Universidad de El Salvador
Facultad de Ingenieria y Arquitectura
Departamento de Matemática

Topicos en Algebra Lineal: Isometrías y Similitudes

TRABAJO DE GRADUACION PRESENTADO POR:

José Antonio Hernández

PREVIO A LA OPCION DEL TITULO DE:

Licenciado en Matemática.

Abril - 1988

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR: LIC. JOSE LUIS ARGUETA ANTILLON

SECRETARIO GENERAL: ING. RENE MAURICIO MEJIA MENDEZ

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO: ING. ROBERTO BRAN GIRALT

SECRETARIO: ING. MARIO ARNOLDO MOLINA ARGUETA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE DEL DEPARTAMENTO: LIC. ROLANDO LEMUS GOMEZ

TRABAJO DE GRADUACION

COORDINADOR: LIC. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

ASESOR: LIC. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

P R O L O G O

Una de las inquietudes centrales que ha estado presente en la elaboración de este documento, ha sido esencialmente, realizar un estudio fundamental de dos de los más relevantes instrumentos de las transformaciones definidas por una aplicación compleja, las Cónicas y la Geometría Descriptiva; como son las Isometrías en el Plano y el Espacio, y las Similitudes; para lograrlo se ha tenido como fundamento el desarrollo de tres cusos: Algebra II, Algebra III y Geometría Moderna, dictados por el Lic. José Javier Rivera Lazo.

Otra de las inquietudes propuestas es que el presente trabajo se convierta en un texto de consulta de algún curso introductorio de Geometría Moderna.

En el presente trabajo se suponen conocidos los temas relativos al algebra de conjuntos, relaciones y funciones, a las estructuras de grupo y subgrupo, a las sucesiones y series, a los números complejos y otros temas elementales, que se han tomado en cuenta para desarrollar los seis capítulos, los cuales se describen brevemente a continuación:

En el Capítulo I se desarrolla los conceptos, proposiciones y ejercicios necesarios en relación a Espacios Vectoriales, para la construcción básica del capítulo II.

En el Capítulo II se trata la construcción básica de los Espacios Euclidianos, sin pretender que su desarrollo sea completo. Solamente se han desarrollado los conceptos, proposiciones y ejercicios básicos a utilizar en el capítulo IV.

En el Capítulo III se desarrolla los conceptos fundamentales de la Geometría Afín como es la noción de aplicación afín, caracterización de las aplicaciones Afines para la conservación de los baricentros, Baricentro y su utilización, y las Homotecias como un ejemplo de las aplicaciones afines.

Estos elementos, oportunamente son necesarios y útiles en el cuarto, quinto y sexto capítulo.

En el Capítulo IV se procede al estudio de las Isometrías en el plano, empezando por enunciar definiciones, proposiciones generales comunes a las isometrías del plano y del espacio, luego se clasifican las isometrías del plano (simetria axial, rotación, traslación, simetría deslizante) y por último se define la noción de ángulo de semirectas y rectas. Estos elementos son necesarios y de gran utilidad en el desarrollo del quinto capítulo y del sexto capítulo.

En el Capítulo V se desarrolla el estudio de las isometrías en el Espacio, basándose en el capítulo anterior, dejando globalmente invariante una configuración simple: el cubo. Ello permite la manipulación de las isometrías y de otras, como las rotaciones del espacio.

En primera instancia, del capítulo VI, se introducen las similitudes como transformaciones que multiplican las distancias por una constante positiva, luego se definen las similitudes directas las cuales se escriben como la composición de un desplazamiento y de una homotecia, y finalmente se estudia la representación compleja de las similitudes directas.

Este trabajo ha sido fundamentado en los capítulos 20, 21 y 22 de la obra "Mathématiques" collection N. Dimathéme.

Hemos tratado, de manera particular, reescribir en una forma más simple y compleja las demostraciones de las proposiciones y ejemplos que aparecen en los Capítulos 20, 21 y 23 de esta obra, denominados "Isometrías en el Plano", "Isometrías en el Espacio" y "Similitudes", respectivamente, de donde toma su título el presente trabajo: Tópicos en Algebra Lineal, Isometrías y Similitudes.

Finalmente, nos complace la oportunidad de expresar mis agradecimientos al Lic. José Javier Rivera Lazo por su valiosa asesoría en la elaboración de este trabajo y a la señora Miriam de Yánez por la paciencia y gentileza de mecanografiar el presente trabajo.

I N D I C E

Página Nº

Página Nº

CAPITULO III

GEOMETRIA AFIN

CAPITULO IV

ISOMETRIAS EN EL PLANO

Página Nº

CAPITULO V

ISOMETRIAS EN EL ESPACIO

Página Nº

CAPITULO VI

SIMILITUDES

CAPITULO I

ESPACIOS VECTORIALES

1. DEFINICIONES

1. DEFINICION.

Sea un conjunto V dotado de una ley de composición interna anotada por + llamada "adición" y de una ley de composición externa anotada por . llamada "multiplicación por un real" asociada a toda pareja $(\alpha,\vec{v})$ de $\mathbb{R} \times V$ es un elemento de V anotado por $\alpha.\vec{v}$.

Se dice que $(V,+,.)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial si y solamente si se verifica lo siguiente:

i) $(V,+)$ es un grupo conmutativo. Es decir:

1. La suma es una ley de composición interna en V
   $+: V \times V \to V: (\vec{v},\vec{w}) \longrightarrow \vec{v} + \vec{w}$.
   o sea $(\vec{v} \in V \wedge \vec{w} \in V) \Longrightarrow (\vec{v} + \vec{w} \in V)$
2. La suma es acociativa en V.
   $\forall\, \vec{u},\vec{v} \in V$ se cumple $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
3. Existe un vector neutro $\vec{0}$ para la suma en V.
   $\exists \vec{0} \in V$ tal que $\forall\, \vec{u} \in V$ se cumple $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$.
4. Todo elemento $\vec{v}$ de V admite inverso aditivo u opuesto $\vec{w}$ de V
   $\forall\, \vec{v} \in V, \exists \vec{w} \in V$ tal que $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v} = \vec{0}$

   Al opuesto de $\vec{v}$ lo denotaremos con $-\vec{v}$, o sea, $\vec{w}=-\vec{v}$.

5. La suma es conmutativa en V.

$\forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V$ se cumple que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

ii) Cualesquiera que sean los reales α y β, y los elementos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de V, se tiene que:

1. $\alpha\vec{v} \in V$
2. $\alpha.(\beta.\vec{v}) = (\alpha\beta).\vec{v}$.
3. $(\alpha+\beta).\vec{v} = \alpha.\vec{v} + \beta.\vec{v}$.
4. $\alpha.(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$.
5. $1.\vec{v} = \vec{v}$.

2. OBSERVACION

Los elementos de V son llamados vectores. Los elementos de $\mathbb{R}$ son escalares u operadores.

Si en la definición anterior, se reemplaza IR por otro cuerpo conmutativo $K(\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \ldots)$, se define un K-espacio vectorial.

3. PROPOSICION

Sea el conjunto $\mathbb{R}^n$ de las n-uplas de $\mathbb{R}$, dotado de la adición definida:

Para $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ por

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1,\ u_1 + v_1,\ \ldots,\ u_n + v_n)$

y de la multiplicación externa definida:

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ por

$\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n)$. Verificar que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Asociatividad de la suma en $\mathbb{R}^n$

$\forall\ \vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y
$\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u}+(\vec{u}+\vec{w}) &= (u_1,u_2,\ldots,u_n) + [(v_1,v_1,\ldots,v_n) + (w_1,w_2,\ldots,w_n)] \\
&= (u_1,w_2,\ldots,u_n) + (v_1+w_1,v_2+w_2,\ldots,v_n+w_n) \\
&= (u_1+[v_1+w_1],u_2+[v_2+w_2],\ldots,u_n+[u_n+w_n]) \\
&= ([u_1+v_1]+w_1,[u_2+v_2]+w_2,\ldots,[u_n+u_n]+w_n) \\
&= (u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n) + (w_1,w_2,\ldots,w_n) \\
&= [(u_1,u_2,\ldots,u_n) + (v_1,v_2,\ldots,v_n)] + (w_1,w_2,\ldots,w_n) \\
&= (\vec{u} + \vec{v}) + w
\end{aligned}$$

Identidad para la suma en $\mathbb{R}^n$.

$\exists\,\vec{0} = (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\forall\ \vec{u} = (u_1,u_2,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n$
se cumple

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}.$$

$$\begin{aligned}
\vec{u} + \vec{0} &= (u_1,u_2,\ldots,u_n) + (0,0,\ldots,0). \\
&= (u_1+0,u_2+0,\ldots,u_n+0) \\
&= (u_1,u_2,\ldots,u_n) \\
&= \vec{u}
\end{aligned}$$

$$\vec{0} + \vec{u} = (0,0,\ldots,0) + (u_1,u_2,\ldots,u_n)$$
$$= (0 + u_1, 0 + u_2, \ldots, 0 + u_n)$$
$$= (u_1,u_2,\ldots,u_n)$$
$$= \vec{u}.$$

Inversos aditivos en $\mathbb{R}^n$.

$\forall\ \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\exists\, \vec{v} = -\vec{u} = (-u_1,-u_2,\ldots,-u_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1,u_2,\ldots,u_n) + (v_1,v_2,\ldots,v_n) = (0,0,\ldots,0)$

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n) = (0,0,\ldots,0)$

$u_i+v_i = 0,\ \forall\ i = 1,2,\ \ldots,\ n;\ v_i = -u_i,\ \forall_i = 1,2,\ldots,n$

De donde $(v_1,v_2,\ldots,v_n) = (-u_1,-u_2,\ldots,-u_n)$.

Conmutatividad de la adición en $\mathbb{R}^n$.

$\forall\ \vec{u} = (u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $\vec{v} = (v_1,v_2,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1,u_2,\ldots,u_n) + (v_1,v_2,\ldots,v_n)$$
$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$
$$= (v_1 + u_1,\ v_2 + u_2, \ldots,\ v_n + u_n).$$
$$= (v_1,v_2,\ldots,v_n) + (u_1,u_2,\ldots,u_n).$$
$$= \vec{v} + \vec{u}.$$

$\therefore$ $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo abeliano.

Ahora verificaremos:

. Para todo $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} = (u_1,u_2,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$\alpha(\beta\ \vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}.$

$\alpha(\beta.\vec{u}) = \alpha[\beta(u_1,u_2,\ldots,u_n)]$

$= \alpha(\beta u_1\ \beta u_2,\ldots,\beta u_n)$

$= (\alpha[\beta u_1],\alpha[\beta u_2],\ldots,\alpha[\beta u_n])$

$= ([\alpha\beta]u_1,[\alpha\beta]u_2,\ldots,[\alpha\beta]u_n).$

$= (\alpha\beta)(u_1,u_2,\ldots,u_n).$

$= (\alpha\beta)\vec{u}.$

. Para todo $\beta \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} = (u_1,u_2,\ldots,u_n)$,
$\vec{v} = (v_1,v_2,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n$ se cumple:
$\alpha[\vec{u} + \vec{u}] = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}.$

$\alpha[\vec{u}+\vec{v}] = \alpha[(u_1,u_2,\ldots,u_n) + (v_1,v_2,\ldots,v_n)]$

$= \alpha(u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ldots,\ u_n + v_n)$

$= (\alpha(u_1 + v_1),\ \alpha(u_2 + v_2),\ldots,\ \alpha(u_n + v_n))$

$= (\alpha u_1 + \alpha v_1,\ \alpha u_2 + \alpha v_2,\ \ldots,\ \alpha u_n + \alpha v_n)$

$= (\alpha u_1,\alpha u_2,\ldots,\alpha u_n) + (\alpha v_1,\alpha v_2,\ldots,\alpha v_n)$

$= \alpha(u_1,u_2,\ldots,u_n) + \alpha(v_1,v_2,\ldots,v_n)$

$= \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}.$

. Para $1 \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} = (u_1,u_2,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}$ se cumple
$1.\vec{u} = \vec{u}.$

$1.\vec{u} = 1.(u_1,u_2,\ldots,u_n)$

$= (1u_1,1u_2,\ldots,1u_n)$

$= (u_1,u_2,\ldots,u_n)$

$= \vec{u}.$

Todo lo anterior nos permite decir que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espa cio vectorial.

