UNIVERSIDAD DE El SALVADOR
FACULTAD MULTIDICIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA

TRABAJO DE GRADO:

GEOMETRÍA PARABÓLICA Y ELÍPTICA

PRESENTADO POR:

BRISEYDA GUADALUPE PAIZ SANDOVAL
JOSÉ ANTONIO HERNÁNDEZ GUEVARA

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

DOCENTE ASESOR:

LICDA. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, JULIO DE 2022

SAN MIGUEL EL SALVADOR CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

MAESTRO ROGER ARMANDO ARIAS
RECTOR

DR. RAÚL AZCÚNAGA
VICE-RECTOR ACADÉMICO

ING. JUAN ROSA
VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO

ING.FRANCISCO ALARCÓN
SECRETARIO GENERAL

LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN
FISCAL GENERAL

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCILPINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES

LIC. CRISTÓBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ
DECANO

LIC: OSCAR VILLALOBOS
VICE-DECANO

LIC. ISRAEL LÓPEZ MIRANDA
SECRETARIO

Agradecimientos

A Dios todopoderoso, por darme fuerzas para continuar en los momentos más dificiles, por sus grandiosas bendiciones, por cada momento en el que me sustentó. Le doy gracias por su infinita misericordia y por haberme permitido finalmente culminar mis estudios en la Univerdidad.

A mis padres, José Sabis Paiz Martínez y Delma Marisol Sandoval Loza, que me apoyaron incondicionalmente durante mi proceso académico, por ser pacientes conmigo y por confiar en mí en todo momento.

A mis hermanos y demás familia, por el apoyo y por la motivación que me brindaron en tiempos de dificultad.

A mi compañero de tesis, José Antonio Hernández Guevara, por su ayuda, motivación y por su paciencia durante el proceso de investigación.

A mis amigos, que estuvieron pendientes de mi proceso formativo y por la motivación en momentos difíciles.

Briseyda Guadalupe Paiz Sandoval

A Dios primeramente, por siempre brindarme fortaleza en los procesos de formación, por permitirme culminar mi estudio superior y bendecirme en el proceso.

A mis padres, quienes han sido desde siempre un motivo de superación, por su apoyo y dedicación en cada momento de la vida.

A mi compañera de tesis, Briseyda Guadalupe Paiz Sandoval por su perseverancia, dedicación y motivación.

José Antonio Hernández Guevara

Índice general

Resumen

La geometría Elíptica y Parabólica, son dos tipos de geometrías que surgen a partir de las geometrías euclideana y análitica, en donde estas a su vez se ven relacionadas con la geometría afín y proyectiva. La geometría elíptica es un ejemplo de una geometría en la que no se cumple el postulado paralelo de Euclides, algunas veces a esta geometría se le llama geometría esférica o geometría de la esfera. En la geometría parabólica, algunas defínciones como formas bilineales, formas bilineales simétricas y antisimétricas es necasrio conocer de ellas para una mayor comprensión. El estudio de la geometría elíptica comprende contenidos como rectas, triángulos, ángulos en una esfera, el cual son conocidos desde el punto de vista del plano euclideano, mas no en la geometría elíptica, se observa que en esta geometría, estos términos ya conocidos tienen sus variaciones en cuanto a su definición, y es que, por ejemplo una recta en el plano euclideano es totalmente diferente a una recta en un plano elíptico. Para llevar a cabo la investigación se hace uso de fuentes bibliográficas confiables.

Palabras Clave: geometría elíptica, geometría parabólica, espacio parabólico, distancia esférica, polo, círculo máximo, puntos antípodas.

Abstract

Elliptical and Parabolic geometry are two types of geometries that arise from Euclidean and analytic geometries, where these in turn are related to the affine and projective geometry. The elliptical geometry is an example of a geometry in which Euclid's parallel postulate is not fulfilled, sometimes this geometry is called spherical geometry or geometry of the sphere. In parabolic geometry, some definitions such as bilinear forms, symmetric and antisymmetric bilinear forms, it is necessary to know them for a better understanding. The study of elliptical geometry includes content such as lines, triangles, angles on a sphere, which are known from the point of view of the Euclidean plane, but not in the elliptic geometry, it is observed that in this geometry, these already known terms have their variations in terms of their definition, and it is that, for example a line in the Euclidean plane is totally different from a line in an elliptical plane. To carry out the research, reliable bibliographic sources are used.

Keywords : elliptical geometry, parabolic geometry, parabolic space, spherical distance, pole, great circle, antipodal points.

Introducción

A continuación se presenta el informe final del trabajo de investigación titulado "Geometría parabólica y elíptica". En la presente damos a conocer los objetivos que nos propusimos alcanzar durante la investigación, como también la justificación del estudio, el desarrollo de cada capítulo.

En el **Capítulo I** se muestran los preliminares; estos son; definiciones básicas de la geometría euclideana, también se mencionan las cónicas y sus respectivas fórmulas y finalmente se hace mensión un poco acerca del plano proyectivo que es necesario para continuar con los siguientes contenidos del tema de investigación.

En el **Capítulo II** se estudia la geometría elíptica, en este se muestra la definición de plano elíptico asi como también cómo se define la distancia y el ángulo esférico, luego se muestra la definición de triángulo y sus propiedades, congruencia y semejanza de triángulos y como último contenido de este capítulo se muestra la trigonometría elíptica donde se dan a conocer los teoremas del seno y del coseno, el teorema de pitágoras en la geometría elíptica entrte otros.

En el **Capítulo III** se muestra la geometría parábolica, dando a conocer la defínción de espacio parábolico en donde se define previo a espacios parabólicos lo que es un espacio afín, un espacio proyectivo, formas bilineales, la expresión matricial de una forma bilineal. Luego se muestran algunos teoremas, propiedades apartir de la definición de espacios parabólicos, asi como también los espacios euclideos y finalmente las cónicas euclideas.

Y finalmente se muestra la biliografía.

Justificación

Esta investigación se trata sobre la geometría parabólica y elíptica, el cual consideramos importante estudiar para darlo a conocer en la Facultad Multidisciplinaria Oriental de la Universidad de El Salvador, ya que estos tipos de geometría no se estudian con profundidad en los cursos de geometría, esta fue una de las razones que nos llamó la atención para hacer una investigación sobre ellas.

Pretendemos hacer un desarollo que sea lo más entendible posible para los lectores y que se logre captar la idea de lo que se está leyendo. Pensamos que el estudio de estas es importante en la geometría en general ya que se podrán establecer diferencias en cuanto a su comportamiento y el de los postulados de Euclides, fundador de la geometría Euclideana.

Objetivos

General

- Realizar un estudio sobre la geometría parabólica y la geometría elíptica.

Específicos

- Estudiar los elementos de la geometría parabólica, y desarrollar algunos teoremas.
- Reconocer elementos de la geometría elíptica, tales como rectas, ángulos, triángulos.
- Establecer diferencias entre la geometria plana y elíptica.

Simbología

$$\begin{aligned}
l &: \textit{Recta} \quad l. \\
\overline{AB} &: \textit{Segmento} \quad \text{AB}. \\
\perp &: \quad \text{Perpendicular.} \\
\| &: \quad \text{paralelo.} \\
\angle &: \quad \text{Ángulo.} \\
\cong &: \quad \text{Congruencia.} \\
\triangle &: \quad \text{Triángulo} \\
\sim &: \quad \text{Semejanza.} \\
\vec{a} &: \quad \text{Vector a.} \\
< &: \quad \text{Menor.} \\
> &: \quad \text{Mayor.} \\
\leq &: \quad \text{Menor o igual.} \\
\geq &: \quad \text{Mayor o igual.} \\
\bigcirc &: \quad \text{Circunferencia.}
\end{aligned}$$

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Términos indefinidos de la geometría: Punto, recta y plano

Punto, recta y plano son términos indefinidos. En estos términos indefinidos se basa la definición de todos los términos geométricos. Se les puede dar un significado por medio de descripciones, sin embargo, las descripciones que aparecen en seguida no deben considerarse como definiciones.
Acontinuación se enlistan los siguientes conceptos:

- **Punto.** Es un objeto que no tiene dimensiones, que indica una posición en el espacio. Se suelen designar con letras mayúsculas.

- **Recta.** Es un conjunto infinito de puntos que se extienden indefinidamente en sentidos opuestos.

Figura 1.1: Recta l

- **Plano.** La superficie de una mesa, de la pizarra del aula, etc; nos da la idea de plano. Estas superficies no son realmente el plano, sino simplemente representan la idea de él.

1.2. Definiciones fundamentales

- **Puntos colineales.** Son todos los puntos que están situados sobre una misma recta.

- **Puntos coplanares.** Son todos los puntos que están situados en un mismo plano.

- **Espacio.** Es el conjunto infinito de puntos, donde se encuentran todos los puntos, rectas y planos.

- **Segmento de recta.** Es la porción de recta limitada por dos puntos de la misma. A estos dos puntos se les llama extremos del segmento.

Figura 1.2: Segmento $\overline{AB}$

- **Semirecta.** Es un subconjunto de puntos de una recta, también infinito (y alineado en una misma dirección), del cual se conoce un primer punto considerado su inicio u origen y a partir del cual, la sucesión de puntos es infinita en el sentido indicado.

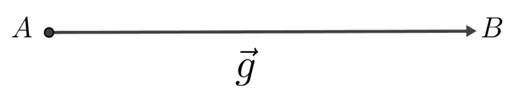


Figura 1.3: Semirecta $\vec{g}$

- **Punto medio de un segmento.** Es el punto que divide un segmento en dos segmentos iguales.

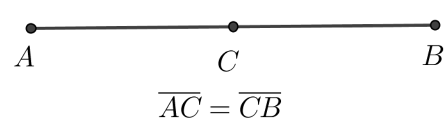


Figura 1.4: Punto medio de $\overline{AB}$

Relaciones entre rectas

- **Rectas paralelas**: Son las rectas situadas en el mismo plano que nunca se cortan. En la siguiente figura se muestran dos rectas paralelas.

- **Rectas secantes:** Son las rectas situadas en un mismo plano que se cortan en un punto.
- **Rectas Perpendiculares:** Son las rectas secantes que dividen al plano en cuatro partes iguales formando cuatro ángulos rectos.

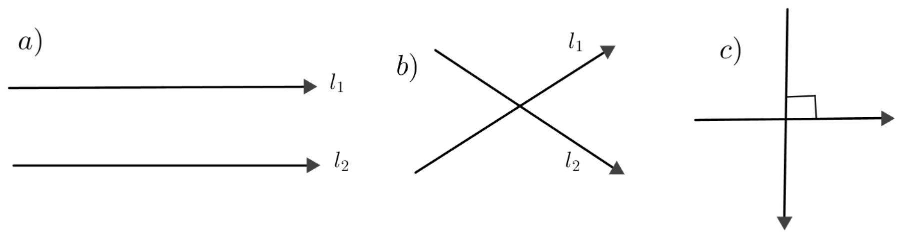


Figura 1.5: a) Rectas paralelas, b) Rectas secantes, c) Rectas perpendiculares

Definición 1.1. *La **Mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.*

1.3. Ángulos

Definición 1.2. *Si dos rayos tienen el mismo origen pero no están en la misma recta entonces su reunión es un ángulo. Los dos rayos se llaman los lados del ángulo, y su origen se llama vértice. Si los rayos son $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, entonces el ángulo se indica con $\angle AOB$ o $\angle BOA$.*

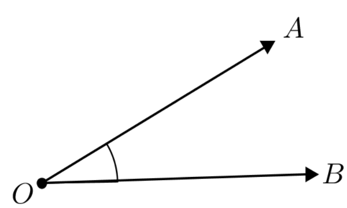


Figura 1.6: Ángulo AOB

Elementos de los ángulos:

- **Vértice:** Punto en común que tienen sus lados.
- **Lados:** Cada uno de las semirrectas que lo forman.
- **Amplitud:** Es la apertura de sus lados y se mide en grados o radianes.

Definición 1.3. *La **Bisectriz** de un ángulo es la semirrecta con origen en el vértice del ángulo y que lo divide en dos ángulos de igual medida.*

Clasificación de ángulos:

- **Ángulo agudo**: Aquel cuya medida está comprendida enre $0 < \alpha < 90^o$.
- **Ángulo recto:** Aquel cuya medida es 90^o.
- **Ángulo obtuso**: Aquel cuya medida está entre $90^o < \alpha < 180^o$.
- **Ángulo llano:** Aquel que mide 180^o.
- **Ángulo completo:** Aquel que mide 360^o.
- **Ángulo nulo:** Aquel que mide 0^o.

Relación entre ángulos:

- **complementarios:** Son los que sus medidas suman 90^o.
- **Suplementarios:** son los que sus medidas suman 180^o.
- **Consecutivos:** Dos ángulos que tienen un lado y el vértice en común.
- **Adyacentes:** Son dos ángulos que tienen un lado y el vértice comunes, y el otro lado en la misma línea recta.
- **Opuestos por el vértice:** Si los lados de uno son prolongación de los del otro ángulo.

Teorema 1.1. *Ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

Demostración.
Sean los ángulos opuestos por el vértice los que se muestran en la siguiente figura. El ángulo a y el ángulo c son opuestos por el vértice, también el ángulo b y d son opuestos por el vértice.
Observamos que las parejas de ángulos a con b, b con c, c con d, y d con a son suplementarios.

$$\Longrightarrow a + b = 180 \wedge b + c = 180$$
$$\Longrightarrow a = c.$$

De la misma forma obtenemos que $b = d$. Asi, ángulos opuestos por el vértice son iguales. ■

Ángulos formados por dos rectas intersecadas por una transversal

Sean l_1 y l_2 dos rectas intersecadas por la transversal l. Se verifica la formación de los siguientes ángulos:

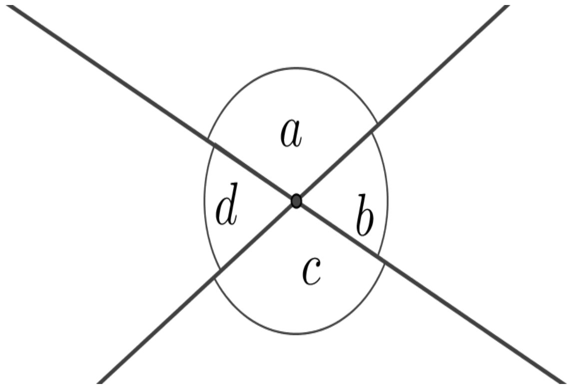


Figura 1.7: Ángulos opuestos por el vértice

- **Ángulos internos:** γ, θ, ε, ϕ.
- **Ángulos externos:** α, β, ψ, δ.
- **Ángulos alternos internos:** γ y θ, ϕ y ε.
- **Ángulos alternos externos:** α y δ, β y ψ.
- **Ángulos correspondientes:** α y ε, β y ϕ, θ y δ, γ y ψ.
- **Ángulos conjugados internos:** γ y ε, θ y ϕ.
- **Ángulos conjugados externos:** α y ϕ, β y δ.

Si l_1 y l_2 son paralelas se cumple que:

- Ángulos alternos son congruentes:
  $\gamma = \phi$, $\theta = \varepsilon$, $\alpha = \delta$, y, $\beta = \psi$.
- Ángulos correspondientes son congruentes, es decir:
  $\alpha = \varepsilon$, $\gamma = \psi$, $\beta = \phi$, y, $\theta = \delta$.
- Los ángulos conjugados son suplementarios, esto es:
  $\gamma + \varepsilon = 180^o$, $\theta + \phi = 180^o$, $\alpha + \psi = 180^o$, y, $\beta + \delta = 180^o$.

1.4. Triángulos

Definición 1.4. *Un **triángulo** es un polígono que tiene tres lados. El vértice de un triángulo es el punto en el que se juntan dos de sus lados. Un triángulo puede designarse con tres letras mayúsculas en cualquier orden, el símbolo de un triángulo es $\triangle$.*

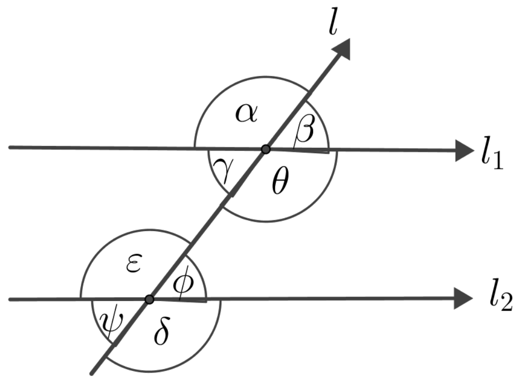


Figura 1.8: Ángulos formados por dos rectas intersecadas por una transversal

En la siguiente figura se muestra el $\triangle ABC$, sus lados son $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, con vértices A, B, C y sus ángulos son $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

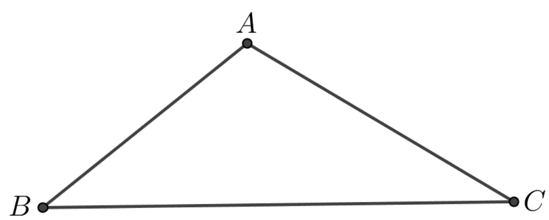


Figura 1.9: Triángulo ABC

1.4.1. Clasificación de triángulos

Los triángulos se clasifican de acuerdo a los lados iguales que tienen o de acuerdo al tipo de ángulo que poseen.

Triángulos de acuerdo al número de lados congruentes que tienen.

- **Triángulo Escaleno.** Es un triángulo que no tiene lados congruentes.
- **Triángulo Isósceles.** Es un triángulo que tiene al menos dos de sus lados congruentes.
- **Triángulo Equilátero.** Es un triángulo que tiene sus tres lados congruentes.

Clasificación de triángulos de acuerdo al tipo de ángulo que contienen.

- **Triángulo Rectángulo.** Es un triángulo que contiene un ángulo recto.

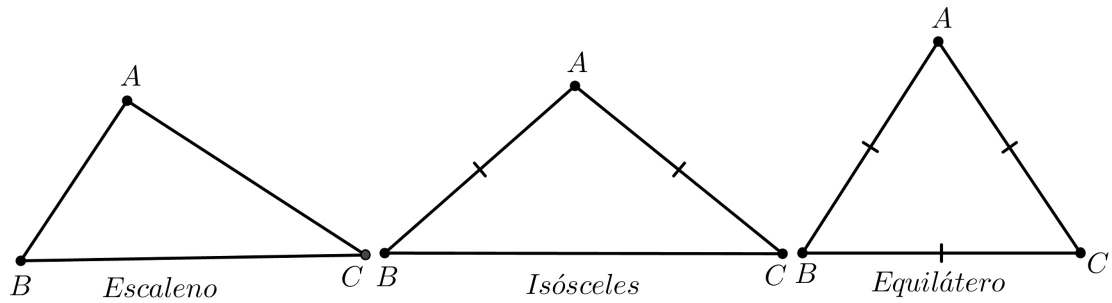


Figura 1.10: Triángulos según sus lados congruentes

- **Triángulo obtuso.** Es un triángulo que contiene un ángulo obtuso.
- **Triángulo agudo.** Es un triángulo que tiene sus tres ángulos agudos.

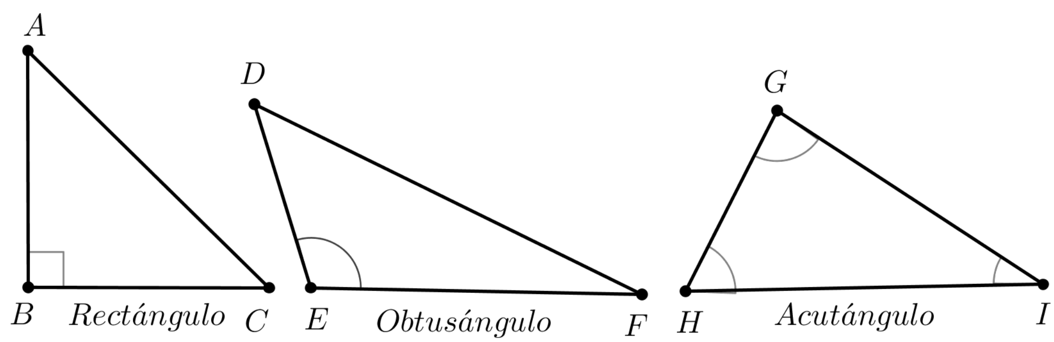


Figura 1.11: Triángulos según sus ángulos

1.5. Teoremas fundamentales en todo triángulo

Teorema 1.2. *En todo triángulo la suma de las medidas de sus tres ángulos es igual a 180º.*

Demostración.
Sean α, β y θ, las medidas de los ángulos del triángulo ABC (ver la figura).
Se probará que $\alpha + \beta + \theta = 180^{\circ}$ $\alpha + \beta + \theta = 180^{\circ}$.

Asi, trazar una recta paralela a $\overline{BC}$ a la cual llamaremos $\overline{MN}$. Por ángulos alternos

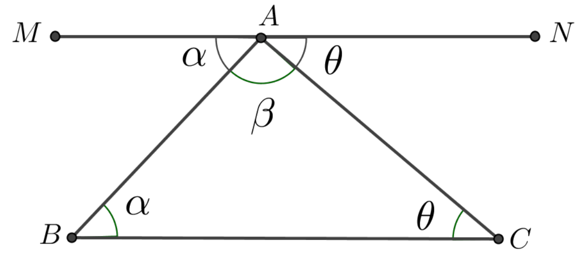


Figura 1.12: Suma de ángulos internos de un triángulo

internos tenemos que $\angle ABC$=$\angle MAB$ y $\angle ACB$=$\angle CAN$.
Luego, los puntos M, A, y N son colineales, entonces $\angle MAB + \angle BAC + \angle CAN = 180^o$.
Asi, $\alpha + \beta + \theta = 180^o$. ■

Teorema 1.3. *En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de dos ángulos del triángulo no adyacentes a él.*

Demostración.
Sea el triángulo ABC y M un punto en la prolongación del segmento $\overline{BC}$ (Ver en la figura de abajo.)
Sea $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \psi$ y, $\angle ACM = \theta$. Por el Teorema 1.2 tenemos que

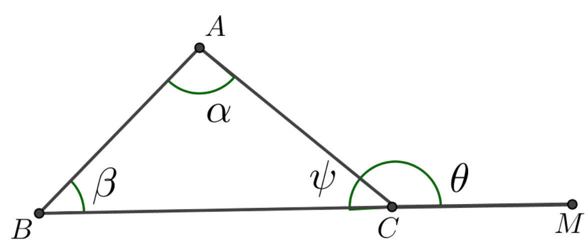


Figura 1.13: Ángulo exterior de un triángulo

la suma de los tres ángulos internos de un triángulo suman 180^o, es decir, $\alpha + \beta + \psi = 180^o$.
Luego, los ángulos ψ y θ son suplementarios.

$\Longrightarrow \psi + \theta = 180^o$
$\Longrightarrow \psi + \theta = \alpha + \beta + \psi$
$\Longrightarrow \theta = \alpha + \beta$. ■

Teorema 1.4. *En todo triángulo la longitud de uno de sus lados está comprendida entre la suma y la diferencia de las longitudes de los otros dos lados.*

Demostración.
Sea el triángulo ABC (Ver la figura de abajo)

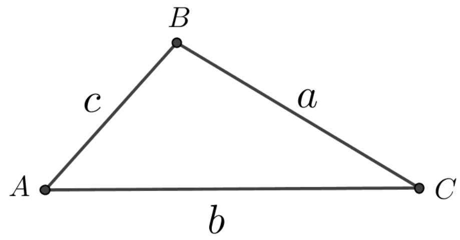


Figura 1.14: longitud de uno de los lados del triángulo

donde: $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, Se probará que : $a - c < b < a + c$
Se sabe que la menor distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que los une.
$\Longrightarrow b < a + c$ (1)
$\Longrightarrow a < b + c$
$\Longrightarrow a - c < b$ (2)

finalmente de (1) y (2) se tiene que $a - c < b < a + c$. ■

Teorema 1.5. *En todo triángulo se cumple que a mayor lado se le opone mayor ángulo y viceversa.*

Demostración.
Sea el triángulo ABC (Ver la figura de abajo.)
Donde el lado $\overline{BC} > \overline{AB}$, se demostrará que : $m\angle A > m\angle C$.

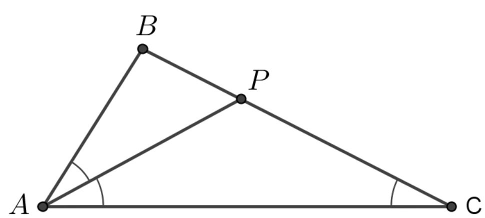


Figura 1.15: Lado mayor de un triángulo

Para ello, ubicar un punto P sobre $\overline{BC}$ de tal manera que el triángulo APC sea isósceles.
Como el triángulo APC es isósceles:
$\Longrightarrow m\angle PAC = m\angle C$, observar que $m\angle A > m\angle PAC$
$\Longrightarrow m\angle A < m\angle C$. ■

1.6. Congruencia de triángulos

Dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$, en donde sus vértices se corresponden biunívocamente, entonces existe una correspondencia entre los lados y los ángulos de dichos triángulos.

