpha)C \subseteq C.$$
Finalmente, por definición de conjunto interior de C debe suceder que
$$\alpha C^\circ + (1-\alpha)C^\circ \subseteq C^\circ,$$
lo cual prueba que C° es convexo.

- Sea $\overline{C}$, por el literal b) tenemos que
$$\alpha\overline{C} + (1-\alpha)\overline{C} \subseteq \overline{\alpha C + (1-\alpha)C}.$$
Por hipótesis, se tiene que
$$\alpha C + (1-\alpha)C \subseteq C \Longrightarrow \overline{\alpha C + (1-\alpha)C} \subseteq \overline{C}.$$
De esta forma tenemos las siguientes inclusiones
$$\alpha\overline{C} + (1-\alpha)\overline{C} \subseteq \overline{\alpha C + (1-\alpha)C} \subseteq \overline{C}.$$
Lo cual prueba que, $\alpha\overline{C} + (1-\alpha)\overline{C} \subseteq \overline{C}$; es decir, $\overline{C}$ es convexo.

e) Ya que B es balanceado, $\alpha B \subseteq B$, siempre que $\alpha \in \mathbb{K}$ donde $|\alpha| \leq 1$.

- De nuestra hipótesis tenemos que
$$\alpha B \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad \alpha\overline{B} = \overline{\alpha B} \subseteq \overline{B},$$
probando que $\overline{B}$ es balanceado.

- Ahora supongamos que $0 \in B^\circ$. Analicemos los casos, dependiendo del α.

  Si $\alpha = 0$, tendremos que $\alpha B^\circ = \{0\}$, pero B° es un vecindario de 0. Utilizando lo anterior, tenemos que
$$\alpha B^\circ \subseteq B^\circ.$$
  Sea $|\alpha| \leq 1$ y $\alpha \neq 0$. Por definición $B^\circ \subseteq B$, y B es balanceado, entonces
$$\alpha B^\circ \subseteq \alpha B \subseteq B.$$
  Por otro lado, αB° es abierto; por la definición de interior de B, se cumple que $\alpha B^\circ \subseteq B^\circ$. De esta forma probamos que B es balanceado.

f) Sea E un conjunto acotado, entonces $\exists s > 0$ tal que $E \subseteq tV$, siempre que $t > s$ para todo vecindario abierto V de 0.

Sea $\mathscr{B}_0$ una base local de 0 en X, así que, $\exists B \in \mathscr{B}_0$ tal que $B \subseteq V$. Por otro lado, del Teorema 2.7, tenemos que $\exists B_1 \in \mathscr{B}_0$ tal que

$$\overline{B_1} \subseteq B \subseteq V. \tag{2.4}$$

La definición de acotado se cumple para todo vecindario abierto de 0; en particular, se cumple para B_1 y obtenemos que

$$\begin{aligned} & E \subseteq tB_1 \\ \Longrightarrow \quad & \overline{E} \subseteq \overline{tB_1} = t\overline{B_1} \\ \Longrightarrow \quad & \overline{E} \subseteq tB, \text{ por (2.4)} \\ \Longrightarrow \quad & \overline{E} \subseteq tV. \end{aligned}$$

Así que $\overline{E} \subseteq tV$, para todo vecindario abierto V de 0, siempre que $t > s$, para $s > 0$. El elemento s se toma de la hipótesis que E es un conjunto acotado. De esta forma, probamos que $\overline{E}$ es acotado.

□

***Teorema* 2.10.** *Sea X un espacio vectorial topológico.*

a) Si V es un vecindario abierto de 0, entonces existe un vecindario abierto y balanceado W de 0 tal que $W \subseteq V$.

b) Si V es un vecindario abierto y convexo de 0, entonces existe un vecindario abierto, balanceado y convexo W de 0 tal que $W \subseteq V$.

Demostración.

a) Sea V un vecindario abierto de $\cdot(0,0) = 0$. Por la continuidad de la multiplicación existe un vecindario V' de 0 y un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |\alpha - 0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \alpha V' \subseteq V.$$

Consideremos el conjunto,

$$W = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V'.$$

Notemos que W es la unión homotecias de vecindarios abiertos V' de 0, por lo cual W es un vecindario abierto de 0.

Ahora, probaremos que W es balanceado. Sea $\beta \in \mathbb{K}$ tal que $|\beta| \leq 1$, queremos probar que $\beta W \subseteq W$.

Sea $y \in \beta W$, así que $y = \beta w$, con $w \in W$. Por la forma en que W está definido, $\exists \alpha$, $|\alpha| < \delta$ tal que $w = \alpha v$, con $v \in V'$; así que, $y = \beta w = \beta \alpha v$. Ahora analicemos el escalar $\beta\alpha$,

$$|\alpha| < \delta$$
$$|\beta||\alpha| < |\beta|\delta < \delta \text{ pues } |\beta| \leq 1$$
$$|\beta||\alpha| < \delta$$

Lo cual implica que $y = \beta\alpha v$, con $|\beta\alpha| < \delta$; es decir $y \in \beta\alpha V' \subseteq W$. De esta forma probamos que $\beta W \subseteq W$, garantizando que W es balanceado.

Sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Por hipótesis, si $|\alpha| < \delta$, entonces $\alpha V' \subseteq V$; obteniendo que

$$W = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V' \subseteq V \quad \Longrightarrow \quad W \subseteq V.$$

De esta forma, probamos que cualquier vecindario abierto V de 0 contiene un vecindario abierto W balanceado de 0.

b) Sea V un vecindario abierto convexo de 0. Por la continuidad de la multiplicación por escalar, existe un vecindario abierto V' de 0 tal que

$$\text{si } |\alpha - 0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \alpha V' \subseteq V.$$

Además, por la convexidad de V se cumple que $\gamma V + (1-\gamma)V \subseteq V$, para todo $0 \leq \gamma \leq 1$.

Definamos los siguientes conjuntos,

$$A = \bigcap_{\substack{|\alpha|<\delta \\ |\alpha|=1}} \alpha V, \qquad W = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V.$$

Notamos que W es un vecindario abierto de 0, pues es la unión de homotecias de vecindarios abiertos de 0 respectivamente; además, $A \subseteq V$ y $W \subseteq V$ por construcción.

En el literal anterior probamos que W es balanceado, entonces $\alpha W \subseteq W$, siempre que $|\alpha| \leq 1$.

Sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Si $|\alpha| = 1$, entonces $1/|\alpha| = 1$; con ello obtenemos las siguientes inclusiones,

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow & (1/\alpha)W \subseteq W \subseteq V,\\
&\Longrightarrow & \alpha(1/\alpha)W \subseteq \alpha W \subseteq \alpha V,\\
&\Longrightarrow & W \subseteq \alpha W \subseteq \alpha V,\\
&\Longrightarrow & W \subseteq \alpha V.
\end{aligned}$$

De momento hemos probado que $W \subseteq \alpha V$ siempre que $|\alpha| = 1, \forall \alpha \in \mathbb{K}$,

$$\Longrightarrow W \subseteq \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha V = A \Longrightarrow W \subseteq A.$$

Ya demostramos que $W \subseteq A$; además, W es un vecindario abierto de 0 incluido en A. Por la definición de interior de un conjunto, debe ser que

$$W \subseteq A^\circ.$$

Por otro lado, A es un conjunto convexo pues es la intersección de conjuntos convexos; por el literal e) del Teorema 2.9, ya que A° es un vecindario abierto de 0 se cumple que es convexo; además se tiene que

$$W \subseteq A^\circ \subseteq A \subseteq V \quad \Longrightarrow \quad A^\circ \subseteq V.$$

Lo que haremos en este punto, es probar que A es balanceado. Sean $0 \leq r \leq 1$, $|\beta| = 1$, de modo que $|\beta r| \leq 1$. Debemos verificar que $\beta r A \subseteq A$, para ello notamos que se cumple la siguiente igualdad

$$r\beta A = r\beta \bigcap_{\substack{|\alpha|<\delta \\ |\alpha|=1}} \alpha V = \bigcap_{\substack{|\alpha|<\delta \\ |\alpha|=1}} r\beta\alpha V = \bigcap_{\substack{|\alpha|<\delta \\ |\alpha|=1}} r\alpha V.$$

Utilizando la convexidad de V, tenemos que

$$rV \subseteq rV + (1-r)V \subseteq V \Longrightarrow rV \subseteq V \Longrightarrow |\alpha| rV \subseteq |\alpha| V.$$

Obteniendo que

$$\bigcap_{|\alpha|=1} |\alpha| rV \subseteq \bigcap_{|\alpha|=1} |\alpha| V \Longrightarrow r\beta A \subseteq A.$$

De esta forma, se probó que A es balanceado, pues $|r\beta| \leq 1$. Finalmente, aplicando el literal e) del Teorema 2.9, ya que A es balanceado y $0 \in A^\circ$, obtenemos que A° es balanceado.

Con ello, demostramos que existe vecindario abierto, balanceado y convexo, A° en este caso tal que $A^\circ \subseteq V$, donde V es un vecindario abierto arbitrario de 0.

□

Recordemos que cada espacio vectorial topológico está determinado por una base local en 0, es por ello que el Teorema 2.10 puede enunciarse en términos de básicos.

***Teorema* 2.11.** *Sea X un espacio vectorial topológico*

a) X tiene una base local balanceada de 0.

b) Si X es localmente convexo, entonces tiene una base local convexa y balanceada de 0.

Demostración. Denotemos por τ a la topología vectorial de X.

a) Por el Teorema 2.10 cada vecindario abierto de 0 contiene un vecindario abierto balanceado de 0. Definamos el conjunto de todos los conjuntos abiertos que contienen a 0, dada por

$$\mathcal{V} = \{V \ : \ V \in \tau, 0 \in V\}.$$

Ahora, construyamos la colección $\mathscr{B}_0$, que contiene a los vecindarios abiertos balanceados de 0 que son subconjunto de cada vecindario abierto de 0 en X

$$\mathscr{B}_0 = \{U \ : \ U \text{ es vecindario abierto balanceado de 0 tal que } U \subseteq V, \forall V \in \mathcal{V}\}.$$

Probemos que $\mathscr{B}_0$ es una base local.

- Por definición, se cumple que $\mathscr{B}_0 \subseteq \tau$.
- Por construcción, si $U \in \mathscr{B}''$, entonces $0 \in U$.
- Si U es un vecindario abierto de 0. Por el Teorema 2.10, si V es un vecindario arbitrario abierto de 0, entonces contiene un vecindario U abierto y balanceado de 0; es decir, $\exists U \in \mathscr{B}_0$ tal que $U \subseteq V$.

Con esto hemos probado que $\mathscr{B}_0$ es una base local de 0.

b) Tenemos que X es un espacio topológico localmente convexo; es por ello que garantizamos la existencia de una base local de 0, denotada por $\mathscr{B}$, donde todos sus elementos son convexos. Definamos la siguiente colección,

$$\mathscr{B}' = \{U'' \mid U'' \text{ es un vecindario abierto, convexo y balanceado de } 0\}.$$

Vamos a verificar que la colección $\mathscr{B}'$ es una base local convexa y balanceada de 0.

- Por definición, cumple que $\mathscr{B}' \subseteq \tau$.
- Por construcción, cada elemento U'' es un vecindario abierto de 0.
- Por hipótesis, ya que U es un vecindario abierto que contiene a 0, entonces existe un vecindario U' abierto y convexo de 0 tal que $U' \subseteq U$. Por el Teorema 2.10 literal b) existe un vecindario U'' abierto, balanceado y convexo de 0 tal que $U'' \subseteq U'$; en consecuencia, $U'' \subseteq U$. De esta forma hemos garantizado que para todo vecindario abierto U de 0, existe un elemento $U'' \in \mathscr{B}'$ tal que $U'' \subseteq U$.

Así, hemos probado que $\mathscr{B}'$ es una base local.

□

***Teorema* 2.12.** *Sea X un espacio vectorial topológico y V un vecindario abierto de 0. Se cumple que,*

a) Si $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente y positiva tal que $r_n \longrightarrow \infty, \quad n \to \infty$, entonces

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$

b) Cada subconjunto compacto K de X es acotado.

c) Sea $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente decreciente tal que $\delta_n \longrightarrow 0, n \to \infty$. Si V es acotado, entonces la colección,

$$\{\delta_n V : n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

es una base local de 0 en X.

Demostración.

a) Sea $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in r_n V$; por otro lado, V es un vecindario abierto de 0, así que $r_n V$, también lo es.

Tomemos $x \in X$ fijo y definamos la aplicación f_x,

$$\begin{aligned} f_x : \mathbb{K} &\longrightarrow X \\ \alpha &\longmapsto \alpha x. \end{aligned}$$

f_x es continua, pues es la restricción del dominio de la multiplicación por escalar, la cual es continua por definición de un espacio vectorial topológico. Por la continuidad de f_x, el siguiente conjunto es abierto en τ_{usual}

$$\begin{aligned} f_x^{-1}(V) &= \{\alpha \in \mathbb{K} \mid f_x(\alpha) \in V\} \\ &= \{\alpha \in \mathbb{K} \mid \alpha x \in V\} \\ &= W. \end{aligned}$$

Ya que $r_n \longrightarrow \infty \quad n \to \infty$, entonces $1/r_n \longrightarrow 0$; por definición de convergencia, para todo vecindario abierto U de 0, se cumple que $1/r_n \in U$, siempre que $n > N$, donde $N \in \mathbb{N}$.

Sea $n > N$; en particular, para W se tiene que

$$1/r_n \in W \quad \Longrightarrow \quad f_x(1/r_n) \in f_x(W) \quad \Longrightarrow \quad (1/r_n)x \in V \quad \Longrightarrow \quad x \in r_n V.$$

De momento, tenemos que $x \in r_n V$, así que,

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$

Ya que el x dado es arbitrario, con la relación anterior hemos probado que $X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$.

Es evidente que $\bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V \subseteq X$. Ya que hemos probado ambas inclusiones, tenemos que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$

b) Sea V un vecindario abierto arbitrario de 0. Por el Teorema 2.10, podemos garantizar la existencia de un vecindario abierto W balanceado de 0 tal que $W \subseteq V$; luego, por el literal a), si $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente y positiva tal que $r_n \longrightarrow \infty, n \to \infty$, entonces

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n W.$$

Tomando $r_n = n$, se tiene que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nW.$$

Sea K un subconjunto compacto de X, por construcción,

$$K \subseteq X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nW.$$

Por lo anterior, decimos que la colección

$$\mathcal{A} = \{nW : n \in \mathbb{N}\},$$

es una cobertura abierta de K, pues cada nW sigue siendo un vecindario abierto de 0. Por la compacidad de K, $\mathcal{A}$ posee una subcobertura finita; sin perdida de generalidad, asumiremos que la subcobertura está dada por la colección,

$$\mathcal{A} = \{nW : n = 1, \ldots, k\}.$$

Entonces

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{k} nW.$$

En este punto, utilizaremos una propiedad de los conjuntos balanceados que no es muy difícil de probar. Si W es balanceado y $n \leq m$, con $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $nW \subseteq mW$.

Por la propiedad anterior, tenemos que

$$\bigcup_{n=k}^{s} nW = sW \quad \Longrightarrow \quad K \subseteq sW \subseteq sV.$$

Al tomar $t > s$, se cumplirá que $K \subseteq tV$. De esta forma probamos que K es acotado.

c) Sea U un vecindario arbitrario de 0 en X. Si V es acotado, entonces $\exists s > 0$ tal que

$$V \subseteq tU, \quad \text{siempre que} \quad t > s.$$

Debemos probar que la colección $\mathscr{B}_0 = \{\delta_n V \ : \ n = 1, 2, 3, \ldots\}$, es una base local de 0.

Para comenzar, los elementos de $\mathscr{B}_0$ son homotecias de un vecindario abierto V de 0, por lo que $\delta_n V \in \tau$, satisfaciendo el primer axioma de una base local. Luego, dado que $0 \in \delta_n V$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se cumple que todos los elementos de la base local contienen a 0, verificando el segundo axioma.

Por último, al tomar δ_n tal que

$$\delta_n \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

tenemos que $1/\delta_n$ es suficientemente grande. Si $s > 0$, entonces $s < 1/\delta_n$; en consecuencia,

$$V \subseteq (1/\delta_n)U \quad \Longrightarrow \quad \delta_n V \subseteq U.$$

Con lo anterior, probamos que todo vecindario abierto U de 0 contiene un vecindario de la forma $\delta_n V$, probando el tercer axioma de una base local de 0.

$\square$

Otro resultado interesante de los espacios vectoriales topológicos, es una caracterización de los espacios vectoriales topológicos localmente compactos.

***Teorema* 2.13.** *Si X es un espacio vectorial topológico localmente compacto, entonces es de dimensión finita.*

Demostración. X es un espacio vectorial topológico localmente compacto. Por definición, existe un vecindario abierto V de 0 tal que $\overline{V}$ es compacto; por el Teorema 2.12, b) dado que $\overline{V}$ es compacto , también es acotado.

Definamos la sucesión $\{2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$, la cual es estrictamente decreciente. Por el literal c) del Teorema 2.12, la colección

$$\mathscr{B}_0 = \left\{ \frac{1}{2^n} V : n \in \mathbb{N} \right\},$$

es una base local de 0 para X. Por otro lado, la colección

$$\mathcal{A} = \left\{ x_i + \frac{1}{2}V : x_i \in \overline{V}, i \in I \right\},$$

es una cobertura abierta de $\overline{V}$. Por la compacidad de $\overline{V}$, $\mathcal{A}$ contiene una subcobertura finita; sin perdida de generalidad, asumiremos que dicha subcobertura esta dada por

$$\mathcal{A}' = \left\{ x_i + \frac{1}{2}V \ : \ x_i \in V, i = 1, \dots, m \right\} \implies \overline{V} \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} \left(x_n + \frac{1}{2}V \right).$$

Definamos el espacio vectorial generado por $x_1, x_2, \dots, x_m$, es decir

$$Y = \mathrm{Span}(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Tenemos que $\dim(Y) \leq m$. Por el Teorema 2.3, Y es cerrado. Con todo lo mencionado anteriormente, tenemos que

$$\begin{aligned} V \subseteq V \subseteq & \bigcup_{n=1}^{m} \left(x_n + \frac{1}{2}V \right) \\ & \subseteq Y + \bigcup_{n=1}^{m} \frac{1}{2}V \\ & \subseteq Y + \frac{1}{2}V. \end{aligned}$$

Y es un conjunto generado, entonces $\lambda Y = Y$, siempre que $\lambda \neq 0$. En particular, al tomar $\lambda = 1/2$, se cumple que $Y = (1/2)Y$. Aplicando este hecho a la inclusión $V \subseteq Y + \frac{1}{2}V$, tenemos que

$$V \subseteq Y + \frac{1}{2}V \implies \frac{1}{2}V \subseteq Y + \frac{1}{4}V \implies V \subseteq Y + Y + \frac{1}{4}V.$$

Con lo anterior, se obtienen las siguientes inclusiones

$$\begin{aligned} V & \subseteq Y + Y + \frac{1}{4}V \\ & \subseteq 2Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

es decir, $V \subseteq Y + \frac{1}{4}V$. Al repetir el proceso n veces, se verifica que $V \subseteq Y + \frac{1}{2^n}V, \forall n \in \mathbb{N}$. Concluyendo que

$$V \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(Y + \frac{1}{2^n}V \right). \tag{2.5}$$

Recordemos que la colección $\mathscr{B}_0$, es una base local de 0; es decir, con ella podemos obtener a todos los vecindarios abiertos de 0 en X. Por el Teorema 2.9 a) se cumple que

$$\overline{Y} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(Y + \frac{1}{2^n} V \right). \tag{2.6}$$

Por la inclusión (2.5) y la igualdad (2.6), tenemos que $V \subseteq \overline{Y}$; sin embargo, Y es cerrado, entonces $V \subseteq Y$. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $kV \subseteq kY = Y$, por lo que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} kV \subseteq Y.$$

Tomemos, $\{k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente y positiva. Aplicando el Teorema 2.12 a), se cumple que

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kV.$$

Lo cual nos lleva a concluir que, $X \subseteq Y$, lo cual implica que $Y = X$; en consecuencia, $\dim(X) = \dim(Y)$, pero $\dim(Y) \leq m$, así que X es de dimensión finita. $\square$

2.3. Funcionales y teoría de dualidad

2.3.1. Funcionales

En el cálculo, es usual trabajar con las funciones real valuadas que van de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$; sin embargo, dado que deseamos trabajar con espacios más generales, debemos introducir una generalización de esto. Inicialmente, definiremos un operador; más adelante, definiremos las aplicaciones que son de nuestro interés.

Definición 2.17 (Operador)**.** Sean $(X, \mathbb{K})$ y $(Y, \mathbb{K})$, dos espacios vectoriales. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se denomina **operador**. Un operador $f : X \longrightarrow Y$, se dice **lineal** si satisface que

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x),$$

para todo $x, y \in X$ y para cualquier escalar $\alpha \in \mathbb{K}$.

***Ejemplo* 2.8.** Para un $a \in \mathbb{R}^3$ fijo, la aplicación

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x \longmapsto a \cdot x,$$

donde $a \cdot x$ es el producto punto en $\mathbb{R}^3$, es un operador lineal.

Nosotros estamos interesados en estudiar los operadores con codomino igual al campo sobre el cual está definido nuestro espacio vectorial. Puesto que solamente se han definido espacios vectoriales sobre el cuerpo de reales y los complejos, simplemente diremos que estudiaremos los operadores donde su codomino es $\mathbb{K}$.

Definición 2.18 (Funcional)**.** Un operador que va de un espacio vectorial $(X, \mathbb{K})$ a su campo de escalares $\mathbb{K}$, definido como $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, se denomina **funcional**. Además, si f cumple que

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x),$$

para todo $x, y \in X$ y escalares $\alpha \in \mathbb{K}$, se dice que f es un **funcional lineal**.

***Ejemplo* 2.9.** La integral definida, cuyo dominio es el espacio vectorial de las funciones Riemann-integrables de $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ y su codomino son los reales, es un funcional (Ver [5], Capítulo 2, Sección 2.8, Ejemplo 2.8-6, página 105-104).

Nota. Recordemos que, si $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es un funcional lineal, entonces su codominio y su núcleo, denotados por $\operatorname{Ran}(f)$ y $\operatorname{Ker}(f)$, son subespacios vectoriales de $\mathbb{K}$ y X, respectivamente.

Ahora definiremos otro tipo de funcionales. En particular, si nuestro conjunto de partida es un espacio normado, podemos definir funcionales acotados.

Definición 2.19 (Funcional acotado)**.** Dado $(X, \|.\|)$ un espacio normado, un funcional lineal f, se dice **acotado** si existe un número positivo $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)| \leq c\|x\|, \text{ para todo } x \in X.$$

Observación. Si tenemos un funcional f lineal y acotado, podemos definir la **norma operador** de f como sigue:

$$\|f\|_{\text{op}} = \sup_{\substack{x \in \operatorname{Dom}(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \operatorname{Dom}(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|.$$

Por definición de la norma operador, para todo $x \in X$, se satisface la siguiente desigualdad:

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|_{\text{op}} \iff |f(x)| \leq \|f\|_{\text{op}}\|x\|.$$

Ahora veremos ciertas propiedades que relacionan a los espacios convexos, balanceados y acotados, con la imagen y la preimagen de un funcional lineal.

Proposición 2.23. Sea $(X, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, dos conjuntos A y B tales que $A \subseteq X$ y $B \subseteq \mathbb{K}$. Dado el funcional lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, se verifica que:

a) $f(0) = 0$.

b) Si A es convexo o balanceado, entonces $f(A)$ posee la misma propiedad que A.

c) Si B es convexo o balanceado, entonces $f^{-1}(B)$ posee la misma propiedad que B.

Demostración.

a) Tenemos que $f(x) = f(x)$. Por la linealidad de f, $f(x-x) = 0$. En consecuencia, $f(0) = 0$.

b) Sea A un conjunto convexo. Consideremos la imagen

$$f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ donde } x \in A\}.$$

Tomemos $y, y' \in f(A)$. Entonces $\exists x, x' \in A$ tal que $f(x) = y, f(x') = y'$. Dado $0 \leq t \leq 1$, veamos que

$$\begin{aligned} ty + (1-t)y' &= tf(x) + (1-t)f(x') \\ &= f(tx) + f((1-t)x') \\ &= f(tx + (1-t)x'). \end{aligned}$$

Además, por la convexidad de A, se tiene que $tx + (1-t)x' \in A$. En consecuencia, $f(tx + (1-t)x') \in f(A)$. Por tanto, $f(A)$ es convexo. Ahora veamos el caso cuando A es un conjunto balanceado. Sea $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha| \leq 1$, y tomemos un $y \in \alpha f(A)$. Así que, $y = \alpha f(x) = f(\alpha x)$, para algún $x \in A$. Como A balanceado, tenemos que $\alpha x \in A$; de este modo, $y = f(\alpha x) \in f(A)$. Por tanto, $f(A)$ es balanceado.

c) Sea B un conjunto convexo, tomemos $x, x' \in f^{-1}(B)$ y $0 \leq t \leq 1$. De este modo, existen $y, y' \in \mathbb{K}$ tales que $f(x) = y$, $f(x') = y' \in B$. Notamos que

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)x') &= f(tx) + f((1-t)x') \\ &= tf(x) + (1-t)f(x') \\ &= ty + (1-t)y'. \end{aligned}$$

Por la convexidad de B, se tiene que $ty + (1-t)y' \in B$. En consecuencia, $tx + (1-t)x' \in f^{-1}(B)$; es decir, $f^{-1}(B)$ es convexo.

Ahora veamos el caso cuando B es balanceado. Tomemos $x \in \alpha f^{-1}(B)$. De este modo, $x = \alpha y$, donde $y \in f^{-1}(B)$. Notamos que $f(x) = f(\alpha y) = \alpha f(y)$; ya que B es balanceado, si $\alpha f(y) \in B$, entonces $x \in f^{-1}(B)$. Por tanto, $f^{-1}(B)$ es balanceado.

$\square$

***Teorema* 2.14.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal. Entonces:*

a) f es continuo si y solamente si f es acotado.

b) f es continuo si y solamente si f es continuo en un punto de X.

Demostración.

a)
- " $\Longleftarrow$ " Inicialmente, asumiremos que f es acotado. Si $f = 0$, el resultado será inmediato. Ahora veamos el caso cuando $f \neq 0$, es decir, f no es el funcional trivial. De esta forma, $\|f\|_{\text{op}} \neq 0$. Tomaremos un $y \in X$ arbitrario, y probaremos la continuidad en este punto.

  Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Definimos $\delta = \varepsilon / \|f\|_{\text{op}}$, donde $\|f\|_{\text{op}}$ es un escalar fijo. Tomemos un $x \in X$ tal que
  $$\|x - y\| < \delta, \qquad \text{con } \delta = \frac{\varepsilon}{\|f\|_{\text{op}}}.$$
  Notemos que
  $$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\| &= \|f(x - y)\| \\ &\leq \|f\|_{\text{op}} \|x - y\| \\ &< \|f\|_{\text{op}} \delta \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$
  Con esto probamos que f es continuo en y. Dado que y era un punto arbitrario de X, concluimos que f es continuo en todo X.

- " $\Longrightarrow$ " Ahora asumimos que f es continuo en un punto arbitrario $y \in \text{Dom}(f)$. Luego, dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que
  $$\|x - y\| < \delta, \text{ para todo } x \in \text{Dom}(f) \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$
  Tomemos cualquier $x_0 \neq 0 \in \text{Dom}(f)$, y definamos
  $$x = y + \frac{\delta}{2} \frac{x_0}{\|x_0\|}$$
  $$x - y = \frac{\delta}{2} \frac{x_0}{\|x_0\|}.$$
  Notamos que $\|x - y\| = \delta/2$; en consecuencia, $\|x - y\| \leq \delta$. Ahora observemos que
  $$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\| &= \|f(x - y)\| \\ &= \left\| f \left(\frac{\delta}{2} \frac{x_0}{\|x_0\|} \right) \right\| \\ &= \frac{\delta}{2} \frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|}.\end{aligned}$$

Por hipótesis, $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. Entonces

$$\frac{\delta}{2}\frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|} < \varepsilon$$

$$\|f(x_0)\| < \varepsilon\frac{\|x_0\|}{2\delta}.$$

Ahora bien, como el punto $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ era arbitrario, lo cual nos permite concluir que f es acotado en todo $\mathrm{Dom}(f)$, excepto en $x_0 = 0$.

Analicemos qué sucede si $x_0 = 0$. Para $x_0 = 0$, la desigualdad es trivial pues

$$\|f(x_0)\| \leq c\|x_0\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|f(x_0)\| \leq 0.$$

Probando que f es acotado en todo $\mathrm{Dom}(f)$.

b)
- " $\Longrightarrow$ " Si f es continuo en X, es evidente que f será continuo en cada punto $x \in X$.
- " $\Longleftarrow$ " Ahora asumimos que f es continuo en un punto x arbitrario. Por el literal a), si f es continuo en un punto, entonces f es acotado; sin embargo, si f es acotado, entonces f es continuo en todo X.

□

***Corolario* 2.3.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es un funcional lineal y acotado, entonces el núcleo de f, denotado por* $\mathrm{Ker}(f)$*, es un subespacio cerrado.*

Demostración. Debemos probar que $\overline{\mathrm{Ker}(f)} = \mathrm{Ker}(f)$. La inclusión, $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \overline{\mathrm{Ker}(f)}$ se cumple por definición de cerradura, ; falta probar la otra inclusión.

Sea $x \in \overline{\mathrm{Ker}(f)}$, así que $\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ tal que

$$x_n \longrightarrow x, \quad n \to \infty,$$

dado que f lineal y acotado, por el resultado anterior y el Teorema 1.5, se cumple que

$$f(x_n) \longrightarrow f(x), \quad n \to \infty.$$

Como $x_n \in \mathrm{Ker}(f)$, se tiene que $f(x_n) = 0$; de esta manera, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión constante en $\mathbb{K}$. Por lo cual debe suceder que $f(x) = 0$, es decir, $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Así, probamos que $\overline{\mathrm{Ker}(f)} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ y podemos concluir que $\overline{\mathrm{Ker}(f)} = \mathrm{Ker}(f)$.

□

2.3.2. Espacios duales.

Al considerar el conjunto de los funcionales lineales, notamos que estos forman un espacio vectorial bajo la adición y multiplicación escalar usual. En este apartado, estamos interesados en estudiar dicho espacio.

Definición 2.20 (Espacio dual algebraico)**.** Dado un espacio vectorial $(X, \mathbb{K})$, denotamos por X' al conjunto de todos los funcionales lineales $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, el cual es llamado **espacio dual algebraico** de X.

Nota. El espacio dual algebraico también se denota de la forma $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$.

Nuestro interés, en particular, es estudiar a los funcionales lineales y continuos. Sin embargo, para hablar de continuidad, debemos tener una topología; es por ello que los estudiaremos sobre **espacios vectoriales topológicos**, los cuales están dotados de una topología vectorial y un campo de escalares.

Definición 2.21 (Espacio dual)**.** Sea X un espacio vectorial topológico. El conjunto de todos los funcionales lineales y continuos en X, es llamado el **espacio dual** de X, el cual es denotado por X^*.

Observación. El espacio dual algebraico y el espacio dual, son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, los cuales denotamos como $(X', \mathbb{K})$ y $(X^*, \mathbb{K})$, respectivamente.

Observación. Sea X un espacio vectorial topológico. El espacio dual X^* es un subespacio del espacio dual algebraico X', es decir,

$$X^* \subseteq X^{'},$$

puesto que todo funcional lineal y continuo es un funcional lineal.

¿Podríamos obtener el dual algebraico del dual algebraico o el dual del espacio dual de un espacio vectorial topológico? La repuesta es afirmativa, se pueden definir tanto el doble dual algebraico como el doble dual, los cuales estudiamos a continuación.

Definición 2.22 (Doble dual algebraico y doble dual)**.** El espacio **doble dual algebraico** es el conjunto de todos los funcionales lineales $g : X^{'} \longrightarrow \mathbb{K}$, al cual denotamos por $X^{''}$.

$$X^{''} = \{g : X^{'} \longrightarrow \mathbb{K} \mid g \text{ es un funcional lineal}\}$$

El espacio **doble dual** es el conjunto de todos los funcionales lineales y continuos $g : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$, el cual se denota por X^{**}. Es decir,

$$X^{**} = \{g : X^* \longrightarrow \mathbb{K} \mid g \text{ es un funcional lineal y continuo}\}.$$

Nota. Los espacios doble dual algebraico y doble dual, también son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, denotados por $(X^{''}, \mathbb{K})$ y $(X^{**}, \mathbb{K})$.

2.3.3. Espacio dual sobre espacios normados

Hasta el momento, se ha definido el dual sobre un espacio vectorial topológico X; ahora, veremos algunas propiedades particulares que solamente se cumplen cuando X es un espacio normado, que a su vez, es un espacio vectorial topológico por la Proposición 2.10.

***Teorema* 2.15.** *Si X es un espacio normado, entonces el espacio dual, denotado por X^*, se define como el conjunto de todos los funcionales lineales y acotados.*

Demostración. Sabemos que el dual de un espacio vectorial topológico, se define de la siguiente forma

$$X^* = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es un funcional lineal y continuo}\}.$$

Por el Teorema 2.14, literal a), un funcional f es continuo en X si y solamente si f es acotado. Redefiniendo el conjunto X^*, se tiene que

$$\begin{aligned} X^* &= \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es un funcional lineal y continuo}\} \\ &= \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es un funcional lineal y acotado}\}. \end{aligned}$$

□

En particular, si trabajamos con un espacio normado de dimensión finita obtenemos, un resultado aún más fuerte.

***Teorema* 2.16.** *Si X es un espacio normado de dimensión finita, entonces todo funcional lineal es acotado.*

Demostración. Dado que X es de dimensión finita, podemos tomar una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Para cualquier $x \in X$, tenemos que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

Tomemos un funcional lineal arbitrario, f. Por lo que

$$\|f(x)\| = \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i f(e_i)\| \leq M \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|, \quad \text{donde} \quad M = \max_{1\leq i\leq n} |f(e_i)|.$$

Ahora, por el Lema 2.1, se cumplirá que

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i e_i\| \geq c \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

Uniendo ambas desigualdades, tenemos que $\|f(x)\| \leq \dfrac{M}{c}\|x\|$, $\forall x \in X$. Por tanto, f es acotado. □

Teorema 2.17. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si dotamos al espacio dual de X con la norma operador, entonces $(X^*, \|\cdot\|_{op})$ es un espacio normado, donde*

$$\|f\|_{op} = \sup_{\substack{x\in \mathrm{Dom}(f)\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Demostración. Debemos probar que la norma operador satisface los axiomas de una norma.