4. Nota.

En particular $\mathbb{R}$, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ son espacios vectoriales

5. PROPOSICION

Sea el conjunto $\mathcal{F}(B,\mathbb{R})$ de las funciones numéricas definidas sobre un conjunto B. Entonces $(\mathcal{F}(B,\mathbb{R}),+,.)$ es un espacio vectorial.

DEMOSTRACION

En $\mathcal{F}(B,\mathbb{R})$ definamos la suma de funciones numéricas y el producto de escalares por funciones mediante:

i) Si f y $g \in \mathcal{F}(B,\mathbb{R})$ entonces $f+g: B \to \mathbb{R}$ es tal que

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in B.$$

ii) Si $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{F}(B,\mathbb{R})$, entonces $\alpha f: B \to \mathbb{R}$ es tal que:

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \ \forall x \in B.$$

. Verifiquemos la composición interna de $(\mathcal{F}(B,\mathbb{R}),+)$

$(\forall f,g \in \mathcal{F}(B,\mathbb{R})) \Rightarrow (f + g \in \mathcal{F}(B,\mathbb{R})$, por (i))

. Verifiquemos la asociatividad de $(\mathcal{F}(B,\mathbb{R}),+)$

$\forall f,g,h \in \mathcal{F}(B,\mathbb{R})$ se cumple que $f + (g+h) = (f+g)+h$

$$
\begin{aligned}
[f + (g+h)](x) &= f(x) + (g+h)(x), \text{ por i)} \\
&= f(x) + (g(x) + h(x)), \text{ por i)} \\
&= (f(x) + g(x)) + h(x), \text{ por asoc. de } (R,+) \\
&= [f + g](x) + h(x)., \text{ por i)} \\
&= [(f + g) + h](x). \text{ , por i)}
\end{aligned}
$$

Verificar que el vector nulo es la función nula.

$e: B \to \mathbb{R}$ definida por $e(x) = 0$, $\forall x \in B$.

Sea $f \in \mathcal{F}(B, \mathbb{R})$

$$
\begin{aligned}
(f + e)(x) &= f(x) + e(x), \text{ por i)} \\
&= f(x) + 0 \\
&= f(x) \qquad , \text{ por } (\mathbb{R},+)
\end{aligned}
$$

luego

$$f + e = f$$

Además

$$
\begin{aligned}
(e+f)(x) &= e(x) + f(x), \text{ por i)} \\
&= 0 + f(x) \\
&= f(x) \qquad , \text{ por } (\mathbb{R},+)
\end{aligned}
$$

Luego

$$e + f = f$$

. Verificar que el inverso aditivo de $f \in \mathcal{F}(B, \mathbb{R})$ es la función $-f: B \to \mathbb{R}$ definida por $(-f)(x) = -f(x)$ $\forall x \in B$.

$$(-f+f)(x) = (-f)(x) + f(x), \text{ por i)}$$
$$= -f(x) + f(x)$$
$$= 0 \qquad\qquad , \text{ por } (\mathbb{R},+)$$
$$= e(x)$$

o sea que

$$(-f) + f = e$$

Además

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x), \text{ por i)}$$
$$= f(x) + (-f(x))$$
$$= 0, \text{ por } (\mathbb{R},+)$$
$$= e(x)$$

o sea que

$$f + (-f) = e.$$

. Verificar que la suma es conmutativa.

$\forall\ f,g \in V(B,\mathbb{R})$ se cumple $f + g = g + f$.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, por i)

$= g(x) + g(x)$, por conmutatividad de $(\mathbb{R},+)$.

$= (g + f)(x)$, por i)

Luego:

$$f+g = g+f,\ \forall\ f,g \in F(B,\mathbb{R})$$

. Verificar que: $\forall\ \alpha \in \mathbb{R} \wedge f \in F(B,\mathbb{R})$ se cumple $\alpha f \in F(B,\mathbb{R})$

$(\alpha \in \mathbb{R} \wedge f \in F(B,\mathbb{R})) \Rightarrow (\alpha f \in F(B,\mathbb{R}))$ se verifica por ii)).

. Verificar que:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f \in F(B,\mathbb{R})$. Se cumple $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f$.

$[\alpha(\beta f)](x) = \alpha[(\beta f)(x)]$, por ii)

$= (\alpha\beta) f(x)$, por ii)

$= [(\alpha\beta) f](x)$, por ii)

Luego $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f$.

. Verificar que:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{F}(B, \mathbb{R})$ se cumple que

$(\alpha+\beta) f = \alpha f + \beta f$.

$[(\alpha+\beta) f](x) = (\alpha+\beta) f(x)$, por ii)

$= \alpha f(x) + \beta f(x)$, por distributividad en $\mathbb{R}$

$= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x)$, por ii)

$= (\alpha f + \beta f)(x)$, por ii)

Entonces

$$(\alpha+\beta) f = \alpha f + \beta f.$$

. Verificar que:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{F}(B, \mathbb{R})$. Se cumple $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$.

$[\alpha(f+g)](x) = \alpha(f+g(x)$, por ii)

$= \alpha(f(x) + g(x))$, por i)

$= \alpha f(x) + \alpha g(x)$, por distributividad en $\mathbb{R}$

$= (\alpha f + \alpha g)(x)$, por i)

Entonces

$$\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g.$$

. Verificar que:

$\forall f \in \mathcal{F}(B, \mathbb{R})$ se cumple $1f = f$.

$(1f)(x) = 1\, f(x)$, por ii)

$= f(x)$, por producto en $\mathbb{R}$

Luego $1\, f = f$.

$\therefore$ $(\mathcal{F}(B,\mathbb{R}),+,.)$ es un espacio vectorial de las funciones numéricas definidas en el conjunto no vacío B y con valores en $\mathbb{R}$, con las leyes de composición y punto a punto. Los vectores de este espacio son funciones.

En particular si $B = \mathbb{N}$, el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ es el conjunto de sucesiones numéricas definidas sobre $\mathbb{N}$. Se puede probar que:

$(\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}),+,.)$ es un espacio vectorial.

6. PROPOSICIONES

Existen ciertas proposiciones de uso constante y ligadas a la multiplicación externa, así como:

1. $0 \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in V$, se cumple: $0\vec{u} = \vec{0}$

   $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in V$, se tiene:

   $(\alpha+0)\vec{u} = \alpha\vec{u}$

   $\alpha\vec{u}+0\vec{u} = \alpha\vec{u}$, y como el opuesto de $\alpha\vec{u}$ es $-(\alpha\vec{u})$

   se tiene:

$$-(\alpha\vec{u}) + \alpha\vec{u} + 0\vec{u} = -(\alpha\vec{u}) + \alpha\vec{u}$$

$$0\vec{u} = \vec{0}.$$

2. $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in V$, se cumple $\alpha\vec{0} = \vec{0}$

$$\alpha(\vec{u}+\vec{0}) = \alpha\vec{u}$$

$$\alpha\vec{u} + \alpha\vec{0} = \alpha\vec{u}$$

$-(\alpha\vec{u}) + \alpha\vec{u} + \alpha\vec{0} = -(\alpha\vec{u}) + \alpha\vec{u}$, $-(\alpha\vec{u})$ opuesto de $\alpha\vec{u}$.

$$\alpha\vec{0} = \vec{0}.$$

3. $(\alpha\vec{u} = \vec{0}) \Rightarrow (\alpha = 0$ ó $\vec{u} = \vec{0})$.

Si $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, dos casos se presentan:

Cuando $\alpha = 0$ y la igualdad $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ se verifica para cualquiera que sea $\vec{u} \in V$

Cuando $\alpha \neq 0$, siendo α^{-1} el inverso multiplicativo de α, se tiene que:

$$\alpha^{-1}(\alpha\vec{u}) = \vec{0}$$

$$1\vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{u} = \vec{0}$$

4. $\forall u \in V \wedge \forall\alpha \in IR$,

$(-\alpha)\vec{u} = \alpha(-\vec{u}) = -(\alpha\vec{u})$

$$\begin{aligned} \alpha\vec{u} + (-\alpha)\vec{u} &= [\alpha + (-\alpha)]\vec{u} \\ &= 0\vec{u} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Luego $(-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u})$, que es el opuesto de $\alpha\vec{u}$, (i).

$$\begin{aligned} \alpha\vec{u} + \alpha(-\vec{u}) &= \alpha[\vec{u} + (-\vec{u})] \\ &= \alpha\vec{0} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Entonces $\alpha(-\vec{u}) = -(\alpha\vec{u})$, (ii).

De (i) e (ii), tenemos: $(-\alpha)\vec{u} = \alpha(-\vec{u}) = -(\alpha\vec{u})$

(También $-(\alpha\vec{u}) = -\alpha\vec{u}$).

5. $(\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \alpha = \beta) \Rightarrow (\alpha\vec{u} = \beta\vec{u})$

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \alpha = \beta) &\Rightarrow (\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \alpha-\beta = 0) \\
&\Rightarrow (\alpha-\beta)\vec{u} = \vec{0}, \text{ por I.1.6.1} \\
&\quad [\alpha + (-\beta)]\vec{u} = \vec{0} \\
&\quad \alpha\vec{u} + (-\beta)\vec{u} = \vec{0} \\
&\quad \alpha\vec{u} - \beta\vec{u} = \vec{0} \\
&\quad \alpha\vec{u} = \beta\vec{u}
\end{aligned}$$

6. $(\alpha \neq 0 \wedge \vec{u} = \vec{v}) \Rightarrow (\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v})$

$$\begin{aligned}
(\alpha \neq 0 \wedge \vec{u} = \vec{v}) &\Rightarrow (\alpha \neq 0 \wedge \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}) \\
&\Rightarrow \alpha[\vec{u} - \vec{v}] = \vec{0}, \text{ por I.1.6.2} \\
&\quad \alpha[\vec{u} + (-\vec{v})] = \vec{0} \\
&\quad \alpha\vec{u} + \alpha(-\vec{v}) = \vec{0} \\
&\quad \alpha\vec{u} - \alpha\vec{v} = \vec{0} \\
&\quad \alpha\vec{u} = \alpha\vec{v}
\end{aligned}$$

2. PARTES ESTABLES

1. DEFINICION

Sea $\mathbb{W}$ un parte de un espacio vectoria $\mathbb{V}$.

1. Se dice que $\mathbb{W}$ es estable por la adición en $\mathbb{V}$ si y sólo si:

   $(\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \mathbb{W}^2)\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{W}$.

2. Se dice que W es estable por la multiplicación externa de V si y sólo si:

$(\forall\alpha \in \mathbb{R})(\forall \vec{v} \in W)\alpha\vec{v} \in W$.

3. Se dice que W es estable por combinaciones lineales si y sólo si:

$(\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2)(\forall(\vec{u},\vec{v}) \in W^2)\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in W$.

3. SUB-ESPACIOS VECTORIALES

1. DEFINICION

Se dice que una parte W de un espacio vectorial V es un subespacio vectorial de V si y sólo si W es un espacio vectorial para las dos operaciones V.

2. PROPOSICION

Una parte de un espacio vectorial V es un sub-espacio vectorial de V si y sólo si la parte es no vacía y estable por combinaciones lineales.

($\Longrightarrow$)

Sea W un sub-espacio vectorial de V.