Además, si los elementos se corresponden, entonces dichos elementos son congruentes, y como tal los triángulos son congruentes. Luego podemos decir:
Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si y sólo si:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \angle A \cong \angle A'$$

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \angle B \cong \angle B'$$

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \angle C \cong \angle C'$$

Se denota $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ y se lee:

$\ll$ **El triángulo ABC es congruente al triángulo $A'B'C'$** $\gg$

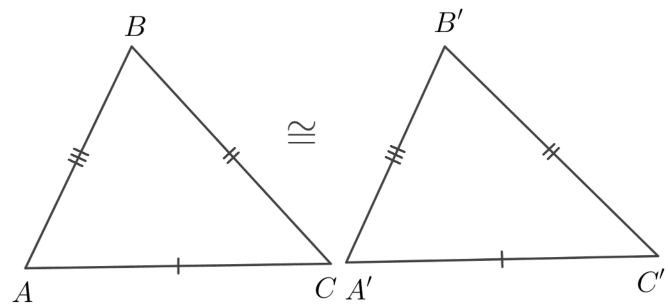


Figura 1.16: Triángulos congruentes

1.6.1. Criterios de congruencia de triángulos

- **POSTULADO I. ALA (Ángulo - Lado - Ángulo)**
  Dos triángulos son congruentes, si tienen congruentes un lado y los ángulos adyacentes a él. Si:

$$\angle A \cong \angle A'$$

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$$

$$\angle C \cong \angle C'$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

- **POSTULADO II. LAL (Lado - Ángulo - Lado)**
  Dos triángulos son congruentes, si tienen congruentes dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Si:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$$

$$\angle A \cong \angle A'$$

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

- **POSTULADO III. LLL (Lado - Lado - Lado)**
  Dos triángulos son congruentes si los tres lados del primer triángulo son congruentes con los tres lados correspondientes del segundo. Si:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$$
$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$
$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$$
$$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

1.7. Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos congruentes y sus tres lados respectivamente proporcionales. En dos triánglos semejantes se cumple que la razón de cualquier pareja de elementos homólogos es un número constante, llamado **razón de semejanza**. Se llaman lados homólogos a aquellos que se oponen a ángulos congruentes. Según lo expuesto, si los triángulos ABC y MNL son semejantes, esto se denota así:

$$\triangle ABC \cong \triangle MNL$$

Verficándose que sus ángulos son tales que:

$$\angle A \cong \angle M, \angle B \cong \angle N, \angle C \cong \angle L$$

Asi mismo, sus medidas lineales se relacionan del siguiente modo:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NL} = \frac{AC}{ML} = \frac{AH}{MP} = \textbf{razón de Semejanza}$$

1.7.1. Criterios de semejanza de triángulos

- **PRIMER CRITERIO**.
  Dos triángulos son semejantes si dos ángulos del primero son congruentes a dos ángulos del segundo.
- **SEGUNDO CRITERIO**.
  Dos triángulos son semejantes si dos lados del primero son proporcionales a dos lados del segundo, y los ángulos formados por dichos lados son congruentes.
- **TERCER CRITERIO**.
  Dos triángulos son semejantes si los tres lados del primero son proporcionales a los tres lados del segundo.

1.8. Líneas notables de un triángulo

- **Altura**. En un triángulo es el segmento que parte de uno de sus vértices y llega en forma perpendicular al lado opuesto o a su prolongación (figura a)). Todo triángulo tiene tres alturas las cuales concurren en un punto llamado **Ortocentro H** (figura b)).

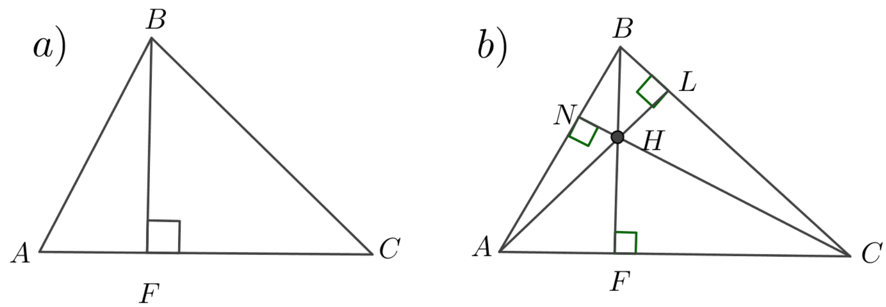


Figura 1.17: Altura BF y Ortocentro H del triángulo ABC

- **Mediana**. En un triángulo, esta línea notable se define como el segmento determinado por un vértice y el punto medio del lado opuesto, tal como $\overline{BM}$ lo es en el triángulo ABC (figura a)).
  Todo triángulo tiene tres medianas las cuales concurren en un punto llamado **Baricentro o Centroide G** (figura b)).

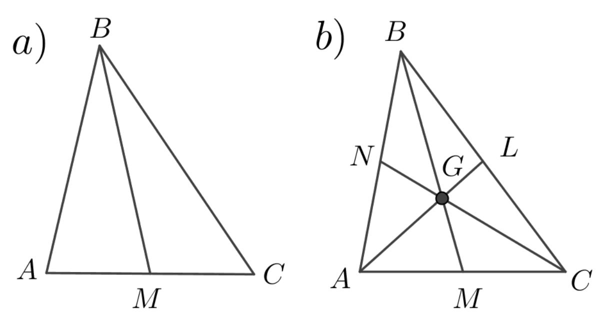


Figura 1.18: Mediana BM y Baricentro o Centroide G del triángulo ABC

- **Mediatriz**. Esta línea se define para cada lado del triángulo, y viene a ser una recta perpendicular a dicho lado en su punto medio, tal como $\mathcal{L}$ lo es para $\overline{AC}$ en el triángulo ABC (figura a)).
  Las mediatrices relativas a los tres lados de un triángulo son concurrentes, en un punto llamado **Circuncentro O** (figura b)). La característica de este punto es el de equidistar de los vértices del triángulo.

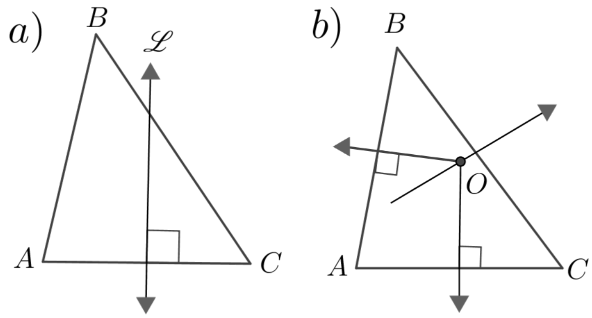


Figura 1.19: Mediatriz $\mathcal{L}$ y Circuncentro O del triángulo ABC

- **Bisectriz**. Definiremos bisectriz de un triángulo como la la línea notable que es parte de la bisectriz de uno de sus ángulos, limitado por el lado opuesto o por su prolongación, tal como sucede con la bisectriz interior $\overline{BD}$ y la bisectriz exterior $\overline{BE}$ del triángulo ABC (figura a)).
  El punto donde concurren las tres bisectrices interiores de un triángulo se llama **Incentro I** (figura b)).
  El punto donde concurren las bisectrices de dos ángulos exteriores con la bisectriz del tercer ángulo interior se conoce con el nombre de **Excentro E** (figura c))

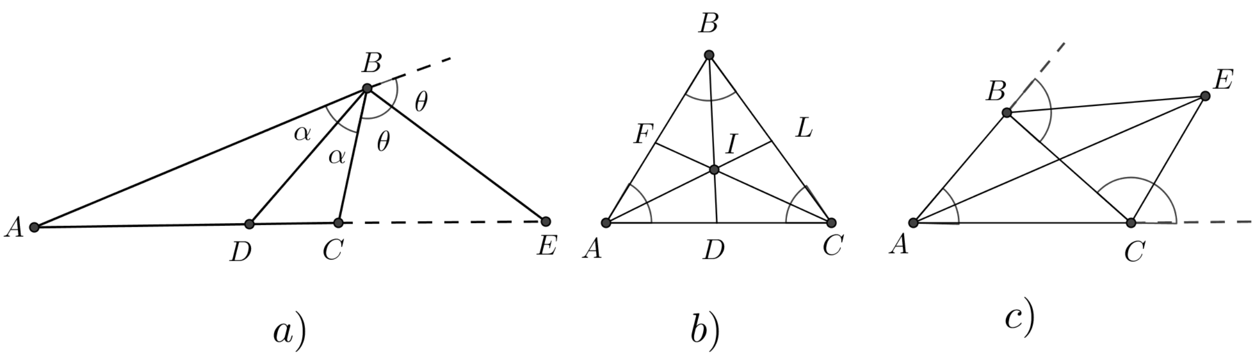


Figura 1.20: Bisectriz BD, Incentro I y Excentro E del triángulo ABC

1.9. Postulados de Euclides

- **PRIMER POSTULADO**. Por dos puntos diferentes sólo se puede trazar una línea recta.
- **SEGUNDO POSTULADO**. Todo segmento rectilíneo se puede prolongar indefinidamente.
- **TERCER POSTULADO**. Con un centro y un radio dado sólo se puede trazar una circunferencia.

- **CUARTO POSTULADO**. Todos los ángulos rectos son iguales.
- **QUINTO POSTULADO**. Dada una recta y un punto exterior a la misma, solamente puede trazarse una única paralela.

1.10. Circunferencia

Definición 1.5. *Sea O un punto de un plano, y R un número positivo. La circunferencia con centro O y radio R es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la misma distancia R del punto O. Todo punto que pertenece a la circunferencia se llamará aferente.*

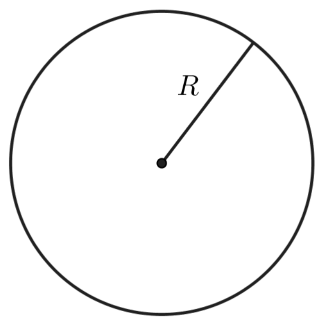


Figura 1.21: Circunferencia de radio R

Definición 1.6. ***Círculo*** *es la reunión de la circunferencia con todos sus puntos interiores.*

En la siguiente figura, $A \in$ círculo, $B \in$ círculo.

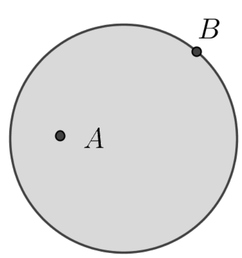


Figura 1.22: Representación del círculo

Líneas de la Circunferencia

- Radio $\overline{OR}$. Es el segmento que une cualquier punto de la circunferencia con su centro, la notación R indica la longitud del radio.

- Cuerda $\overline{MN}$. Es el segmento que une dos puntos de la circunferencia.
- Diámetro $\overline{AB}$. Es toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. La medida del diámetro equivale a $2R$.
- Arco $\widehat{MN}$. Es la porción de circunferencia limitada por dos puntos.
- Flecha o sagita $\overline{CF}$. Segmento de recta determinado al trazar un radio que es perpendicular a una cuerda y que queda comprendido entre la cuerda y el arco que subtiende.
- Recta tangente l. Recta coplanar que tiene un punto D, en común con la circunferencia.
- Secante f. Es aquella recta que tiene dos puntos E y F, comunes con la circunferencia.

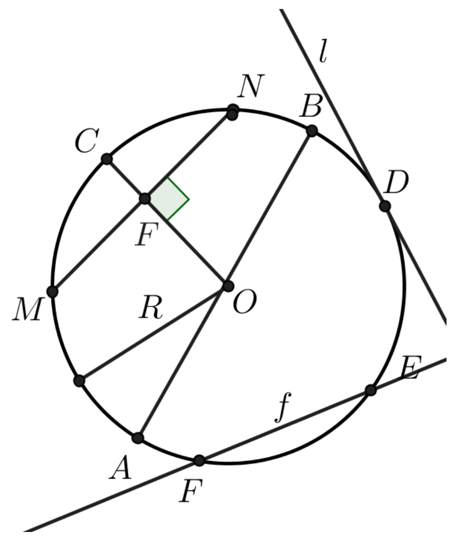


Figura 1.23: Líneas de la Circunferencia

1.11. Ángulos con relación a una circunferencia

- **Ángulo Central**. Es aquel ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia, tal como el $\angle AOB$ (figura a)).
- **Ángulo Inscrito**. Es aquel cuyo vértice pertenece a la circunferencia y sus lados lo constituyen dos cuerdas de la misma, tal como el $\angle APB$ (figura b)).
- **Ángulo Semi-inscrito**. Es el ángulo cuyos lados son una tangente y una cuerda y su vértice es el punto de tangencia, tal como el $\angle APB$ (figura c)).

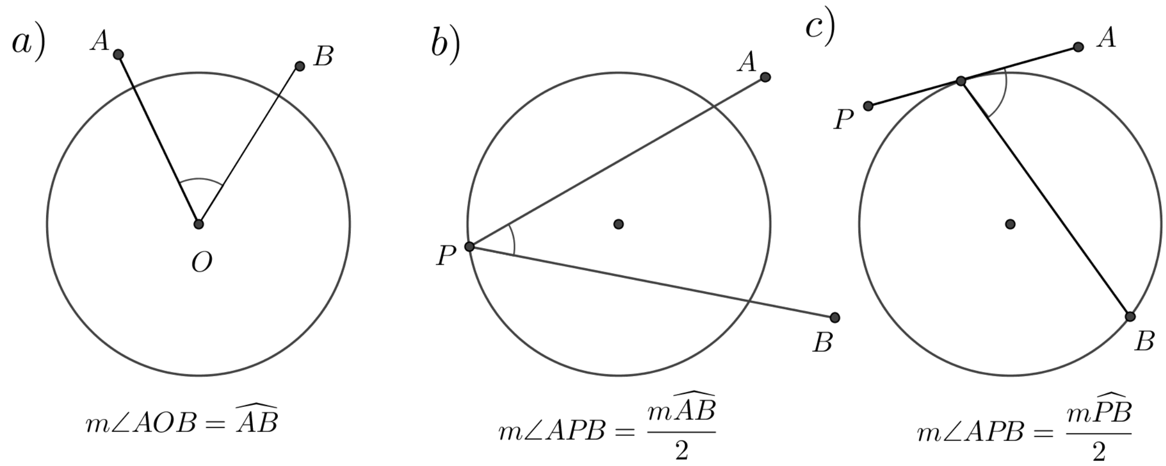


Figura 1.24: Ángulo central, inscrito, y semiinscrito en una circunferencia

- **Ángulo Ex-inscrito**. Es el ángulo formado por una secante y una cuerda, y su vértice es uno de los puntos de intersección, tal como el $\angle QPB$ (figura a)).
- **Ángulo Interior**. Es el ángulo cuyo vértice es un punto interior a la circunferencia, tal como el $\angle APB$ (figura b)).

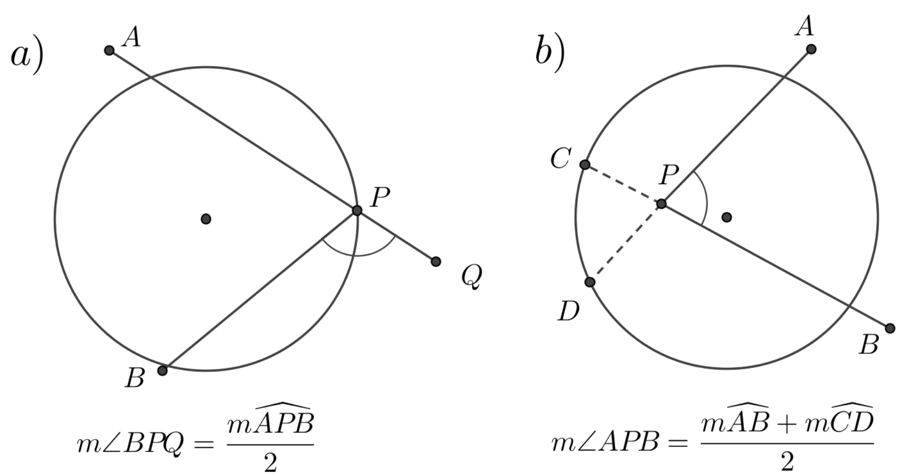
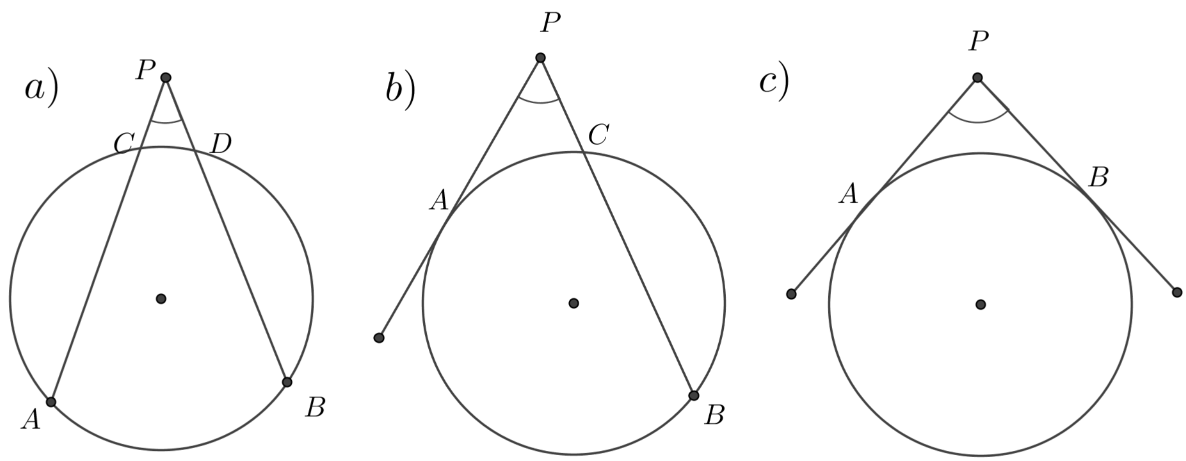


Figura 1.25: Ángulo ex-inscrito e interior en una circunferencia

- **Ángulo Exterior**. Es el ángulo cuyo vértice es un punto exterior a la circunferrencia, y sus lados pueden ser: Dos secantes (figura a), una secante y una tangente (figura b)) y dos secantes (figura c)).



$$m\angle APB = \frac{m\widehat{AB} - m\widehat{CD}}{2} \qquad m\angle APB = \frac{m\widehat{AB} - m\widehat{Ac}}{2} \qquad m\angle APB = 180 - m\widehat{AB}$$

Figura 1.26: Ángulo exterior en una circunferencia

1.11.1. Algunos teoremas generales en la circunferencia

Teorema 1.6. *En una misma circunferencia el diámetro es la mayor de las cuerdas.*

Demostración.
Sea $\overline{AB}$ una cuerda en la circunferencia que no contiene al centro O y sea $\overline{CD}$ el diámetro. Haciendo uso del teorema de la desigualdad triangular, para el triángulo ABC se tiene que:

$$\overline{AB} < \overline{OA} + \overline{OB}$$

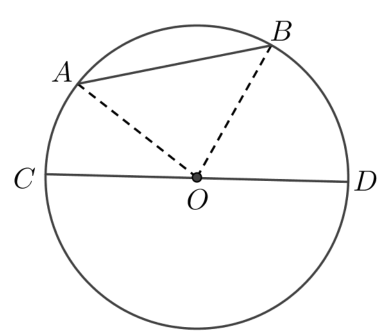


Figura 1.27:

Pero, observamos en la figura que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$, ya que estos son radios.

$$\begin{aligned} \overline{OA} + \overline{OB} &= \overline{OC} + \overline{OD} \\ \overline{OA} + \overline{OB} &= \overline{CD} \\ \overline{AB} &< \overline{CD}. \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 1.7. *En toda circunferencia se cumple que los arcos comprendidos entre cuerdas paralelas son congruentes. Si* $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow \widehat{AC} \cong \widehat{BD}$

Demostración.
Sea $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cuerdas de la circunferencia.
Suponer que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
Luego, trazar la cuerda $\overline{CB}$, como $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, el $\angle ABC \cong \angle DCB$ (1). Por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

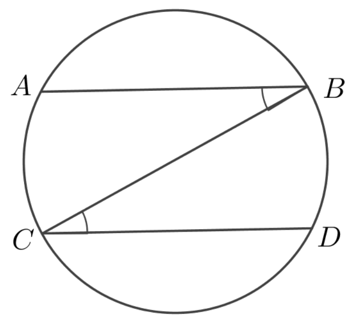


Figura 1.28:

También, $m\widehat{AC} = 2m\angle ABC$ y $m\widehat{BD} = 2m\angle DCB$ por propiedad de ángulos inscritos. Finalmente de (1) se obtiene que $\widehat{AC} = \widehat{BD}$. $\blacksquare$

Teorema 1.8. *En toda circunferencia se cumple que a cuerdas congruentes le corresponden arcos congruentes, y viceversa.*

Demostración.
Se va a probar la primera implicación.
$\Rightarrow$ Suponer que $\overline{AB} = \overline{DC}$ y llamar P al centro de la circunferencia.
Según la figura obtenemos los siguientes resultados

$$\overline{PD} = \overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC},$$

Luego, el $\triangle DPC \cong \triangle APB \Rightarrow \angle DPC = \angle APB$
$\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{DC}$, Por propiedad de ángulo central. Ahora, se probará la segunda implicación del teorema.

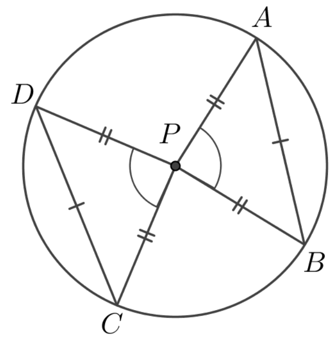


Figura 1.29:

$\Leftarrow$ Suponer que $\widehat{AB} = \widehat{DC}$, en la figura observamos que el $\angle APB = \angle DPC$, por ser ángulos opuestos por el vértice, además

$$\overline{PD} = \overline{PC} = \overline{PA} = \overline{PB}$$

$$\Longrightarrow \triangle DPC = \triangle APB$$
$$\Longrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}. \blacksquare$$

Teorema 1.9. *Todo radio es perpendicular a una recta tangente en su punto de tangencia.*

1.12. Esfera

Definición 1.7. *Llámese esfera (figura a)) a, un sólido limitado por una superficie en la que todos sus puntos equidistan de un punto interior denominado centro (O).*
*La superficie se llama **superficie esférica** y el segmento $\overline{OP}$ que une el centro O con un punto P (figura b)), de la superficie esférica se denomina **radio**.*

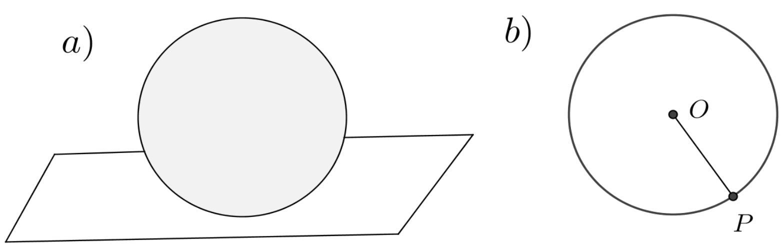


Figura 1.30: Superficie esférica

Definición 1.8. *Círculo máximo es la sección hecha en la esfera por un plano que pasa por su centro.*

Definición 1.9. *Se llaman polos de un círculo de una esfera a los extremos del diámetro de esta perpendicular al plano del círculo.*

Propiedades Generales
En toda esfera se cumplen las siguientes propiedades:

- Toda sección plana de una superficie es un círculo, síguese de este enunciado que si el plano secante no pasa por el centro se obtendrá un círculo menor y si pasa por el centro un círculo máximo.
- La recta que une el centro de una esfera y el de un círculo menor de la esfera es perpendicular al plano del círculo.
- Planos equidistantes del centro de una esfera la cortan en círculos iguales.
- Todo plano tangente a una esfera es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.

1.13. Las Cónicas

Estudiaremos ciertas curvas muy importantes en la Geometría analítica y que se originaron al considerar cortes en diferentes ángulos de un doble cono circular recto, mediante un plano, dando lugar a las figuras llamadas cónicas las que, según el ángulo de corte, reciben el nombre de: Parábola, Elipse e Hipérbola.

Definiciones Informles
Comenzamos dando, sin mucho rigor, varias definiciones de cónicas y la relación entre ellas. Un cono circular es una superficie generada por una recta que se mueve de modo que siempre corte a una circunferencia dada y pase por un punto fijo, que no esté en el plano de la circunferencia. La recta engendradora se denomina generatriz del cono, la circunferencia dada directriz y el punto fijo se llama vértice, el cual divide a cada generatriz en dos semirectas y al cono en dos hojas.

Las curvas llamadas elipse, hipérbola y parábola, reciben su nombre debido a Apolonio, quien las estudió como ciertas secciones planas de conos circulares. Es por lo que se le da el nombre de secciones cónicas o simplemente cónicas. Si el plano que corta al cono no pasa por su vértice se obtiene una cónica propiamente dicha o no degenerada: una elipse (incluyendo la circunferencia como caso especial) es una cónica cuyo plano de sección corta a todas las generatrices de una hoja del cono, una hipérbola es una cónica cuyo plano de sección corta a ambas hojas del cono y una parábola es una cónica cuyo plano de sección es paralelo a una y sólo a una generatriz del cono. Si el plano secante pasa por el vértice, las secciones resultantes (denominadas ahora cónicas degeneradas) son rectas: distintas, confundidas o imaginarias (con un punto real).