1. Por definición, $0 \leq |f(x)|$ y $0 \leq \|x\|$. Así que $0 \leq \dfrac{|f(x)|}{\|x\|}$, lo que implica que
$$0 \leq \sup_{\substack{x\in \mathrm{Dom}(f)\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|_{\mathrm{op}}.$$

2. Si $\|f\|_{\mathrm{op}} = 0$, se tiene que $\dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \leq 0$. Además, del numeral 1)
$$0 \leq \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad\Longrightarrow\quad \frac{|f(x)|}{\|x\|} = 0.$$
En consecuencia, $|f(x)| = 0$. Por lo que $f(x) = 0$. Ahora bien, esto se cumple para todo $x \in X$; en consecuencia, $f = 0$. Veamos la otra dirección, sea $f = 0$. Luego, $|f(x)| = |0| = 0$. Por tanto,
$$\sup_{\substack{x\in \mathrm{Dom}(f)\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|_{\mathrm{op}} = 0.$$

3. Tenemos que
$$\|\alpha f\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\substack{x\in \mathrm{Dom}(f)\\ x\neq 0}} \frac{|\alpha f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in \mathrm{Dom}(f)\\ x\neq 0}} \frac{|\alpha||f(x)|}{\|x\|} = |\alpha| \sup_{\substack{x\in \mathrm{Dom}(f)\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = |\alpha|\|f\|_{\mathrm{op}}.$$

4. Notemos que para $f, g \in X^*$, se tiene que
$$\|f+g\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\substack{x\in \mathrm{Dom}(f+g)\\ x\neq 0}} \frac{|(f+g)(x)|}{\|x\|}.$$
Luego, notamos que
$$\frac{|(f+g)(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(x)+g(x)|}{\|x\|} \leq \frac{|f(x)|}{\|x\|} + \frac{|g(x)|}{\|x\|}.$$
En consecuencia,
$$\sup_{\substack{x\in \mathrm{Dom}(f+g)\\ x\neq 0}} \frac{|(f+g)(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x\in \mathrm{Dom}(f)\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} + \sup_{\substack{x\in \mathrm{Dom}(g)\\ x\neq 0}} \frac{|g(x)|}{\|x\|}.$$
Por tanto,
$$\|f+g\|_{\mathrm{op}} \leq \|f\|_{\mathrm{op}} + \|g\|_{\mathrm{op}}.$$

□

***Teorema* 2.18** (Espacio dual). *Si X es un espacio normado, entonces su espacio dual es un espacio de Banach, bajo la norma operador.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X^*. Debemos probar que esta converge.

Al ser $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy, se cumple que para todo $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n > N \quad \Longrightarrow \quad \|f_n - f_m\|_{\text{op}} < \varepsilon.$$

Esto se cumple para todo $x \in X$ y todo $\epsilon > 0$. En particular, se cumplirá para $\varepsilon_0 = \varepsilon/\|x\|$, donde $x \neq 0$. Dado que $f_n - f_m$ es un funcional acotado, se verifica que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |(f_n - f_m)(x)| \\ &\leq \|f_n - f_m\|_{\text{op}}\|x\| \\ &< \varepsilon_0\|x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{\|x\|}\|x\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo anterior, tenemos que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$; además, este es un espacio de Banach, entonces la sucesión $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en $\mathbb{K}$. Por ello, existe un $y \in \mathbb{K}$ tal que

$$f_n(x) \longrightarrow y, \quad n \to \infty.$$

Ahora, definamos el funcional

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto y, \end{aligned}$$

donde $f(x) = y$ es el límite de $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$; para probar que $f \in X^*$, nos falta verificar que f es lineal y acotado.

Sean x_1 y $x_2 \in X$ tal que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Definamos dos sucesiones $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{f_n(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{K}$, las cuales convergen a y_1 y y_1, respectivamente. En consecuencia,

$$f_n(x_1) + f_n(x_2) \longrightarrow y_1 + y_2, \quad n \to \infty.$$

Además, dado que $f(x_1 + x_2) \in \mathbb{K}$, entonces existe una sucesión $\{f_n(x_1 + x_2)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K}$ tal que

$$f_n(x_1 + x_2) \longrightarrow f(x_1 + x_2), \quad n \to \infty.$$

Por la linealidad de f_n, tenemos que $f_n(x_1) + f_n(x_2) = f_n(x_1 + x_2)$. En consecuencia, las sucesiones $\{f_n(x_1) + f_n(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{f_n(x_1 + x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ son iguales. Por la unicidad del límite, debe ser que

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Anteriormente, se probó que

$$f_n(x) \longrightarrow y, \quad n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \alpha f_n(x) \longrightarrow \alpha f(x), \quad n \to \infty.$$

Ahora tomemos $\alpha x \in X$ tal que $y' = f(\alpha x)$. Así que, existe una sucesión $\{f_n(\alpha x)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$f_n(\alpha x) \longrightarrow y', n \to \infty.$$

Por la linealidad de f_n, $\alpha f_n(x) = f_n(\alpha x)$; de este modo, ambas sucesiones son iguales y por la unicidad del límite debe suceder que $\alpha f(x) = f(\alpha x)$. Por tanto, f es lineal.

Falta probar que f es acotado; para ello, probaremos que $f_n - f$ es acotado $\forall n \geq N$.

Sea $x \in X$ fijo y $\varepsilon > 0$ arbitrario. Se probó que $f_n(x) \longrightarrow f(x), \forall x \in X$. Por la continuidad de la norma, tendremos que $\|f_n(x)\| \longrightarrow \|f(x)\|, \forall x \in X$. La última sucesión está en $\mathbb{K}$, así que, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces

$$\|f_n(x) - f(x)\| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Tomando $n > N$, al aplicar la norma operador a $f_n - f$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{op} &= \sup_{\substack{x \in \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq 0}} \frac{|(f_n - f)x|}{\|x\|} \\ &= \sup_{\substack{x \in \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{\|x\|} \\ &< \sup_{\substack{x \in \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq 0}} \frac{\varepsilon}{\|x\|}, \\ &< \sup_{\substack{x \in \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq 0}} \varepsilon \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

De este modo, hemos probado que $f_n - f$ es acotado, siempre que $n \geq N$. Luego, dado que $f - f_n, f_n \in X^*$, ya que X^* es un espacio vectorial, se tiene que

$$f = (f - f_n) + f_n \in X^*.$$

Además, se ha probado que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, si $n > N$, entonces

$$\|f_n - f\|_{op} < \varepsilon.$$

Es decir, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, es una sucesión convergente. Por lo tanto, X^* es un espacio de Banach. $\square$

Observación. Es importante notar que X^* siempre será un espacio de Banach, sin importar si el espacio normado X es un espacio de Banach o no.

Ahora definiremos una aplicación llamada **aplicación canónica**, cuyo dominio es X y su codominio es $X^{''}$. Dicha aplicación, evidentemente, nos permitirá relacionar los elementos de un espacio vectorial X con los elementos del doble dual algebraico $X^{''}$; sin embargo, antes de definirla, construiremos un funcional "especial" en el doble dual algebraico, que nos será de gran ayuda.

Observación. Al relacionar los elementos de X con su $X^{''}$, es equivalente a relacionar los elementos de X con X^{**}, pues $X^{**} \subseteq X^{''}$.

Sea $(X, \mathbb{K})$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $x \in X$ un elemento fijo. Podemos construir un funcional $g \in X^{''}$ (asociado a x) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} g_x : X^{'} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Es decir, $g_x(f) = f(x)$, para $x \in X$ fijo. Por construcción, el dominio de g_x es $X^{'}$.

Verifiquemos que g es lineal. Sean $f_1, f_2 \in X^{'}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} g_x(f_1 + f_2) &= (f_1 + f_2)(x) & \qquad g_x(\alpha f_1) &= (\alpha f_1)(x) \\ &= f_1(x) + f_2(x) & &= \alpha(f_1(x)) \\ &= g_x(f_1) + g_x(f_2), & &= \alpha g_x(f_1). \end{aligned}$$

Lo cual comprueba que $g_x \in X^{''}$, ya que es lineal y su dominio es $X^{'}$. Ahora, definiremos formalmente dicho funcional.

Definición 2.23 (Evaluación puntual en x)**.** Sea $(X, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $x \in X$ es fijo. La **evaluación puntual en** x, se define de la forma

$$\begin{aligned} g_x : X^{'} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Observación. Por construcción, $g_x \in X^{''}$.

Nota. En particular, si tomamos las evaluaciones puntuales $g_x : X^{*} \longrightarrow \mathbb{K}$, se cumple que $g_x \in X^{**}$.

Una vez definida nuestra evaluación puntual, podemos definir la aplicación que relaciona a X con su dual algebraico $X^{'}$.

Definición 2.24 (Aplicación canónica)**.** Sea $(X, \mathbb{K})$ un espacio vectorial. Definimos la **aplicación canónica** de X a $X^{''}$ como sigue,

$$C : X \longrightarrow X^{''}$$
$$x \longmapsto g_x.$$

Donde g_x es la evaluación puntual definida anteriormente.

Ya hemos definido la aplicación que relaciona el espacio vectorial X con su dual algebraico. Es importante ver como son los elementos del espacio vectorial, su dual y su doble dual.

Espacio.	Elementos del espacio.	Elementos evaluados en un punto.
X	x	-
$X^{'}$	f	$f(x)$
$X^{''}$	g	$g(f)$

Nota. Observemos que los elementos del dual y del doble dual, también tendrán dicha forma, pues $X^* \subseteq X^{'}$ y $X^{**} \subseteq X^{''}$.

Proposición 2.24. Sea $(X, \mathbb{K})$ un espacio vectorial. La aplicación canónica C es lineal.

Demostración. Consideramos la aplicación canónica

$$C : X \longrightarrow X^{''}$$
$$x \longmapsto g_x.$$

Sean $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $f \in f^{''}$. Observemos que

$$\begin{aligned}
(C(\alpha x + \beta y))(f) &= g_{\alpha x + \beta y}(f) \\
&= f(\alpha x + \beta y) \\
&= \alpha f(x) + \beta f(y) \\
&= \alpha g_x(f) + \beta g_y(f) \\
&= \alpha (C_x)(f) + \beta (C_y)(f).
\end{aligned}$$

Por tanto, C es lineal.

□

La aplicación canónica tiene muchas propiedades importantes cuando X es un espacio normado; sin embargo, para demostrarlas es necesario enunciar diversos teoremas.

***Teorema* 2.19** (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sea* $(X, \mathbb{K})$ *un espacio vectorial,* Z *un subespacio vectorial de* X *y* $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *un funcional de modo que*

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$.
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in X$.

Si $f : Z \longrightarrow \mathbb{K}$ *es un funcional lineal tal que*

$$|f(x)| \leq p(x), \forall x \in Z,$$

entonces f *tiene una extensión lineal,* $\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$*, la cual satisface que,*

$$\left|\widetilde{f}(x)\right| \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

$$\widetilde{f}(x) = f(x), \quad \forall x \in Z.$$

Demostración. La demostración de este teorema será omitida. Véase [5], Capítulo 4, Sección 3, Teorema 4.3-1, página 219-221. □

El resultado anterior es uno de los más fundamentales en el Análisis Funcional, el cual posee diversos resultados inmediatos.

***Teorema* 2.20** (Teorema de Hahn-Banach para espacios normados)**.** *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $Z \subseteq X$ *un subespacio. Si* $f : Z \longrightarrow \mathbb{K}$ *es un funcional lineal y acotado, entonces* f *tiene una extensión lineal* $\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *que posee misma norma operador*

$$\left\|\widetilde{f}\right\|_X = \|f\|_Z,$$

donde

$$\left\|\widetilde{f}\right\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \left|\widetilde{f}(x)\right|, \qquad \|f\|_Z = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)|.$$

Demostración. La demostración de este teorema será omitida. Véase [5], Capítulo 4, Sección 3, Teorema 4.3-2, página 221-222. □

***Teorema* 2.21** (Funcionales lineales y acotados)**.** *Si* X *un espacio normado y* $x_0 \neq 0$ *fijo, entonces existe un funcional lineal y acotado* $\widetilde{f}$ *en* X^* *tal que*

$$\left\|\widetilde{f}\right\|_{op} = 1, \qquad \widetilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

Demostración. Definimos el siguiente subespacio $Z = \operatorname{Span}\{x_0\} = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{K}\}$ y constryamos el siguiente funcional,

$$f : Z \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\alpha x_0 \longmapsto \alpha \|x_0\|.$$

El funcional f es lineal y acotado. La norma operador está dada por

$$\left\|\widetilde{f}\right\|_Z = \sup_{\substack{x\in Z\\ \|x\|=1}} \left|\widetilde{f}(x)\right| = \sup_{\substack{x\in Z\\ \|x\|=1}} \alpha\|x_0\| = 1.$$

El Teorema 2.20, nos dice que f tiene una extensión lineal, $\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\left\|\widetilde{f}\right\|_X = \|f\|_Z = 1.$$

Además, $f(x) = \widetilde{f}(x), \forall x \in Z$; en particular, para $x_0 \in Z$, por ello $\widetilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. $\square$

***Corolario* 2.4.** *Todo elemento x en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, se puede representar de la forma*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in X^*\\ f\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{op}}.$$

Además, si $x_0 \in X$ satisface que $f(x_0) = 0, \forall f \in X^*$, entonces $x_0 = 0$.

Demostración. Sea $x \neq 0$ fijo, por el Teorema 2.21 sabemos que existe un funcional

$$\widetilde{f}_x : X \longrightarrow \mathbb{K}$$

tal que

$$\left\|\widetilde{f}_x\right\|_{\text{op}} = 1, \widetilde{f}_x(x) = \|x\|.$$

Por otro lado,

$$\sup_{\substack{f\in X^*\\ f\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\text{op}}} \geq \frac{\left|\widetilde{f}_x(x)\right|}{\left\|\widetilde{f}_x\right\|_{\text{op}}} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|.$$

Además, se cumple que

$$\sup_{\substack{f\in X^*\\ f\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\text{op}}} \leq \sup_{\substack{f\in X^*\\ f\neq 0}} \frac{\|f\|_{\text{op}}\|x\|}{\|f\|_{\text{op}}} = \|x\|.$$

De momento, se ha mostrado que para cada $x \in X$, a excepción de $x = 0$, se cumple que

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in X^*\\ f\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\text{op}}}.$$

Si $x = 0$, dado que f un funcional lineal y acotado, se tiene que $f(0) = 0$. En consecuencia,

$$0 = \|x\| = \sup_{\substack{f\in X^*\\ f\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\text{op}}} = 0.$$

$\square$

Finalmente, estamos listos para probar las propiedades de la aplicación canónica cuando se trabaja sobre un espacio normado.

Proposición 2.25. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces la aplicación canónica C es inyectiva.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} C : X &\longrightarrow X'' \\ x &\longmapsto g_x. \end{aligned}$$

Lo que haremos será analizar el núcleo de C. Tomemos $x \in \operatorname{Ker}(C)$. Luego,

$$C(x)(f) = g_x(f) = f(x) = 0, \forall f \in X^*.$$

Por el Corolario 2.4, dado que estamos en un espacio normado, esto implica que $x = 0$. Así que, $\operatorname{Ker}(C) = \{0\}$. Si C tiene un núcleo trivial, entonces C es inyectiva. □

Proposición 2.26. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. La aplicación canónica $C : X \longrightarrow X''$ es una isometría y un operador acotado.

Demostración. Para comenzar, en la Proposición 2.25 vimos que $C : X \longrightarrow X''$ es inyectiva. Debemos probar que $\|g_x\|_{\text{op}} = \|x\|$; para ello, trabajaremos solamente con las evaluaciones puntuales con dominio en X^{**}

$$\begin{aligned} g_x : X^{**} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Dado $f \in X^*$. Tenemos, $\|f(x)\| \leq \|f\|_{\text{op}}\|x\|$. Ahora, notamos que

$$\begin{aligned} \|g_x\|_{\text{op}} &= \sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{\|g_x(f)\|}{\|f\|_{\text{op}}} \\ &= \sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{\|f(x)\|}{\|f\|_{\text{op}}} \\ &\leq \sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{\|f\|_{\text{op}}\|x\|}{\|f\|_{\text{op}}} \\ &\leq \sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \|x\| = \|x\|. \end{aligned}$$

Con esto hemos probado la primera desigualdad.

Sea $x \neq 0$ fijo. Por el Teorema 2.21, podemos garantizar que existe un funcional $\widetilde{f} \in X^*$ tal que $\left\|\widetilde{f}\right\| = 1$, $\left\|\widetilde{f}(x)\right\| = \|x\|$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|g_x\|_{\text{op}} &= \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|=1}} |g_x(f)| \\
&= \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|=1}} |f(x)| \\
&\geq \left|\widetilde{f}(x)\right| = \|x\|.
\end{aligned}$$

Con esto probamos la segunda desigualdad y por ende la igualdad, para todo $x \in X$, excepto cuando $x = 0$. Veamos el caso cuando $x = 0$, tenemos que

$$\|g_0(f)\|_{\text{op}} = \|f(0)\| = \|0\| = 0 = x.$$

Hemos probado que $\|g_x\|_{\text{op}} = \|x\|$, lo cual es la segunda condición para que C sea una isometría.

Además, se cumple que

$$\|C(x)\|_{\text{op}} = \|g_x\|_{\text{op}} = \|x\| \leq 2\|x\|, \forall x \in X.$$

Lo cual prueba que C es un operador lineal y acotado. □

Definición 2.25 (Espacios embebibles)**.** Si $f : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo de X a un subespacio de Y, entonces decimos que X es **embebible** en Y.

Definición 2.26 (Algebraicamente reflexivo)**.** Si la aplicación canónica C es sobreyectiva, se dice que X es **algebraicamente reflexivo**.

La importancia de la aplicación canónica es el hecho que cuando se trabaja bajo un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ cumple que es un isomorfismo. Dicha aplicación nos permite reconocer a X dentro de X'', pues las normas se preservan. De hecho, si C es sobreyectivo, se puede decir que son X y X'' son "idénticos" ; esto, debido a que la sobreyectividad implica que $\operatorname{Ran}(C) = X''$. Por tanto, C sería un isomorfismo de X a X''.

Ahora veremos algunos espacios duales de diversos espacios vectoriales específicos.

***Ejemplo* 2.10.**

1. El espacio dual de $\mathbb{R}^n$ es $\mathbb{R}^n$. (Ver [5], Capítulo 2, Sección 2.10, Ejemplo 2.10-5, página 121).

2. El espacio dual de ℓ_p es ℓ_q, con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $1 < p < +\infty$. (Ver [5], Capítulo 2, Sección 2.10, Ejemplo 2.10-7, página 122-124).

El siguiente resultado es de gran importancia pues jugará un papel importante en las aplicaciones del Teorema de Alaoglu.

***Teorema* 2.22.** *El espacio dual de L^p es L^q, donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, con $1 < p < +\infty$.*

Demostración. La demostración de este teorema será omitida. Véase [6], Capítulo 8, Sección 8.3, Teorema 11, página 79. □

Otro resultado que nos será de mucha utilidad es el siguiente, el cual nos dice que para probar la continuidad en un espacio vectorial topológico basta con garantizarla en un solo punto. Este resultado es bastante conocido en espacios normados; sin embargo, acá haremos una generalización a espacios vectoriales topológicos.

***Teorema* 2.23.** *Sea X un espacio vectorial topológico y $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal. Si f es continuo en 0, entonces f es continuo en X. En consecuencia, f es uniformemente continuo.*

Observación. La continuidad uniforme, se refiere al hecho que para todo vecindario abierto W de 0, existe un vecindario V de 0 tal que

$$\text{Si } y - x \in V \implies f(x) - f(y) \in W.$$

Demostración. Por hipótesis, f continuo en 0. Sea U un vecindario abierto arbitrario de $f(x)$, donde $(-f(x)) + U$ es un vecindario abierto de 0. Por la continuidad del Teorema 1.4, debe existir un vecindario abierto V de 0, tal que

$$f(V) \subseteq (-f(x)) + U.$$

Lo que debemos probar es la inclusión $f(V + x) \subseteq U$.

Sea $z = f(v') \in f(V + x)$, donde $v' = v + x$, con $v \in V$. Así que

$$z = f(v') = f(v + x) = f(v) + f(x).$$

Además, se tiene que

$$f(v) \in f(V) \implies f(v) \in (-f(x)) + U \implies f(v') = f(v) + f(x) \in U,$$

lo cual prueba que $f(V+x) \subseteq U$. Por el Teorema (1.4), dado que U es un vecindario abierto de $f(x)$ y se garantizó la existencia de un vecindario abierto $V+x$ de x tal que $f(V+x) \subseteq U$. Se prueba la continuidad en todo X.

Al mismo tiempo, se probó la continuidad uniforme. Sea W un vecindario abierto arbitrario de 0. Dada la continuidad, existe un vecindario abierto V de 0 tal que $f(V) \subseteq W$; de este modo,

$$y - x \in V \text{ y } f(y) - f(x) \in f(V) \implies f(y) - f(x) \in W.$$

□

Ahora, estudiaremos algunos resultados más fuertes que se obtienen al trabajar los funcionales bajo un espacio vectorial topológico X.

Teorema 2.24. *Sea X un espacio vectorial topológico. Si f es un funcional lineal, las siguientes propiedades son equivalentes:*

a) f es continuo.

b) El espacio nulo es cerrado.

c) El espacio nulo no es denso en X.

d) f es acotado en algún vecindario abierto V de 0.

Demostración. Esta prueba la haremos para cualquier funcional distinto del trivial, pues para el funcional trivial los resultados son inmediatos.

- "$a) \implies b)$" Tenemos que f es continuo. El unipuntual $\{0\}$ es cerrado y por la continuidad de f, tenemos que $f^{-1}(\{0\})$ es cerrado; de este modo, como $f^{-1}(\{0\}) = \mathrm{Ker}(f)$, se concluye que el espacio nulo es cerrado.

- "$b) \implies c)$" Asumamos que $\mathrm{Ker}(f)$ es cerrado, es decir, $\overline{\mathrm{Ker}(f)} = \mathrm{Ker}(f)$. Por contradicción, asumiremos que $\mathrm{Ker}(f)$ es un conjunto denso en X, así que $\forall x \in X$ se cumple que $f(x) = 0$; sin embargo, esto no puede ser, pues hemos asumido que f es un funcional distinto del trivial. De esta forma, probamos que $\mathrm{Ker}(f)$ es denso en X.

- "$c) \implies d)$" Por hipótesis, el espacio nulo no es denso en X. Además, $X \setminus \overline{\mathrm{Ker}(f)}$ es abierto. Sea V un vecindario abierto de 0 y $x \in X \setminus \mathrm{Ker}(f)$. Tenemos que $x + V$ es un vecindario abierto de x. Por la Proposición 2.2, tenemos que

  $$\overline{(x+V)} \cap \overline{\mathrm{Ker}(f)} = \emptyset \quad \implies \quad (x+V) \cap \overline{\mathrm{Ker}(f)} = \emptyset.$$

  Luego, por el Teorema 2.10, existe un vecindario balanceado W de 0 tal que $W \subseteq V$, el cual también cumplirá que

  $$(x+W) \cap \overline{\mathrm{Ker}(f)} = \emptyset.$$

Aplicando la Proposición 2.23, $f(W) \subseteq \mathbb{K}$ es balanceado. Del ejemplo 2.2, sabemos que en $\mathbb{K}$ los únicos conjuntos balanceados son $\emptyset, \mathbb{K}, \{0\}, \overline{B_r}(x)$. Analizaremos cada caso.

Si $f(W) = \emptyset$, $\{0\}$ ó $\overline{B_r}(x)$, entonces $f(W)$ es acotado; lo cual garantiza que f es acotado en algún vecindario W de 0.

Falta ver el caso cuando $f(W) = \mathbb{K}$. Tomemos $x \in X \setminus \mathrm{Ker}(f)$ arbitrario. Dado que el espacio nulo es un espacio vectorial, se sigue que

$$-x \in X \setminus \mathrm{Ker}(f) \quad \Longrightarrow \quad f(-x) \in \mathbb{K} = f(W).$$

En consecuencia, existe $y \in W$ tal que $f(y) = f(-x)$. Por la linealidad de f,

$$f(y+x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y + x \in \mathrm{Ker}(f).$$

Además, $y + x \in x + W$; pero esto es una contradicción, pues $(x + W) \cap \mathrm{Ker}(f) = \emptyset$. De esta forma f es acotado en algún vecindario W de 0.

- "$d) \Longrightarrow a)$" Por hipótesis, sabemos que existe un vecindario abierto V de 0 en X tal que $f(V)$ es acotado; en consecuencia, para todo vecindario abierto U de 0 en $\mathbb{K}$ existe un número $s > 0$ tal que $f(V) \subseteq tU$, siempre que $t > s$.

$$f(V) \subseteq tU \quad \Longrightarrow \quad (1/t)f(V) = f((1/t)V) \subseteq U.$$

Lo anterior prueba, que para todo vecindario abierto U de 0 en $\mathbb{K}$ se ha encontrado un vecindario abierto $(1/t)V$ de 0 en X tal que $f((1/t)V) \subseteq U$; aplicando el Teorema 1.4, tenemos que f es continuo en 0. Finalmente, por el Teorema 2.23 se concluye que f es continuo en todo X.

□

2.4. Espacios localmente convexos y Teoremas de separación

En esta sección, iniciaremos definiendo una seminorma, pues nos serán de gran utilidad cuando hablemos del funcional de Minkowski; dicho funcional es primordial para demostrar los teoremas de separación que es uno de los objetivos principales de dicha sección.

Definición 2.27 (Seminorma)**.** Sea X un espacio vectorial y $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real valuada. Si para todo $x, y \in X$ $\alpha \in \mathbb{K}$ se satisface que:

a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

b) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$,

entonces decimos que p es una **seminorma**.

Proposición 2.27. Sea X un espacio vectorial topológico. Si $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una seminorma, entonces

a) $p(0) = 0$.

b) $\forall x \in X$, $p(x) \geq 0$.

c) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.

Demostración.

a) Si $\alpha = 0$, entonces
$$p(0) = p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = 0p(x) = 0.$$

b) Sea $x + (-x) = 0$, con ello tenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned} 0 = p(0) = p(x + (-x)) &\leq p(x) + p(-x) \\ &= p(x) + |-1| p(x) \\ &= p(x) + p(x) \\ &= 2p(x). \end{aligned}$$

Hemos mostrado que
$$0 \leq 2p(x) \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq p(x).$$
Que es lo que queríamos demostrar.

c) Dada la subaditividad de la seminorma p, tenemos que

$$p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y) \quad \Longrightarrow \quad p(x) - p(y) \leq p(x - y).$$

De la misma forma podemos obtener, que $-p(x - y) \leq p(x) - p(y)$. Al unir ambas desigualdades se verifica que

$$-p(x - y) \leq p(x) - p(y) \leq p(x - y),$$

es decir, $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.

□

Definición 2.28. Sean X e Y espacios vectoriales. Una colección de funciones

$$\mathscr{F} = \{f_i \mid f_i : X \longrightarrow Y, i \in I\}$$

separa puntos de $\boldsymbol{X}$, si para cualquier par de puntos $x, y \in X$, $x \neq y$ existe $f_i \in \mathscr{F}$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Observación. En la definición anterior, es importante notar que cada f_i es específico para el par de puntos $x, y \in X$; es decir, si tomamos $x, y_1 \in X$, con $x \neq y_1$, $y \neq y_1$, el $f_j \in \mathscr{F}$ para el cual $f_j(x) \neq f_j(y_1)$ puede o no ser distinto de f_i.

Nota. Es importante no confundir una familia de que separa puntos con un espacio separable.

A continuación veremos un ejemplo de familias que separan puntos.

Proposición 2.28. Sea X un espacio vectorial topológico y g_x la evaluación puntual. La familia

$$\mathscr{F} = \{g_x \in X^{**} \mid g_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}, x \in X\},$$

separa puntos de X^*.

Demostración. Sea $x \in X$ arbitrario, definamos $g_x \in X^{**}$. Tomemos $f, f' \in X^*$ tal que $g_x(f) = g_x(f')$, entonces

$$g_x(f) = g_x(f')$$
$$f(x) = f'(x),$$

dicha igualdad se cumple $\forall x \in X$, con esto se concluye que $f = f'$. Probando que $\mathscr{F}$ separa puntos de X. □

Bajo el contexto de seminormas definiremos el funcional de Minkowski; sin embargo, antes debemos dar la definición de conjunto absorbente.

Definición 2.29 (Conjunto absorbente)**.** Sea X un espacio vectorial. Un subconjunto A se dice **absorbente**, si para todo $x \in X$, existe $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ tal que $x \in tA$.

Como podemos observar, al tener un conjunto absorbente podemos cubrir a un espacio vectorial con homotecias de estos. ¿Habrá una forma más fácil para decir si un conjunto es absorbente o no? La respuesta es afirmativa, para ello tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.29. Sea X un espacio vectorial topológico. Si V es un vecindario abierto de 0, entonces V es un conjunto absorbente.

Demostración. Sea V un vecindario abierto $0 \in V$. Por el Teorema 2.12 literal a), si tomamos una sucesión estrictamente creciente positiva $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $r_n \longrightarrow \infty, n \to \infty$, entonces

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$

Así que para cada $x \in X$, existe $r_n > 0$ tal que $x \in r_n V$. Verificando que V es un conjunto absorbente. □

***Ejemplo* 2.11.** El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ es un vecindario abierto de 0 en $\mathbb{R}^2$. Por la Proposición 2.29, A es un conjunto absorbente.

Definición 2.30 (Funcional de Minkowski)**.** Sea X un espacio vectorial y A un conjunto absorbente. El funcional

$$\begin{aligned} \mu_A : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mu_A(x) = \text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}x \in A\}, \end{aligned}$$

es llamado **funcional de Minkowski**.

Observación. Es importante notar que el funcional de Minkowski se calcula para cada x y el conjunto A es fijo.

Otra propiedad importante del funcional de Minkowski es el hecho que es finito, es decir, $\mu_A(x) < \infty$. Nos podemos preguntar ¿Por qué debe ser así? Analicemos que sucede si $\mu_A(x) = \infty$. En este caso tendríamos que no existe $t \in \mathbb{R}, t > 0$ tal que $t^{-1}x \notin A$; sin embargo, esto es una contradicción, pues al ser A un conjunto absorbente $\exists t \in \mathbb{R}, t > 0$ tal que $t^{-1}x \in A$.

Al inicio, se dijo que las seminormas estaban relacionadas con el funcional de Minkowski, pero ¿cuál es dicha relación? Resulta que los funcionales de Minkowski son seminormas en casos específicos, formalizaremos dicho resultado a continuación.

***Teorema* 2.25.** *Sea p una seminorma de un espacio vectorial X. Entonces*

a) El conjunto $B = \{x \in X : p(x) < 1\}$ es convexo, balanceado y absorbente.

b) Se cumple que $p = \mu_B$.

Demostración.

a) Debemos probar que el conjunto $B = \{x \in X : p(x) < 1\}$ es convexo, balanceado y absorbente.

- Probemos que B es convexo. Sea $x, y \in B$, $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq t \leq 1$, por ello que $p(x) < 1$, $p(y) < 1$. Debemos verificar que $tx + (1-t)y \in B$. Veamos la siguiente desigualdad,

$$\begin{aligned} p(tx + (1-t)y) &\leq |t|p(x) + |1-t|p(y) \\ &< |t| + |1-t| \\ &< t + 1 - t \\ &< 1. \end{aligned}$$

  Así que B es un conjunto convexo.

- Probando que B es balanceado. Sea α tal que $|\alpha| \leq 1$, debemos probar que $\alpha x \in B$, con $x \in B$. Ya que $x \in B$, entonces $p(x) < 1$, con ello se obtiene que

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x) < |\alpha| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad p(\alpha x) < 1.$$

  Lo cual prueba que $\alpha x \in B$, es decir, B es balanceado.
- Probemos que B es absorbente. Sea $x \in X$, $p(x) > 0$, $s \in \mathbb{R}$ tal que $p(x)/s < 1$. Notemos que,

$$p\left(\frac{x}{s}\right) = \left|\frac{1}{s}\right| p(x) = \frac{p(x)}{s} < 1.$$

  Es decir,

$$\frac{x}{s} \in B \quad \Longrightarrow \quad x \in sB.$$

  De esta forma se prueba que para cada $x \in X$, existe $s > 0$ tal que $x \in sB$. Lo cual verifica que B es un conjunto absorbente.

b) Debemos probar que $\mu_B(x) = p(x)$.

Para comenzar, analicemos quien es el funcional de Minkowski

$$\begin{aligned} \mu_B(x) &= \inf\{t > 0 : x/t \in B\} \\ &= \inf\{t > 0 : p(x)/t < 1\} \\ &= \inf\{t > 0 : p(x) < t\}. \end{aligned}$$

Sea $p(x) < s$, así que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon + p(x) = s$; además, por definición, $\mu_B(x) < s$ por lo que

$$\begin{aligned} &\mu_B(x) < p(x) + \varepsilon \\ &\mu_B(x) \leq p(x). \end{aligned}$$

Probando así la primera desigualdad.

Sea $p(x) < s$. Por la caracterización del ínfimo $\forall \varepsilon > 0$, $\exists s'$ tal que $p(x) < s'$, donde

$$s' < \mu_B(x) + \varepsilon \implies p(x) < \mu_B(x) + \varepsilon \implies p(x) \leq \mu_B(x),$$

probando así la segunda desigualdad. Finalmente, concluimos que $p(x) = \mu_B(x)$.

$\square$

***Teorema* 2.26.** *Sea X un espacio vectorial. Si A un conjunto convexo y absorbente, entonces.*

a) $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.

b) $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$, *si* $t \geq 0$.

c) Si A es balanceado, entonces μ_A es una seminorma.

d) Si $B = \{x \in X : \mu_A(x) < 1\}$ *y* $C = \{x \in X : \mu_A(x) \leq 1\}$, *entonces* $B \subseteq A \subseteq C$ *y* $\mu_A = \mu_B = \mu_C$.

Demostración. Veremos la prueba de cada uno de los literales.

a) Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Definamos $t = \mu_A(x)+\varepsilon$ y $s = \mu_A(y)+\varepsilon$; donde $t \in \{t > 0 : x/t \in A\}$ y $s \in \{s > 0 : y/s \in A\}$.

   Por la convexidad de A, al tomar $\dfrac{x}{t}, \dfrac{y}{s} \in A$ y $0 < \dfrac{t}{t+s} \leq 1$, se tiene que

$$\left(\frac{t}{t+s}\right) \cdot \frac{x}{t} + \left(1 - \frac{t}{t+s}\right) \cdot \frac{y}{s} \in A.$$

   Notamos que,

$$\begin{aligned}\left(\frac{t}{t+s}\right) \cdot \frac{x}{t} + \left(1 - \frac{t}{t+s}\right) \cdot \frac{y}{s} &= \left(\frac{t}{t+s}\right) \cdot \frac{x}{t} + \left(\frac{s}{t+s}\right) \cdot \frac{y}{s} \\ &= \frac{x}{t+s} + \frac{y}{t+s} \\ &= \frac{x+y}{t+s}.\end{aligned}$$

   Con lo anterior, probamos que $\dfrac{x+y}{t+s} \in A$ y nos permite concluir, que

$$t + s \in \{r > 0 : (x+t)/r \in A\}.$$

   En consecuencia,

$$\begin{aligned}\mu_A(x+y) &\leq t + s \\ &\leq \mu_A(x) + \varepsilon + \mu_A(y) + \varepsilon \\ &\leq \mu_A(x) + \mu_A(y) + 2\varepsilon \\ &\leq \mu_A(x) + \mu_A(y).\end{aligned}$$

   Obteniendo así la desigualdad deseada, $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.

b) Analicemos a $\mu_A(tx)$, con $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mu_A(tx) &= \text{ínf}\left\{r > 0 : \frac{tx}{r} \in A\right\}\\ &= \text{ínf}\left\{r > 0 : \frac{x}{(r/t)} \in A\right\}\\ &= \text{ínf}\left\{tr/t > 0 : \frac{x}{(r/t)} \in A\right\}\\ &= t\,\text{ínf}\left\{m > 0 : \frac{x}{m} \in A\right\}\\ &= t\mu_A(x).\end{aligned}$$

De esta forma probamos que $t\mu_A(x) = \mu_A(tx)$.

c) Por hipótesis, A es balanceado. Por el literal a) obtenemos la primera condición de una seminorma. Solamente nos falta probar que $\mu_A(tx) = |t|\mu(x)$.

Por la Proposición 2.1, si A es un conjunto balanceado, también es simétrico. Utilizaremos esto en la siguiente igualdad de conjuntos

$$\begin{aligned}\mu_A(tx) &= \text{ínf}\left\{r > 0 : \frac{tx}{r} \in A\right\}\\ &= \text{ínf}\left\{r > 0 : \frac{x}{(r/|t|)} \in A\right\}, \text{ por la simetría de } A\\ &= \text{ínf}\left\{|t|r/|t| > 0 : \frac{x}{(r/|t|)} \in A\right\}\\ &= |t|\,\text{ínf}\left\{m > 0 : \frac{x}{m} \in A\right\}\\ &= |t|\mu_A(x).\end{aligned}$$

d) Sea $B = \{x \in X : \mu_A(x) < 1\}$ y $C = \{x \in X : \mu_A(x) \leq 1\}$, por definición tenemos que $B \subseteq C$.