Como W es estable (por definición I.2.1 para la multiplicación externa de V, se tiene que

$(\forall\alpha \in \mathbb{R})(\forall\vec{u} \in W)\alpha\vec{u} \in W$ y

$(\forall\beta \in \mathbb{R})(\forall\vec{v} \in W)\beta\vec{v} \in W$, de aquí tenemos que por la definición I.2.1

$(\forall(\alpha\vec{u},\beta\vec{u}) \in W^2)\alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \in W$.

$\therefore$ W es no vacío y estable por combinaciones lineales

(<=)

Puesto que $W = \phi$, W contiene al menos un elemento $\vec{v}$ y puesto que W es estable para la multiplicación externa, se tiene que: $0\vec{v} = \vec{0} \in W$.

Para todo $\vec{v} \in W$, se tiene que:

$$(-1)\vec{v} = -\vec{v} \in W.$$

Entonces $(W,+,.)$ es un espacio vectorial.

3. EJEMPLO

El conjunto B de los elementos de $\mathbb{R}^2$ de la forma $(3x,x)$ es un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ por que:

El conjunto B es una parte de $\mathbb{R}^2$, no vacío, ya que $(0,0)$, $(3,1) \in B$.

Como B es estable para la multiplicación externa de $\mathbb{R}^2$, tenemos que:

$(\forall\alpha \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} = (3u,u) \in B)$, $\alpha(3u,u) = (3\alpha u,\alpha u) \in B$

Como B es estable para la adición en $\mathbb{R}^2$, tenemos que:

$(\forall(\alpha\vec{u},\beta\vec{v}) \in B)$, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (3\alpha u,\alpha u) + (3\beta v,\beta v)$

$= (3\alpha u + 3\beta v,\ \alpha u + \beta v) \in B.$

Entonces B es estable por combinaciones lineales.

4. INTERSECCION DE SUB-ESPACIOS VECTORIALES

1. PROPOSICION

La intersección de una familia de sub-espacios vectoriales de un espacio vectorial V es un sub-espacio vectorial de V.

Si $(V,+,.)$ es un $\mathbb{R}$-espacio, $(T_i)i \in I$ es una familia de sub-espacios de V, demostraremos que

$T = \bigcap_{i \in I} T_i$ es un sub-espacio de V.

T es una parte de V, no vacío por que:

$\vec{0} \in T_i,\ \forall i \in I \Rightarrow \vec{0} \in \bigcap_{i \in I} T_i$

$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} T_i \neq \phi$

$\Rightarrow T \neq \phi$

T es estable por la multiplicación externa y la adición, definición I.2.1. En efecto:

$(\forall \vec{u} \wedge \vec{v} \in T, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow (\forall \vec{u}, \vec{v} \in T_i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha\vec{u} \in T_i \wedge \beta\vec{v} \in T_i,\ \forall i \in I$

$\Rightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in T_i,\ \forall i \in I$

$\Rightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in T.$

$\therefore$ T es estable por combinaciones lineales.

5. COMBINACIONES LINEALES. FAMILIAS GENERATRICES.

1. DEFINICION

Sea una familia $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n)$ de vectores de un espacio vectorial V. Se dice que un vector $\vec{v}$ de V es una combinación lineal de vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ si y sólo si existe una familia $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ de números reales tales que:
$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n.$

2. PROPOSICION

Sea una familia $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n)$ de vectores de un espacio vectorial V. El conjunto de combinaciones lineales de los vectores de la familia es un sub-espacio vectorial de V.

Sea $A = (\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n) \subset V$, entonces el conjunto de combinaciones lineales de los vectores de la familia es:

$$\mathcal{A} = \{\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{v}_i / \alpha_i \in \mathbb{R} \wedge \vec{v}_i \in A\}$$

Probaremos que $(\mathcal{A},+,.)$ es un sub-espacio vectorial de V

Sea $\vec{u}_1 = 1\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \ldots + 0\vec{u}_n$, se tiene que $\vec{u}_1 \in \mathcal{A}$, es decir $\mathcal{A} \neq \phi$.

Sea $\mathcal{A}$ un sub-espacio vectorial de V.

$\mathbb{A}$ es estable para la multiplicación externa y la adición, por definición I.2.1. Efectivamente

$(\forall u \wedge v \in \mathbb{A}, \beta \wedge \lambda \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \beta\vec{u} = \beta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i \wedge \lambda\vec{v} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \delta_i \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow \beta\vec{u} + \lambda\vec{v} = \beta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} \delta_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (\beta\alpha_i)\vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} (\lambda\delta_i)\vec{v}_i$$

$$\beta\vec{u} + \lambda\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} (\beta\alpha_i + \lambda\delta_i)\vec{v}_i$$

$\Rightarrow \beta u + \lambda v \in \mathbb{A} \therefore$ $\mathbb{A}$ es estable por combinaciones lineales.

. Notaremos por $V'(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ el subespacio vectorial engendrado por $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$.

3. DEFINICION

Se dice que el conjunto de combinaciones lineales de vectores de la familia como sub-espacio vectorial es engendrado por la familia o que la familia es una familia generatriz de este subespacio vectorial.

4. EJEMPLO

El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\vec{v}_1 = (1,0,1)$ y $\vec{v}_2 = (1,1,0) \in \mathbb{R}^3$ es

$\mathbb{A} = \{\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(1,1,0) / \lambda_2, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ ó

$\mathbb{A} = \{(\lambda_1, 0, \lambda_1) + (\lambda_2, \lambda_2, 0) / \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ ó

$\mathbb{A} = \{(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2, \lambda_1) / \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

$\therefore \quad A = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = x_1 + x_2\}$

5. EJEMPLO

El conjunto de las combinaciones lineales de los vectores $\vec{v}_1 = (1,0,0)$, $\vec{v}_2 = (0,1,0)$ y $\vec{v}_3 = (0,0.1) \in \mathbb{R}^3$ es

$A = \{\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1) / \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}\}$ ó

$A = \{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) / \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$

Entonces $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es una familia generatriz de $\mathbb{R}^3$

6. INDEPENDENCIA LINEAL

1. DEFINICION

La familia de vectores $\Lambda = (\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n) \subset V$ es libre (Linealmente independiente) si y sólo si la única combinación lineal de dicha familia, cuyo resultado sea el vector nulo, es la trivial.

Simbólicamente

$[A \text{ es libre}] \iff \forall i: \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0} \implies \alpha_i = 0.$

2. PROPOSICION

Si un vector es combinación lineal de una familia libre, entonces dicha combinación es única.

Demostración.

Sea $\vec{u} \in V$ combinación lineal de la familia $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ y libre. Entonces existen escalares α_i tales que

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$$

Suponemos que existen escalares β_i tales que

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{u}_i$$

Entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{u}_i$

es decir $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{u}_i = \vec{0}$

entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \vec{u}_i = \vec{0}$

y como la familia es libre, se deduce que

$\alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall_i = 1, 2, \ldots, n$

$\therefore$ La combinación lineal es única.

7. DEPENDENCIA LINEAL

1. DEFINICION

La familia de vectores $A \subset V$ es ligada (Linealmente dependiente) si no es linealmente independiente.

La familia de vectores $A \subset V$ es ligada (linealmente dependiente) si y sólo si existe una combinación lineal no trivial de dicha familia cuyo resultado sea el vector nulo.

Simbólicamente

$$[A \text{ es ligada}] \iff \left[\exists i \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0} \wedge \alpha_i \neq 0\right].$$

2. PROPOSICION

Toda familia en la que uno de los vectores es nulo, entonces la familia es ligada.

Sea una familia $u = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$

Si uno de los vectores es nulo: $\vec{u}_j = \vec{0}$.

Se verifica $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$, con

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{j-1} = \alpha_{j+1} = \ldots = \alpha_n$ y $\alpha_j \neq 0$

3. PROPOSICION

Si se le agrega un vector a una familia ligada, entonces se obtiene una familia ligada.

Sea una familia ligada $U = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$

Se tiene que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$ con α_i no todos nulos.

Esta combinación lineal se puede escribir, considerando un vector cualquiera $\vec{u}_{n+1}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i + 0\vec{u}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

que es una combinación lineal no trivial puesto que α_i no son todos nulos.

4. PROPOSICION

Si se sustrae un vector de una familia libre, entonces se obtiene una familia libre.

Sea una familia libre $U = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, u_n)$

Si le restamos un vector de la familia, la familia que se obtiene es libre por que si ella es ligada, y se le agrega ese vector se obtiene $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ que sería ligada de acuerdo a la proposición I.7.3. Lo que es contrario a la hipótesis.

8. BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL. COORDENADAS DE UN VECTOR.

1. DEFINICION

Una familia $U = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{V}$ si y solamente si U es a la vez generatriz de $\mathbb{V}$ y libre.

2. PROPOSICION

Una familia $U = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ es una base de $\mathbb{V}$ si y solamente si todo vector $\vec{u}$ de $\mathbb{V}$ admite una descomposición.

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i$$

y esta descomposición es única. Fácil de demostrar.

3. DEFINICION

Los reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las coordenadas o componentes del vector $\vec{u}$ en la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$.

Se disponen las coordenadas de $\vec{u}$ en la forma de una tabla

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$ llamada matriz columna asociada de $\vec{u}$.

9. BASE CANONICA DE $\mathbb{R}^n$

1. PROPOSICION

Los vectores $\vec{e}_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ $(1 \leq i \leq n)$, en las que todos los elementos son nulos menos el i-ésimo elemento que es igual a 1, entonces los vectores $\vec{e}_i (1 \leq i \leq n)$ forman una base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n)$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACION

Sea la familia $e = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$ donde, para $1 \leq i \leq n$, $\vec{e}_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots 0)$ en esta n-upla todos los elementos son nulos menos el i-ésimo elemento que es igual a 1.

La familia e es generatriz de $\mathbb{R}^n$ por que todos los elementos $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ se escribe:

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1(1,0,0,\ldots,0) + x_2(0,1,0,\ldots,0) + \ldots + x_n(0,0,0,\ldots,1).\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i .\end{aligned}$$

La familia e es libre porque toda relación $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{e}_i = \vec{0}$ se escribe $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) = (0,0,\ldots,0)$.

de donde

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

2. DEFINICION

La base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ es llamada base canónica o base natural de $\mathbb{R}^n$

10. DIMENSION DE UN ESPACIO VECTORIAL

1. DEFINICION

Dimensión de un espacio vectorial V es el número cardinal de cualquiera de sus bases.

Si V consiste únicamente en el vector nulo, diremos que su dimensión es cero.

En ambos casos, V es un espacio de dimensión finita.

11. APLICACIONES LINEALES

1. DEFINICION

Sea V y W espacios vectoriales. Se llama aplicación lineal de V sobre W toda aplicacion ψ de V en W que posee las dos propiedades de linealidad:

1. $(\forall(\vec{u},\vec{v}) \in V^2): \psi(\vec{u}+\vec{v}) = \psi(\vec{u}) + \psi(\vec{v})$
2. $(\forall\alpha \in \mathbb{R})(\forall\vec{u} \in V): \psi(\alpha\vec{u}) = \alpha\psi(\vec{u})$

Las condiciones 1. y 2. se pueden reducir a la única

$$(\forall(\alpha,\beta)\in \mathbb{R}^2)(\forall(\vec{u},\vec{v})\in V^2)\ \psi(\alpha\vec{u}+\psi\vec{v}) = \alpha\psi(\vec{u}) + \beta\psi(\vec{v})$$

2. EJEMPLO

La aplicación ψ: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y,z) \longrightarrow 3x + 4y + 2z$

es lineal porque cualesquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y (x,y,z), $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\psi[(x,y,z) + (u,v,w)] &= \psi(x+u,y+v,z+w) \\
&= 3(x+u)+4(y+v)+2(z+w) \\
&= (3x+4y+2z) + (3u+4v+2w) \\
&= \psi[(x,y,z)] + \psi[(u,v,w)] \\
\alpha\psi[(x,y,z)] &= \alpha(3x + 4y + 2z) \\
&= 3(\alpha x) + 4(\alpha y) + 2(\alpha z) \\
&= \psi(\alpha x,\alpha y,\alpha z) \\
&= \psi[\alpha(x,y,z)]
\end{aligned}$$

3. OBSERVACION

Este tipo de aplicación lineal es una forma lineal. Más generalmente se llama forma lineal toda aplicación lineal de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V en el espacio vectorial $\mathbb{R}$.