Es un hecho notable que toda cónica es siempre una sección de conos circulares rectos.

(Esto es, conos circulares tales que la recta que une el vértice con el centro de la circunferencia directriz es perpendicular al plano de ésta); realmente todas pueden hallarse como secciones de un cono circular dado. Utilizando este hecho se tienen los siguientes resultados que pueden ser tomados como definiciones:
Una elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano es constante.
Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano es constante.
Una parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo y de una recta fija situados en el plano.

1.13.1. Elipse

Definición 1.10. *Se llama elipse al lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos fijos, llamados focos, es constante.*

Si adoptamos como eje de abscisas la recta que pasa por los focos F' y F y por eje de ordenadas la perpendicular en el punto medio O del segmento $\overline{F'F}$ y si ponemos $F'(c, 0)$ y $F(c, 0)$ las coordenadas de los focos, (x, y) las de un punto P que describe el lugar geométrico y $2a$ la suma de distancias constante ($2a > 2c$), se tiene:

$$\overline{PF'} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad \overline{PF} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

de donde se deduce la ecuación del lugar geométrico:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

De la que se obtiene después de eliminar radicales y sustituir $a^2 - c^2 = b^2$, la ecuación de la elipse:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación obtenemos:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4(xc - a^2) = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando nuevamente al cuadrado la ecuación

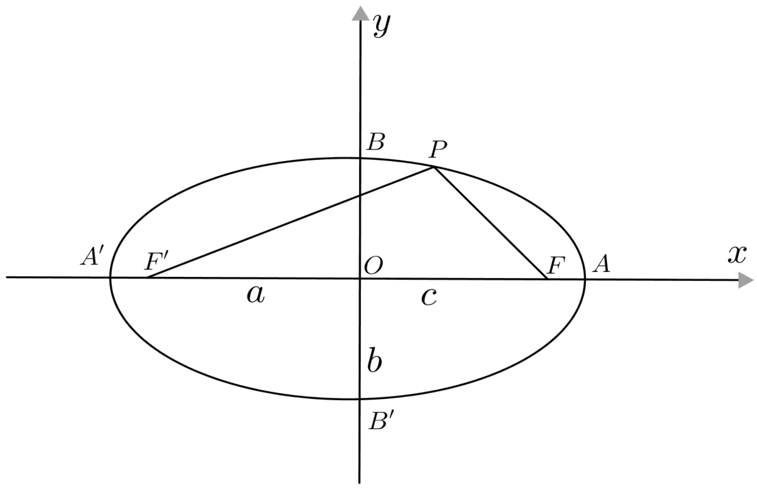


Figura 1.31:

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$
$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$
$$x^2a^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$
$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a > c$, entonces $a^2 > c^2$, entonces $a^2 - c^2 > 0$. Sea $a^2 - c^2 = b^2$.

$$\Longrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividiendo la ecuación por a^2b^2 obtenemos la ecuación deseada (la ecuación de la elipse)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La curva es simétrica respecto a los ejes coordenados (denominados, por ello, ejes de la elipse) y al origen de coordenadas (centro de la elipse). Queda encerrada en el rectángulo de lados $2a$ y $2b$.
A los puntos de intersección con los ejes OX y OY. ($x = \pm a, y = \pm b$) se les denominan vértices y al punto O centro.

1.13.2. Hipérbola

Definición 1.11. *Se llama hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a otros dos fijos F' y F, llamados focos, es constante.*

Adoptando el mismo sistema de ejes y la misma notación que para la elipse, la ecuación del lugar geométrico se escribe:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a,$$

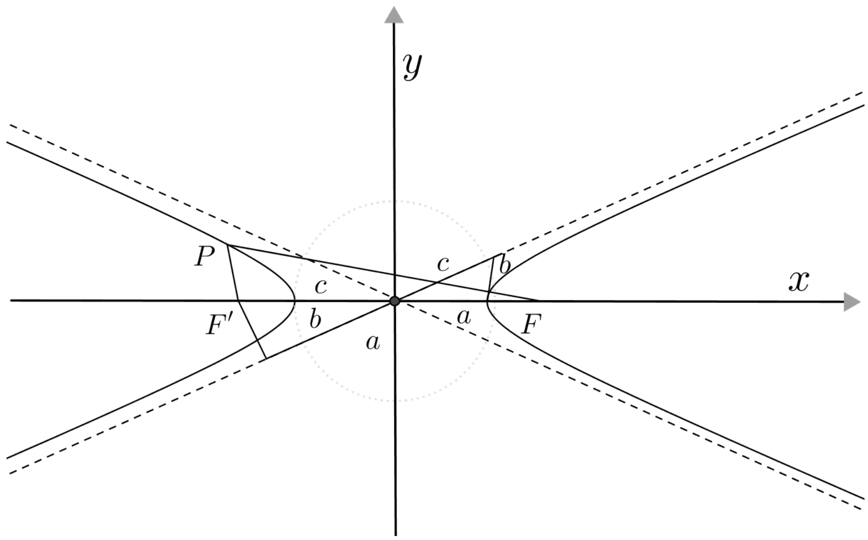


Figura 1.32:

siendo ahora $2a < 2c$, de la que al quitar radicales y poner $c^2 - a^2 = b^2$, resulta la ecuación de la hipérbola:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4(xc - a^2) = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando nuevamente ambos miembros de la ecuación al cuadrado.

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2 - a^2)a^2$$

Como $c > a$ entonces $c^2 > a^2$ entonces $c^2 - a^2 > 0$. Sea $c^2 - a^2 = b^2$ y sustituir en la última ecuación

$$b^2x^2 - a^2y^2 = b^2a^2$$

Dividir por a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De esta ecuación se deduce que la curva es simétrica respecto a los ejes coordenados (ejes de la hipérbola) y al origen de coordenadas; y que tiene por asíntotas (tangentes en los puntos impropios), las rectas

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad\qquad y = -\frac{b}{a}x$$

A los puntos de intersección de la curva con el eje OX, $A'(a, 0), A(a, 0)$ se les llama vértices; y al punto O centro. Si $a = b$, la hipérbola se llama **equilátera**, en este caso su ecuación se escribe

$$x^2 - y^2 = a^2$$

y las asíntotas son las rectas perpendiculares $y = x$ e $y = x'$.
Adoptando como nuevos ejes coordenados las asíntotas, para lo cual es necesario hacer un giro de $-\frac{\pi}{4}$:

$$x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \qquad\qquad x = \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}}$$

que al sustituir en $x^2 - y^2 = a^2$, resulta:

$$x'y' = k, \qquad\qquad \left(k = \frac{a^2}{2}\right)$$

como ecuación de una hipérbola equilátera referida a las asíntotas.

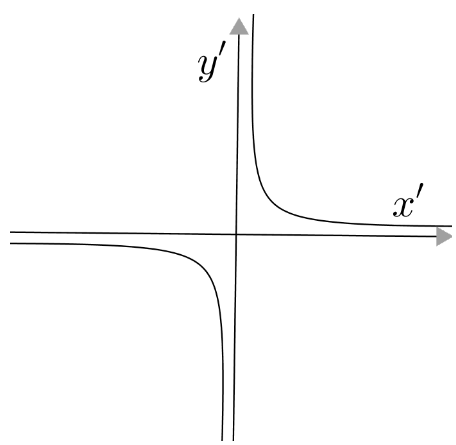


Figura 1.33:

1.13.3. Parábola

Definición 1.12. *Se llama parábola al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado foco, y de una recta fija d, denominada directriz.*

Para obtener su ecuación tomaremos como eje de abscisas la perpendicular a la directriz que pasa por el foco, y por eje de ordenadas la mediatriz al segmento IF, cuya longitud designamos por p. Asi las coordenadas del foco son $(p/2, 0)$ y si $P(x, y)$ designa un punto genérico del lugar, este queda definido por la condición:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = |x + \frac{p}{2}|$$

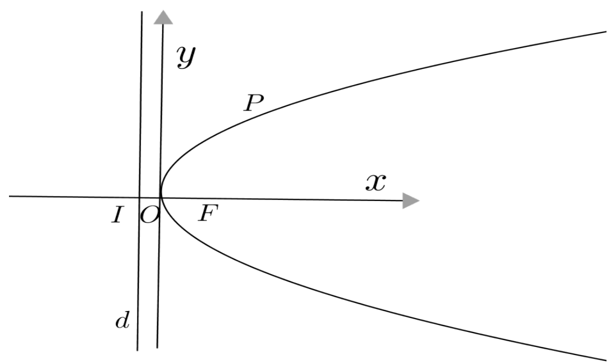


Figura 1.34:

Elevando al cuadrado y simplificando se llega a la siguiente ecuación de la parábola

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}$$

Simplificando encontramos la ecuación de la parábola

$$y^2 = 2px$$

Esta ecuación muestra que el eje OX es eje de simetría y se le denomina eje de la parábola.

1.13.4. La circunferencia

Definición 1.13. *Una circunferencia es el lugar geométrico de los $P(x, y)$ que equidistan de un punto fijo C llamado (centro)*

$$d(P, C) = cte = radio$$

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera verificando $d(P, C) = r$, siendo r el radio y $C(x_0, y_0)$ el centro. De la fórmula de la distancia de dos puntos se tiene:

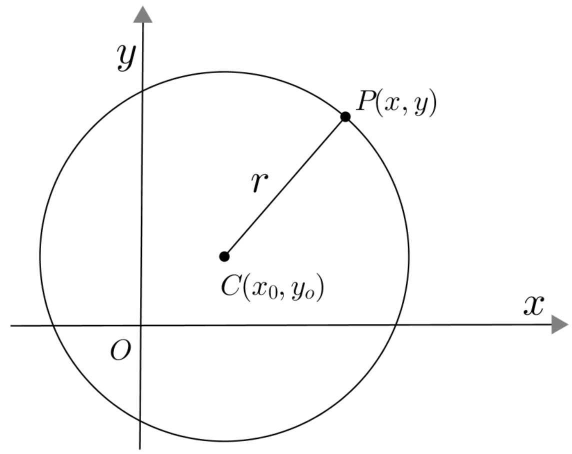


Figura 1.35:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$$

y elevando al cuadrado se obtiene la ecuación de la circunferencia

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \tag{1.1}$$

Cuando la circunferencia tiene el centro en el origen se tiene la ecuación reducida

$$x^2+y^2=r^2 \tag{1.2}$$

Recta Tangente a una Circunferencia

Si desde un punto $P(x,y)$ trazamos una recta t, será tangente a una circunferencia cuando la distancia del centro a la recta coincida con el radio.

Potencia de un Punto

Definición 1.14. *Si desde un punto $P(x,y)$ trazamos una recta que corte a una circunferencia C en dos puntos A y B, se llama potencia del punto respecto de la circunferencia al producto $PA\cdot PB$*

$$Pot(P)_C=PA\cdot PB$$

1.14. El plano proyectivo

Definición 1.15. *Un **Plano proyectivo S** es un conjunto, cuyos elementos son llamados puntos, y un conjunto de subconjuntos, llamados líneas, satisfaciendo los cuatro axiomas siguientes.*

P1 *Dos puntos distintos P, Q de S yacen en una y sola una línea.*
P2 *Cualesquiera dos líneas inciden en al menos un punto.*
P3 *Existen tres puntos no colineales.*
P4 *Cada línea contiene al menos tres puntos.*

1.14.1. Axiomas adicionales del plano proyectivo

Teoremas de Ceva y Menelao

Los teoremas de Ceva y Menelao son herramientas que permiten trabajar muchos problemas en los que intervienen la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas. Ambos están estrechamente relacionados, aun cuando el de Menelao es del siglo primero y el de Ceva del siglo XVII.
Una recta que pasa por un vértice de un triángulo pero que no coincide con ningún lado, se llama usualmente **recta ceviana** del triángulo.
Un punto que este en un lado de un triángulo, pero que no coincida con ningún vértice, se llama usualmente **punto de Menelao** del triángulo para dicho lado.

Teorema 1.10. ***Teorema de Ceva*** *Tres cevianas AL, BM y CN de un triángulo ABC son concurrentes en el punto O si y sólo si:*

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

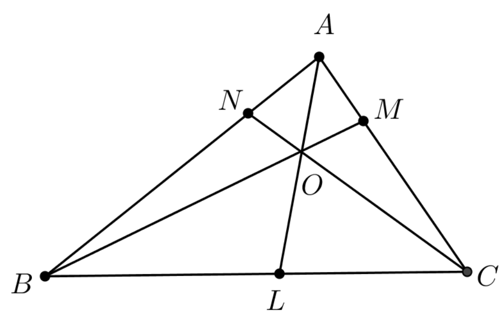


Figura 1.36:

Demostración.
$\Longrightarrow$
Trazar por A una paralela a BC. Sean S y T las intersecciones de BM y CN con esta paralela respectivamente.

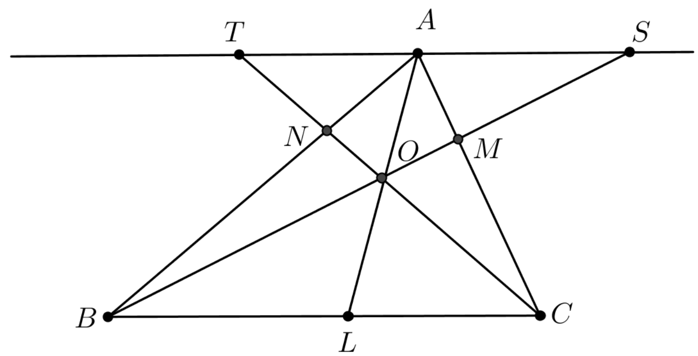


Figura 1.37:

En la figura podemos observar que

$$\triangle BLO \cong \triangle SAO, \Longrightarrow \frac{BL}{LO} = \frac{SA}{AO} \qquad (1)$$

$$\triangle OLC \cong \triangle OAT, \Longrightarrow \frac{OL}{LC} = \frac{OA}{AT} \qquad (2)$$

Por otro lado también tenemos que:

$$\triangle CMB \cong \triangle AMS, \Longrightarrow \frac{CM}{MA} = \frac{BC}{SA} \qquad (3)$$

$$\triangle ANT \cong \triangle BNC, \Longrightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{AT}{BC} \qquad (4)$$

Multiplicando las ecuaciones (1),(2),(3) y (4) se obtiene:

$$\frac{BL}{LO} \cdot \frac{OL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = \frac{SA}{AO} \cdot \frac{AO}{AT} \cdot \frac{BC}{SA} \cdot \frac{AT}{BC}$$

Por lo tanto

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

$\Longleftarrow$

Suponer que L, M y N son tres puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC y que la relación anterior se satisface.

Sea O el punto de intersección de BM y CN. Trazar la recta AO. Sea L' el punto de intersección de AO en BC. Por lo que recién acabamos de demostar (la primera parte del teorema de Ceva) tenemos que:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

Por lo tanto

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 = \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA}$$

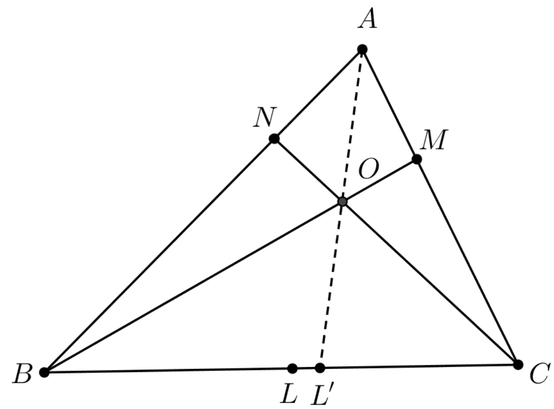


Figura 1.38:

De donde obtenemos

$$\frac{BL'}{L'C} = \frac{BL}{LC}$$

Y por tanto $L = L'$.■

Teorema 1.11. ***Teorema de Menelao*** *Si una recta intersecta los tres lados BC, CA y AB del triángulo ABC en los puntos L, M y N respectivamente, entonces:*

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

e inversamente si L, M y N son tres puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC, para los cuales se cumple la relación anterior, entonces los tres puntos son colineales.

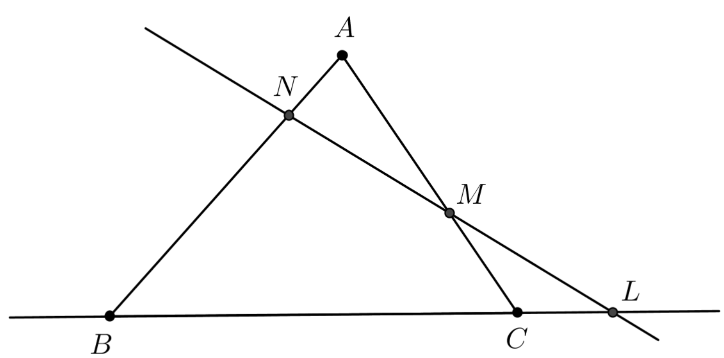


Figura 1.39:

Demostración.
Sean P, Q y R los pies de las perpendiculares desde A, B y C a la recta determinada por L, M y N.

Se tiene que el $\triangle ANO \cong \triangle BNQ \Longrightarrow \dfrac{AN}{NB} = \dfrac{PA}{BQ}$ (5)

Se tiene que el $\triangle BLQ \cong \triangle CLR \Longrightarrow \dfrac{BL}{LC} = \dfrac{QB}{CR}$ (6)

Se tiene que el $\triangle CMR \cong \triangle AMP \Longrightarrow \dfrac{CM}{MA} = \dfrac{RC}{AP}$ (7).

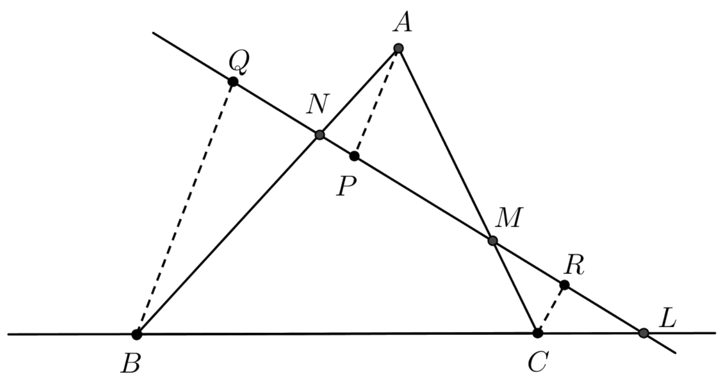


Figura 1.40:

Multiplicando (5),(6) y (7), se obtiene:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{PA}{BQ} \cdot \frac{QB}{CR} \cdot \frac{RC}{AP} = -1$$

Por tanto

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1.\blacksquare$$

$\Longleftarrow$

Suponer que si L, M y N son tres puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC, para los cuales se cumple la relación anterior,

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1.$$

Entonces los tres puntos son colineales.
Dado un triángulo $\triangle ABC$ y dos puntos N, M en los lados AB y AC respectivamente, ahora unir con una recta los puntos N y M y al punto de intersección con BC lo llamamos L'.

Por el teorema de Menelao se tiene que:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

Y por hipótesis

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

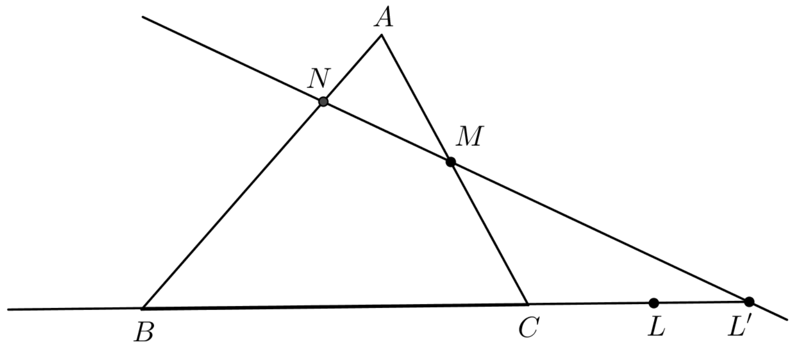


Figura 1.41:

De manera que

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1 = \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA}$$

Por lo tanto

$$\frac{BL}{LC} = \frac{BL'}{L'C}$$

Y consecuentemente $L = L'$ y entonces los tres puntos son colineales. ■

Teorema de Desargues.

El teorema de Desargues está íntimamente ligado con el estudio de la perspectiva. Se dice que dos figuras están en perspectiva si las rectas que unen puntos correspondientes de las dos figuras son concurrentes. A este punto de concurrencia se le llama **el centro de perspectiva** de las dos figuras.

Desargues concebía la geometría proyectiva como una extensión natural de la geometría euclidiana en la que las rectas paralelas se cortan en el infinito.

Teorema 1.12. ***Teorema de Desargues*** *Si en un plano dos triángulos ABC y $A'B'C'$ están en perspectiva desde un punto O, los lados correspondientes se cortan en tres puntos colineales P, Q y R, e inversamente, si los puntos de intersección de lados correspondientes de dos triángulos son colineales, los triángulos están en perspectiva.*

Demostración.

$\Longrightarrow$

Sean los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ dos triángulos en perspectiva con O como centro de perspectiva.

Sean P la intersección de AB y $A'B'$, Q la de BC y $B'C'$ y R la de CA y $C'A'$. Si se aplica el teorema de Menelao al triángulo ABO con $B'A'P$ como transversal se obtiene:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{AA'} = -1.$$

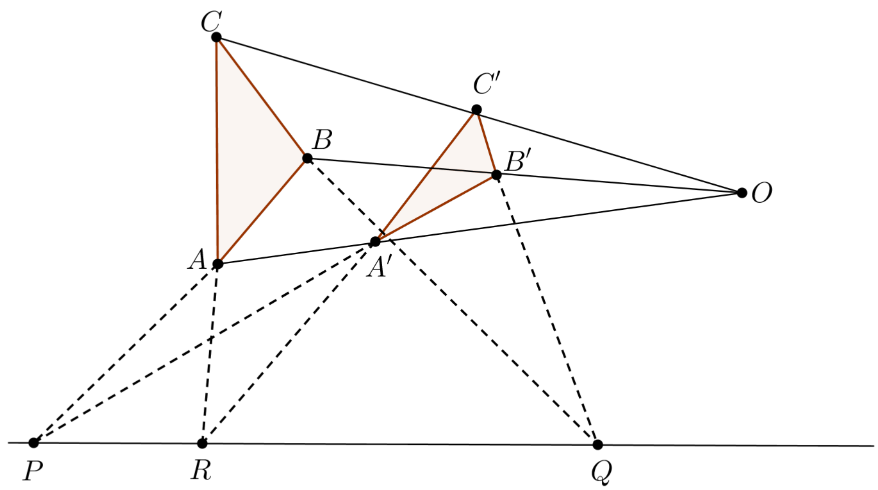


Figura 1.42:

Si se aplica el teorema de Menelao al triángulo CAO con $A'C'R$ como transversal se obtiene:

$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{BB'} = -1.$$

Si se aplica el teorema de Menelao al triángulo BCO con $B'C'Q$ como transversal se obtiene:

$$\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = -1.$$

El producto de estas tres ecuaciones da como resultado:

$$\left(\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{AA'}\right)\left(\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{BB'}\right)\left(\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C}\right) = -1$$

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$$

Lo que demuestra que P, Q y R son colineales.

$\Longleftarrow$
Usando la misma figura anterior, considérese los triángulos $AA'R$ y $BB'Q$, estos triángulos están en perspectiva con P como centro de perspectiva y las intersecciones de sus lados correspondientes son O, C, C', por tanto, estos puntos son colineales y los triángulos ABC y $A'B'C'$ están en perspectiva con O como centro de perspectiva. A la recta en que están P, Q y R se le llama el eje de perspectiva. ■

Teorema de Pappus

El teorema de Pappus fue demostrado por primera vez por Pappus de Alejandría, alrededor del año 300 a.C. Un enunciado de este teorema puede ser el siguiente:

Teorema 1.13. ***Teorema de Pappus*** *Si A, C, E, son tres puntos colineales y B, D, F son otros tres puntos colinelaes, y si las rectas AB, CD, EF se intersectan con las rectas DE, FA, BC, respectivamente, en los puntos P, Q, R, entonces estos son colineales.*

Este teorema tiene unas características completamente proyectivas, ya que no habla de distancias ni de ángulos, ni tampoco de ningún orden de unos puntos respecto de otros, solo de puntos que están en rectas (incidencia).

Demostración.
Sea UVW el triángulo formado por las intersecciones de las rectas AB, CD, Y EF, como se muestra en la figura. Entonces vemos que los puntos P, Q y R están sobre los lados de ese triángulo.