Tomemos $x \in B$, así que, $\mu_A(x) < 1$. Sean $x, 0 \in A$ y $0 \leq t \leq 1$. Por la convexidad de A se tiene que

$$tx + (1-t)0 = x \in A \quad \Longrightarrow \quad B \subseteq A.$$

Ahora tomemos $x \in A$, en consecuencia, $1 \in \{t > 0 : tx \in A\}$. Lo anterior implica que $\mu_A(x) \leq 1$, es decir $x \in C$. Probando así, la segunda desigualdad.

De momento hemos obtenido que $C \subseteq A \subseteq B$. Por definición, se cumple que

$$\{t > 0 : t^{-1}x \in C\} \subseteq \{t > 0 : t^{-1}x \in A\} \subseteq \{t > 0 : t^{-1}x \in B\}$$
$$\implies \quad \text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}x \in B\} \subseteq \text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}x \in A\} \subseteq \text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}x \in C\}.$$

Por lo que, $\mu_B(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_C(x)$. De momento nos faltan probar las otras desigualdades.

Tomemos $x \in X$ fijo. Sea s, t de modo que $\mu_C(x) \leq s < t$, así que, $x/s \in C \subseteq A$; en consecuencia, $\mu_A(x/s) \leq 1$.

Notemos que

$$\left(\frac{t}{s}\right)\frac{x}{t} = x/s \in A \quad \implies \quad \mu_A(x/t) \leq s/t < 1,$$

es decir, $x/t \in B$, por lo que $\mu_B(x) \leq t$. Lo anterior, se cumple para todo $t > \mu_C(x)$, entonces $\mu_B(x) \leq \mu_C(x)$. Ya que hemos demostrado ambas desigualdades, tenemos que

$$\mu_B(x) = \mu_C(x) = \mu_A(x).$$

$\square$

Teorema 2.27. *Sea X un espacio vectorial topológico y $\mathscr{B}$ es una base local convexa local y balanceada de 0. Si $V \in \mathscr{B}$, entonces le podemos asociar su funcional de Minkowski μ_V de la siguiente forma,*

$$V = \{x \in X : \mu_V(x) < 1\}, \qquad \textit{para todo } V \in \mathscr{B}.$$

Demostración. Probaremos que $V = \{x \in X : \mu_V(x) < 1\}$. Lo haremos por doble inclusión.

- "$\implies$" Sea $x \in V$, así que $\mu_V(x) < 1$. El funcional de Minkowsky está bien definido, pues al ser V un vecindario abierto de 0 es un conjunto absorbente.

- "$\impliedby$" Ahora, debemos probar que si $x \in \{x \in X : \mu_V(x) < 1\}$ entonces $x \in V$. Lo haremos por contra recíproca.

  Sea $x \notin V$. Tenemos que $x/t \in V$, siempre que $t > 1$; esto viene del hecho que V es balanceado. Utilizando lo anterior, tenemos que $\mu_V(x) \geq 1$, es decir,

  $$x \notin \{x \in X : \mu_V(x) < 1\}.$$

  De esta forma se ha probado $V = \{x \in X : \mu_V(x) < 1\}$.

$\square$

En los espacios vectoriales topológicos existe una forma alternativa para verificar que si estos son espacios normados o no, es decir, si la topología vectorial es inducida por una norma.

***Teorema* 2.28.** *X es un espacio vectorial topológico normado si y solamente si existe un vecindario abierto, convexo y acotado en* 0*.*

Demostración. La demostración de este teorema será omitida. Véase [8], Capítulo 1, Teorema 1.39, página 30.

□

Sea X un espacio vectorial topológico complejo y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal y continuo. Ya que f es complejo valuado, podemos definir $u = \mathrm{Re}(f)$, donde $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Utilizando lo anterior, reescribimos al funcional f como

$$f(x) = u(x) - iu(ix), \qquad x \in X.$$

Esto es debido al hecho que, $z = \mathrm{Re}(x) - i\,\mathrm{Re}(iz), \quad z \in \mathbb{C}$.

De igual forma, con el funcional $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos definir el funcional $f : X \Longrightarrow \mathbb{C}$, donde

$$f(x) = u(x) - iu(ix), \quad x \in X.$$

Dicho funcional es complejo valuado y lineal. De lo mencionado anteriormente, tenemos que: dado un espacio vectorial topológico X y un funcional f, $f \in X^*$ si y solamente si, su parte real es continua; además, cada funcional continuo real valuado $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se corresponde con la parte real de un único funcional complejo $f \in X^*$.

***Teorema* 2.29.** *Sea X un espacio vectorial topológico. Si A y B son conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos, tenemos que:*

a) Si A es un conjunto abierto, entonces existe $f \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{Re}(f(x)) < \gamma \leq \mathrm{Re}(f(y)),$$

para todo $x \in A$ y para todo $y \in B$.

b) Si X es localmente convexo, A compacto y B es cerrado, entonces existe $f \in X^*$ y $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{Re}(f(x)) < \gamma_1 < \gamma_2 < \mathrm{Re}(f(y)),$$

para todo $x \in A$ y para todo $y \in B$.

Demostración.

a) La prueba de dicho teorema la haremos para el caso que X sea un espacio vectorial topológico real. Pues todo funcional lineal y continuo se corresponde a la parte real de un único funcional $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ real valuado.

Sea X es un espacio vectorial topológico real. Tomemos $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional arbitrario y $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ fijos. Definamos $x_0 = b_0 - a_0$. Además, el conjunto

$$C = A - B + x_0,$$

es abierto. Notemos que $a_0 - b_0 + x_0 = 0 \in C$, así que, C es un vecindario abierto de 0; en consecuencia, C es absorbente.

Ahora probaremos que C es convexo. Sea $0 \leq t \leq 1$, tomemos $c, c' \in C$, entonces

$$\begin{aligned} tc + (1-t)c' &= t(a - b + x_0) + (1-t)(a' - b' + x_0) \\ &= \underbrace{ta + (1-t)a}_{\in A} - \underbrace{(tb + (1-t)b)}_{\in B} + x_0, \end{aligned}$$

Así que $tc + (1-t)c' \in C$; de momento, se ha probado que C es un vecindario abierto, convexo y absorbente de 0. Así que, podemos definir el funcional de Minkowski sobre C

$$\begin{aligned} \mu_C &: X \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto \mu_C(x) = \text{ínf}\{t > 0 : x/t \in C\}. \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.26, se cumple que $\mu_C(x+y) \leq \mu_C(x) + \mu_C(y)$. Además, si $t \geq 0$, entonces $\mu_C(tx) = t\mu_C(x)$. Lo anterior, garantiza que μ_C tiene la forma del funcional p, del Teorema 2.19.

Por otro lado, dado que $A \cap B = \emptyset$, se tiene que $x_0 \notin C$. Lo anterior implica que, $\mu_C(x_0) \geq 1$.

Definamos el siguiente funcional sobre el subespacio $M = \text{Span}\{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{R}\}$ de X

$$\begin{aligned} f &: M \longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha x_0 &\longmapsto \alpha. \end{aligned}$$

Si $t \geq 0$, entonces $f(tx_0) = t$, por lo que

$$f(tx_0) \leq t\mu_C(x_0).$$

Pero, si $t < 0$, entonces $f(tx_0) < 0 \leq \mu_C(tx_0)$, obteniendo de este modo que

$$|f(y)| = f(y) \leq \mu_C(y), \text{ siempre que } y \in M.$$

Hemos demostrado se cumplen todas las hipótesis del Teorema 2.19, así que f tiene una extensión lineal

$$\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que $\widetilde{f}(x) = f(x), x \in M$ y $|f(x)| = f(x) \leq \mu_C(x), \forall x \in X$.

En particular, dado $y \in C$, se cumple que

$$\widetilde{f}(y) \leq \mu_C(y) \leq 1 \implies \widetilde{f}(y) \leq 1.$$

Es decir, $\widetilde{f}(y) \leq 1$, siempre que $y \in C$. Dado $-y \in -C$, se cumple que

$$\widetilde{f}(-y) \leq \mu_C(-y) \leq 1 \implies -\widetilde{f}(y) \leq 1.$$

Con lo anterior, obtenemos que $\widetilde{f}(y) \geq -1$, siempre que $-y \in -C$. En general, probamos que

$$\left|\widetilde{f}\right| \leq 1, \text{ en } C \cap (-C).$$

De esta forma concluimos que $\widetilde{f}$ es acotado en el vecindario abierto $C \cap (-C)$ de 0. Aplicando el Teorema 2.24, tenemos que $\widetilde{f}$ es continuo.

Si $x_1 \in A$, $y_1 \in B$, entonces $x_1 - y_1 + x_0 \in C$. Obteniendo que

$$\begin{aligned} 1 > \mu_C(x_1 - y_1 + x_0) \geq \widetilde{f}(x_1 - y_1 + x_0) \\ 1 > \widetilde{f}(x_1) - \widetilde{f}(y_1) + \widetilde{f}(x_0) \\ 1 > \widetilde{f}(x_1) - \widetilde{f}(y_1) + 1 \\ \widetilde{f}(y_1) > \widetilde{f}(x_1), \end{aligned}$$

lo cual prueba que, $\widetilde{f}(x_1) < \widetilde{f}(y_1)$, siempre que $x_1 \in A$, $y_1 \in B$; en consecuencia,

$$\widetilde{f}(A) \cap \widetilde{f}(B) = \emptyset,$$

donde $\widetilde{f}(A) \subseteq \widetilde{f}(B)$. Garantizando que $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\widetilde{f}(x_1) < \gamma \leq \widetilde{f}(y_1), \qquad \forall x_1 \in A, y_1 \in B.$$

b) Sean A compacto y B cerrado, por el Teorema 2.2, existe un vecindario abierto y convexo V de 0 tal que

$$(A + V) \cap B = \emptyset.$$

$A + V$ es un conjunto abierto y convexo, pues es la traslación de V un vecindario abierto y convexo, entonces por el literal a) probando anteriormente, existe $f \in X^*$, $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{Re}(f(x)) < \gamma_1 \leq \mathrm{Re}(f(y)), \qquad \forall x \in A + V, y \in B.$$

Es decir, $f(A + V) \cap f(B) = \emptyset$. Por la compacidad de A, ya que f es continuo, tenemos que $f(A)$ es compacto y $f(A) \subseteq f(A + V)$; en consecuencia $\exists \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{Re}(f(z)) < \gamma_2 \leq \mathrm{Re}(f(x)), \qquad \forall z \in A, x \in A + B.$$

Finalmente se obtiene que

$$\mathrm{Re}(f(z)) < \gamma_2 < \gamma_1 < \mathrm{Re}(f(y)), \qquad \forall z \in A, y \in B.$$

Con ello concluimos la prueba.

$\square$

***Teorema* 2.30.** *Si X es un espacio vectorial localmente convexo, entonces X^* separa puntos de X.*

Demostración. Sean $x, y \in X$, tal que $x \neq y$. Tenemos que X es un espacio vectorial topológico convexo; los conjuntos $\{x\}$, $\{y\}$ son cerrados, compactos y convexos al ser unipuntuales; lo anterior, verifica todas las hipótesis del Teorema 2.29, por ello $\exists f \in X^{**}$ y $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{Re}(f(x)) < \gamma_1 < \gamma_2 < \mathrm{Re}(f(y)).$$

Lo anterior implica que $f(x) \neq f(y)$, es decir, que X^* separa puntos de X. $\square$

Capítulo 3

El Teorema de Alaoglu

"Sin duda se precisaba un gran acto de fe para pensar que este proceso iba a converger; pero nosotros teníamos fe en Bourbaki"

-André Weil.

3.1. Convergencias débil y débil -*

Uno de los resultados más importantes que son consecuencia del Teorema de Categorías de Baire 1.16, es el Teorema de Acotamiento Uniforme; el cual se utiliza para demostrar resultados de las convergencias débil y débil-*, que son el objetivo principal de esta Sección.

***Teorema* 3.1** (Teorema de Acotamiento Uniforme)**.** *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores lineales y acotados. Si $\{\|T_n(x)\|\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada; es decir, para todo $x \in X$ se cumple que,*

$$\|T_n(x)\| \leq c_x, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_x \in \mathbb{R}$$

En consecuencia, existe un número c tal que

$$\|T_n\|_{op} \leq c, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$A_k = \{x \in X \ : \ \|T_n(x)\| \leq k, \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Probaremos que A_k es cerrado. Por definición $A_k \subseteq \overline{A_k}$, solo nos falta probar la inclusión $\overline{A_k} \subseteq A_k$.

Tomemos $x \in \overline{A_k}$, así que, existe una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq A_k$ tal que

$$x_i \longrightarrow x, \quad i \to \infty.$$

La sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq A_k$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\|T_n(x_i)\| \leq k.$$

Utilizando el hecho que T_n es acotado, se tiene que es continuo. Así que,

$$x_i \longrightarrow x, \quad i \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad T_n(x_i) \longrightarrow T_n(x), \quad i \to \infty.$$

Por la continuidad de la norma, se obtendrá que

$$T_n(x_i) \longrightarrow T_n(x), \quad i \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \|T_n(x_i)\| \longrightarrow \|T_n(x)\|, \quad i \to \infty.$$

Recordemos que $\|T_n(x_i)\| \leq k$, con esto se obtiene que

$$\|T_n(x)\| = \lim_{i\to\infty} \|T_n(x_i)\| \leq \lim_{i\to\infty} k = k.$$

Lo anterior verifica que $x \in A_k$, y con ello que A_k es cerrado.

Por otro lado, de la definición de nuestro conjunto A_k, tenemos que

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Al ser X un espacio de Banach, el Teorema de Categorías de Baire, 1.16 garantiza que existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que A_{k_0} contiene un subconjunto abierto no vacío de X. En particular, dado que trabajamos en un espacio normado, A_{k_0} contendrá una bola abierta. Es decir,

$$B_{x_0}(r) \subseteq A_{k_0}.$$

Sea $x \in X$ arbitrario, distinto de cero. Definimos

$$z = x_0 + \gamma x, \qquad \gamma = \frac{r}{2\|x\|}.$$

De lo anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|z - x_0\| &= \|\gamma x\| \\ &= \gamma \|x\| \\ &= \frac{r}{2\|x\|}\|x\| \\ &= \frac{r}{2} \\ &< r. \end{aligned}$$

Es decir, $z \in B_{x_0} \subseteq A_{k_0}$; en consecuencia, se verifica que

$$\|T_n(z)\| \leq k_0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La desigualdad anterior, en particular, se cumplirá para $x_0 \in B_{x_0}$. Definimos $x = \dfrac{1}{\gamma}(z - x_0)$ y obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \|T_n(x)\| &= \frac{1}{\gamma}\|T_n(z - x_0)\| \\ &\leq \frac{1}{\gamma}(\|T_n(z)\| + \|T_n(x_0)\|) \\ &\leq \frac{4}{r}\|x\|k_0. \end{aligned}$$

Con dicha desigualdad se cumple que

$$\frac{\|T_n(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{4}{r}k_0 \Longrightarrow \sup_{\substack{x \in \mathrm{Dom}(T_n) \\ x \neq 0}} \frac{\|T_n x\|}{\|x\|} \leq \frac{4}{r}k_0 \Longrightarrow \|T_n\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{4}{r}k_0,$$

como el $n \in \mathbb{N}$ era arbitrario, la desigualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Que es justamente lo que se quería demostrar. □

Más adelante estudiaremos la topología débil y débil-*, por ello es necesario estudiar diversos tipos de convergencia. En particular, las convergencias débil y débil-*, que definimos a continuación:

Definición 3.1 (Convergencia débil)**.** Sea X un espacio vectorial topológico. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en X, se dice **débilmente convergente**, si existe $x \in X$ tal que

$$f(x_n) \longrightarrow f(x), \quad n \to \infty, \qquad \text{para todo } f \in X^*.$$

Esto se denota como $x_n \xrightarrow{w} x, \quad n \to \infty$. El elemento x, es llamado el **límite débil de** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición 3.2 (Convergencia débil-*)**.** Sea X un espacio vectorial topológico. Una sucesión de funcionales $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en el dual, se dice **débil-* convergente** si existe $f \in X^*$ tal que

$$f_n(x) \longrightarrow f(x), \quad n \to \infty, \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Esto se denota como $f_n \xrightarrow{w*} f$. Al elemento $f \in X^*$, le llamamos el **límite débil-*** de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Observación. Notemos que la convergencia débil se trabaja sobre elementos de un espacio vectorial topológico, mientras que la convergencia débil-* actúa sobre elementos del dual de un espacio vectorial topológico, es decir, sobre funcionales.

Una duda que puede surgir naturalmente es ¿por qué la convergencia débil no tiene un papel importante en el cálculo? La razón, es debida a que en los espacios vectoriales topológicos de dimensión finita no existe una distinción entre la convergencia normal y la convergencia débil, de hecho, ambas coinciden. Por otro lado, en un espacio vectorial topológico de cualquier dimensión X, es evidente que si una sucesión converge en el sentido usual, entonces convergerá débilmente (pues los funcionales continuos preservan dicha convergencia); sin embargo, el recíproco no siempre es válido. A continuación, veremos un ejemplo de ello en un espacio de dimensión infinita.

***Ejemplo* 3.1.** Sea $\ell^2(\mathbb{K})$ un espacio vectorial complejo. En este espacio, los elementos son vectores de la forma

$$x = (a_1, a_2, \ldots), \text{ con } a_i \in \mathbb{K}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Además, dichos elementos son cuadrado sumables, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Definimos la siguiente sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \ell^2(\mathbb{K})$, donde

$$x_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots),$$

se puede observar que la n-ésima componente es 1 y las demás son 0. Probaremos que la sucesión converge débilmente a cero, pero no converge en el sentido usual.

Queremos probar que

$$f(x_n) \longrightarrow f(0) = 0, \quad n \to \infty, \qquad \forall f \in X^*.$$

Donde $0 = (0, 0, \cdots, 0, \cdots)$. De forma equivalente, podemos demostrar que

$$|f(x_n)| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty, \qquad \forall f \in X^*.$$

Sea $f \in \ell^2(\mathbb{K})^*$ arbitrario. Ya que $\ell^2(\mathbb{K})$ un espacio de Hilbert (Ver [5], Capítulo 3, Sección 1, Ejemplo 3.1-6, página 133), podemos aplicar el Teorema de representación de Riesz (Ver [5], Capítulo 3, Sección 8, Teorema 3.8-1, páginas 188-190). De esta forma, garantizamos la existencia de un elemento $y \in \ell^2$ tal que

$$f(x_n) = \langle x_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n},$$

donde $x_n = (a_1, a_2, \ldots)$, $y = (b_1, b_2, \ldots)$ y $\|y\|_{\ell^2} = \|f\|_{\mathrm{op}}$.

Aplicando la definición de $f(x_n)$ a la convergencia original, debemos probar que

$$|\langle x_n, y \rangle| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Observamos que:

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y \rangle| &= |\langle (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots), (y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \cdots) \rangle| \\ &= |\overline{y_n}|. \end{aligned}$$

Utilizando la igualdad anterior, la convergencia que se debe probar se redefine como

$$|\overline{y_n}| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Por otro lado, recordemos que $y \in \ell^2$, entonces

$$\|y\|_{\ell_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty.$$

La condición anterior implica que

$$|y_n|^2 \longrightarrow 0, \quad n \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad |y_n| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Utilizando el hecho que $|\overline{y_n}| = |y_n|$, obtenemos que

$$|\overline{y_n}| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

De esta forma se ha probado que

$$x_n \xrightarrow{w} 0, \quad n \to \infty.$$

Ya se demostró que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es débil convergente, nos falta verificar que

$$x_n \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Para comenzar, notamos que

$$\|x_n - 0\|_{\ell^2} = \|x_n\|_{\ell^2} = 1.$$

Así que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no puede converger a 0; así que, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge de la forma usual.

En el Ejemplo 3.1, se comprobó que la convergencia débil, no garantiza la convergencia de forma usual. A continuación, estudiaremos diversos resultados que relacionan la convergencia débil con conceptos clásicos de la teoría de sucesiones.

***Lema* 3.1** (Convergencia débil)**.** *Sea X un espacio vectorial topológico normado. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión débilmente convergente, entonces:*

a) El límite débil x de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es único.

b) Cada subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a x.

c) La sucesión $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

Demostración.

a) Por contradicción, supongamos que el límite no es único, es decir $\exists x, y \in X$, donde $x \neq y$ tal que

$$x_n \xrightarrow{w} x, \quad n \to \infty, \qquad x_n \xrightarrow{w} y, \quad n \to \infty, \qquad \text{donde } x \neq y.$$

Ya que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente, se tiene que

$$f(x_n) \longrightarrow f(x), \quad n \to \infty, \qquad f(x_n) \longrightarrow f(y), \quad n \to \infty, \qquad \forall f \in X^*.$$

Se observa que para cualquier $f \in X^*$, los elementos de la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ son reales o complejos; en consecuencia, su límite es único, es decir $f(x) = f(y)$. Utilizando la linealidad de f, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ f(x) - f(y) &= 0 \\ f(x-y) &= 0. \end{aligned}$$

Ya que trabajamos en un espacio normado, podemos aplicar el Corolario 2.4; si $f(x-y) = 0$, entonces $x - y = 0$, obteniendo que $x = y$. Lo cual es una contradicción y prueba que el límite es único.

b) Por definición tenemos que

$$f(x_n) \longrightarrow f(x), \quad n \to \infty.$$

Se sabe que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K}$, $\forall f \in X^*$, entonces cada subsucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ converge al mismo límite que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Es decir,

$$f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x), \quad k \to \infty.$$

Lo cual prueba que $x_{n_k} \xrightarrow{w} x \quad k \to \infty$, que es lo que se deseaba.

c) Por definición, la convergencia débil implica que

$$f(x_n) \longrightarrow f(x), \quad n \to \infty, \qquad \forall f \in X^*.$$

Al ser X un espacio normado, los funcionales en el dual son acotados. En consecuencia, al tomar $f \in X^*$, tenemos que

$$|f(x_n)| \leq c\|x_n\|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definamos la evaluación puntual para cada $x_n \in X$ fijo

$$\begin{aligned} g_{x_n} : X^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto g_{x_n}(f) = f(x_n). \end{aligned}$$

Por construcción $\{g_{x_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada, entonces

$$|g_{x_n}(f)| = |f(x_n)| \leq c\|x_n\| = c_f.$$

Aplicando el Teorema de Acotamiento Uniforme 3.1, se garantiza que existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|g_{x_n}\|_{\text{op}} \leq c, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, en 2.26 se probó que $\|g_{x_n}\|_{\text{op}} = \|x_n\|$, obteniendo que

$$\|x_n\| \leq c.$$

De esta forma, verificamos que la sucesión $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

$\square$

Lema 3.2. *Sea X un espacio normado. La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a x, si y solo si se satisfacen las condiciones (A) y (B).*

(A) La sucesión $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

(B) Sea $M \subseteq X^*$ un conjunto total. Si $f \in M$, entonces $f(x_n) \longrightarrow f(x), n \to \infty$.

Demostración.

- " $\Longrightarrow$ " Por hipótesis $x_n \xrightarrow{w} x \quad n \to \infty$. Dado que X es un espacio normado, podemos aplicar el Lema 3.1 c), con lo cual obtenemos la condición (A). El literal (B), es una consecuencia inmediata de la definición de convergencia débil.
- " $\Longleftarrow$ " Asumamos que se cumplen las condiciones (A) y (B). Queremos probar que existe $x \in X$ tal que para todo $f \in X^*$, se cumple que
$$f(x_n) \longrightarrow f(x), \quad n \to \infty.$$
Tomemos $f \in X^*$ arbitrario. Por la condición (A), $\|x_n\| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$; en particular se cumplirá que $\|x\| \leq c$, siempre que c sea una constante suficientemente grande.

  Ya que M es un conjunto total de X^*, se tiene que
$$\overline{\operatorname{Span}(M)} = X^*.$$
Por la igualdad anterior, para cada $f \in X^*$ existe una sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \in \operatorname{Span}(M)$ tal que
$$f_i \longrightarrow f, \quad i \to \infty.$$
Lo cual significa que para todo $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que, si $i > N$, entonces
$$\|f_i - f\|_{\text{op}} < \frac{\varepsilon}{3c}.$$
Ahora, utilizaremos el hecho que $f_i \in \operatorname{Span}(M) \subseteq X^*$; por la condición (B),
$$f_i(x_n) \longrightarrow f_i(x), \quad n \to \infty.$$
Lo anterior se cumple para cada $i \in \mathbb{N}$ fijo. Por la definición de convergencia, para todo $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > N$, entonces
$$|f_i(x_n) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
Tomemos $i \in \mathbb{N}$ fijo. Sea $N \in \mathbb{N}$ tomado anteriormente, si $n > N$, entonces
$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x)| &\leq |f(x_n) - f_i(x_n)| + |f_i(x_n) - f_i(x)| + |f_i(x) - f(x)| \\ &< \|f - f_i\|_{\text{op}}\|x_n\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f_i - f\|_{\text{op}}\|x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3c}c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c}c \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$
Ya que $f \in X^*$ era arbitrario, la desigualdad anterior se cumple para todo $f \in X^*$, esto muestra que
$$f(x_n) \longrightarrow f(x), \quad n \to \infty.$$
Es decir, que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a x.

$\square$

***Teorema* 3.2.** *Sea X un espacio normado. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión débilmente convergente a x, entonces*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Demostración. Por hipótesis, X es un espacio normado. Aplicando el Teorema 2.21, al tomar $x \neq 0$, se garantiza la existencia de un funcional $\widetilde{f} \in X^*$ tal que

$$\left\|\widetilde{f}\right\|_{\text{op}} = 1, \qquad \left\|\widetilde{f}(x)\right\| = \|x\|.$$

Por otro lado, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es débilmente convergente, así que para todo $f \in X^*$, existe $x \in X$ tal que

$$f(x_n) \longrightarrow f(x), \quad n \to \infty.$$

La convergencia anterior se cumple para $\widetilde{f}$, es decir

$$\widetilde{f}(x_n) \longrightarrow \widetilde{f}(x), \quad n \to \infty, \qquad \Longrightarrow \qquad \left\|\widetilde{f}(x_n)\right\| \longrightarrow \left\|\widetilde{f}(x)\right\|, \quad n \to \infty.$$

Usando el hecho que $\widetilde{f}$ es un funcional acotado y $\left\|\widetilde{f}\right\|_{\text{op}} = 1$, se tiene

$$\left\|\widetilde{f}(x_n)\right\| \leq \cancelto{1}{\left\|\widetilde{f}\right\|_{\text{op}}} \|x_n\| = \|x_n\|.$$

Al aplicar la definición de límite inferior, tenemos que

$$\liminf_{n\to\infty} \left\|\widetilde{f}(x_n)\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\widetilde{f}(x_n)\right\| = \left\|\widetilde{f}(x)\right\| = \|x\|.$$

Lo anterior, es debido a que la sucesión converge y por ello tanto el límite inferior como el límite superior, coinciden con en límite usual. Finalmente, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{f}(x_n)\right\| &\leq \|x_n\| \\
\liminf_{n\to\infty} \left\|\widetilde{f}(x_n)\right\| &\leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \\
\left\|\widetilde{f}(x)\right\| &\leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \\
\|x\| &\leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.
\end{aligned}$$

□

Ahora estudiaremos algunos de los resultados de la convergencia débil para las convergencias débil-*.

***Teorema* 3.3.** *Sea X un espacio de Banach y una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$. Si*

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{op}} f, \quad n \to \infty,$$

entonces $f \in X^*$.

Demostración. La demostración de este teorema será omitida. Véase[5], Capítulo 4, Sección 4.9, Lema 4.9-5, página 267. □

***Teorema* 3.4** (Funcionales)**.** *Sea X un espacio de Banach y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión débil-* convergente a f. El límite débil-* f es un funcional lineal y acotado, si y solamente si se satisfacen las condiciones (A) y (B):*

(A) La sucesión $\{\|f_n\|_{op}\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

(B) Sea M un conjunto total. Para todo $x \in M$, la sucesión $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$.

Demostración.

- " $\Longrightarrow$ " Por hipótesis, tenemos que $f_n \xrightarrow{w*} f, \quad n \to \infty$. Es decir existe $f \in X^*$ tal que

$$f_n(x) \longrightarrow f(x), \quad n \to \infty, \qquad \forall x \in X.$$

  Ya que $f_n \in X^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y X es un espacio normado, entonces f_n es un funcional acotado. Es decir,

$$\|f_n(x)\| \leq c\|x\|.$$

  La desigualdad anterior verífica la hipótesis del Teorema de Acotamiento Uniforme 3.1, obteniendo que $\{\|f_n\|_{\text{op}}\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, probando la condición (A).

  Sabemos que X es un espacio de Banach; si

$$f_n(x) \longrightarrow f(x), \quad n \to \infty, \qquad \forall x \in X,$$

  entonces la sucesión $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy para todo $x \in X$. En particular, será de Cauchy para todo $x \in M$, probando así la condición (B).

- " $\Longleftarrow$ " Asumiremos que se satisfacen las condiciones (A) y (B). Queremos probar que existe $f \in X^*$ tal que $f_n(x) \longrightarrow f(x), n \to \infty$.

  Por hipótesis, $\{\|f_n\|_{\text{op}}\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, entonces $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|f_n\|_{\text{op}} \leq c, \forall n \in \mathbb{N}.$$

  Dado que M es un conjunto total, al tomar $x \in X$ arbitrario, existe una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \text{Span}(M)$ tal que

$$x_i \longrightarrow x, \quad i \to \infty.$$

Para $\varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, si $i > N_1$, entonces

$$\|x_i - x\| < \frac{\varepsilon}{3c}.$$

Por construcción $x_i \in \mathrm{Span}(M)$, para cada $i \in \mathbb{N}$. De la condición (B), la sucesión $\{f_n(x_i)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Es decir, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > N_2$, entonces

$$|f_n(x_i) - f_m(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y $N = \max\{N_1, N_2\}$. Si $n, m > N$, entonces

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_m(x_i)| + |f_m(x_i) - f_m(x)| \\
&\leq \|f_n\|_{\mathrm{op}}\|x - x_i\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f_m\|_{\mathrm{op}}\|x_i - x\| \\
&\leq c\frac{\varepsilon}{3c} + \frac{\varepsilon}{3} + c\frac{\varepsilon}{3c} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

De esta forma, se probó que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Por construcción $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K}$. Al ser $\mathbb{K}$ un espacio completo, la sucesión converge en el sentido usual. El elemento $x \in X$ era arbitrario, en consecuencia, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge para todo $x \in X$. Es decir,

$$f_n(x) \longrightarrow f(x), \quad n \to \infty, \qquad \forall x \in X.$$

Por el Teorema 3.3, la convergencia anterior implica que $f \in X^*$, concluyendo que

$$f_n \xrightarrow{w*} f, \quad n \to \infty.$$

□

3.2. Topologías débil y débil-*

En esta sección, vamos a introducir los conceptos de topologías débil y débil-*, para ello nos guiaremos de [8], capítulo 3, páginas 56-68. La importancia de estas topologías, es el hecho que toman un papel fundamental en la demostración del Teorema de Alaoglu.

Antes de dar una definición formal de las topologías débil y débil-*, vamos a definir una $\mathscr{F}$-topología.

Proposición 3.1. Sea X un conjunto no vacío, $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una colección de espacios topológicos y $\mathscr{F}$ una familia no vacía de aplicaciones, definida como:

$$\mathscr{F} = \{f_{\alpha_i} \mid f_{\alpha_i} : X \longrightarrow Y_\alpha, \alpha \in I, i \in I_1\}.$$

La colección,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha\in I} S_\alpha, \qquad S_\alpha = \left\{f_{\alpha_i}^{-1}(V_\beta) : V_\beta \in \tau_\alpha, f_{\alpha_i} \in \mathscr{F}, \beta \in J\right\}$$

es una subbase de X.

Demostración. Para probar que la colección $\mathcal{S}$ es una subbase de X, debe suceder que la unión de todos sus elementos sean X.

Si $V = Y_\alpha \in \tau_\alpha$, entonces $f_{\alpha_i}^{-1}(Y_\alpha) \subseteq \mathcal{S}$. Notamos que

$$f_{\alpha_i}^{-1}(Y_\alpha) = X \subseteq S.$$

Por definición $\mathcal{S} \subseteq X$; de esta forma hemos probado que $\mathcal{S} = X$, verificando que $\mathcal{S}$ es una subbase de X. □

Definición 3.3 ($\mathscr{F}$- topología de X)**.** Sea X un conjunto no vacío, $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una colección de espacios topológicos y $\mathscr{F}$ una familia no vacía de aplicaciones, definida como:

$$\mathscr{F} = \{f_{\alpha_i} \mid f_{\alpha_i} : X \longrightarrow Y_\alpha, \alpha \in I, i \in I_1\}.$$

Sea $\mathcal{S}$ la subbase de X definida por $\mathscr{F}$,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha\in I} S_\alpha, \qquad S_\alpha = \left\{f_{\alpha_i}^{-1}(V_\beta) : V_\beta \in \tau_\alpha, f_{\alpha_i} \in \mathscr{F}, \beta \in J\right\}.$$

La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$, es llamada **$\mathscr{F}$- topología de** X.

Una pregunta que puede hacerse es ¿qué tiene de especial dicha topología? Lo especial, es que al dotar a X con la $\mathscr{F}$-topología, obtenemos una propiedad muy importante para cada aplicación de la familia $\mathscr{F}$.

Proposición 3.2. Sea X un conjunto no vacío, $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una colección de espacios topológicos y $\mathscr{F}$ una familia no vacía de aplicaciones, definida como:

$$\mathscr{F} = \{f_{\alpha_i} \mid f_{\alpha_i} : X \longrightarrow Y_\alpha, \alpha \in I, i \in I_1\}.$$

Si τ es la $\mathscr{F}$-topología de X, entonces toda aplicación de $\mathscr{F}$ es continua con respecto a τ.

Demostración. Tomemos $f_{\alpha_i} \in \mathscr{F}$ arbitrario, definido como

$$f_{\alpha_i} : (X, \tau) \longrightarrow (Y_\alpha, \tau_\alpha).$$

Por definición, la topología τ es generada por la subbase

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha, \qquad S_\alpha = \left\{ f_{\alpha_i}^{-1}(V_\beta) : V_\beta \in \tau_\alpha, f_{\alpha_i} \in \mathscr{F}, \beta \in J \right\}.$$

Sea $V_\beta \in \tau_\alpha$ arbitrario, entonces $f_{\alpha_i}^{-1}(V_\beta) \in \tau$, pues es un abierto en sí mismo; con esto probamos que f_{α_i} es continua en τ. Lo anterior se cumple para todo $f_{\alpha_i} \in \mathscr{F}$, en consecuencia, las aplicaciones de la familia $\mathscr{F}$ son continuas bajo la topología τ sobre X. □

Ya probamos que todas las aplicaciones de la familia $\mathscr{F}$ son continuas, al dotar a X con la $\mathscr{F}$-topología de X; como siguiente punto, probaremos que la $\mathscr{F}$-topología de X cumple algo más fuerte: es la topología ***más débil*** donde las aplicaciones de la familia $\mathscr{F}$ son continuas.

