UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

CONDICIONES DE CADENA EN ANILLOS NOETHERIANOS Y ANILLOS ARTINIANOS

TRABAJO DE GRADUACION

PRESENTADO POR

Teodoro Jorge León Zaldaña

José Rigoberto Cañas Argueta

PARA OPTAR AL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICA

ABRIL DE 1986

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR: DR. MIGUEL ANGEL PARADA

SECRETARIO GENERAL: DRA. ANA GLORIA CASTANEDA PADILLA

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO: ING. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

SECRETARIO: ING. RENÉ MAURICIO MEJÍA MÉNDEZ

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE: LIC. ROLANDO LEMUS GÓMEZ

ORGANIZACION DEL TRABAJO DE GRADUACION

COORDINADOR: LIC. JOSÉ JAVIER RIVERA LAZO

ASESOR: LIC. JOSÉ JAVIER RIVERA LAZO

D E D I C A T O R I A

A MI PADRE: Marcelo Wenceslao León

A MI MADRE: Rosaura Zaldaña de León

A MI ESPOSA: María Elizabeth Sánchez de León

A MIS HIJOS: Jorge Isaac

Eduardo Ernesto

Marcelo Alejandro

D E D I C A T O R I A

A MI MADRE: Dolores Argueta vda. de Cañas

A MI ESPOSA: Alicia Zelaya Saravia de Cañas

A MIS HIJOS: Maya Alicia

José Rigoberto

Antonio José

P R O L O G O

Uno de los objetivos del presente trabajo es relacionar las estructuras de Orden y las estructuras Algebraicas.

Otro de los objetivos propuestos es lograr que la presente obra se constituya como un texto de consulta de algún curso básico sobre Algebra Conmutativa.

También se pretende que esta obra pueda servir de motivación para estudios más avanzados o de investigación en este campo.

El trabajo se desarrolla en cinco capítulos; los primeros tres tratan sobre Relaciones de Orden, Anillos e Ideales y Módulos, que sirven de base para explicar la teoría de los dos últimos capítulos, Módulos Noetherianos y Módulos Artinianos, en los cuales se establecen, propiedades de este tipo de módulos y se dan algunos ejemplos tipos.

Estos temas están fundamentados en los capítulos 6, 7, 8 de la obra "Introducción al Algebra Conmutativa" de M.F. Atiyat e I. G. Macdonald.

Hemos intentado, de manera especial, reescribir y desarrollar en una forma más clara ordenada y coherente los capítulos de esta obra, que tratan sobre "CONDICIONES DE CADENA DE ANILLOS Y MODULOS NOETHERIANOS Y ARTINIANOS", de donde toma su título el presente trabajo de graduación.

Finalmente, deseamos expresar un especial agradecimiento al Lic. José Javier Rivera Lazo por su valiosa asesoria en la preparación del trabajo, también al Ing. José Francisco Marroquín por su cooperación en todo momento y a todas las personas que contribuyeron en una u otra forma a que esta publicación se realizara.

I N D I C E

C A P I T U L O   I

RELACION DE ORDEN

I. RELACION DE ORDEN

1. DEFINICION

Una relación "$x \leq y$" definida sobre el conjunto E es llamada "relación de orden" si cumple las tres propiedades siguientes:

1) $x \leq x$, para todo $x \in E$
2) $(x \leq z$ y $z \leq x) \rightarrow x = z$, para todo $x, z \in E$
3) $(x \leq z$ y $z \leq y) \rightarrow x \leq y$, para todo $x, y, z \in E$.

Si sobre E se considera una relación de orden se dice que "E es un conjunto ordenado".

1.2 EJEMPLO:

Si $A \neq \phi$ es un conjunto, la relación de inclusión:

"$X \subset Y$" es una relación de orden sobre el conjunto $P(A)$, es decir sobre el conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

1.3 DEFINICION

Sea E un conjunto ordenado.

Un elemento $m \in E$ es llamado "elemento maximal" si cumple la propiedad siguiente:

Para todo $x \in E$: $m \leq x \rightarrow x = m$.

Un elemento $n \in E$ es llamado "elemento minimal", si cumple -

la propiedad siguiente:

Para todo $x \in E$: $x \leq n \Rightarrow x = n$

1.4 EJEMPLO

Sea $A = \{a,b,c,d\}$.

El subconjunto $\{a,b,c\}$ es un elemento maximal en el conjunto $E = \{B \subset A \ / \ B \neq A\}$.

El subconjunto $\{a\}$ es un elemento minimal en el conjunto $H = \{B \subset A \ / \ B \neq \phi\}$.

1.5 DEFINICION

Sea E un conjunto ordenado y $F \subset E$. Se dice que "F es totalmente ordenado" si cumple la propiedad siguiente;

Para todo $x,y \in F$: $x \leq y$ ó $y \leq x$

1.6 EJEMPLO

$\{\{a\}, \{a,b,c\}, \{a,b\}\}$ es totalmente ordenado

$\{\{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ no es totalmente ordenado

1.7 Sean E un conjunto ordenado, $M \subset E$, $a \in E$.

Se dice que "a es una cota superior de M" si se cumple la propiedad siguiente:

Para todo $x \in M$: $x \leq a$.

1.8 LEMA DE ZORN

Sea E un conjunto totalmente ordenado en el cual todo sub--

conjunto totalmente ordenado admite una cota superior entonces en E hay un elemento maximal.

C A P I T U L O   I I

A N I L L O S   E   I D E A L E S

II ANILLOS E IDEALES

2.1 DEFINICION

Un conjunto $A \neq \phi$ es un anillo si están definidas en A dos operaciones: $x + y$, xy (Suma y producto) tales que;

1) $(A, +)$ es un grupo conmutativo

2) Para todo x, y, z en A:

$x(yz) = (xy)z$ (Ley asociativa)

$x(y+z) = xy + xy$ (Ley distributiva)

$(x+y)z = xz + yz$ (Ley distributiva)

El anillo A es llamado:

a) Conmutativo, si $xy = yx$ para todo x, y.

b) Unitario si existe $1 \in A$ tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ para - todo $x \in A$.

2.2 EJEMPLO:

El anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros es un anillo unitario y conmutativo.

En este trabajo se consideran únicamente anillos unitarios y conmutativos.

2.3 Si $x \in A$, x es llamado

a) Inversible, si existe $y \in A$ tal que $xy = 1$

b) Nilpotente, si existe $n > 0$ tal que $x^n = 0$

c) Divisor de cero si existe $y \neq 0$ tal que $xy = 0$

Los elementos inversibles son también llamados "Unidades de A".

2.4 DEFINICION

Un anillo A es llamado:

1) Dominio entero si el único divisor de cero es el cero, - es decir:

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } y = 0$$

2) Campo

Si todo $x \neq 0$ es inversible, es decir si $x \neq 0 \Rightarrow xy = 1$ para algún y.

2.5 EJEMPLO:

El anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros es un dominio entero; el conjunto de los números racionales es un campo.

2.6 ANILLO PRODUCTO

Sean A y B dos anillos; el producto cartesiano $A \times B$ tiene - una estructura de anillo con las operaciones siguientes:

$$(x,y) + (z,u) = (x + z,\ y + u)$$

$$(x,y) \cdot (z,u) = (xz,\ yu)$$

En general, se define una estructura de anillo en

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, en donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son anillos:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n) + (y_1,y_2,\ldots,y_n) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ldots,x_n + y_n)$$

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n) \cdot (y_1,y_2,\ldots,y_n) = (x_1y_1,x_2y_2,\ldots,x_ny_n)$$

Se denota A^n el producto $A \times A \times A \times \ldots \times A$ (n veces)

2.7 MORFISMO DE ANILLOS

Sean A y B dos anillos y $f: A \longrightarrow B$ una función.

Se dice que f es un morfismo si

i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in A$

ii) $f(x\,y) = f(x)\,f(y)$ para todo $x, y \in A$

iii) $f(1) = 1$

2.8 DEFINICION

Sea A un anillo e $I \subset A$, $I \neq \phi$. Se dice que "I es un ideal - de A" si cumple las propiedades siguientes:

1) $(I, +)$ es un subgrupo de $(A, +)$

2) Si $x \in A$ y $y \in I$ entonces $x\,y \in I$

2.9 EJEMPLO:

El conjunto de números pares es un ideal en el anillo de los - números enteros.

2.10 PROPOSICION

Un campo K tiene únicamente dos ideales:

$\{0\}$ y K.

DEMOSTRACION

Sean K un campo, $I \subset K$, $I \neq \{0\}$, I un ideal.

Probemos que $I = K$. Sean $x \in K$, $y \in I$, $y \neq 0$; $xy \in I$ porque $y \in I$; luego $xy = z$, $z \in I$; y es inversible por ser $y \neq 0$; -

entonces

$xy = z \Rightarrow x\,y\,y^{-1} = zy^{-1} \Rightarrow x = zy^{-1}$

$zy^{-1} \in I$ por que $z \in I$; luego $x \in I$. Es decir que si $x \in K$ entonces $x \in I$. Por tanto $K = I$.

2.11 PROPOSICION

Sean A un anillo, $A[x]$ el anillo de polinomios en una indeterminada x, con coeficientes en A, $I \subset A[x]$, I un ideal, y sea $J = \{a \in A$ / a es coeficiente principal de un elemento de $I\}$. Entonces J es un ideal de A.

DEMOSTRACION

Sean $a \in A$, $b \in J$, $c \in J$; existen en I dos polinomios $f(x)$, $g(x)$ tales que b y c son sus respectivos coeficientes principales; sean $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, y supongamos $m \leq n$, $n = m + t$; por ser I un ideal $x^t \cdot g(x) \subset I$, es decir, $h(x) = x^t \cdot g(x) \in I$; $h(x) = x^t \cdot \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{i+t}$; el coeficiente principal de $h(x)$ es b_m; $f(x) + h(x) \in I$; el coeficiente principal de $f(x) + h(x)$ es $a_n + b_m$; luego $a_n + b_m \in J$; pero $a_n = b$, $b_m = c$, de donde $b + c \in J$; también $af(x) \in I$ porque I es un ideal; el coeficiente principal de $af(x)$ es $a \cdot a_n$; luego $a \cdot a_n \in J$, es decir $ab \in J$. Por tanto, J es un ideal de A.

2.12 TIPOS DE IDEALES:

Un ideal I en un anillo A es llamado

PRIMO

Si $I \neq A$ y si $xy \in I \Rightarrow x \in I$ ó $y \in I$

MAXIMAL

Si $I \neq A$ y si J es un ideal tal que $I \subset J$ entonces $I = J$ ó $J = A$

PRIMARIO

Si $I \neq A$ y si $xy \in I \Rightarrow x \in I$ ó $y^n \in I$ para algún $n > 0$.

IRREDUCIBLE

Si para todo par de ideales J, K:
$I = J \cap K \Rightarrow I = J$ ó $I = K$

REDUCIBLE

Si existen dos ideales J, K tales que $I = J \cap K$, $J \neq I$, $K \neq I$.

SUMABLE

Si existen dos ideales J, K tales que $I \neq J$, $I \neq K$ e $I = J + K$.

2.13 DEFINICION

RADICAL DE UN IDEAL

Si I es un ideal de un anillo A, se llama "radical de I" al conjunto

$r(I) = \{x \in A \,/\, x^n \in I$ para algún $n > 0\}$.

2.14 PROPIEDADES

a) $r(I)$ es un ideal de A.

b) $r(I)$ = intersección de los ideales primos que contienen al ideal I.

2.15 PROPOSICION

Sea I un ideal de un anillo A. Si I es un ideal primario entonces $r(I)$ es el menor ideal primo que contiene a I.

DEMOSTRACION

Probaremos que $r(I)$ es primo. Sean x, y tales que $x\,y \in r(I)$; por definición de $r(I)$ existe $n > 0$ tal que $(x\,y)^n \in I$, es decir $x^n y^n \in I$; como I es primario, $x^n \in I$ ó $y^{nm} \in I$ para algún $m > 0$, luego $x \in r(I)$ ó $y \in r(I)$; por tanto, $r(I)$ es un ideal primo. Como $r(I)$ es igual a la intersección de todos los ideales primos que contienen a I, esto demuestra la proposición.

2.16 COCIENTE DE DOS IDEALES

Sean I, J dos ideales de un anillo A. Se llama "ideal cociente" al conjunto

$(I: J) = \{x \in A \ / \ xJ \subset I\}$.

$(I: J)$ es un ideal é $I \subset (I: J)$

En particular, si $I = \{0\}$, $(\{0\}: J)$ es llamado "anulador de J" y se denota $A_n(J)$, es decir que $A_n(J) = \{x \in A \ / \ xy = 0$, para todo $y \in J\}$.

2.17 IDEAL GENERADO

Sean A un anillo y $S \subset A$. Denotamos por $[S]$ a la intersección de todos los ideales de A que contienen a S, es decir

$[S] = \bigcap\limits_{I \in \Omega} I$, Ω = conjunto de ideales I tales que $S \subset I$.

PROPIEDADES DE $[S]$

1) $[S]$ es un ideal, por ser intersección de ideales.
2) $S \subset [S]$
3) Si M es un ideal tal que $S \subset M$ entonces $[S] \subset M$
4) Si $S \neq \phi$ entonces $[S]$ está formado por todas las combinaciones lineales de elementos de S, es decir

$$[S] = \{x \in A \ / \ x = \sum_{1}^{n} \alpha_i x_i, \ \alpha_i \in A, \ x_i \in S, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1\}$$

2.18 IDEAL PRINCIPAL

Un ideal I es llamado PRINCIPAL si es generado por un único elemento $a \in A$; es denotado $[a]$.

Según la propiedad 4) de $[S]$,

$[a] = \{x \in A \ / \ x = \alpha a$, para algún $\alpha \in A\}$.

2.19 PROPOSICION

En el anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros todos los ideales son principales.

DEMOSTRACION

Sea $I \subset \mathbb{Z}$, I un ideal. Si $I = \{0\}$ entonces $I = [0]$; luego es un ideal principal. Supongamos $I \neq \{0\}$ y sea $J = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n > 0 \ \ y \ \ n \in I\}$; $J \neq \phi$ porque $I \neq \{0\}$; sea $a \in \mathbb{N}$ el menor elemento del conjunto J. Tomemos $x \in I$; según el algoritmo de Euclides existen $b \in \mathbb{Z}$ y $r \in \mathbb{N}$, tales que $x = a\,b + r$, en donde $0 \leq r < a$. Como I es un ideal, y $a \in I$, $x - a\,b \in I$, ó sea $r \in I$, ya que $r = x - a\,b$; $r \notin J$ por ser $r < a$; luego $r = 0$, de donde $x = a\,b$. Por tanto $x \in [a]$; de donde $I = [a]$.

2.20 PROPOSICION

Sea $P \in \mathbb{Z}$. Entonces P es un número primo si y solo si $[P]$ es un ideal primo

DEMOSTRACION

1) Supongamos que P es un número primo y probemos que $[P]$ es un ideal primo. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $xy \in [P]$; existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $xy = mP$; como P es primo, P divide a x ó P divide a y. Si P divide a x, $x = nP$, $n \in \mathbb{Z}$, de donde $x \in [P]$. Si P divide a y, $y = rP$, $r \in \mathbb{Z}$, de donde $y \in [P]$. Luego, $x \in [P]$ ó $y \in [P]$, es decir que P es primo.