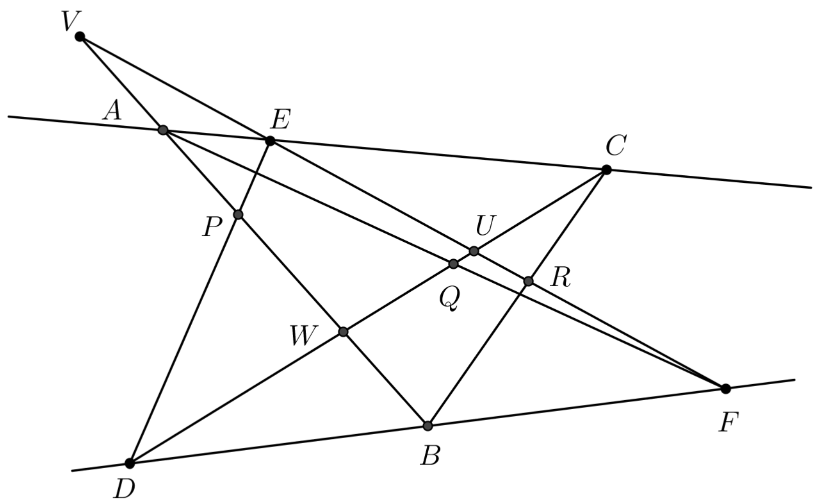


Figura 1.43:

Ahora, observemos que las transversales $P, D, E, A, Q, F, B, C, R, A, C, E, B, D, F$, cortan los lados del triángulo UVW. Entonces aplicando sucesivamente el teorema de Menelao obtenemos las siguientes relaciones:

Si P, D, E, son colineales entonces $\dfrac{VP}{PW} \cdot \dfrac{WD}{DU} \cdot \dfrac{UE}{EV} = -1.$ (1.1)

Si A, Q, F, son colineales entonces $\dfrac{WQ}{QU} \cdot \dfrac{UF}{FV} \cdot \dfrac{VA}{AW} = -1.$ (1.2)

Si B, C, R, son colineales entonces $\dfrac{UR}{RV} \cdot \dfrac{VB}{BW} \cdot \dfrac{WC}{CU} = -1.$ (1.3)

Si A, C, E, son colineales entonces $\dfrac{VE}{EU} \cdot \dfrac{UC}{CW} \cdot \dfrac{WA}{AV} = -1.$ (1.4)

Si B, D, F, son colineales entonces $\dfrac{UD}{DW} \cdot \dfrac{WB}{VB} \cdot \dfrac{VF}{FU} = -1.$ (1.5)

Multiplicando las relaciones (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) y (1.5) se obtiene que:

$$\left(\frac{VP}{PW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UE}{EV}\right)\left(\frac{WQ}{QU}\cdot\frac{UF}{FV}\cdot\frac{VA}{AW}\right)\left(\frac{UR}{RV}\cdot\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WC}{CU}\right)\left(\frac{VE}{EU}\cdot\frac{UC}{CW}\cdot\frac{WA}{AV}\right)\left(\frac{UD}{DW}\cdot\frac{WB}{VB}\cdot\frac{VF}{FU}\right)=-1$$

$$\frac{VP}{PW}\cdot\frac{WQ}{QU}\cdot\frac{UR}{RV}=-1$$

Nuevamente por el teorema de Menelao se tiene que los puntos P, Q y R son colineales. ■

Capítulo 2

Geometría elíptica

2.1. El Plano elíptico

Definición 2.1. ***Un plano elíptico*** *es un plano proyectivo real en el que hemos seleccionado una cónica imaginaria (cónica infinita).*

Construyamos un modelo de un Plano Elíptico, para ello consideremos la esfera unitaria y centro en el origen, es decir,

$$S = \{(a, b, c) \in R^3 | a^2 + b^2 + c^2 = 1\}.$$

Puntos del Plano Elíptico

Definición 2.2. *Dos puntos de una esfera se denominan antípodas si se encuentran en los extremos opuestos de un diámetro de la esfera.*

En la geometría elíptica definimos puntos como pares de puntos antípodas.

$$\mathcal{P} = \{[(x, y, z), (-x, -y, -z)], (x, y, z) \in S\}$$

A los puntos $[(x, y, z), (-x, -y, -z)]$ se les llama **puntos antípodas o bipuntos**.

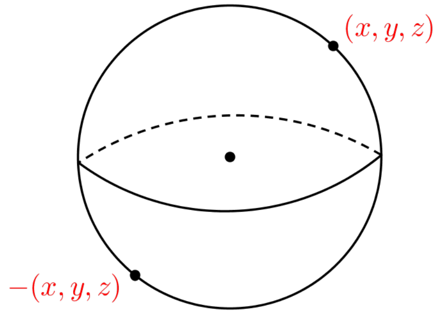


Figura 2.1: Puntos antípodas

Rectas del Plano Elíptico

Definición 2.3. *Un* ***círculo máximo*** *en S es un círculo que divide la esfera en dos partes. En otras palabras, círculo máximo es la intersección de S con un plano que pasa por el centro.*

Definimos rectas en el plano elíptico como círculos máximos sobre una esfera.
$\mathcal{L} = \{$Circunferencia de radio máximo de S$\}$

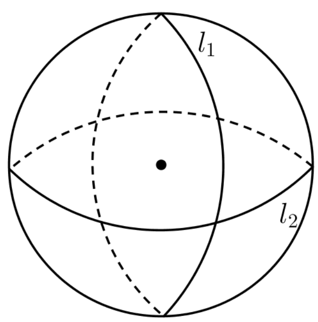


Figura 2.2: Rectas l_1, l_2

Lema 2.1. *A través de cualesquiera dos puntos no antípodas en una esfera pasa exactamente un círculo máximo.*

Demostración.
Sean P y Q puntos en la esfera, O el centro de la esfera. Si P, Q son dos puntos no antípodas en la esfera, entonces O, P y Q no están alineados en R^3, por lo que existe un único plano $\mathscr{P}$ que los contiene, y la intersección de $\mathscr{P}$ con la esfera es un círculo máximo que contiene P y Q.$\blacksquare$

Teorema 2.1. *Dos círculos máximos se intersectan en dos puntos antípodas.*

Demostración.
La intersección de dos planos por el origen es un círculo que pasa por el origen, que intersecta a la esfera en dos puntos antípodas.$\blacksquare$

Este teorema muestra que no existen líneas paralelas en la geometría elíptica.

Definición 2.4. *Llamaremos* ***modelo esférico*** *de la geometría elíptica al conjunto S formado por los pares de puntos antípodas de una esfera euclídea.*

Axioma 2.1. ***A-1*** *Un punto en la esfera no tiene más que un antípoda.*

Podemos entonces hablar del antípoda de un punto. Si B es el antípoda de A, entonces escribimos $B = A^a$ y $A = B^a$.

Definición 2.5. *Si dos puntos distintos A y B son no antípodas, el único círculo máximo pasando por A y B se denota por $\bigcirc AB$.*

Axioma 2.2. *Dos círculos máximos distintos inciden en al menos un punto.*

Definición 2.6. *Dados dos puntos no antípodas A y B, el* ***arco esférico*** *$\widehat{AB}$ es el conjunto de puntos consistiendo de A, B, y todos los puntos en $\bigcirc AB$ entre A y B. La medida de $\widehat{AB}$ es $d(A, B)$*

Axioma 2.3. *Para cualquier círculo máximo existe un punto tal que el círculo máximo consiste de puntos a distancia esférica un cuarto de círculo del punto dado.*

Tal punto se define como un polo del círculo máximo.

Definición 2.7. *Dado un punto en la esfera, un círculo máximo del cual el punto es un polo es llamado un círculo polar o polar del punto.*

Proposición 2.1. *Si A, B, C son puntos en una esfera, $\widehat{BA}$ y $\widehat{BC}$ son ambos un cuarto de círculo, y A y C no son iguales ni antípodas entonces B es un polo del círculo máximo $\bigcirc AC$.*

Demostración.
Sea B un punto y suponer que B es el polo de algún círculo máximo que contiene A y C. Pero solo existe un único círculo ya que A y C no son iguales ni antípodas. Por lo tanto B es un polo del $\bigcirc AC$. ■

Definición 2.8. *Dos arcos esféricos se llaman congruentes si ellos tienen la misma medida. Si los dos arcos son $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$ entonces escribimos $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$.*

Definición 2.9. *Sean A y B dos puntos en una esfera los cuales no son antípodas. Entonces el rayo esférico $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de todos los puntos C en el círculo máximo $\bigcirc AB$ tal que C está en $\bigcirc AB$ o B está entre A y C. Decimos que A es el vértice o punto final del rayo esférico. El rayo abierto con vértice A por B consiste de todos los puntos en $\overrightarrow{AB}$ exepto para A.*

2.2. Distancia y ángulos

Definición 2.10. *Dados dos puntos A y B de la esfera, se denomina distancia esférica entre ambos al menor de los arcos de extremos A y B de la circunferencia máxima obtenida mediante la intersección de la esfera con el plano que contiene al centro de la esfera y a dichos puntos.*

Si A y B son diametralmente opuetos entonces existirán infinitas circunferencias máximas que pasan por ellos, tomándose en este caso la semicircunferencia como distancia esférica entre ambos puntos.

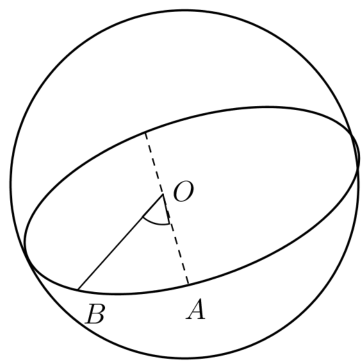


Figura 2.3: Distancia Esférica

Definición 2.11. *Se llama distancia de un punto A a una circunferencia máxima c a la distancia esférica entre A y el punto intersección de la circunferencia máxima dada con la circunferencia máxima perpendicular a ella que pasa por A.*

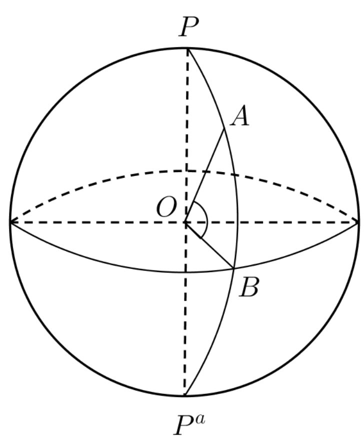


Figura 2.4:

Definición 2.12. *Sean A, B y C puntos de una esfera los cuales no yacen en un único círculo máximo. Entonces el ángulo esférico $\angle ABC$ con vértice B es la unión de los rayos* *esféricos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$. Estos rayos son conocidos como los lados del ángulo. El interior del ángulo es la intersección de dos hemisferios: el lado del círculo AB conteniendo C y el lado del círculo BC conteniendo A.*

Definición 2.13. *Sea el $\angle ABC$ un ángulo esférico. Tomando los puntos D y E en $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, los cuales están ambos a un cuarto de círculo de B. Entonces la medida del $\angle ABC$ se define como la $m\widehat{DE}$.*

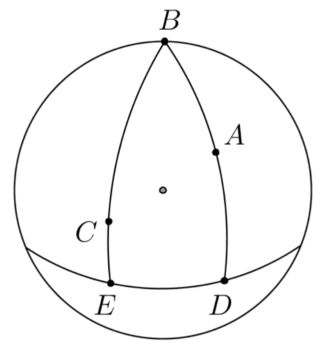


Figura 2.5: $\angle ABC = m\widehat{DE}$

Definición 2.14. *Dos ángulos esféricos son llamados congruentes si sus medidas son las mismas. Si los ángulos son: $\angle ABC$ y $\angle DEF$ entonces escribimos $\angle ABC \cong \angle DEF$. Los ángulos son llamados suplementarios si sus medidas suman $180°$. Los ángulos son llamados complementarios si sus medidas suman $90°$.*

Proposición 2.2. *Suponer que el $\angle ABC$ y el $\angle DBC$ son tal que $\overrightarrow{BA}$ es opuesto a $\overrightarrow{BD}$. Entonces el $\angle ABC$ y el $\angle DBC$ son suplementarios.*

Deomostración.
Sean los puntos E, F y G en $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BD}$ respectivamente.

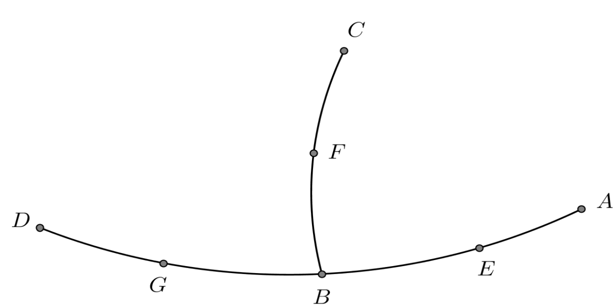


Figura 2.6:

Luego, $m\widehat{BE} = m\widehat{BF} = m\widehat{BG} = \dfrac{\pi}{2}$. Como $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BD}$ son opuestos, E y G son un semicírcculo en el mismo círculo máximo, asi $E = G^a$. Todo de E, F y G yace en el polar de B. F no puede ser el mismo que E o G ya que si cualquiera de ellos fuera el caso, ni $\angle ABC$ ni $\angle DBC$ sería un ángulo. Entonces EFG forma un semicírculo tal que $m\widehat{EF} + m\widehat{FG} = \pi$, asi

$$m\angle ABC + m\angle DBC = \pi.$$

Por lo tanto los ángulos $\angle ABC$ y $\angle DBC$ son suplementarios por definición. ■

Definición 2.15. *Dados los ángulos $\angle ABC$ Y $\angle DBE$ tal que $\overrightarrow{BA}$ es opuesto a $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{BC}$ es opuesto $\overrightarrow{BE}$. Entonces a los ángulos $\angle ABC$ y $\angle DBE$ se les llama ángulos verticales.*

Proposición 2.3. *Ángulos verticales son congruentes.*

Demostración.
Sean los ángulos $\angle ABC$ y $\angle DBE$ ángulos verticales. Entonces el $\angle ABC$ y el $\angle DBE$ son suplementarios al ángulo $\angle CBD$, Asi:

$$m\angle CBD = 180 - m\angle ABC \qquad (1)$$

$$m\angle CBD = 180 - m\angle DBE \qquad (2)$$

Luego de (1) y (2) podemos ver que los los ángulos son congruentes

$$\angle ABC \cong \angle DBE. ■$$

Biángulos

Definición 2.16. *Una **luna o biángulo** es la unión de un ángulo con el antípoda de su vértice. La medida de una luna es la medida de su ángulo asociado. Si el ángulo es $\angle ABC$ entonces usamos la notación BCB^aAB para referirse a esta luna, donde B^a es el antípoda de B. Los puntos B y B^a son los vértices de la luna.*

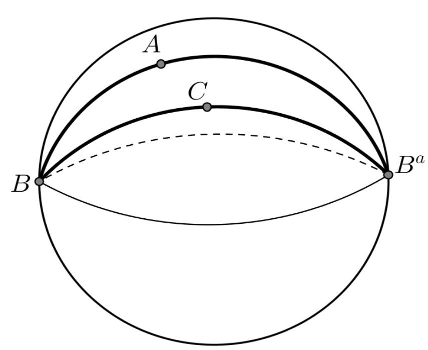


Figura 2.7: Ángulo $\angle ABC$, su interior, y la luna asociada BAB^aCB

El biángulo tiene dos ángulos: un ángulo α en el vértice B y uno α' en el vértice B^a. Además, este ángulo α es llamado el ángulo del biángulo.

Se llaman **polos de un círculo máximo** a los extremos del diámetro perpendicular a su plano, trazado por el centro de la esfera. Todo círculo máximo posee dos polos. Dos círculos máximos son **perpendiculares** si el ángulo esférico por ambos es recto.
La condición necesaria y suficiente para que dos círculos máximos sean perpendiculares es que uno de ellos pase por los polos del otro, en cuyo caso éste pasa por los polos de aquél.

Teorema 2.2. *Si dos círculos máximos son perpendiculares entonces cada uno pasa por los polos del otro. Recíprocamente, si un círculo máximo pasa por los polos de otro, los dos círculos máximos son perpendiculares.*

Demostración.
$\Longrightarrow$
Sean dos círculos perpendiculares. Por el teorema 2.1 se sabe que estos se intersectan en dos puntos antípodas. Sean estos puntos B, B^a. Sea A en el primer círculo y C en el segundo quienes están a un cuarto de círculo de B. Luego $m\widehat{AC} = m\angle ABC$ por definición y $m\widehat{AB} = m\widehat{AC} = \pi/2$. Por lo tanto A es el polo del $\bigcirc BC$, por la proposición 2.1. y como $m\widehat{BC} = m\widehat{AC} = \pi/2$, C es por definición polo del $\bigcirc AB$.

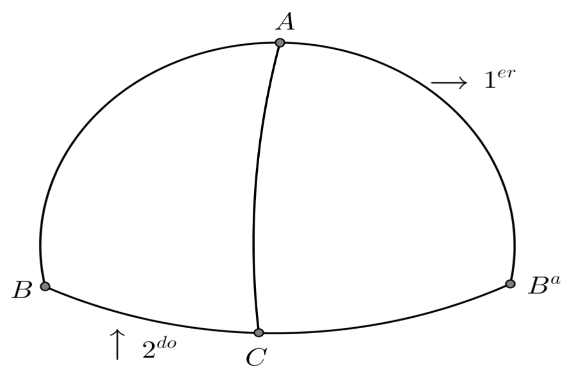


Figura 2.8:

$\Longleftarrow$
Suponer que uno de los círculos pasa por el polo A del segundo círculo. Sea el círculo que pasa por AB el primer círculo y el círculo que pasa por BC el segundo. Por el teorema 2.1 estos círculos se intersectan en dos puntos antípodas B, B^a.
Escoger un punto C del segundo círculo tal que C está un cuarto de círculo de B. Por definición de polo, $\widehat{AB}$ es un cuarto de círculo. por definición, $m\angle ABC = m\widehat{AC}$. Pero $m\widehat{AC} = \pi/2$ ya que A es un polo del $\bigcirc BC$, es decir $m\angle ABC = \pi/2$. Por lo tanto el $\bigcirc AB$ es perpendicular al $\bigcirc BC$. ■

Teorema 2.3. *Suponer que l es una línea esférica y P es un punto que no está en l*
a) Si P es un polo de l, entonces para cualquier punto Q en l, la distancia esférica $PQ = \pi/2$.
b) Suponer que para dos puntos Q_1, Q_2 en l tenemos $PQ_1 = \pi/2$ y $PQ_2 = \pi/2$ entonces P es un polo de l.

Demostración.
a) Si P es un polo entonces, por definición, $PQ = \angle POQ = \pi/2$.
b) Suponer que tenemos dos puntos Q_1, Q_2 tales que $PQ_1 = PQ_2 = \pi/2$.
Como $PQ_1 = PQ_2 = \pi/2$ entonces OP es perpendicular al plano $\mathscr{L}$ que contiene O, Q_1 y Q_2. Y como sabemos l es la intersección de $\mathscr{L}$ con S, P debe ser un polo. ■

Axioma 2.4. *Suponner que en los ángulos esféricos $\angle A_1B_1C_1$ y $\angle A_2B_2C_2$, tenemos $\widehat{A_1B_1} \cong \widehat{A_2B_2}$ y $\widehat{B_1C_1} \cong \widehat{B_2C_2}$. Entonces $\angle A_1B_1C_1 \cong \angle A_2B_2C_2$ si y sólo si $\widehat{A_1C_1} \cong \widehat{A_2C_2}$.*

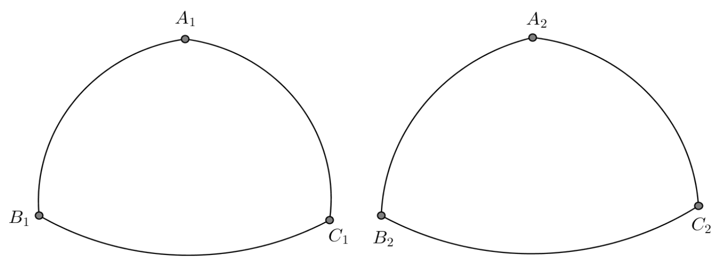


Figura 2.9:

2.3. Triángulos

Triángulos

Definición 2.17. *Sean A,B y C tres puntos en una esfera los cuales no yacen en un solo círculo máximo. Entonces el triángulo esférico $\triangle ABC$ es la unión de los tres arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$. Cada punto A, B y C es llamado un vértice del $\triangle ABC$. Los arcos $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{AC}$ son llamados los lados del $\triangle ABC$. Los ángulos esféricos $\angle CAB, \angle ABC$ y $\angle BCA$ (también denotados por $\angle A, \angle B$ y $\angle C$) son los ángulos del $\triangle ABC$.*

Definición 2.18. *Dos triángulos son llamados colunares si ellos tienen dos vértices en común y un par de vértices antípodas.*

Es decir, los triángulos que tienen la forma $\triangle ABC$ y $\triangle A^aBC$ donde A y A^a son antípodas.

Definición 2.19. *Dos triángulos son llamados antípodas si ellos pueden ser expresados como $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, donde A', B' y C' son antípodas a A, B y C, respectivamente.*

Definición 2.20. *Un triángulo esférico es llamado triángulo rectángulo si al menos uno de sus ángulos es un ángulo recto. Un lado de un triángulo que es opuesto al ángulo recto es llammado hipotenusa del triángulo rectángulo. Un lado del triángulo que no es la hipotenusa se dice que es un cateto del triángulo.*

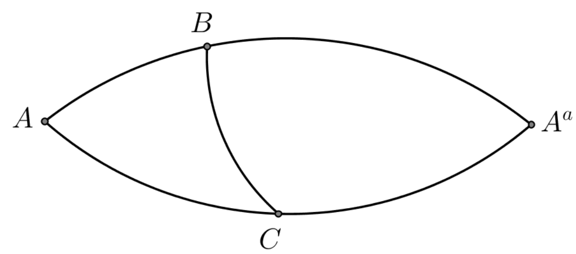


Figura 2.10: Triángulos colunares. $\triangle ABC$ y $\triangle A^a BC$

Definición 2.21. *Si el triángulo esférico $\triangle ABC$ satisface la propiedad de que uno de sus lados es un cuarto de círculo, entonces decimos que el $\triangle ABC$ es quadrantal. Un lado que es un cuarto de círculo se llama* ***lado recto.***

Definición 2.22. *Un triángulo $\triangle ABC$ es llamado isósceles con vértice A si $\widehat{AB} \cong \widehat{AC}$. los ángulos en B y C son los ángulos de la base del triángulo. El triángulo es llamado equilátero si todos sus lados son congruentes.*

Teorema 2.4. *En un triángulo esférico isósceles, los ángulos opuestos a los lados congruentes son también congruentes.*

Demostración.
Sea el $\triangle ABC$ un triángulo esférico, con $\widehat{AB} \cong \widehat{AC}$.
Luego comparar los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACB$:

$\widehat{AB} \cong \widehat{AC}, \widehat{BC} \cong \widehat{CB}$ y $\widehat{AC} \cong \widehat{AB}$,
Ahora aplicando el axioma 2.4, tenemos que los ángulos $\angle ABC$ y$\angle ACB$ son congruentes

$$\angle ABC \cong \angle ACB. \blacksquare$$

El recíproco del teorema 2.4 también se cumple.
Asumir sin pérdida de generalidad que el $\angle B \cong \angle C$.
Entonces $\widehat{BC} \cong \widehat{BC}$, asi en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACB$,

$$\triangle ABC \cong \triangle ACB.$$

Por lo tanto:

$$\widehat{AB} \cong \widehat{AC}$$

Pero estos son lados opuestos a B y C, por lo tanto el $\triangle ABC$ es isósceles.

Proposición 2.4. *Un par de ángulos en un triángulo son ángulos rectos si y sólo si los lados opuestos son lados rectos.*

Demostración.

$\Longrightarrow$

Sea el $\triangle ABC$ un triángulo esférico. Suponer que en el $\triangle ABC$, los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ son rectos. Luego los círculos máximos $\bigcirc AB$ y $\bigcirc AC$ son perpendiculares al $\bigcirc BC$, asi, por el teorema 2.2 cada uno pasa por los polos del $\bigcirc BC$.

Como los círculos $\bigcirc AB$ y $\bigcirc AC$ son distintos, estos se encuentran en únicamente dos puntos (que deberían ser los polos del $\bigcirc BC$). Como A es uno de estos puntos, él es un polo del $\bigcirc BC$, asi $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ son lados rectos, es decir, por definición de polo se tiene que $m\widehat{AB} = m\widehat{AC} = \pi/2$.

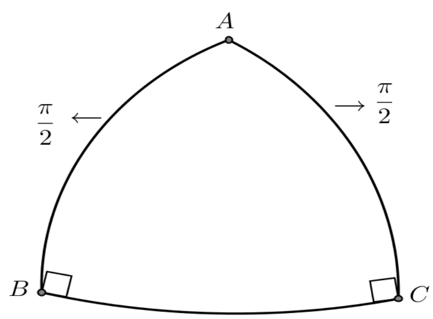


Figura 2.11:

$\Longleftarrow$

Suponer que ambos lados $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ son rectos. Por la proposición 2.1, A es un polo del $\bigcirc BC$. Por el teorema 2.2 los círculos $\bigcirc AB$ y $\bigcirc AC$ son perpendiculares al $\bigcirc BC$, asi el $\triangle ABC$ tiene ángulos rectos en B y en C . ■

Proposición 2.5. *Suponer que el $\triangle ABC$ tiene un ángulo recto en B. Entonces uno de los otros ángulos del triángulo es agudo, recto u obtuso, si su lado opuesto es agudo, recto u obtuso, respectivamente*

Demostración.

Por el teorema 2.2, el $\bigcirc AB$ pasa por los polos del $\bigcirc BC$. Sea A' el polo del $\bigcirc BC$ en el mismo lado del $\bigcirc BC$ como A.