***Teorema* 3.5.** *Sea X un conjunto no vacío, $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una colección de espacios topológicos y $\mathscr{F}$ una familia no vacía de aplicaciones, definida como:*

$$\mathscr{F} = \{ f_{\alpha_i} \mid f_{\alpha_i} : X \longrightarrow Y_\alpha, \alpha \in I, i \in I_1 \}.$$

*La $\mathscr{F}$ - topología de X denotada por τ, es la topología **más débil** en X donde toda aplicación de la familia $\mathscr{F}$ es continua.*

Demostración. Sea τ' una topología arbitraria de X, la cual satisface lo siguiente: si $f_{\alpha_i} \in \mathscr{F}$, entonces

$$f_{\alpha_i} : (X, \tau') \longrightarrow (Y_\alpha, \tau_\alpha), \quad \text{es continua.}$$

Usando la continuidad de f_{α_i} con respecto τ', si $V_\beta \in \tau_\alpha$, entonces $f_{\alpha_i}^{-1}(V_\beta) \in \tau'$. Sabemos que la $\mathscr{F}$-topología de X, denotada por τ, es generada por la subbase

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha, \qquad S_\alpha = \left\{ f_{\alpha_i}^{-1}(V_\beta) : V_\beta \in \tau_\alpha, f_{\alpha_i} \in \mathscr{F}, \beta \in J \right\}.$$

Notamos que $\mathcal{S} \subseteq \tau'$, pues $f_{\alpha_i}^{-1}(V_\beta) \in \tau'$ para todo $V_\beta \in \tau_\alpha$. Ya que se satisfacen las hipótesis de la Proposición 1.7, obtenemos que $\tau \subseteq \tau'$; en consecuencia, τ es la topología más débil, donde cada aplicación $f_{\alpha_i} \in \mathscr{F}$ es continua. □

A continuación ejemplificaremos la forma que toma una $\mathscr{F}$-topología.

***Ejemplo* 3.2.** Consideremos el espacio vectorial topológico $\mathbb{R}$, con τ_{usual} como su topología vectorial y $\mathbb{R}$ su campo de escalares. Sea $\mathscr{F}$ la familia de aplicaciones, definida por

$$\mathscr{F} = \{ id \mid id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \}.$$

Lo que haremos será escribir de forma explícita quien es la $\mathscr{F}$-topología de $\mathbb{R}$, denotada por τ.

Sea $A \subseteq X$ un subconjunto cualquiera, sabemos que $id(A) = A$; del mismo modo, se cumple que

$$id^{-1}(A) = \{x \in X \ : \ id(x) = x \in A\} = A.$$

La $\mathscr{F}-$topología de X, es la topología generada por la subbase

$$\mathcal{S} = \left\{ id^{-1}(V_\beta) \ : \ V_\beta \in \tau_{\text{usual}}, \beta \in J \right\}.$$

Utilizando el hecho que $id^{-1}(A) = A$, la subbase se redefine como

$$\mathcal{S} = \left\{ id^{-1}(V_\beta) = V_\beta \ : \ V_\beta \in \tau_{\text{usual}}, \beta \in J \right\} = \{ V_\beta \ : \ V_\beta \in \tau_{\text{usual}}, \beta \in J \}.$$

Se puede observar que $\mathcal{S} \subseteq \tau_{\text{usual}}$. Por otro lado, la base generada por la subbase $\mathcal{S}$, está dada por

$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \ \middle| \ S_i \in \mathcal{S} \right\}.$$

Tomemos $V \in \tau_{\text{usual}}$, sea $x \in V$; si $V = id^{-1}(V) \in \mathcal{S} \subseteq \mathscr{B}$. Con esto, se garantiza que existe un elemento $V \in \mathscr{B}$ tal que $x \in V \subseteq V$, verificando así todas las hipótesis del Lema 1.4, obteniendo que $\tau = \tau_{\text{usual}}$.

En este ejemplo, dotamos a $\mathbb{R}$ con la $\mathscr{F}$-topología y observamos, que si la familia $\mathscr{F}$ solo consiste de la aplicación identidad, entonces la $\mathscr{F}$-topología de $\mathbb{R}$ coincide con la topología usual.

Ahora veamos otro ejemplo. Analizaremos la $\mathscr{F}$-topología de un conjunto que es bastante conocido, nos referimos al producto arbitrario de espacios topológicos.

***Ejemplo* 3.3.** Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una colección de espacios topológicos y X el producto arbitrario de estos espacios, definido como

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha.$$

Ahora consideremos la familia

$$\mathscr{F} = \{\pi_\alpha \ \ | \ \ \alpha \in I\},$$

que es la colección de todas las proyecciones de X a X_α. Recordemos que la $\mathscr{F}$-topología de X denotada por τ es la topología más débil donde cada π_α es continuo; sin embargo, en la Proposición 1.21, demostramos que la topología producto τ_p es la topología más débil donde esto sucede. Lo cual nos permite hacernos la siguiente pregunta ¿las topologías coinciden? ¿Se contradicen las definiciones? Para responder ambas preguntas, estudiemos cada topología.

Sabemos que la siguiente colección $\mathcal{S}$ es una subbase para τ,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{S}_\alpha, \qquad \mathcal{S}_\alpha = \{\pi_\alpha^{-1}(V_\beta) \ | \ V_\beta \in \tau_\beta\}.$$

Por otro lado, la topología producto es generada por la subbase

$$\mathcal{S}' = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{S}_\alpha, \qquad \mathcal{S}_\alpha = \{\pi_\alpha^{-1}(V_\beta) \mid V_\beta \in \tau_\beta\}.$$

Se puede observar que $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$, así que $\tau = \tau_p$, por lo que se sigue manteniendo el hecho que la topología producto es la topología más débil donde las proyecciones son continuas y no se contradice ninguna definición.

***Teorema* 3.6.** *Sea X un conjunto no vacío, $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una colección de espacios topológicos de Hausdorff y $\mathscr{F}$ una familia no vacía de aplicaciones, definida como:*

$$\mathscr{F} = \{f_{\alpha_i} \mid f_{\alpha_i} : X \longrightarrow Y_\alpha, \alpha \in I, i \in I_1\}.$$

Denotemos por τ a la $\mathscr{F}$-topología de X. Si $\mathscr{F}$ es una familia que separa puntos de X, entonces (X, τ) es un espacio de Hausdorff.

Demostración. Por hipótesis, $\mathscr{F}$ separa puntos de X; es decir, si $x, y \in X$, $x \neq y$, entonces $\exists f_{\alpha_i} \in \mathscr{F}$ tal que $f_{\alpha_i}(x) \neq f_{\alpha_i}(y)$.

Para cada $\alpha \in I$, al tomar $f_{\alpha_i}(x), f_{\alpha_i}(y) \in Y_\alpha$ tal que $f_{\alpha_i}(x) \neq f_{\alpha_i}(y)$; ya que Y_α es un espacio de Hausdorff, se garantiza la existencia de conjuntos abiertos disjuntos U y $V \in \tau_\alpha$ tal que $f_{\alpha_i}(x) \in U$, $f_{\alpha_i}(y) \in V$.

Por definición, para cada $\alpha \in I$, las aplicaciones $f_{\alpha_i} : (X_\alpha, \tau) \longrightarrow (Y_\alpha, \tau_\alpha)$ son continuas; por lo cual, si U y $V \in \tau_\alpha$, entonces $f_{\alpha_i}^{-1}(U)$ y $f_{\alpha_i}^{-1}(V) \in \tau$. Por construcción $x \in f_{\alpha_i}^{-1}(U)$, $y \in f_{\alpha_i}^{-1}(V)$. Además, se tiene la siguiente igualdad

$$f_{\alpha_i}^{-1}(U) \cap f_{\alpha_i}^{-1}(V) = f_{\alpha_i}^{-1}(U \cap V) = f_{\alpha_i}^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

De esta forma, hemos encontrado dos conjuntos abiertos disjuntos $f_{\alpha_i}^{-1}(U)$ y $f_{\alpha_i}^{-1}(V) \in \tau$, que contiene a x e y, respectivamente; dado que x e y, eran arbitrarios, hemos probado que X es un espacio de Hausdorff bajo la topología τ. □

Ahora, volvamos a estudiar el ejemplo (3.3) y veamos que sucede si la colección arbitrario cumple una propiedad específica.

***Ejemplo* 3.4.** Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una colección de espacios topológicos, definamos

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha.$$

Consideremos la familia $\mathscr{F} = \{\pi_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Ya estudiamos que la $\mathscr{F}$-topología de X, denotada por τ, coincide con la topología producto τ_p.

Analicemos que sucede, si X_α es un espacio compacto y de Hausdorff, para todo $\alpha \in I$. Para comenzar, aplicando el Teorema de Tychonoff 1.15, tenemos que, (X, τ_p) es un espacio compacto.

Ahora vamos a probar que la familia $\mathscr{F}$ separa puntos. Sean $x, y \in X$, donde

$$x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}, \quad y = (y_\alpha)_{\alpha\in I}, \qquad \text{con} \qquad x \neq y,$$

así que, $\exists \alpha \in I$ tal que $x_\alpha \neq y_\alpha$. Con dicho α definamos la proyección π_α,

$$\begin{aligned} \pi_\alpha : X &\longrightarrow X_\alpha, \\ (x_\alpha)_{\alpha\in I} &\longmapsto x_\alpha. \end{aligned}$$

Al tomar x, $y \in X$, dados anteriormente, notamos que

$$\pi_\alpha(x) = x_\alpha, \quad \pi_\alpha(y) = y_\alpha \quad \Longrightarrow \quad \pi_\alpha(x) \neq \pi_\alpha(x).$$

Esto prueba que $\mathscr{F}$ separa puntos de X. Hemos verificado todas las hipótesis del Teorema 3.6, entonces (X, τ) es un espacio de Hausdorff.

Recordemos que $\tau_p = \tau$; así que, el espacio producto (X, τ_p) es Hausdorff y compacto, siempre que se satisfagan las condiciones definidas anteriormente.

El hecho que una familia separe puntos nos permite obtener una gran cantidad de resultados, tal como se vio en el Teorema 3.6; sin embargo, no es el único. A continuación, estudiaremos otro resultado de este tipo.

Teorema 3.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico compacto y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas. Si la familia,*

$$\mathscr{F} = \{f_n \mid f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

separa puntos de X, entonces X es metrizable.

Demostración. Para comenzar, definamos la siguiente funcion,

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|,$$

Verifiquemos que cumple todos los axiomas de una métrica.

- Dado que $0 \leq |\cdot|$, entonces

  $$0 \leq 2^{-n}|f_n(x) - f_n(y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(x) - f_n(y)|,$$

  por lo que $0 \leq d(x, y)$.

- Debemos probar que $d(x,y)=0$ si y solamente si $x=y$.

  " $\Longrightarrow$ " Tenemos como hipótesis que $d(x,y)=0$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(x)-f_n(y)| &= 0 \\ 2^{-n}|f_n(x)-f_n(y)| &= 0, \\ |f_n(x)-f_n(y)| &= 0, \\ f_n(x)-f_n(y) &= 0. \end{aligned}$$

  Hemos obtenido que, $f_n(x)=f_n(y)$, para todo $n\in\mathbb{N}$; dado que $\mathscr{F}$ separa puntos, lo anterior implica que $x=y$.

  " $\Longrightarrow$ " Tenemos como hipótesis que $x=y$, sea $n\in\mathbb{N}$ fijo. Observamos que

$$\begin{aligned} f_n(x) &= f_n(y) \\ f_n(x)-f_n(y) &= 0 \\ 2^{-n}|f_n(x)-f_n(y)| &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(x)-f_n(y)| &= 0 \\ d(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

  De esta forma, se verifica el segundo axioma de una métrica.

- Ahora verificaremos que $d(x,y)=d(y,x)$.

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(x)-f_n(y)| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(y)-f_n(x)| = d(y,x).$$

  La igualdad anterior prueba el tercer axioma de una métrica.

- Verificando que $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(x)-f_n(y)| \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(x)-f_n(z)+f_n(z)-f_n(y)| \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(x)-f_n(z)| + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(z)-f_n(y)| \\ &\le d(x,z)+d(z,y). \end{aligned}$$

Ya que hemos demostrado los cuatro axiomas, se tiene que $d(x, y)$ es una métrica.

El siguiente paso, es probar que la serie $d(x, y)$ es uniformemente convergente, aplicando el criterio de la M de Weierstrass (Ver [2], Capítulo I, Sección 6, Teorema 6.2).

Por el Teorema 1.1, si X es compacto y f_n es continuo, entonces $f_n(X)$ es compacto. Por otro lado, al ser $(\mathbb{K}, \tau_{\text{usual}})$ un espacio métrico, la Proposición 1.24 nos dice que f es acotado; es decir, $\exists M_n > 0$ tal que

$$|f_n(x)| < M_n, \text{ para todo } x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

Al estar en un espacio vectorial, si $x, y \in X$, entonces $x - y \in X$, por lo que

$$|f_n(x) - f_n(y)| < M_n, \text{ para todo } x, y \in X, n \in \mathbb{N},$$
$$2^{-n}|f_n(x) - f_n(y)|2^{-n} < M_n, \text{ para todo } x, y \in X, n \in \mathbb{N}.$$

Tomemos $M = \max\limits_{n\in\mathbb{N}}\{M_n\}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} M_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} M = M \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty.$$

Aplicando el criterio de la M de Weistrass, la serie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(x) - f_n(y)|$$

es uniformemente convergente en $X \times X$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es continua; por la convergencia uniforme, la función

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(x) - f_n(y)|,$$

es τ_p-continua en $X \times X$ con respecto a la topología producto.

Ahora verificaremos que $\tau_d \subseteq \tau$. Sea $U \in \tau_d$ arbitrario, por definición, para todo $x \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Lo que haremos será probar que la bola abierta $B_\varepsilon(x)$, es un conjunto abierto en τ.

Definamos la función d_x, para cada $x \in X$, la cual está dada por

$$\begin{aligned} d_x : X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\longmapsto d(x, y). \end{aligned}$$

Ya que d es continua, d_x también lo es; utilizando la continuidad de d_x, si $B_\varepsilon(0) \in \tau_{\text{usual}}$ entonces $d_x^{-1}(B_\varepsilon(0)) \in \tau$. Notamos que

$$\begin{aligned} d_x^{-1}(B_\varepsilon(0)) &= \{y \in X : d_x(y) \in B_\varepsilon(0)\} \\ &= \{y \in X : |d(x,y)| < \varepsilon\} \\ &= \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\} \\ &= B_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Dicha igualdad, comprueba que $B_\varepsilon(x)$ es un conjunto abierto en τ, por lo que $U \in \tau$. De esta forma, hemos probado que $\tau_d \subseteq \tau$.

Al ser (X, τ_d) un espacio metrizable se tiene que es Hausdorff, y por hipótesis (X, τ) es compacto; además, $\tau_d \subseteq \tau$; lo anterior satisface todas las hipótesis del Teorema 1.14, entonces $\tau_d = \tau$. La igualdad de las topologías, implica que el espacio (X, τ) satisface las mismas propiedades topológicas que el espacio (X, τ_d), por ello (X, τ) es metrizable. $\square$

Lema 3.3. *Sea $(X, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y tomemos $f_1, f_2, \ldots, f_n, f$ funcionales lineales. Definamos*

$$N = \{x \in X : f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0\}.$$

Las siguientes propiedades son equivalentes:

a) Existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, tal que $f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$.

b) Existe un escalar $\gamma < \infty$, tal que

$$|f(x)| < \gamma \max_{1 \le i \le n} |f_i(x)|, \qquad \textit{para todo } x \in X.$$

c) $f(x) = 0$, para todo $x \in N$.

Demostración.

a) Probaremos que “a) $\Longrightarrow$ b)”.

Por hipótesis, existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n.$$

Sea $x \in X$ arbitrario, notamos que

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)| \\ &\le |\alpha_1 f_1(x)| + \cdots + |\alpha_n f_n(x)| \\ &\le |\alpha_1||f_1(x)| + \cdots + |\alpha_n||f_n(x)|. \end{aligned}$$

Definamos $g(x) = \max_{1\leq i\leq n} |f_i(x)|$, de esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leq |\alpha_1||f_1(x)| + \cdots + |\alpha_n||f_n(x)|\\ &\leq |\alpha_1|g(x) + \cdots + |\alpha_n|g(x)\\ &\leq (|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)g(x).\end{aligned}$$

Al tomar, $\gamma = (|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|) < \infty$, reescribimos la desigualdad anterior como

$$|f(x)| \leq \gamma g(x).$$

Lo cual prueba la condición b).

b) Probaremos que "b) $\Longrightarrow$ c)".

Por hipótesis, existe un escalar $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma < \infty$ tal que

$$|f(x)| < \gamma \max_{1\leq i\leq n} |f_i(x)|, \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Si $x \in N$, entonces

$$f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_n(x) = 0.$$

Por lo anterior, $\max_{1\leq i\leq n} |f_i(x)| = 0$, siempre que $x \in N$. Así que

$$|f(x)| \leq 0 \qquad \forall x \in X.$$

Finalmente, por definición de valor absoluto

$$0 \leq |f(x)| \implies |f(x)| = 0 \implies f(x) = 0.$$

Lo cual prueba que $f(x) = 0$, $\forall x \in N$.

c) Probaremos que "c) $\Longrightarrow$ a)".

Por hipótesis, $f(x) = 0$, para todo $x \in N$. Definamos la aplicación

$$f : X \longrightarrow \mathbb{K}.$$

tal que si $x \in N$, entonces $f(x) = 0$. Por construcción, tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker(f_i) = N \subseteq \ker(f).$$

Observemos que la igualdad no se garantiza, pues pueden existir $x \in X \setminus N$ tal que $f(x) = 0$.

Definamos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\longmapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)). \end{aligned}$$

Verificaremos que g es lineal. Sean x, $y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$\begin{aligned} g(x+y) &= (f_1(x+y), \dots, f_n(x+y)) \\ &= (f_1(x) + f_1(y), \dots, f_n(x) + f_n(y)) \\ &= (f_1(x), \dots, f_n(x)) + (f_1(y), \dots, f_n(y)) \\ &= g(x) + g(y), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(\alpha x) &= (f_1(\alpha x), \dots, f_n(\alpha x)) \\ &= (\alpha f_1(x), \dots, \alpha f_n(x)) \\ &= \alpha(f_1(x), \dots, f_n(x)) \\ &= \alpha g(x). \end{aligned}$$

Por otro lado, $g(X) = \mathrm{Im}(g) = I$ es un subespacio de $\mathbb{K}^n$. Con ello definimos la siguiente aplicación sobre I,

$$\begin{aligned} h : I &\longrightarrow \mathbb{K} \\ g(x) &\longmapsto h(g(x)) = f(x), \end{aligned}$$

donde $g(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, para algún $x \in X$. En conclusión, para todo $g(x) \in I$, existe un $x \in X$ tal que

$$h(g(x)) = f(x).$$

Verifiquemos que h es un funcional lineal. Sea $g(x), g(y) \in I$, $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$\begin{aligned} h(g(x) + g(y)) &= h(g(x+y)) \\ &= f(x+y) \\ &= f(x) + f(y) \\ &= h(g(x)) + h(g(y)), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h(\alpha \cdot g(x)) &= h(g(\alpha \cdot x)) \\ &= f(\alpha \cdot x)) \\ &= \alpha \cdot f(x)) \\ &= \alpha \cdot h(g(x)). \end{aligned}$$

Ya que h es lineal, por el Teorema 2.16 tenemos que h es acotado. En general, podemos decir que estás tres aplicaciones están relacionadas de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & I \subseteq \mathbb{K}^n \arrow[d, dashed, "h"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

El diagrama anterior, nos servirá para probar que g está bien definida. Inicialmente, no sabemos nada sobre g, podría suceder que dados $x_1, x_2 \in X$, entonces

$$g(x_1) = g(x_2), \qquad g(x_1), g(x_2) \in I.$$

Para que h esté bien definida, debemos probar que

$$h(g(x_1)) = h(g(x_2)).$$

De momento se tiene que $g(x_1) = g(x_2)$, entonces

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x_2) \\ (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_1)) &= (f_1(x_2), \ldots, f_n(x_2)). \end{aligned}$$

De la igualdad anterior, debe suceder que

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow f_i(x_1) = f_i(x_2) && \forall i = 1, \ldots, n \\ &\Longrightarrow f_i(x_1) - f_i(x_2) = 0 && \forall i = 1, \ldots, n \\ &\Longrightarrow f_i(x_1 - x_2) = 0 && \forall i = 1, \ldots, n \\ &\Longrightarrow x - x_2 \in N \subseteq \ker f. \end{aligned}$$

Hemos obtenido que $x_1 - x_2 \in \ker f$, entonces

$$\begin{aligned} f(x_1 - x_2) &= 0 \\ f(x_1) - f(x_2) &= 0 \\ f(x_1) &= f(x_2) \\ h(g(x_1)) &= h(g(x_2)). \end{aligned}$$

Lo cual prueba que h está bien definida en I.

Por el Teorema de Hahn-Banach para espacios normados 2.20, al ser h un funcional lineal bien definido en I y $I \subseteq \mathbb{K}^n$, se garantiza la existencia de funcional lineal $\widetilde{h}$, definido como

$$\widetilde{h} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \widetilde{h}(y) = h(y), \quad \forall y \in I.$$

Al ser $\mathbb{K}$ un espacio vectorial de dimensión finita, sabemos que $\exists! \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$\widetilde{h}(y) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n,$$

donde $y = (y_1, \ldots, y_n)$, con $y_i \in \mathbb{K}$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Tomando $g(x) \in I \subseteq \mathbb{K}^n$, debe ser que $g(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, para algún $x \in X$. Por definición, se cumple que

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(g(x)) &= h(g(x)) \\ \widetilde{h}(g(x)) &= f(x) \\ \alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) &= f(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Así que existe una colección única de escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tal que

$$\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = f(x).$$

Lo cual prueba el literal a).

□

Teorema 3.8. *Sea $(X, \mathbb{K})$ un espacio vectorial e Y un espacio vectorial que separa puntos de X, el cual contiene funcionales lineales de X. Si τ es la Y-topología de X, entonces (X, τ) es un espacio localmente convexo. Además, el dual de X es Y.*

Demostración. Tenemos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en ambos casos. $\mathbb{K}$ es un espacio de Hausdorff con τ_{usual}. Definamos la siguiente familia de funcionales

$$Y = \{f_\alpha \ : \ f_\alpha \in X', \alpha \in I\}.$$

Por hipótesis, Y es un espacio vectorial que separa puntos de X; además, el codominio $(\mathbb{K}, \tau_{\text{usual}})$ es un espacio de Hausdorff. De este modo, se satisfacen todas las hipótesis del Teorema 3.6, por lo que (X, τ) es un espacio de Hausdorff, donde τ es la Y-topología de X.

Iniciaremos probando que τ es invariante bajo la traslación; es decir que al trasladar un conjunto abierto con respecto a un punto $x \in X$ este sigue siendo abierto bajo τ.

Por definición, τ es la topología generada por la subbase

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha, \qquad S_\alpha = \left\{ f_\alpha^{-1}(V_\beta) : V_\beta \in \tau_{\text{usual}}, \beta \in J, f_\alpha \in Y \right\}.$$

Para lograr nuestro objetivo, es necesario probar que la subbase es invariante ante traslación.

Dado $f_\alpha^{-1}(V_\beta) \in \mathcal{S}$, con $\alpha \in I$, y $\beta \in J$ arbitrarios, se debe verificar que $(f_\alpha^{-1}(V_\beta) + v) \in \mathcal{S}$, para todo $v \in X$.

Sea $v \in X$ arbitrario. Probaremos la siguiente igualdad $f_\alpha^{-1}(V_\beta) + v = f_\alpha^{-1}(V_\beta + f_\alpha(v))$.

"$\subseteq$" Sea $x \in f_\alpha^{-1}(V_\beta) + v$, entonces $x = y + v$, $y \in f_\alpha^{-1}(V_\beta)$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow x - v \in f_\alpha^{-1}(V_\beta)\\
&\Longrightarrow f_\alpha(x) - f_\alpha(v) \in V_\beta\\
&\Longrightarrow f_\alpha(x) \in V_\beta + f_\alpha(v)\\
&\Longrightarrow x \in f_\alpha^{-1}(V_\beta + f_\alpha(v)).
\end{aligned}$$

"$\supseteq$" Si $x \in f_\alpha^{-1}(V_\beta + f_\alpha(v))$, entonces $f_\alpha(x) \in V_\beta + f_\alpha(v)$. Lo anterior nos permite obtener que

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow f_\alpha(x) - f_\alpha(v) \in V_\beta\\
&\Longrightarrow f_\alpha(x - v) \in V_\beta\\
&\Longrightarrow x - v \in f_\alpha^{-1}(V_\beta)\\
&\Longrightarrow x \in f_\alpha^{-1}(V_\beta) + v.
\end{aligned}$$

De esta forma, se verifica que $f_\alpha^{-1}(V_\beta) + v = f_\alpha^{-1}(V_\beta + f_\alpha(v))$.

Sabemos que $(\mathbb{K}, \tau_{\text{usual}})$ es un espacio vectorial topológico; en consecuencia, si $V_\beta \in \tau_{\text{usual}}$, entonces $V_\beta + f_\alpha(v) \in \tau_{\text{usual}}$, con $f_\alpha(v) \in \mathbb{K}$ (pues es la traslación de un conjunto abierto). Aplicando la pre imagen al conjunto anterior, tenemos que

$$f_\alpha^{-1}(V_\beta) + v = f_\alpha^{-1}(V_\beta + f_\alpha(v)) \in \mathcal{S}_\alpha \subseteq \mathcal{S}.$$

Lo cual prueba que los elementos de la subbase $\mathcal{S}$, son invariantes sobre traslaciones.

Ahora probaremos que $U + v \in \tau$, donde $U \in \tau$ y $v \in X$. Recordemos que la topología τ es generada por la subbase $\mathcal{S}$; es por ello, que la colección

$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i | S_i \in \mathcal{S}, i = 1, \ldots, n \right\},$$

es una base para la topología τ. Por el Lema 1.1, $U \in \tau$ es de la forma,

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_\beta), \qquad V_\beta \in \tau_{\text{usual}}.$$

Lo que haremos inicialmente será probar la siguiente igualdad de conjuntos, donde $v \in X$, es arbitrario

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_\beta) + v \right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_\beta + f_i(v)).$$

"$\subseteq$" Sea $x \in \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_\beta) + v \right)$, entonces $x = y + v$, con $y = x - v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_\beta)$.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x - v \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_\beta) \\
&\Longrightarrow x - v \in f_i^{-1}(V_\beta), && \forall i = 1, \ldots, n \\
&\Longrightarrow f_i(x) - f_i(v) \in V_\beta, && \forall i = 1, \ldots, n \\
&\Longrightarrow f_i(x) \in V_\beta + f_i(v), && \forall i = 1, \ldots, n \\
&\Longrightarrow x \in f_i^{-1}(V_\beta + f_i(v)), && \forall i = 1, \ldots, n \\
&\Longrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_\beta + f_i(v)), , \\
&\Longrightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_\beta + f_i(v)).
\end{aligned}$$

"$\supseteq$" Sea $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_\beta + f_i(v))$, donde $f_i(v) \in \mathbb{K}$. Para comenzar, se cumple que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_\beta + f_i(v)) = f_i^{-1} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i=1}^{n} (V_\beta + f_i(v)) \right), \text{ así que, } f_i(x) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i=1}^{n} (V_\beta + f_i(v)).$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f_i(x) \in \bigcap_{i=1}^{n} (V_\beta + f_i(v)) \\
&\Longrightarrow f_i(x) \in V_\beta + f_i(v), && \forall i = 1, \ldots, n \\
&\Longrightarrow f_i(x) - f_i(v) \in V_\beta, && \forall i = 1, \ldots, n \\
&\Longrightarrow f_i(x - v) \in V_\beta, && \forall i = 1, \ldots, n \\
&\Longrightarrow x - v \in f_i^{-1}(V_\beta), && \forall i = 1, \ldots, n \\
&\Longrightarrow x \in f_i^{-1}(V_\beta) + v, && \forall i = 1, \ldots, n \\
&\Longrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_\beta) + v, \\
&\Longrightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i=1}^{n} (f_i^{-1}(V_\beta) + v).
\end{aligned}$$

De esta forma, hemos probado que,

$$U+v=\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_\beta)+v\right)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_\beta+f_i(v)), \qquad V_\beta\in\tau_{\text{usual}}.$$

Al ser $\mathbb{K}$ un espacio vectorial topológico, si $V_\beta\in\tau$, $f_i(v)\in\mathbb{K}$, entonces $V_\beta+f_i(v)\in\tau$. Al aplicar la pre-imagen al conjunto anterior, tenemos que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_\beta+f_i(v))=U+v\in\tau.$$

Que es lo que deseabamos demostsrar.

Sean $f_i\in Y$, $r_i>0$, $i=1,\ldots,n$; con estos elementos, definamos el siguiente conjunto,

$$V_n=\{x: \quad |f_i(x)|<r_i \text{ para } i=1,\ldots,n\}.$$

Observemos que el conjunto V_n, depende de una cantidad n de funcionales lineales y de escalares $r_i>0$. Como siguiente paso, vamos a verificar que V_n es convexo y la igualdad

$$V_n=(1/2)V_n+(1/2)V_n.$$

- Sea $0\le t\le 1$. Si $x,y\in V_n$, entonces $|f_i(x)|<r_i$, $|f_i(y)|<r_i$, para todo $i=1,\ldots,n$. Utilizando lo anterior, obtenemos que,

$$\begin{aligned}|f_i(tx+(1-t)y)| &= |f_i(tx)+f_i((1-t)y)|\\ &= |tf_i(x)+(1-t)f_i(y)|\\ &\le |t||f_i(x)|+|(1-t)||f_i(y))|\\ &\le t|f_i(x)|+(1-t)|f_i(y))|\\ &< tr_i+(1-t)r_i\\ &< r_i.\end{aligned}$$

  La desigualdad anterior, se cumple $\forall i=1,\ldots,n$, así que $tx+(1-t)y\in V_n$. Lo cual prueba que V_n es convexo.

- Vamos a demostrar que

$$(1/2)V_n+(1/2)V_n=V_n \tag{3.1}$$

  - "$\subseteq$" Sabemos que V_n es convexo, al tomar $t=1/2$, tenemos que

  $$(1/2)V_n+(1/2)V_n\subseteq V_n.$$

  - "$\supseteq$" Sea $x\in V_n$, entonces $|f_i(x)|<r_i$, $\forall i=1,\ldots,n$. Por otro lado, podemos reescribir a x como $x=(1/2)x+(1/2)x$. Si $x\in V_n$, entonces $(1/2)x\in(1/2)V_n$, lo cual garantiza que $x\in(1/2)V_n+(1/2)V_n$. Probando así la igualdad.

Ahora, vamos a probar que la colección,

$$\mathcal{V}_0 = \{V_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}, \qquad V_n = \{x \ : \ |f_i(x)| < r_i \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$$

es una base local de 0.

1. Probaremos que $V_n \in \tau$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Por definición de Y-topología de X, la aplicación

   $$f_i : (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{K}, \tau_{\text{usual}})$$

   es continua; en consecuencia, si $B_{r_i}(0) \in \tau_{\text{usual}}$, entonces $f^{-1}(B_{r_i}(0)) \in \tau$. Por otro lado, notamos que

   $$\begin{aligned} f_i^{-1}(B_{r_i}(0)) &= \{x \in X : f_i(x) \in B_{r_i}(0)\} \\ &= \{x \in X : |f_i(x)| < r_i\}. \end{aligned}$$

   Al intersecar los conjuntos anteriores para $i = 1, \ldots, n$, se cumple que

   $$\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(B_{r_i}(0)) = \{x \in X : |f_i(x)| < r_i, i = 1, \ldots, n\} = V_n.$$

   Ya que V_n es una intersección de conjuntos abiertos, se tiene que $V_n \in \tau$; probando de esta forma que $\mathcal{V}_0 \subseteq \tau$.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Tenemos que, $x = 0$, dado que $f_i(0) = 0$, entonces

   $$|f_i(0)| < r_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

   En consecuencia, $0 \in V_n$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Lo cual prueba el primer axioma de base local.

3. Sea $U \in \tau$ arbitrario, de modo que $0 \in U$. La topología τ es generada por la subbase $\mathcal{S}$; así que, para todo $x \in U$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que

   $$x \in \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathcal{U}_\beta) \subseteq U, \qquad \mathcal{U}_\beta \in \tau_{\text{usual}}, \text{ con } \beta \in J.$$

   En particular, lo anterior se cumple para $x = 0$, así que, $0 \in f_i^{-1}(\mathcal{U}_\beta)$, $\forall i = 1, \ldots, m$.

   Ya que f_i es lineal, si $0 \in f_i^{-1}(\mathcal{U}_\beta)$, entonces $f_i(0) = 0 \in \mathcal{U}_\beta$. Una base local en 0 para la topología usual en $\mathbb{K}$, está dada por las bolas abiertas de centro 0; en consecuencia, $\exists r_i > 0$ tal que $B_{r_i}(0) \subseteq \mathcal{U}_\beta$,

   $$\begin{aligned} &\Longrightarrow f_i^{-1}(B_{r_i}(0)) \subseteq f_i^{-1}(\mathcal{U}_\beta), \quad \forall i = 1, \ldots, m \\ &\Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(B_{r_i}(0)) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathcal{U}_\beta). \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que existe un conjunto de la forma V_m tal que

$$V_m \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathcal{U}_\beta).$$

Definimos $V_m = \{x \ : \ |f_i(x)| < r_i, i = 1, \ldots, m\}$, notamos que

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(B_{r_i}(0)) &= \bigcap_{i=1}^{m}\{x \in X : f_i(x) \in B_{r_i}(0)\}\\ &= \bigcap_{i=1}^{m}\{x \in X : |f_i(x)| < r_i\}\\ &= V_m.\end{aligned}$$

Lo cual prueba que

$$V_n = \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(B_{r_i}(0)) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathcal{U}_\beta).$$

Con esto, se demuestra el tercer axioma de una base local.

Se tiene, que V_n es un vecindario abierto de 0, $\forall n \in \mathbb{N}$; por la Proposición 2.29, el conjunto V_n es absorbente. En conclusión, la colección $\mathcal{V}_0$ solo posee conjuntos absorbentes.

Otro punto importante en esta prueba, es verificar que (X, τ) es un espacio vectorial topológico; por hipótesis $(X, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial y (X, τ) es un espacio topológico, debemos verificar que los unipuntuales son cerrados, y que tanto la adición como multiplicación por escalar son continuas.

- Verificando que los unipuntuales son cerrados. Sea $x \in X$, probaremos que $X \setminus \{x\}$ es abierto.

  Se tiene que

  $$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X\setminus\{x\}} (y + V_n), \quad V_n \in \mathcal{V}_0 \subseteq \tau.$$

  Anteriormente, se probó que la topología τ es invariante sobre traslaciones; en consecuencia, si $V_n \in \mathcal{V}_0 \subseteq \tau$, entonces $y + V \in \tau$, donde $y \in X$. Por ello, $U \in \tau$ pues es la unión arbitraria de conjuntos abiertos.

- Probando que la adición,

  $$\begin{aligned}+ : X \times X &\longrightarrow X\\ (x, y) &\longmapsto x + y\end{aligned}$$

Es continua. Se probará que $+$ es continua en $(0,0)$, pues recordemos que la continuidad en un punto implica la continuidad en todo el espacio $X \times X$.

Sea U un vecindario abierto arbitrario de $+(0,0) = 0$. Se ha mostrado que X posee una base local de 0; por lo que, existe un conjunto $V_n \in \mathcal{V}_0$ tal que

$$0 \in V_n \subseteq U.$$

Por construcción $0 \in V_n$, lo cual implica que $0 \in (1/2)V_n$.

Con lo anterior, garantizamos la existencia de dos vecindarios abiertos V_1' y V_2' de 0, donde

$$V_1' = V_2' = (1/2)V_n.$$

Por definición $V_1' \times V_2'$ es un abierto en la topología producto; utilizando (3.1) tenemos que

$$+((1/2)V_n \times (1/2)V_n) = (1/2)V_n + (1/2)V_n = V_n \subseteq U.$$

Por el Teorema 1.4, probamos que la adición es continua en $(0,0)$ y en consecuencia, es continua en todo $X \times X$.