4. PROPOSICION

Sea ψ una aplicación lineal del espacio vectorial V en el espacio vectorial W.

1. Sean $\vec{0}$ y $\vec{0}'$ los vectores nulos respectivamente de V y W, entonces $\psi(\vec{0}) = \vec{0}'$.

Sea $\vec{u} \in V$,

$$\psi(\vec{u}) = \psi(\vec{u}+\vec{0})$$

$$\psi(\vec{u}) = \psi(\vec{u}) + \psi(\vec{0})$$

Simplificando para $\psi(\vec{u})$ obtenemos $\vec{0}' = \psi(\vec{0})$.

2. Para todo $\vec{u} \in V$, $\psi(-\vec{u}) = -\psi(\vec{u})$

Sea $\vec{u} \in V$

$$\psi(\vec{u}) + \psi(-\vec{u}) = \psi(\vec{u} + (-\vec{u}))$$

$$= \psi(\vec{0}) = \vec{0}'$$

entonces $\psi(-\vec{u}) = -\psi(\vec{u})$.

3. Para todo $\vec{u}$ y $\vec{v} \in V$, $\psi(\vec{u}-\vec{v}) = \psi(\vec{u}) - \psi(\vec{v})$

$$\psi(\vec{u}-\vec{v}) = \psi(\vec{u}+(-\vec{v}))$$

$$= \psi(\vec{u}) + \psi(-\vec{v})$$

$$= \psi(\vec{u}) + (-\psi(\vec{v}))$$

$$= \psi(\vec{u}) - \psi(\vec{v})$$

4. Si ψ: $V \longrightarrow W$ es una combinación lineal, entonces

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi(\vec{u}_i). \qquad (1)$$

i) Si n=1 se cumple: $\psi(\alpha_1 \vec{u}_1) = \alpha_1 \psi(\vec{u}_1)$

ii) Supongamos que si n=k, entonces

$$\psi\left(\sum_{u=1}^{k} \alpha_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \psi(\vec{u}_i)$$

iii) Verificar que (1) se cumple para n=k+1, es decir que:

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \psi(\vec{u}_i)$$

en efecto:

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \vec{u}_i\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{u}_i + \alpha_{k+1} \vec{u}_{k+1}\right)$$

$$= \psi\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{u}_i\right) + \psi(\alpha_{k+1} \vec{u}_{k+1}), \text{ por definición I.11.1.}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \psi(\vec{u}_i) + \alpha_{k+1} \psi(\vec{u}_{k+1}), \text{ por ii) y definición I.11.1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \psi(\vec{u}_i)$$

12. VECTORES LIBRES Y RELACION DE CHASLES

1. DEFINICION

Para toda pareja (A,B) de puntos de P, se llama vector libre asociado a una pareja (A,B) la aplicación lineal de P que transforma A en B; y que se anota en forma general por el símbolo:

$$\overrightarrow{AB}$$

2. DEFINICION DE RELACION DE CHASLES

Para todo A,B,C εP, se tiene que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

En general:

Para todo $A_1, A_2, \ldots, A_n \in P$

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-1}A} = \overrightarrow{A_1A_n}$$

C A P I T U L O   I I

ESPACIOS EUCLIDIANOS

1. PRODUCTO ESCALAR. (PRODUCTO INTERNO).

1. DEFINICION

Denominaremos producto escalar en un espacio vectorial V a una función $\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & IR \\ \vec{u},\vec{v} & \longrightarrow & \vec{u}.\vec{v} \end{array}$ que satisfaga a las condiciones:

$\forall\ \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V,\ \forall \beta \in IR$:

1. $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
2. $\vec{u}.(\beta\vec{v}) = \beta(\vec{u}.\vec{v})$
3. $\vec{u}.\vec{u} \geq 0$
4. $\vec{u}.\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$
5. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Dotado de un producto escalar, como tal todo espacio vectorial es un espacio euclidiano.

2. EJEMPLO

La función definida por

$\vec{u}.\vec{v} = (u_1,u_2,\ldots,u_n).(v_1,v_2,\ldots,v_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ es un producto interno en IR^n

Por II.1.1.1

Sea $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$,

$\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = (u_1,u_2,\ldots,u_n).[(v_1,v_2,\ldots,v_n).(w_1,w_2,\ldots,w_n)]$$

$$= (u_1,u_2,\ldots,u\ ).(v_1,v_2,\ldots,v_n) + (u_1,u_1,\ldots,u_n).(w_1,w_2,\ldots,w_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + \sum_{i=1}^{n} u_i w_i \quad \text{por definición}$$

$$= \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

Por II.1.1.2

Sea $\vec{u} = (u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $\vec{v} = (v_1,v_2,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

$$\vec{u}.(\beta\vec{v}) = (u_1,u_2,\ldots,u_n).[\beta(v_1,v_2,\ldots,v_n)]$$

$$= (u_1,u_2,\ldots,u_n).(\beta v_1,\beta v_2,\ldots,\beta v_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i(\beta v_i)$$

$$= \beta \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Por II.1.1.3

Sea $\vec{u} = (u_1,u_2,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u}.\vec{u} = (u_1,u_2,\ldots,u_n).(u_1,u_2,\ldots,u_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i u_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i^2$$

como $u_1^2 \geq 0$, $u_2^2 \geq 0, \ldots, u_n^2 \geq 0$, tenemos

$$\vec{u}.\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \geq 0$$

Por II.1.1.4

$(\Rightarrow)$ $\vec{u}.\vec{u} = 0$ $\quad \Rightarrow \vec{u}.\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} (0)(0)$

$$\Rightarrow \vec{u}.\vec{u} = (0,0,\ldots,0).(0,0,\ldots,0)$$

$$\Rightarrow \vec{u} = (0,0,\ldots,0) = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$$

$(\Leftarrow)$ $\vec{u} = \vec{0} = (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{u}.\vec{u} = (0,0,\ldots,0).$

$$(0,0,\ldots,0)$$

$$\Rightarrow \vec{u}.\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} (0)(0)$$

$$\Rightarrow \vec{u}.\vec{u} = 0 \in \mathbb{R}$$

Por II.1.1.5

Sea $\vec{u} = (u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $\vec{v} = (v_1,v_2,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u}.\vec{v} = (u_1,u_2,\ldots,u_n).(v_1,v_2,\ldots,v_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i u_i$$

$$= (v_1,v_2,\ldots,v_n).(u_1,u_2,\ldots,u_n)$$

$$= \vec{v}.\vec{u}$$

3. DEFINICION

El producto escalar $\vec{u}.\vec{v} = (u_1, u_2, .., u_n).(v_1, v_2, .., v_n) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \text{ en } \mathbb{R}^n$$

se llamará el producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$.

4. PROPOSICION

En todo espacio euclidiano el producto escalar, de cualquier vector y el vector nulo es cero.

Demostración

$0 \in \mathbb{R},\ \vec{0}, \vec{u} \in V$

$$\begin{aligned} 0 + (\vec{0}.\vec{u}) &= \vec{0}.\vec{u} \\ &= (\vec{0} + \vec{0}).\vec{u} \\ &= (\vec{0}.\vec{u}) + (\vec{0}.\vec{u}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad 0 = (\vec{0}.\vec{u})$ por ley cancelativa en $\mathbb{R}$

Luego: $\vec{u}.\vec{0} = \vec{0}.\vec{u} = 0$

5. DEFINICION

Se denomina espacio vectorial con producto interno al par formado por un espacio vectorial V junto con un producto interno fijo . en V.

Si V es un espacio vectorial con producto interno se define la función $q: V \longrightarrow \mathbb{R}$ por $q(\vec{u}) = \vec{u}.\vec{u}$, llamada la forma cuadrática asociada al producto interno . en V.

6. PROPOSICION

Sea q la forma cuadrática asociada al producto interno.

$\forall\ \vec{u},\vec{v} \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, tenemos:

1. $q(\vec{u}) \geq 0$, como $\vec{u}.\vec{u} \geq 0$ por II.1.1.3

2. $q(\vec{u}) = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$, como $\vec{u}.\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = 0$ Por II.1.1.4

3. $q(\lambda\vec{u}) = \lambda^2 q(\vec{u})$

$$q(\lambda\vec{u}) = (\lambda\vec{u}).(\lambda\vec{u})$$
$$= \lambda[(\lambda\vec{u}).\vec{u}]$$
$$= \lambda^2(\vec{u}.\vec{u})$$
$$= \lambda^2 q(\vec{u}).$$

4. $q(\vec{u}+\vec{v}) = q(\vec{u}) + 2\vec{u}.\vec{v} + q(\vec{v})$

$$q(\vec{u}+\vec{v}) = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$$
$$q(\vec{u}+\vec{v}) = (\vec{u}+\vec{v}).\vec{u} + (\vec{u}+\vec{v}).\vec{v}$$
$$= \vec{u}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{v}.$$
$$= \vec{u}.\vec{u} + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{v}$$
$$= q(\vec{u}) + 2\vec{u}.\vec{v} + q(\vec{v})$$

5. $(\vec{u}.\vec{v})^2 \leq q(\vec{u})q(\vec{v})$

Si $\vec{u} = 0$, de acuerdo con la proposición II.1.4, se verifica que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Si $\vec{u} \neq 0$. $\forall\, \alpha, \beta \in IR$, $\alpha\vec{u} + \alpha v \in V$, por II.1.1.3

$0 \leq (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}).(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})$

$0 \leq \alpha^2(\vec{u}.\vec{u}) + 2\alpha\beta(\vec{u}.\vec{v}) + \beta^2(\vec{v}.\vec{v})$

haciendo $\alpha = (\vec{v}.\vec{v})$ y $\beta = -\vec{u}.\vec{v}$, tenemos:

$0 \leq (\vec{v}.\vec{v})^2(\vec{u}.\vec{u}) - 2(\vec{v}.\vec{v})(\vec{u}.\vec{v})^2 + (\vec{u}.\vec{v})^2(\vec{v}.\vec{v})$

$0 \leq (\vec{v}.\vec{v})^2(\vec{u}.\vec{u}) - (\vec{v}.\vec{v})(\vec{u}.\vec{v})^2$, entonces

$(\vec{v}.\vec{v})(\vec{u}.\vec{v})^2 \leq (\vec{v}.\vec{v})^2(\vec{u}.\vec{u})$

$(\vec{u}.\vec{v})^2 \leq (\vec{v}.\vec{v})(\vec{u}.\vec{u}) = (\vec{u}.\vec{u})(\vec{v}.\vec{v})$

$(\vec{u}.\vec{v})^2 \leq q(\vec{u})q(\vec{v})$.

2. NORMA

1. DEFINICION

Si V es un espacio vectorial con producto interior, denominaremos longitud o norma del vector $u \in V$ al número

$\|\vec{u}\| = (q(\vec{u}))^{1/2} = +\sqrt{q(\vec{u})} = +\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$

2. PROPOSICION

El cuadrado de la norma de todo vector es igual al producto escalar de dicho vector consigo mismo.

(i,e; $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u}$)

$\|u\|^2 = (+\sqrt{q(\vec{u})})^2 = (+\sqrt{\vec{u}.\vec{u}})^2 = \vec{u}.\vec{u}$.

3. PROPOSICION

Si V es un espacio vectorial con producto interior la norma verifica $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$. (Desigualdad de Schwarz).