Luego $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BA'}$ son perpendiculares al $\bigcirc BC$ en B, y A, A' están en el mismo lado del $\bigcirc BC$. Luego $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA'}$.

Si el lado $\widehat{BA}$ es recto, entonces $A = A'$. Entonces por el teorema 2.2, el $\bigcirc AC$ es perpendicular al $\bigcirc BC$, asi el $\angle C$ es un ángulo recto.

Si el lado $\widehat{BA}$ es agudo, entonces A está entre B y A'. luego la $m\widehat{BA} < m\widehat{BA'} = \pi/2$. Luego podemos decir que A está en el interior del $\angle A'CB$. Además, $m\angle ACB < m\angle A'CB = \pi/2$, asi el $\angle ACB$ es agudo.

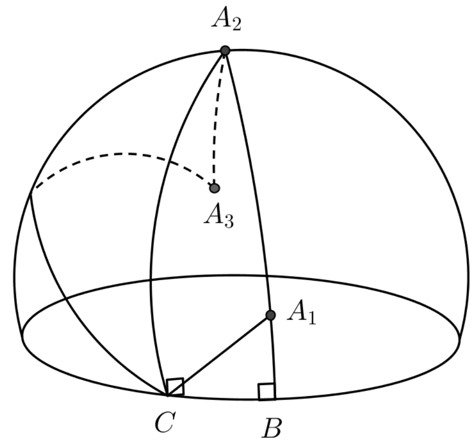


Figura 2.12: Proposición. Casos $A = A_1, A_2, A_3$

Si el lado $\widehat{BA}$ es obtuso, entonces A' está entre B y A (como $m\widehat{BA} > m\widehat{BA'} = \pi/2$). Luego A' está en el interior del $\angle ACB$. Asi $m\angle ACB > m\angle A'CB = \pi/2$, asi el $\angle ACB$ es obtuso. ■

Teorema 2.5. *Si un triángulo esférico tiene dos lados de medida a y los dos ángulos opuetos tienen medida A, entonces a y A son agudos, rectos u obtusos.*

Definición 2.23. *El interior de un triángulo es la intersección de los interiores de sus ángulos. El exterior de un triángulo es el conjunto de puntos que no están ni en el triángulo ni en su interior.*

Ahora introducimos una noción que no tiene equivalencia en la geometría del plano Euclideano, el cual será de ayuda para comprender muchas relaciones en triángulos esféricos que no ocurren en triángulos en el plano.

Definición 2.24. *Sea el $\triangle ABC$ un triángulo esférico. Definimos el triángulo polar $\triangle A'B'C'$ del $\triangle ABC$ como sigue. Sea A' el polo del $\bigcirc BC$ situado en el mismo lado del $\bigcirc BC$ como A. Definimos B' y C' análogamente. B' es el polo del $\bigcirc AC$ en el mismo lado del $\bigcirc AC$ como B, y C' es el polo del $\bigcirc AB$ en el mismo lado del $\bigcirc AB$ como C.*

El siguiente teorema es una de las razones por las que el triángulo polar is algunas veces referido como el triángulo dual.

Teorema 2.6. *El triángulo polar de $\triangle A'B'C'$ es el $\triangle ABC$*

Demostración.
Sea $\triangle ABC$ un triángulo esférico y $\triangle A'B'C'$ su triángulo polar. Probaremos que el $\triangle ABC$ es el polar del $\triangle A'B'C'$.
Por hipótesis, B' es polo de $\bigcirc AC$. Por definición de polo se sabe que $AB' = \pi/2$, similarmente, $AC' = \pi/2$. Por la parte b) del teorema 2.3 tenemos que A es polo del $\bigcirc B'C'$ en

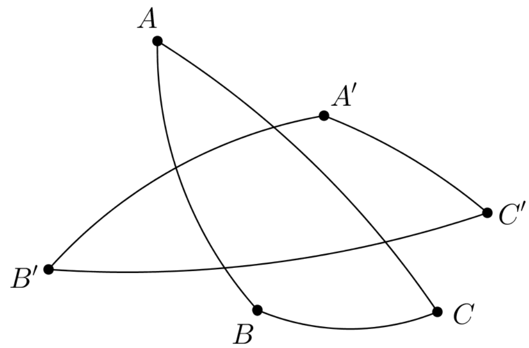


Figura 2.13: Triángulo polar $\triangle A'B'C'$ del $\triangle ABC$.

el mismo hemisferio que A'. De la misma forma se tiene que B es el polo del $\bigcirc A'C'$ en el mismo hemisferio que B' y C es el polo del $\bigcirc A'B'$ en el mismo hemisferio que C'. Por lo tanto, por definición, el $\triangle ABC$ es el triángulo polar del $\triangle A'B'C'$. ■

El siguiente teorema es la justificación por la que algunas veces se refiere al triangulo polar como el triángulo suplementario.

Teorema 2.7. *Si el $\triangle ABC$ es un triángulo esférico y el $\triangle A'B'C'$ es el triángulo polar del $\triangle ABC$, entonces*

$$m\angle A' = \pi - m\widehat{BC} \tag{3.1}$$

$$m\angle B' = \pi - m\widehat{AC} \tag{3.2}$$

$$m\angle C' = \pi - m\widehat{AB} \tag{3.3}$$

$$m\widehat{A'B'} = \pi - m\angle C \tag{3.4}$$

$$m\widehat{A'C'} = \pi - m\angle B \tag{3.5}$$

$$m\widehat{B'C'} = \pi - m\angle A \tag{3.6}$$

Demostración.
Vamos a probar las relaciones (3.4), (3.5) y (3.6).
Extender los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ hasta que incidan con $\widehat{B'C'}$ en los puntos D y E.

Entonces como B' es el polo de AE, $\widehat{B'E} = \pi/2$.
Como C' es el polo de AD, $\widehat{DC'} = \pi/2$.
Entonces $\widehat{B'E} + \widehat{DC'} = \pi$ podemos reescribir esta relación

$$\widehat{B'E} + \widehat{C'D} = \widehat{B'C'} + \widehat{DE}$$

pero $m\widehat{DE} = m\angle A$

$$\Longrightarrow \pi = m\widehat{B'C'} + m\angle A$$

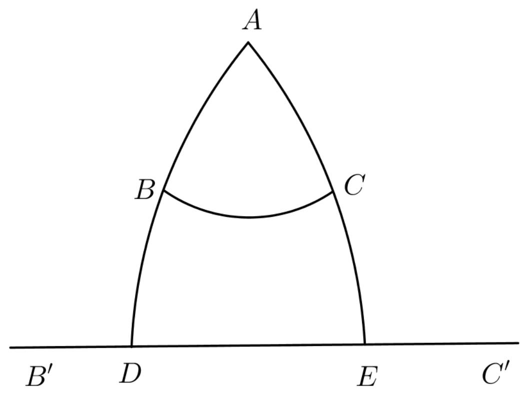


Figura 2.14:

$$\Longrightarrow m\widehat{B'C'} = \pi - m\angle A$$

De la misma forma podemos obtener las otras relaciones.
Asi, $m\widehat{A'B'} = \pi - m\angle C$ y la $m\widehat{A'C'} = m\angle B$.

Para las relaciones (3.1), (3.2) y (3.3) usaremos el teorema 2.6. Como el $\triangle ABC$ es el triángulo polar del $\triangle A'B'C'$ se dan las relaciones:

$$m\widehat{AB} = \pi - m\angle C' \Longrightarrow m\angle C' = \pi - m\widehat{AB}.$$

$$m\widehat{AC} = \pi - m\angle B' \Longrightarrow m\angle B' = \pi - m\widehat{AC}.$$

$$m\widehat{BC} = \pi - m\angle A' \Longrightarrow m\angle A' = \pi - m\widehat{BC}.\blacksquare$$

2.4. Congruencia

En esta sección discutiremos que condiciones son necesarias en los lados y los ángulos de dos triángulos para que sean congruentes. Primero establecer la definición, que es la misma como en la geometría plana.

Definición 2.25. *Dos triángulos esféricos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ se llaman congruentes si $\widehat{AB} \cong \widehat{DE}$, $\widehat{AC} \cong \widehat{DF}$, $\widehat{BC} \cong \widehat{EF}$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$. Decimos que ángulos y lados correspondientes son todos congruentes.*

Los lados y ángulos correspondientes en la definición 2.25 están determinados por la correspondencia unívoca específica de los vértices de cada triángulo: $A \leftrightarrow D$,$B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow E$. Así decir que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ es diferente de decir que $\triangle ACB \cong \triangle DEF$. Aquí todas las propiedades de congruencia para triángulos esféricos serán establecidas como teoremas.

Teorema 2.8. ***Lado-Lado-Lado*** *Suponer que en los triángulos esféricos.* $\triangle A_1B_1C_1$ *y el* $\triangle A_2B_2C_2$*, tenemos:*

$$\widehat{A_1B_1} \cong \widehat{A_2B_2}, \widehat{B_1C_1} \cong \widehat{B_2C_2}, \widehat{A_1C_1} \cong \widehat{A_2C_2}.$$

Entonces EL $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

Demostración.
Aplicando directamente el axioma 2.4 tenemos que:

$$\angle A_1B_1C_1 \cong \angle A_2B_2C_2$$

$$\angle B_1A_1C_1 \cong \angle B_2A_2C_2$$

$$\angle A_1C_1B_1 \cong \angle A_2C_2B_2$$

Asi, por definición de triángulos esféricos congruentes tenemos que

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2. \blacksquare$$

Teorema 2.9. ***Lado-Ángulo-Lado*** *Suponer que en los triangulos esfericos* $\triangle A_1B_1C_1$ *y* $\triangle A_2B_2C_2$*, tenemos:*

$$\widehat{A_1B_1} \cong \widehat{A_2B_2}, \widehat{B_1C_1} \cong \widehat{B_2C_2}, \angle B_1 \cong B_2.$$

Entonces el $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

Demostración.
Sean los triángulos $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$. Dadas las hipótesis podemos aplicar el axioma 2.4. Como

$$\widehat{A_1B_1} \cong \widehat{A_2B_2}, \widehat{B_1C_1} \cong \widehat{B_2C_2}, \angle B_1 \cong B_2 \Longrightarrow \widehat{A_1C_1} \cong \widehat{A_2C_2}.$$

Asi podemos decir que

$$\widehat{A_1B_1} \cong \widehat{A_2B_2}, \widehat{B_1C_1} \cong \widehat{B_2C_2}, \widehat{A_1C_1} \cong \widehat{A_2C_2}.$$

Lo que nos da como resultado una correspondencia (Lado-Lado-Lado) entre los triángulos, luego el teorema 2.8 implica que los triángulos son congruentes

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2. \blacksquare$$

Teorema 2.10. ***Ángulo-Lado-Ángulo*** *Suponer que en los triángulos esféricos* $\triangle A_1B_1C_1$ *y* $\triangle A_2B_2C_2$*, tenemos:*

$$\widehat{B_1C_1} \cong \widehat{B_2C_2}, \angle B_1 \cong \angle B_2, \angle C_1 \cong \angle C_2.$$

Entonces el $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

Demostración.
Sean los triángulos $\triangle A_1'B_1'C_1', \triangle A_2'B_2'C_2$ los triángulos polares de $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ respectivamente. Aplicando el teorema 2.7 tenemos que

$$m\angle A_1' = \pi - m\widehat{B_1C_1} = \pi - m\widehat{B_2C_2} = m\angle A_2'.$$
$$\Longrightarrow \angle A_1' \cong \angle A_2'.$$
$$m\widehat{A_1'B_1'} = \pi - \angle C_1 = \pi - m\angle C_2 = m\widehat{A_2'B_2'}.$$
$$\Longrightarrow \widehat{A_1'B_1'} \cong \widehat{A_2'B_2'}.$$
$$m\widehat{A_1'C_1'} = \pi - m\angle B_1 = \pi - m\angle B_2 = m\widehat{A_2'C_2'}.$$
$$\Longrightarrow \widehat{A_1'C_1'} \cong \widehat{A_2'C_2'}.$$

Asi, obtenemos una correspondencia (Lado-Ángulo-Lado) entre los triángulos $\triangle A_1'B_1'C_1'$ y $\triangle A_2'B_2'C_2'$. Luego por el teorema de congruencia esférico (Lado-Ángulo-Lado), $\triangle A_1'B_1'C_1' \cong \triangle A_2'B_2'C_2'$.
Asi, todos los lados y ángulos correspondientes de los triángulos $\triangle A_1'B_1'C_1'$ y $\triangle A_2'B_2'C_2'$ tienen la misma medida. Usando el teorema 2.7 nuevamente:

$$\angle A_1 = \pi - m\widehat{B_1'C_1'} = \pi - m\widehat{B_2'C_2'} = m\angle A_2.$$
$$\Longrightarrow \angle A_1 \cong \angle A_2.$$

$$m\widehat{A_1B_1} = \pi - m\angle C_1' = \pi - m\angle C_2' = m\widehat{A_2B_2}.$$
$$\Longrightarrow \widehat{A_1B_1} \cong \widehat{A_2B_2}.$$
$$m\widehat{A_1C_1} = \pi - m\angle B_1' = \pi - m\angle B_2' = m\widehat{A_2'C_2}.$$
$$\Longrightarrow \widehat{A_1C_1} \cong \widehat{A_2C_2}.$$

Asi tenemos que lados y ángulos correspondientes de los triángulos $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ son congruentes.
Por lo tanto
$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2.\blacksquare$$

Teorema 2.11. ***Ángulo-Ángulo-Ángulo*** *Suponer que en los triángulos esféricos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$, tenemos:*

$$\angle A_1 \cong \angle A_2, \angle B_1 \cong \angle B_2, \angle C_1 \cong \angle C_2.$$

Entonces el $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

Demostración.
Sean los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ y los triángulos $\triangle A_1'B_1'C_1'$, $\triangle A_2'B_2'C_2'$ sus triángulos polares respectivamente.

Por el teorema 2.7,

$$m\widehat{B_1'C_1'} = \pi - m\angle A_1 = \pi - m\angle A_2 = m\widehat{B_2'C_2'}.$$

$$\Longrightarrow \widehat{B_1'C_1'} \cong \widehat{B_2'C_2'}.$$

$$m\widehat{A_1'B_1'} = \pi - m\angle C_1 = \pi - m\angle C_2 = m\widehat{A_2'B_2'}.$$

$$\Longrightarrow \widehat{A_1'B_1'} \cong \widehat{A_2'B_2'}.$$

$$m\widehat{A_1'C_1'} = \pi - m\angle B_1 = \pi - m\angle B_2 = m\widehat{A_2'C_2'}.$$

$$\Longrightarrow \widehat{A_1'C_1'} \cong \widehat{A_2'C_2'}.$$

Por el teorema de congruencia esférica (Lado-Lado-Lado) obtenemos que

$$\triangle A_1'B_1'C_1' \cong \triangle A_2'B_2'C_2'.$$

Asi, ángulos y lados correspondientes de los triángulos $\triangle A_1'B_1'C_1'$ Y $\triangle A_2'B_2'C_2'$ son congruentes.

Aplicando nuevamente el teorema 2.7 tenemos:

$$m\widehat{B_1C_1} = \pi - m\angle A_1' = \pi - m\angle A_2' = m\widehat{B_2C_2}.$$

$$m\widehat{A_1B_1} = \pi - m\angle C_1' = \pi - m\angle C_2' = m\widehat{A_2B_2}.$$

$$m\widehat{A_1C_1} = \pi - m\angle B_1' = \pi - m\angle B_2' = m\widehat{A_2C_2}$$

Asi, tenemos que en los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ sus corresponientes lados y ángulo tienen la misma medida, por lo tanto son congruentes.
Por definición

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2 \blacksquare.$$

2.5. Desigualdades

Recalcar que en el plano la suma de las medidas de los ángulos internos en un triángulo es 180°. Esto no es cierto para triángulos esféricos, y es probablemente la diferencia más importante entre triángulos en el plano y triángulos en la esfera. Primero examimenos esta interrogante en el caso de triángulos rectángulos.

Teorema 2.12. *En un triángulo rectángulo esférico, la suma de las medidas de los ángulos es mayor que π.*

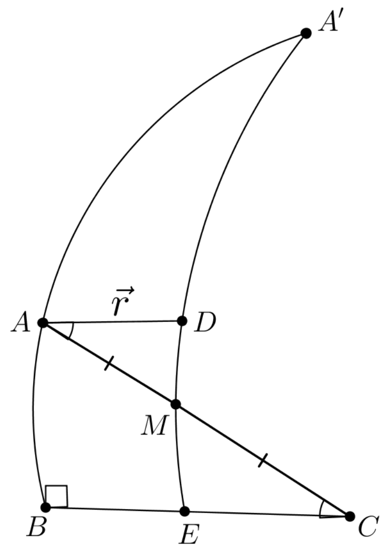


Figura 2.15:

Demostración.
Sea el $\triangle ABC$ un triángulo esférico. Sin pérdida de generalidad suponer que el $\triangle ABC$ tiene un ángulo recto en B. Si cualquiera de los ángulos en A o C es recto u obtuso, ($m\angle A + m\angle B + m\angle C > \pi$.)

Asumir que los ángulos en A y C son agudos, por el teorema 2.5 los lados opuestos $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$ son agudos también. Sea A' el polo del $\bigcirc BC$ en el mismo lado del $\bigcirc BC$ que A. Entonces como $\widehat{AB}$ es agudo, A esta entre A' y B.
Entonces el $\angle A'AC$ es obtuso, ya que su medida es el suplemento de la medida del $\angle A$. Como el $\angle C$ es agudo, $m\angle C < m\angle A'AC$. Luego, existe un rayo $\overrightarrow{r}$ que parte de A formando un ángulo con $\overrightarrow{AC}$ cuya medida es la misma que la de el $\angle C$, y tal que $\overrightarrow{r}$ está en el mismo lado del $\bigcirc AC$ que A'.

luego, los puntos de $\overrightarrow{r}$ están en el interior del $\angle A'AC$ (exepto para A). Sea M el punto medio del $\widehat{AC}$. Ahora $\overrightarrow{r}$ incide con $\widehat{A'M}$ en un punto al que llamaremos D que yace entre A' y M.

Como A y A' están en el mismo lado del $\bigcirc BC$, los puntos de $\overrightarrow{CA}$ (exepto para C) yacen en el mismo lado del $\bigcirc BC$ que A (también en el mismo lado del $\bigcirc BC$ que A'), asi M está en el mismo lado del $\bigcirc BC$ que A' por lo que $\widehat{A'M}$ es agudo.

Como D está entre M y A', $\widehat{A'D}$ también es agudo. Como M está entre A y C, M está en el interior del $\angle AA'C$. Asi $\overrightarrow{A'M}$ también está en el interior del $\angle AA'C$ (exepto para A'), e incide con $\widehat{BC}$ en un punto E entre B y C.

Como $\overrightarrow{A'M}$ pasa por el polo A' del $\bigcirc BC$, incide con $\widehat{BC}$ en un ángulo recto. Asi, $m\angle MEC$ es recto.

Como $\widehat{AM} \cong \widehat{MC}$ (por definición de M), $\angle AMD \cong \angle CME$ (por ser ángulos verticales) y $\angle MAD \cong \angle MCE$ (por defición de D), obtenemos que $\triangle AMD \cong \triangle CME$ por el criterio de congruencia esférico (Ángulo-Lado-Ángulo).

Entonces como el $\triangle CME$ tiene un ángulo recto en E, el $\triangle AMD$ tiene un ángulo recto en D. Entonces el $\triangle A'DA$ tiene un ángulo recto en D también. Ya que $\widehat{A'D}$ es agudo, por el teorema 2.5 aplicada al $\triangle A'AD$, el $\angle A'AD$ es agudo.
Pero entonces el $\angle BAD$ es obtuso. Como el $\angle BAC$ es agudo, la $m\angle BAC < m\angle BAD$. Ahora todo el rayo $\overrightarrow{A'M}$ está en el mismo lado del $\bigcirc AB$ exepto para A', asi que D y M están en el mismo lado del $\bigcirc AB$.

Luego M está en el interior del $\angle BAD$. Asi,

$$m\angle BAD = m\angle BAC + m\angle CAD = m\angle A + m\angle C.$$

Asi, la suma de las medidas del $\angle A$ y el $\angle C$ es mayor que $\pi/2$. Como el $\angle B$ es un ángulo recto, la suma de las medidas de los ángulos $\angle A, \angle B$ Y $\angle C$ es al menos π. ■

Teorema 2.13. *En un tríangulo esférico, la suma de las medidas de los ángulos es mayor que π.*

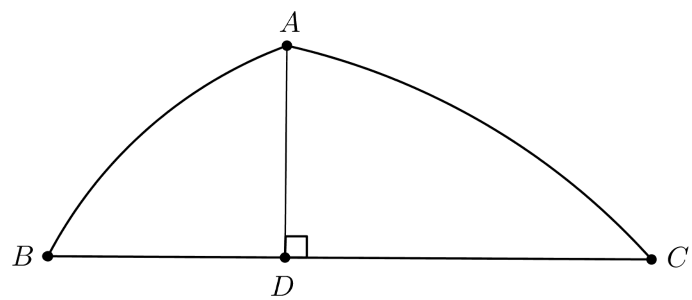


Figura 2.16:

Demostración.
Sea $\triangle ABC$ un triángulo esférico. Si el triángulo dado es rectángulo, aplicamos el teorema 2.12.
Si el triángulo dado tiene solo un ángulo agudo, entonces la suma de las medidas de los otros dos (ambos obtusos) deben ser mayor que 180°.
Ahora, suponer que el $\triangle ABC$ tiene dos ángulos agudos, digamos en B y en C. Entonces el pie de la perpendicular más corta de A al círculo BC es un punto D entre B y C. Luego la suma de las medidas de los ángulos que no son rectos en el $\triangle ADB$ es mayor que 90°. Lo mismo sucede en el $\triangle ADC$.

Pero la suma de las medidas de los ángulos en el $\triangle ABC$ es:

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle BAD + m\angle CAD + m\angle B + m\angle C$$

Como D está entre B y C, entonces la suma es:

$$(m\angle B + m\angle BAD) + (m\angle C + m\angle CAD)$$

El cual por el teorema 2.12 es mayor que $\pi/2 + \pi/2 = \pi$. ■

Teorema 2.14. *En cualquier triángulo esférico, la suma de las medidas de los lados es menor que 2π.*

Demostración.
Sea el triángulo esférico $\triangle ABC$, y sea su triángulo polar el $\triangle A'B'C'$. Por teorema 2.13 tenemos que $m\angle A' + m\angle B' + m\angle C' > \pi$. Pero por teorema 2.7, tenemos que:

$$m\angle A' = \pi - m\widehat{BC}, m\angle B' = \pi - m\widehat{AC}, m\angle C' = \pi - m\widehat{AB}$$

Luego

$$m\angle A' + m\angle B' + m\angle C' = (\pi - m\widehat{BC}) + (\pi - m\widehat{AC}) + (\pi - m\widehat{AB}) > \pi$$

$$(\pi - m\widehat{BC}) + (\pi - m\widehat{AC}) + (\pi - m\widehat{AB}) > \pi$$
$$3\pi - \pi > m\widehat{AB} + m\widehat{BC} + m\widehat{AC}$$
$$2\pi > m\widehat{AB} + m\widehat{BC} + m\widehat{AC}$$

Obteniendo asi la expresión deseada

$$m\widehat{AB} + m\widehat{AC} + m\widehat{BC} < 2\pi. ■$$

Teorema 2.15. *La suma de las medidas de cualesquiera dos lados de un triángulo esférico es mayor que la medida del tercero.*

Sin duda etse teorema, comúnmente es conocido como la desiguladad del triángulo en la esfera.