- Ahora probaremos la multiplicación por escalar,

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$$
$$(\alpha, y) \longmapsto \alpha \cdot x$$

es continua. Sea $U \subseteq X$ un vecindario abierto arbitrario de $\alpha \cdot x$, con $\alpha \in \mathbb{K}, x \in X$. El conjunto $-\alpha \cdot x + U$, es un vecindario abierto de 0. Por definición de base local, $\exists V_n \in \mathcal{V}_0$ tal que

$$V_n \subseteq -\alpha \cdot x + U \quad \Longrightarrow \quad V_n + \alpha \cdot x \subseteq +U.$$

Ya que $V_n \in \mathcal{V}_0$ es absorbente, para el elemento x dado al inicio, $\exists s > 0$ tal que $x \in sV_n$.

Sea $r > 0$, el conjunto $B_r(\alpha)$, es un vecindario abierto de α; con dicho r, construimos el vecindario abierto de x, dado por $x + rV_n$.

Debe suceder que $\beta \in B_r(\alpha)$, entonces $\beta(x + rV_n) \subseteq \alpha \cdot x + V_n$; sin embargo, el hecho que la inclusión sea verdadera, depende del r que se tome; nuestra labor es encontrarlo.

Si $y \in x + rV_n$, entonces $y - x \in rV_n$, y se tiene la siguiente igualdad

$$t = \beta y - \alpha x = (\beta - \alpha)y + \alpha(y - x) \in (\beta - \alpha)(x + rV_n) + \alpha(rV_n).$$

Además, tenemos las siguientes relaciones:

- Si $x \in sV_n \implies V_n + x \subseteq V_n + sV_n$.
- Si $\beta - \alpha < r \implies (\beta - \alpha)A \subseteq A$, para cualquier subconjunto A.
- $r(rV_n + sV_n) + \alpha r V_n = [r(r+s) + \alpha r]V_n$.

Con las relaciones anteriores, tenemos que

$$(\beta - \alpha)(x + rV_n) + \alpha(rV_n) \subseteq [r(r+s) + \alpha r]V_n.$$

Lo anterior, nos permite afirmar que $\beta y - \alpha x \in [r(r+s)+\alpha r]V_n$; pero queremos probar que

$$[r(r+s) + |\alpha| r]V_n \subseteq V_n,$$

esto pasará si y solamente si $r(r+s) + |\alpha| r < 1$.

Para que se satisfaga la desigualdad anterior, debe ser que $r(r+s) < 1/2$ y $|\alpha| r < 1/2$, así que

$$|\alpha| r < 1/2 \Longrightarrow r < \frac{1}{2|\alpha|}.$$

Asumiendo que $r \leq s$, entonces

$$\begin{aligned} r + s &\leq s + s \\ r(r+s) &\leq r(2s) \\ \text{si } r \leq \frac{1}{4s} \Longrightarrow r(r+s) &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Al tomar $r = \min\left\{\frac{1}{2|\alpha|}, \frac{s}{2}, \frac{1}{4s}\right\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} r(r+s) + |\alpha| r &\leq r(2s) + \frac{|\alpha|}{2|\alpha|}, \\ &\leq \frac{1}{4s}(2s) + \frac{1}{2|\alpha|}|\alpha|, \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Tomando $r = \min\left\{\frac{1}{2|\alpha|}, \frac{s}{2}, \frac{1}{4s}\right\}$, se satisface que

$$[r(r+s) + |\alpha| r]V_n \subseteq V_n.$$

La inclusión anterior, nos permite obtener que

$$\beta y - \alpha x \in [r(r+s) + |\alpha| r]V_n \quad \Longrightarrow \quad \beta y - \alpha x \in V_n \quad \Longrightarrow \quad \beta y \in (\alpha \cdot x + V_n).$$

Lo anterior garantiza que

$$\begin{aligned} \beta(x + rV_n) \subseteq \alpha \cdot x + V_n \subseteq U, &\text{ siempre que } |\beta - \alpha| < r \\ \Longrightarrow \alpha \cdot x + \beta(V_n + x) \subseteq U, &\text{ siempre que } |\beta - \alpha| < r \end{aligned}$$

De esta forma, se prueba la continuidad de la multiplicación por escalar.

De momento, hemos probado que X donde τ es la topología vectorial y $\mathbb{K}$ su campo de escalares, es un espacio vectorial topológico. Por otro lado, como $\mathcal{V}_0$ es una base local de 0, donde todos sus elementos son convexos, se obtiene que $\mathcal{V}_0$ es una base local convexa de 0; como consecuencia inmediata, (X, τ) resulta es un espacio localmente convexo; sin embargo, nos falta verificar que $X^* = Y$.

Recordemos que el dual de un espacio vectorial topológico se define como

$$X^* = \{ f \ | \ f : (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{K}, \tau_{\text{usual}}), \ \ f \text{ lineal y continuo } \}.$$

Para probar que $X^* = Y$, lo haremos por doble inclusión.

- "$\supseteq$" Sea $f \in X^*$. Construyamos la siguiente familia de funcionales lineales

  $$\mathscr{F} = \{ f_i \ \ : \ \ f_i \in Y, i = 1, \ldots, n \}.$$

  Con estos elementos, definamos el conjunto.

  $$V_n = \{ x \in X : |f_i(x)| < 1, i = 1, \ldots, n \} \in \mathcal{V}_0$$

  Y con el conjunto anterior, definamos

  $$B = \{ |f_i(x)| : x \in V_n \} \cup \{ |f(x)| : |f(x)| < 1, x \in X \}.$$

  Ahora, consideremos el máximo de dicho conjunto, $\delta = \text{máx}\{B\}$. Por definición de máximo,

  $$|f(x)| \leq \delta < 1.$$

  De esta forma se cumple lo establecido en el literal b) del Lema 3.3, lo que implica el literal a); es decir, existen escalares $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, n$ tal que

  $$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x).$$

  Ya que hemos escrito a f como una combinación lineal de funcionales, con $f_i \in Y$, se tendrá que $f \in Y$. Dicha afirmación es válida, pues Y es un espacio vectorial.

- "$\subseteq$" Sea $f_\alpha \in Y$. Por definición f es lineal, además, f_α es continuo, bajo τ. En conclusión $f_\alpha \in X^*$.

De esta forma, hemos finalizado la prueba.

□

Ahora que hemos dado esta serie de resultados y nociones generales; finalmente, estudiaremos la topología débil y débil-* de un espacio vectorial topológico X.

Definición 3.4 (Topología débil)**.** Sea X un espacio vectorial topológico, cuyo dual X^*, separa puntos de X. La X^*-topología de X, es llamada **topología débil de X.**

A la topología débil de X (también llamada X^*-topología de X), la denotaremos por τ_w. Al espacio vectorial topológico X dotado con τ_w, lo denotaremos por X_w.

Observación. Notemos que la topología débil solo puede obtenerse en espacios vectoriales topológicos X, cuyo dual separe puntos. Por ejemplo: los espacios vectoriales topológicos localmente convexos (Ver (2.30)).

***Corolario* 3.1.** *Sea X un espacio vectorial topológico cuyo dual separa puntos y τ_w su topología débil. Si dotamos a X con τ_w, entonces X_w es un espacio localmente convexo tal que $(X_w)^* = X^*$.*

Demostración. Sea τ_w la X^*-topología de X. Por hipótesis, el dual, X^*, es un espacio vectorial que separa puntos de X. Aplicando el Teorema 3.8, tendremos que X_w es un espacio localmente convexo cuyo dual es X^*; es decir $(X_w)^* = X^*$. □

Antes de definir la topología débil-*, vale la pena hacer un pequeño recordatorio de la aplicación canónica, la cual relaciona el espacio dual de X^* con el espacio original, utilizando la evaluación puntual. La aplicación canónica está definida como sigue

$$C : X \longrightarrow X^{**}$$

$$x \longmapsto g_x(f),$$

donde g_x es la evaluación puntual, definida por

$$g_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f \longmapsto g_x(f).$$

Notemos, que por definición $g_x \in X^{**}$. Para definir la topología débil-*, debemos considerar el conjunto de todos las evaluaciones puntuales

$$\{g_x \mid g_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K},\ x \in X\}.$$

Dicho conjunto, es una familia de aplicaciones que separa puntos de X^* (ver Proposición 2.28).

Definición 3.5 (Topología débil-*)**.** Sea X un espacio vectorial topológico, τ su topología vectorial, $\mathbb{K}$ su campo de escalares. Consideremos la familia de las evaluaciones puntuales, definida por

$$\mathscr{F} = \{g_x \in X^{**} \mid g_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}, x \in X\}.$$

La $\mathscr{F}$-topología de X^*, es llamada **topología débil-* de X^***.

La topología débil-* de X^* (también llamada X-topología de X^*) se denotará como τ_{w*}. El espacio vectorial topológico X^* dotado con τ_{w*}, se denotará por $(X^*)_{w*}$.

Al igual que en la topología débil, puesto que la colección,

$$\mathscr{F} = \{g_x \in X^{**} \mid g_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}, x \in X\}$$

separa puntos de X^*; por el Teorema (3.8), tenemos que $(X^*)_{w*}$ es un espacio localmente convexo.

Observación. A diferencia de la topología débil, la topología débil-* puede obtenerse para el dual de cualquier espacio vectorial topológico X, sin importar si este separa puntos o no.

Ahora que hemos dotado a un espacio vectorial topológico X con su topología débil τ_w, denotado por X_w, podemos preguntarnos, ¿qué sucederá si a X_w lo doto con su topología débil?

Sabemos que X_w es localmente convexo y su dual separa puntos; por el Corolario 3.1 se tiene que $(X_w)^* = X^*$. Por otro lado, la topología débil de X_w, es la X^*-topología de X_w, en este caso se obtiene que $(X_w)_w = X_w$.

Proposición 3.3. Sea X un espacio vectorial topológico. La topología débil τ_w, es la topología más débil donde los funcionales f del dual son continuos.

Demostración. Sea $f \in X^*$, así que f es τ-continuo. Recordemos que τ_w es la X^*-topología de X; por definición τ_w es la topología más débil en X donde los funcionales $f \in X^*$ son continuos. Probando lo que se deseaba. □

Sea X un espacio vectorial topológico, τ su topología vectorial, τ_w su topología débil. Cuando trabajamos un espacio sobre diversas topologías, es necesario especificar la topología sobre la que se trabaja; debido a ello nos vemos en la necesidad de definir: vecindarios originales, vecindarios débiles, vecindarios débil-*, cerradura original, cerradura débil, cerradura débil-*, originalmente acotado, débilmente acotado y débil-* acotado, entre otros. Cuando se mencione la palabra débil o débil-*, se refiere a que se trabaja bajo τ_w o τ_{w^*}; si no sé específica, se asume que se trabaja bajo la topología vectorial.

***Teorema* 3.9.** *Si X es un espacio vectorial topológico de dimensión infinita, entonces cada vecindario débil V de 0 contiene un subespacio de dimensión infinita.*

Demostración. Sea τ_w la topología débil de X. El espacio X_w posee una base local dada por

$$\mathcal{V}_0 = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad V_n = \{x \ : \ |f_i(x)| < r_i, \ f_i \in X^*, i = 1, \ldots, n\}.$$

Los conjuntos V_n, dependen de una cantidad finita de funcionales $f_i \in X^*$ y radios $r_i > 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Sea U un vecindario abierto débil de 0; por la base local, existe $V_n \in \mathcal{V}_0$ tal que

$$V_n \subseteq U.$$

Definamos la aplicación

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\longmapsto (f_i(x))_{i=1,\ldots,n}, \end{aligned}$$

donde $(f_i, \ldots, f_n)$ es una n-upla. Por otro lado, vemos que

$$\ker(f) = \{x \in X \ : \ f_i(x) = 0, \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Por el Teorema de Rango-Nulidad, tenemos que

$$\begin{aligned} \dim(X) &= \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Ran}(f)) \\ &\leq \dim(\ker(f)) + \dim(\mathbb{C}^n) \\ &\leq \dim(\ker(f)) + n. \end{aligned}$$

Ya que X es un espacio de dimensión infinita, debería ser que

$$\dim(\ker(f)) + n = \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \dim(\ker(f)) = \infty.$$

Lo cual verifica que $\ker(f)$ es un subespacio vectorial de dimensión infinita.

Ahora probemos que $\ker(f) \subseteq V_n$. Si $x \in \ker(f)$, entonces $f_i(x) = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$; por lo que

$$|f_i(x)| < 0 < r_i \quad \Longrightarrow \quad x \in V_n.$$

De momento, hemos probado las siguientes inclusiones,

$$\ker(f) \subseteq V_n \subseteq U.$$

Dado que $\ker(f)$ es un subespacio de dimensión infinita, se comprueba que un vecindario abierto arbitrario U de 0, contiene un subespacio de dimensión infinita. $\square$

***Corolario* 3.2.** *Si X es un espacio vectorial topológico de dimensión infinita, donde todo vecindario abierto de 0 contiene un subespacio de dimensión infinita, entonces X_w no es localmente acotado.*

Demostración. Por contradicción, vamos a suponer que X_w es localmente acotado, así que existe un vecindario abierto débilmente acotado W de 0. Por hipótesis, X es de dimensión infinita, con ello se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.9 y se garantiza la existencia de un subespacio vectorial Y de dimensión infinita tal que

$$Y \subseteq W \quad \Longrightarrow \quad Y \neq \{0\}.$$

Se ha verificado que W es un conjunto abierto que contiene un subespacio no trivial; por la Proposición 2.12, W no es débilmente acotado; sin embargo, esto es una contradicción a la hipótesis que W es débilmente acotado. De esta forma probamos que X_w no es localmente acotado. □

***Teorema* 3.10.** *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo. Si E es un conjunto convexo, entonces la cerradura débil de E, coincide con la cerradura original; es decir*

$$\overline{E}^w = \overline{E}.$$

Demostración. Para probar que $\overline{E} = \overline{E}^w$, lo haremos por doble inclusión.

- "$\subseteq$" Por definición $\tau_w \subseteq \tau$, en consecuencia, los conjuntos cerrados de τ_w también son cerrados en τ.

  Se sabe que $\overline{E}$ es el cerrado más pequeño que contiene a E; sin embargo, $\overline{E}^w$ es un conjunto cerrado que contiene a E. Por definición de cerradura ser que $\overline{E} \subseteq \overline{E}^w$, probando así la primera inclusión.

- "$\supseteq$" Una forma equivalente de probar que $\overline{E}^w \subseteq \overline{E}$, es probar la siguiente igualdad.

  $$\overline{E}^w \subseteq \overline{E} \Longrightarrow \overline{E}^w \cap (X \setminus \overline{E}) = \emptyset.$$

  Sea $y \in (X \setminus \overline{E})$ arbitrario. Ya que $\overline{E}$ es cerrado bajo τ, entonces $X \setminus \overline{E}$ es abierto en τ, además por construcción $\overline{E} \cap (X \setminus \overline{E}) = \emptyset$.

  Por el Teorema 2.9 literal d), si E es un conjunto convexo, $\overline{E}$ también lo es. Dado que X es un espacio vectorial topológico localmente convexo, existe una base local convexa de 0, la cual denotamos por $\mathcal{V}$ y se define como

  $$\mathcal{V} = \{V_n : V_n \text{ es convexo, } 0 \in V_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

  Luego por el Teorema 2.16, con la base local convexa $\mathcal{V}$ de 0, podemos definir siguiente base de X

  $$\mathscr{B} = \bigcup_{x \in X} \{x + V_n \mid V_n \in \mathcal{V}\}.$$

El conjunto abierto $X \setminus \overline{E}$, se puede reescribir como

$$X \setminus \overline{E} = \bigcup_{x \in X \setminus \overline{E}} \{x + V_n \mid V_n \in \mathcal{V}\} \quad \Longrightarrow \quad x + V_n \subseteq (X \setminus \overline{E}).$$

En particular, lo anterior se cumple para el elemento $y \in X \setminus \overline{E}$; así que,

$$y + V_n \subseteq (X \setminus \overline{E}).$$

El conjunto $y + V_n$ es convexo, pues en un espacio vectorial topológico la traslación de un conjunto convexo sigue siendo convexo. En conclusión, $X \setminus \overline{E}$ contiene un conjunto abierto convexo $y + V_n$.

Dado que X es un espacio localmente convexo, al tomar los conjuntos convexos $y + V_n$, $\overline{E}$, disjuntos, donde $y + V_n$ es abierto y $\overline{E}$ es cerrado; lo anterior, satisface las hipótesis del Teorema 2.29 literal a), entonces $\exists f \in X^*$, $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{Re}(f(w)) < \gamma < \mathrm{Re}(f(z)),$$

para todo $w \in x + V_n$ y para todo $z \in \overline{E}$. Utilizando lo anterior, podemos definir el siguiente conjunto,

$$A = \{x \in X : \mathrm{Re}(f(x)) < \gamma\} \subseteq x + V_n \subseteq X \setminus \overline{U}.$$

A es un vecindario débil de y; además $\overline{E} \cap A = \emptyset$ y por ende $E \cap A = \emptyset$.

De momento A es un vecindario débil abierto de y, disjunto de E; por tanto, $y \notin \overline{E}^w$. Ya que esta prueba se hizo para un $y \in X \setminus \overline{E}$ arbitrario, se cumple que

$$\overline{E}^w \cap (X \setminus \overline{E}) = \emptyset.$$

Que es lo que deseábamos demostrar.

□

***Corolario* 3.3.** *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo, τ su topología original y τ_w su topología débil, entonces*

a) Un conjunto A es originalmente cerrado en X si y solamente sí A es débilmente cerrado en X.

b) A es un conjunto originalmente denso en X si y solamente si A es débilmente denso en X.

Demostración.

a) Probaremos ambas direcciones de la primera afirmación.

- "$\Longrightarrow$" Sea A un conjunto originalmente cerrado en X, así que, $A = \overline{A}$. Dado que X es un espacio localmente convexo, se tiene que $\overline{A} = \overline{A}^w$, así que, $A = \overline{A}^w$; es decir, A es un conjunto débilmente cerrado.
- "$\Longleftarrow$" Sea A un conjunto débilmente cerrado en X, así que, $A = \overline{A}^w$. Dado que X es un espacio localmente convexo, se tiene que $\overline{A}^w = \overline{A}$, así que, $A = \overline{A}$; es decir, A es un conjunto originalmente cerrado.

b) Probaremos ambas direcciones de la segunda afirmación.

- "$\Longrightarrow$" Sea A un conjunto originalmente denso en X, así que $\overline{A} = X$. Dado que X es un espacio localmente convexo, se tiene que $\overline{A} = \overline{A}^w = \overline{A}^w = X$; es decir, A es un conjunto débilmente denso.
- "$\Longleftarrow$" Sea A un conjunto débilmente denso en X, así que $\overline{A}^w = X$. Dado que X es un espacio localmente convexo, se tiene que

$$\overline{A}^w = \overline{A} = \overline{A} = X.$$

Es decir, A es un conjunto originalmente denso.

□

3.3. El Teorema de Alaoglu

Una de las aplicaciones más importantes de la topología débil-*, es el Teorema de Alaoglu, el cual nos habla de la compacidad del dual de un espacio vectorial topológico; dicho resultado es el protagonista del presente trabajo. En este punto, finalmente, hemos construido la teoría necesaria para poder enunciarlo y demostrarlo; sin embargo, aún debemos definir el polar de conjunto que se utiliza de forma específica en dicho Teorema.

Definición 3.6 (Polar de un conjunto)**.** Sea X un espacio vectorial topológico y V un vecindario abierto de 0. El conjunto

$$P = \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1, x \in V\},$$

es llamado **polar de** V.

El polar de un vecindario abierto V de 0, posee diversas propiedades, la cuales veremos detalladamente a continuación,

Proposición 3.4. Sea X un espacio vectorial topológico y V un vecindario abierto de 0. Si P es el polar de V, entonces:

a) P es convexo.

b) P es balanceado.

Demostración.

a) Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq t \leq 1$. Tomemos $f, f' \in P$. De este modo,

$$|f(x)| \leq 1, \qquad |f'(x)| \leq 1, \text{ para todo } x \in V.$$

Debemos verificar que $tf + (1-t)f' \in P$.

$$\begin{aligned} |tf(x) + (1-t)f'(x)| &\leq |tf(x)| + |(1-t)f'(x)| \\ &\leq |t||f(x)| + |1-t||f'(x)| \\ &\leq |t| + |1-t| \\ &\leq t + 1 - t \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

De esta forma, probamos que P es convexo.

b) Sea $|\alpha| \leq 1$. Tomemos $f \in P$, así que, $|f(x)| < 1$ para todo $x \in X$. Debemos verificar que $\alpha f \in P$. Notemos que

$$\begin{aligned} |\alpha f(x)| &\leq |\alpha||g(x)| \\ &\leq |\alpha| \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Por tanto, P es balanceado.

□

***Teorema* 3.11** (Teorema de Alaoglu)**.** *Sea X un espacio vectorial topológico, τ su topología vectorial y $\mathbb{K}$ su campo de escalares. Si V es un vecindario abierto de 0, entonces el polar de V,*

$$P = \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1, x \in V\},$$

es débil- compacto.*

Demostración. Antes de iniciar la prueba, es importante aclarar que al espacio dual X^* lo trabaremos con la topología débil-*, denotada por τ_{w^*}.

Para comenzar, ya que V es un vecindario abierto de 0 de un espacio vectorial topológico, tenemos que V es absorbente por la Proposición 2.29; en consecuencia, para cada $x \in X$, existe $r_x > 0$ tal que

$$x \in r_x V \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{r_x} \in V.$$

Sean $f \in P$, $\dfrac{x}{r_x} \in V$. Por la definición del polar de V, se cumple que

$$\left| f\left(\frac{x}{r_x}\right) \right| \leq 1.$$

Por otro lado, notamos que

$$\left|f\left(\frac{x}{r_x}\right)\right| = \left|\frac{1}{r_x}f(x)\right| = \left|\frac{1}{r_x}\right||f(x)| = \frac{1}{r_x}|f(x)|.$$

Utilizando la igualdad anterior, obtenemos la siguiente desigualdad

$$|f(x)| \leq r_x, \qquad \forall x \in X.$$

Al tomar los r_x anteriores, se define el conjunto

$$D_x = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| \leq r_x\}.$$

Por construcción, el conjunto D_x depende de r_x y en consecuencia de x.

También, notamos que

$$\overline{B_{r_x}}(0) = D_x = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| \leq r_x\} \subseteq \mathbb{K}.$$

Es decir, D_x es una bola cerrada de centro 0 y radio r_x del cuerpo $\mathbb{K}$. Por el Teorema de Heine-Borel (Ver [2], Capítulo II, Sección 4, Teorema 4.10), D_x es compacto y cerrado bajo la topología usual de $\mathbb{K}$.

Consideremos la colección de conjuntos compactos $\{(D_x, \tau_{w^*})\}_{x\in X}$. Definamos el producto cartesiano arbitrario de espacios topológicos,

$$D = \prod_{x\in X} D_x.$$

Por el Teorema de Tychonoff 1.15, D es compacto bajo la topología producto, la cual denotaremos por τ_d.

Al tomar $\beta \in D$, tenemos que $\beta = \{\alpha_x\}_{\substack{\alpha_x \in D_x \\ x\in X}}$. Construiremos una función g

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto g(x) = \alpha_x, \end{aligned}$$

donde $|\alpha_x| \leq r_x$.

La función g, al tomar $x \in X$, nos devuelve un elemento $\alpha_x \in D_x$ tal que $|\alpha_x| \leq r_x$. Aplicando g a todo X, obtenemos una colección

$$\{g(x) = \alpha_x \in \mathbb{K} \ : \ |\alpha_x| < r_x, \ x \in X\}.$$

Dicha colección, coincide con la familia indexada β; es decir, el conjunto D lo podemos reescribir de la forma

$$\prod_{x\in X} D_x = D = \{g \mid g : X \longrightarrow \mathbb{K}, \ |g(x)| \leq r_x, \forall x \in X\}.$$

En este caso, el conjunto D consiste en todas las aplicaciones que van de X a $\mathbb{K}$ tal que $|g(x)| \leq r_x$, para todo $x \in X$.

Como siguiente paso, probaremos que $P \subseteq X^*$ y $P \subseteq D$.

- "$P \subseteq X^*$" Sea $f \in P$. Por definición del polar P, tenemos que $f \in X^*$; de este modo, esta inclusión es inmediata.
- "$P \subseteq D$" Sea $f \in P$. Por definición, f es de la forma $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$. Anteriormente, se mostró que para $x \in X$, existe $r_x > 0$ tal que

  $$|f(x)| \leq r_x.$$

  Con esto se cumplen ambas condiciones para verificar que $f \in D$.

Hemos demostrado que $P \subseteq X^*$ y $P \subseteq D$; en consecuencia, $P \subseteq X^* \cap D$ y $X^* \cap D \neq \emptyset$.

Ya que P es un subconjunto de D y de X^*, podemos dotarlo con las topologías de subespacio heredadas de los espacios topológicos D y X^*. Dichas topologías las denotaremos por τ_{d_P} y $\tau_{w_P^*}$, respectivamente. Con lo anterior, definimos los espacios topológicos $(P, \tau_{w_P^*})$ y (P, τ_{d_P}). Por otro lado, dado que $X^* \cap D \neq \emptyset$ sabemos que $\exists f_0 \in X^* \cap D$; en particular, tomemos $f_0 \in P$.

En este punto, nuestro propósito es demostrar que las topologías de subespacio τ_{w^*} y τ_d coinciden; para ello, vamos a definir una base local de f_0 en (D, τ_d) y (X^*, τ_{w^*}), donde f_0 es el funcional fijo definido anteriormente.

Consideremos el conjunto $\mathscr{A}_n$, que son todas las posibles colecciones de n elementos diferentes de X, definida como

$$\mathscr{A}_n = \{A_j \ : \ j \in J\}, \quad \text{donde } A_j = \{x_i \in X : 1 \leq i \leq n\}.$$

A_j es una colección finita de n elementos distintos de X.

Sean $\varepsilon > 0$ y $A_j \in \mathscr{A}_n$. Con estos dos elementos, definamos el conjunto

$$W_n = \bigcup_{A_j \in \mathscr{A}_n} W_{A_j}, \qquad W_{A_j} = \{f \in X^* \ : \ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, x_i \in A_j\}.$$

Verificaremos que la colección,

$$\mathcal{W}_{f_0} = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$$

es una base local de f_0 en X^*. Probaremos cada uno de los tres axiomas de una base local.

1. Sea $\varepsilon > 0$ y $A_j \in \mathscr{A}_n$. Tomemos $x_i \in A_j$, donde $f_0(x_i) \in \mathbb{K}$, para todo $1 \leq i \leq n$. Consideremos la bola abierta,

$$B_\varepsilon(f_0(x_i)) \in \tau_{\text{usual}}.$$

Por definición de la topología débil-* de X^* (ver (3.5)), la evaluación puntual g_{x_i} es continua en τ_{w^*}. En consecuencia,

$$B_\varepsilon(f_0(x_i)) \in \tau_{\text{usual}} \implies g_{x_i}^{-1}(B_\varepsilon(f_0(x_i))) \in \tau_{w^*}.$$

Por otro lado, notemos la siguiente igualdad de conjuntos,

$$\begin{aligned} g_{x_i}^{-1}(B_\varepsilon(f_0(x_i))) &= \{f \in X^* \ : \ g_{x_i}(f) \in B_\varepsilon(f_0(x_i))\} \\ &= \{f \in X^* \ : \ f(x_i) \in B_\varepsilon(f_0(x_i))\} \\ &= \{f \in X^* \ : \ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Lo anterior, se cumple para todo $x_i \in A_j$. De este modo,

$$\bigcap_{i=1}^{n} g_{x_i}^{-1}(B_\varepsilon(f_0(x_i))) = \{f \in X^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, x_i \in A_j\} = W_{A_j}. \tag{3.2}$$

La igualdad (3.2), prueba que el conjunto W_{A_j} se puede escribir como una intersección finita de conjuntos abiertos en τ_{w^*}. Luego, $W_{A_j} \in \tau_{w^*}$; esto se cumple para cualquier $A_j \in \mathscr{A}_n$. Recordemos que W_n está definido como sigue

$$W_n = \bigcup_{A_j \in \mathscr{A}_n} W_{A_j}, \tag{3.3}$$

así que, $W_n \in \tau_{w^*}$, pues es la unión arbitraria de conjuntos abiertos W_{A_j}. De esta forma probamos el primer axioma de base local.

2. Sea W_n un conjunto de $\mathcal{W}_{f_0}$, donde

$$W_n = \bigcup_{A_j \in \mathscr{A}_n} W_{A_j}.$$

Tomemos un A_j arbitario. Sea $x_i \in A_j$. Luego,

$$|f_0(x_i) - f_0(x_i)| = |f_0(x_i - x_i)| = |f_0(0)| = |0| < \varepsilon.$$

Lo anterior, se cumple para cualquier $x_i \in A_j$, entonces $f_0 \in W_{A_j}$; en consecuencia, $f_0 \in W_n$. Lo cual prueba el segundo axioma de una base local.

3. Sea $U \in \tau_{w^*}$ tal que $f_0 \in U$. Recordemos que la base de la topología débil-* está dada por

$$\mathscr{B}_{w^*} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} g_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta) : \mathcal{U}_\beta \in \tau_{\text{usual}} \right\}.$$

Por definición de base, para cada $f \in U$, se cumple que

$$f \in B = \bigcap_{i=1}^{n} g_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta) \subseteq U. \tag{3.4}$$

Sea $A_j = \{x_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathscr{A}_n$, la colección de los elementos x_i, que determinan las imágenes inversas de las evaluaciones puntuales g_{x_i} en el conjunto B.

En particular, la inclusión (3.4) se cumple para f_0. De este modo,

$$f_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} g_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta) \subseteq U.$$

De la relación anterior, tenemos que $f_0 \in g_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta)$, para cada $x_i \in A_j$; en consecuencia,

$$g_{x_i}(f_0) = f_0(x_i) \in \mathcal{U}_\beta.$$

Recordemos que $\mathcal{U}_\beta \in \tau_{\text{usual}}$. Además, del ejemplo (2.7), tenemos que las bolas de centro $f_0(x_i) \in \mathbb{K}$ y radio $r_i > 0$ son una base local de $f_0(x_i)$ en $(\mathbb{K}, \tau_{\text{usual}})$. Dicha base local se define como

$$\mathscr{B}_{f_0(x_i)} = \{B_{r_i}(f_0(x_i)) : \forall r_i > 0\}.$$

Ya que $\mathcal{U}_\beta$ es un conjunto abierto que contiene a $f_0(x_i)$, existe un radio $r_i > 0$ tal que

$$f_0(x_i) \in B_{r_i}(f_0(x_i))) \subseteq \mathcal{U}_\beta.$$

Dicha construcción la podemos hacer para cualquier $x_i \in A_j$. Al tomar $\varepsilon = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \{r_i\}$, se cumplirá que

$$B_\varepsilon(f_0(x_i))) \subseteq B_{r_i}(f_0(x_i))) \subseteq \mathcal{U}_\beta.$$

En consecuencia,

$$g_{x_i}^{-1}(B_\varepsilon(f_0(x_i))) \subseteq g_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta).$$

La inclusión anterior se cumple para todo $x_i \in A_j$. De este modo,

$$\bigcap_{i=1}^{n} g_{x_i}^{-1}(B_\varepsilon(f_0(x_i))) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} g_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta).$$

Finalmente, por la igualdad (3.2) tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^{n} g_{x_i}^{-1}(B_\varepsilon(f_0(x_i))) = W_{A_j}.$$

Ya que esto se cumple al menos para la colección $A_j \in \mathscr{A}_n$, se tiene que

$$W_{A_j} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} g_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta) \subseteq U \implies W_n = \bigcup_{A_j \in \mathscr{A}_n} W_{A_j} \subseteq U.$$

De esta forma, hemos demostrado que si U es un conjunto abierto tal que $f_0 \in U$, entonces existe un conjunto $W_n \in \mathcal{W}_{f_0}$ tal que $W_n \subseteq U$. Lo cual verifica el tercer axioma de una base local.

Ahora daremos una base local de f_0 en (D, τ_d). Sean $A_j \in \mathscr{A}_n$ definidos anteriormente y $\varepsilon > 0$; con estos elementos definamos el conjunto,

$$V_n = \bigcup_{A_j \in \mathscr{A}_n} V_{A_j}, \qquad V_{A_j} = \{f \in X^* \ : \ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, x_i \in A_j\}.$$

Verificaremos que la colección,

$$\mathcal{V}_{f_0} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\},$$

es una base local de $f_0 \in D$. Análogamente, probaremos cada uno de los tres axiomas de base local.

1. Sea $A_j \in \mathscr{A}_n$. Tomemos $x_i \in A_j$, donde $f_0(x_i) \in \mathbb{K}$, para todo $1 \leq i \leq n$. Consideremos la bola abierta,

$$B_{r_{x_i}}(f_0(x_i)) \in \tau_{\text{usual}}.$$

Notemos que $D_{x_i} \subseteq \mathbb{K}$, es por ello que el conjunto D_{x_i} puede dotarse con la topología de subespacio de τ_{usual}, la cual denotaremos por $\tau_{\text{usual}_{D_{x_i}}}$. Tenemos que $B_{r_{x_i}}(f_0(x_i)) \in \tau_{\text{usual}}$, así que,

$$B_{r_{x_i}}(f_0(x_i)) \cap D_{x_i} = B_{r_{x_i}}(f_0(x_i)) \in \tau_{\text{usual}_{D_{x_i}}}.$$

La construcción de la bola $B_{r_{x_i}}(f_0(x_i))$, se hizo para todo $x_i \in A_j$. Al tomar $\varepsilon = \min\limits_{1 \leq i \leq n}\{r_i\}$, se tiene que

$$B_\varepsilon(f_0(x_i)) \subseteq B_{r_{x_i}}(f_0(x_i)) \implies B_\varepsilon(f_0(x_i)) \in \tau_{\text{usual}_{D_{x_i}}}.$$

Por definición de la topología producto, las proyecciones π_{x_i} son continuas en τ_d; de este modo,

$$B_\varepsilon(f_0(x_i)) \in \tau_{\text{usual}_{D_{x_i}}} \implies \pi_{x_i}^{-1}(B_\varepsilon(f_0(x_i))) \in \tau_d.$$

Por otro lado, notemos la siguiente igualdad de conjuntos,

$$\begin{aligned}
\pi_{x_i}^{-1}(B_\varepsilon(f_0(x_i))) &= \{\beta \in D : \pi_{x_i}(\beta) \in B_\varepsilon(f_0(x_i))\} \\
&= \{\beta \in D : \alpha_{x_i} \in B_\varepsilon(f_0(x_i))\} \\
&= \{g \in D : g(x_i) = \alpha_{x_i} \in B_\varepsilon(f_0(x_i))\} \\
&= \{g \in D : g(x_i) \in B_\varepsilon(f_0(x_i))\} \\
&= \{g \in D : |g(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Lo anterior, se cumple para todo $x_i \in A_j$. En consecuencia,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}(B_\varepsilon(f_0(x_i))) = \{g \in D \ : \ |g(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, x_i \in A_j\} = V_{A_j}. \tag{3.5}$$

La igualdad (3.5), prueba que el conjunto V_{A_j} se puede escribir como una intersección finita de conjuntos abiertos en τ_d. Luego, $V_{A_j} \in \tau_d$; esto se cumple para cualquier $A_j \in \mathscr{A}_n$. Recordemos que V_n se define como

$$V_n = \bigcup_{A_j \in \mathscr{A}_n} V_{A_j}. \tag{3.6}$$

En consecuencia, $V_n \in \tau_d$, pues es la unión arbitraria de conjuntos abiertos de τ_d. De esta forma probamos el primer axioma de base local.