2) Supongamos que el ideal $[P]$ es primo y probemos que P es un número primo. Sea $m \in \mathbb{Z}$ un divisor de P y sea n tal que $P = m\,n$. Entonces:

$m\,n = P \Rightarrow m\,n \in [P] \Rightarrow m \in [P]$ ó $n \in [P]$

$\Rightarrow m = aP$ ó $n = bP$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$;

$m = aP \Rightarrow mn = aPn \Rightarrow 1 = an \Rightarrow n = 1$ ó $n = -1 \Rightarrow m = P$ ó $m = -P$

$n = aP \Rightarrow P = maP \Rightarrow 1 = ma \Rightarrow m = 1$ ó $m = -1$

Luego, P es un número primo ya que sus únicos divisores son 1, -1, P y -P.

2.21 OPERACIONES CON IDEALES

Sean I, J dos ideales de un anillo A.

1) El conjunto $I + J = \{x \in A \,/\, x = y + z$ para algún $y \in I,\ z \in J\}$ es un ideal de A tal que $I + J = [I \cup J]$. En general $I \cup J$ no es un ideal

2) La intersección $I \cap J$ es un ideal de A.

3) El conjunto $H = \{x \in A \,/\, x = yz$ para algún $y \in I,\ z \in J\}$ no es un ideal de A. se denota $I\,J$ al ideal de A generado por H.

Se denota I^2 al ideal I.I. Para $n > 0$, I^n denota al ideal I.I.I...I (n veces).

2.22 PROPOSICION

Si I y J son dos ideales de un anillo A y $r > 0$ entonces

$I^r J^r \subset (I \cap J)^r$

DEMOSTRACION

Probaremos que si $x \in I^r$ y $y \in J^r$ entonces $x\,y \in (I \cap J)^r$, ya que $x\,y$ sería un elemento cualquiera del generador de $I^r J^r$.

Sea $x \in I^r$, $y \in J^r$; x es de la forma $x = \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2} \ldots x_{ir}$, en donde $x_{ik} \in I$ para todo $i \leq n$ y $k \leq r$;

y es de la forma $y = \sum_{j=1}^{n} y_{j1}, y_{j2}, \ldots, y_{jr}$, en donde $y_{jk} \in J$

Para todo $j \leq m$, $k \leq r$. Entonces

$$xy = \sum_{i=1}^{n} x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{ir} \cdot \sum_{j=1}^{m} y_{j1}, y_{j2}, \ldots y_{jr} =$$

$$= \sum_{\substack{i \leq n \\ j \leq m}} (x_{i1} y_{j1})(x_{i2} y_{j2}) \ldots (x_{ir} y_{jr});$$

para cada $k \leq r$, $x_{ik} y_{jk} \in I \cap J$, ya que $x_{ik} \in I$ $y_{jk} \in J$; luego, $x\,y \in (I \cap J)^r$.

2.23 PROPOSICION

Sea A un anillo e $I \subset A$ un ideal y sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un generador de I. Si $m \in \mathbb{N}$ entonces I^m es generado por los productos

$$x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdot x_3^{r_3} \cdot \ldots \cdot x_n^{r_n} \text{ tales que } \sum_{1}^{n} r_i = m$$

DEMOSTRACION

$I^m = [S]$, $S = \{\prod_{1}^{m} y_i \;/\; y_i \in J\}$ (por definición de I^m).

Sea $T = \{\prod_1^n x_i^{r_i} \ / \ \sum_1^n r_i = m\}$. Sea $x \in T$, $x = \prod_1^n x_i^{r_i}$, con $\sum_1^n r_i = m$; como $x_i^{r_i} = x_i \cdot x_i \cdots x_i$ (r_i veces) y $\Sigma r_i = m$ entonces $x = \prod_1^m y_i$ en donde $y_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; es decir que $T \subset S$. (1)

Sea $x \in S$; $x = \prod_1^m y_i$, $y_i \in I$; como $I = [\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}]$ cada y_i es de la forma $y_i = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_j$, de donde $x = \prod_{i=1}^m (\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} x_j)$; al desarrollar esta expresion, x resulta ser de la forma $x = \sum \alpha_i z_i$, en donde cada z_i es un elemento de T; es decir - que $x \in [T]$; asi $S \subset [T]$ (2)

De (1), $[T] \subset [S]$; de (2), $[S] \subset [T]$.

Luego, $[S] = [T]$, o sea $I^m = [T]$.

2.24 PROPOSICION

Sean A un anillo, $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ideales de A. Si $I \subset A$ es - un ideal primo tal que $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \ldots \cap I_n \subset I$ entonces exis te $j \leq n$ tal que $I_j \subset I$.

DEMOSTRACION

Supongamos que para todo $i \leq n$, $I_i \not\subset I$; para cada i existe - $x_i \in I_i$ tal que $x_i \notin I$; como I es un ideal primo, $x_1, x_2, \ldots x_n \notin I$; pero $x_1 x_2 \ldots x_n \in I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \ldots \cap I_n$, es decir que $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \ldots \cap I_n \not\subset I$.

2.25 DEFINICION

Sea A un anillo. Se llama "cadena de ideales primos de A" a toda sucesión finita y estrictamente creciente

$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n$$

de ideales primos de A. El número n es llamado "Longitud de la cadena".

El supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primo de A es llamado "dimensión de A" y se denota dim A.

Por definición, dim A ≥ 0 ó dim A $= +\infty$.

2.26 EJEMPLOS

1. Si K es un cuerpo entonces dim A = 0

   Un cuerpo K tiene sólo dos ideales: $\{0\}$ y K; luego, el único ideal primo de K es $\{0\}$.

2. El anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros tiene dimensión igual a 1.

   Sean $I \neq \{0\}$ y $J \neq \{0\}$ dos ideales primos de $\mathbb{Z}$ tales que $I \subset J$. Existen $m > 0$, $n > 0$ tales que $I = [m]$, $J = [n]$, m y n números primos (prop. 2.20)

   $$I = [m] \Rightarrow m \in I \Rightarrow m \in J \Rightarrow m \in [n]$$
   $$\Rightarrow m = an,\ a \in \mathbb{Z};$$

   como m y n son dos números primos, a = 1 ó a = -1 es decir m = n ó m = -n; luego $[m] = [n]$, o sea I = J.

   Por tanto, una cadena de ideales primos de $\mathbb{Z}$ es de la forma: $I_0 \subset I_1$, con $I_0 = \{0\}$ ó $I_1 = [m]$, m un número primo.

2.27 DEFINICION

ANILLO COCIENTE.

Sea A un anillo, $I \subset A$ un ideal. Se llama "anillo cociente" al conjunto $\frac{A}{I} = \{x + I \ / \ x \in A\}$ con las operaciones

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$$

$$(x + I)(y + I) = xy + I$$

En este anillo, el cero es el ideal I.

2.28 PROPOSICION

Sean A un anillo e $I \subset A$ un ideal

a) Si I es maximal, entonces I es primo.

b) I es primo si y sólo si $\frac{A}{I}$ es un dominio entero.

c) I es maximal si y sólo si $\frac{A}{I}$ es un campo.

DEMOSTRACION

1) Supongamos que I es un ideal maximal y probemos que es primo. Para ello, sean $x, y \in A$ tales que $xy \in I$ y $x \notin I$; demostremos que $y \in I$;

$$x \notin I \Rightarrow I \underset{\neq}{\subset} I + A_x \Rightarrow I + A_x = A \text{ (I es maximal)}$$

$$\Rightarrow 1 = z + ax (z \in I, \ a \in A)$$

$$\Rightarrow y = zy + axy$$

$$(z \in I \ \text{ y } \ xy \in I) \Rightarrow zy \in I \ \text{ y } \ axy \in I$$

$$\Rightarrow zy + axy \in I$$

$$\Rightarrow y \in I.$$

2) Supongamos que I es un ideal primo y probemos que $\frac{A}{I}$ es un dominio entero. Para ello, sean $x,y \in A$ tales que $(x + I)(y + I) = I$ y demostremos que $x + I = I$ ó $y+I = I$ (I es el cero en el anillo cociente).

$$(x + I)(y + I) = I \Rightarrow xy + I = I \Rightarrow xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ó } y \in I$$
$$\Rightarrow x + I = I \text{ ó } y + I = I$$

3) Supongamos que $\frac{A}{I}$ es un dominio entero y probemos que I es primo. Para ello, sean $x,y \in A$ tales que $xy \in I$ y demostremos que $x \in I$ ó $y \in I$.

$$xy \in I \Rightarrow xy + I = I \Rightarrow (x + I)(y + I) = I$$
$$\Rightarrow x + I = I \text{ ó } y + I = I$$
$$\Rightarrow x \in I \text{ ó } y \in I.$$

4) Supongamos que I es un ideal maximal y probemos que $\frac{A}{I}$ es un campo. Para ello, sea $x + I \neq I$; se demostrará que $x + I$ es inversible.

$$x + I \neq I \Rightarrow x \notin I \Rightarrow I \subsetneq I + Ax \Rightarrow I + Ax = A$$
$$\Rightarrow z + yx = 1 \quad (z \in I,\ y \in A)$$
$$\Rightarrow yx - 1 \in I$$
$$\Rightarrow yx + I = 1 + I$$
$$\Rightarrow (y + I)(x + I) = 1 + 1$$

Luego, $x + I$ es inversible.

5) Supongamos que $\frac{A}{I}$ es un campo y probemos que I es un ideal maximal

$I \neq A$, ya que si $I = A$, entonces $x + I = I$ para todo $x \in A$.

Sea $x \in M$, $x \notin I$, M un ideal tal que $I \underset{\neq}{\subset} M$;

$x \notin I \Rightarrow x + I \neq I \Rightarrow x + I$ es inversible.

Sea $y \in A$ tal que $(x + I)(y + I) = 1 + I$;

$xy + I = 1 + I \Rightarrow xy - 1 \in I \Rightarrow xy - 1 = z$, $z \in I \Rightarrow 1 = xy - z$

$$\begin{aligned}(x \in M \text{ y } z \in I) &\Rightarrow xy \in M \text{ y } -z \in M\\ &\Rightarrow xy - z \in M\\ &\Rightarrow 1 \in M\\ &\Rightarrow A = M.\end{aligned}$$

2.29 DEFINICION

Sea un anillo A. Definimos

1) Nilradical de A, como la intersección de todos los ideales primos de A.

2) Radical de Jacobson de A, como la intersección de todos los ideales maximales de A.

Tanto el nilradical como el radical de Jacobson son ideales por ser intersecciones de ideales.

Además, se demuestra que el nilradical de A lo forman todos los elementos nilpotentes de A.

2.30 PROPOSICION

En un anillo A el nilradical es el radical de $\{0\}$.

DEMOSTRACION

Sea N el nilradical de A, entonces

$N = \{x \in A \ / \ x^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}\}$

$= \{x \in A \ / \ x^n \in \{0\}$ para algún $n \in \mathbb{N}\}$

$= r(\{0\})$.

2.31 DEFINICION

Sea A un anillo e $I \subset A$ un ideal de A. Se llama "descomposición primaria de I", a una expresión de I como intersección finita de ideales primarios, es decir

$I = \bigcap_{i=1}^{n} J$, J_i un ideal primario para todo $i \leq n$.

Se dice que un ideal I es descomponible si tiene una descomposición primaria.

2.32 PROPOSICION

Sea I un ideal descomponible en un anillo A. Entonces

1) Todo ideal primo J tal que $I \subset J$ contiene un ideal primo minimal de I;

2) El conjunto de ideales primos minimales que contienen a I lo forman los elementos minimales del conjunto de ideales primos que contienen a I.

DEMOSTRACION

Sea J un ideal primo tal que $I \subset J$ y sea $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ una descomposición primaria minimal de I; para cada i, sea

$P_i = r(Q_i)$; P_i es un ideal primo (prop. 2.15), $J = r(J)$ porque J es primo.

$$I \subset J \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} Q_i \subset J \Rightarrow r(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i) \subset r(J) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} r(Q_i) \subset J$$
$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} P_i \subset J.$$

Como P es primo, existe un índice $j \leq n$ tal que $P_j \subset J$; si P_j es minimal de I, la afirmación está probada; si P_j no es minimal, existe un índice $k \leq n$ tal que $P_k \subset P_j$;
$P_j \subset J \Rightarrow P_k \subset J$; como los ideales P_i son en número finito, existirá $i \leq n$ tal que P_i es minimal y $P_i \subset J$.

2.33 PROPOSICION

Si A es un anillo en el cual el ideal $\{0\}$ tiene una descomposición primaria entonces

1) El número de ideales primos minimales de A es finito
2) El nilradical de A es igual a la intersección de los ideales primos minimales de A.

DEMOSTRACION

1) Sea $\{0\} = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ una descomposición primaria minimal del ideal $\{0\}$ y para cada i, sea $P_i = r(Q_i)$; P_i es un ideal primo (Prop. 2.15), los ideales primos minimales que contienen al ideal $\{0\}$ (es decir los ideales primos minimales de A) son los elementos minimales del conjunto $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ (Prop. 2.32); luego el conjunto de ideales

primos minimales de A es finito.

2) Si N = nilradical de A, N es igual a la intersección de todos los ideales primos de A; según (Prop. 2.32), todo ideal primo de A contiene un ideal primo minimal de A.

Sea H = intersección de todos los ideales primos minimales de A; $N \subset H$ pues los elementos de N pertenecen a todo ideal primo de A; probemos que $H \subset N$. Sea $x \in H$; x pertenece a todo ideal primo minimal; como todo ideal primo de A contiene un ideal primo minimal entonces x pertenece a todo ideal primo de A; luego $H \subset N$. Por tanto, el nilradical de A es igual a la intersección de los ideales primos minimales de A.

2.34 ANILLO DE FRACCIONES

Sea A un anillo. Un subconjunto multiplicativamente cerrado de A es un subconjunto S de A tal que

i) $1 \in S$

ii) Si $x,y \in S$ entonces $xy \in S$

En $A \times S$ se define la relación siguiente:

"$(a,s) \equiv (b,t) \iff (at - bs)u = 0$ para algún $u \in S$".

Esta relación es de equivalencia:

1) Reflexiva

$(a,s) \equiv (a,s)$ ya que $(as - as)\,1 = 0$

2) Simétrica

$$(a,s) \equiv (b,t) \Rightarrow (at - bs)u = 0,\ u \in S$$
$$\Rightarrow (bs - at)u = 0,\ u \in S$$
$$\Rightarrow (b,t) \equiv (a,s)$$

3) Transitiva

$$[(a,s) \equiv (b,t) \text{ y } (b,t) \equiv (c,u)] \Rightarrow (at - bs)v = 0$$
$$\text{y } (bu - ct)w = 0,\ v,w \in S$$
$$\Rightarrow atv - bsv = 0 \text{ y } buw - ctw = 0,\ v,w \in S$$
$$\Rightarrow atvuw - bsvuw = 0 \text{ y } buwsv - ctwsv = 0 \quad u,w \in S$$
$$\Rightarrow atvuw - ctwsv = 0 \quad v,w \in S$$
$$\Rightarrow (aw - cs)tvw = 0,\ tvw \in S \quad (\text{por que } t,v,w \in S)$$
$$\Rightarrow (a,s) \equiv (c,u)$$

Si indicamos por $\frac{a}{s}$ la clase de equivalencia de un elemento $(a,s) \in A \times S$ y si $S^{-1}A$ denota el conjunto de clases de equivalencia, se define en $S^{-1}A$ una estructura de anillo con las operaciones siguientes

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{(at + bs)}{st}$$

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

El anillo $S^{-1}A$ es llamado "anillo de fracciones de A con respecto a S".

2.35 PROPOSICION

Sea A un anillo, $S \subset A$, S multiplicativamente cerrado y sea I un ideal de $S^{-1}A$.