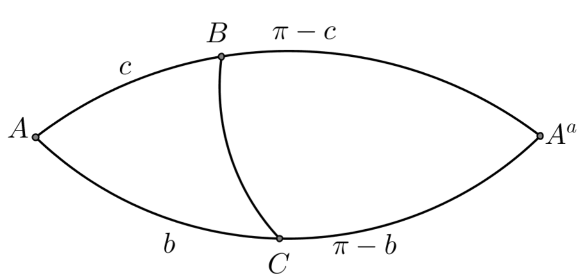


Figura 2.17:

Demostración.
Sea el triángulo esférico $\triangle ABC$ y sea el triángulo $\triangle A^aBC$ un triángulo colunar con el

$\triangle ABC$. Luego, $m\widehat{A^aB} = \pi - m\widehat{AB}$, y $m\widehat{A^aC} = \pi - m\widehat{AC}$. Aplicando el teorema 2.14 al triángulo $\triangle A^aBC$, obtenemos:

$$(\pi - m\widehat{AB}) + (\pi - m\widehat{AC}) + m\widehat{BC} < 2\pi$$

Luego,

$$2\pi - 2\pi + m\widehat{BC} < m\widehat{AB} + m\widehat{AC}$$

De donde se obtiene el resultado

$$m\widehat{BC} < m\widehat{AB} + m\widehat{AC}. \blacksquare$$

Teorema 2.16. *En cualquier triángulo esférico $\triangle ABC$, tenemos*

$$m\angle A + m\angle B < \pi + m\angle C \tag{3.7}$$

$$m\angle B + m\angle C < \pi + m\angle A \tag{3.8}$$

$$m\angle A + m\angle C < \pi + m\angle B \tag{3.9}$$

$$\pi < m\angle A + m\angle B + m\angle C < 3\pi \tag{3.10}$$

Demostración.
Sea el triángulo esférico $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ el triángulo polar de $\triangle ABC$.
Por el teorema 2.15 tenemos que $m\widehat{B'C'} + m\widehat{A'C'} > m\widehat{A'B'}$.
Aplicando las relaciones (3.4), (3.5), y (3.6) del teorema 2.7, sustituyendo estas relaciones en la desigualdad anterior tenemos:

$$m\widehat{B'C'} + m\widehat{A'C'} > m\widehat{A'B'}$$

$$(\pi - m\angle A) + (\pi - m\angle B) > \pi - m\angle C.$$

$$\begin{aligned} \pi - m\angle A + \pi - m\angle B &> \pi - m\angle C \\ 2\pi - (m\angle A + m\angle B) &> \pi - m\angle C \\ \pi + m\angle C &> m\angle A + m\angle B \\ \Longrightarrow m\angle A + m\angle B &< \pi + m\angle C. \end{aligned}$$

Usando el teorema 2.15 nuevamente para obtener las otras expresiones tenemos que

$$m\widehat{A'B'} + m\widehat{B'C'} > m\widehat{A'C'}$$

$$(\pi - m\angle C) + (\pi - m\angle A) > \pi - m\angle B$$

$$\pi - m\angle C + \pi - m\angle A > \pi - m\angle B$$

$$\begin{aligned} 2\pi - (m\angle C + m\angle A) &> \pi - m\angle B \\ \pi + m\angle B &> m\angle A + m\angle C \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow m\angle A + m\angle C < \pi + m\angle B.$$

$$m\widehat{A'C'} + m\widehat{A'B'} > m\widehat{B'C'}$$
$$(\pi - m\angle B) + (\pi - m\angle C) > \pi - m\angle A$$
$$\pi - m\angle B + \pi - m\angle C > \pi - m\angle A$$
$$2\pi - (m\angle B + m\angle C) > \pi - m\angle A$$
$$\pi + m\angle A > m\angle B + m\angle C$$
$$\Longrightarrow m\angle B + m\angle C < \pi + m\angle A.$$

Y para la última desigualdad tenemos que $\pi < m\angle A + m\angle B + \angle C$ por teorema 2.13. lueg $m\angle A + m\angle B + m\angle C < 3\pi$ porque ningún ángulo puede tener medidad mayor que π, asi

$$\pi < m\angle A + m\angle B + m\angle C < 3\pi. \blacksquare$$

Para resumir los teoremas 2.14 y 2.16: En cualquier triángulo esférico, la suma de las medidas de los lados está entre 0 y 2π y la suma de las medidas de los ángulos está entre π y 3π.

Definición 2.26. *Sea el $\triangle ABC$ un triángulo esférico. Sea A^a, B^a y C^a los puntos antípodas de A, B y C, respectivamente. Entonces los ángulos exteriores de A son los angulos $\angle BAC^a$ y $\angle CAB^a$. Los ángulos opuestos interiores al $\angle BAC^a$ y CAB^a son los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACB$.*

Teorema 2.17. ***Teorema Esférico del Ángulo Exterior*** *la medida de cualquier ángulo exterior de un triángulo esférico es menor que la suma de las medidas de los ángulos interiores opuestos y mayor que (el valor aboluto de) la diferencia entre estas medidas.*

Demostación.
Sea el triángulo $\triangle ABC$ un triángulo esférico y consideremos el ángulo exterior en A.

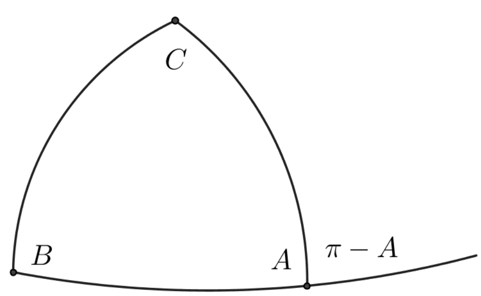


Figura 2.18: $\mid B - C \mid < \pi - A < B + C$

Por el teoream 2.13 se sabe que, $\pi < m\angle A + m\angle B + m\angle C$, entonces $\pi - m\angle A < m\angle B + m\angle C$.
El ángulo exterior en A tiene medida $\pi - m\angle A$, esto demuestra que el ángulo exterior en A tiene medida menor que la suma de las medidas de los ángulos en $\angle B$ y $\angle C$.

De las ecuaciones 3.9 y 3.11 del teorema 2.16 se tiene que

$$\pi - m\angle A > m\angle B - m\angle C$$

y

$$\pi - m\angle A > m\angle C - m\angle B$$

respectivamente. Entonces $\pi - m\angle A$ es mayor que $| m\angle B - m\angle C |$, el valor absoluto de la diferencia entre las medidas de los ángulos B y C.■

Teorema 2.18. *Dados dos lados de un triángulo cuyas medidas son desiguales y los ángulos opuestos a ellos, entonces los ángulos son desiguales en medida y el ángulo mayor es opuesto al lado mayor. Similarmente, dados dos ángulos de un triángulo cuyas medidas son desiguales, los lados opuestos tienen medidas desiguales y el lado mayor es opuesto al ángulo mayor.*

2.6. Trigonometría esférica

La trigonometría es la ciencia que tiene por finalidad la resolución de triángulos, relacionando sus magnitudes lineales y angulares por medio del cálculo. Se divide en trigonometría plana y trigonometría esférica. La trigonometría esférica trata de las relaciones trigonométricas que existen entre los tres lados y los tres ángulos del triángulo esférico. Los lados de un triángulo esférico, siendo arcos, son expresdos normalmente en unidades angulares, grados o radianes.

La trigonometría esférica es la clave para el estudio de la relación entre distancias y ángulos en la esfera. Central a esto es la relación entre las distancias y los ángulos de un triángulo. Pero, ¿qué hace que estas relaciones sean diferentes de las relaciones correspondientes en el plano?.
La diferencia geométrica central entre el plano y la esfera es, por supuesto, el hecho de que la esfera es **curva**. En el plano, si tomamos dos rayos con el mismo punto final, entonces los rayos se separan del punto final común. En la esfera, dos de esos rayos se separan por un tiempo lejos del punto final, pero luego convergen de nuevo en el antípoda del punto final.

Axioma 2.5. *Suponer que dos rayos forman un ángulo con medida θ. Sea x la distancia esférica entre dos puntos (uno en cada rayo) a distancia esférica ϕ del vértice. Entonces* $\sin(\frac{x}{2}) = \sin(\phi)\sin(\frac{\theta}{2})$.

En un triángulo esférico $\triangle ABC$, sea A, B y C denotan las medidas de los ángulos en los vértices A, B y C respectivamente, y sea a, b y c denotan las longitudes de los lados opuestos a los vértices A, B y C, respectivamente. Esto significa que las letras A, B y C algunas veces denotarán puntos y otras veces denotarán medidas de ángulos.

Teorema 2.19. *Si el triángulo esférico $\triangle ABC$ tiene un ángulo recto en C, entonces* $\sin(A) = \dfrac{\sin(a)}{\sin(c)}$.

El teorema 2.19 tiene la agradable semejanza con el hecho de la trigonometría en el plano de que el seno de un ángulo en un triángulo rectángulo se calcula tomando el cociente **opuesto sobre hipotenusa.** En la esfera hay que tomar el seno del opuesto y la hipotenusa antes de sacar el cociente.

Teorema 2.20. *Si el triángulo esférico $\triangle ABC$ tiene un ángulo recto en C, entonces tenemos:*

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) \qquad (3.11)$$

$$\cos(B) = \sin(A)\cos(b) \qquad (3.12)$$

La ecuación (3.11) es llamado el teorema pitagórico esférico y la ecuación (3.12) algunas veces lo llaman el teorema de Geber.

2.6.1. Ley esférica de los senos

Teorema 2.21. ***Ley esferica de los senos*** *En cualquier triángulo esférico $\triangle ABC$,*

$$\frac{\sin(a)}{\sin(A)} = \frac{\sin(b)}{\sin(B)} = \frac{\sin(c)}{\sin(C)}. \qquad (3.13)$$

Demostración.
Probaremos que

$$\frac{\sin(b)}{\sin(B)} = \frac{\sin(c)}{\sin(C)} \qquad (3.14)$$

La ecuación (3.13) es obtenida permutando los vértices.
Sea el triángulo $\triangle ABC$ un triángulo esférico.
Sea O el centro de la esfera. Tomar cualquier punto P en OA, trazar PD perpendicular al plano BOC, y desde D trazar DE, DF perpendicular a OB, OC respectivamente, luego unir PE, PF, OD.
Como PD es perpendicular al plano BOC, se forman ángulos rectos con cada línea que incide en el plano, asi tenemos:

$$PE^2 = PD^2 + DE^2 = PO^2 - OD^2 + DE^2 = PO^2 - OE^2,$$

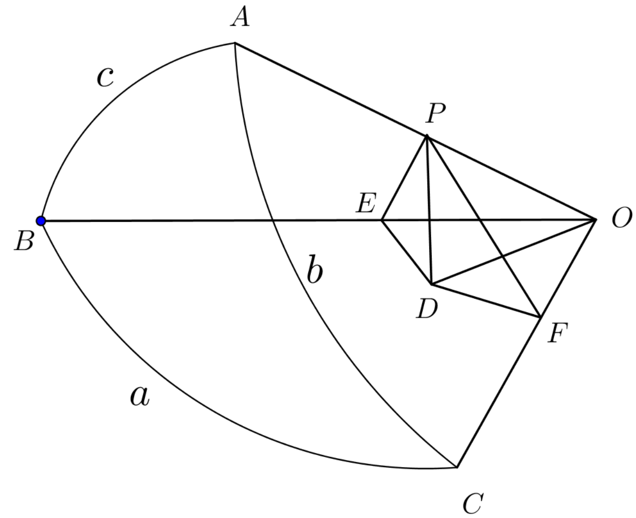


Figura 2.19:

Asi PEO es un ángulo recto.
Además $PE = OP \sin POE = OP \sin C$, y también tenemos que:
$PD = PE \sin PED = PE \sin B = OP \sin c \sin B$. (1), Similarmente
$PD = OP \sin b \sin C$, (2).
Igualando (1) y (2) obtendremos el resultado deseado

$$OP \sin c \sin B = OP \sin b \sin C$$

$$\sin c \sin B = \sin b \sin C$$
$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin c}$$

De donde obtenemos (3.14) $\dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$.■

2.6.2. Ley esférica de los cosenos

Teorema 2.22. ***Ley esférica de los cosenos*** *En cualquier triángulo esférico* $\triangle ABC$,

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(C). \tag{3.15}$$

podemos rotar las letras para obtener las fórmulas similares

$$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(B). \tag{3.16}$$

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A). \tag{3.17}$$

Demostración.
Sea el $\triangle ABC$ un triángulo esférico.

Sea O el centro de la esfera. En el plano que pasa por O, B y C, y en el plano tangente a la esfera por el punto A, considerar los triángulos ODE y ADE.
Si aplicamos la ley de los cosenos en el plano obtenemos:

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE.AD\cos(A) \quad (1)$$

$$DE^2 = OE^2 + OD^2 - 2OD.OE\cos(a) \quad (2)$$

Como los triángulos OAE y OAD son rectángulos, podemos aplicar el teorema de pitágoras como sigue

$OE^2 = OA^2 + AE^2$ y $OD^2 = OA^2 + AD^2$, sustituyendo en (2) nos queda:

$$DE^2 = 2OA^2 + AE^2 + AD^2 - 2OD.OE\cos(a) \quad (3)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (3) obtenemos:

$AE^2 + AD^2 - 2AE.AD\cos(A) = 2OA^2 + AE^2 + AD^2 - 2OD.OE\cos(a)$
$2OA^2 - 2OD.OE\cos(a) = -2AE.AD\cos(A)$

Luego, despejando $\cos(a)$ de la ecuación llegaremos a la expresión deseada

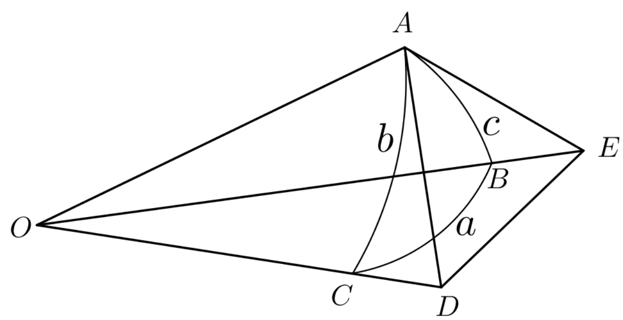


Figura 2.20:

$$\begin{aligned}\cos(a) &= \frac{OA^2 + AE.AD\cos(A)}{OE.OD} \\ &= \frac{OA^2}{OE.OD} + \frac{AE.AD\cos(A)}{OE.OD} \\ &= \frac{OA}{OE}\cdot\frac{OA}{OD} + \frac{AE}{OE}\cdot\frac{AD}{OD}\cos(A) \\ &= \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A)\end{aligned}$$

Por tanto $\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A)$.■

Teorema 2.23. ***Fórmulas análogas*** *En cualquier triángulo esférico* $\triangle ABC$*,*

$$\sin(c)\cos(B) = \cos(b)\sin(a) - \sin(b)\cos(a)\cos(C). \tag{4.13}$$

rotando las letras en (4.13), obtenemos:

$$\sin(a)\cos(B) = \cos(b)\sin(c) - \sin(b)\cos(c)\cos(A). \tag{4.14}$$

$$\sin(a)\cos(C) = \cos(c)\sin(b) - \sin(c)\cos(b)\cos(A). \tag{4.15}$$

$$\sin(b)\cos(C) = \cos(c)\sin(a) - \sin(c)\cos(a)\cos(B). \tag{4.16}$$

$$\sin(c)\cos(A) = \cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b)\cos(C). \tag{4.17}$$

$$\sin(b)\cos(A) = \cos(a)\sin(c) - \sin(a)\cos(c)\cos(B). \tag{4.18}$$

Demostración.
Usando la relación (3.16) del teorema 2.22 (Ley esférica de los cosenos) y vamos a resolver para $\sin(a)\sin(c)\cos(B)$;

$$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(B)$$
$$\sin(a)\sin(c)\cos(B) = \cos(b) - \cos(a)\cos(c)$$

Por la ecuación (3.15) del teorema 2.22 $\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(c)$ sustituir en la última ecuación que obtuvimos, tenemos:

$$\begin{aligned}\sin(a)\sin(c)\cos(B) &= \cos(b) - \cos(a)(\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(C)) \\ &= \cos(b) - \cos^2(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(a)\sin(b)\cos(C) \\ &= \cos(b)(1 - \cos^2(a)) - \cos(a)\sin(a)\sin(b)\cos(C) \\ &= \cos(b)\sin^2(a) - \cos(a)\sin(a)\sin(b)\cos(C) \\ &= \sin(a)(\cos(b)\sin(a) - \cos(a)\sin(b)\cos(C)).\end{aligned}$$

Ya que $\sin(a)$ es distinto de cero para todo a entre 0 y π, podemos dividir esta ecuación por ello para obtener:

$$\frac{\sin(a)\sin(c)\cos(B)}{\sin(a)} = \frac{\sin(a)(\cos(b)\sin(a) - \cos(a)\sin(b)\cos(C))}{\sin(a)}$$

$$\sin(c)\cos(B) = \cos(b)\sin(a) - \cos(a)\sin(b)\cos(C)$$

Habiendo obtenido (4.13) ■

2.6.3. Triángulos rectángulos

En trigonometría plana se dan toda una serie de fórmulas relacionadas las medidas de los ángulos y los lados en triángulos rectángulos. Hay un correspondiente conjunto de fórmulas para triángulos esféricos. Estos se incluyen en la lista completa acontinuación.

Teorema 2.24. *Sea el triángulo esférico $\triangle ABC$ con un ángulo recto en C. Entonces,*

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) \tag{4.21}$$

$$\cos(c) = \cot(A)\cot(B) \tag{4.22}$$

$$\sin(a) = \sin(A)\sin(c) \tag{4.23}$$

$$\cot(c) = \cot(b)\cos(A) \tag{4.24}$$

$$\cot(A) = \cot(a)\sin(b) \tag{4.25}$$

$$\cos(B) = \sin(A)\cos(b) \tag{4.26}$$

$$\sin(b) = \sin(B)\sin(c) \tag{4.27}$$

$$\cot(c) = \cot(a)\cos(B) \tag{4.28}$$

$$\cot(B) = \cot(b)\sin(a) \tag{4.29}$$

$$\cos(A) = \sin(B)\cos(a) \tag{4.30}$$

Estas pueden ser reescritas como sigue, donde las expresiones son definidas:

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) \tag{4.31}$$

$$\cos(c) = \cot(A)\cot(B) \tag{4.32}$$

$$\sin(A) = \sin(A)/\sin(c) \tag{4.33}$$

$$\cos(A) = \tan(b)/\tan(c) \tag{4.34}$$

$$\tan(A) = \tan(a)/\sin(b) \tag{4.35}$$

$$\sin(A) = \cos(B)/\cos(b) \tag{4.36}$$

$$\sin(B) = \sin(b)/\sin(c) \tag{4.37}$$

$$\cos(B) = \tan(a)/\tan(c) \tag{4.38}$$

$$\tan(B) = \tan(b)/\sin(a) \tag{4.39}$$

$$\sin(B) = \cos(A)/\cos(a) \tag{4.40}$$

Demostración.
Las ecuaciones (4.21) y (4.26) vienen del teorema 2.20. Las ecuaciones (4.23) y (4.33) se probaron en el teorema 2.19.
Notar que (4.23) nunca es cero ya que los valores del seno son no cero para ángulos y lados de un triángulo, asi podemos dividir (4.26) por (4.23) para obtener:

$$\frac{\cos(B)}{\sin(a)} = \frac{\sin(A)\cos(b)}{\sin(A)\sin(c)}$$

$$\frac{\cos(B)}{\sin(a)} = \frac{\cos(b)}{\sin(c)}.$$

Multiplicando ambos lados por $\cos(a)$ resulta:

$$\frac{\cos(a)}{\sin(a)}\cos(B) = \frac{\cos(b)\cos(a)}{\sin(c)}$$

$$\cot(a)\cos(B) = \frac{\cos(a)\cos(b)}{\sin(c)},$$

que es $\dfrac{\cos(c)}{\sin(c)} = \cot(c)$ por (4.21), $(\cos(c) = \cos(a)\cos(b))$

$$\cos(B)\cot(a) = \frac{\cos(c)}{\sin(c)}$$

obteniendo asi la relación (4.28)

$$\cot(a)\cos(B) = \cot(c)$$

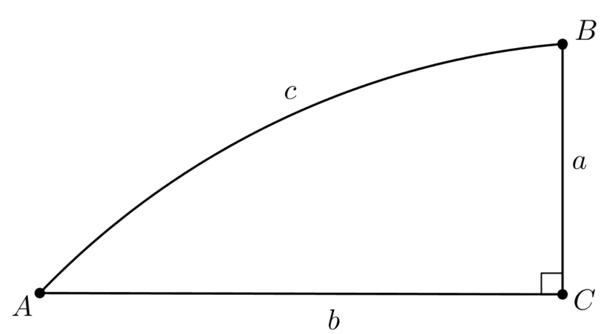


Figura 2.21:

Luego, (4.27), (4.30), y (4.24) se cumplen cuando los roles de A, a y B, b se mantienen en (4.23), (4.26), y (4.28), respectivamente.

Luego, $\cos(A) = \sin(B)\cos(a) = \sin(b)\cos(a)/\sin(c)$ y $\sin(A) = \sin(a)/\sin(c)$.

Efectuar el cociente $\dfrac{\cos(A)}{\sin(A)}$.

$$\frac{\cos(A)}{\sin(A)} = \frac{\dfrac{\sin(b)\cos(a)}{\sin(c)}}{\dfrac{\sin(a)}{\sin(c)}}$$

$$\cot(A) = \frac{\sin(b)\cos(a)\cdot\sin(c)}{\sin(c)\cdot\sin(a)}$$

$$\cot(A) = \sin(b)\frac{\cos(a)}{\sin(a)}$$

$$\cot(A) = \sin(b)\cot(a)$$

Donde obtenemos (4.25).
De esta misma forma obtendremos (4.29)

$\cos(B) = \dfrac{\sin(a)\cos(b)}{\sin(c)}$ y $\sin(B) = \dfrac{\sin(b)}{\sin(c)}$, efectuando el cociente del $\cos(B)$ y $\sin(B)$

$$\frac{\cos(B)}{\sin(B)} = \frac{\dfrac{\sin(a)\cos(b)}{\sin(c)}}{\dfrac{\sin(b)}{\sin(c)}}$$

$$\cot(B) = \frac{\sin(a)\cos(b)\cdot\sin(c)}{\sin(c)\cdot\sin(b)}$$

$$\cot(B) = \sin(a)\frac{\cos(b)}{\sin(b)}$$

$$\cot(B) = \sin(a)\cot(b)$$

Ahora vamos a probar la relación (4.22), para ello efectuar el producto $\cot(A)\cot(B)$ donde $\cot(A) = \cot(a)\sin(b)$ y $\cot(B) = \cot(b)\sin(a)$

$$\cot(A)\cot(B) = \cot(a)\sin(b)\cdot\cot(b)\sin(a)$$

$$\cot(A)\cot(B) = \frac{\cos(a)\sin(b)}{\sin(a)}\frac{\cos(b)\sin(a)}{\sin(b)}$$

$$\cot(A)\cot(B) = \cos(a)\cos(b)$$

Por la relación (4.21) $\cos(a)\cos(b) = \cos(c)$, asi

$$cot(A)\cot(B) = \cot(c)$$

Hasta aquí se ha probado las primeras 10 relaciones.
Ahora vamos a probar las otras 10 ecuaciones. Las ecuaciones (4.31) y (4.32) ya se probaron anteriormente.
De (4.23), (4.26), (4.27), y (4.30) obtenemos las expresiones (4.33), (4.36), (4.37) y (4.40) respectivamente.
Ahora vamos a probar las ecuaciónes (4.34) y (4.38). Efectuar el cociente $\dfrac{\cos(A)}{\sin(a)}$.
sabemos que $\cos(A) = \sin(B)\cos(a)$, de (4.21) $\cos(a) = \dfrac{\cos(c)}{\cos(b)}$, de (4.23) $\sin(a) = \sin(A)\sin(c)$.

$$\frac{\cos(A)}{\sin(a)} = \frac{\dfrac{\sin(b)}{\sin(c)}\dfrac{\cos(c)}{\cos(b)}}{\dfrac{\sin(a)}{\sin(c)}\cdot\sin(c)}$$

$$\frac{\cos(A)}{\sin(a)} = \frac{\dfrac{\sin(b)}{\sin(c)}\dfrac{\cos(c)}{\cos(b)}}{\sin(a)}$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación por $\sin(a)$

$$\cos(A) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)}\cdot\frac{\cos(c)}{\sin(c)}$$

$$\cos(A) = \frac{\tan(b)}{\tan(c)}$$

De la misma forma se llega a (4.38) resolviendo el cociente $\dfrac{\cos(B)}{\sin(b)}$.
Ahora probaremos las ecuaciones (4.35) y (4.39).

$\sin(A) = \dfrac{\sin(a)}{\sin(c)}$, $\cos(A) = \sin(B)\cos(a) = \dfrac{\sin(b)}{\sin(c)}\cdot\cos(a)$, resolver el cociente $\dfrac{\sin(A)}{\cos(A)}$

$$\frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{\dfrac{\sin(a)}{\sin(c)}}{\dfrac{\sin(b)\cos(a)}{\sin(c)}}$$

$$\frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{\sin(a)\sin(c)}{\sin(c)\sin(\sin(b)\cos(a)}$$

$$\frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{\sin(a)}{\cos(a)\sin(b)}$$

$$\tan(A) = \frac{\tan(a)}{\sin(b)}$$

Resolviendo para (4.39).

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(B)}{\cos(B)} &= \frac{\dfrac{\sin(b)}{\sin(c)}}{\dfrac{\sin(a)\cos(b)}{\sin(c)}} \\
\frac{\sin(B)}{\cos(B)} &= \frac{\sin(b)\sin(c)}{\sin(c)\sin(\sin(a)\cos(b)} \\
\frac{\sin(B)}{\cos(B)} &= \frac{\sin(b)}{\cos(b)\sin(a)} \\
\tan(B) &= \frac{\tan(b)}{\sin(a)}.
\end{aligned}
$$

Finalmente se ha probado el teorema. ■

2.6.4. Fórmulas del ángulo medio

En esta sección derivamos varias otras fórmulas que expresan relaciones trigonométricas entre los lados y ángulos de un triángulo esférico. Todas estas seran consequencia de las leyes esféricas de los senos y los cosenos y las fórmulas análogas (que fueron derivadas de la ley de los cosenos).