2. Sea V_n un conjunto arbitrario de $\mathcal{V}_{f_0}$, donde

$$V_n = \bigcup_{A_j \in \mathscr{A}_n} V_{A_j}.$$

Tomemos un A_j arbitrario. Sea $x_i \in A_j$. Luego,

$$|f_0(x_i) - f_0(x_i)| = |f_0(x_i - x_i)| = |f_0(0)| = |0| < \varepsilon.$$

Lo anterior, se cumple para cualquier $x_i \in A_j$; de este modo $f_0 \in V_{A_j}$. Por consiguiente, $f_0 \in V_n$. Lo cual prueba el segundo axioma de una base local.

3. Sea $U \in \tau_d$ tal que $f_0 \in U$. Recordemos que la base de la topología producto está dada por

$$\mathscr{B}_d = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta) \ : \ \mathcal{U}_\beta \in \tau_{\text{usual}_{d_{x_i}}} \right\}.$$

Por definición de base, para cada $f \in U$, se cumple que

$$f \in B = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta) \subseteq U. \tag{3.7}$$

Sea $A_j = \{x_i \ : \ 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathscr{A}_n$, la colección de los n elementos que determinan las imágenes inversas de las proyecciones π_{x_i} en el conjunto B.

En particular, la inclusión (3.7) se cumple para f_0. En consecuencia,

$$f_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta) \subseteq U.$$

De la relación anterior, tenemos que $f_0 \in \pi_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta)$, para cada $x_i \in A_j$; así que,

$$\pi_{x_i}(f_0) \in \mathcal{U}_\beta.$$

Sin embargo, $f_0(x_i) = \alpha_{x_i}$; es decir, $\alpha_{x_i} \in \mathcal{U}_\beta$.

Recordemos que $\mathcal{U}_\beta \in \tau_{\text{usual}}$. Sabemos que las bolas de centro $f_0(x_i) \in \mathbb{K}$ y radio $r_i > 0$ son una base local de $f_0(x_i)$ en $(\mathbb{K}, \tau_{\text{usual}})$. Dicha base local se define como

$$\mathscr{B}_{f_0(x_i)} = \{B_{r_i}(f_0(x_i)) : \forall r_i > 0\}.$$

Dado que $\mathcal{U}_\beta \in \tau_{\text{usual}_{d_{x_i}}}$, con $f_0(x_i) \in \mathcal{U}_\beta$. Por definición de topología de subespacio,

$$\mathcal{U}_\beta = \mathcal{U}' \cap D_{x_i}, \quad \text{con} \quad \mathcal{U}' \in \tau_{\text{usual}}.$$

Por construcción, $\mathcal{U}'$ es un conjunto abierto de $f_0(x_i)$. Por definición de base local, existe un radio $r_{x_i} > 0$ tal que

$$B_{r_i}(f_0(x_i))) \subseteq \mathcal{U}'.$$

La construcción anterior la podemos hacer para cada $x_i \in A_j$; al tomar $\varepsilon = \min\limits_{1\leq i\leq n} \{r_i\}$, se cumple que

$$\begin{aligned} & & B_\varepsilon(f_0(x_i))) \subseteq B_{r_i}(f_0(x_i))) \subseteq \mathcal{U}' \\ \Longrightarrow & & B_\varepsilon(f_0(x_i))) \cap D_{x_i} \subseteq \mathcal{U}' \cap D_{x_i} \\ \Longrightarrow & & B_\varepsilon(f_0(x_i))) \subseteq \mathcal{U}_\beta \\ \Longrightarrow & & \pi_{x_i}^{-1}(B_\varepsilon(f_0(x_i)))) \subseteq \pi_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta). \end{aligned}$$

La inclusión anterior se cumple para todo $x_i \in A_j$, así que,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}(B_\varepsilon(f_0(x_i))) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta).$$

Por la igualdad (3.5), tenemos que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}(B_\varepsilon(f_0(x_i))) = V_n$, obteniendo que

$$V_{A_j} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta) \subseteq U \Longrightarrow V_n = \bigcup_{A_j \in \mathscr{A}_n} V_{A_j} \subseteq U.$$

De esta forma, hemos demostrado que, si U es un conjunto abierto tal que $f_0 \in U$, entonces existe un conjunto $V_n \in \mathcal{V}_{f_0}$ tal que $V_n \subseteq U$. Lo cual prueba el tercer axioma de una base local.

De momento, hemos demostrado que la colección $\mathcal{W}_{f_0} = \{W_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, es una base local de f_0 en (X^*, τ_{w^*}); donde,

$$W_n = \bigcup_{A_j \in \mathscr{A}_n} W_{A_j}, \qquad \text{con} \qquad W_{A_j} = \{f \in X^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, x_i \in A_j\}.$$

Así mismo, se mostró que la colección $\mathcal{V}_{f_0} = \{V_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$, es una base local de f_0 en (D, τ_d); donde,

$$V_n = \bigcup_{A_j \in \mathscr{A}_n} V_{A_j}, \qquad \text{con} \qquad V_{A_j} = \{g \in D : |g(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, x_i \in A_j\}.$$

Por la Proposición 2.20, utilizando las bases locales de f_0, $\mathcal{V}_{f_0}$ y $\mathcal{W}_{f_0}$, podemos construir bases locales para los subespacios $(P, \tau_{w_P^*})$ y (P, τ_{d_P}); las cuales están dadas por

$$\mathcal{V}_{P_{f_0}} = \{V_n \cap P : V_n \in \mathcal{V}_{f_0}, n \in \mathbb{N}\}, \qquad \mathcal{W}_{P_{f_0}} = \{W_n \cap P : W_n \in \mathcal{W}_{f_0}, n \in \mathbb{N}\}.$$

A continuación, vamos a verificar que $W_n \cap P = V_n \cap P$; en consecuencia, probaremos que las bases locales de subespacio coinciden.

- "$W_n \cap P \subseteq V_n \cap P$" .

  Sea $f \in W_n$.

  $$f \in W_n = \bigcup_{A_j \in \mathscr{A}} W_{A_j}, \qquad \text{con } A_j \text{ definido anteriormente.}$$

  Lo anterior, nos dice que $f \in W_{A_j}$, para algún $j \in J$; en consecuencia, para todo $x_i \in W_{A_j}$, $1 \leq i \leq n$ se cumple que

  $$|f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon. \tag{3.8}$$

  Con esto, se tiene una de las condiciones para verificar que $f \in V_{A_j}$. Por otro lado, dada la forma de $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, tenemos que $f \in D$. Comprobando que

  $$f \in V_{A_j}, \quad \text{para algún } j \in J \qquad \Longrightarrow \qquad f \in V_n.$$

  Lo anterior prueba que $W_n \subseteq V_n$. En consecuencia, $W_n \cap P \subseteq V_n \cap P$. Probando la primera inclusión.

- "$V_n \cap P \subseteq W_n \cap P$" .

  Sea $f \in V_n \cap P$, así que,

  $$f \in V_n = \bigcup_{A_j \in \mathscr{A}} V_{A_j}, \qquad \text{con } A_j \text{ definido anteriormente.}$$

  Tenemos que $f \in V_{A_j}$, para algún $j \in J$; en consecuencia, para todo $x_i \in V_{A_j}$, $1 \leq i \leq n$ se cumple que

  $$|f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon. \tag{3.9}$$

Con esto, se tiene una de las condiciones para verificar que $f \in W_{A_j}$; además, dado que $f \in P$, se tiene que $f \in X^*$. Lo cual comprueba, que $f \in W_{A_j}$, para algún $j \in J$ por lo que $f \in W_n$.

También, por definición, tenemos que $f \in P$; en consecuencia, $f \in V_n \cap P$. Lo cual prueba la segunda condición.

Ya probamos que $W_n \cap P = V_n \cap P$, siempre que $\varepsilon > 0$ sea el mismo para ambos conjuntos.

Por la Proposición 2.21, las bases locales $\mathcal{W}_{P_{f_0}}$ y $\mathcal{V}_{P_{f_0}}$ de f_0 en $(P, \tau_{w_P^*})$ y (P, τ_{d_P}), determinan las bases $\mathscr{B}_{P\cap X^*}$ y $\mathscr{B}_{P\cap D}$, para los espacios topológicos $(P, \tau_{w_P^*})$ y (P, τ_{d_P}); las cuales están dadas por

$$\mathscr{B}_{P\cap X^*} = \bigcup_{f\in P}\{f - f_0 + (V_n \cap P) \mid V_n \in \mathcal{V}_{f_0}\}, \qquad \mathscr{B}_{P\cap D} = \bigcup_{f\in P}\{f - f_0 + (W_n \cap P) \mid W_n \in \mathcal{W}_{f_0}\}.$$

Denotemos por $\tau'_{w_P^*}$ y τ'_{d_P} a las topologías generadas por las bases $\mathscr{B}_{P\cap X^*}$ y $\mathscr{B}_{P\cap X^*}$. Por la Proposición 2.22, dichas topologías coinciden con las topologías originales de $\tau_{w_P^*}$ y τ_{d_P}. Es decir,

$$\tau'_{w_P^*} = \tau_{w_P^*}, \qquad , \tau'_{d_P} = \tau_{d_P}.$$

Utilizando la igualdad de los conjuntos, $W_n \cap P = V_n \cap P$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_{P\cap X^*} &= \bigcup_{f\in P}\{f - f_0 + (V_n \cap P) \mid V_n \in \mathcal{V}_{f_0}\} \\ &= \bigcup_{f\in P}\{f - f_0 + (W_n \cap P) \mid W_n \in \mathcal{W}_{f_0}\} \\ &= \mathscr{B}_{P\cap D}. \end{aligned}$$

Hemos probado que las bases $\mathscr{B}_{P\cap D}$ y $\mathscr{B}_{P\cap X^*}$ coinciden; por la unicidad de las topologías generadas por las bases, debe suceder que

$$\tau'_{w_P^*} = \tau'_{d_P}, \tag{3.10}$$

Anteriormente, probamos que $\tau_{w_P^*} = \tau'_{w_P^*}$ y $\tau'_{d_P} = \tau_{d_P}$. Utilizando (3.10), obtenemos que $\tau_{w_P^*} = \tau_{d_P}$; es decir, los espacios $(P, \tau_{w_P^*})$ y (P, τ_{d_P}) son iguales.

Ahora, vamos a probar que P es cerrado en τ_{d_P}; para ello, verificaremos que $P = \overline{P}^d$. Por definición, $P \subseteq \overline{P}^d$, nos resta por probar que $\overline{P}^d \subseteq P$.

Sean $f_0 \in \overline{P}^d$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{1 + \alpha + \beta} > 0$. Con estos elementos, definimos el conjunto $A_j \in \mathscr{A}_3$, como sigue

$$A_j = \{x, y, \alpha x + \beta y\}.$$

Con estos dos elementos, definimos el conjunto

$$V_{A_j} = \{g \in D \ : \ |g(w) - f_0(w)| < \varepsilon_1, w \in A_j\}.$$

Tenemos que $f \in \overline{P}^d$. Por definición de cerradura, todo vecindario abierto V de f_0, cumple que $V \cap P \neq \emptyset$; en particular, lo anterior se cumple para V_{A_j}. En consecuencia,

$$V_{A_j} \cap P \neq \emptyset.$$

Garantizando, que existe $g \in V_{A_j} \cap P$.

Las condiciones para probar que $f \in P$, es el hecho que f_0 sea lineal y continuo; cada una de ellas, probaremos a continuación:

- Probando que f_0 es lineal. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y, \in X$. Tenemos que,

  $$f_0(\alpha x + \beta y) = \alpha f_0(x) + \beta f_0(y) \iff f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y) = 0.$$

  Tomando $g \in V_{A_j} \cap P$, como fue definido anteriormente; ya que $g \in P$, entonces $g \in X^*$; de este modo, es válida la igualdad $g(\alpha x + \beta y) = \alpha g(x) + \beta g(y)$. Analicemos lo siguiente,

  $$\begin{aligned} f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y) &= f_0(\alpha x + \beta y) - g(\alpha x + \beta y) \\ &\quad + g(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y) \\ &= f_0(\alpha x + \beta y) - g(\alpha x + \beta y) \\ &\quad + \alpha g(x) + \beta g(y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y) \\ &= f_0(\alpha x + \beta y) - g(\alpha x + \beta y) \\ &\quad + \alpha g(x) - \alpha f_0(x) + \beta g(y) - \beta f_0(y). \end{aligned}$$

  Aplicando valor absoluto, tenemos la siguiente desigualdad,

  $$\begin{aligned} &|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)| \\ =&|f_0(\alpha x + \beta y) - g(\alpha x + \beta y) + \alpha g(x) - \alpha f_0(x) + \beta g(y) - \beta f_0(y)| \\ \leq&|f_0(\alpha x + \beta y) - g(\alpha x + \beta y)| + |\alpha g(x) - \alpha f_0(x)| + |\beta g(y) - \beta f_0(y)| \\ \leq&|g(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x + \beta y)| + |\alpha||g(x) - f_0(x)| + |\beta||g(y) - f_0(y)| \\ <&\varepsilon_1 + |\alpha|\varepsilon_1 + |\beta|\varepsilon_1 \\ <&\frac{\varepsilon_1}{1 + \alpha + \beta} + |\alpha|\frac{\varepsilon_1}{1 + \alpha + \beta} + |\beta|\frac{\varepsilon_1}{1 + \alpha + \beta} \\ <&(1 + |\alpha| + |\beta|)\frac{\varepsilon_1}{1 + \alpha + \beta} = \varepsilon_1 \\ <&\varepsilon_1. \end{aligned}$$

Dado que $|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)|$ no depende de ε_1, podemos garantizar

$$|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)| \leq 0.$$

Tenemos que el módulo es mayor o igual a 0, en consecuencia,

$$|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)| = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y) = 0.$$

Lo cual prueba que f_0 es lineal.

- Ahora debemos verificar que f_0 es continuo en la topología τ_d. Lo que haremos será verificar que f_0 es acotado en un vecindario abierto V, pues esto implica que f_0 es τ_{w^*} continuo, por el Teorema 2.24.

  Tomaremos el vecindario abierto V de 0, dado en la hipótesis. Sea $x \in V$ y $\varepsilon > 0$. Definamos el conjunto $A_j = \{x\} \subseteq \mathscr{A}_1$. Ahora definimos el conjunto,

$$V_{A_j} = \{g \in D : |g(z) - f_0(z)| < \varepsilon, z \in A_j\},$$

  que es un vecindario abierto de f_0 en τ_d.

  Sea $f \in \overline{P}^d$. De forma análoga, por definición de cerradura, ya que V_{A_j} es un vecindario abierto en τ_d de f_0, se tiene que

$$V_{A_j} \cap P = \emptyset.$$

  Garantizando de esta forma, que existe un elemento $g \in V_{A_j} \cap P$. Del hecho que $g \in P$, se tiene que $|g(x)| \leq 1$, para todo $x \in V$. Ahora analicemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} |f_0(x)| &= |f_0(x) - g(x) + g(x)| \\ &\leq |g(x) - f_0(x)| + |g(x)| \\ &< \varepsilon + 1. \end{aligned}$$

  Dado que $|f_0(x)|$ no depende de ε, podemos concluir que

$$|f_0(x)| \leq 1, \qquad \forall x \in V. \tag{3.11}$$

  Dicha desigualdad, prueba que f_0 es un funcional acotado en el vecindario abierto V de 0, satisfaciendo el literal c) del Teorema 2.24. Por lo que f_0 es τ_d continuo.

Hemos probado que f_0 es lineal y τ_d continuo, es decir, $f_0 \in X^*$. Además, anteriormente en (3.11), se probó que

$$|f_0(x)| \leq 1, \qquad \forall x \in V,$$

lo cual es la segunda condición para verificar que $f_0 \in P$. De esta forma, probamos la inclusión $\overline{P}^d \subseteq P$, y se garantiza que P es cerrado en τ_d.

Hemos probado que P es cerrado en τ_d. Ya que D es compacto en τ_d y $P \subseteq D$, por el Teorema (1.9), se tiene que P es compacto en τ_d.

Utilizando el Teorema 1.11, dado que P es compacto en τ_d y $P \subseteq P$, entonces P es compacto en τ_{d_P}; sin embargo, mostramos que $\tau_{d_P} = \tau_{w_P^*}$, por lo que P es compacto en $\tau_{w_P^*}$.

De nuevo, utilizando el Teorema 1.11, dado que P es compacto en $\tau_{w_P^*}$, se tiene que P es compacto en τ_{w^*}. Mostrando así, que el conjunto P es compacto en la topología débil-*. $\square$

Ahora que hemos demostrado el Teorema de Alaoglu, nos podemos preguntar si el resultado que este nos da se cumple para una bola de radio finito arbitrario, pues en $\mathbb{R}^n$, cualquier bola cerrada de radio finito $r > 0$ es compacta bajo la topología usual. Para responder a ello, tenemos el siguiente Corolario.

***Corolario* 3.4.** *Sea X un espacio vectorial topológico, τ su topología vectorial y $\mathbb{K}$ su campo de escalares. Si V es un vecindario abierto de 0 y $0 < r < \infty$ fijo, entonces el conjunto*

$$\overline{B_r}(0) = \{f \in X^* \ : \ |f(x)| \leq r, x \in V\},$$

es débil- compacto.*

Demostración. Del Teorema de Alaoglu se tiene que

$$P = \{f \in X^* \ : \ |f(x)| \leq 1, x \in V\},$$

es débil-* compacto, siempre que V sea un vecindario abierto de 0.

(X^*, τ_{w^*}) es un espacio vectorial topológico. Por la Proposición 2.13, la aplicación M_λ es un homeomorfismo para cada $\lambda \neq 0 \in \mathbb{K}$ fijo, la cual se define como

$$M_\lambda : (X^*, \tau_{w^*}) \longrightarrow (X^*, \tau_{w^*})$$

$$x \longmapsto \lambda x.$$

Al ser un homeomorfismo, $M_\lambda(P)$ es continuo. Por el Teorema 1.10, dado que $P \subseteq X^*$ es compacto bajo la topología débil-*, se tiene que M_λ es compacto en la topología débil-*. Además, notamos que

$$\begin{aligned} M_\lambda(P) &= \lambda P \\ &= \{f \in X^* \ : \ f \in \lambda P\} \\ &= \{f \in X^* \ : \ \frac{1}{\lambda} f \in P\} \\ &= \{f \in X^* \ : \ \left|\frac{1}{\lambda} f(x)\right| \leq 1, x \in V\} \\ &= \{f \in X^* \ : \ |f(x)| \leq \lambda, x \in V\} \\ &= \overline{B_\lambda}(0). \end{aligned}$$

Dicha igualdad, nos permite concluir que $\overline{B_\lambda}(0)$ es compacto bajo la topología débil-*. $\square$

El Teorema de Alaoglu es de suma importancia, pues nos permite conocer bajo qué condiciones una bola cerrada de radio finito en un espacio dual de cualquier dimensión, es compacta. Se pudo comprobar que esto sucede cuando el dual se trabaje con la topología débil -* y el espacio al que se le calcule el dual, sea un espacio vectorial topológico; esta compacidad no se cumple de forma general en espacios de dimensión infinita y es por ello nuestro interés en probarlo. Al probar esta versión, garantizamos que dicha propiedad se cumple en espacios conocidos, tales como: espacios normados, espacios métricos, espacios de Hilbert, entre otros. Esto es debido, a que los espacios mencionados anteriormente son espacios vectoriales topológicos. A continuación, haremos una particularización del Teorema de Alaoglu para espacios normados.

***Teorema* 3.12** (Banach-Alaoglu)**.** *Si X es un espacio normado, entonces la bola cerrada unitaria,*

$$B(X^*) = \{f \in X^* \ : \ \|f\|_{op} \leq 1\},$$

es compacta en la topología débil-.*

Demostración. Por la Proposición 2.10, tenemos que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial topológico, donde su topología vectorial es la topología inducida por la norma y $\mathbb{K}$ es su campo de escalares. Por el Teorema de Alaoglu 3.11, ya que la bola abierta unitaria $B_1(0)$ es un vecindario abierto de 0, se cumple que el polar de $B_1(0)$,

$$P = \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1, x \in B_1(0)\},$$

es compacto en la topología débil -*. Lo que haremos será probar que $P = B(X^*)$, lo haremos por doble inclusión.

a) " $\subseteq$ " Sea $f \in P$. Por definición, se cumple que

$$|f(x)| \leq 1, \quad \text{siempre que} \quad x \in B_1(0).$$

Ya que X es un espacio normado, podemos definir la norma operador $\|f\|_{\text{op}}$. Obteniendo que

$$|f(x)| \leq 1, \quad \forall x \in B_1(0) \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)| \leq 1.$$

Lo anterior, prueba que $\|f\|_{\text{op}} \leq 1$. Por otro lado, ya que $f \in P$, tenemos que $f \in X^*$. Con estas dos condiciones, se verifica que $f \in B(X^*)$.

b) " $\supseteq$ " Sea $f \in B(X^*)$. Por definición, $f \in X^*$ y $\|f\|_{\text{op}} \leq 1$. Ya que X es un espacio normado, f es lineal y acotado; tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \|f\|_{\text{op}} \|x\| \\ &\leq \|x\|, \qquad \forall x \in B_1(0) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

De esta forma se prueba que $f \in P$.

Hemos probado $P = B(X^*)$, por lo que $B(X^*)$ es compacto en la topología débil -* de X.
□

El Teorema de Alaoglu tiene diversos resultados inmediatos, los cuales resultan al dotar a nuestro espacio vectorial topológico con alguna propiedad en especial.

***Teorema* 3.13.** *Sea X un espacio vectorial topológico separable. Si V un vecindario abierto de 0 y P es el polar de V, entonces P es metrizable en la topología débil-*.*

Demostración. Por definición, ya que X es separable, contiene un subconjunto denso contable. Tomemos $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, como nuestro conjunto denso contable; de este modo, $\overline{A} = X$.

Al espacio X^* lo trabajaremos con la topología débil-*, recordemos que esta es la $\mathscr{F}$-topología de X^*, donde $\mathscr{F}$ se define como

$$\mathscr{F} = \{g_x \in X^{**} \mid g_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}\}.$$

Por definición de la topología débil-*, se tiene que $g_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ es débil-* continuo (Ver proposición 3.2); en particular, lo anterior se cumple para las evaluaciones puntuales g_{x_n}. En consecuencia, $\{g_{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión densa en X^{**}, ya que la aplicación canónica C, relaciona los elementos de X con los elementos de X^{**} mediante la evaluación puntual.

Ahora probaremos que la sucesión $\{g_{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ separa puntos de X^*, esto lo haremos por contra recíproca.

Sean $f, f' \in X^*$. De este modo, existe $g_{x_n}, n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} g_{x_n}(f) &= g_{x_n}(f') \\ f(x_n) &= f'(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Con lo anterior, probamos que $f = f'$ en el conjunto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Por la densidad de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, se tiene que $\overline{A} = X$. En consecuencia, para todo $x \in X$, existe una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$ tal que

$$x_k \longrightarrow x, \qquad k \to \infty.$$

Por el Teorema 1.5, utilizando la continuidad de f y f', tenemos que

$$\begin{aligned} f(x_k) &\longrightarrow f(x), \quad k \to \infty, \\ f'(x_k) &\longrightarrow f'(x), \quad k \to \infty. \end{aligned}$$

Anteriormente, se probó que $f'(x_n) = f(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$; en particular, dicha igualdad se cumple para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por lo anterior, tenemos que las sucesiones $\{f'(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathbb{K}$ son iguales. En consecuencia, por la unicidad del límite, $f(x) = f'(x)$. Lo anterior, se mostró para cualquier $x \in X$, así que, $f = f'$. Luego, $\{g_{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ separa puntos de X^* y por ende separa puntos de P.

Por el Teorema 3.7, dado que P es débil-* compacto y $\{g_{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas que separa puntos de P, se tiene que P es metrizable en la topología débil-*. Por tanto, se obtiene lo deseado. $\square$

Nota. Un conjunto $B \subseteq X^*$, decimos que es secuencialmente débil-* compacto, si toda sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B$ posee una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$f_{n_k} \xrightarrow{w*} f, \quad k \to \infty, \qquad f \in B.$$

***Teorema* 3.14** (Teorema de Helly)**.** *Si X un espacio vectorial topológico separable y V un vecindario abierto de 0, entonces el conjunto,*

$$P = \{f \in X^* \ : \ |f(x)| \leq 1, x \in V\}$$

es secuencialmente débil- compacto en X^*.*

Demostración. Por el Teorema de Alaoglu 3.11, P es compacto en la topología débil-*. Luego, utilizando el hecho que X es un espacio separable, del Teorema 3.13, tenemos que P es metrizable en la topología débil-*.

Por el Teorema 1.12, en los espacios metrizables la compacidad coincide con la compacidad secuencial. En consecuencia, si P es débil-* compacto, entonces P es secuencialmente débil-* compacto, que es lo que deseábamos demostrar. $\square$

***Teorema* 3.15** (Teorema de Helly generalizado)**.** *Si X es un espacio vectorial topológico separable, V es un vecindario abierto de 0 y $0 < r < \infty$ fijo, entonces el conjunto*

$$P = \{f \in X^* \ : \ |f(x)| \leq r, x \in V\},$$

es secuencialmente débil- compacto en X^*.*

Demostración. La prueba es análoga a la prueba del Teorema de Helly 3.14, solo que en lugar de aplicar el Teorema de Alaoglu 3.11, se utiliza el corolario 3.4. $\square$

Con este resultado, finalizamos la sección del Teorema de Alaoglu, donde hemos podido ver de primera mano el Teorema, así como resultados inmediatos. En el siguiente capítulo, vamos a estudiar aplicaciones del Teorema de Alaoglu, donde usaremos el teorema como tal y un resultado inmediato: el Teorema de Helly.

Capítulo 4

Aplicaciones del Teorema de Alaoglu

"Lo que sabemos es poco. Lo que no sabemos es inmenso"

-Pierre Simon Laplace.

En este capítulo estudiaremos diversas aplicaciones del Teorema de Alaoglu, la primera que estudiaremos está altamente relacionada con el Álgebra; posteriormente, veremos una aplicación relacionada con las funciones armónicas y con el Núcleo de Poisson.

4.1. Transformada de Gelfand

En esta primera sección veremos la aplicación relacionada con Álgebra; para ello, introduciremos algunos conceptos nuevos con el fin de poder explicar de mejor manera dicha aplicación; la cual seguiremos de [8], Capítulo 10 y 11, páginas 245-254, 275-281.

4.1.1. Teoría preliminar

Definición 4.1 (Álgebra compleja)**.** Un **álgebra compleja** es un espacio vectorial A sobre $\mathbb{C}$ tal que para todo $x, y,\ z \in A$ y para todo escalar $\alpha \in \mathbb{C}$, la multiplicación satisface:

a) $x(yz) = (xy)z$.

b) $(x + y)z = xz + yz$.

c) $x(y + z) = xy + xz$.

d) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

Definición 4.2 (Álgebra conmutativa)**.** Sea A un álgebra compleja, se dice que es **conmutativa** si

$$xy = yx, \qquad \forall x, y \in A.$$

Definición 4.3 (Álgebra de Banach)**.** Sea A un espacio de Banach el cual es un álgebra compleja con respecto a la norma. Si A satisface que para todo $x, y \in A$:

- $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.
- Existe $e \in A$ tal que $xe = ex = x$, con $\|e\| = 1$.

Entonces decimos que A es un **álgebra de Banach compleja**; en particular, si A es un álgebra conmutativa, se dice que es un **álgebra de Banach compleja conmutativa.**

Nota. En otros textos, cuando se dice que A es un álgebra de Banach compleja, no necesariamente se asume que dicha álgebra tiene un elemento identidad.

En particular, podemos relacionar las álgebras complejas con la noción de continuidad.

Nota. Cuando hablamos de continuidad de la multiplicación en un álgebra de Banach compleja conmutativa A, nos referimos a continuidad de la multiplicación tanto por la izquierda como por la derecha.

Proposición 4.1. Si A es álgebra Banach compleja, entonces la multiplicación inducida por la norma es continua en A.

Demostración. Probaremos la continuidad tanto por la derecha y por la izquierda.

Tomemos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ tal que

$$x_n \longrightarrow x, \quad n \to \infty.$$

Definamos el operador multiplicación por la derecha y por la izquierda como sigue,

$$\begin{aligned} M_{y_r} : A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto xy, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} M_{y_l} : A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto yx. \end{aligned}$$

Lo que haremos será probar que $M_{y_r}(x_n) \longrightarrow M_{y_r}(x), n \to \infty$, o equivalentemente, probaremos que $\|M_{y_r}(x_n) - M_{y_r}(x)\| \longrightarrow 0, n \to \infty$.

Por hipótesis, dado que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x, se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tal que si } n > N, \text{ entonces } \|x_n - x\| < \varepsilon,$$

en particular, al tomar y fijo, lo anterior se cumple para $\varepsilon_1 = \varepsilon/\|y\|$, donde $\varepsilon > 0$ es arbitrario. Sea $N \in \mathbb{N}$, y tomemos un natural $n > N$. Observemos que

$$\begin{aligned} \|M_{y_r}(x_n) - M_{y_r}(x)\| &= \|x_n y - xy\| \\ &\leq \|x_n - x\|\|y\| \\ &< \varepsilon_1 \|y\| \\ &< \frac{\varepsilon}{\|y\|}\|y\| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

con esto se prueba que

$$M_{y_r}(x_n) \longrightarrow M_{y_r}(x), \quad n \to \infty.$$

Por el Teorema 1.5, obtenemos que M_{y_r} es continua, pues A es metrizable; análogamente, se verifica que la multiplicación por la izquierda es continua. Concluyendo de esta forma, que la multiplicación inducida por la norma es continua. □

Definición 4.4 (Elemento invertible)**.** Sea A un álgebra compleja, cuyo elemento neutro multiplicativo está dado por e. Un elemento x en A se dice **invertible** si tiene un inverso, es decir, si existe un elemento x^{-1} en A tal que

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e.$$

Proposición 4.2. Los elementos inversos en un álgebra compleja A son únicos.

Ahora debemos dar otra definición que es muy utilizada en el álgebra abstracta, con ella nos referimos a los ideales; sin embargo, definiremos dicha noción para el caso de álgebras complejas conmutativas.

Definición 4.5 (Ideal)**.** Sea J un subconjunto de un álgebra compleja conmutativa A. J es un **ideal** si cumple que:

a) J es un subespacio vectorial de A.

b) $xy \in J$, siempre que $x \in A$, $y \in J$.

Si $J \neq A$, se dice que J es un **ideal propio**.

Definición 4.6 (Ideal maximal)**.** Sea J un ideal de un álgebra compleja conmutativa A. J se dice **maximal** si no existe un ideal propio $I \subseteq A$ tal que $J \subseteq I$.

Los ideales cumplen diversas propiedades muy importantes. A continuación se mencionan algunas de ellas.

Proposición 4.3. Sea A un álgebra de Banach compleja conmutativa.

a) J es un ideal propio si y solamente si no contiene ningún elemento invertible de A.

b) Si J es un ideal, entonces $\overline{J}$ es un ideal en A.

Demostración.

a) Por contrarrecíproca, deberíamos demostrar que J no es un ideal propio si y solamente si J contiene algún elemento invertible de A.

   " $\Longrightarrow$ " Dado que por hipótesis J no es un ideal propio, se tien que $J = A$. Por definición sucede que $e \in J$, donde e es el elemento neutro multiplicativo; pero e es en sí mismo un elemento invertible, garantizando de esta forma que existe un elemento invertible en J y verificando así la primera dirección.

   " $\Longleftarrow$ " Sea $y \in J$ un elemento invertible de A. Por definición de ideal, $J \subseteq A$.

   Sea $x \in A$. Dado que y es invertible, existe $y^{-1} \in A$ tal que $yy^{-1} = e$. De este modo,

$$x = x(yy^{-1}) = \underbrace{(yx)}_{\in J} y^{-1} \Longrightarrow x \in J.$$

   Probando así que $A \subseteq J$. Es decir, J no es un ideal propio.

b) Sea J un ideal. Por definición de cerradura, si $x \in \overline{J}$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq J$ tal que
$$x_n \longrightarrow x, \quad n \to \infty.$$
Dado que la multiplicación es continua, por el Teorema (1.5) tenemos que
$$x_n y \longrightarrow xy, \quad n \to \infty.$$
Además, si $y \in A$, entonces por la definición de ideal se tiene que $x_n y \in J$; por ello $\{x_n y\}_{n=1}^{\infty} \subseteq J$. Dado que hemos probado que converge a xy, se cumple que $xy \in \overline{J}$. Por lo tanto, $\overline{J}$ es un ideal.

□

***Teorema* 4.1.** *Si A un álgebra conmutativa compleja con un elemento neutro multiplicativo, entonces*

a) Todo ideal propio de A está contenido en un ideal maximal de A.

b) Si A es un espacio de Banach, entonces cada ideal maximal de A es cerrado.

Demostración.

a) Sea I un ideal propio de A. Es decir, $I \neq A$. Definamos a $\mathscr{P}$ como la colección de ideales propios en A que contienen a I. Dado que I se contiene a sí mismo, se verifica que $\mathscr{P}$ es distinto del vacío. Vale la pena mencionar que $\mathscr{P}$ es una colección parcialmente ordenada, con el orden dado por la inclusión.

Consideremos $\mathscr{C}$ una cadena totalmente ordenada con $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}$ y C la unión de todos los elementos de $\mathscr{C}$. Si $I \subseteq C' \in \mathscr{C}$, entonces $C' \subseteq C$; en consecuencia, $C \in \mathscr{P}$. Por definición $I \subseteq C$ y $C \neq A$. Así pues, C es una cota superior.

De momento, hemos demostrado que nuestra colección $\mathscr{P}$ cumple todas las hipótesis del lema de Zorn; por ello, garantizamos la existencia de un elemento maximal en $\mathscr{P}$, el cual denotamos por $C'' \in \mathscr{P}$ donde $I \subseteq C''$. Por tanto, todo ideal propio de A esta contenido en un ideal maximal de A.

b) Sea M un ideal maximal de A arbitrario. Por definición, $M \subseteq \overline{M}$; sin embargo, por la Proposición 4.3 literal b), sabemos que la cerradura de un ideal en un espacio de Banach también es un ideal. Así, $\overline{M}$ es un ideal que contiene a M; ahora bien, dada la maximalidad de M, debe suceder que $M = \overline{M}$. Probando así que cada ideal maximal de A es cerrado.

□

Ya que hemos estudiado un poco sobre álgebras de Banach e ideales, vamos a definir un homomorfismo que es una aplicación que va de un álgebra de Banach a otro objeto, la cual debe cumplir diversas propiedades.

Definición 4.7 (Homomorfismo complejo de A)**.** Definamos la siguiente aplicación que va de un álgebra de Banach compleja conmutativa A a los complejos

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Si para todo x, $y \in A$, $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple que:

a) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

b) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.

c) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Entonces a ϕ le llamaremos **homomorfismo complejo de A**.

Una propiedad que es bastante simple, pero que es de mucha utilidad es la siguiente.

Proposición 4.4. Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Si φ un homomorfismo complejo de A, entonces $\ker(\varphi)$ es un ideal de A.

Demostración. Sabemos que $\ker(\varphi)$ es un subespacio vectorial de A.

Tomemos $x \in A$, $y \in \ker(\varphi)$. Luego, $\varphi(y) = 0$. Así que

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x)0 = 0.$$

Lo anterior, garantiza que $xy \in \ker(\varphi)$. Por tanto, $\ker(\varphi)$ es un ideal de A. □

En este punto, es importante mencionar el siguiente conjunto. Denotamos por $\boldsymbol{\mu(A)}$, al conjunto de todos los homomorfismos complejos de A distintos del trivial. Es decir,

$$\mu(A) = \{\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \neq 0\}.$$

Proposición 4.5. Sea A un álgebra compleja con un elemento neutro multiplicativo. Si φ es un homomorfismo complejo de A distinto del trivial, entonces $\varphi(e) = 1$ y $\varphi(x) \neq 0$, para todo elemento invertible $x \in A$.