Entonces $J = \{x \in A \,/\, \frac{x}{y} \in I$ para algún $y \in S\}$ es un ideal de A.

PRUEBA

i) Sean x, y en J; existen $z \in S$, $m \in S$ tales que $\frac{x}{z} \in I$, $\frac{y}{m} \in I$; como I es un ideal $\frac{1}{m} \cdot \frac{x}{z} \in I$ y $\frac{1}{z} \cdot \frac{y}{m} \in I$; luego $\frac{x}{mz} + \frac{y}{zm} \in I$, es decir $\frac{x+y}{mz} \in I$; por tanto $x + y \in J$.

ii) Sea $x \in J$; existe $z \in S$ tal que $\frac{x}{z} \in I$; $-\frac{x}{z} \in I$, por ser I un ideal, es decir que $\frac{-x}{z} \in J$, luego $-x \in J$.

iii) Sean $x \in J$. $a \in A$; existe $z \in S$ tal que $\frac{x}{z} \in I$; por ser I un ideal, $\frac{a}{1} \cdot \frac{x}{z} \in I$, es decir $\frac{ax}{z} \in I$; luego, $ax \in J$.

C A P I T U L O I I I

M O D U L O S S O B R E U N A N I L L O

III MÓDULOS SOBRE UN ANILLO

3.1 DEFINICION

Sea A un anillo y sea $(M, +)$ un grupo commutativo. Se dice que M es un A-módulo si para todo $a \in S$, $x \in M$ existe $ax \in M$ tal que

$$a(x + y) = ax + ay, \quad a \in A, \; x,y \in M$$
$$(a + b)x = ax + bx, \quad a,b \in A, \; x \in M$$
$$(ab)x = a(bx), \quad a,b \in A, \; x \in M$$
$$1x = x \quad , \quad x \in M$$

EJEMPLO DE MODULOS

1) Todo anillo A es un A-módulo

2) Todo K-espacio vectorial es un K-módulo.

3.2 MODULO PRODUCTO

Sean L y M dos A-módulos; el producto cartesiano $L \times M$ toma estructura de A-módulo con las operaciones

$$(x,y) + (z,u) = (x + z, \; y + u)$$
$$a(x,y) = (ax, \; ay)$$

En general, se define una estructura de A-módulo en $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, en donde cada M_i es un A-módulo;

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n) + (y_1,y_2,\ldots,y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$a(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (ax_1, ax_2, \ldots, \ldots, ax_n)$$

El módulo $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ también se denota M^n, si cada

$M_i = M$ para todo $i \leq n$.

3.3 DEFINICION

Sea M un A-módulo y sea $L \subset M$. Se dice que L es un submódulo de M si

1) L es un subgrupo de M

2) Si $a \in A$ y $x \in L$ entonces $ax \in L$

EJEMPLOS

1. En un anillo A, los ideales de A son los submódulos del módulo A.

2. $\{0\}$ y M son submódulos de M.

   El submódulo $\{0\}$ es denotado por 0.

3.4 DEFINICION

Un A-módulo M es llamado "simple" si tiene únicamente dos submódulos: $\{0\}$ y M.

3.5 MODULO COCIENTE

Sean M un A-módulo y $L \subset M$ un submódulo.

Se llama "módulo cociente" al conjunto

$\frac{M}{L} = \{x + L \ / \ x \in M\}$ con las operaciones:

$$(x + L) + (y + L) = (x + y) + L$$

$$a(x + L) = ax + L$$

3.6 PROPOSICION

Sea M un A-módulo y N un submódulo de M. Si H es un submódulo de $\frac{M}{N}$ entonces el conjunto

$$L = \{x \in M \ / \ x + N \in H\}$$

es un submódulo de M tal que $N \subset L$.

DEMOSTRACION

1. Sea H un submódulo de $\frac{M}{N}$. Probemos que L es submódulo de M tal que $N \subset L$.

   a) Sean $x, y \in L$.

   $$\begin{aligned} x, y \in L &\Rightarrow x + N \in H \quad y \quad y + N \in H \\ &\Rightarrow (x + N) - (y + N) \in H \\ &\Rightarrow (x - y) + N \in H \\ &\Rightarrow x - y \in L. \end{aligned}$$

   b) Sean $x \in L$ y $a \in A$.

   $$\begin{aligned} x \in L \Rightarrow x + N \in H &\Rightarrow a(x + N) \in H \\ &\Rightarrow ax + N \in H \\ &\Rightarrow ax \in L. \end{aligned}$$

   De a) y b), L es submódulo de M.

   c) Sea $x \in N$.

   $$x \in N \Rightarrow x + N = N \Rightarrow x + N \in H \Rightarrow x \in L$$

   Luego $N \subset L$.

Por tanto L es un submódulo de M tal que $N \subset L$.

3.7 PROPOSICION

Sean E y F dos submódulos de un módulo M tales que $E \subset F$ y $E \neq F$, las dos condiciones que siguen son equivalentes:

1) Si H es un submódulo tal que $E \subset H \subset F$ entonces $E = H$ ó $H = F$.

2) El módulo $\frac{F}{E}$ tiene solamente dos submódulos: $\frac{F}{E}$ y $\{E\}$.

DEMOSTRACION

1) $\Rightarrow$ 2)

Sea T un submódulo de $\frac{F}{E}$ y sea $L = \{x \in F \,/\, x + E \in T\}$; L es un submódulo de F y $E \subset L$ (Prop. 3.6); luego $L = E$ ó $L = F$.

Si $L = E$:

$$x + E \in T \Rightarrow x \in L \Rightarrow x \in E \Rightarrow x + E = E;$$

Luego $T = \{E\}$

Si $L = F$: $x \in F \Rightarrow x \in L \Rightarrow x + E \in T$; luego, $\frac{F}{E} = T$

Por tanto, los únicos submódulos de $\frac{F}{E}$ son $\{E\}$ y $\frac{F}{E}$.

2) $\Rightarrow$ 1)

Sea H un submódulo tal que $E \subset H \subset F$; $\frac{H}{E}$ es un submódulo de $\frac{F}{E}$; luego $\frac{H}{E} = \{E\}$ ó $\frac{H}{E} = \frac{F}{E}$.

Si $\frac{H}{E} = \{E\}$:

$z \in H \Rightarrow x + E = E \Rightarrow x \in E$; entonces $H = E$.

Si $\frac{H}{E} = \frac{F}{E}$:

$$x \in F \Rightarrow x + E \in \frac{H}{E} \Rightarrow x + E = y + E,\ y \in H$$
$$\Rightarrow x - y \in E,\ y \in H$$
$$\Rightarrow x - y \in H,\ y \in H$$
$$\Rightarrow x \in H.$$

Entonces $H = F$

Por lo tanto $E = H$ ó $E = F$

3.8 SUBMODULO GENERADO

Sean M un A-módulo y $S \subset M$. Denotamos por $[S]$ a la intersección de todos los submódulos de M que contienen a S, es decir

$[S] = \bigcap_{L \in \Omega} L$, Ω = Conjunto de submódulos L tales que $S \subset L$.

PROPIEDADES

1. $[S]$ es un submódulo, por ser intersección de submódulos
2. $S \subset [S]$
3. Si H es un submódulo tal que $S \subset H$ entonces $[S] \subset H$.
4. Si $S \neq \phi$ entonces $[S]$ está formado por todas las combinaciones lineales de elementos de S, es decir

   $[S] = \{x \in M \ / \ x = \sum_{1}^{n} \alpha_i x_i,\ \alpha_i \in A,\ x_i \in S,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$

Se dice que "S es el generador de $[S]$".

Si S es un conjunto finito, se dice que "$[S]$ es un submódulo de generación finita" ó "submódulo finitamente generado".

3.9 PROPOSICION

Sea M un A-módulo y sea $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ elementos de M. Si $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $L = Ax_1 + Ax_2 \dots + Ax_n$

entonces $[S] = Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_n = L$

Bastará demostrar las siguientes propiedades

a) L es un submódulo

b) $S \subset L$

c) Si $T \subset M$ es un submódulo y $S \subset T$

entonces $L \subset T$

DEMOSTRACION

a) i) Sean $m, n \in L$

$$m = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

$$n = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

$$m + n = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)x_n \in L$$

ii) Sea $m \in L$ y $\alpha \in A$.

Mostremos que $\alpha m \in L$

$$m = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

$$\alpha m = \alpha(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)$$

$$= (\alpha\alpha_1 x_1 + \alpha\alpha_2 x_2 + \dots + \alpha\alpha_n x_n) \in L$$

b) $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Sea $x_i \in S$

$$x_i \in S \Rightarrow x_i = 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_{i-1} + 1x_i + \ldots + 0x_n$$
$$\Rightarrow x_i \in L$$

c) Sea $m \in L \Rightarrow m = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ y

Por hipótesis $S \subset T$;

Luego $x_1, x_2, \ldots x_n \in T$ y como T es un submódulo

$m = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_n x_n \in T$.

Por tanto $L \subset T$

3.10 OPERACIONES CON SUBMODULOS

Sea E y F dos submódulos de un módulo M.

1) $E + F = \{x \in M \,/\, x = y + z$, para algún $y \in E$, $z \in F\}$ es un submódulo de M tal que $E + F = [E \cup F]$. En general, $E \cup F$ no es submódulo de M.

2) La intersección $E \cap F$ es un submódulo de M.

3.11 MORFISMOS DE MODULOS

Sean A un anillo y L y M dos A-módulos.

Una función $f: L \longrightarrow M$ es un morfismo si

i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in L$

ii) $f(ax) = af(x)$, $a \in A$, $x \in L$

3.12 NUCLEO DE UN MORFISMO

Si $f: E \longrightarrow F$ es un morfismo de módulos, se llama "núcleo de f" al conjunto

$$\ker f = \{x \in E \ / \ f(x) = 0\},$$

Se prueba que es un submódulo de E.

3.13 PROPOSICION

Si $f: E \longrightarrow F$ es un morfismo de A-módulos entonces $f(0) = 0$ y $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in E$.

DEMOSTRACION

a) $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) + 0 = f(0) + f(0) \Rightarrow 0 = f(0)$

b) Sea $x \in E$

$f(-x) + f(x) = f(-x + x) = f(0) = 0;$

Luego $f(-x) = -f(x)$.

3.14 PROPOSICION

Si $f: E \longrightarrow F$ es un morfismo de módulos entonces f es inyectivo si y sólo si $\ker f = \{0\}$.

DEMOSTRACION

1. Supongamos que f es inyectivo y probemos que $\ker f = \{0\}$.

Sea $x \in \ker f$, es decir $f(x) = 0$. Por Prop. 3.13, $f(0) = 0$;

$f(x) = f(0) \Rightarrow x = 0$, por ser f inyectiva. Luego,

$\ker f = \{0\}$.

2. Supongamos que $\ker f = \{0\}$ y probemos que f es inyectivo.

Sea $x, y \in E$ tales que $f(x) = f(y)$;

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow f(x) + f(-y) = 0$$

$$\Rightarrow f(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow x - y \in \ker f$$

$$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

Luego, f es inyectivo.

3.15 PROPOSICION

Sea $f: E \longrightarrow F$ un morfismo de A-módulos.

1) Si H es un submódulo de E entonces $f(H)$ es submódulo de F.

2) Si L es un submódulo de F entonces $f^{-1}(L)$ es submódulo de E.

DEMOSTRACION

1) Sea H un submódulo de E; probemos que $f(H)$ es submódulo de F.

a) Sean $x, y \in f(H)$.

$$x, y \in f(H) \Rightarrow x = f(m) \quad y \quad y = f(n), \quad m, n \in H$$

$$\Rightarrow x - y = f(m) - f(n), \quad m, n \in H$$

$$\Rightarrow x - y = f(m - n), \quad m - n \in H$$

$$\Rightarrow x - y \in f(H).$$

b) Sean $x \in f(H)$, $a \in A$.

$x \in f(H) \Rightarrow x = f(m)$, $m \in H$

$\Rightarrow ax = af(m)$, $m \in H$, $a \in A$

$\Rightarrow ax = f(am)$, $am \in H$

$\Rightarrow ax \in f(H)$,

De a) y b), $f(H)$ es un submódulo de F.

2) Sea L un submódulo de F; probemos que $f^{-1}(L)$ es submódulo de E.

a) Sean $x, y \in f^{-1}(L)$.

$x, y \in f^{-1}(L) \Rightarrow f(x) \in L$ y $f(y) \in L$

$\Rightarrow f(x) - f(y) \in L$

$\Rightarrow f(x - y) \in L$

$\Rightarrow x - y \in f^{-1}(L)$.

b) Sean $x \in f^{-1}(L)$, $a \in A$.

$x \in f^{-1}(L) \Rightarrow f(x) \in L$

$\Rightarrow af(x) \in L$

$\Rightarrow f(ax) \in L$

$\Rightarrow ax \in f^{-1}(L)$

De a) y b), $f^{-1}(L)$ es un submódulo de E.

3.16 SUCESIONES EXACTAS

Una sucesión de A-módulos y de morfismos

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

Se dice que "es exacta en M_i" si $Im(f_i) = \ker f(f_{i+1})$

UNA SUCESION FINITA

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} H \longrightarrow 0$$

exacta en E, en F y en H es llamada "Sucesión exacta corta"

3.17 PROPOSICION

Una sucesión

$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} H \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si f es inyectivo, g es sobreyectivo y $\ker g = Im(f)$

DEMOSTRACION

Hay un morfismo único $m: 0 \longrightarrow E$ definido así: $m(0) = 0$.
Hay un morfismo único $n: H \longrightarrow 0$ definido así: $n(x) = 0$ para todo x. Por definición, $Im(m) = \{0\}$ y $\ker(n) = H$.

Supongamos que $0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} H \longrightarrow 0$ es exacta; por definición de sucesión exacta:

$\ker f = Im(m)$, $\ker g = Im(f)$ y $\ker(n) = Im(g)$.

Como $Im(m) = \{0\}$ y $\ker(n) = H$ entonces $\ker f = \{0\}$ e $Im(g) = H$, es decir que f es inyectivo y g es sobreyectivo.

Recíprocamente, supongamos que f es inyectiva, g es sobre-- yectiva y $\ker(g) = Im(f)$. Probemos que $Im(m) = \ker(f)$ y $\ker(n) = Im(g)$.

f inyectivo $\Rightarrow \ker f = \{0\} \Rightarrow \ker(f) = \mathrm{Im}(m)$.

g sobreyectivo $\Rightarrow \mathrm{Im}(g) = H \Rightarrow \mathrm{Im}(g) = \ker(n)$

3.18 PROPOSICION

Sea M un A-módulo y sea N un submódulo de M. Entonces hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow \frac{M}{N} \longrightarrow 0.$$

DEMOSTRACION

1) Para cada $x \in N$, sea $f(x) = x$. Probemos que la función $f: N \longrightarrow M$, $x \rightsquigarrow x$ es un morfismo inyectivo.

- $f(x + y) = x + y = f(x) + f(y)$
- $f(\alpha x) = x = \alpha f(x)$
- $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

2) Para cada $x \in M$, definimos $g(x) = x + N$. Probemos que $g: M \longrightarrow \frac{M}{N}$, $x \rightsquigarrow x + N$ es un morfismo sobreyectivo.

$g(x + y) = (x + y) + N = (x + N) + (y + N) = g(x) + g(y)$.

$g(\alpha x) = \alpha x + N = \alpha(x + N) = \alpha g(x)$.

$x + N = g(x)$.

3) $x \in f(N) \Rightarrow x \in N \Rightarrow x + N = N \Rightarrow g(x) = N \Rightarrow x \in \ker g$.