$(\vec{u}.\vec{v})^2 \leq q(\vec{u})q(\vec{v})$, por II.1.6.5 $\Rightarrow$

$(\vec{u}.\vec{v})^2 \leq (\vec{u}.\vec{u})(\vec{v}.\vec{v})$, por definición II.2.1 $\Rightarrow$

$(\vec{u}.\vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$, por proposición II.2.2 $\Rightarrow$

$|\vec{u}.\vec{v}|^2 \leq (\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|)^2$, el cuadrado de un número real es igual al cuadrado de su valor absoluto. $\Rightarrow$

$|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$, ya que las bases son no negativas

4. PROPOSICION

La función norma $\| \ \|: V \longrightarrow IR$ verifica:

$u \longrightarrow \|u\|$

$\forall \ \vec{u},\vec{v} \in V$, $\forall \lambda \in IR$

1. $\|\vec{u}\| \geq 0$

2. $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Estas dos consecuencias son inmediatas de II.1.6.1 y II.1.6.2 respectivamente.

3. $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$

$\|\lambda\vec{u}\| = +\sqrt{q(\lambda\vec{u})}$, por definición II.2.1

$= +\sqrt{\lambda^2 q(\vec{u})}$, por II.1.6.3

$= +\sqrt{\lambda^2}\ \sqrt{q(\vec{u})}$

$= +\sqrt{\lambda^2}\ \|\vec{u}\|$, por definición II.2.1

$= |\lambda|\,\|\vec{u}\|$, por definición de valor absoluto

$(|\lambda| = +\sqrt{\lambda^2})$

4. $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Desigualdad Triangular)

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = q(\vec{u}+\vec{v})$, por definición II.2.1

$= q(\vec{u}) + q(\vec{v}) + 2(\vec{u}.\vec{v})$, por II.1.6.4

$\leq q(\vec{u}) + q(\vec{v}) + 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$, por prop. II.2.3

$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$, por def. II.2.1.

$= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$

de donde $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, ya que las bases son no negativas.

5. PROPOSICION

El producto de un vector no nulo por recíproco de su norma es un vector de norma 1.

Sea $\vec{u} \neq \vec{0}$

Tomemos $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ se verifica que:

$$\left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{u}\|} \right| \|\vec{u}\| = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\|\vec{u}\| = 1.$$

3. ANGULO DE DOS VECTORES

Revisando algunos conceptos, dado un número real x se definen las funciones Cos x y Sen x como los valores respectivos de las series de potencias:

$$\text{Cos } x = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

$$\text{Sen } x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} .$$

Estas series convergen uniformemente para todo $x \in \mathbb{R}$ y dan las funciones Cos: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, Sen: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; no es difícil verificar que $(\text{Cos } x)^2 + (\text{Sen } x)^2 = 1$, de donde $|\text{Cos } x| \leq 1$ y $|\text{Sen } x| \leq 1$ siendo ambas funciones continuas y derivables.

Además, si $0 \leq x \leq \pi$, la función $x \longrightarrow \text{Cos } x$ es inyectiva y define una biyección entre los intervalos $[0,\pi]$ y $[-1,1]$.
De lo anterior existe la función inversa Arc Cos:
$[-1,1] \longrightarrow [0,\pi.]$.

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no nulos en un espacio con producto interior. A partir de la desigualdad de Schwarz.

$$|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| .$$

se deduce que $-\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \leq \vec{u}.\vec{v} \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$.

y siendo $\|\vec{u}\| \neq 0 \neq \|\vec{v}\|$, por el producto de las normas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se tiene:

$$-1 \leq \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \leq 1$$

DEFINICION

El ángulo de dos vectores distintos del vector nulo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el número real $\alpha \in [0,\pi]$ tal que $\text{Cos}\ \alpha = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$

De aquí se deduce la siguiente expresión del producto escalar en función del ángulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y de las normas de estos:

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \ \text{Cos}\ \alpha$$

4. DISTANCIA

1. DEFINICION

Distancia entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, en un espacio con producto escalar, es la norma de su diferencia

$$d(\vec{u},\vec{v}) = \|u-v\|.$$

2. PROPOSICION

Sea la función distancia $d: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(\vec{u},\vec{v}) \longrightarrow d(\vec{u},\vec{v})$.

($\mathbb{V}$ es un espacio vectorial dotado de producto escalar). Se cumple:

1. $d(\vec{u},\vec{v}) \geq 0$

2. $d(\vec{u},\vec{v}) = 0 \iff \vec{u} = \vec{v}$.

3. $d(\vec{u},\vec{v}) = d(\vec{v},\vec{u})$.

4. $d(\vec{u},\vec{v}) \leq d(\vec{u},\vec{w}) + d(\vec{w},\vec{v})$

La proposición II.3.2.1 es inmediata de II.2.4.1

La consecuencia II.3.2.2. se demuestra así:

$$d(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}-\vec{v}\| = 0 \iff \vec{u}-\vec{v} = 0, \text{ por II.2.4.2}$$
$$\vec{u} = \vec{v}.$$

La consecuencia II.3.2.3 se demuestra así:

$$d(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}-\vec{v}\| = \|-(\vec{v}-\vec{u})\| = \|\vec{v}-\vec{u}\| = d(\vec{v}.\vec{u}).$$

La consecuencia II.3.2.4 se demuestra así:

$$\begin{aligned} d(\vec{u},\vec{v}) &= \|\vec{u}-\vec{v}\| \\ &= \|\vec{u}-\vec{w} + \vec{w}-\vec{v}\| \\ &\leq \|\vec{u}-\vec{w}\| + \|\vec{w}-\vec{v}\| \text{ ; por II.2.4.4} \\ &= d(\vec{u},\vec{w}) + d(\vec{w},\vec{v}) \end{aligned}$$

5. ORTOGONALIDAD

1. DEFINICION

Sea V un espacio vectorial con producto escalar.

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v} \in V$ son ortogonales si y solamente si el producto escalar $\vec{u}.\vec{v}$ es cero.

2. PROPOSICION (Teorema de Pitágoras).

Si $\vec{u}$ y $\vec{v} \in V$ son dos vectores ortogonales, entonces

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

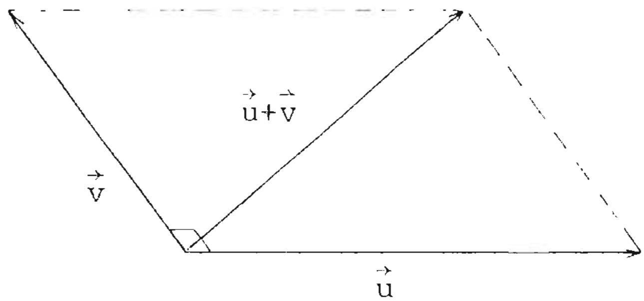


FIGURA Nº 1

Así tenemos:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}.\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$$

$$= \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2, \text{ por II.1.1.5}$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + 0 + \|\vec{v}\|^2, \quad \text{por que } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son ortogonales.}$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

3. DEFINICION

En un espacio vectorial dotado de producto escalar V, un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ es un conjunto ortogonal si y solamente si dos vectores cualesquiera y distintos de cero son ortogonales.

4. DEFINICION

Un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ es un espacio vectorial dotado de producto escalar V se dice es una base ortonormal si es ortogonal y además $\|\vec{u}_i\| = 1$ para todo $i \leq r$; es decir que $\vec{u}_i . \vec{u}_j = \delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq n$.

(Una base ortonormal es tal que $\begin{cases} i \neq j \Rightarrow u_i . u_j = 0 \\ i \in I_r \Rightarrow u_i . u_i = 1 \end{cases}$

5. EJEMPLO

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con producto escalar, la base canónica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ es ortogonal.

La base canónica es ortonormal por que:

$\vec{e}_1 . \vec{e}_2 = (1,0,0,\ldots,0).(0,1,0,\ldots,0) = 0$

$\vec{e}_1 . \vec{e}_3 = (1,0,0,\ldots,0).(0,0,1,\ldots,0) = 0, \ldots$

etc.

y

$\vec{e}_1 . \vec{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0).(1,0,1,\ldots,0) = 1,$

$\vec{e}_2 . \vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0).(0,1,0,\ldots,0) = 1, \ldots$ etc.

6. EJEMPLO

Los vectores $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ para el producto escalar canónico.

La base es ortonormal, puesto que:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

y

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

7. PROPOSICION

Todo espacio euclidiano de dimensión finita admite una base ortonormal.

DEMOSTRACION

Sea $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ una base cualquiera.

De donde:

i) $\vec{0} \neq \vec{b}_1 \in B$. Por lo tanto $\|\vec{b}_1\| \neq 0$

El vector $n_1 = \dfrac{\vec{b}_1}{\|b_1\|}$, es unitario por proposición II.2.5

ii) Supongamos por inducción que $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_r\}$ es un conjunto ortonormal.

Se trata de obtener $\vec{c}_{r+1}$ tal que $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_{r+1}\}$ sea ortonormal.

Sea el vector $\vec{d}_{r+1} = \vec{b}_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} (\vec{b}_{r+1} . \vec{c}_i) \vec{c}_i$

Se cumple que $\vec{d}_{r+1}$ es ortogonal a $\vec{c}_j, \forall j=1,\ldots,r$

en efecto $\vec{d}_{r+1}.\vec{c}_j = (\vec{b}_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} (\vec{b}_{r+1}.\vec{c}_i)\vec{c}_i).\vec{c}_j = 0$

$$= (\vec{b}_{r+1}.\vec{c}_j) - \sum_{i=1}^{r} (\vec{b}_{r+1}.\vec{c}_i)(\vec{c}_i.\vec{c}_j) = 0$$

$$\vec{d}_{r+1}.\vec{c}_j = (\vec{b}_{r+1}.\vec{c}_j) - \sum_{i=1}^{r} (\vec{b}_{r+1}.\vec{c}_i)\delta_{ij} = 0$$

$$= (\vec{b}_{r+1}.c_j) - (\vec{b}_{r+1}.\vec{c}_j).1 = 0$$

Definamos

$$\vec{c}_{r+1} = \frac{\vec{d}_{r+1}}{\|\vec{d}_{r+1}\|}$$

de donde $\|\vec{c}_{r+1}\| = 1$, por proposición II.2.5, y en consecuencia

$\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_{r+1}\}$ es ortonormal.

8. EJEMPLO

En el IR-espacio vectorial $(\mathbb{R}^2,+,.)$ se considera la base formada por

$\vec{b}_1 = (1,1), \vec{b}_2 = (-1,3)$

Por i) de proposición II.5.7, tenemos:

$$\|\vec{b}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{c}_1 = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Por ii) de proposición II.5.7.

$$\vec{d}_2 = \vec{b}_2 - (\vec{b}_2 . \vec{c}_1)\vec{c}_1$$

$$\vec{d}_2 = (-1,3) - (-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= (-1,3) - \sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= (-1,3) - (1,1)$$

$$= (-2,2)$$

$$\|\vec{d}_2\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{c}_2 = \frac{\vec{d}_2}{\|d_2\|} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \;\therefore\; \text{la base } \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\} \text{ es ortonormal.}$$

6. SEGMENTO. DIVISION DE UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA

Tomando unos puntos arbitrarios $x, y \in \mathbb{R}^n$ y considerando el conjunto de puntos (vectores)

$$w = \beta x + \alpha y, \quad (\alpha, \beta \geq 0, \ \alpha + \beta = 1) \qquad (1)$$

determinados por los números no negativos α, β cuya suma es igual a 1, se tiene

$$w = (1 - \alpha)x + \alpha y = x + \alpha(y-x) \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \qquad (2)$$

o sea

$$w = y + \beta(x-y) \quad (0 \leq \beta \leq 1) \qquad (3)$$

De la igualdad (2) en el espacio $\mathbb{R}^3$ los puntos w completan el segmento que une x e y. Lo anterior es debido a que el vector w es la suma del vector x y del vector $\beta(y-x)$, el cual es colineal con $y - x$ (ver figura 2. acontinuación).