Demostración. Dado que $\varphi \neq 0$, tenemos que existe un $y \in A$ tal que $\varphi(y) \neq 0$. De este modo,

$$\varphi(y) = \varphi(ye) = \varphi(y)\varphi(e) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\varphi(y)}{\varphi(y)} = \varphi(e) \Longrightarrow 1 = \varphi(e).$$

Así que $\varphi(e) = 1$.

Tenemos que x es un elemento invertible, así que, $xx^{-1} = e$; en consecuencia,

$$\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) = 1.$$

La igualdad anterior, garantiza que $\varphi(x) \neq 0$ y $\varphi(x^{-1}) \neq 0$; de esta forma, se concluye que para todo elemento invertible x de A, $\varphi(x) \neq 0$. □

***Teorema* 4.2.** *Sea A un álgebra de Banach compleja y x un elemento de A. Si $\|x\| < 1$, entonces:*

a) $e - x$ *es invertible.*

b) $\left\|(e-x)^{-1} - e - x\right\| \leq \dfrac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$.

c) $|\varphi(x)| < 1$, *siempre que φ sea un homomorfismo complejo de A.*

Demostración.

1. Ya que A es un álgebra de Banach, se cumple que

$$\left\|x^2\right\| \leq \|x\|\|x\|.$$

En general, esto es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $\|x^n\| \leq \|x\|^n$.

Consideremos la sucesión $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$. Para probar que converge a 0, equivalentemente, podemos probar que $\{\|x^n\|\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Tomemos dos naturales n, N tales que $n > N > \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(\|x\|)}$. Dado que x está fijo, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(\|x\|)} &< n \\ \ln(\|x\|)n &< \ln(\varepsilon) \\ \ln(\|x\|^n) &< \ln(\varepsilon) \\ \|x^n\| \leq \|x\|^n &< \varepsilon \\ \|x^n\| &< \varepsilon, \end{aligned}$$

de esta forma, probamos que $\{\|x^n\|\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. Es decir,

$$x^n \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Por la convergencia anterior, al tomar $\varepsilon_1 = \varepsilon/n$, con $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\|x^n\| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Definamos la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $s_n = e + x + x^2 + \cdots + x^n$. Probaremos que dicha sucesión es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y $N \in \mathbb{N}$. Tomemos naturales m, n tales que $m > n > N$

$$\|s_n - s_m\| = \|x^m + \cdots + x^m\| \leq (m-n)\|x^m\| \leq m\|x^m\| \leq m\frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

En consecuencia, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, ya que estamos es un espacio de Banach, dicha sucesión es convergente. Así pues, existe $s \in A$ tal que

$$s_n \longrightarrow s, \quad n \to \infty.$$

Notamos que

$$s_n(e-x) = e + x + x^2 + \cdots + x^n - (x + x^2 + \cdots + x^{n+1}) = e - x^{n+1}.$$

Por la continuidad de la multiplicación, tenemos que si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a s, entonces

$$e - x^{n+1} = s_n(e-x) \longrightarrow s(e-x), n \to \infty.$$

Por otro lado,

$$e - x^{n+1} \longrightarrow e, \quad n \to \infty.$$

Notamos que las sucesiones, $\{e-x^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{s_n(e-x)\}_{n=1}^{\infty}$ son iguales. Por la unicidad del límite, debe ser que $s(e-x) = e$. Por lo tanto, $e - x$ es un elemento invertible.

2. Sea s el elemento invertible de $e-x$, es decir, $s = (e-x)^{-1}$. Consideremos la siguiente relación, donde s es el límite de la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida anteriormente, es decir, $s = x + x^2 + \cdots$. Por ello,

$$\begin{aligned}
\|s - e - x\| &= \left\|x^2 + x^3 + \cdots\right\| \\
&\leq \left\|x^2\right\| + \left\|x^3\right\| + \cdots \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x^n\| \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^{n+2} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n \|x\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n \\
&\leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}.
\end{aligned}$$

Lo cual nos lleva a probar que,

$$\left\|(e-x)^{-1} - e - x\right\| \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}.$$

3. Tenemos que $e - x$ es un elemento invertible. Así, dado $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \geq 1$, tenemos que $e - \lambda^{-1}x$ es un elemento invertible. Entonces debe suceder que

$$\varphi(e - \lambda^{-1}x) = \varphi(e) - \lambda^{-1}\varphi(x) = 1 - \lambda^{-1}\varphi(x) \neq 0,$$

esto es debido a la Proposición 4.5. Dicha igualdad, implica que

$$\lambda^{-1} \neq \varphi(x).$$

Lo anterior, demuestra que $\lambda \neq \varphi(x)$, lo cual implica que $|\varphi(x)| \leq 1$. Observemos, si sucediera lo contrario, sería una contradicción al hecho que $\lambda^{-1} \neq \varphi(x)$. De esta forma, hemos demostrado lo que se deseaba.

□

Un teorema que es de gran utilidad es el Teorema de Gelfand-Mazur, pues es la clave en la demostración de resultados muy importantes.

***Teorema* 4.3** (Gelfand-Mazur)**.** *Si A un álgebra Banach tal que todo elemento distinto de cero es invertible, entonces A es isométricamente isomorfo a los complejos.*

Demostración. La demostración de este teorema será omitida. Véase [8], Capítulo 10, Teorema 10.14, página 255. □

Otra estructura que es muy usual en el álgebra son los espacios cocientes, ahora estudiaremos que sucede con los espacios cocientes de álgebras de Banach, ¿se podrá realizar dicha construcción?

Proposición 4.6 (Cociente de álgebras)**.** Sea A un álgebra conmutativa de Banach, J un ideal propio cerrado de A. Si $\pi : A \longrightarrow A/J$ la aplicación cociente, entonces

a) A/J es un álgebra de Banach.

b) π es un homomorfismo.

Demostración. La demostración de esta proposición será omitida [8], Capítulo 11, Sección 11.4, página 276-277. □

***Teorema* 4.4.** *Si A es un álgebra compleja conmutativa, entonces todo ideal maximal de A es el núcleo de algún homomorfismo $\varphi \in \mu(A)$.*

Demostración. Sea M un ideal maximal de A. Sabemos que todo ideal maximal es cerrado; por el Teorema 4.6, se sigue que A/M es un álgebra de Banach.

Sea $x \in A/M$. De este modo, tomemos un $x \in A$ tal que $x \notin M$. Ahora definamos

$$J = \{ax + y : a \in A, y \in M\}. \tag{4.1}$$

Vamos a verificar que J es un ideal que depende de la elección de x.

- Sean $v, w \in J$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $v = a_1x + y_1$, $w = a_2x + y_2$, donde $a_1, a_2 \in A$, $y_1, y_2 \in M$. Entonces

$$\begin{aligned}\alpha v + \beta w &= \alpha(a_1x + y_1) + \beta(a_2x + y_2)\\ &= (\alpha a_1 + \beta a_2)x + \alpha y_1 + \beta y_2.\end{aligned}$$

  Dado que A es un espacio vectorial, tenemos que $(\alpha a_1 + \beta a_2) \in A$; así mismo, M es un subespacio vectorial, por lo que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in M$. De esta forma, se garantiza que $\alpha v + \beta w \in J$. Por lo tanto, J es un subespacio vectorial de A.

- Sean $x' \in A$, $v \in J$ tal que $v = ax + y$. Notemos que

$$\begin{aligned}x'v &= x'(ax + y)\\ &= x'ax + xy.\end{aligned}$$

  Dado que M es un ideal, se tiene que $xy \in M$. Además, ya que A es un espacio vectorial, se cumple que $x'a \in A$. De esta forma, $x'v \in J$.

Así que J es un ideal, donde por construcción, $M \subseteq J$. Lo cual se puede verificar al tomar $a = e$, $x = 0$. Ahora bien, por la maximalidad de M, debe cumplirse que $J = A$; en particular, debe suceder

$$e = ax + y,$$

para algún $a \in A$, $y \in M$. Definamos la aplicación cociente

$$\pi : A \longrightarrow A/M, \tag{4.2}$$

al evaluar el elemento e en π, tenemos que

$$1 = \pi(e) = \pi(ax + y) = \pi(ax) = \pi(a)\pi(x).$$

Eso significa que $\pi(x) \neq 0$. Ahora, por el Teorema Gelfand Mazur 4.3 y el hecho de que A/M un álgebra de Banach, se tiene que $\pi(x)$ es un elemento invertible para todo $x \in A/M$; en consecuencia, hay un isomorfismo de A/M a los complejos.

Sea $j : A/M \longrightarrow \mathbb{C}$ un isomorfismo a los complejos. Al hacer la composición con la aplicación cociente $\pi : A \longrightarrow A/M$, la cual es un homomorfismo, tenemos que $\varphi = j \circ \pi$ es un homomorfismo. La aplicación φ se define como

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C},$$

así que, $\varphi \in \mu(A)$.

Ahora analicemos la siguiente igualdad de conjuntos

$$\begin{aligned}
\ker(\varphi) &= \{a' \in A : \varphi(a) = 0\} \\
&= \{a' \in J : (j \circ \pi)(a) = 0\} \text{ (pues se mostró que } J = A) \\
&= \{ax + y \in J : j(\pi(ax + y)) = 0, a, x \in A, y \in M\} \\
&= \{ax + y \in J : \pi(ax + y) = 0, a, x \in A, y \in M\} \\
&= \{ax + y \in J : \pi(ax) = 0, a, x \in A, y \in M\} \\
&= \{ax + y \in J : ax = 0, a, x \in A, y \in M\} \\
&= \{y \in J : y \in M\} \\
&= M.
\end{aligned}$$

Hemos mostrado que $\ker(\varphi) = M$; de esta forma, se garantiza que cada ideal maximal de A se corresponde con el núcleo de un homomorfismo complejo, $\varphi \in \mu(A)$. □

4.1.2. Transformada de Gelfand

Definición 4.8 (Transformada de Gelfand con respecto a x)**.** Sea A un álgebra de Banach compleja. El siguiente funcional $\widehat{x}$

$$\begin{aligned}
\widehat{x} : \mu(A) &\longrightarrow \mathbb{C} \\
\varphi &\longmapsto \widehat{x}(\varphi) = \varphi(x)
\end{aligned}$$

es la evaluación puntual de x, a este le llamaremos **transformada de Gelfand con respecto a x**.

Ya hemos definido la transformada de Gelfand con respecto a un punto x, donde $x \in A$ y A es un álgebra de Banach compleja conmutativa; a continuación, vamos a definir la transformada de Gelfand sobre un álgebra de Banach.

Definición 4.9 (Transformada de Gelfand)**.** Sea A un álgebra de Banach compleja conmutativa y $\widehat{x}$ es la transformada de Gelfand con respecto a $x \in A$. A la colección de todas las transformadas de Gelfand con respecto a x la denotaremos por $\widehat{A}$, y esta dada por

$$\widehat{A} = \{\widehat{x} \;\;:\;\; x \in A\}.$$

A la aplicación

$$\begin{aligned}
\phi : A &\longrightarrow \widehat{A} \\
x &\longmapsto \widehat{x},
\end{aligned}$$

le llamamos la **transformada de Gelfand con respecto a A**.

Una vez definida la transformada de Gelfand, con ella vamos a definir la **topología de Gelfand**, la cual viene a ser una topología débil.

Definición 4.10 (Topología de Gelfand)**.** Sea A un álgebra de Banach compleja conmutativa y $\widehat{A}$ es la colección de todas las transformadas de Gelfand con respecto a un punto $x \in A$. A la $\widehat{A}$-topología de $\mu(A)$ le llamamos **topología de Gelfand con respecto a $\mu(A)$**.

De la definición de $\mathscr{F}$-topología débil (ver (3.3)), **la $\widehat{A}$-topología de $\mu(A)$** es la topología más débil donde la **transformada de Gelfand con respecto a** x, denotada por $\widehat{\boldsymbol{x}}$, es continua. Sea $C(\mu(A))$ el espacio de todas las funciones continuas que van de $\mu(A)$ a $\mathbb{C}$. Es evidente que $\widehat{A} \subseteq C(\mu(A))$, pues dado que los caracteres de $\mu(A)$ son $\widehat{A}$-continuos, estos preservaran la continuidad siempre que el dominio posea una topología más fuerte.

Anteriormente, en el Teorema 4.4, a), mostramos que existe una correspondencia uno a uno entre los ideales maximales de A y los homomorfismos $\varphi \in \mu(A)$; con ello, damos paso a la siguiente definición.

Definición 4.11 (Espacio ideal maximal)**.** Sea A un álgebra de Banach conmutativa compleja. Al dotar al espacio $\mu(A)$ con la topología de Gelfand, denotada por τ_G, el siguiente espacio topológico $(\mu(A), \tau_G)$ es llamado espacio de **ideales de maximales de A**.

Hasta este momento hemos definido la transformada de Gelfand, la cual relaciona la topología débil con diversos elementos del Análisis Funcional, donde la estructura sobre la cual se trabaja son álgebras de Banach conmutativas complejas; vale la pena mencionar que la teoría de la topología débil-* ha sido de suma importancia en el Capítulo 2 y que fue una parte fundamental para la demostración del Teorema de Alaoglu 3.11. Con todo lo mencionado anteriormente, finalmente podemos enunciar una aplicación del Teorema de Alaoglu.

***Teorema* 4.5.** *Si A un álgebra de Banach compleja conmutativa, entonces $(\mu(A), \tau_G)$ es un espacio de Hausdorff y compacto.*

Demostración. Sea A un álgebra de Banach compleja conmutativa. Por el Teorema 2.18, se tendrá que A^* es un espacio de Banach.

Del Teorema de Alaoglu 3.11, sabemos que al dotar a A^* con su topología débil-*, se cumple que el polar de la bola unitaria $B_1(0)$,

$$P = \{f \in A^* : |f(x)| \leq 1, x \in B_1(0)\},$$

es compacto en la topología débil-*.

Sea $\varphi \in \mu(A)$ un homomorfismo arbitrario, el cual tiene la forma $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$. En consecuencia, $\varphi \in A^*$.

Utilizando la hipótesis que A es un álgebra de Banach, si $x \in B_1(0)$, entonces $\|x\| < 1$; aplicando el literal c) del Teorema 4.2, tenemos que

$$|\varphi(x)| < 1.$$

Lo cual verifica que $\mu(A) \subseteq P$.

Deseamos probar que $\mu(A)$ es un espacio compacto y de Hausdorff bajo la topología de Gelfand. Recordemos que la topología de Gelfand es la $\widehat{A}$-topología de $\mu(A)$, donde

$$\widehat{A} = \{\widehat{x} \;\; : \;\; x \in A\}$$

En su lugar, lo que haremos será verificar dichas propiedades bajo la topología débil-* de A^* y luego lo probaremos para la topología de Gelfand; para ello recordemos la definición de topología débil-*, que es la $\mathscr{F}$-topología de A^*, donde

$$\mathscr{F} = \{g_x \in A^{**} \;\; : \;\; x \in A\}.$$

a) $\mu(A)$ es **Hausdorff** bajo la topología de Gelfand.

Sabemos que la familia $\widehat{A}$ separa puntos, esto por la Proposición 2.28. Por el Teorema 3.6, al dotar a $\mu(A)$ con la $\widehat{A}$- topología de $\mu(A)$, se tiene que $\mu(A)$ es un espacio de Hausdorff bajo la $\widehat{A}$- topología. Es decir, $\mu(A)$ es un espacio de Hausdorff bajo la topología de Gelfand.

b) $\mu(A)$ es **compacto** bajo la topología débil-* de A.

Para probar la compacidad débil-* de $\mu(A)$, verificaremos que es débil-* cerrado; para ello, demostraremos que $\mu(A) = \overline{\mu(A)}^{\tau_{w^*}}$.

- " $\subseteq$ " Por definición de cerradura tenemos que $\mu(A) \subseteq \overline{\mu(A)}^{\tau_{w^*}}$.
- " $\supseteq$ " Sea $f_0 \in \overline{\mu(A)}^{\tau_{w^*}} \subseteq A^*$. Debemos verificar que f_0 es un homomorfismo complejo y que existe un $x \in A$ tal que $f_0(x) \neq 0$.

  Para ver que f_0 es un homomorfismo debemos verificar las siguientes condiciones para todo x, $y \in A$:

  a) $f_0(x+y) = f_0(x) + f_0(y)$.
  b) $f_0(\alpha x) = \alpha f_0(x)$.
  c) $f_0(xy) = f_0(x) f_0(y)$.

  Por definición, como $f_0 \in A^*$, se tiene que es lineal; lo cual verifica las condiciones *a*) y *b*).

Para probar la condición c), se debe demostrar que $f_0(xy) = f_0(x)f_0(y)$, o equivalentemente, $f_0(xy) - f_0(x)f_0(y) = 0$.

Para comenzar, fijemos $x,\ y \in A$, $\varepsilon > 0$, con estos tres elementos definamos el conjunto

$$A_j = \{x, y, xy, e\}, \quad A_j \in \mathscr{A}_4.$$

Con este conjunto definimos el siguiente vecindario abierto débil-* de f_0 en A^*,

$$W_{A_j} = \{f \in A^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, x_i \in A_j\}.$$

Puesto que $f \in \overline{\mu(A)}^{\tau_{w^*}}$, todo vecindario abierto W de f_0, se cumple que $W \cap \mu(A) \neq \emptyset$. En consecuencia, debe suceder que

$$W_{A_j} \cap \mu(A) \neq \emptyset.$$

Por lo que existe un elemento $g \in A^*$ tal que $g \in W_{A_j} \cap \mu(A)$.

Definamos $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{(1 + |g(x)| + |f_0(y)|)}$, donde g, f_0, x son elementos fijos dados anteriormente; teniendo esto en cuenta, definimos siguiente vecindario abierto débil-* de f_0

$$W'_{A_j} = \{f \in A^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon', x_i \in A_j\}.$$

Análogamente, por definición de cerradura, tenemos que

$$W'_{A_j} \cap \mu(A) \neq \emptyset.$$

Tomemos $g \in W'_{A_j} \cap \mu(A)$, y notemos que $g \in W_{A_j}$. Por definición g, es un homomorfismo y con ello tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
|f_0(xy) - f_0(x)f_0(y)| &= |f_0(xy) - g(xy) + g(xy) - f_0(x)f_0(y)| \\
&\leq |f_0(xy) - g(xy)| + |g(xy) - f_0(x)f_0(y)| \\
&\leq |f_0(xy) - g(xy)| + |g(x)g(y) - f_0(x)f_0(y)| \\
&< \varepsilon' + |g(x)g(y) - f_0(y)g(x) + f_0(y)g(x) - f_0(x)f_0(y)| \\
&\leq \varepsilon' + |g(y) - f_0(y)||g(x)| + |g(x) - f_0(x)||f_0(y)| \\
&< \varepsilon' + \varepsilon'|g(x)| + \varepsilon'|f_0(y)| \\
&< (1 + g(x) + f_0(y))\varepsilon' \\
&< (1 + g(x) + f_0(y))\frac{\varepsilon}{(1 + |g(x)| + |f_0(y)|)}
\end{aligned}$$

Ahora bien, como la última desigualdad estricta se cumple para todo $\epsilon > 0$ y el elemento $|f_0(xy) - f_0(x)f_0(y)|$ no depende de ϵ, entonces se puede concluir que

$$|f_0(xy) - f_0(x)f_0(y)| \leq 0.$$

En consecuencia, $|f_0(xy) - f_0(x)f_0(y)| = 0$; es decir, $f_0(xy) - f_0(x)f_0(y) = 0$, lo cual satisface la condición c).

De momento, hemos garantizado que f_0 cumple con ser un homomorfismo; sin embargo, nos falta verificar que $f_0 \neq 0$, es decir, que no es el homomorfismo trivial.

Sea $e \in A$ el elemento identidad y $g \in W_{A_j} \cap \mu(A)$, como fue definido anteriormente, al ser g un homomorfismo, $g(e) = 1$. Notemos que

$$|1 - f_0(e)| = |g(e) - f_0(e)| < \varepsilon.$$

Ya que la desigualdad anterior se cumple para todo ε y la expresión $|1 - f_0(e)|$ no depende de ε, podemos concluir que

$$|1 - f_0(e)| \leq 0.$$

En consecuencia, $|1 - f_0(e)| = 0$; es decir, $1 - f_0(e) = 0$. Por tanto, $f_0(e) = 1$ y f_0 no es el homomorfismo trivial. De este modo, se tiene la segunda inclusión y por ende, se cumple que $\mu(A) = \overline{\mu(A)}^{\tau_{w^*}}$; es decir, que $\mu(A)$ es cerrado en la topología débil-* de A.

Por el Teorema de Alaoglu, P es compacto en la topología débil-* y $\mu(A) \subseteq P$ es cerrado en la topología débil-*, aplicando el Teorema 1.9, se concluye que $\mu(A)$ es débil -* compacto.

Denotemos por $\tau_{\mu(A)}$, si $\tau_{\mu(A)}$ es la topología de subespacio que hereda $\mu(A)$ de la topología débil-*. Por el Teorema 1.11, $\mu(A)$ es compacto bajo la topología $\tau_{\mu(A)}$, pues es compacto en la topología débil-*.

Ahora, lo que debemos hacer es verificar que $\mu(A)$ es compacto bajó la topología de Gelfand τ_G; para ello, probaremos que $\tau_G \subseteq \tau_{\mu(A)}$.

Sabemos que la topología τ_{w*}, es generada por la base

$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} g_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta) \;\middle|\; \mathcal{U}_\beta \in \tau_{\text{usual}} \right\}, \qquad x_i \in A.$$

Así, por el Lema 1.7, al ser $\tau_{\mu(A)}$ la topología de subespacio de $\mu(A)$, está es generada por la base

$$\mathscr{B}_{\mu(A)} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} (g_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta) \cap \mu(A)) \;\middle|\; \mathcal{U}_\beta \in \tau_{\text{usual}} \right\}, \qquad x_i \in A.$$

Por otro lado, la topología de Gelfand es generada por la base

$$\mathscr{B}_G = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \widehat{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta) \;\middle|\; : \mathcal{U}_\beta \in \tau_{\text{usual}} \right\}, \qquad x_i \in A.$$

Sea $B = \bigcap_{i=1}^{n} \widehat{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta)$ un básico arbitrario de $\mathscr{B}_G$. Por el lema 1.3, tenemos que para cada $x_i \in B$, se cumple que

$$\begin{aligned}
\widehat{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta) &= \{f \in \mu(A) : \widehat{x_i}(f) \in \mathcal{U}_\beta\} \\
&= \{f \in \mu(A) : f(x_i) \in \mathcal{U}_\beta\} \\
&= \{f \in A^* \cap \mu(A) : g_{x_i}(f) \in \mathcal{U}_\beta\} \\
&= \{f \in A^* : g_{x_i}(f) \in \mathcal{U}_\beta\} \cap \mu(A) \\
&= g_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta) \cap \mu(A).
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\bigcap_{i=1}^{n}(g_{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta) \cap \mu(A)) = \bigcap_{i=1}^{n} \widehat{x_i}^{-1}(\mathcal{U}_\beta).$$

Lo anterior nos dice que para todo básico $B \in \mathscr{B}_G$, existe un básico $B' \in \mathscr{B}_{\mu(A)}$ tal que $B = B'$ y $x \in B' \subseteq B$. De este modo, podemos concluir que $\tau_G \subseteq \tau_{\mu(A)}$.

Finalmente, por la Proposición 1.22, si $\mu(A)$ es compacto en $\tau_{\mu(A)}$, tenemos que $\mu(A)$ es compacto en τ_G. Por lo que el teorema queda demostrado. $\square$

4.2. El núcleo de Poisson en el disco unitario

En esta sección estudiaremos una segunda aplicación del Teorema de Alaoglu, la cual fue tomada de [3], Teorema 1.10, páginas 11-13; lo que haremos será utilizar algunos elementos básicos del Análisis Armónico y de Teoría de la Medida para relacionarlos entre sí; esto con la finalidad de dar una representación de las funciones armónicas con dominio sobre disco unitario, en términos de funciones del espacio medible de Lebesgue $L^p(\mathbb{T})$.

Para realizar lo mencionado anteriormente, vamos a analizar el espacio $L^p(\mathbb{T})$ y utilizaremos la convolución.

4.2.1. Fundamentos teóricos

Inicialmente, definiremos uno de los conjuntos más importantes sobre los cuales trabajaremos, **el disco unitario sobre** $\mathbb{C}$, denotado por $\boldsymbol{D}$

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subseteq \mathbb{C}.$$

A su frontera ∂D, la denotaremos por $\mathbb{T}$, donde

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} : \theta \in [-\pi, \pi]\} \subseteq \mathbb{C}.$$

De igual forma, vamos a definir los siguientes espacios,

$$C(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es continua}\},$$

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es } 2\pi \text{ periódica y continua}\}.$$

Proposición 4.7. Toda función $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ puede definir una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-periódica, tomando $g(x) = f(e^{ix})$; recíprocamente, toda función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-periódica define una función $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$, tomando $f(e^{ix}) = g(x)$. En otras palabras, existe una correspondencia biyectiva entre el espacio $C(\mathbb{T})$ y el espacio $C_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Demostración. Sea $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Definamos la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ e^{i\theta} &\longmapsto g(\theta), \end{aligned}$$

donde $f(e^{i\theta}) = g(\theta)$. Verifiquemos que f está bien definida.

Sean $e^{i\theta}, e^{i\theta'} \in \mathbb{T}$, con $\theta, \theta' \in [-\pi, \pi]$ tal que $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$. Dado que e^{ix} es una función 2π-periódica, entonces $\theta = \theta' + 2\pi$; g es una función 2π-periódica, así que,

$$g(\theta) = g(\theta' + 2\pi) = g(\theta').$$

Lo anterior, verifica que $f(e^{i\theta}) = g(\theta) = g(\theta') = f(e^{i\theta'})$. Probando de este modo que f está bien definida y se verifica que al tomar una función $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, podemos definir una función $f \in C(\mathbb{T})$.

Sea $f \in C(\mathbb{T})$. Definamos la función

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \tag{4.3}$$

$$x \longmapsto f(e^{ix}), \tag{4.4}$$

donde $g(x) = f(e^{ix})$. Probaremos que g está bien definida. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x = y + 2\pi$, sabemos que $e^{ix} = e^{iy}$, entonces $g(x) = f(e^{ix}) = f(e^{iy}) = g(y)$. De esta forma, probamos que g está bien definida y es 2π-periódica; es decir, se prueba que con la función $f \in C(\mathbb{T})$ podemos definir una función $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Por lo mostrado anteriormente, se garantiza que existe una correspondencia biyectiva entre los espacios $C(\mathbb{T})$ y $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ □

Definición 4.12 (Espacio de medida)**.** Sea X un conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ una sigma álgebra en X y μ una medida en X. La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ recibe el nombre de **espacio de medida**.

Definición 4.13 (Medida de probabilidad)**.** Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{A}$ una sigma álgebra de X. La función $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ es una **medida de probabilidad**, si verifica que:

1. $P(X) = 1$.

2. $P(A) \geq 0$, siempre que $A \in \mathcal{A}$.

3. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Una vez dada la definición de una medida de probabilidad, es natural definir un espacio de probabilidad.

Definición 4.14 (Espacio de probabilidad)**.** Sea X un conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ una sigma álgebra en X y P una medida de probabilidad. La terna $(X, \mathcal{A}, P)$ recibe el nombre de **espacio de probabilidad**.

Nota. Sea $\mathcal{A}$, la sigma álgebra de los conjuntos medibles de Lebesgue. Si $E \in \mathcal{A}$, entonces $m^*(E)$ denota la **medida exterior de Lebesgue** del conjunto E y $m(E)$ denota la **medida de Lebesgue** del conjunto E.

Definición 4.15. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, m)$ un espacio medible, donde $\mathcal{A}$ denota la σ-álgebra de los conjuntos medibles de Lebesgue y m denota la medida de Lebesgue. Sea $E \in \mathcal{A}$. Decimos que un conjunto F **es medible en** E, si $F = F' \cap E$, donde $F' \in \mathcal{A}$.

Ahora, que ya hemos definido un espacio de medida, otra definición que será de suma importancia son las funciones medibles.

Definición 4.16 (Función medible)**.** Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible. La función,

$$f : E \longrightarrow \mathbb{C}$$

es **medible**, si y solamente si para todo conjunto abierto A de $\mathbb{C}$, se cumple que $f^{-1}(A)$ es un conjunto medible en E.

El espacio de medida de los reales está dado por $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, m)$, donde $\mathcal{A}$ son los conjuntos medibles de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y m es la medida de Lebesgue; sin embargo, estamos interesados en una variación de dicho espacio, para ello analicemos lo siguiente. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, m)$ el espacio de medida de los reales y $[-\pi, \pi] \subseteq \mathbb{R}$. Denotaremos por $\mathcal{A}'$ a la σ-álgebra de los conjuntos medibles de Lebesgue en $[-\pi, \pi]$, la cual definimos como

$$\mathcal{A}' = \{A \cap [-\pi, \pi] : A \in \mathcal{A}\}.$$

Ahora definamos la medida de Lebesgue restringida a nuestro intervalo $[-\pi, \pi]$,

$$m' = m|_{\mathcal{A}'} = m^*|_{\mathcal{A}'},$$

donde

$$m' : \mathcal{A}' \longrightarrow [0, +\infty].$$

En otras palabras, $m'(E) = m(E) = m^*(E)$, siempre que $E \in \mathcal{A}'$; sin embargo, aún nos falta un paso más para obtener el espacio que es de nuestro interés (pues lo utilizaremos en nuestra aplicación). Como siguiente punto, vamos a normalizar la medida m', mediante la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \lambda : \mathcal{A}' &\longrightarrow [0,1] \\ E &\longmapsto \lambda(E), \end{aligned}$$

donde

$$\lambda(E) = \frac{m'(E)}{m'([-\pi,\pi])} = \frac{m'(E)}{m([-\pi,\pi])} = \frac{m'(E)}{m^*([-\pi,\pi])} = \frac{m'(E)}{2\pi}.$$

Nuestra medida se define como

$$\lambda(E) = \frac{m'(E)}{2\pi}.$$

Dado que m', es la restricción de la medida exterior de Lebesgue y la medida exterior, se cumplirá que

$$\lambda(E) = \frac{m'(E)}{2\pi} = \frac{m(E)}{2\pi} = \frac{m^*(E)}{2\pi}, \quad \text{siempre que} \quad E \in \mathcal{A}'.$$

Verificaremos que la función λ es una medida de probabilidad (Ver 4.13)

1. $$\lambda([-\pi,\pi]) = \frac{m'([-\pi,\pi])}{2\pi} = \frac{m^*([-\pi,\pi])}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

   Probando así el primer axioma.

2. Sea $E \in \mathcal{A}'$; al ser m la medida de Lebesgue tenemos que $m(E) \geq 0$. Además, $m(E) = m'(E)$, siempre que $E \in \mathcal{A}'$ y obtenemos que

   $$\begin{aligned} m(E) = m'(E) &\geq 0 \\ m'(E) &\geq 0 \\ \frac{m'(E)}{2\pi} &\geq 0 \\ \lambda(E) &\geq 0. \end{aligned}$$

   Probando así el segundo axioma.

3. Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}'$ una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos; también, sucede que $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$. Por propiedad de la medida de Lebesgue, se tiene que

   $$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

$\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, son una σ-álgebra, así que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad E \in \mathcal{A}'.$$

Aplicando m' al conjunto E, tenemos que

$$m'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(E_n).$$

Finalmente, obtenemos que

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \frac{1}{2\pi} m'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} m'(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m'(E_n)}{2\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Probando el tercer axioma, y verificando por completo que λ es una medida de probabilidad.

Definición 4.17 (Espacio de medida sobre $[-\pi,\pi]$)**.** Sea $[-\pi,\pi] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{A}'$ la σ-álgebra de los conjuntos medibles de Lebesgue en $[-\pi,\pi]$ y λ es una medida de probabilidad, donde $\lambda(E) = m(E)/2\pi$. A la terna $([-\pi,\pi], \mathcal{A}', \lambda)$ le llamamos espacio de medida sobre $[-\pi,\pi]$

Nota. A partir de este punto, cuando nos refiramos al espacio de medida $[-\pi,\pi]$ se refiera al espacio medible $([-\pi,\pi], \mathcal{A}', \lambda)$, donde $\mathcal{A}'$ son los espacios medibles de Lebesgue en $[-\pi,\pi]$ y λ es la medida definida como $\lambda(E) = \dfrac{m'(E)}{2\pi}$.

Una vez dados estos conceptos preliminares, podremos definir el espacio $L^p(X)$, que es el espacio de las funciones Lebesgue p integrables; dicho espacio, es uno de los espacios más importantes en Teoría de la Medida.

Definición 4.18 ($L^p(X)$)**.** Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $1 \leq p < \infty$ es un parámetro fijo. El espacio $L^p(X)$, se define como

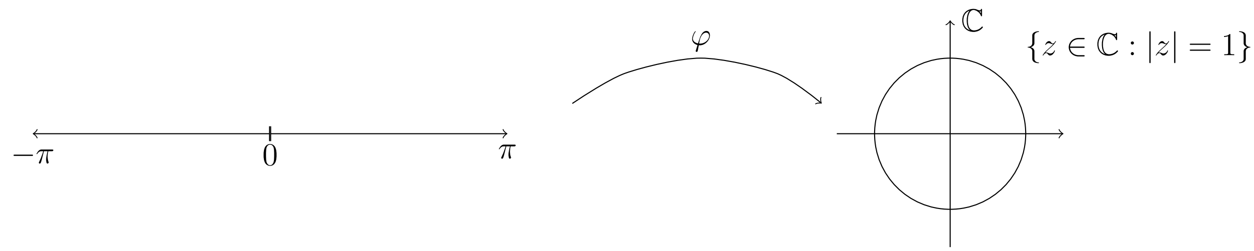
$$L^p(X) = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ es medible y } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Sobre dicho espacio definimos la norma p, dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Estos espacios también son conocidos como **espacios medible de Lebesgue**.

Proposición 4.8. El conjunto $\mathbb{T}$ lo podemos identificar con el intervalo $[-\pi, \pi]$.



En particular, nosotros estamos interesados en el espacio $L^p(\mathbb{T})$, el cual definimos a continuación.

Definición 4.19 (Espacio $L^p(\mathbb{T})$)**.** Sea $(\mathbb{T}, \mathcal{A}', \lambda)$ un espacio de medida y $1 \leq p < \infty$ un parámetro fijo. El espacio de las funciones medibles y Lebesgue p integrables, se define como

$$L^p(X) = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ es medible y } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

A dicho espacio lo dotamos con la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ahora, analicemos la integral $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\lambda$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} |f|^p d\lambda &= \int_{\mathbb{T}} |f|^p d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f|^p dm' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt. \end{aligned}$$

El espacio $L^p(\mathbb{T})$, se puede redefinir como

$$L^p(X) = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ es medible y } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

Por la proposición 4.7, toda función medible es continua; por otro lado, la función $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ induce una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ que es continua y 2π-periódica, entonces el espacio $L^p(\mathbb{T})$ lo podemos redefinir como

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ es medible, } 2\pi\text{-periódica y } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

Una vez hemos dado algunas definiciones y resultados básicos de Teoría de la Medida, vamos a dar algunos conceptos básicos de Análisis Armónico y de Análisis complejo. Iniciaremos definiendo la derivada parcial de una función complejo valuada.

Definición 4.20 (Derivada parcial)**.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Definamos una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ complejo valuada y su parte real e imaginaria, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. **La derivada parcial de f** con respecto a x e y se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4.6}$$

A continuación, vamos a definir la derivada compleja.

Definición 4.21. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función complejo valuada y $z \in \Omega$. La **derivada compleja de f en z** se define como,

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}.$$

Además, si el límite existe, decimos que **f es compleja diferenciable en z**.

Con estas dos definiciones, podremos definir el espacio de las funciones de clase C^k sobre los complejos.

Definición 4.22 (Espacio $C^k(\Omega)$)**.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ se denomina **$k-$ veces continuamente diferenciable**, si todas sus derivadas parciales de orden k existen y son continuas.