Luego $f(N) \subset \ker g$.

4) $x \in \ker g \Rightarrow g(x) = N \Rightarrow x + N = N \Rightarrow x \in N \Rightarrow x \in f(N)$

Luego $\ker g \subset f(N)$.

Por lo tanto la sucesión

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} \frac{M}{N} \longrightarrow 0$$

es exacta, ya que f es inyectivo, g es sobreyectivo y - $f(N) = \ker g$. (Prop. 3.17)

3.19 PROPOSICION

Si E y F son dos A-módulos hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow E \times F \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

DEMOSTRACION

1) Para cada $x \in E$, sea $f(x) = (x,0)$. Probemos que la función $f: E \longrightarrow E \times F: x \leadsto (x,0)$ es un morfismo inyectivo.

$f(x + y) = (x + y, 0) = (x,0) + (y,0) = f(x) + f(y)$

$f(\alpha x) = (\alpha x, 0) = \alpha(x,0) = \alpha f(x)$.

$f(x) = f(y) \Rightarrow (x,0) = (y,0) \Rightarrow x = y$

2) Para cada $(x,y) \in E \times F$, definimos $g(x,y) = y$.

Probemos que es un morfismo sobreyectivo.

- $g((x,y) + (z,u)) = g((x + z, y + u)) = y + u = g(x,y) + g(z + u)$
- $g(\alpha(x,y)) = g(\alpha x, \alpha y) = \alpha y = \alpha g(x,y)$
- $y \in F \Rightarrow y = g(0,y)$

3) $(x,y) \in f(E) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow g(x,y) = 0$

$\Rightarrow (x,y) \in \ker g$

Luego, $f(E) \subset \ker g$

4) $(x,y) \in \ker g \Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow (x,y) \in f(E)$

Luego, $\ker g \subset f(E)$

Por tanto

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} E \times F \xrightarrow{g} F \longrightarrow 0$$

es exacta, ya que f es inyectiva, g es sobreyectiva y $f(E) = \ker g$. (Prop. 3.17)

3.20 DEFINICION

Una sucesión $M_1, M_2, M_3, \ldots$ de A-módulos

Se dice que es

1) Creciente

Si $M_n \subset M_{n+1}$ para todo n.

2) Decreciente

Si $M_{n+1} \subset M_n$ para todo n.

3) Estacionaria

Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $M_n = M_m$ para todo $n \geq m$.

3.21 PROPOSICION

Sea M_1, M_2, M_3, ..., M_n, ... una sucesión creciente ó decreciente de submódulos de un A-módulo M. Entonces la unión $\bigcup_{i=1}^{+\infty} M_i$ es un submódulo de M.

DEMOSTRACION

Sea $H = \bigcup_{i=1}^{+\infty} M_i$ y sean $x, y \in H$; existen índices j, k tales que $x \in M_j$, $y \in M_k$. Si $j \leq k$: $x + y \in M_k$ si la sucesión es creciente y $x + y \in M_j$ si la sucesión es decreciente.

Si $k \leq j$: $x + y \in M_j$ si la sucesión es creciente y $x + y$ M_k si la sucesión es decreciente. Entonces, $x + y \in H$. Si $\alpha \in A$ entonces $\alpha x \in M_j$, de donde $\alpha x \in H$.

Por tanto H es un submódulo de M.

3.22 PROPOSICION

Sea $u: E \longrightarrow F$ un morfismo de A-módulos. Entonces:

1) $\ker(u)$, $\ker(u^2)$, ..., $\ker(u^n)$, ...

   es una sucesión creciente de submódulos de E

2) $u(E)$, $u^2(E)$, ..., $u^n(E)$, ...

   Es una sucesión decreciente de submódulos de F.

DEMOSTRACION

Por definición, $u^2(x) = u(u(x))$, $u^{n+1}(x) = u(u^n(x))$.

1) Probemos que $\ker(u^n) \subset \ker(u^{n+1})$. Si $x \in \mathrm{Ker}(u^n)$

entonces $u^n(x) = 0$ y $u^{n+1}(x) = u(u^n(x)) = u(0) = 0$;
luego $x \in \ker u^{n+1}$; por tanto $\ker(u^n) \subset \ker u^{n+1}$

2) Probemos ahora que $u^{n+1}(E) \subset u^n(E)$. Si $x \in u^{n+1}(E)$, $x = u^{n+1}(y)$, $y \in E$, de donde $x = u^n(u(y))$; luego $x \in u^n(E)$; por tanto $u^{n+1}(E) \subset u^n(E)$

3.23 DEFINICION

Sea M un A-módulo. Se llama "cadena de submódulos de M" a toda sucesión finita $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ de submódulos de M tales que

$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n = M$, $M_i \neq M_{i+1}$ para todo $i < n$.

El número n es llamado "longitud de la cadena"

3.24 DEFINICION

Se llama "Serie de Composición de un Módulo M" a toda "cadena maximal", es decir a toda cadena $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ de M tal que $\frac{M_{i+1}}{M_i}$ es un A-módulo simple, para todo $i < n$.

Según Prop. 3.7, en una serie de composición no pueden intercalarse submódulos entre M_i y M_{i+1}.

3.25 PROPOSICION

Sea M un A-módulo. Si M tiene una serie de composición de longitud n, entonces.

i) Toda serie de composición de M tiene longitud n.

ii) Toda cadena de submódulos de M puede ser extendida a una serie de composición.

DEMOSTRACION

Denotemos por $\ell(M)$ la menor longitud de una serie de composición del módulo M.

1) "Si N es un submódulo de M y $N \neq M$, entonces $\ell(N) < \ell(M)$"

Sea N un submódulo de M y sea $M_0, M_1, \ldots, M_n$ una serie de composición de M; consideremos los submódulos $N_i = N \cap M_i$ de N, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Probemos que para cada i, el módulo $\frac{N_{i+1}}{N_i}$ es simple; sea $i < n$ y H un submódulo de $\frac{N_{i+1}}{N_i}$; formemos $H_i = \{x \in N_{i+1} / x + N_i \in H\}$; H_i es un submódulo de N_{i+1} y $H = \frac{H_i}{N_i}$. Como N_{i+1} es submódulo de M_{i+1}, H_i es un submódulo de M_{i+1} y $\frac{H_i}{M_i}$ es un submódulo de $\frac{M_{i+1}}{M_i}$; por ser $\frac{M_{i+1}}{M_i}$ un módulo simple se tendrá que $\frac{H_i}{M_i} = \frac{M_{i+1}}{M_i}$ ó $H_i = M_i$

a) Supongamos $\frac{H_i}{M_i} = \frac{M_{i+1}}{M_i}$, y sea $x \in N_{i+1}$; $x \in N_{i+1} \Rightarrow$

$$x \in M_{i+1} \Rightarrow x + M_i \in \frac{M_{i+1}}{M_i} \Rightarrow x + M_i \in \frac{H_i}{M_i} \Rightarrow x + M_i = y + M_i,\ y \in H_i$$

$$\Rightarrow x = y + z,\ z \in M_i$$

$$\Rightarrow x - y \in M_i$$

Pero: $x \in N_{i+1}$ y $y \in H_i \Rightarrow x \in N \wedge y \in N \Rightarrow x - y \in N$;

Luego, $x - y \in N \cap M_i$, es decir $x - y \in N_i$, de donde $x + N_i = y + N_i$, o sea $x + N_i \in H$; por tanto

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} \subset H \quad y \quad H = \frac{N_{i+1}}{N_i}$$

b) Supongamos que $H_i = M_i$

$$H_i \subset N \Rightarrow H_i = N \cap H_i \Rightarrow H_i = N \cap M_i \Rightarrow H_i = N_i$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{N_i}{N_i} \quad \Rightarrow \quad H = \{N_i\}$$

Luego, por a) y b), $\frac{N_{i+1}}{N_i}$ es un módulo simple. Por - tanto, los submódulos N_i forman una serie de composición de N cuya longitud r es tal que $r \leq n$ (se eliminan los submódulos N_{i+1} tal que $N_i = N_{i+1}$); como $\ell(N) \leq r$ se tendrá $\ell(N) \leq \ell(M)$ ($\ell(N)$ es la menor longitud que puede tener una serie de composición de N).

Si $\ell(N) = \ell(M)$, $N_i \neq N_{i+1}$ para todo $i < n$ de donde - $N_i = M_i$, para todo $i < n$, ya que $N_i \subset M_i \Rightarrow N_i = M_i$, - por ser $(M_i)i \geq 1$ una serie de composición y $N_i \neq \{0\}$ para todo $i \geq 1$. En particular, $N_n = M_n$, es decir - $N = M$.

2) "Si una cadena de submódulos de M tiene longitud k, entonces $k \leq \ell(M)$".

Sea $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_k = M$ una cadena de submódulos de

M de longitud k. Como L_i es submódulo de L_{i+1} y $L_i \neq L_{i+1}$ para todo $i < n$, entonces

$$0 = \ell(L_0) < \ell(L_1) < \ell(L_2) \quad \ldots < \ell(L_k) = \ell(M).$$

Ademas $1 \leq \ell(L_1)$, $2 \leq \ell(L_2)$, ..., $k \leq \ell(L_k)$, es decir $k \leq \ell(M)$.

3) "Toda serie de composición de M tiene longitud $\ell(M)$"

Sea $(L_i)i \leq k$ una serie de composición de M de longitud k; por (1), $k \leq \ell(M)$; luego, $k = \ell(M)$, por definición de $\ell(M)$.

4) "Toda cadena de submódulos de M puede extenderse a una serie de composición.

Sea $H_0, H_1, H_2, \ldots, H_m$ una cadena de submódulos de M de longitud m. Si $m = \ell(M)$, esta cadena es una serie de composición (por 2). Si $m < \ell(M)$, esta cadena no es una serie de composición, es decir no es una cadena maximal; luego, pueden intercalarse nuevos términos hasta tener una serie de composición.

3.26 DEFINICION

Según la Pro. 3.25, todas las series de composición de un módulo M tienen la misma longitud $\ell(M)$, la cual es llamada "longitud de M".

3.27 PROPOSICION

Si $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de A-módulos entonces $\ell(M) = \ell(L) + \ell(N)$

DEMOSTRACION

Sea $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n$ una serie de composición de L; $L_0 = 0$, $L_n = L$. Sea $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_m$ una serie de composición de N; $N_0 = 0$, $N_m = N$. Como la sucesión es exacta, $f(L) = \ker g$, ó sea $f(L_n) = g^{-1}(N_0)$; probemos que la sucesión finita

$f(L_0)$, $f(L_1)$, $\ldots$, $f(L_n)$, $g^{-1}(N_1)$, $g^{-1}(N_2)$, $\ldots$, $g^{-1}(N_m)$ de submódulos de M es una serie de composición de M; $f(L_0) = 0$, ya que $L_0 = 0$ y $f(0) = 0$, $g^{-1}(N_m) = M$ ya que $N_m = N$;

$L_i \subset L_{i+1} \Rightarrow f(L_i) \subset f(L_{i+1})$; $N_i \subset N_{i+1} \Rightarrow g^{-1}(N_i) \subset g^{-1}(N_{i+1})$;
como f es inyectivo (Prop. 3.17), $f(L_i) \neq f(L_{i+1})$ porque $L_i \neq L_{i+1}$; Probemos que $g^{-1}(N_i) \neq g^{-1}(N_{i+1})$; como $N_i \neq N_{i+1}$, existe $x \in N_{i+1}$ tal que $x \notin N_i$; como g es sobreyectiva (Prop. 3.17), existe $y \in M$ tal que $g(y) = x$;
$x \in N_{i+1} \Rightarrow y \in g^{-1}(N_{i+1})$; $x \notin N_i \Rightarrow y \notin g^{-1}(N_i)$; luego

$$g^{-1}(N_i) \neq g^{-1}(N_{i+1})$$

por existir y tal que $y \in g^{-1}(N_{i+1})$, $y \notin g^{-1}(N_i)$.

Luego, la sucesión

$$0 = f(L_0) \subset f(L_1) \subset \ldots \subset f(L_n) \subset g^{-1}(N_1) \subset g^{-1}(N_2) \subset \ldots \subset g^{-1}(N_m) = M$$

es una serie de composición de M, y como su longitud es $n+m$ entonces $\ell(M) = n + m = \ell(L) + \ell(N)$

C A P I T U L O I V

MODULOS Y ANILLOS NOETHERIANOS

IV MÓDULOS Y ANILLOS NOETHERIANOS

4.1 PROPOSICION

Sea M un A-módulo. Las condiciones que siguen son equivalentes:

1- Toda sucesión creciente de submódulos de M es estacionaria

2- Todo conjunto no vacío de submódulos de M tiene un elemento maximal.

3- Todo submódulo de M es de generación finita.

DEMOSTRACION

1) $\Rightarrow$ 2).

Sea $\Omega \neq \phi$ un conjunto de submódulos de M y supongamos que Ω no tiene un elemento maximal. Sea M_1 un submódulo de M en $\Omega (\Omega \neq \phi)$; como M_1 no es maximal, existe $M_2 \in \Omega$ tal que

$M_1 \subsetneqq M_2$; como M_2 no es maximal, existe $M_3 \in \Omega$ tal que

$M_1 \subsetneqq M_2 \subsetneqq M_3$; de esta forma, tendríamos una sucesión estrictamente creciente de submódulos de M.

$$M_1 \subsetneqq M_2 \subsetneqq M_3 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_n \subsetneqq M_{n+1} \subsetneqq \cdots$$

La cual no podría ser estacionaria.

2) $\Rightarrow$ 3).

Sea H un submódulo de M y sea Ω el conjunto formado por todos los submódulos de H que tienen un generador finito; $\Omega \neq \phi$ porque $\{0\} \subset \Omega$; por hipótesis, existe en Ω un elemento maximal H_0; probemos que $H_0 = H$. Si $H_0 \neq H$, sea $x \in H$, tal que $x \notin H_0$; como $H_0 \subset H$, el submódulo $H_0 + Ax$ es un elemento de Ω que contiene estrictamente a H_0, lo cual es una contradicción porque H_0 es maximal.

Por lo tanto $H_0 = H$, de donde H es de generación finita.

3) => 1)

Sea $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots \subset M_n \subset M_{n+1} \subset \ldots$ (1)

una sucesión creciente de submódulos de M y sea $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$; H es un submódulo (Prop. 3.21) y es por tanto, de generación finita; sea $L = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ un generador finito de H; para cada $i \leq m$, sea M_{n_i} un submódulo en la cadena (1) tal que $x_i \in M_{n_i}$ y sea $r = \text{máx}\,\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$; $M_{n_i} \subset M_r$, de donde $x_i \in M_r$, para todo $i \leq m$; luego

$$[\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}] \subset M_r,$$

es decir $H \subset M_r$; por lo tanto $M_r = H$ y la sucesión (1) es estacionaria:

$$M_r = M_{r+1} = M_{r+2} = \ldots$$

4.2 DEFINICION

Un A-módulo M es llamado "noetheriano" si satisface las condiciones equivalentes de la proposición 4.1.

Si un anillo A, considerado como A-módulo es noetheriano, - se dice que es un anillo noetheriano.

4.3 EJEMPLO

El anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros es noetheriano.

Todo ideal I de $\mathbb{Z}$ es de la forma $I = [a]$, $a \in \mathbb{Z}$ (Prop. 2.19); luego todo ideal de $\mathbb{Z}$ es finitamente generado, es decir que $\mathbb{Z}$ es un anillo noetheriano.