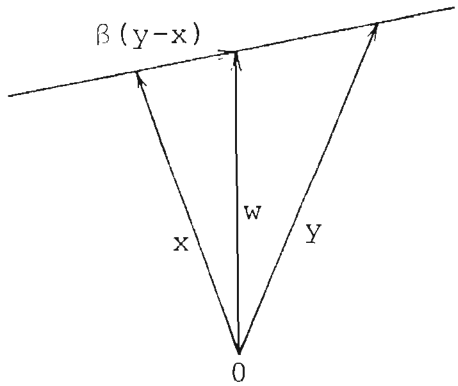


FIGURA Nº 2

Por consiguiente, el conjunto de puntos

$w = \beta x + \alpha y$, $(\alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1)$ representa un segmento $[xy]$ en $\mathbb{R}^3$ que une los puntos x e y. Para $\alpha = 0$ se tiene $w = x$, para $\beta = 0$ se tiene $w = y$, y para cualquier $\beta > 0$ $(\alpha = 1 - \beta > 0)$ w es un punto arbitrario de $[x\ y]$.

DEFINICION

Se llama segmento $[x\ y]$ que une los puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ al conjunto de todos los puntos w de la forma

$w = \beta x + \alpha y (\alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1)$.

7. SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

1. ESPACIO $\mathbb{R}^3$

Un sistema de coordenadas cartesianas del espacio $\mathbb{R}^3$ es el conjunto formado por un punto 0 y por una base ortonormal $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ que se puede indicar por $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. El punto 0 se denomina origen del sistema. Las rectas orientadas que pasan por el punto 0 dándoles la dirección los vectores i,j, k, se denominan respectivamente: eje de las abscisas X, eje de las ordenadas Y y eje de las cotas Z.

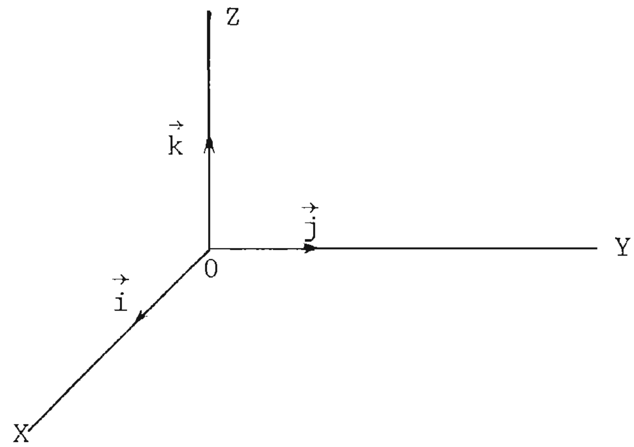


FIGURA Nº 3

2. PLANO $\mathbb{R}^2$

Un sistema de coordenadas cartesianas del plano $\mathbb{R}^2$ es el conjunto formado por un punto 0 y por una base ortonormal $(\vec{i},\vec{j})$ que se indica por $(0,\vec{i},\vec{j})$. El punto 0 se llama origen del sistema. Las rectas orientadas que pasan por el punto 0 dándoles las direcciones los vectores $\vec{i},\vec{j}$ se denominan respectivamente: eje de las abscisas X y eje de las coordenadas Y.

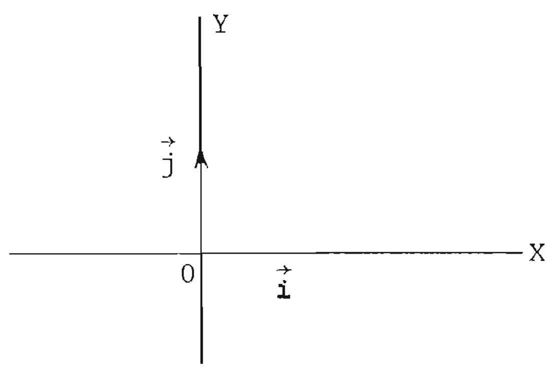


FIGURA Nº 4

8. ECUACION VECTORIAL DE LA RECTA.

1. EN EL CASO DEL ESPACIO $\mathbb{R}^3$.

Sea L una recta que pasa por el punto P cuya dirección es dada por el vector no nulo $\vec{u}$. Para que un punto X del espacio $\mathbb{R}^3$ pertenezca a la recta L es necesario y suficiente, que exista un número real α tal que:

$\vec{PX} = X + P = \alpha\vec{u}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

así tenemos la ecuación

$X = P - \alpha u \ (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad (1)$

Se denomina ecuación de la recta L.

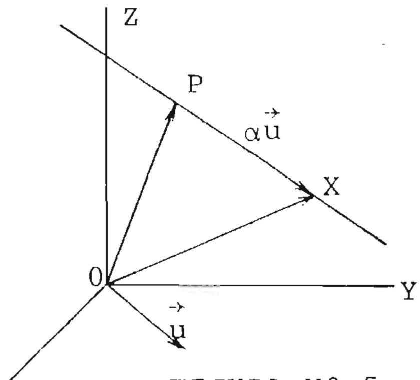


FIGURA Nº 5

Si la recta L pasa por dos puntos distintos P y Q, la dirección de la recta L será dada por el vector Q - P, y la ecuación vectorial de la recta L es :

$X = P + \alpha(Q - P), \ (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad (2)$

2. EN EL CASO DEL PLANO $\mathbb{R}^2$

Sea la recta L que pasa por un punto P y tiene como dirección el vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ del plano, la ecuación vectorial de L será precisamente (1); en el caso de que la recta L está definida por dos puntos P y Q distintos la ecuación vectorial de L será (2).

9. ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA RECTA

1. SEA EL SISTEMA DE COORDENADAS $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ EN EL ESPACIO $\mathbb{R}^3$

Sea $X = (x,y,z)$, $P = (x_0,y_0,z_0)$ y $\vec{u} = (a,b,c)$, respectivamente un punto genérico de L, un punto dado de L y un vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ de dirección paralela a la recta L.

De la ecuación vectorial de la recta L:

$X = P + \alpha\vec{u}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, tenemos:

$$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \alpha(a,b,c) = (x_0 + \alpha a,\ y_0 + \alpha b,\ z_0 + \alpha c).$$

$$\text{Luego: } \begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + \alpha c \end{cases} \qquad (3)$$

en que a,b,c no son todos nulos, puesto que el vector $\vec{u} \neq \vec{0}$

Así las ecuaciones de (3) se denominan ecuaciones paramétricas de la recta L, en relación con el sistema de coordenadas fijado, además este proceso se puede plantear en forma inversa. En el caso que la recta L sea definida por dos puntos $A = (a_1,a_2,a_3)$ y $B = (b_1,b_2,b_3)$ las ecuaciones paramétricas de L serán:

$$\begin{cases} x = a_1 + \quad (b_1 - a_1) \\ y = a_2 + \quad (b_2 - a_2) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = a_3 + \alpha(b_3 - a_3) \end{cases}$$

En el caso del plano $\mathbb{R}^2$, siendo $(0,\vec{i},\vec{j})$ un sistema de coordenadas, las ecuaciones paramétricas de la recta L que pasa por el punto $P = (x_0,y_0)$ y con dirección del vector no nulo $\vec{u} = (a,b)$ son:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \end{cases} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \tag{4}$$

Sea la recta L definida por los puntos distintos $P = (a_1,a_2)$ y $Q = (b_1,b_2)$, las ecuaciones paramétricas de L son:

$$\begin{cases} x = a_1 + \quad (b_1 - a_1) \\ y = a_2 + \quad (b_2 - a_2) \end{cases} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

en relación al sistema fijado.

10. ECUACION VECTORIAL DEL PLANO

Sean A un punto de un plano P, $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ dos vectores linealmente independientes paralelos a P. En estas condiciones los vectores $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ y $(X-A)$ con $X \in P$, son siempre linealmente dependientes y así, para cada $X \in P$ existen siempre dos números reales α_1 y α_2, tales que:

$$\vec{AX} = X-A = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2.$$

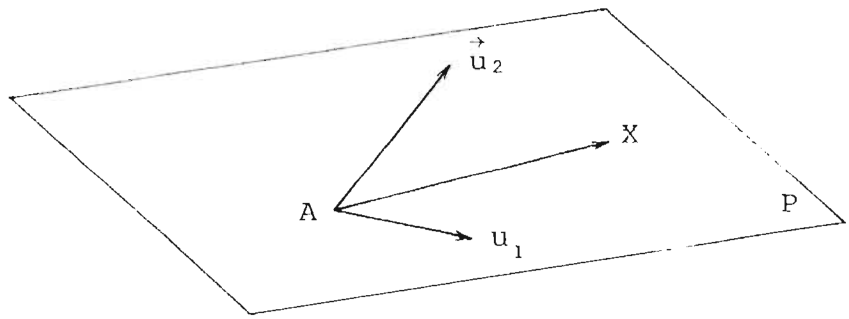


FIGURA Nº 6

Así tenemos la ecuación

$$X = A + \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \quad (\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}) \tag{5}$$

y es llamada ecuación vectorial del plano P.

Recíprocamente, el conjunto de puntos X del espacio $\mathbb{R}^3$ tales que

$$X = A + \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \quad (\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R})$$

con $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ linealmente independientes, es un plano que pasa por el punto A y es paralelo a las direcciones de los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$.

En el caso que el plano P sea determinado por tres puntos A,B y C no colineales, la dirección del plano P será dada por los vectores B-A y C-A que son linealmente independientes, y la ecuación vectorial del plano P es:

$$X = A + \alpha_1(B-A) + \alpha_2(C-A) \quad (\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}).$$

11. ECUACIONES PARAMETRICAS DE UN PLANO

Sean $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un sistema de coordenadas del espacio $\mathbb{R}^3$ y P un plano que pasa por el punto $A = (x_0,y_0,z_0)$ y de dirección dada por los vectores $\vec{u}_1 = (a_1,b_1,c_1)$ y $\vec{u}_2 = (a_2,b_2,c_2)$ ($\vec{u}_1$ y $\vec{u}_1$ son linealmente independientes).

Siendo $X = A + \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \quad (\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R})$

en relación al sistema de coordenadas fijado se tiene:

$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \alpha_1(a_1,b_1,c_1) + \alpha_2(a_2,b_2,c_2)$

$$\text{Luego:} \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \\ y = y_0 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 \qquad (\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 \end{cases} \tag{5}$$

que se denominan ecuaciones paramétricas del plano P.

Recíprocamente, dado el sistema de ecuaciones lineales (5), se encuentra el plano P en el espacio $\mathbb{R}^3$ que contiene un punto de coordenadas (x_0,y_0,z_0) y tiene como dirección la del par de vectores (a_1,b_1,c_1) y (a_2,b_2,c_2) que son linealmente independientes en relación al sistema de coordenadas fijado.

En el caso en que el plano P esté determinado por tres puntos $A = (x_1,y_1,z_1)$, $B = (x_2,y_2,z_2)$ y $C = (x_3,y_3,z_3)$, no coliniales, siendo $(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ y $(x_3-x_1,\ y_3-y_1\ ,$

$z_3 - z_1$) las coordenadas de los vectores B - A y C - A dan la dirección del plano P, con ecuaciones paramétricas de P:

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha_1(x_2 - x_1) + \alpha_2(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + \alpha_1(y_2 - y_1) + \alpha_2(y_3 - y_1) \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}) \\ z = z_1 + \alpha_1(z_2 - z_1) + \alpha_2(z_3 - z_1) \end{cases}$$

en relación al sistema de coordenadas fijado.

12. ECUACION GENERAL DEL PLANO EN EL ESPACIO $\mathbb{R}^3$

La eliminación (Posible) de α_1 y α_2 del sistema (5) nos da una ecuación cartesiana del plano P:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

donde A,B,C y D son números reales, A,B y C no simultáneamente nulos.