Al conjunto de todas las funciones complejo valuadas, k-veces continuamente diferenciables lo denotamos por $\boldsymbol{C^k(\Omega)}$, donde $k \in \mathbb{N}_0$.

Definición 4.23 (Función holomorfa)**.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Definamos la función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Si para cada $z \in \Omega$, f es compleja diferenciable, decimos es **holomorfa**.

Definición 4.24 (Función analítica)**.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. La función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es **analítica**, si su derivada existe y es continua.

Por definición, es evidente que toda función es holomorfa es analítica. A continuación, daremos el resultado de formalmente.

***Teorema* 4.6.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces f es analítica.*

Las funciones analíticas se pueden caracterizar de una forma muy particular. Utilizando el Teorema 4.6, damos una propiedad específica de las funciones holomorfas.

***Teorema* 4.7** (Función analítica)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica en Ω, entonces f puede representarse como una serie de Taylor; es decir,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \qquad \text{donde } a_n = f^{(n)}(z)|_a, \quad a, a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C},$$

para todo $z \in V$, donde V es un vecindario abierto de a en Ω.

Las funciones analíticas tienen cierta relación con las funciones infinitamente diferenciables; esto viene del hecho que pueden representarse como una serie de Taylor.

Proposición 4.9. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica en Ω, entonces f es de clase $C^{\infty}(\Omega)$.

De la serie de teoremas anteriores, finalmente concluimos con la siguiente propiedad.

***Teorema* 4.8.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces f es de clase $C^{\infty}(\Omega)$.*

Existe un par de ecuaciones que son de gran importancia en el Análisis Complejo, con ello nos referimos a las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

***Teorema* 4.9.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Consideremos una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donde u, v son las partes reales e imaginarias de f. Las siguientes ecuaciones:*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}, \tag{4.8}$$

*son conocidas como ecuaciones de **Cauchy-Riemann**.*

Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann podemos redefinir a las funciones holomorfas.

***Teorema* 4.10.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Consideremos la función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como*

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

donde $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. f es holomorfa si y solamente si u, v, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Finalmente, estamos listos para definir una función armónica complejo valuada, que son las funciones bajo las cuales se desarrollara nuestra aplicación.

Definición 4.25 (Función armónica)**.** Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{C}$. Una función

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C},$$

se dice **armónica**, si es de clase $C^2(\Omega)$ y satisface la ecuación,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{4.9}$$

Nota. La ecuación (4.9) es conocida como ecuación de Laplace.

Observación. Las derivadas parciales de la función f, se refieren a la derivada parcial de la parte real e imaginaria, las cuales están dadas en (4.5) y (4.6).

Una característica importante de las funciones armónicas y las funciones holomorfas, es el hecho que se relacionan entre sí. Para estudiar dicha relación, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.11. *Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{C}$. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces su parte real e imaginaria son funciones armónicas real valuadas.*

Demostración. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, la cual es de la forma

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$ y $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy))$; además, u y v son funciones real valuadas. Por el Teorema 4.10, garantizamos que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemman; es decir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x};$$

Por el Teorema 4.8, dado que $f(z) = u(z) + iv(z)$ es holomorfa, obtenemos que f es de clase $C^\infty(\Omega)$; en consecuencia, u y v son de clase $C^\infty(\Omega)$. Utilizando lo anterior, garantizamos que las derivadas parciales de segundo orden existen y son continuas, así que, las siguientes expresiones son válidas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial xy} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial yx}. \tag{4.11}$$

Al sumar las expresiones de (4.10) y (4.11) se concluye que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial xy} - \frac{\partial^2 u}{\partial yx} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.$$

De esta forma, hemos demostrado que las funciones u y v satisfacen la ecuación de Laplace (4.9); es decir, $u = \mathrm{Re}\,(f)$ y $v = \mathrm{Im}\,(f)$ son funciones armónicas real valuadas. □

***Corolario* 4.1.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces f es armónica.*

Demostración. Por hipótesis, f es una función holomorfa. Reescribimos a f como

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde $u(x, y) = \mathrm{Re}\,(f(x + iy))$ y $v(x, y) = \mathrm{Im}\,(f(x + iy))$. Ya que f es de clase $C^\infty(\Omega)$ las siguientes expresiones están bien definidas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Al sumar ambas expresiones obtenemos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). \end{aligned}$$

Por el Teorema 4.11, las funciones $u(x, y) = \mathrm{Re}\,(f(x + iy))$ y $v(x, y) = \mathrm{Im}\,(f(x + iy))$ son armónicas real valuadas, así que,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.$$

Utilizando lo anterior, tenemos la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esta forma, se ha probado que f es una función armónica, pues satisface la ecuación de Laplace y es de clase $C^2(\Omega)$. □

Otra cualidad muy importante de las funciones armónicas, es el hecho que la propiedad de ser armónica se preserva bajo traslaciones y homotecias.

Proposición 4.10. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función armónica.

a) Tomemos $z' \in \mathbb{C}$. La z'-traslación de f, definida como

$$\begin{aligned} f_z : \Omega + z' &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f_{z'}(z) = f(z - z'), \end{aligned}$$

es una función armónica.

b) Tomemos $r \in \mathbb{R}$, con $r > 0$. La r-homotecia de f, definida como

$$\begin{aligned} f_z : \frac{1}{r}\Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f_r(z) = f(rz), \end{aligned}$$

es una función armónica.

El siguiente resultado relaciona la antiderivada de una función holomorfa con una función del mismo tipo.

***Teorema* 4.12.** *Sea G un conjunto abierto, simplemente conexo en $\mathbb{C}$. Si $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces existe una función holomorfa, $F : G \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$F'(z) = f(z), \quad \forall z \in G.$$

Demostración. La demostración de este teorema será omitida. Véase [1], Capítulo 8, Sección 1, Teorema 8.5, página 111. □

Hasta este punto hemos analizado diversas propiedades de las funciones armónicas, por ejemplo, demostramos que toda función holomorfa es armónica; sin embargo, este resultado no es la única relación que hay entre este tipo de funciones.

***Teorema* 4.13.** *Sea G un conjunto abierto, simplemente conexo en $\mathbb{C}$. Definimos una función $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica real valuada si y solamente si existe una función holomorfa, $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$f = \operatorname{Re}(g) \qquad \text{en todo } G.$$

Demostración.
" $\Longleftarrow$ " Por hipótesis, $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa tal que $\operatorname{Re}(g) = f$, donde $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Por el Teorema 4.11, $\operatorname{Re}(g) = f$ es una función armónica real valuada (esta implicación es independiente del dominio de la función g).

" $\Longrightarrow$ " Tomemos una función armónica real valuada $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$, debemos encontrar una función holomorfa $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(g) = f$.

La función $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, es armónica, por ello satisface la ecuación de Laplace,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Definamos las siguientes funciones, $U : G \longrightarrow \mathbb{R}$ y $V : G \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$U = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad V = -\frac{\partial f}{\partial y},$$

con ellas definimos la función

$$\begin{aligned} h : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto h(z) = U(z) + iV(z). \end{aligned}$$

Derivando parcialmente, obtenemos que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Con la igualdad anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial y}. \end{aligned}$$

Es decir, se satisface una de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Análogamente, tenemos que

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Con ello, obtenemos que

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

garantizando que se satisface la segunda ecuación de Cauchy-Riemann. De momento, hemos probado que h satisface las ecuaciones de Cauchy Riemman; aplicando el Teorema 4.10, tenemos que h es una función holomorfa en G.

Aplicando el Teorema 4.12 a la función holomorfa

$$h : G \longrightarrow \mathbb{C},$$

garantizamos que existe una función holomorfa, $H : G \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$H' = h \qquad \text{en todo } G.$$

Ya que H es una función holomorfa, podemos reescribirla como

$$H(x+iy) = U_1(x,y) + iV_1(x,y),$$

donde $U_1(x,y) = \mathrm{Re}\,(H(x+iy))$, $V_1(x,y) = \mathrm{Im}\,(H(x+iy))$; además, H satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemman, es decir,

$$\frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial V_1(x,y)}{\partial x}. \tag{4.12}$$

Derivando H con respecto a x, se tiene que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + i\frac{\partial V_1}{\partial x},$$

sustituyendo (4.12), tenemos que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial U_1}{\partial x} - i\frac{\partial U_1}{\partial y}.$$

Finalmente, utilizando el hecho que $H' = h$ sucede que:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} - i\frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Al igualar las partes reales e imaginarias, tenemos que,

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Como siguiente punto, integraremos una de las expresiones anteriores

$$\int \frac{\partial U_1}{\partial x} dx = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx$$
$$U = f + c.$$

Definimos la función, $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g = f + iV_1$. Con todos estos elementos, tenemos que

$$\begin{aligned} g &= U_1 - c + iV \\ &= (U_1 + iV_1) - c \\ &= H - c. \end{aligned}$$

Hemos reescrito a g como una traslación de H; g es una función holomorfa, pues dicha propiedad se preserva bajo traslaciones. Finalmente, por construcción se tiene que $\mathrm{Re}\,(g) = f$, con ello probamos lo que se deseaba. $\square$

Una pregunta que nos podemos hacer es ¿por qué fue necesario introducir el término de función analítica? Con el siguiente resultado veremos la finalidad, la cual en pocas palabras es representar una función armónica con dominio simplemente conexo como una serie de Taylor.

Observación. El conjunto

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r < 1\},$$

es un conjunto abierto, simplemente conexo.

Proposición 4.11. Si $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función armónica, entonces f tiene una representación en series de Taylor de la forma,

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^{|n|} e^{in\theta}, \qquad \text{donde } re^{i\theta} \in D.$$

Demostración. Sea f una función armónica real valuada en un conjunto abierto, simplemente conexo; por el Teorema 4,13, existe una función holomorfa $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(g) = f$.

g es una función holomorfa, aplicando el Teorema 4.6, tenemos que g es analítica; en consecuencia, para $z_0 \in D$, se cumple que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D.$$

Donde D es un vecindario abierto de z_0; en particular, lo anterior se cumple para $z_0 = 0$, así que,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \text{ siempre que } z \in D.$$

Recordemos que $f = \operatorname{Re}(g)$; por otro lado, la parte real de un número complejo se define como

$$\operatorname{Re}(g) = \frac{g + \overline{g}}{2} \quad \Longrightarrow \quad f = \frac{g + \overline{g}}{2}.$$

Se sabe que todo complejo se puede reescribir como $z = re^{i\theta} = r\cos(\theta) + ir\operatorname{sen}(\theta)$, con $re^{i\theta} \in D$.

Analicemos la función f:

$$\begin{aligned} f &= \frac{g + \overline{g}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n + \frac{1}{2}\overline{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n (r^n \cos(n\theta) + ir^n \operatorname{sen}(n\theta))} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(r^n\cos(n\theta) + ir^n\operatorname{sen}(n\theta)) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\overline{b_n}(r^n\cos(n\theta) - ir^n\operatorname{sen}(n\theta)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(b_n + \overline{b_n})(r^n\cos(n\theta)) - \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(b_n + \overline{b_n})r^n\operatorname{sen}(n\theta)).
\end{aligned}
$$

Recordemos que f es una función real valuada, así que

$$\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(b_n + \overline{b_n})r^n\operatorname{sen}(n\theta)) = 0.$$

Utilizando lo anterior, redefinimos a f como

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(b_n + \overline{b_n})(r^n\cos(n\theta)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b_n + \overline{b_n})}{2}r^n(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Re}(b_n)r^n(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Re}(b_n)r^n e^{in\theta} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{0}\operatorname{Re}(b_n)r^{-n}e^{in\theta} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\operatorname{Re}(b_n)r^{|n|}e^{in\theta}.
\end{aligned}
$$

Tomando $a_n = \operatorname{Re}(b_n)$, tenemos que

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^{|n|}e^{in\theta},$$

obteniendo la expresión deseada. □

4.2.2. Aplicación en el Núcleo de Poisson

Antes de definir nuestra aplicación del Teorema de Alaoglu, es necesario que definamos el operador convolución; dicho operador transforma dos funciones g y f en una tercera función, la cual expresa la forma en la que f se modifica en términos de g y viceversa.

Definición 4.26 (Convolución)**.** Consideremos las funciones, $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$. La **convolución de f y g** se define como

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{T}} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau. \tag{4.13}$$

Lo que haremos en este momento será estudiar las funciones armónicas sobre el disco abierto unitario, el cual definimos anteriormente y denotamos por D; para ello iniciaremos definiendo el núcleo de Poisson, la cual es una función que es una pieza clave de este apartado.

Definición 4.27 (Núcleo de Poisson)**.** Sea $0 \leq r < 1$ un escalar fijo. La función

$$P_r(\theta) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida como

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}, \tag{4.14}$$

es llamada **núcleo de Poisson**.

Proposición 4.12. Para cada $0 \leq r < 1$ fijo, el núcleo de Poisson $P_r(\theta) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ posee una representación como serie de Taylor dada por

$$P_r(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Demostración. Tomando $0 \leq r < 1$ fijo, $-\infty < \theta < \infty$, notamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\theta})^n = \frac{1}{1 - re^{i\theta}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} = (1 + re^{i\theta}) \sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\theta})^n,$$

obteniendo que

$$\begin{aligned} \frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (re^{i\theta})^n \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (r^n \cos(n\theta) + ir^n \operatorname{sen}(n\theta)). \end{aligned}$$

Ahora analicemos la parte real de la expresión anterior,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{in\theta}) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{-in\theta}) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{in\theta}) + \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n} (e^{in\theta}) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} (e^{in\theta}). \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} &= \left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)\left(\frac{1-\overline{re^{i\theta}}}{1-\overline{re^{i\theta}}}\right)\\ &= \frac{1+re^{i\theta}-\overline{re^{i\theta}}-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2}\\ &= \frac{1+r\cos(\theta)+ir\operatorname{sen}(\theta)-\overline{r\cos(\theta)+ir\operatorname{sen}(\theta)}-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}\\ &= \frac{1+2ir\operatorname{sen}(\theta)-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}.\end{aligned}$$

Con las dos igualdades anteriores, se verifica que

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}.$$

De momento, hemos obtenido las siguientes igualdades:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}(e^{in\theta}) \quad \text{y} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2} = P_r(\theta).$$

Con ellas, se tiene que

$$P_r(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}(e^{in\theta}).$$

Que es la igualdad que se deseaba demostrar. □

En particular, las funciones armónicas real valuadas (o funciones armónicas complejo valuadas con su parte imaginaria nula) poseen una representación como una integral, la cual es similar a la convolución.

***Teorema* 4.14.** *Si $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $\mathbb{T}$, entonces existe una función continua $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

a) $g(z) = f(z)$ para $z \in \mathbb{T}$.

b) f es una función armónica real valuada en D.

Además, f es única y está definida por

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)g(e^{it}), \qquad \textit{para } re^{i\theta} \in D.$$

Demostración. La demostración de este teorema será omitida. Véase [2], Capítulo 10, Sección 2, Teorema 2.4, páginas 257-258. □

***Corolario* 4.2.** *Si* $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función continua armónica real valuada sobre* D*, entonces* f *se define como*

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it}), \qquad \textit{para } re^{i\theta} \in D.$$

Demostración. La demostración de este corolario será omitida. Véase [2], Capítulo 10, Sección 2, Corolario 2.9, Página 259. □

El resultado anterior lo podemos generalizar para el tipo de funciones armónicas que estamos estudiando, es decir, las funciones armónicas complejas valuadas.

***Teorema* 4.15.** *Si* $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ *es una función armónica, entonces* f *posee una representación en término del núcleo de Poisson, dada por*

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt, \qquad \textit{para } re^{i\theta} \in D.$$

Demostración. Sea f una función armónica, definida como $f = u + iv$, donde $u = \mathrm{Re}\,(f)$ y $v = \mathrm{Im}\,(f)$ son funciones armónicas real valuadas.

Sea $u : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, funciones continuas sobre $\overline{D}$; en particular, son funciones armónicas real valuadas sobre D. Por el Corolario 4.2, se cumple que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(e^{it})dt, \qquad \text{para } re^{i\theta} \in D,$$

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)v(e^{it})dt \qquad \text{para } re^{i\theta} \in D.$$

Para $re^{i\theta} \in D$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(e^{it})dt + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)v(e^{it})dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)(u(e^{it}) + iv(e^{it}))dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt. \end{aligned}$$

□

***Corolario* 4.3** (Integral de Poisson). *Sea f una función armónica sobre el toro*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ e^{i\theta} &\longmapsto f(e^{i\theta}). \end{aligned}$$

Si $\widetilde{f} : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función armónica tal que $\widetilde{f}|_{\mathbb{T}} = f$, entonces $\widetilde{f}$ puede ser representada como una convolución de la siguiente forma

$$\widetilde{f}(re^{i\theta}) = (P_r * \widetilde{f})(\theta), \qquad \textit{para } re^{i\theta} \in D.$$

A esta expresión se le conoce como la ***integral de Poisson****.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función armónica, se puede descomponer de la forma $f = u + iv$, donde $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$, son funciones armónicas real valuadas en $\mathbb{T}$ tal que

$$u : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{y} \quad v : T \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Por hipótesis, $\widetilde{f} : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función armónica, la cual se puede descomponer de la forma $\widetilde{f} = \widetilde{u} + i\widetilde{v}$, donde $\widetilde{u} = \operatorname{Re}(\widetilde{f})$, $\widetilde{v} = \operatorname{Im}(\widetilde{f})$; además, $\widetilde{u}$ y $\widetilde{v}$ son funciones continuas tal que

$$\widetilde{u} : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \widetilde{v} : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

En particular, se cumple que

$$f(z) = u(z) + iv(z) = \widetilde{u}(z) + i\widetilde{v}(z) = \widetilde{f}(z), \quad \text{siempre que } z \in \mathbb{T}.$$

Por el Teorema 4.14 se tiene que

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\widetilde{u}(e^{it})dt, \\ \widetilde{v}(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\widetilde{v}(e^{it})dt. \end{aligned}$$

Además $u(z) = \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(\widetilde{f(z)})$, $v = \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(\widetilde{f(z)})$ siempre que $z \in \mathbb{T}$, entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(re^{i\theta}) &= \widetilde{u}(re^{i\theta}) + i\widetilde{v}(re^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\widetilde{u}(e^{it})dt + i\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\widetilde{v}(e^{it})dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\widetilde{f}(e^{it})dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt \\ &= (P_r * f)(\theta). \end{aligned}$$

De esta forma, verificamos que $f(re^{i\theta}) = (P_r * f)(\theta)$, que es lo que deseábamos demostrar. $\square$

Proposición 4.13. Definamos el núcleo de Poisson, $P_r(\theta)$ para un escalar fijo $0 \leq r < 1$, entonces

1. $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = 1.$
2. $P_r(\theta)$, es mayor o igual que cero, continuo, una función par y 2π-periódica, siempre que $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Demostración.

1. Será r un escalar fijo tal que $0 \leq r < 1$. Analicemos la integral dada

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}(e^{in\theta})\right)d\theta.$$

En la demostración de la Proposición 4.12, se probó que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}(e^{in\theta}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n 2\cos(n\theta).$$

Sustituyendo dicha expresión en la ecuación anterior, y aplicando el Teorema de Convergencia dominada de Lebesgue se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos(n\theta)\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos(n\theta)\right)d\theta \\
&= 1 + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\int_{-\pi}^{\pi} r^n\cos(n\theta)\right)d\theta \\
&= 1 + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2r^n}{n}\cancelto{0}{[\operatorname{sen}(\pi n) - \operatorname{sen}(-\pi n)]}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Verificando que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = 1.$

2. Dado r fijo tal que $0 \leq r < 1$, definimos

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}.$$

Verifiquemos que $P_r(\theta)$ es continua. Por el tipo de función, será continua si

$$0 < 1 - 2r\cos(\theta) + r^2.$$

Sabemos que

$$\cos(\theta) \leq 1 \implies 2r\cos(\theta) \leq 2r.$$

Además, dado que $r < 1$, se tiene que $(1 - r^2) > 0$. Utilizando ambas desigualdades, tenemos que

$$\begin{aligned}
2r\cos(\theta) &\leq 2r \\
-2r\cos(\theta) &\geq -2r \\
1 + r^2 - 2r\cos(\theta) &\geq 1 + r^2 - 2r \\
1 + r^2 - 2r\cos(\theta) &\geq (1-r)^2 > 0 \\
1 + r^2 - 2r\cos(\theta) &> 0.
\end{aligned}$$

Probando que en efecto $P_r(\theta)$ es continua.

Para verificar que $P_r(\theta) \geq 0$, solo debemos probar que $0 \leq 1 - r^2$, pues ya se probó que el denominador es positivo. Veamos que

$$0 \leq r < 1 \quad \implies \quad 0 \leq r^2 < 1 \quad \implies \quad 0 \leq 1 - r^2.$$

De esta forma, se verifica que $0 \leq P_r(\theta)$.

Ahora, veamos que es una función par

$$P_r(-\theta) = \frac{1 - r^2}{1 + 2r\cos(-\theta) + r^2} = \frac{1 - r^2}{1 + 2r\cos(\theta) + r^2} = P_r(\theta).$$

Análogamente, se verífica que es 2π-periódica

$$P_r(\theta + 2\pi) = \frac{1 - r^2}{1 + 2r\cos(\theta + 2\pi) + r^2} = \frac{1 - r^2}{1 + 2r\cos(\theta) + r^2} = P_r(\theta).$$

Entonces se cumplen todas las propiedades deseadas. $\square$

Antes de ver el resultado más importante de esta sección, que es la aplicación del Teorema de Alagolu, enunciaremos un resultado que nos servira más adelante.

***Teorema* 4.16** (Teorema de representación de Riesz para el dual de $L^p(E)$)**.** *Sea E un conjunto de $\mathbb{R}$, Lebesgue-medible de medida finita, sean p y q, de forma que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Al tomar $1 \leq p < \infty$ fijo, para cada $\varphi \in (L^p(E))^*$ existe una función $g \in L^q(E)$ tal que*

$$\varphi(f) = \int_E f(t)g(t)dt, \qquad \textit{para todo } f \in L^p(E).$$

En consecuencia, $(L^p(E))^*$ es isomorfo a $L^q(E)$.

Demostración. La demostración de este teorema será omitida. Véase [4], Capítulo 19, Sección 2, página 400. □

En el Corolario 4.3, vimos que una función armónica se puede expresar como la convolución del núcleo de Poisson con una función armónica. En el siguiente resultado veremos que dicha convolución se preserva con una clase específica de funciones, y es aquí donde utilizaremos una consecuencia del Teorema de Alaoglu, específicamente el Teorema de Helly generalizado .

***Teorema* 4.17.** *Si f es una función armónica cuyo dominio es el disco unitario D,*

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ re^{i\theta} &\longmapsto f(re^{i\theta}), \end{aligned}$$

tal que

$$\sup_{0\leq r<1} \left\| f(re^{i\theta}) \right\|_p < \infty,$$

para algún $1 < p < \infty$ fijo. Entonces, existe una función $g \in L^p(\mathbb{T})$ tal que

$$f(re^{i\theta}) = (P_r * g)(\theta), \qquad \textit{siempre que} \quad re^{i\theta} \in D.$$

Demostración. Para esta demostración, tomaremos un p fijo arbitrario, de modo que $1 < p < \infty$.

Para comenzar recordemos la definición del espacio $L^p(\mathbb{T})$. Anteriormente, se estudió que se puede identificar de dos formas,

$$L^p(X) = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ es medible y } \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ es medible, } 2\pi\text{-periódica y } \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

Sea f una función armónica cuyo dominio es D, la cual definimos a continuación

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ re^{i\theta} &\longmapsto f(re^{i\theta}). \end{aligned}$$

Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente, donde $r_n = 1 - 1/n$, y satisface que $r_n \longrightarrow 1$, $n \to \infty$.

Utilizando la sucesión anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define la siguiente función:

$$g_n(\theta) = f(r_n e^{i\theta}), \text{ para } -\pi \leq \theta \leq \pi,$$

donde,

$$\begin{aligned} g_n : A_{r_n} &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ \theta &\longmapsto g_n(\theta) = f(r_n e^{i\theta}). \end{aligned}$$

$A_{r_n} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_n\}$ es el dominio de la función g_n. Lo que haremos en este punto será probar que $g_n \in L^p(\mathbb{T})$, para cada $n \in \mathbb{N}$; para ello verificaremos que g_n es medible y que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_n(t)|^p dt < \infty$.

- Verificando que g_n es medible.

  Dado que f es armónica, es continua; podemos observar, que g_n es una restricción del dominio de la función f, al conjunto $A_{r_n} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_n\}$. Por el Teorema 1.6, g_n es una función continua.

- Probando que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_n(t)|^p dt < \infty$.

  Notemos que al evaluar a f en los puntos del conjunto A_{r_n} obtenemos que

  $$f(r_n e^{i\theta}) = g_n(\theta), \qquad \theta \in A_{r_n},$$

  donde $0 \leq r_n < 1$; en consecuencia, se satisface que

  $$\|g_n(\theta)\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(r_n e^{it})\right|^p dt\right)^{1/p} \leq \sup_{0\leq r_n<1} \left\|f(r_n e^{i\theta})\right\|_p < \infty.$$

  En particular, para cada $0 \leq r_n < 1$ se tiene que

  $$\|g_n(\theta)\|_p \leq \sup_{0\leq r_n<1} \left\|f(r_n e^{i\theta})\right\|_p.$$

  Definiendo $M = \sup_{0\leq r_n<1} \left\|f(r_n e^{i\theta})\right\|_p \in \mathbb{R}$, se cumple que

  $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_n(t)|^p dt \leq M^p.$$

  Tomemos $M^p = M'$, entonces

  $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_n(t)|^p dt \leq M' \Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_n(t)|^p dt < \infty.$$

  Lo cual satisface la segunda condición para concluir que $g_n \in L^p(\mathbb{T})$.

Por otro lado, del Teorema 4.16 sabemos que el espacio dual de $L^q(\mathbb{T})$ es isomorfo a $L^p(\mathbb{T})$, siempre que $1 < p \leq \infty$; es decir

$$(L^q(\mathbb{T}))^* \cong L^p(\mathbb{T}).$$

Dado que p es el exponente conjugado de q, se cumple que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y si $1 < p < \infty$, entonces $1 < q < \infty$.

El espacio $L^q(\mathbb{T})$ es un espacio separable, pues $1 < q < \infty$ y $\mathbb{T}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$, Lebesgue medible y de medida finita, (para más detalles ver [4], Capítulo 7, Sección 4, Teorema 11, página 152).

Aplicando el Teorema de Helly generalizado 3.15 (resultado inmediato del Teorema de Alaoglu), si $L^q(\mathbb{T})$ es un espacio normado separable, entonces toda bola cerrada de radio finito en $(L^q(\mathbb{T}))^* \cong L^p(\mathbb{T})$ es secuencialmente débil-* compacta; así que, $\overline{B}_{M'}(0)$ es secuencialmente débil-* compacta.

Anteriormente, se probó que

$$\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \overline{B}_{M'}(0).$$

Ya que la bola cerrada $\overline{B}_{M'}(0)$ en $L^p(\mathbb{T})$ es secuencialmente débil-* compacta, la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ posee una subsucesión convergente $\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$; es decir,

$$g_{n_k} \xrightarrow{w^*} g, \quad k \to \infty, \quad \text{donde} \quad g \in \overline{B}_{M'}(0).$$

Por el isomorfismo $L^p(\mathbb{T}) \cong (L^q(\mathbb{T}))^*$, la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $g \in L^p(\mathbb{T})$ se se identifican con φ_n y $\varphi \in L^q(\mathbb{T})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Utilizando lo anterior, se obtiene que

$$g_{n_k} \xrightarrow{w^*} g, \quad k \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_{n_k} \xrightarrow{w^*} \varphi, \quad k \to \infty.$$

La segunda convergencia, significa que

$$\varphi_{n_k}(h) \longrightarrow \varphi(h), \quad k \to \infty, \text{ para todo } h \in L^q(\mathbb{T}),$$

esto por la definición de convergencia débil-* (Ver (3.2)).

En concreto, del Teorema de representación de Riesz 4.16, se obtiene que

$$\varphi_{n_k}(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t) g_{n_k}(t)dt \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)g(t)dt = \varphi(h), \qquad k \to \infty, \tag{4.15}$$

dicha convergencia se cumple para todo $h \in L^q(\mathbb{T})$.

Vamos a verificar que el núcleo de Poisson, satisface que $P_r(\theta) \in L^q(\mathbb{T})$. Por el Teorema 4.13, para $0 \leq r < 1$ fijo, se satisface que $P_r(\theta)$ es continuo, 2-π periódico y positivo; lo anterior, garantiza que $P_r(\theta) \in L^q(\mathbb{T})$ y por ende, $P_r(\theta - t) \in L^q(\mathbb{T})$.

Recordemos que la expresión (4.15) se cumple para todo $h \in L^q(\mathbb{T})$, en particular, se cumplirá para el núcleo de Poisson $P_r(\theta - t)$, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g_{n_k}(t)dt \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)g(t)dt, \qquad k \to \infty. \tag{4.16}$$

Dado que $f(re^{i\theta})$ una función armónica, su homotecia $f_{r_n}(re^{i\theta}) = f(r_n re^{i\theta})$, para $0 \leq r_n < 1$, sigue siendo una función armónica.

Dicha función f_{r_n}, se define como $f_{r_n} : \dfrac{1}{r_n} D \longrightarrow \mathbb{C}$, la cual es armónica sobre $\dfrac{1}{r_n} D$; en particular, será armónica sobre $\overline{D}$, pues $\overline{D} \subseteq \dfrac{1}{r_n} D$, ya que $1 \leq 1/r_n$.

Del Teorema 4.15, tenemos que una función armónica sobre la cerradura del disco unitario, se puede representar de la forma

$$f_{r_n}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f_{r_n}(e^{it}) dt, \qquad \text{para} \quad re^{i\theta} \in D, \quad 0 \leq r_n < 1.$$

Obteniendo que

$$\begin{aligned} f_{r_{n_k}}(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f_{r_{n_k}}(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(r_{n_k} e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g_{n_k}(t) dt. \end{aligned}$$

Así que el límite 4.16 nos queda definido como

$$f_{r_{n_k}}(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g_{n_k}(t) dt \quad \longrightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g(t) dt, \qquad k \to \infty. \tag{4.17}$$

Por otro lado, f es continua. Aplicando el Teorema (1.5), si

$$r_{n_k} \longrightarrow 1, \quad k \to \infty,$$

entonces

$$f_{r_{n_k}}(re^{i\theta}) = f(r_{n_k} re^{i\theta}) \longrightarrow f(re^{i\theta}), k \to \infty. \tag{4.18}$$

Finalmente por la unicidad del límite, dado que la subsucesión $\{f_{r_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a dos límites distintos (4.17), (4.18), se tiene que

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g(t) dt.$$

donde $g \in L^p(\mathbb{T})$. Probando de esta forma dicho Teorema. $\square$

Conclusiones

A continuación, se mencionan algunos de los aspectos más destacados del presente trabajo.

- De forma general, se pudo concluir que El Teorema de Alaoglu es un pilar de fundamental en diversas áreas de la Matemática, tales como: el Análisis Funcional, el Álgebra, entre otros. Por otro lado, en el Capítulo 4: Aplicaciones del Teorema de Alaoglu, se evidenció que dicho teorema, nos permite relacionar ramas de la Matemática, que a simple vista no parecen tener algo en común.

- La importancia de trabajar sobre espacios vectoriales topológicos, radica en el hecho, que los espacios clásicos de la matemática, por ejemplo: los espacios métricos, de Hilbert y normados, entran en esta categoría; es por ello, que al demostrar el Teorema de Alaoglu, garantizamos que dicho resultado se satisface, para una gran variedad de estructuras Matemáticas.

- Al definir las topologías débil y débil-*, observamos una relación entre el Análisis Funcional y la topología; debido a ello se tuvieron que emplear diversas técnicas para comprenderlas a completitud; así mismo, quedo evidenciado que dichas topologías nos permiten obtener resultados fuertes, entre ellos: que dichas topologías son las más débiles (o más gruesas), donde los elementos del dual y las evaluaciones puntuales son continuas.

- Se demostró que la bola unitaria del dual de un espacio vectorial topológico, es compacta bajo la topología débil-*, este resultado es conocido como el Teorema de Alaoglu; también se probaron versiones especializadas de dicho teorema, por el ejemplo: El Teorema de Helly, el cual puede aplicarse para demostrar, que si f es una función armónica, cuyo dominio es el disco unitario D

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ re^{i\theta} &\longmapsto f(re^{i\theta}). \end{aligned}$$

  tal que

$$\sup_{0\leq r<1} \left\| f(re^{i\theta}) \right\|_p < \infty,$$

  Entonces, para cada $1 < p < \infty$ fijo, existe una función $g \in L^p(\mathbb{T})$, tal que

$$f(re^{i\theta}) = (P_r * g)(\theta),$$

  siempre que $re^{i\theta} \in D$.

- Dada un álgebra de Banach, compleja conmutativa, con unidad, se probó que el espacio

$$\mu(A) = \{\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un homomorfismo no trivial}\}$$

  es Hausdorff y compacto, con respecto a la topología de Gelfand, esto se hizo utilizando el Teorema de Alaoglu de forma directa.

Proyecciones a futuro

En el presente trabajo de investigación solamente se pudieron estudiar dos aplicaciones del Teorema de Alaoglu; sin embargo, en un futuro se podrían analizar más aplicaciones de este. Por ejemplo, el Teorema de Alaoglu se puede aplicar a ecuaciones diferenciales mediante el siguiente resultado.

***Teorema* 4.18.** *Sean A, B matrices de funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$, donde A es simétrica y se define $C = B + B^T - \sum_{j=1}^{m} A_{j,j}$ como una matriz positiva. Si*

$$C > kI, \quad k > 0,$$

entonces para cada función periódica f cuadrado integrable, la ecuación

$$L(y) = f, \qquad L = \sum_{j=1}^{m} A_j \partial_j + B,$$

tiene una solución y, periódica y cuadrado integrable.

Este resultado puede encontrarse en [6], Sección 11.5, Teorema 5, páginas 113-115.

Por otro lado, también se puede aplicar para obtener diversas versiones de los Teoremas clásicos del Análisis funcional, tal como el Teorema de Hahn Banach.

***Teorema* 4.19** (Teorema invariante de Hahn Banach)**.** *Sea X un espacio normado, Y un subespacio de X. Si $f \in Y^*$, $\Gamma \subseteq \mathcal{B}(X)$ y se satisface que:*

a) $T(Y) \subseteq Y$ y $ST = TS$, para todo $S, T \in \Gamma$.

b) $f \circ T = f$, para todo $T \in \Gamma$.

Entonces existe $F \in X^*$ tal que $F(x) = f(x)$, siempre que $x \in Y$, donde $\|F\| = \|f\|$ y $F \circ T = F$, para todo $T \in \Gamma$.

Este resultado puede encontrarse en [8], Capítulo 5, Teorema 5.24, página 141.

Bibliografía

[1] Donald Bak. Joseph J. Newman. *Complex Analysis*. 3.ª ed. Springer, 2010.

[2] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable*. 2.ª ed. Springer-Verlag, 1978.

[3] Gabriel García Figueroa. «Teoremas de Extensión Armónica para Funciones y Distribuciones». Tesis de mtría. Universidad de Sonora, 2006. URL: `https://posgrado.mat.uson.mx/tesis/maestria/gabriel-garcia-figueroa.pdf`.

[4] P Fitzpatrick H Royden. *Real Analysis*. 4.ª ed. Pearson Education Asia Limited an China Machine Press, 2010.

[5] Erwin. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley y Sons. Inc, 1978.

[6] Peter D. Lax. *Functional analysis*. John Wiley y Sons. Inc, 2002.

[7] James. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc, 2000.

[8] Walter. Rudin. *Functional analysis*. 2.ª ed. McGraw-Hill, 1996.