4.4 PROPOSICION

Sea M un A-módulo. Si cada conjunto no vacío de submódulos finito generados de M tiene un elemento maximal, entonces M es noetheriano.

DEMOSTRACION

Sea $\{0\} \neq M_0 \subseteq M$ submódulo de M; probar que M_0 es finitamente generado.

Sea $\Sigma = \{M'/M' \subseteq M_0,\ M'$ finitamente generado$\}$

Probemos que

$\Sigma \neq \phi$

Sea $x \in M_0$.

$x \in M_0 \Rightarrow Ax$ es finitamente generado

$\Rightarrow Ax \in \Sigma$

luego $\Sigma \neq \phi$

como $\Sigma \neq \phi$, Σ tiene un elemento maximal

Sea éste M

demostremos que $M = M_0$

Supongamos que $M \neq M_0$

Existe $m \in M_0$ tal que $m \notin M$

$\Rightarrow M + Am \subset M_0$, además $M + Am$ es finitamente generado;

y $M \subsetneq M + Am$

Pero esto es una contradicción porque M es maximal en Σ.

Luego, $M = M_0$

Por lo tanto, M_0 es finitamente generado.

Luego, M es noetheriano. (Por definición).

4.5 PROPOSICION

Si A es un anillo noetheriano y $S \subset A$ es multiplicativamente cerrado, entonces $S^{-1}A$ es noetheriano.

DEMOSTRACION

Sea $I \subset S^{-1}A$ un ideal y probemos que es finitamente generado. Para ello, sea $J = \{x \in A \ / \ \frac{x}{y} \in I$ para algún $y \in S\}$; J es un ideal de A (Prop. 2.35); como A es noetheriano, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en A tales que $J = Ax_1 + Ax_2 + \ldots + Ax_n$.

Sea $\frac{x}{y} \in I$; $x \in J$ por definición de J; luego existen

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ en A tales que

$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, de donde

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha_1 x_1}{y} + \frac{\alpha_2 x_2}{y} + \ldots + \frac{\alpha_n x_n}{y} = \frac{\alpha_1}{y} \cdot \frac{x_1}{1} + \frac{\alpha_2}{y} \cdot \frac{x_2}{1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{y} \cdot \frac{x_n}{1}$$

luego $\frac{x}{y} \in \left[\left[\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{1}, \frac{x_3}{1}, \ldots, \frac{x_n}{1}\right]\right]$; por tanto

$\left\{\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{1}, \ldots, \frac{x_n}{1}\right\}$ es un generador finito de I.

4.6 EJEMPLO DE ANILLO NO NOETHERIANO

Sea $X = [-1, 1]$; X es un espacio métrico compacto infinito. En todo espacio métrico X se cumple la propiedad siguiente:

Si $F \neq \phi$ es un conjunto cerrado de X, y si $x \in X$ y $x \notin F$ entonces existe una función continua $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ y $f(y) = 0$ para todo $y \in F$.

Sea $A = C(X, \mathbb{R})$ = conjunto de funciones continuas $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$; A un anillo unitario y conmutarivo con las operaciones

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

En este anillo, para todo $M \subset X$, $M \neq \phi$, el conjunto $\{f \in A \mid f(x) = 0 \text{ para todo } x \in M\}$ es un ideal de A, ya que

. $f(x) = 0$ y $g(x) = 0 \implies f(x) + g(x) = 0 \implies (f + g)(x) = 0$

. $f(x) = 0$ y $g \in A \implies g(x) f(x) = 0 \implies (gf)(x) = 0$

En $X = [-1, 1]$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sea $x_n = \frac{1}{n}$; $x_1, x_2, \ldots$ es una sucesión de puntos de X; si para cada n

$$F_n = \{0, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\},$$

F_n es un conjunto cerrado, y se tiene una sucesión estricta mente decreciente de conjuntos cerrados

$$\ldots \subset F_{n+1} \subset F_n \subset \ldots \subset F_2 \subset F_1$$

ya que $x_n \in F_n$ y $x_n \notin F_{n+1}$

Para cada n formemos en $A = C(X, \mathbb{R})$ el ideal

$$I_n = \{f \in A \ / \ f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in F_n\}; \quad I_n \subset I_{n+1}$$

ya que $f \in I_n \Rightarrow f(x) = 0$ para todo $x \in F_n \Rightarrow f(x) = 0$ para to do $x \in F_{n-1} \Rightarrow f \in I_{n+1}$

Luego, se tiene una sucesión creciente de ideales

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots \subset I_n \subset I_{n+1} \subset \ldots$$

Además esta sucesión es estrictamente creciente ya que si - $x \in F_n$ y $x \notin F_{n+1}$ entonces existe $f \in C(x, \mathbb{R})$ tal que $f(x) = 1$ y $f(y) = 0$ para todo $y \in F_{n+1}$; $f \in I_{n+1}$ y $f \notin I_n$, es decir, $I_n \subsetneq I_{n+1}$.

Por tanto la sucesión creciente de ideales

$$I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset I_{n+1} \subset \ldots$$

no es estacionaria; luego $A = C(X, \mathbb{R})$ es un anillo que no es noehteriano.

4.7 PROPOSICION

Sea M un A-módulo noehteriano y $U: M \longrightarrow M$ un homomorfismo de módulos.

Si U es suprayectiva, entonces U es isomorfismo.

DEMOSTRACION

Sea $\ker(U^n) = \{x \in M \ / \ U^n(x) = 0\}$

$U: M \longrightarrow M$

Demostremos que U es inyectiva.

$$
\begin{array}{ll}
U: M \longrightarrow M & ; \ \ker(U) \text{ submódulo de } M \\
U^2: M \longrightarrow M & ; \ \ker(U^2) \text{ submódulo de } M \\
U^3: M \longrightarrow M & ; \ \ker(U^3) \text{ submódulo de } M \\
\vdots & \qquad \vdots \\
U^n: M \longrightarrow M & ; \ \ker(U^n) \text{ submódulo de } M
\end{array}
$$

Luego se tiene una sucesión creciente de submódulos

$\ker(U) \subseteq \ker(U^2) \subseteq \ldots \subseteq \ker(U^{n-2}) \subseteq \ker(U^{n-1}) \subseteq \ker(U^n) = \ker(U^{n+1}) = \ldots$

Sea $x \in \ker(U)$, es decir $U(x) = 0$

Sea y tal que $U^n(y) = x$ (U^n es sobreyectiva por ser composición de funciones sobreyectivas)

$$\begin{aligned} U^{n+1}(y) &= U(U^n(y)) \\ &= U(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

es decir $y \in \ker(U^{n+1})$, de donde $y \in \ker(U^n)$;

$U^n(y) = 0$, ó sea $x = 0$

Luego U es INYECTIVA.

4.8 PROPOSICION

Sea A un anillo no noetheriano y sea Ω el conjunto de ideales de A que no son de generación finita. Entonces

1. Ω tiene elementos maximales
2. Todo elemento maximal de Ω es un ideal primo

DEMOSTRACION

1. $\Omega \neq \phi$ porque A no es noetheriano (Definición de anillo noetheriano). Consideremos Ω ordenado por la relación de inclusión y sea $\Omega' \subset \Omega$ un sobconjunto de Ω totalmente ordenado. Sea $T = \bigcup_{I \in \Omega'} I$ y probemos que T es un ideal que pertenece a Ω. Si $x, y \in T$ existen I_1 e I_2 en Ω' tales que $x \in I_1$, y $y \in I_2$; como Ω' es totalmente ordenado, $I_1 \subset I_2$ ó $I_2 \subset I_1$, luego $x + y \in I_1$ ó $x + y \in I_2$; en ambos casos $x + y \in T$. Si $x \in T$ y $\alpha \in A$, existe $I_1 \in \Omega'$ tal que $x \in I_1$; como I_1 es un ideal, $\alpha x \in I_1$; luego $\alpha x \in T$. Por tanto T es un ideal. Probemos por contradicción que T no es de generación finita. Supongamos que

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

es un generador finito de T; para cada $i \leq n$, $x_i \in T$; sea $I_j \in \Omega'$ tal que $x_i \in I_j$; como Ω' es totalmente ordenado, existe $j \leq n$ tal que $I_i \subset I_j$ para todo $i \leq n$; luego $x_i \in I_j$ para todo $i \leq n$; se tendrá que $[\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}] \subset I_j$, de donde $T = I_j$, lo cual no puede ser porque I_j no es finitamente generado. Luego T no es de generación finita y es un elemento de Ω. Por definición de T, $I \subset T$ para todo $I \in \Omega'$, es decir que T es una cota superior de Ω' en Ω. Se ha probado que todo subconjunto totalmente ordenado de Ω admite una cota superior en Ω; luego, según el lema de Zorn, en Ω existen elementos maximales.

2. Sea M un elemento maximal de Ω y probemos que es un ideal primo. Supongamos que M no es primo y sean a, b en A tales que $a \notin M$, $b \notin M$ y $a\,b \in M$. Como $b \notin M$, $M \underset{\neq}{\subset} M + Ab$; como M es maximal en Ω, $M + Ab \notin \Omega$; es decir que $M + Ab$ es un ideal finitamente generado; sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que

$$M + Ab = [\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}]$$

Para cada $i \leq n$, $x_i \in M + Ab$; sean $m_1, m_2, \ldots, m_n$ en M y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ en A tales que $x_i = m_i + \alpha_i b$ para todo $i \leq n$; sea $M_0 = [\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}]$ y probemos que $M + Ab = M_0 + Ab$. Para ello sea $x \in M + Ab$; $x \in [\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}]$,

$x = \sum_1^n \beta_i x_i = \sum_1^n \beta_i (m_i + \alpha_i b) = \sum_1^n \beta_i m_i + \sum_1^n (\beta_i x_i) b$; luego $x \in M_0 + Ab$; asi, $M + Ab \subset M_0 + Ab$; por definición de M_0, $M_0 \subset M$; de donde $M_0 + Ab \subset M + Ab$; así, $M + Ab = M_0 + Ab$.

Probemos ahora que $M = M_0 + b(M: b)$; $x \in M \Rightarrow x \in M + Ab$ $\Rightarrow x \in M_0 + Ab \Rightarrow x = y + \alpha b$, $y \in M_0$, $\alpha \in A$; $y \in M$ porque $M_0 \subset M$, de donde $\alpha b = x - y$ es un elemento de M, es decir, que $\alpha \in (M: b)$; luego $\alpha b \in b(M: b)$ y $x \in M_0 + b(M: b)$; por tanto $M \subset M + b(M: b)$; por definición de M_0 y $(M: b)$, $M_0 \subset M$ y $b(M: b) \subset M$, de donde $M_0 + b(M: b) \subset M$. Luego, $M = M_0 + b(M: b)$; $(M: b)$ es un ideal tal que $M \subset (M: b)$; como $a \notin M$ y $a \in (M: b)$, $M \underset{\neq}{\subset} (M: b)$; por ser M un elemento maximal de Ω, $(M: b) \notin \Omega$, - o sea que $(M: b)$ es un ideal finitamente generado; sea $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ un generador finito de $(M: b)$; $\{bu_1, bu_2, \ldots, bu_2\}$ es un generador finito de $b(M: b)$ y $S = \{m_1, m_2, \ldots, m_n, bu_1, bu_2, \ldots, bu_m\}$ es un generador finito de $M_0 + b\,(M: b)$.

Como $M = M_0 + b(M: b)$, S es un generador finito de M; esto es una contradicción porque $M \in \Omega$. Luego, M es un ideal primo.

4.9 PROPOSICION

Si A es un anillo en el cual todo ideal primo es finitamente generado, entonces A es noetheriano.

DEMOSTRACION

Sea A un anillo en el cual todo ideal primo es finitamente generado. Si A no fuera noetheriano, existiría un ideal primo M no finitamente generado (Prop. 4.8). Luego, A debe ser noetheriano.

4.10 PROPOSICION

En un anillo noetheriano, todo ideal contiene una potencia de su radical.

DEMOSTRACION

Sea A un anillo noetheriano y sea $I \subset A$ un ideal. Como A es noetheriano, todo ideal de A es finitamente generado; en particular el radical de I es generado por un conjunto finito; sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en A tales que

$$r(I) = [\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}]$$

Cada elemento x_i pertenece a $r(I)$; luego, para cada $i \leq n$ existe n_i tal que $x_i^{n_i} \subset I$. Sea $m = \sum_{i=1}^{n} (n_i - 1) + 1$. Sea S el conjunto formado por elementos de la forma $\prod_{i=1}^{n} x_i^{r_i}$ en donde $\sum_{i=1}^{n} r_i = m$; entonces $r(I)^m = [S]$ (Prop. 2.23).

Probemos por contradicción, que existe $j \leq n$ tal que $r_j \geq n_j$.

Supongamos que $r_i < n_i$ para todo $i \leq n$; entonces

$$\begin{aligned} r_i < n_i &\Rightarrow r_i \leq n_i - 1 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i \leq \sum_{i=1}^{n} (n_i - 1) \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i < \sum_{i=1}^{n} (n_i - 1) + 1 \\ &\Rightarrow m < m \quad \text{(contradicción).} \end{aligned}$$

Luego, existe $j \leq n$ tal que $r_j \geq n_j$; sea $r_j = n_j + t$;

$x_j^{r_j} = x_j^{n_j+t} = x_j^{n_j} . x_j^{t}$; como $x_j^{n_j} \varepsilon I$ e I es un ideal,

$x_j^{n_j} . x_j^{t} \varepsilon I$ o sea $x_j^{r_j} \varepsilon I$; también, por ser I ideal,

$x_1^{r_1} . x_2^{r_2} \ldots x_j^{r_j} \ldots x_n^{r_n} \varepsilon I$; de donde $S \subset I$ y por consiguiente $[S] \subset I$ o sea $r(I)^m \subset I$

4.11 PROPOSICION

En un anillo noetheriano A el anilradical es nilpotente.

DEMOSTRACION

Sea A un anillo noetheriano y sea N su nilradical; por Prop. 2.30, el nilradical es el radical de 0 ; por ser A noetheriano, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $N^m \subset \{0\}$, es decir $N^m = \{0\}$. Luego N es nilpotente.

4.12 PROPOSICION

Sea $f: M \longrightarrow L$ un morfismo de A-módulos.

1) Si f es inyectivo y L es noetheriano, entonces M es noetheriano.

2) Si f es sobreyectivo y M es noetheriano, entonces L es noetheriano.

DEMOSTRACION

1) Sea T un submódulo de M; $f(T)$ es submódulo de L (Prop. 3.15); luego existe $S \subset L$, S finito tal que $f(T) = [S]$; sea $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; como $S \subset f(T)$, existen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ elementos de T tales que $x_1 = f(z_1)$, $x_2 = f(z_2), \ldots, x_n = f(z_n)$. Sea $x \in T$ y sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ en A tales que $f(x) = \Sigma\alpha_i x_i$; luego $f(x) = \sum_1^n \alpha_i f(z_i) = f(\sum_1^n \alpha_i z_i)$, por ser f un morfismo; como f es inyectivo, se tiene que $x = \sum_1^n \alpha_i z_i$. Por tanto $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ es un generador finito de T, así M es un módulo noetheriano.

2) Sea E un submódulo de L; $f^{-1}(E)$ es un submódulo de M (Prop. 3.15) y como M es noetheriano existe $S \subset M$, S finito, tal que $f^{-1}(E) = [S]$; sea $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y probemos que $\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ es generador de

E. Tomemos $y \in E$; como f es sobreyectiva existe $z \in M$ tal que $y = f(z)$; z es de la forma $z = \sum_1^n \alpha_i x_i$ porque $z \in f^{-1}(E)$ y $f^{-1}(E) = [S]$.