13. ECUACION GENERAL DE LA RECTA L EN EL PLANO $\mathbb{R}^2$

La eliminación (posible) de α del sistema (4) nos dá una ecuación cartesiana de la recta L: $Ax + By + C = 0$

donde A, By $C \in \mathbb{R}$ no simultáneamente nulos.

14. PROPIEDADES

1. Una recta en el espacio está contenida en una infinidad

de planos.

2. Dos rectas paralelas determina un plano

3. Una recta es paralela a un plano si y sólo si la recta es paralela a una recta contenida en el plano.

4. Dos planos son perpendiculares si y sólo si existe una recta contenida en uno de los planos que es perpendicular al otro plano.

5. Una recta es perpendicular a un Plano si y sólo si la recta es perpendicular a un recta contenida en él plano.

15. PROYECCION DE UN VECTOR SOBRE OTRO

Sea $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de un espacio con producto escalar, e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Entonces existe un escalar α, tal que

$$(\vec{u} - \alpha\vec{v}) \perp \vec{v}$$

en efecto

$$(\vec{u} - \alpha\vec{v}) . \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} - \alpha(\vec{v}.\vec{v}) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\vec{v}.\vec{v}}$$

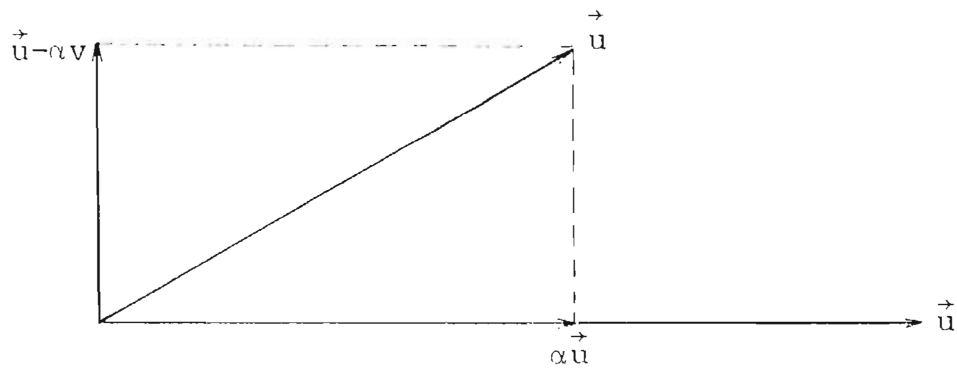


FIGURA Nº 7.

El vector

$$\alpha\vec{v} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\vec{v}.\vec{v}}\,\vec{v} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\,\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

se llama proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

Identificaremos la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ con el número real

$$\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

y escribiremos

$$P_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Particularmente, si $\vec{v}$ es un vector de módulo 1, se tiene

$$P_{\vec{v}}\,\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}.$$

CAPITULO III

GEOMETRIA AFIN

1. APLICACION AFIN

1. DEFINICION

Una aplicación $f: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ es una aplicación
$A \longrightarrow A'$

afín si:

Para todo $A,B,C \in \mathbb{H}$, $[\vec{AC} = \alpha\vec{AB}] \Rightarrow [\vec{A'C'} = \alpha\vec{A'B'}]$,
$A',B',C' \in \mathbb{H}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. APLICACION LINEAL ASOCIADA A UNA APLICACION AFIN.

1. PROPOSICION

Sea $f: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ una aplicación afin.
$A \longrightarrow A'$
$\forall\, A,B,C,D \in \mathbb{H}$, $[\vec{AB} = \vec{CD}] \Rightarrow [\vec{A'B'} = \vec{C'D'}]$.

DEMOSTRACION

Si $\vec{AB} = \vec{CD}$, entonces ABDC es un paralelogramo; Sea I el punto medio común a los segmentos $[AD]$ y $[BC]$.

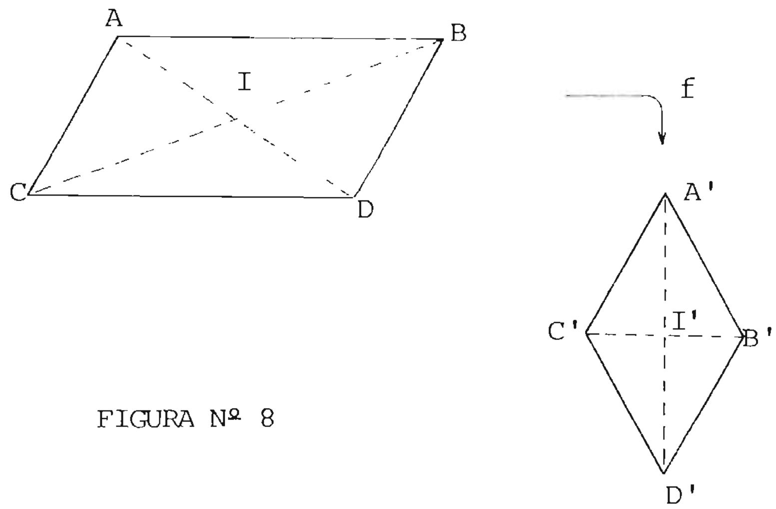


FIGURA Nº 8

Las igualdades:

$$\vec{IA} = -\vec{ID} \quad e \quad \vec{IB} = -\vec{IC}$$

implican $\overrightarrow{I'A'} = -\overrightarrow{I'D'}$ e $\overrightarrow{I'B'} = -\overrightarrow{I'C'}$, por ser f afin.

Los segmentos $[A'D']$ y $[B'C']$ con el mismo punto medio I', por consiguiente A'B'D'C' es un paralelogramo entonces $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

2. DEFINICION

Sea una aplicación afin $f: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}: M \longrightarrow M'$. La aplicación lineal asociada a f es la aplicación $\Theta: H \longrightarrow H$ definida por la relación:

$$\text{Para todo } M,N \in \mathbb{H},\ \Theta(\vec{MN}) = \overrightarrow{N'N'}$$

3. PROPOSICIONES

Sea $\vec{a},\vec{b}$ vectores de H y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces se cumple:

1. $\Theta(\alpha.\vec{a}) = \alpha.\Theta(\vec{a})$.

2. $\Theta(\vec{a} + \vec{b}) = \Theta(\vec{a}) + \Theta(\vec{b})$.

Prueba de III. 2.3.1

Sea $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ y $\alpha.\vec{a} = \overrightarrow{MP}$. Se tiene que $\overrightarrow{MP} = \alpha\overrightarrow{MN}$.

$$\Theta(\alpha.\vec{a}) = \Theta(\overrightarrow{MP}) = \overrightarrow{M'P'} \quad \text{por definición III.4.1.}$$
$$= \alpha\overrightarrow{M'N'}$$
$$= \alpha.\Theta(\vec{a})$$

Prueba de III.2.3.2

Sea $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{NP}$

$$\Theta(\vec{a} + \vec{b}) = \Theta(\overrightarrow{MP}) = \overrightarrow{M'P'} = \overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{N'P'}$$
$$= \Theta(\overrightarrow{MN}) + \Theta(\overrightarrow{NP})$$
$$= \Theta(\vec{a}) + \Theta(\vec{b}).$$

OBSERVACION 1

La aplicación Θ con estas dos propiedades, es una Aplicación Lineal.

OBSERVACION 2

Esta función θ es invariable si f lo es, su inversa es la función $\theta^{-1}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f^{-1}(M)f^{-1}(N)}$, la cual será tambien una función lineal.

4. DEFINICION

La aplicación Θ: H ⟶ H es lineal porque verifica:

$\forall \vec{u},\vec{v} \in H,\ \Theta(\vec{u}+\vec{v}) = \Theta(\vec{u}) + \Theta(\vec{v})$,

$\forall \vec{u} \in H,\ \forall\alpha \in \mathbb{R}.\ \Theta(\alpha\vec{u}) = \alpha\Theta(\vec{u})$.

5. PROPOSICION

El conjunto de aplicaciones afines biyectivas de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$ dotado de la ley composición (0), es un grupo no conmutativo.

Este conjunto es el Grupo Afín de $\mathbb{H}$.

Demostración

Demostrar que el conjunto de aplicaciones afines biyectivas de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$, que lo anotaremos por J, dotado de la ley composición, es un grupo no conmutativo.

Cerradura.

Sea f y g $\in$J. Probar que f o g = h $\in$J.

Es decir Probar que:

$$h = f\circ g: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \qquad \text{es una aplicación afin, es decir que:}$$
$$A \longrightarrow h(A) = f(g(A))$$

$$\forall\ A,B,C \in H,\ [\overrightarrow{AC} = \Omega\overrightarrow{AB}] \Rightarrow [\overrightarrow{f(g(A))f(g(C))}] = \Omega\overrightarrow{f(g(A))f(g(B))}],\ \Omega \neq 0$$

Como g es una aplicación afin biyectiva de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$,

$\forall$ A,B,C $\varepsilon\,\mathcal{H}$, $[\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}] \Rightarrow [g(A)g(C) = \alpha g(A)g(B)]$.

$\alpha\ \varepsilon\ \mathbb{R}, g(A), g(B), g(C)\ \varepsilon\,\mathcal{H}$.

Como f es una aplicación afín biyectiva de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$.

$\forall g(A),\ g(B),\ g(C)\ \varepsilon\ \mathcal{H}$.

$[\overrightarrow{g(A)g(C)} = \beta\overrightarrow{g(A)g(B)}] \Rightarrow [\overrightarrow{f(g(A))f(g(C))} = \beta\overrightarrow{f(g(A))f(g(B))}]$

$\beta\ \varepsilon\ \mathbb{R}, f(g(A)), f(g(B)), f(g(C))\ \varepsilon\,\mathcal{H}$.

Entonces

$\overrightarrow{AB} = \Omega\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{g(A)g(C)} = \Omega\overrightarrow{g(A)g(B)}$, por ser g afín.

$\Rightarrow \overrightarrow{f(g(A))f(g(C))} = \Omega\overrightarrow{f(g(A))f(g(B))}$, por ser f afín.

Luego f o g es afín.

Identidad

Probaremos que la función identidad f es una aplicación afín biyectiva.

Existe la función identidad que cumple

$$\begin{aligned} f:\ \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ A &\longrightarrow f(A) = A \end{aligned}$$

$\forall$ A,B,C $\varepsilon\,\mathcal{H}$, $[\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}] \Rightarrow [\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}]$, $\alpha\ \varepsilon\ \mathbb{R}$.

Inversos.

Para que $f^{-1}\ \varepsilon J$ se debe probar que

$\forall$ A,B,C $\varepsilon\,\mathcal{H}$, $[\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}] \Rightarrow [\overrightarrow{f^{-1}(A)f^{-1}(C)} = \alpha\overrightarrow{f^{-1}(A)f^{-1}(B)}]$, $\alpha\ \varepsilon\ \mathbb{R}$.

Como f es una aplicación afín biyectiva la aplicación lineal asociada a f es Θ la cual es invarsible,

$\forall$ A,B,C ε H, $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} \Rightarrow \Theta^{-1}(\overrightarrow{AC}) = \Theta^{-1}(\overrightarrow{AB})$, por definición III.2.2.

$\Rightarrow \Theta^{-1}(\overrightarrow{AC}) = \alpha\Theta^{-1}(\overrightarrow{AB}), \Theta^{-1}$ es lineal

$\Rightarrow \overrightarrow{f^{-1}(A)f^{-1}(C)} = \alpha\overrightarrow{f^{-1}(A)f^{-1}(B)}, \alpha \in \mathbb{R}$

por III. 1.4.2.

Observación.

Toda función lineal inyectiva de H en H es biyectiva.

3. BARICENTRO DE n PUNTOS PONDERADOS (Ai,αi)

1. DEFINICION

Un punto ponderado de H es una pareja (A,α) donde A ε H y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sean n puntos ponderados a (Ai,αi) de H.

$(n \in \mathbb{N}^*, \ i \in \{1,\dots,n\})$.