Teorema 2.25. *En cualquier triángulo esférico $\triangle ABC$,*

$$\sin(C)\cot(B) = \cot(b)\sin(a) - \cos(a)\cos(C) \tag{4.42}$$

Rorando las letras en (4.42), obtenemos también:

$$\sin(A)\cot(C) = \cot(c)\sin(b) - \cos(b)\cos(A) \tag{4.43}$$

$$\sin(B)\cot(C) = \cot(c)\sin(a) - \cos(a)\cos(B) \tag{4.44}$$

$$\sin(C)\cot(A) = \cot(a)\sin(b) - \cos(b)\cos(C) \tag{4.45}$$

$$\sin(B)\cot(A) = \cot(a)\sin(c) - \cos(c)\cos(B) \tag{4.46}$$

$$\sin(A)\cot(B) = \cot(b)\sin(c) - \cos(c)\cos(A) \tag{4.47}$$

Demostración.
Usaremos la relación (4.13) del teorema 2.23

$$\sin(c)\cos(B) = \cos(b)\sin(a) - \sin(b)\cos(a)\cos(C)$$

y dividir esta ecación por $\sin(b)$ para obtener

$$\frac{\sin(c)\cos(B)}{\sin(b)} = \frac{\cos(b)}{\sin(b)} \cdot \sin(a) - \frac{\sin(b)}{\sin(b)} \cdot \cos(a)\cos(C)$$

$$\frac{\sin(c)}{\sin(b)}\cos(B) = \cot(b)\sin(a) - \cos(a)\cos(C). \tag{4.48}$$

De la ley esférica de los senos (4.3), $\dfrac{\sin(c)}{\sin(b)} = \dfrac{\sin(C)}{\sin(B)}$, sustituir esta relación en (4.48) para obtener:

$$\frac{\sin(C)}{\sin(B)}\cos(B) = \cot(b)\sin(a) - \cos(a)\cos(C),$$

El cual se reduce a (4.42) por defnción de cotangente.

$$\sin(C)\cot(B) = \cos(b)\sin(a) - \cos(a)\cos(C).\blacksquare$$

Teorema 2.26. ***Fórmulas de las cuatro partes y del ángulo medio*** *En cualquier triángulo esférico:*

$$\sin(\frac{C}{2}) = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin(a)\sin(b)}} \tag{4.49}$$

$$\cos(\frac{C}{2}) = \sqrt{\frac{\sin(s)\sin(s-c)}{\sin(a)\sin(b)}} \tag{4.50}$$

$$\tan(\frac{C}{2}) = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin(s)\sin(s-c)}} \tag{4.51}$$

Demostración.
Iniciamos con la ley de los cosenos (4.10) y resolvemos para $\cos(C)$:

$$\cos(C) = \frac{\cos(c) - \cos(a)\cos(b)}{\sin(a)\sin(b)} \tag{4.52}$$

Además, $1 - \cos(C) = 1 - \dfrac{\cos(c) - \cos(a)\cos(b)}{\sin(b)\sin(c)} = \dfrac{\cos(b-a) - \cos(c)}{\sin(b)\sin(c)}$,

Luego, $\sin^2 \dfrac{C}{2} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin(a)\sin(b)}$.

Sea $2s = b + c - a$, asi s es la mitad de la suma de los lados del triángulo, entonces $b + c - a = 2s - 2a = 2(s - a), a - b + c = 2s - 2b = 2(s - b)$, Asi, $\sin^2 \dfrac{C}{2} = \dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin(a)\sin(b)}$,

Por lo tanto
$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin(a)\sin(b)}}.$$

Quedando demostrado (4.49).
Ahora probaremos la segunda ecuación.

$1 + \cos(C) = 1 + \dfrac{\cos(c) - \cos(a)\cos(b)}{\sin(a)\sin(b)} = \dfrac{\cos(c) - \cos(a+b)}{\sin \sin(b)}$,
Además,
$\cos^2 \dfrac{C}{2} = \dfrac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin(a)\sin(b)} = \dfrac{\sin(s)\sin(s-c)}{\sin(a)\sin(b)}$,

Por lo tanto
$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s)\sin(s-c)}{\sin(a)\sin(b)}}.$$

Para la última ecuación, sabemos que para un ángulo x, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, asi haciendo uso de esta identidad trigonométrica en el plano obtenemos la ecuación (4.51).

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin(a)\sin(b)}}}{\sqrt{\dfrac{\sin(s)\sin(s-c)}{\sin(a)\sin(b)}}}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin(a)\sin(b)}}{\dfrac{\sin(s)\sin(s-c)}{\sin(a)\sin(b)}}$$

$\tan \dfrac{C}{2} = \dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b).\sin(a)\sin(b)}{\sin(a)\sin(b).\sin(s)\sin(s-c)}$. Simplificando obtenemos la relación deseada.

Por lo tanto
$$\tan \frac{C}{2} = \frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin(s)\sin(s-c)}.\blacksquare$$

Capítulo 3

Geometría parabólica

Definición 3.1. *Un espacio afín de dimensión n es una terna $(E, \vec{E}, +)$, donde E es un conjunto no vacío, a cuyos elementos se les llama puntos, $\vec{E}$ es un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K y $+$ es una aplicación $E \times \vec{E} \longrightarrow E$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. Para cada par de puntos P, Q, existe un único vector $\vec{v}$ tal que $Q = P + \vec{v}$, y se le representa por $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.

2. $P + \vec{0} = P$,

3. $(P + \vec{v}) + \vec{w} = P + (\vec{v} + \vec{w})$.

Definición 3.2. *Sean E y F dos espacios afines. Una aplicación **afín o afinidad** entre E y F es una aplicación $f : E \longrightarrow F$ tal que para todo punto P de E se cumple*

$$f(P) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OP}),$$

*donde O es un punto prefijado en E, y $\vec{f} : \vec{E} \longrightarrow \vec{F}$ es una aplicación lineal, llamada **aplicación lineal asociada a f**.*

Definición 3.3. *Un **sistema de referencia** en un espacio afín E está formado por un punto O y una base $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ del espacio $\vec{E}$*

Fijado un sistema de referencia, podemos identificar cada vector $\vec{v}$ con sus coordenadas en la base del sistema. Asi, $\vec{v} = (x_1, ..., , x_n)$ se interpreta como que $\vec{v} = x_1\vec{e_1} + ...x_n\vec{e_n}$. Llamaremos vector de posición de un punto P (siempre al sistema de referencia fijado) al vector $\overrightarrow{OP}$. Las coordenadas cartesianas de un punto P serán las coordenadas de su vector de posición. Escribiremos $P(x_1, ..., x_n)$ para indicar que las coordenadas de P en un sistema de referencia dado son $(x_1, ..., x_n)$. Según lo dicho, esto equivale a que

$$P = O + x_1\vec{e_1} + ... + x_n\vec{e_n}.$$

Lo habitual es considerar sistemas de referencia ortonormales, es decir, tales que los vectores $\vec{e_i}$ tengan la misma longitud y sean perpendiculares dos a dos, pero ni "tener la misma longitud"ni "ser perpendicular"son conceptos que tengamos definidos en un espacio afín. Sin embargo, ninguno de ellos es necesario para las consideraciones siguientes:

Consideremos un hiperplano $H = P + \langle \vec{v_1}, ..., \vec{v_{n-1}} \rangle$ en un espacio afín en el que hemos fijado un sistema de referencia de origen O y base $\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}$. Un punto $Q(x_1, ..., x_n)$ está en H si y sólo si $\overrightarrow{PQ} \in \langle \vec{v_1}, ..., \vec{v_{n-1}} \rangle$.

Definición 3.4. *Una geometría afín es un conjunto no vacío $\mathbb{E}$ al que llamaremos espacio, junto con una familia de subconjuntos de $\mathbb{E}$ a los que llamremos rectas, en la que hay definida una relación de equivalencia a la que llamaremos paralelismo, y de modo que se cumplen los axiomas siguientes:*
Axioma A1 *Por cada par de puntos pasa una única recta, y cada recta contiene al menos dos puntos.*

Axioma A2 *Por cada punto pasa una única paralela a una recta dada .*

Axioma A3 *Si A,B,C son tres puntos no colineales y A',B' son puntos tales que la recta AB es paralela a $A'B'$, entonces la paralela a AC por A' y la paralela a BC por B' se cortan en un punto C'*

Axioima A4 *Existen tres puntos no colineales.*

Definición 3.5. *Un espacio vectorial euclideo V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo ordenado pitagórico R sobre el cual hay definido un* ***producto escalar****, que es una aplicación $V \times V \longrightarrow R$ que cumple las propiedades siguientes:*

1. $\vec{v}\vec{v}$ es un cuadrado (en particular $\vec{v}\vec{v} \geq 0$) y $\vec{v}\vec{v} = 0$ si y solo si $\vec{v} = 0$.
2. $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$.
3. $(\alpha\vec{u})\vec{v} = \alpha(\vec{v}\vec{v}) = \vec{u}(\alpha\vec{v})$.
4. $\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u}$.

3.1. Formas bilineales

Definición 3.6. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n. Una aplicación*

$$\begin{aligned} f : V \times V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v). \end{aligned}$$

es una ***forma bilineal*** *sobre V cuando verifica que:*
1. $f(u + u', v) = f(u, v) + f(u', v) \forall u, u', v \in V$
2. $f(\alpha u, v) = \alpha f(u, v) \forall u, v \in V$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

3. $f(u, v + v') = f(u, v) + f(u, v')\forall u, v, v' \in V$
4. $f(u, \alpha v) = \alpha f(u, v)\forall u, v \in V$ *y* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

Oservar que es equivalente a verificar

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\forall u, u', v \in V$
$$f(\alpha u + \beta u', v) = \alpha f(u, v) + \beta f(u'v)$$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\forall u, v, v' \in V$
$$f(u, \alpha v + \beta v') = \alpha f(u, v) + \beta f(u, v').$$

Es decir, una aplicación $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ es una forma bilineal si es lineal en cada una de sus componentes. A partir de ahora para nosotros $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ salvo que se diga lo contrario.

Ejemplo 3.1. *Dado* $\mathbb{R}^2$*, la aplicación* $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\begin{aligned} f : \qquad & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longmapsto x_1.y_2 \end{aligned}$$

es una forma bilineal.

Demostración.
Para demostrar que la aplicación dada anteriormente es una forma bilineal hay que verificar lo siguiente:

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\forall u, v, w \in V$
$$f(\alpha u + \beta v, w) = \alpha f(u, w) + \beta f(v, w)$$
y
$$f(u, \alpha v + \beta w) = \alpha f(u, v) + \beta f(u, w).$$

Probando la primera parte:
Sea $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$, $w = (z_1, z_2)$, $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v, w) =& f((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2), (z_1, z_2)) \\ =& (\alpha x_1 + \beta y_1)z_2. \\ =& \alpha x_1.z_2 + \beta y_1.z_2 \\ =& \alpha(x_1.z_2) + \beta(y_1.z_2) \\ =& \alpha f(u, w) + \beta f(v, w) \end{aligned}$$

Ahora se probará la segunda parte:

$$\begin{aligned}
f(u, \alpha v + \beta w) =& f((x_1, x_2), \alpha(y_1, y_2) + \beta(z_1, z_2)) \\
=& f((x_1, x_2), (\alpha y_1, \alpha y_2) + (\beta z_1, \beta z_2)) \\
=& f((x_1, x_2), (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2)) \\
=& x_1(\alpha y_2 + \beta z_2) \\
=& x_1(\alpha y_2) + x_1(\beta z_2) \\
=& \alpha(x_1.y_2) + \beta(x_1.z_2) \\
=& \alpha f(u, v) + \beta f(u, w)
\end{aligned}$$

por tanto, f es una forma bilineal. ■

Definición 3.7. *Una forma bilineal $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ es **simétrica** si*

$$f(x, y) = f(y, x) \forall x, y \in V.$$

*Una forma bilineal $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ es **antisimétrica** o alternada si*

$$f(x, y) = -f(y, x) \forall x, y \in V.$$

Teorema 3.1. *Una forma bilineal f es antisimétrica si y sólo si verifica que*

$$f(x, x) = 0 \qquad \forall x \in V.$$

Demostración.
$\Longrightarrow$
Si f es antisimétrica, entonces $f(x, x) = -f(x, x) = 0$.
$\Longleftarrow$
Sean $x, y \in V$, luego

$$\begin{aligned}
0 =& f(x + y, x + y) \\
=& f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) \\
=& f(x, y) + f(y, x)
\end{aligned}$$

Asi, $f(x, y) = -f(y, x)$.■

Expresión matricial de una forma bilineal

Podemos representar una forma bilineal definida sobre un espacio de dimensión finita por una matriz.
Sea $f = V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal, dim V=n, y $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V.
Sean $\bar{x}, \bar{y} \in V$ y $x_i, y_i \in \mathbb{K}$ para todo $i = 1, ..., n$ con

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \qquad \bar{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$$

se tiene

$$f(\bar{x},\bar{y}) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i,\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Bigg((\sum_{J=1}^{n} y_i f(v_i,v_j) \Bigg)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f(v_i,v_j) = \sum_{j=1}^{n} \Bigg(\sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i,v_j) \Bigg) y_j$$

$$= \Bigg(\sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i,v_1), \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i,v_2), ..., \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i,v_n), \Bigg) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, ..., x_n) \begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & f(v_1,v_2) & \cdots & f(v_1,v_n) \\ f(v_2,v_1) & f(v_2,v_2) & \cdots & f(v_2,v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n,v_1) & f(v_n,v_2) & \cdots & f(v_n,v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Definición 3.8. *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & f(v_1,v_2) & \cdots & f(v_1,v_n) \\ f(v_2,v_1) & f(v_2,v_2) & \cdots & f(v_2,v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n,v_1) & f(v_n,v_2) & \cdots & f(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

*Se dice que es la matriz de la **forma bilineal** $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ en la base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ de V.*

Si denotamos por $A = (a_{ij}) = (f(v_i,v_j)) = M_B f$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ entonces la igualdad anterior se expresa:

$$f(\bar{x},\bar{y}) = X^t A Y$$

Ejemplo 3.2. *Calcular las matrices asociadas a la forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$ en la base canónica y en la base $B = \{(1,-1),(-1,0)\}$.*

Resolviendo para la base canónica:
$f((1,0),(1,0)) = 0$, $f((1,0),(0,1)) = 1$, $f((0,1),(1,0)) = 1$, $f((0,1),(0,1)) = 0$. Luego, la matriz de f en la base canónica es:

$$M_{B_c} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora resolviendo para la base B :
$f((1,-1),(1,-1)) = -2$, $f((1,-1),(-1,0)) = 1$, $f((-1,0),(1,-1)) = 1$, $f((-1,0),(-1,0)) = 0$. Luego, la matriz de f en la base B es:

$$M_B f = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 3.9. *Una base $B = (e_1, ..., e_n)$ de V se llama ortogonal para f si la matriz de f en la base B es diagonal.*

Teorema 3.2. *Dada una forma bilineal simétrica f sobre un espacio vetorial de dimensión finita, existe una base B ortogonal para f.*

Proposición 3.1. *Toda forma bilineal simétrica admite una base para la cual su matriz es diagonal.*

Definición 3.10. *Sea $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal, dim V =n, se define el **rango de una forma bilineal** como el rango de la matriz $M_B f$ siendo B una base cualquiera de V*

Definición 3.11. *Una forma bilineal $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, dim $V = n$, es degenerada si su rango es menor que n. Si su rango es n es no degenerada. Es decir, una forma bilineal $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, dim V=n, es degenerada si y sólo si det$(M_B f) = 0$ y es no degenerada si y sólo si det$(M_B f) \neq 0$*

Teorema 3.3. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal no degenerada, entonces:*

$\forall x \in V - \{0\}$ *existe* $y \in V$ *tal que* $A(x, y) \neq 0$.

Demostración.
Razonando por contradicción. Supongamos que existe $x \in V - \{0\}$ tal que $A(x, y) = 0$ para todo $y \in V$. Tomemos una base de V que contenga a $x : B = \{x, v_2, ..., v_n\}$ entonces la matriz asocida a la forma bilineal en la base B es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto A sería degenerada en contradicción a la hipótesis, asi, $\forall x \in V - \{0\}$ existe $y \in V$ tal que $A(x, y) \neq 0$.■

Formas Cuádricas

Definición 3.12. *Sea $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ forma bilineal simétrica. Se llama forma cuadrática asociada a f a la aplicación*

$$\begin{aligned} Q_f : V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto Q_f(x) = f(x,x). \end{aligned}$$

Expresión matricial de una forma cuadrática. Cambio de base

Consideremos $Q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$. Sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ base de V, como f es simétrica tenemos que $f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i)$. Por tanto

$$Q(x) = f(x,x) = (x_1, x_2, ..., x_n) \begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & f(v_1,v_2) & \cdots & f(v_1,v_n) \\ f(v_2,v_1) & f(v_2,v_2) & \cdots & f(v_2,v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n,v_1) & f(v_n,v_2) & \cdots & f(v_n,v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, ..., x_n) \begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & f(v_1,v_2) & \cdots & f(v_1,v_n) \\ f(v_2,v_1) & f(v_2,v_2) & \cdots & f(v_2,v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n,v_1) & f(v_n,v_2) & \cdots & f(v_n,v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Definición 3.13. *La matriz*

$$\begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & f(v_1,v_2) & \cdots & f(v_1,v_n) \\ f(v_2,v_1) & f(v_2,v_2) & \cdots & f(v_2,v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n,v_1) & f(v_n,v_2) & \cdots & f(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

se dice que es la matriz de la forma cuadrática Q respecto de la base de V, es decir, $A = M_B Q$.

Definición 3.14. *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Decimos que $u, v \in V$ son conjugados respecto de F si $f(u,v) = 0$.*

Teorema 3.4. *Si $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica no identicamente nula, entonces existe un $u \in V$ tal que $f(u,u) \neq 0$.*

Teorema 3.5. *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ su forma cuadrática asociada. Entonces existe una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ de V tal que*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es decir, $f(v_i, v_j) = 0$ para todo $i \neq j$ con $i, j \in 1, ..., n$. Por tanto, la expresión en coordenadas de la forma cuadrática Q respecto a B es:

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + ... + a_{nn}x_n^2$$

.

Definición 3.15. *Un espacio proyectivo es un conjunto P, a cuyos elementos llamaremos puntos, junto con dos familias de subconjuntos a los que llamaremos rectas y planos y que cumplen los axiomas siguientes:*

Axioma P1 *Por cada par de puntos distintos pasa una única recta.*
Axioma P2 *Dos rectas se cortan si y sólo si son coplanares.*
Axioma P3 *Por tres puntos no colineales pasa un único plano.*
Axioma P4 *Si una recta pasa por dos puntos de un plano, está contenida en el plano.*
Axioma P5 *Todo plano contiene tres puntos no colineales.*
Axioma P6 *Toda recta tiene al menos tres puntos.*

Definición 3.16. *Un espacio afín proyectivo sobre un anillo de división K es un par (E, E_∞), donde E es un espacio proyectivo sobre K y E_∞ es un hiperplano en E al que llamaremos* ***hiperplano infinito de E***

Los puntos de E_∞ se llaman **puntos infinitos**, mientras que los puntos de $E_f in = X \backslash E_\infty$ se llaman **puntos finitos**.
Un sistema de referencia afín en E es un sistema de referencia proyectivo $O = P_0, ..., P_{n+1}$ tal que $P_1, ..., P_n \in E_\infty$. Así, respecto a tal sistema, los puntos finitos son aquellos cuyas coordenadas homogéneas cumplen $x_0 \neq 0$. Las coordenadas afines de un punto P respecto de un sistema de referencia afín son las coordenadas $(x_1/x_0, ..., x_n/x_0)$, donde $(x_0, ..., x_n)$ es cualquier vector de coordenadas homogéneas de P respecto del sistema dado.

Definición 3.17. *Una correlación en un espacio proyectivo X es una biyección $p : \mathbb{P}(X) \longrightarrow \mathbb{P}(X)$ entre las variedades lineales de X que invierte el orden.*

Definición 3.18. *Dado un espacio proyectivo X, llamaremos $\mathcal{H}(X)$ al conjunto de todos los hiperplanos de X.*

Asi, cada correlación se restringe a una biyyección $p : X \longrightarrow \mathcal{H}(X)$. A tales biyecciones se les llama **dualidades**, y si la correlación es simétrica se llaman **polaridades**.
A su vez, cabe distinguir entre polaridades **simétricas** o **antisimétricas** según si la correlación simétrica que las induce está inducida a su vez por una **forma bilineal simétrica** o antisimétrica.

Una polaridad p empareja cada punto de X con un hiperplano H. Diremos que P es el **polo** de H y que H es el hiperplano polar de P. La expresión en coordenadas de una polaridad es fácil de describir:

Un sistema de referencia de coordenadas de X determina una base del espacio soporte V, y si A es la matriz de una forma bilineal que induce la polaridad, entonces el hiperplano polar de un punto Q de coordenadas homogéneas U es el hiperplano de ecuación $UAX^t = 0$. El ejemplo más simple lo tenemos cuando A es la matriz identidad. Fijado un sistema de coordenadas, el hiperplano polar del punto $(a_1, ..., a_{n+1})$ es el determinado por la ecuación

$$a_1x_1 + ...a_{n+1}x_{n+1} = 0$$

y viceversa.

Vamos a reformular la geometría euclídea en términos de la geometría proyectiva. Sabemos que la forma natural de introducir una estructura euclídea en un espacio afín E (sobre un cuerpo ordenado pitagórico) es a través de un producto escalar en el espacio vectorial asociado $\vec{E}$. Por otra parte sabemos que un espacio afín puede identificarse con un par (E, E_∞), donde E es un espacio proyectivo y E_∞ es un hiperplano seleccionado arbitrariamente como hiperplano infinito, y ahora vamos a ver que, en estos términos, una forma alternativa de introducir una estructura euclídea en E es a través de una polaridad simétrica en E_∞.

Observemos en primer lugar que un producto escalar está determinado salvo un factor de escala por la relación de ortogonalidad que determina. Más en general, tenemos el resulatdo siguiente, válido para formas bilineales simétricas arbitrarias:

Teorema 3.6. *Sean $F, G : V \times V \longrightarrow K$ dos formas bilineales simétricas en un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo K de característica distinta de 2. Si $F(v, w) = 0$ equivale a $G(v, w) = 0$, para todo par de vectores $v, w \in V$, entonces existe $\alpha \in K$ no nulo tal que $G = \alpha F$.*

Demostración.
Por teorema, se sabe que existe una base $B = \{e_1, ..., e_n\}$ de V ortogonal para F, pero por la hipótesis es ortogonal para G. Esto siginifica que las matrices de F y G en esta base son diagonales, digamos $[a_1, ..., a_n]$ y $[b_1, ..., b_n]$.

Como $a_i = F(e_i, e_i)$, tenemos que $a_i = 0$ si y solo si $b_i = 0$. En particular, una forma es identicamente nula si y sólo si lo es la otra, y en tal caso el teorema se cumple con $\alpha = 1$. Supongamos, pues que las formas no son nulas. No perdemos generalidad si suponemos que $a_1 \neq 0$, luego también $b_1 \neq 0$. Ahora observamos que

$$F(a_ie_1 - a_1e_i, e_1 + e_i) = a_iF(e_1, e_1) - a_1F(e_i, e_i) = a_ia_1 - a_1a_i = 0,$$

luego

$$G(a_ie_1 - a_1e_i, e_1 + e_i) = a_iG(e_1, e_1) - a_1G(e_i, e_i) = a_ib_1 - a_1b_i = 0,$$

luego, o bien $a_i = b_i = 0$, o bien $b_i/a_i = b_1/a_1 \neq 0$.
Llamando $\alpha = b_1/a_1 \neq 0$, en ambos casos $b_i = \alpha a_i$, para todo i, por lo tanto se tiene que $G = \alpha F$. ■

Si en un espacio euclídeo cambiamos el producto escalar por un múltiplo positivo, obtenemos otro espacio euclídeo que se diferencia del dado únicamente en la elección de la unidad de medida. Así pues, si en un espacio afín especificamos una clase de equivalencia de productos escalares salvo un factor de escala, con ello estamos determinando lo que es **absoluto** en una estructura euclídea (la ortogonalidad, la congruencia entre segmentos y entre ángulos, etc.), pero no una unidad de medida, que es una elección arbitraria ajena a la geometría del espacio. Ahora vamos a ver que a partir, no de un producto escalar, sino meramente de la relación de ortogonalidad que determina, es posible definir una polaridad simétrica en el hiperplano infinito que determina dicha relación de ortogonalidad.
Antes de mencionar el siguiente teorema es necesario conocer de la siguiente definición.

Definición 3.19. *Un cuerpo K es pitagórico si la suma de dos cuadrados de K es de denuevo un cuadrado en K.*

Por ejemplo, $\mathcal{R}$ es pitagórico porque toda suma de cuadrados es $\geqslant 0$ y todo número real $\geqslant 0$ tiene raíz cuadrada. En cambio, $\mathcal{Q}$ no es pitagórico, pues $2 = 1^2 + 1^2$ no tiene raíz cuadrada en $\mathcal{Q}$. Es inmediato que K es un cuerpo pitagórico, entonces toda suma finita de cuadrados es un cuadrado.