Luego $y = f(z) = f(\sum_1^n \alpha_i x_i) = \sum_1^n \alpha_i f(x_i)$.

Así, $\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ es un generador finito de E y L es noetheriano.

4.13 PROPOSICION

Si M es un módulo noetheriano, todo submódulo de M es noe--theriano.

DEMOSTRACION

Sea M módulo noetheriano y N un submódulo de M.

La función $f: N \longrightarrow M$ es un morfismo inyectivo;
$x \hookrightarrow x$

luego N es noetheriano (Prop. 4.12).

4.14 PROPOSICION

La intersección de dos A-módulos noetherianos es un A-módulo noetheriano.

DEMOSTRACION

Sean E y F dos A-móduclos noetherianos; $E \cap F$ es un A-módulo (3.10) y es noetheriano porque $E \cap F \subset E$ (Prop. 4.13).

4.15 PROPOSICION

Sea $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Entonces M es noetheriano si y sólo si L y N son noetherianos.

DEMOSTRACION

1) Supongamos que M es noetheriano y probemos que L y N son noetherianos. L es noetheriano por ser f inyectivo y M es noetheriano (Prop. 3.17 y Prop. 4.12).

   El módulo N es noetheriano porque g es sobreyectivo y M es noetheriano (Prop. 3.17 y Prop. 4.2).

2) Ahora supongamos que L y N son noetherianos y probemos que M es noetheriano. Para ello, sea

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset M_{n+1} \subset \ldots$$

   una sucesión creciente de submódulos de M. Las sucesiones de submódulos

$$f^{-1}(M_1) \subset f^{-1}(M_2) \subset \ldots \subset f^{-1}(M_n) \subset f^{-1}(M_{n+1}) \subset \ldots$$
$$g(M_1) \subset g(M_2) \subset \ldots \subset g(M_n) \subset g(M_{n+1}) \subset \ldots$$

   son estacionarios en L y N respectivamente, ya que estos módulos son noetherianos; sean m, r en $\mathbb{N}$ tales que

   $f^{-1}(M_r) = f^{-1}(M_{r+1}) = f^{-1}(M_{r+2}) = \ldots$ y

   $g(M_m) = g(M_{m+1}) = g(M_{m+2}) = \ldots$ Si $s = \text{máx}\ (m,r)$

tendremos que $f^{-1}(M_n) = f^{-1}(M_s)$ y $g(M_n) = g(M_s)$ para todo $n \geq s$. Probemos que $M_n = M_s$ para todo $n \geq s$. Sea $x \in M_n$ con $n \geq s$; $g(x) \in g(M_n)$ y como $g(M_s) = g(M_n)$, existe $y \in M_s$ talque $g(x) = g(y)$; $y \in M_n$ porque $M_s \subset M$; luego $g(x - y) = 0$, con $x - y \in M_n$; como $\ker g = I_m(f)$ existe $z \in L$ talque $f(z) = x - y$; como $x - y \in M_n$, $z \in f^{-1}(M_n)$; de donde $z \in f^{-1}(M_s)$; luego $f(z) \in M_s$, es decir $x - y \in M_s$; como $y \in M_s$, $x \in M_s$.

Por tanto $M_n \subset M_s$ y por consiguiente $M_s = M_n$, para todo $n \geq s$.

4.16 PROPOSICION

Si E y F son módulos noetherianos, entonces $E \times F$ es también noetheriano.

DEMOSTRACION

Por Prop. 4.15, $E \times F$ es noetheriano porque hay una sucesión exacta $0 \longrightarrow E \longrightarrow E \times F \longrightarrow F \longrightarrow 0$ (Prop. 3.19)

4.17 PROPOSICION

Si E y F son dos A-módulos noetherianos, entonces $E + F$ es un A-módulo noetheriano.

PRUEBA

La función $f: A \times B \longrightarrow A + B$ es un morfismo sobreyectivo.
$(x, y) \rightsquigarrow x + y$

Luego, $A + B$ es noetheriano (Prop. 4.12 y Prop. 4.16)

4.18 PROPOSICION

Sea M un A-módulo y N un submódulo de M. Si M es noetheriano, entonces $\frac{M}{N}$ es un módulo noetheriano.

PRUEBA

La sucesión $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow \frac{M}{N} \longrightarrow 0$ es exacta (Prop. 3.18). Luego, $\frac{M}{N}$ es noetheriano (Prop. 4.15).

4.19 PROPOSICION

Sea M un A-módulo y sean E y F submódulos de M. Si $\frac{M}{E}$ y $\frac{M}{F}$ son noetherianos también lo es $\frac{M}{E \cap F}$

PRUEBA

Sea $f: \frac{M}{E\cap F} \longrightarrow \frac{M}{E} \times \frac{M}{F} : x + E \cap F \rightsquigarrow (x + E,\ x + F)$

i) "f está bien definida"

$$
\begin{aligned}
x + E\cap F = y + E\cap F &\Rightarrow x - y \in E \cap F \\
&\Rightarrow x - y \in E \ \text{ y } \ x - y \in F \\
&\Rightarrow x + E = y + E \ \text{ y } \ x + F = y + F \\
&\Rightarrow (x + E,\ x + F) = (y + E,\ y + F).
\end{aligned}
$$

ii) "f es un morfismo"

$$
\begin{aligned}
f((x + E\cap F) + (y + E\cap F)) &= f((x+y) + E\cap F) \\
&= (x + y + E,\ x + y + F) \\
&= ((x+E) + (y+E),\ (x+F)+(y+\ )) \\
&= (x+E,\ x+F) + (y+E,\ y+F) \\
&= f(x + E\cap F) + f(y + E\cap F).
\end{aligned}
$$

$$\cdot\ f(\lambda(x + E\cap F)) = f(\lambda x + E\cap F)$$
$$= (\lambda x + E,\ \lambda x + F)$$
$$= \lambda(x + E,\ x + F)$$
$$= \lambda f(x + E\cap F).$$

iii) "f es inyectivo"

$$f(x+E\cap F) = f(y+E\cap F) \Rightarrow (x+E,\ x+F) = (y+E,\ y+F)$$
$$\Rightarrow x+E = y+E \quad y \quad x+F = y+F$$
$$\Rightarrow x - y \in E \quad y \quad x - y \in F$$
$$\Rightarrow x - y \in E\cap F$$
$$\Rightarrow x + E\cap F = y + E\cap F$$

. $\frac{M}{E} \times \frac{M}{F}$ es un módulo noetheriano (Prop. 4.16); luego

$\frac{M}{E\cap F}$ es también noetheriano (Prop. 4.12)

4.20 PROPOSICION

Sea M un A-módulo noetheriano. Si L es el aniquilidor de M en A, entonces $\frac{A}{L}$ es un anillo noetheriano.

DEMOSTRACION

M es un A-módulo finitamente generado (por ser noetheriano). Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un generador finito de M.

Probemos que la función $\psi\ \frac{A}{L} \longrightarrow M^n;\ a+L \rightsquigarrow (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$

es un morfismo inyectivo.

i) "Ψ está bien definida"

$$a + L = b + L \Rightarrow a - b \in L \Rightarrow (a - b)x = 0 \text{ para todo } x \in M,$$

$$\Rightarrow (a - b)x_i = 0 \text{ , para todo } i \leq n$$

$$\Rightarrow ax_i - bx_i = 0 \text{ , para todo } i \leq n$$

$$\Rightarrow ax_i = bx_i, \text{ para todo } i \leq n$$

$$\Rightarrow (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n) = (bx_1, bx_2, \ldots, bx_n)$$

$$\Rightarrow \Psi(a) = \Psi(b).$$

ii) "Ψ es un morfismo"

. $\Psi((a+L) + (b+L)) = \Psi((a+b) + L) = ((a+b)x_1, (a+b)x_2, \ldots, (a+b)x_n)$

$$= (ax_1 + bx_1, ax_2 + bx_2, \ldots, ax_n + bx_n)$$

$$= (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n) + (bx_1, bx_2, \ldots, bx_n)$$

$$= \Psi(a) + \Psi(b).$$

. $\Psi(\alpha(a+L)) = \Psi(\alpha a + L) = ((\alpha a)x_1, (\alpha a)x_2, \ldots, (\alpha a)x_n)$

$$= (\alpha(ax_1), \alpha(ax_2), \ldots, \alpha(ax_n))$$

$$= \alpha(ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$$

$$= \alpha \, \Psi(a + L)$$

iii) "Ψ es inyectivo"

$\Psi(a+L) = \Psi(b+L) \Rightarrow (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n) = (bx_1, bx_2, \ldots, bx_n).$

$$\Rightarrow ax_i = bx_i \text{ para todo } i \leq n$$

$$\Rightarrow ax_i - bx_i = 0 \text{ para todo } i \leq n$$

$$\Rightarrow (a - b)x_i = 0 \text{ para todo } i \leq n$$

$$\Rightarrow (a - b)x = 0 \text{ para todo } x \in M$$

$$\Rightarrow a - b \in L$$

$$\Rightarrow a + L = b + L.$$

M^n es noetheriano (Prop. 4.16); luego $\frac{A}{L}$ es también noetheriano (Prop. 4.12).

4.21 PROPOSICION

Si A es un anillo noetheriano y M es un A-módulo de generación finita, entonces M es noetheriano.

DEMOSTRACION

Sean A un anillo noetheriano y M un A-módulo de generación finita; sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un generador finito de M. Por ser A noetheriano, el módulo producto $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ (n veces) es noetheriano (Prop. 4.16); cada elemento $x \in M$ es de la forma $x = \sum_1^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in A$.

La función f:

$$\begin{aligned} A^n &\longrightarrow M \\ (\alpha_i)_{i \leq n} &\rightsquigarrow \sum_1^n \alpha_i x_i \end{aligned}$$

Es un morfismo sobreyectivo, luego, M es noetheriano (Prop. 4.12).

4.22 PROPOSICION

Si A es un anillo noetheriano entonces el anillo de polinomios $A[x]$ es noetheriano.

DEMOSTRACION

Sea A un anillo noetheriano e $I \subset A[x]$ un ideal en el anillo de polinomios $A[x]$; probaremos que I es de generación finita. El conjunto $J = \{a \in A$ / a es coeficiente principal de un polinomio $f \in I\}$ es un ideal de A (Prop. 2.11); como A es noetheriano, J es finitamente generado, es decir existen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en A tales que $J = [\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}]$, ó sea que cada $a \in J$ es de la forma $a = \sum_1^n \alpha_i a_i$, $\alpha_i \in A$; para cada $i \leq n$ existe $f_i \in I$ tal que $f_i = a_i x^{r_i}$ + (términos de menor grado que r_i), ó sea $f_i = a_i x^{r_i} + g_i$, g_i un polinomio de grado $s_i \leq r_{i-1}$; sean $r = \text{máx}(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ y H = ideal de $A[x]$ generado por $f_1, f_2, \ldots, f_n$; $H \subset I$ ya que $f_i \in I$ para todo $i \leq n$.

Si M es el A-módulo generado por $1, x, x^2, \ldots, x^{r-1}$, M es noetheriano por ser finitamente generado y porque A es noetheriano (Prop. 4.21); $I \cap M$ es finitamente generado por ser submódulo del módulo noetheriano M.

Si $\{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ es un generador de $I \cap M$ entonces $\{h_1, h_2, \ldots, h_m, f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es un generador finito de $I \cap M + H$. Demostremos que $I = I \cap M + H$.

1) " $I \cap M + H \subset I$"

$I \cap M \subset I$ y $H \subset I \Rightarrow I \cap M + H \subset I$

2) " $I \subset I \cap M + H$"

Sea $f \in I$, $f = ax^m$ + (términos de grado $s < m$), es decir $f = ax^m + t$, t un polinomio de grado $s \leq m - 1$.

Consideremos dos casos; $m < r$ ó $m \geq r$.

Si $m < r$, $f \in I \cap M$; luego $f \in I \cap M + H$

Si $m \geq r$, sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ en A tales que $a = \sum_1^n \alpha_i a_i$ - (Porque $a \in J$); el polinomio $f_1 = f - \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i x^{m-r_i}$ es un polinomio de grado $d < m$ ya que

$$\sum_1^n \alpha_i f_i x^{m-r_i} = \sum_1^n \alpha_i (a_i x^{r_i} + g_i) x^{m-r_i} = \sum \alpha_i a_i x^{r_i} . x^{m-r_i} + \sum \alpha_i g_i x^{m-r_i}$$

$$= \sum \alpha_i a_i x^m + \sum \alpha_i g_i x^{m-r_i} = (\sum \alpha_i a_i) x^m + \sum \alpha_i g_i x^{m-r_i} = ax^m + \sum \alpha_i g_i x^{m-r_i},$$

de donde

$$f_1 = f - \sum \alpha_i f_i x^{m-r_i} = ax^m + t - ax^m - \sum \alpha_i g_i x^{m-r_i}$$

$$= t - \sum \alpha_i g_i x^{m-r_i}, \quad \text{el cual es un polino}$$

mio de grado $d < m$.

Además $f_1 \in I$ por ser diferencia de dos polinomios de I. Si f es un polinomio de grado $d < r$ entonces

$f_1 \in I \cap M$ y $f = f_1 + \sum \alpha_i f_i x^{m-r_i} \in I \cap M + H$.

($\sum \alpha_i f_i x^{m-r_i} \in H$ porque $f_i \in H$ para todo i).

Si f_i es un polinomio de grado $d \geq r$, repetimos tantas veces como sea necesario el proceso de ir restando elementos de H hasta obtener un polinomio g tal que grado de $g < r$, y se - tendrá $f = g + h$, $h \in H$; grado de $g < r \Rightarrow g \in I \cap M$. Luego - $f \in I \cap M + H$.

$f \in I \cap M + H \Rightarrow I \subset I \cap M + H$.

Por tanto $I = I \cap M + H$; luego,

I es finitamente generado.

4.23 PROPOSICION

En un anillo A noetheriano, cada ideal es una intersección finita de ideales irreducibles.

PRUEBA (por contradicción)

Supongamos que existen en A ideales que no son intersección finita de ideales irreducibles. Entonces el conjunto $\mathcal{B}$ formado por los ideales de A que no son intersección finita de ideales irreducibles es no vacío. Como A es noetheriano, - sea $M \in \mathcal{B}$ un elemento maximal; todo elemento de $\mathcal{B}$ es reducible (todo ideal I irreducible es una intersección finita de ideales irreducibles: $I = I \cap I$); en particular M es reducible; luego existen ideales H y L tales que $M = H \cap L$, $M \neq H$, y $M \neq L$; H y L no pertenecen al conjunto $\mathcal{B}$ ya que $M \underset{\neq}{\subset} H$, $M \underset{\neq}{\subset} L$ y M es maximal; es decir que H y L son intersecciones finitas de ideales irreducibles, es decir que existen ideales irreducibles $H_1, H_2, \ldots, H_n, L_1, L_2, \ldots, L_m$ tales que

$$H = \bigcap_{i=1}^{n} H_i, \quad L = \bigcap_{i=1}^{m} L_i. \quad \text{Como } M = H \cap L,$$

$M = H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n \cap L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_m$, es decir que M es una intersección de ideales irreducibles; esto es una con-- tradicción ya que $M \in \mathcal{B}$

4.24 PROPOSICION

En un anillo noetheriano, todo ideal irreducible es primario.

PRUEBA

Sea A un anillo noetheriano y sea $I \subset A$ un ideal irreducible, sean x, y tales que $xy \in I$, $y \notin I$. Probaremos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x^m \in I$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $J_n = \{a \in A \ / \ ax^n \in I\}$; J_n es un ideal y se tiene una cadena ascendente de ideales.

$$J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \ldots \subset J_n \subset \ldots$$

Como A es noetheriano existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $J_n = J_m$ para todo $n \geq m$. Probemos que $(Ax^m + I) \cap (Ay + I) = I$.

Sea $z \in (Ax^m + I) \cap (Ay + I)$; $z = ax^m + r$, $z = by + s$, $a, b \in A$, $r, s \in I$; $zx \in I$, ya que $zx = byx + sx$ y $yx \in I$; como $zx = ax^{m+1} + rx$, $ax^{m+1} = zx - rx$ es un elemento de I; luego $a \in J_{m+1}$; $a \in J_m$ porque $J_m = J_{m+1}$, es decir $ax^m \in I$; por tanto $z = ax^m + r \in I$; así, $(Ax^m + I) \cap (Ay + I) \subset I$; trivialmente, $I \subset (A_m + I) \cap (Ay + I)$. Por tanto $(Ax^m + I) \cap (Ay + I) = I$. Por ser I irreducible, se tiene $Ax^m + I = I$ ó $Ay + I \quad I$; $Ay + I \neq I$ porque $y \notin I$; luego $Ax^m + I = I$, de donde $x^m \in I$.

4.25 PROPOSICION

En un anillo noetheriano cada ideal tiene una descomposición primaria.

PRUEBA

Sea A un anillo noetheriano e $I \subset A$ un ideal, Por Prop, 4,23, I es una intersección de ideales irreducibles; por Prop, 4.24, estos ideales irreducibles son primarios; luego I tiene una descomposición primaria.

C A P I T U L O V

MODULOS Y ANILLOS ARTINIANOS

V MODULOS Y ANILLOS ARTINIANOS

5.1 PROPOSICION

Sea M un A-módulo. Las condiciones que siguen son equivalentes.

1. Toda sucesión decreciente de submódulos de M es estacionaria.

2. Todo subconjunto no vacío de submódulos de M posee un elemento minimal.

PRUEBA

1) --> 2)

Sea $\Omega \neq \phi$ un conjunto de submódulos de M y supongamos que Ω no tiene un elemento minimal.

Sea M_1 un submódulo de M en Ω ($\Omega \neq \phi$); como M no es minimal, existe $M_2 \in \Omega$ tal que $M_2 \subsetneq M_1$; como M_2 no es minimal, existe $M_3 \in \Omega$ tal que $M_3 \subsetneq M_2 \subsetneq M_1$; de esta forma tendríamos una sucesión estrictamente decreciente de submódulos de M.

$$\ldots \subset M_{n+1} \subset M_n \subset \ldots \subset M_3 \subset M_2 \subset M_1$$

la cual no podría ser estacionaria.

2) ==> 1)

Sea $(M_i)_{i \geq 1}$ una sucesión decreciente de submódulos de M; como esta sucesión es un conjunto no vacío de submódulos de M existe $m \in \mathbb{N}$ tal que M_m es minimal. Para este m se tendrá que $M_n = M_m$ para todo $n \geq m$; luego, la sucesión es estacionaria.

5.2 DEFINICION

Un A-módulo M es llamado "Artiniano", si satisface las condiciones equivalentes de la proposición 5.1.

Un anillo A es llamado "Anillo Artiniano" si considerado como un módulo sobre él mismo es un módulo Artiniano.

5.3 EJEMPLO DE ANILLO NO ARTINIANO

Sea $p \in \mathbb{Z}$, $p > 1$. La sucesión infinita de ideales de $\mathbb{Z}$,

$[P]$, $[P^2]$, $[P^3]$, ..., $[P^n]$, ...

es estrictamente decreciente ya que para todo $n \geq 1$

$P^n \notin [P^{n+1}]$ $(P^n \in [P^{n+1}] \Rightarrow P^n = \alpha P^{n+1} \Rightarrow 1 = \alpha P \Rightarrow P = 1$ ó $P = -1)$

Luego, esta sucesión no es estacionaria. Por tanto $\mathbb{Z}$ es un anillo no Artiniano.

5.4 PROPOSICION

Si M es un A-módulo Artiniano y $f: M \longrightarrow M$ es un morfismo inyectivo entonces f es un isomorfismo.

DEMOSTRACION

Sea M un A-módulo Artiniano y sea $f: M \longrightarrow M$ un endomorfismo inyectivo. La sucesión de submódulos de M:

$$f(M),\ f^2(M),\ f^3(M),\ \ldots\ f^n(M),\ f^{n+1}(M),\ \ldots$$

es decreciente ya que

$$f^{n+1}(x) = f^n(f(x)) \Rightarrow f^{n+1}(M) \subseteq f^n(M)$$

como M es Artiniano, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(M) = f^m(M)$ para todo $n \geq m$. Sea $y \in M$

$$f^m(y) \in f^m(M) \Rightarrow f^m(y) \in f^{m+1}(M) \Rightarrow f^m(y) = f^{m+1}(x),\ x \in M$$

$$\Rightarrow f^m(y) = f^m(f(x)) \Rightarrow y = f(x)$$

(f^m es inyectiva por ser una composición de funciones inyectivas) luego, f es un morfismo sobreyectivo, y es, por tanto, un isomorfismo.

5.5 PROPOSICION

Sea $f: M \longrightarrow L$ un morfismo de A-módulos.

1. Si f es inyectivo y L es Artiniano entonces M es Artiniano.

2. Si f es sobreyectivo y M es Artiniano entonces L es Artiniano.

PRUEBA

1. Suponemos que f es inyectivo y L Artiniano, probaremos que M es Artiniano. Sea $(M_i)_{i \geq 1}$ una sucesión decreciente de submódulos de M; para cada $i \geq 1$ sea $L_i = f(M_i)$; $(L_i)_{i \geq 1}$ es una sucesión decreciente de submódulos de L, ya que si $M_{n+1} \subseteq M_n$ entonces $f(M_{n+1}) \subseteq f(M_n)$; como L es -

Artiniano, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $L_n = L_r$ para todo $n \geq r$; es decir $f(M_n) = f(M_r)$ para todo $n \geq r$; como f es inyectivo, $f(M_n) = f(M_r) \Rightarrow M_n = M_r$; luego $M_n = M_r$ para todo $n \geq r$; así, M es Artiniano.

2. Suponemos que f es sobreyectivo y M Artiniano; probaremos que L es Artiniano. Sea $\Omega \neq \phi$ un conjunto formado por submódulos de L; para cada $H \in \Omega$, sea $H' = f^{-1}(H)$; H' es un submódulo de M; se tiene así un conjunto $\Omega' \neq \phi$ formado por submódulos de M; como M es Artiniano, existe $S \in \Omega'$, S minimal; S es de la forma $S = f^{-1}(T)$, $T \in \Omega$; T es minimal en Ω ya que

$$
\begin{aligned}
H \subset T &\Rightarrow f^{-1}(H) \subset f^{-1}(T) \\
&\Rightarrow f^{-1}(H) = f^{-1}(T) \qquad (f^{-1}(T) \text{ es minimal}) \\
&\Rightarrow H = T \qquad\qquad\qquad\; (f \text{ es sobreyectivo})
\end{aligned}
$$

Luego L es un A-módulo Artiniano.

5.6 PROPOSICION

Si M es un módulo Artiniano, todo submódulo de M es Artiniano.

PRUEBA

Sea M un módulo Artiniano y N un submódulo de M.

La función $f: N \longrightarrow M$ es un morfismo inyectivo;
$\qquad\qquad\qquad\;\; x \longmapsto x$

Luego, N es Artiniano (Prop. 5.5)

5.7 PROPOSICION

La intersección de dos módulos Artinianos es un módulo Artiniano.

DEMOSTRACION

Sean E y F dos módulos Artinianos; el módulo $E \cap F$ es Artiniano porque $E \cap F \subset E$ y E es Artiniano (Prop. 5.6)

5.8 PROPOSICION

Sea $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Entonces M es Artiniano si y sólo si L y N son Artinianos.

PRUEBA

1. Supongamos que M es Artiniano y probemos que L y N son Artinianos. L es Artiniano porque f es inyectivo y M es Artiniano (Prop. 3.17 y Prop. 5.5).

   El módulo N es Artiniano porque g es sobreyectivo y M es Artiniano (Prop. 3.17 y Prop. 5.5).

2. Ahora supongamos que L y N son Artinianos y probemos que M es Artiniano. Para ello, sea

$$\ldots M_{n+1} \subset M_n \subset \ldots \subset M_2 \subset M_1$$

   Una sucesión decreciente de submódulos de M. Las sucesiones de submódulos

$$\ldots f^{-1}(M_{n+1}) \subset f^{-1}(M_n) \subset \ldots \subset f^{-1}(M_2) \subset f^{-1}(M_1),$$
$$\ldots \quad g(M_{n+1}) \subset \quad g(M_n) \subset \ldots \subset g(M_2) \subset g(M_1),$$

son estacionarias en L y N respectivamente ya que estos módulos son Artinianos; sean s y r en $\mathbb{N}$ tales que

$$f^{-1}(M_n) = f^{-1}(M_r) \quad \text{para todo } n \geq r \text{ y}$$
$$g(M_n) = \quad g(M_s) \quad \text{para todo } n \geq s$$

Sea $t = \max(s, r)$; tendremos que $f^{-1}(M_n) = f^{-1}(M_t)$ y $g(M_n) = g(M_t)$ para todo $n \geq t$. Sean $n \geq t$ y $x \in M_t$; $g(x) \in g(M_t)$ y como $g(M_t) = g(M_n)$ existe $y \in M_n$ tal que $g(x) = g(y)$; $y \in M_t$ porque $M_n \subset M_t$; $g(x - y) = 0$, con $x - y \in M_t$; como $\ker g = I_m f$, existe $z \in L$ tal que $x - y = f(z)$; como $x - y \in M_t$, $z \in f^{-1}(M_t)$, de donde $z \in f^{-1}(M_n)$; luego, $f(z) \in M_n$, es decir $x - y \in M_n$; como $y \in M_n$, $x \in M_n$.

Por tanto $M_t \subset M_n$ y, por consiguiente, $M_t = M_n$ para todo $n \geq t$.

Luego, toda sucesión decreciente de submódulos de M es estacionaria, por lo cual es Artiniano.

5.9 PROPOSICION

Si E y F son módulos Artinianos, entonces E x F es también Artiniano.

DEMOSTRACION

Por Prop. 5.8, E x F es Artiniano porque hay una sucesión -exacta $0 \longrightarrow E \longrightarrow E \times F \longrightarrow F \longrightarrow 0$ (Prop. 3,19)

5.10 PROPOSICION

Si E y F son dos A-módulos Artinianos, entonces E + F es un A-módulos Artiniano.

DEMOSTRACION

La función $f: A \times B \longrightarrow A + B$
$(x,y) \rightsquigarrow x + y$

Es un morfismo sobreyectivo, luego, A + B es Artiniano -- (Prop. 5.5 y Prop. 5.9).

5.11 PROPOSICION

Sean M un A-módulo y N un submódulo de M. Si M es Artiniano entonces $\frac{M}{N}$ es un módulo Artiniano.

DEMOSTRACION

Hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow \frac{M}{N} \longrightarrow 0$$

(Prop. 3.18). Luego $\frac{M}{N}$ es Artiniano (Prop, 5,8).

5.12 PROPOSICION

Sea M un A-módulo y sean E y F submódulos de M, Si $\frac{M}{E}$ y $\frac{M}{F}$ son Artinianos, también $\frac{M}{E \cap F}$ es Artiniano,

DEMOSTRACION

$\frac{M}{E}$ y $\frac{M}{F}$ es Artiniano (Prop. 5.9) y hay un morfismo inyectivo

$f: \frac{M}{E \cap F} \longrightarrow \frac{M}{E} \times \frac{M}{F}$ (demostración de Prop. 4.19); luego

$\frac{M}{E \cap F}$ es Artiniano (Prop. 5.5).

5.13 PROPOSICION

En un anillo Artiniano, cada ideal es una suma finita de ideales no sumables.

DEMOSTRACION

Haremos la prueba por contradicción. Sea A un anillo Artiniano en el cual existen ideales que no son suma finita de ideales no sumables. Entonces el conjunto $\mathcal{B}$ formado por los ideales de A que no son suma finita de ideales no sumables es no vacío. Como A es Artiniano, existe $M \in \mathcal{B}$, M minimal; todo elemento del conjunto $\mathcal{B}$ es sumable (todo ideal I no sumable es suma finita de ideales no sumables: $I = I + I$). Luego existen ideales H y L tales que $M = H + L$, $M \neq H$ y $M \neq L$; H y L no pertenecen al conjunto $\mathcal{B}$ ya que $H \underset{\neq}{\subset} M$, $L \underset{\neq}{\subset} M$ y M es minimal; es decir que existen ideales no sumables $H_1, H_2, \ldots, H_n, L_1, L_2, \ldots, L_m$ tales que $H = \sum_1^n H_i$ y $L = \sum_1^m L_i$.

Como $M = H + L$, $M = H_1 + H_2 + \ldots + H_n + L_1 + L_2 + \ldots + L_m$, es decir que M es una suma finita de ideales no sumables; - esto es una contradicción ya que $M \in \mathcal{B}$

5.14 PROPOSICION

Si A es un anillo Artiniano y M es un A-módulo de generación finita, entonces M es Artiniano.

DEMOSTRACION

Sean A un anillo Artiniano, y M un A-módulo finitamente generado; sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un generador finito de M.

Por ser A Artiniano, el módulo $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ (n veces) es Artiniano (Prop. 5.9); cada elemento $x \in M$ es de la forma $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in A$. La función f:

$$\begin{aligned} A^n &\longrightarrow M \\ (\alpha_i)_{i \geq 1} &\rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \end{aligned}$$

Es un morfismo suryectivo, luego, M es Artiniano.

5.15 PROPOSICION

En un anillo de Artin todo ideal primo es maximal.

DEMOSTRACION

Sea A un anillo Artiniano y sea $I \subset A$, I un ideal primo; consideremos el anillo cociente $\frac{A}{I}$. Por ser A Artiniano, $\frac{A}{I}$ es un anillo Artiniano (Prop. 5.11); por ser I un ideal primo, $\frac{A}{I}$ es un dominio entero. Sea $x + I \neq I$ un elemento no nulo de $\frac{A}{I}$; por ser $\frac{A}{I}$ dominio entero, $x^n + I \neq I$, para todo $n \geq 1$;

para cada $n \in \mathbb{N}$ formemos el ideal $A(x^n + I)$; se tiene que

$x^{n+1} + I = x(x^n + I) \Rightarrow x^{n+1} + I \in A(x^n + I) \Rightarrow A(x^{n+1} + I) \subset A(x^n + I)$

es decir, que la sucesión de ideales $(A(x^n + I))_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente en $\frac{A}{I}$; como este anillo es Artiniano existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $A(x^n + I) = A(x^r + I)$ para todo $n \geq r$.

En particular $A(x^{r+1} + I) = A(x^r + I)$;

$$\begin{aligned} x^r + I \in A(x^r + I) &\Rightarrow x^r + I \in A(x^{r+1} + I) \\ &\Rightarrow x^r + I = a(x^{r+1} + I), \ a \in A, \ a \notin I. \\ &\Rightarrow x^r + I = ax^{r+1} + I \\ &\Rightarrow x^r + I = (a + I)(x^{r+1} + I) \\ &\Rightarrow x^r + I = (a + I)(x + I)(x^r + I) \\ &\Rightarrow (1 + I)(x^r + I) = (a + I)(x + I)(x^r + I) \end{aligned}$$

Por ser $\frac{A}{I}$ un dominio entero, puede aplicarse la ley cancelativa, ya que $x^r + I \neq I$; luego

$$1 + I = (a + I)(x + I)$$

Es decir, de $x + I$ es inversible en $\frac{A}{I}$. Luego $\frac{A}{I}$ es un campo e I es un ideal maximal (Prop. 2.28).