Teorema 3.7. *Sea E un espacio afín (proyectivo) de dimensión $\geqslant 2$ sobre un cuerpo ordenado pitagórico y supongamos que en el espacio vectorial $\vec{E}$ hay definido un producto escalar que dota a E_{fin} de estructura de espacio euclídeo. Fijado $O \in E_{fin}$, sea $p : E_\infty \to H(E_\infty)$ la aplicación que a cada $P \in E_\infty$ le asigna la intersección con E_∞ de cualquier hiperplano perpendicular a OP. Entonces p es una polaridad simétrica en E_∞ que no depende de la elección de O.*

Definición 3.20. *Si E es un espacio euclídeo, la polaridad en E_∞ dada por el teorema anterior recibe el nombre de polaridad ortogonal de E.*

Definición 3.21. *Dos puntos P y Q de un espacio proyectivo se dicen* ***conjugados*** *respecto de una polaridad p si $P \in p(Q)$ (o, equivalentemente, $Q \in p(Q)$).*

En estos términos, dos rectas secantes r y s son perpendiculares si y sólo si sus puntos infinitos son conjugados respecto a la polaridad ortogonal.
En efecto, si los puntos infinitos de r y s son r_∞ y s_∞, respectivamente, entonces r es perpendicular a s si y sólo si s está contenida en el hiperplano H perpendicular a r por el punto de corte, si y sólo si $s_\infty \in H_\infty = p(r_\infty)$.

En particular, un punto infinito no puede ser **autoconjugado**, es decir, no puede pertenecer a su hiperplano polar, pues esto significaría que las rectas afines que pasan por dicho punto infinito serían perpendiculares a si mismas.
Esto nos lleva al concepto de espacio parabólico, que introducimos a continuación:

3.2. Espacios parabólicos

Definición 3.22. *Un espacio parabólico es un espacio afín (proyectivo) E de dimensión $\geqslant 2$ en el que se ha seleccionado una polaridad simétrica p en E_∞ a la que llamaremos polaridad ortogonal.*

Un espacio euclídeo es un espacio parabólico en el que ningún punto infinito P es autoconjugado, es decir, que ningún punto cumple $P \in p(P)$.

Definición 3.23. *Si $\mathbb{E}$ es una geometría afín, una* ***variedad afín en*** *$\mathbb{E}$ es un conjunto $E \subset \mathbb{E}$ que cumpla las propiedades siguientes:*
1. Toda recta que pasa por dos puntos de E está contenida en E.
2. La paralela a una recta contenida en E por un punto de E está contenida en E.

Esta definición la cumple trivialmente el conjunto vacío, los conjuntos con un solo punto, las rectas y el espacio $\mathbb{E}$. La intersección de cualquier familia no vacía de variedades afines es una variedad afín, por lo que podemos definir la variedad afín generada por un conjunto $X \subset \mathbb{E}$ como la intersección de todas las variedades afines que contienen a X.

Diremos que una variedad afín A en un **espacio parabólico** es **perpendicular** a una recta r si se cumple que $A \cap r \neq \emptyset$ (Admitiendo que la intersección pueda ser un punto infinito) y que la variedad $A_\infty = A \cap E_\infty$ está contenida en el hiperplano polar del punto infinito de r.
En particular, una recta s es perpendicular a r si y solo si sus puntos infinitos son conjugados respecto de la polaridad ortogonal.

Definición 3.24. *Una recta afín es* ***isótropa*** *si es perpendicular a si misma o, equivalentemente, si su punto infinito es autoconjugado*

En estos términos, un espacio es eulideo si y solo si no tiene rectas isótropas.

Obviamente, la existencia de rectas isótropas contradice el concepto intuitivo de perpendicularidad, pero veremos que parte de la geometría parabólica puede desarollarse sin necesidad de exigir que no haya rectas isótropas.

Teorema 3.8. *Si E es un espacio parabólico sobre un cuerpo K de característica $\neq 2$, existe una forma bilineal simétrica regular $F : \vec{E} \times \vec{E} \longrightarrow K$ tal que dos rectas con vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares si y solo si $F(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.*

Demostración.
Fijemos un sistema de referencia en E, de modo que E_∞ esté formado por los puntos con

$x_0 = 0$. La recta que pasa por un punto $(1, a_1, ..., a_n)$ con vector director $\vec{u}$ de coordenadas $(v_1, ..., v_n)$ está formada por los puntos finitos de coordenadas

$$(1, a_1, ..., a_n) + \lambda(0, u_1, ..., u_n), \qquad \lambda \in K,$$

que son los puntos finitos de la recta proyectiva r formada por los puntos de coordenadas homogéneas

$$\mu(1, a_1, ..., a_n) + \lambda(0, u_1, ..., u_n), \qquad \lambda, \mu \in K.$$

El punto infinito r_∞ es, pues, el de coordenadas homogéneas $(0, u_1, ..., u_n)$. Al eliminar el 0 inicial obtenemos las coordenadas homogéneas de r_∞ respecto de un sistema de referencia de E_∞. Sea A la matriz (simétrica, regular) de la polaridad ortogonal en dicho sistema de referencia. Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de coordenadas $(u_1, ..., u_n) y (v_1, ..., v_n)$, respectivamente, podemos definir

$$F(\vec{u}, \vec{v}) = (u_1, ..., u_n)A(v_1, ..., v_n)^t. \tag{3.1}$$

luego, F es una forma bilineal simétrica regular en $\vec{E}$, y las rectas r y s de vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares si y sólo si sus puntos infinitos cumplen $s_\infty \in p(r_\infty)$, lo cual equivale a que $F(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.■

En suma, los espacios euclídeos sobre un cuerpo ordenado euclídeo coinciden con los espacios euclídeos salvo por el hecho de que el producto escalar está determinado salvo un factor de escala.
Más aún, es inmediato que el producto escalar del espacio es uno de los que determina la polaridad ortogonal

Vamos a encontrar caracterizaciones de algunos conceptos de la geometría euclídea en términos de la geometría parabólica, algunos de los cuales darán lugar a conceptos análogos en espacios parabólicos arbitrarios, no necesaria mente euclídeos. Puesto que vamos a admitir la posibilidad de que un espacio parabólico E tenga puntos infinitos autoconjugados, conviene hacer algunas observaciones generales sobre éstos:

Fijado un sistema de referencia en E_∞, la polaridad ortogonal vendrá determinada por una matriz regular simétrica A, de modo que el hiperplano polar de un punto P de coordenadas homogéneas $c \in K^n$ es el hiperplano de ecuación $cAx^t = 0$, y los puntos autoconjugados son los que cumplen $cAc^t = 0$, pero esto es la ecuación de una cuádrica no degenerada. Esto nos lleva a la definición siguiente:
Antes de pasar a la siguiente definición, haremos un recordatorio acerca de las cuádricas.

Definición 3.25. *Dado un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo K de característica distinta de 2 , llamaremos $\mathcal{F}_V$ al conjunto de todas las formas bilineales simétricas $F : V \times V \longrightarrow K$.*

Fijada una base B de V, existe una única matriz simétrica $M_B(F)$ tal que si dos vectores u y v tienen coordenadas $x, y \in K^n$, respectivamente, entonces $F(u,v) = xM_B(F)y^t$.
Si A es la matriz de una forma F en una base B, entonces su matriz en otra base B' es CAC^t, donde C es la matriz de cambio de base y, recíprocamnete, toda matriz de esta forma (que siempre es una matriz simétrica) es la matriz de F en una cierta base.

Definición 3.26. *LLamaremos **cuádricas** en un espacio proyectivo $X = P(V)$ a los elementos del espacio proyectivo $P(\mathcal{F}_\mathcal{V})$, de modo que cada cuádrica está determinda por una forma bilineal no nula F, pero entendiendo que dos formas determinan la misma cuádrica si una es un múltiplo de la otra por un escalar.*

Si $\mathcal{C}$ es una cuádrica en un espacio proyectivo X determinada por una forma bilineal F, definimos el conjunto de los puntos de $\mathcal{C}$ como el conjunto $\vec{\mathcal{C}} \subset X$ formado por los puntos $P = \langle v \rangle \in X$ tales que $F(v,v) = 0$.

Expresiones en Coordenadas
Si fijamos un sistema de referencia proyectivo en X, este determina una base de V salvo múltiplos por un mismo escalar, la cual nos permite asociar a cada punto $P \in X$ un vector de coordenadas homogéneas $x \in K^{n+1}$. Si la cónica $\mathcal{C}$ está determinada por una forma F cuya matriz en una de las bases determinadas por el sistema de referencia es A, entonces la condición $P \in \mathcal{C}$ equivale a que las coordenadas homogéneas x de P cumplan la ecuación $xAx^t = 0$.

Esto no depende de la elección de la base de V asociada al sistema de referencia, ni de la elección de la forma F, ni de la elección de la matriz A, pues un cambio en cualquirea de estas elecciones se traduce al final en que la ecuación $xAx^t = 0$ quede multiplicada por un escalar no nulo que puede simplificarse.

En genearal, cualquier conjunto de puntos en un espacio proyectivo X cuyas coordenadas homogéneas respecto de cierto sistema de referencia estén determinadas por una ecuación de la forma $xAx^t = 0$, para una cierta matriz simétrica no nula A, es el conjunto de puntos de la cónica asociada a la forma bilineal que en una base de V asociada al sistema de referencia dado tiene matriz A, y esto hace que si tomamos otro sistema de referencia, las coordenadas homogéneas del mismo conjunto de puntos estén determinadas por otra ecuación de la forma $xBx^t = 0$, donde B es una matriz simétrica congruente con A. Por lo tanto, también podemos decir que los conjuntos de puntos de las cuádricas son los conjuntos de puntos de un espacio proyectivo que en cualquier sistema de referencia están determinados por una ecuación en coordenadas de la forma $xAx^t = 0$.

Rango y vértice de una cuádrica
Sea $X = P(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n y $\mathcal{C}$ una cuádrica en X determinada por una forma bilineal F. Consideremos la aplicación lineal $l_F : V \longrightarrow V*$ dada por $l_F(v)(w) = F(v,w)$.

La dimensión de su imagen es el **rango** de la matriz de F en cualquier base de V, luego es independiente de elección de la base, y tampoco se altera si cambiamos F por un

múltiplo no nulo.
Por consiguiente, podemos definir el **rango** de $\mathcal{C}$ como el rango de cualquiera de sus matrices respecto de cualquier sistema de referencia de X. A las cuádricas de rango máximo se les llama **cónicas no degeneradas**, mientras que las restantes son **degeneradas**.

Definición 3.27. *Si E es un espacio parabólico de dimensión ≥ 2, llamaremos cuádrica esférica a la cuádrica en E_∞ cuya matriz en un sistema de referencia dado es la de la polaridad ortogonal.*

Teorema 3.9. *Si E es un espacio parabólico de dimensión ≥ 2, la cuádrica esférica es una cuádrica en E_∞ no degenerada (tal vez vacía) cuyos puntos son los puntos autoconjugados de E, y de modo que la polaridad que induce en E_∞ es la polaridad ortogonal.*

Veamos ahora algunas consecuencias elementales de la definición de espacio parabólico:

- Las rectas perpendiculares a un hiperplano afín H son las rectas que pasan por el polo de H_∞. En particular, por cada punto finito de E pasa una única perpendicular a H.
- Por cada punto finito P pasa un único hiperplano H perpendicular a una recta afín dada r.
- Por un punto exterior a una recta no isótropa pasa una única perpendicular, que corta a ésta en un punto finito.
- Dos rectas paralelas son perpendiculares si y sólo si son isótropas.
  Si R es el punto infinito común de las rectas, éstas son perpendiculares si y sólo si $R \in p(R)$, es decir, si y sólo si R es autoconjugado, lo cual equivale a que las rectas sean isótropas.

Veamos ahora que el concepto de **esfera** puede generalizarse a espacios parabólicos arbitrarios:

Teorema 3.10. *Si E es un espacio parabólico y O y P son puntos finitos tales que la recta OP no es isótropa, entonces existe una única cuádrica no degenerada en E de centro O que pasa por P y que cuya polaridad induce en E_∞ la polaridad ortogonal.*

Definición 3.28. *Si E es un espacio parabólico, llamaremos esferas en E a las cuádricas no degeneradas de centro finito que inducen en E_∞ la polaridad ortogonal*

En los planos parabólicos las esferas se llaman circunferencias. He aquí una caracterización sobre las esferas:

Teorema 3.11. *En un espacio parabólico E, una cuádrica no degenerada C es una esfera si y sólo si $C \cap E_\infty$ es la cuádrica esférica.*

Demostración.
Si C es una esfera, entonces tiene centro finito, y si $C \cap E_\infty$ es la cuádrica esférica (que es no degenerada) entonces E_∞ no puede ser tangente a C, luego el centro $p_C(E_\infty)$ tiene que ser finito. Así pues, podemos probar la equivalencia bajo el supuesto de que C es una cuádrica de centro finito O. Tomamos un sistema de referencia en el que E_∞ tenga ecuación $x_0 = 0$ y cuyo origen de coordenadas afines sea O. Esto se traduce en que la matriz de C será de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Así C es una esfera si y sólo si A' es la matriz de la polaridad ortogonal, lo cual equivale también a que $C \cap E_\infty$ sea la cuádrica de matriz A', es decir, la cuádrica esférica. ■

Hemos probado que existe una única esfera con un centro finito dado O que pasa por un punto finito dado P, con la única restricción de que la recta OP no sea isótropa.

En otras palabras: toda recta isótropa r que pasa por el centro de una esfera es tangente a esta por r_∞, y es una tangente propia, porque en caso contrario el centro sería un punto infinito, luego una esfera corta a una recta isótropa que pase por su centro únicamente en su punto infinito.

En particular, en un plano parabólico no euclídeo, las circunferencias son hipérbolas y las rectas isótropas que pasan por su centro son sus asíntotas.

Definición 3.29. *Dado un espacio afín E, llamarermos **grupo afín** de E al grupo GA(E) formado por las biyecciones afines de E en si mismos, también con la composición de aplicaciones*

Recordemos que una afinidad $f \in GA(E)$ es una aplicación que actúa sobre cada punto P en la forma

$$f(P) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OP}),$$

donde $\vec{f} \in LG(\vec{E})$ y O es un punto de E.

Definición 3.30. *Llamaremos grupo parabólico de un espacio parabólico E al grupo de todas las biyecciones afines $f \in GA(E)$ que conservan la polaridad ortogonal, es decir, que cumplen $p(f(P)) = f[p(P)]$ para todo $P \in E_\infty$.*

Lo representaremos por $Sem(E)$ y a sus elementos los llamaremos semejanzas de E.

3.3. Espacios euclídeos

Los resultados de la sección precedente muestran que en el estudio de la geometría euclídea el producto escalar puede sustituirse por una polaridad ortogonal sin puntos autoconjugados, y que algunos conceptos y resultados son generalizables (aunque sea parcialmente) a espacios parabólicos arbitrarios. La razón por la que hemos estudiado espacios parabólicos en general, sin excluir la presencia de rectas isótropas, es porque éstas aparecen cuando se considera la complexificación de un espacio euclídeo:

La complexificación de un espacio euclídeo.
Todo espacio sobre un cuerpo ordenado euclídeo R puede identificarse con el conjunto de los puntos finitos del espacio proyectivo $E = P^n(R)$ respecto a un hiperplano infinito E_∞ seleccionado arbitrariamente. La estructura euclídea de E determina una polaridad p en E_∞ sin puntos autoconjugados con la que E se convierte en un espacio parabólico.
E puede identificarse con el conjunto de los puntos reales del espacio complejo $E_C = P^n(C)$, y que el hiperplano infinito E_∞ se identifica con el conjunto de los puntos reales de un único hiperplano de E_C, que seguiremos llamando E_∞.

A su vez, la polaridad ortogonal p se extiende a una única polaridad del hiperplano infinito extendido (la dada por la misma matriz respecto a cualquier sistema de referencia real) que seguiremos llamando p, y que dota a E_C de estructura de espacio parabólico. De este modo, al espacio euclídeo de partida, no sólo le hemos añadido puntos infinitos, sino también puntos imaginarios, pero es importante tener presente que con esto no hemos perdido nada de generalidad. Todo espacio euclídeo (entendido como espacio afín) se puede sumergir en un espacio parabólico con puntos infinitos e imaginarios, de modo que al estudiar un espacio euclídeo sumergido en un espacio parabólico complejo estamos estudiando realmente un espacio euclídeo arbitrario.

Si fijamos en E un sistema de referencia ortonormal de modo que E_∞ sea el hiperplano $x_0 = 0$, una esfera de centro el origen de coordenadas está formado por los puntos cuyas coordenadas afines cumplen una ecuación de la forma

$$x_1^2 + ... + x_n^2 = r^2, \tag{3.3}$$

luego las coordenadas homogéneas de sus puntos cumplen la ecuación

$$-r^2x_0^2 + x_1^2 + ... + x_n^2 = 0, \tag{3.4}$$

luego la cuádrica esférica, que es la intersección de la esfera con el hiperplano infinito, tiene ecuación

$$x_1^2 + ... + x_n^2 = 0 \tag{3.5}$$

que es, pues, independiente del sistema de referencia ortonormal elegido.

Por ejemplo, en el caso de un plano euclídeo, considerando que la recta infinita es $z = 0$, la ecuación es $x^2 + y^2 = 0$, luego los puntos circulares son los de coordenadas homogéneas $(1, \pm i, 0)$.

Definición 3.31. *Diremos que dos puntos Q y R son mutuamente inversos respecto a la esfera de centro O y radio r si ambos se encuentran sobre la misma semirrecta de origen O y además $||\overrightarrow{OQ}||||\overrightarrow{OR}|| = r^2$. Convenimos en que es el inverso de todos los puntos infinitos.*

En estos términos, el hiperplano polar de un punto finito Q respecto a una esfera de centro O es el hiperplano perpendicular a la recta OP que pasa por el inverso de P.

3.4. Cónicas euclideas

En la práctica, el paso de la ecuación afín a la ecuación proyectiva de una cónica se obtiene añadiendo una variable z para que todos los monomios de la ecuación tengan grado 2, pues es inmediato que los puntos finitos de la cónica determinada por la ecuación resultante son precisamente aquellos cuyas coordenads afines cumplen la ecuación original.

Puesto que la recta infinita solo puede cortar a la compleción preyectiva en 0,1 o 2 puntos, obtenemos finalmente la división de las cónicas en elipses, parábolas e hipérbolas:

Definición 3.32. *Diremos que una cónica afín no degenerada es una **elipse**, una **parábola** o una **hipérbola** según si tiene 0, 1 o 2 puntos infinitos.*

En el caso real esto incluye a las cónicas imaginarias, que, como no tienen puntos, ni finitos ni infinitos, son técninamente elipses. En el caso complejo una cónica afín puede ser una parábola o una hipérbola, pero nunca una elipse, pues los puntos infinitos de una cónica se obtienen resolviendo una ecuación de segundo grado, y todas las ecuaciones de segundo grado en C tienen al menos una raíz.

Ejemplo 3.3. *Consideremos la cónica de ecuación*

$$x^2 + 3y^2 - 4xy + 2x + 4y + 4 = 0$$

Su forma en coordenadas homogéneas es

$$x^2 + 3y^2 - 4xy + 2xz + 4yz + 4z^2 = 0$$

Como sabemos para la ecuación en coordenadas homogéneas $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$ la matriz asociada es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix}$$

entonces la matriz asociada a $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$ es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculando el determinante de la matriz asociada vemos que no es degenerada.
Es decir,

$$det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \neq 0$$

Haciendo $z = 0$ obtenemos la ecuación de sus puntos infinitos:

$$x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$$

Si hacemos $y = 0$ es claramente imposible, se obtiene $x^2 = 0$.
Si $y = 1$, obtenemos $x^2 - 4x + 3 = 0$, cuyas soluciones son:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) = 0$$

Entonces $x = 1, 3$. Asi, la cónica pasa por los puntos infinitos (1,1,0) y (3,1,0) y es por lo tanto una hipérbola por definición.

Estudiaremos ahora las cónicas en un plano euclideo en términos de la geometría parabólica, vamos a ver que todas las propiedades de las elipses, parábolas e hipérbolas pueden deducirse de su mera definición como cónicas no degeneradas que cortan a la recta infinita 0, 1, o 2 puntos. Fijamos un plano euclideo E y llamaremos C_1 y C_2 a sus puntos circulares.
Empezamos dando definiciones adecuadas de los elementos de una cónica:
Diremos que dos rectas de un haz de rectas son **conjugadas** respecto de una polaridad si una pasa por el polo de la otra.
Diremos que son conjugadas respecto de una cónica si lo son respecto de la polaridad asociada a la cónica.

Definición 3.33. *Sea $\mathcal{C}$ una cónica. Un eje de $\mathcal{C}$ es una recta tal que la reflexión respecto a ella deja invariente a $\mathcal{C}$.*

Definición 3.34. *Un foco de F de $\mathcal{C}$ es un punto tal que los pares de rectas conjugadas respecto a $\mathcal{C}$ que pasan por F son perpendiculares.*

Definición 3.35. *Una directríz es la recta polar de un foco.*

Definición 3.36. *Un diámetro de $\mathcal{C}$ es una recta que pasa por su centro.*

Definición 3.37. *Un vértice de $\mathcal{C}$ es un punto de $\mathcal{C}$ tal que su tangente es perpendicular al diámetro que pasa por él.*

Teorema 3.12. *Una parábola tiene un único eje, un único vértice y un único foco. Además el eje es el diámetro que pasa por el vértice y por el foco y la directríz correspondiente es perpendicular al eje.*

Teorema 3.13. *Una hipérbola o una elipse real o imaginaria que no sea una circunferencia tiene exactamnete dos ejes y dos focos. Ambos están sobre el mismo eje, son interiores y están simétricamente situados respecto del centro. Las directrices son perpendiculares a dicho eje.*

Definición 3.38. *El eje de una elipse o de una hipérbola que contiene a los focos recibe el nombre de **eje mayor**, mientras que el otro eje es el **eje menor**.*

En una elipse real, el centro es interior, luego los ejes son secantes, luego la elipse tiene exactamente cuatro vértices. En cambio, una hipérbola solo tiene dos vértices sobre su eje mayor, pues éste pasa por los focos, que son interiores, y todas las rectas que pasan por un punto interior son secantes. En cambio, el semieje menor es exterior.

Teorema 3.14. *Una cónica $\mathcal{C}$ es una elipse, una parábola o una hipérbola según si su excentriciadad es menor, igual o mayor que 1.*

Esto vale para las circunferencias si convenimos que su excentricidad es 0.
Por otra parte, dado un punto cualquiera F, una recta cualquiera d que no pase por F y d es e es una cónica real no degenerada.

Teorema 3.15. *Dada una recta d, un foco F que no esté en d y un número $e > 0$, la figura formada por todos los puntos tales que la razón de las distancias a F y d sea igual a e es una cónica real con un foco igual a F, directríz d y excentricidad e. Toda cónica real que no sea una circunferencia es de esta forma.*

Esto implica que toda cónica que no sea una circunferencia está completamente determinada por su excentricidad, uno de sus focos y su directríz correspondiente.

Teorema 3.16. *Dos cónicas reales son semejantes si y solo si tienen la misma excentricidad.*

Como siempre, el argumento no incluye las circunferencias, pero el resultado es válido igualmente para ellas. En particular dos párabolas cualesquiera son semejantes.

Definición 3.39. *LLamaremos **semiejes mayores** de una elipse a los segmentos que unen su centro con sus vértices en el eje mayor.*

También llamaremos semieje mayor a la longitud de estos segmentos, y la representaremos por a. Análogamente se define el semieje menor, que representaremos por b. En una hipérbola solo tenemos definido el semieje mayor.

Definición 3.40. *La* ***distancia focal*** *de una elipse o una hipérbola es la distancia de su centro O a cualquiera de sus focos, y la representaremos por c.*

Para una hipérbola, definimos formalmente $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Teorema 3.17. *Sea $\mathcal{C}$ una cónica real. Entonces:*

1. Si $\mathcal{C}$ es una elipse, sus puntos son exactamente los que cumplen

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a.$$

2. Si $\mathcal{C}$ es una elipse, la distancia de un vértice menor a uno de los focos es a, y se cumple $a^2 = b^2 + c^2$.

Demostración.
1. Dado un punto P de $\mathcal{C}$, sean D_1 y D_2 los puntos de las directrices donde se alcanza la distancia de estas a P.
Entonces se tiene

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = e\overline{PD_1} + e\overline{PD_2} = e\overline{D_1 D_2}.$$

Por lo tanto, la suma de las distancias a los focos es constante. Evaluándola en un vértice se puede comprobar que es exactamente $2a$, Así $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.

2. Si B es uno de los vértices menores, tenemos que $\overline{BF_1} + \overline{BF_2} = 2a$, pero ambos sumandos son iguales. Si A es un vértice mayor, el triángulo $\triangle BAF_1$ es rectángulo, lo que nos da la relación $a^2 = b^2 + c^2$. En particular vemos que el semieje mayor es ciertamente mayor que el semieje menor.■

Bibliografía

- Geometría Primer Nivel (1995) (Ernesto Quispe Rodríguez)
- Geometría (Carlos Ivorra Castillo)
- Spherical Geometry And Its Aplations (Marshall A. Whittlesey)
- Geometría Moderna (Arturo Ramirez)(29 de enero de 2008)
- Plane and Spherical Trigonometry (George Wentworth And david eugene Smith)