5.16 PROPOSICION

En un anillo de Artin, el nilradical es igual al radical de Jacobson.

DEMOSTRACION

Sea A un anillo de Artin, N su nilradical R su radical de Jacobson. Por definición N es igual a la intersección de todos los ideales primos de A y R es igual a la intersección de todos los ideales maximales de A. Por ser A un anillo Artiniano, todo ideal primo es maximal; luego $N = R$.

5.17 PROPOSICION

En un anillo de Artin, hay únicamente un número finito de ideales maximales.

DEMOSTRACION

Sea A un anillo de Artin y sea Ω el conjunto formado por ideales de A que son una intersección finita de ideales maximales de A; como A es Artiniano, hay en Ω un elemento minimal $I = I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n$; cada I_i es un ideal maximal. Sea M un ideal maximal de A; $M \cap I = M \cap I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n$ es un elemento de Ω y como I es minimal, $M \cap I = I$; es decir

$$I_1 \cap I_2 \cap \ \ldots \ \cap I_n \subset M.$$

Como M es un ideal primo (Prop. 2.28), existe j talque $I_j \subset M$ (Prop. 2.24); como I_j es maximal, $I_j = M$. Luego, en A hay únicamente n ideales maximales.

5.18 PROPOSICION

En un anillo de Artin el nilradical es nilpotente.

DEMOSTRACION

Sea A un anillo Artiniano y N su nilradical; formemos la sucesión decreciente de ideales de A.

$$\ldots \subset N^{n+1} \subset N^{n} \subset \ldots \subset N^{2} \subset N$$

Por ser A Artiniano, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $N^{r} = N^{n}$ para todo $n \geq r$. Probaremos, por contradicción, que $N^{r} = 0$.

Supongamos que $N^{r} \neq 0$ y sea $J = N^{r}$; $J^{2} = N^{r} \cdot N^{r} = N^{2r} = J$ sea $\Omega = \{I \subset A \;/\; I$ es un ideal e $IJ \neq 0\}$.

$\Omega \neq \phi$ porque $J \in \Omega$. Sea M un elemento minimal de Ω (por ser Artiniano); por definición de Ω, $M_{J} \neq 0$; sea $m \in M$ tal que $mJ \neq 0$; $mJ \neq 0 \Rightarrow Am \,.\, J \neq 0 \Rightarrow Am \in \Omega \Rightarrow Am = M$, ya que M es minimal en Ω y $Am \subset M$.

$(mJ)J = mJ^{2} = mJ \Rightarrow (mJ)J \neq 0 \Rightarrow mJ \in \Omega \Rightarrow mJ = M$.

Como $m \in M$, existe $x \in J$ tal que $m = mx$; $mx^{2} = mx \,.\, x = mx = m$; en general, $mx^{n} = m$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero $J = N^{r} = N$, de donde $x \in N$; luego, x es nilpotente, o sea que existe $n > 0$ tal que $x^{n} = 0$; así, $m = 0$ y $mJ = 0$, lo cual es una contradicción ya que $mJ \neq 0$. Por lo tanto $N^{r} = 0$ y N es nilpotente.

5.19 PROPOSICION

Sea A un anillo tal que el ideal $\{0\}$ es igual a un producto $M_{1}M_{2} \ldots M_{n}$ de ideales maximales, entonces

A es un anillo noetheriano si y sólo si A es un anillo Artiniano.

DEMOSTRACION

$\{0\} = M_1 M_2 \ldots M_n$, M_i maximal, $i \leq n$.

Para cada $i \leq n$, $\frac{A}{M_i}$ es un campo (por ser M_i un ideal maximal).

Sean $T_1 = M_1$, $T_2 = M_1 M_2$, $T_3 = M_1 M_2 M_3$, ..., $T_n = M_1 M_2, \ldots, M_n$

Para cada $i \leq n-1$, para cada $a \in A$ y para cada $x \in T_{i-1}$ definimos el producto.

$$(a + M_i)(x + T_i) = ax + T_i$$

y probemos que está bien definido; para ello, sean $a \in A$, $b \in A$, $x \in T_{i-1}$, $y \in T_{i-1}$ tales que $a + M_i = b + M_i$, $x + T_i = y + T_i$; debe probarse que $ax + T_i = by + T_i$;

$$a + M_i = b + M_i \Rightarrow a = b + c,\ c \in M_i$$

$$x + T_i = y + T_i \Rightarrow x = y + z,\ z \in T_i$$

$$\text{Luego } ax = by + bz + cy + cz;$$

$bz \in T_i$ porque $z \in T_i$; $cz \in T_i$ porque $z \in T_i$; $cy \in T_i$ porque $c \in M_i$ y $y \in T_{i-1}$.

$$\text{Así, } ax - by = bz + cy + cz \Rightarrow ax - by \in T_i \Rightarrow ax + T_i = by + T_i$$

De esta forma se ha definido un producto αm, $\alpha \in \frac{A}{M_i}$,

$m \in \frac{T_{i-1}}{T_i}$; con este producto, el grupo abeliano $\frac{T_{i-1}}{T_i}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\frac{A}{M_i}$; por la forma en que ãm se ha definido, todo submódulo de $\frac{T_{i-1}}{T_i}$ como A-módulo es un submódulo de $\frac{T_{i-1}}{T_i}$ como $\frac{A}{M_i}$ - módulo y viceversa.

En particular, $\frac{T_{i-1}}{T_i}$ es un A-módulo noetheriano, si y sólo si es un $\frac{A}{M_i}$ - módulo noetheriano y $\frac{T_{i-1}}{T_i}$ es un A-módulo artiniano si y sólo si es un $\frac{A}{M_i}$ - módulo artiniano.

De igual forma, para cada $a \in A$ y para cada $x \in T_{n-1}$ se define el producto.

$$(a + M_n)x = ax.$$

Está bien definido porque

$$a + M_n = b + M_n \Rightarrow a = b + c, \quad c \in M$$
$$\Rightarrow ax = bx + cx;$$

$cx \in T_n$ ya que $c \in M_n$ y $x \in T_n$, es decir $cx = 0$

$(T_n = M_1 M_2 \ldots M_n = \{0\})$

Asi, T_{n-1} es un $\frac{A}{M_n}$ - espacio vectorial y también será noetheriano como $\frac{A}{M_n}$ - módulo si y sólo si lo es como A-módulo, y será artiniano como $\frac{A}{M_n}$ - módulo si y sólo si lo es como -

A-módulo.

Consideremos las sucesiones exactas.

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow A \longrightarrow \frac{A}{M_1} \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

$$0 \longrightarrow T_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \frac{M_1}{T_2} \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

$$0 \longrightarrow T_3 \longrightarrow T_2 \longrightarrow \frac{T_2}{T_3} \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

$$\vdots$$

$$0 \longrightarrow T_{n-2} \longrightarrow T_{n-3} \longrightarrow \frac{T_{n-3}}{T_{n-2}} \longrightarrow 0 \qquad (n-2)$$

$$0 \longrightarrow T_{n-1} \longrightarrow T_{n-2} \longrightarrow \frac{T_{n-2}}{T_{n-1}} \longrightarrow 0 \qquad (n-1)$$

Supongamos que A es noetheriano y probemos que es artiniano. Si A es noetheriano, M_1 y $\frac{A}{M_1}$ son noetherianos (por (1) y Prop. 4.15); por ser M_1 noetheriano, T_2 y $\frac{M_1}{T_2}$ son noetherianos - (por (2) y Prop. 4.15)

Así sucesivamente, T_i y $\frac{T_{i-1}}{T_i}$ son noetherianos, para todo - $i \leq n-1$; o sea que si A es noetheriano, entonces son tam-- bién noetherianos T_i y $\frac{T_{i-1}}{T_i}$ para todo $i \leq n-1$. Pero $\frac{T_{i-1}}{T_i}$ es también artiniano, por ser espacio vectorial sobre $\frac{A}{M_i}$;

$i \leq n-1$; también T_{n-1} es artiniano por ser $\frac{A}{M_n}$ - espacio -

vectorial. Luego T_{n-2} es artiniano (Prop. 5.8), si T_{n-2} es artiniano, también lo es T_{n-3} (Prop. 5.8); de igual manera son artinianos T_{n-4}, T_{n-5}, ..., T_2, T_1, A; así, se ha demostrado que si A es noetheriano entonces A es artiniano.

Por razonamiento similar, se prueba que si A es artiniano - entonces A es noetheriano.

5.20 PROPOSICION

Sea M un A-módulo. Entonces M tiene una serie de composición si y sólo si M es noetheriano y artiniano.

DEMOSTRACION

1) Supongamos que M tiene una serie de composición de longitud p y sea

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots\ M_n \subset \ldots$$

Una sucesión ascendente de submódulos de M

Si en esta sucesión hubiera p + 1 términos distintos,

$$M_{i1} \subset M_{i2} \subset M_{i3} \subset \ldots \subset M_{ip} \subset M_{ip+1}$$

La sucesión finita

$$\{0\} = M_{i0} \subset M_{i1} \subset M_{i2} \subset \ldots \subset M_{ip},\ M_{ip+1} \subset M_{ip+2} = M$$

formaría una cadena de submódulos de M de longitud estrictamente mayor que p, lo cual no es posible porque las series de composición son las cadenas de longitud mayor -

(Prop. 3,25).

Luego, en esta sucesión hay a lo sumo p + 1 términos distintos; si M_q fuera el mayor de éstos términos distintos, tendríamos

$$M_n = M_q \quad \text{para todo} \quad n \geq q$$

es decir, que la sucesión es estacionaria, luego, M es un módulo noetheriano.

Por un razonamiento similar se prueba que M es un módulo artiniano.

2) Supongamos que M es un A módulo noetheriano y artiniano.

Sea $\Omega_1 = \{T \subset M \;/\; T$ es submódulo de M y $T \neq M\}$; como M es noetheriano, en Ω_1 hay un elemento maximal de Ω_1.

Sea $\Omega_2 = \{T \subset M \;/\; T$ es un submódulo de T_1 y $T \neq T_1\}$; como T_1 es noetherinao (Prop. 4.13), sea T_2 un elemento maximal de Ω_2; así, sucesivamente tendríamos T_3, T_4, T_5..., con T_{i+1} un elemento maximal del conjunto

$\Omega_{i+1} = \{T \subset M \;/\; T$ es submódulo de T_i y $T \neq T_i\}$, y formaremos la sucesión decreciente de submódulos

$$M = T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset \dots \supset T_n \supset \dots$$

Como M es artiniano esta sucesión es estacionaria; sea p el menor subíndice tal que $T_n = T_p$ para todo $n \geq p$. Si $T_p \neq \{0\}$, existiría T_{p+1} el elemento maximal del conjunto

$$\Omega_{p+1} = \{T \subset M \ / \ T \text{ es submódulo de } T_p \text{ y } T \neq T_p\}$$

Luego, $T_p = \{0\}$ y la sucesión finita $(T_i)_{i \leq p}$ es una serie de composición de M.

5.21 PROPOSICION

Si E es un K-espacio vectorial de dimensión finita entonces E es un K-módulo noetheriano y artiniano.

DEMOSTRACION

Sea E un K-espacio vectorial de dimensión finita n. Todo submódulo de E es un subespacio vectorial de dimensión finita $d \leq n$. Sea $\Omega \neq \phi$ un conjunto de submódulos de E; el submódulo de dimensión mayor será un elemento minimal de Ω, y el submódulo de dimensión menor será un elemento minimal. Luego E es noetheriano y artiniano.

5.22 PROPOSICION

Sea E un K-espacio vectorial. Las condiciones que siguen son equivalentes:

1) E es de dimensión finita

2) E es noetheriano

3) E es Artiniano.

DEMOSTRACION

So es de dimensión finita entonces E es noetheriano y artiniano, por prop. 5.21.

" 2 => 1 "

Supongamos que E es noetheriano y probemos que E es de dimensión finita. Si E fuera de dimensión infinita existiría una sucesión infinita $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n, \ldots$ de vectores linealmente independientes; sea para cada $n \geq 1$,

$A_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ y E_n el subespacio generado por A_n. Entonces $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ sería una sucesión creciente de subespacios de E lo cual no puede ser estacionaria por ser estrictamente creciente: $e_{n+1} \in E_{n+1}$ y $e_{n+1} \notin E_n$. Luego, E no puede ser noetheriano.

Por tanto 2) => 1).

" 3) => 1) "

Supongamos ahora que E es artiniano y probemos que E es de dimensión finita. Si E fuera de dimensión infinita existiría una sucesión infinita $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ de vectores linealmente independientes; para cada $n \geq 1$ Sea

$B_n = \{e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots\}$ y F_n el subespacio de E generado por B_n.

Entonces $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n, \ldots$ es una sucesión decreciente de submódulos de E, la cual no puede ser estacionaria por ser estrictamente decreciente;

$$e_n \in B_n \quad \text{y} \quad e_n \notin B_{n+1}$$

Luego, E no puede ser artiniano; por tanto 3) $\Rightarrow$ 1).

5.23 PROPOSICION

Sea A un anillo. Entonces A es un anillo de Artin si y sólo si A es noetheriano y dim A = {0}.

DEMOSTRACION .

1) Supongamos que A es un anillo de Artin.

En A, todo ideal primo es un ideal maximal (Prop. 5.15) y como un ideal maximal no puede estar incluido propia-- mente en otro ideal maximal, toda cadena de ideales primos en A tiene solamente un término; luego dim A = 0.

Sean $M_1 M_2, \ldots, M_n$ los ideales maximales de A (Prop.5.17) Si N = nilradical de A, sea r > 0 tal que $N^r = 0$ (Prop. 5.18), $N = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$, porque en A el nilradical es igual al radical de Jacobson (Prop. 5.16).

Entonces $M_1^r . M_2^r \ldots M_n^r \subset (M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n)^r = N^r = \{0\}$; es decir que el ideal {0} es un producto de ideales maximales. Luego A es un anillo noetheriano (Prop. 5.19).

2) Supongamos que A es un anillo noetheriano y dim A = 0; - por ser A noetheriano, {0} tiene una descomposición primaria (Prop. 4.25); luego A sólo tiene un número finito de ideales primos minimales (Prop. 2.32).

Sean $L_1, L_2, \ldots, L_n$ los ideales primos minimales de A.

Cada L_i es un ideal maximal, proque si M_i es un ideal maximal tal que $L_i \subset M_i$ y $L_i \neq M_i$, se tendrá una cadena de longitud 1, lo cual no es posible por ser dim $A = \{0\}$;

$L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_n = N$ (nilradical de A); sea $r > 0$ tal que $N^r = \{0\}$ (Prop. 4.11).

Luego $L_1^r . L_2^r \ldots L_n^r \subset (L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_n)^r = N^r = \{0\}$ o sea que el ideal $\{0\}$ es igual a un producto de ideales maximales. Por tanto A es un anillo artiniano (Prop. 5.19).

B I B L I O G R A F I A

1. Introducción al Algebra Conmutativa

   Autor: M. F. Atiyah

   I. G. Macdonald

2. Algebra Lineal

   Autor: Serge Lang

3. Estructuras Algebraicas II

   (Algebra Lineal)

   Autor: Enzo R. Gentile