Función vectorial de Leibniz.

(relativa a n puntos ponderados (Ai,αi))

Sea H el conjunto de vectores de H.

$$f: H \longrightarrow H$$

$$M \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \overrightarrow{MA_i})$$

es llamada función vectorial de Leibniz.

2. PROPOSICION

La función vectorial de Leibniz relativa a n puntos ponderados (A_i,α_i) es:

1) Biyectiva cuando $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$;

2) Constante cuando $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$.

Demostración de 1).

Inyectividad.

Probar que:

Para un par de elementos $M,N \in \mathcal{H}$ se cumple:

$f(M) = f(N) \Rightarrow M = N$.

$f(M) = f(N) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \overrightarrow{MA_i}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \overrightarrow{NA_i})$ (por Definición III.3.1)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \overrightarrow{MA_i}) - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \overrightarrow{NA_i}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \overrightarrow{MA_i} - {}_i\overrightarrow{NA_i}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{NA_i}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{A_iN}) = \vec{0}$$

$$f(M) = f(N) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MN}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) \overrightarrow{MN} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \vec{0}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$$

$$\Rightarrow M = N.$$

Sobre yectividad.

Sea $\vec{v}$ un vector cualquiera de H. Probar que existe una preimagen única M en H por f.

Será necesario resolver para:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

Los cual equivale a:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{A\ A_i})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1 A_i}$$

$$\vec{v} = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) \overrightarrow{MA_1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1 A_i}$$

Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, entonces $\vec{v}$ tiene una única preimagen M, por:

$$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) \overrightarrow{A_1 M} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1 A_i} - \vec{v}$$

$$\overrightarrow{A_1 M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1 A_i} - \vec{v}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

$\therefore$ f es biyectiva.

3. PROPOSICION

Sea $(A_1,\alpha_1),\ldots,(A_n,\alpha_n)$ una familia de puntos ponderados.

Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, existe un único punto G tal que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0}$

Probaremos que G es único.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{G'A_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{GA_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{G'A_i} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \vec{GA_i} - \alpha_i \vec{G'A_i}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\vec{GA_i} + \vec{A_iG'}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\vec{GG'}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) \vec{GG'} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{GG'} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$$

$$\Rightarrow G = G'.$$

4. DEFINICION

El punto G es llamado baricentro de n puntos ponderados (A_i,α_i)

5. PROPOSICION

Para n puntos ponderados (A_i,α_i), donde $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, las proposiciones son equivalentes:

1) G es el baricentro de n puntos ponderados.

2) Para todo $0 \in H$, $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{0G} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \overrightarrow{0A_i})$;

3) Existe un $0 \in H$. $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{0G} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \overrightarrow{0A_i})$.

Demostración 1) => 2).

Sea f la función de Leibniz $f(G) = \vec{0} \in H$, G es el baricentro de n puntos ponderados (A_i,α_i). Tenemos

$$f(G) = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}, \text{ Por definición III.3.1.}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{0A_i} - \overrightarrow{0G}) = \vec{0}, \quad \forall 0 \in H.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{0A_i} - (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{0G} = \vec{0}, \quad \forall 0 \in H.$$

$$\Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{0G} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{0A_i}, \quad \forall 0 \in H.$$

Demostración 2) => 3).

Como para todo $0 \in H$ se cumple

$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{0G} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \overrightarrow{0A_i})$, entonces si existe un $0 \in H$ se cumple $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{0G} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \overrightarrow{0A_i})$.

Demostración 3) => 1).

Como existe un $0 \varepsilon H$ se cumple

$$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{0G} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \overrightarrow{0A_i}) \quad \text{de donde}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{0G} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{0A_i} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{0A_i} + \overrightarrow{A_iG}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{0A_i} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{0A_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_iG} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{0A_i} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_iG} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$$

entonces existe el baricentro G de n puntos ponderados (A_i, α_i) Por proposición III.3.3. y de definición III.3.4

6. PROPOSICION

Si $A \neq B$ y $C \varepsilon (AB)$ entonces existe escalares α y β tales que $\alpha + \beta = 1$ y C es el baricentro de (A,α) y (B,β)

Demostración.

Utilizando la ecuación vectorial de la recta:

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \end{pmatrix}$$

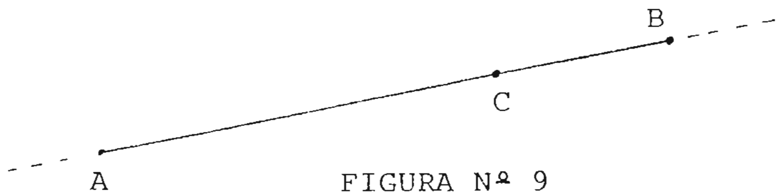


FIGURA Nº 9

donde $A(X_A, Y_A)$ y $B(X_B, Y_B)$.

Luego: $X_C = X_B + t(X_B - X_A) \Rightarrow X_C = (-t)X_A + (1 + t)X_B$

$Y_C = Y_B + t(Y_B \; 0 \; Y_A) \Rightarrow Y_C = (-t)Y_A + (1 + t)Y_B$

El baricentro es:

$$C = (X_C, Y_C) = (\alpha X_A + \beta X_B, \; \alpha Y_A + \beta Y_B)$$

donde $\alpha = -t$ y $\beta = 1+t$, $t \in \mathbb{R}$

7. PROPOSICION

Sean dos puntos ponderados $(A_1, 1)$ y $(A_2, 1)$.

El baricentro G de $(A_1, 1)$ y $(A_2, 1)$ es el punto medio del segmento $[A_1 \; A_2]$.

Demostración.

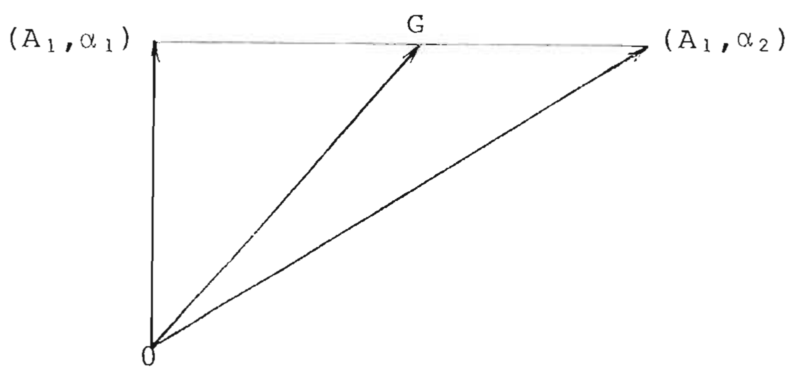


FIGURA Nº 10

Por proposición III.3.3, $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

Sea $0 \in \|$, un origen arbitrario.

Entonces: $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i (\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0A_i}) = \vec{0}$

$\alpha_1 \overrightarrow{G0} + \alpha_2 \overrightarrow{G0} + \alpha_1 \overrightarrow{0A_1} + \alpha_2 \overrightarrow{0A_2} = \vec{0}$

luego:

$$2\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0A_1} + \overrightarrow{0A_2} = \vec{0} \quad , \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1.$$

$$2\overrightarrow{0G} = \overrightarrow{0A_1} + \overrightarrow{0A_2}$$

$$\therefore \qquad \overrightarrow{0G} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{0A_1} + \overrightarrow{0A_2})$$

Particularmente si 0 se coloca en la posición de A_1 se tiene:

$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2})$$

$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_2} \quad , \quad \overrightarrow{A_1A_1} = \vec{0}$$

8. PROPOSICION

Sea un triángulo ABC.

El baricentro G de (A_1,a), $(A_2,1)$, $A_3,1)$ es el centro de gravedad del triángulo ABC.

Demostración.

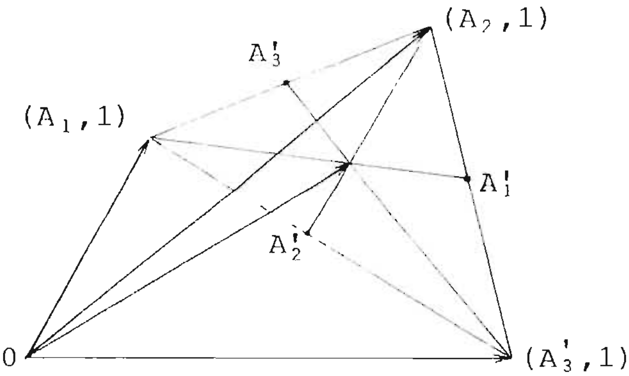


FIGURA Nº 11

Por proposición 4.3.2.1., $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \overrightarrow{GA}_i = \vec{0}$

Sea $0 \in H$, un origen arbitrario.

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i (\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0A}_i) = \vec{0}$$

$\alpha_1(\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0A}_1) + \alpha_2(\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0A}\ ) + \alpha_3(\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0A}_3) = \vec{0}.$

Luego:

$\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0A}_1 + \overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0A}_2 + \overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0A}_3 = \vec{0}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1.$

$3\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0A}_1 + \overrightarrow{0A}_2 + \overrightarrow{0A}_3 = \vec{0}$

$3\overrightarrow{0G} = \overrightarrow{0A}_1 + \overrightarrow{0A}_2 + \overrightarrow{0A}_3$

$\overrightarrow{0G} = \frac{1}{3}\ (\overrightarrow{0A}_1 + \overrightarrow{0A}_2 + \overrightarrow{0A}_3)$

De la figura 11 A'_1 es el punto medio de A_2 y A_3, es decir, reemplacemos $(A_2,1)$ y $(A_3,1)$ por $(A'_1,2)$, Luego G es el baricentro entre $(A'_1,2)$ y $(A_1,1)$; en donde

$\overrightarrow{0G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{0A}_1 + 2\overrightarrow{0A}'_1)$

Particularmente si 0 se coloca en la posición de A_1, se tiene:

$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1A_1'} \quad , \quad \overrightarrow{A_1A_1} = \vec{0}.$$

4. APLICACION AFIN Y BARICENTRO

1. PROPOSICION

Las aplicaciones afines de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$ son las aplicaciones que conservan el baricentro de todo conjunto de n puntos ponderados de $\mathbb{H}$.

Probar que la aplicación afin f conserva el baricentro de n puntos ponderados.

Sea f una aplicación afin de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$. La imagen por f de un punto A es anotada por A'.

Sea Θ la aplicación lineal asociada a f, G el baricentro de n puntos ponderados (A_i,α_i) y $0 \in \mathbb{H}$.

Se tiene:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{0G} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{0A_i}, \quad 0 \in \mathbb{H}.$$

entonces:

$$\Theta\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{0G}\right] = \Theta\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{0A_i}\right), \quad 0 \in \mathbb{H}.$$

Θ es lineal

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \Theta\ (\overrightarrow{0G}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Theta(\overrightarrow{0A_i}), \ \Theta \in \mathbb{H}.$$

De donde:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{f(0)f(G)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f(0)f(A_i)}, 0 \in \mathbb{H}.$$

$f(G)$ es entonces el baricentro de los n puntos ponderados $(f(A_i),\alpha_i)$.

Probar que: La aplicación g de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$ que conserva el baricentro de n puntos ponderados es una aplicación afin.

Sea A,B y C $\in \mathbb{H}$ tales que $\vec{AC} = \vec{AB}$ donde $\alpha \neq 1$.

Se tiene que:

$$(-1)\vec{AC} + \alpha\vec{AB} = \vec{0};$$

A es entonces el baricentro de $(C,-1)$ y (B,α). (Proposición III.3.3 y Definición III.3.4)

Por consiguiente, A' es el baricentro de $(C',-1)$ y (B',α) se dá de $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$.

$\therefore$ g es una aplicación afín.

5. PROPOSICIONES DE LOS BARICENTROS

1. PROPOSICION

Si K es el conjunto de los baricentros de n puntos A_i, si f es una aplicación afin de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$, entonces $f(K)$ es el conjunto de baricentros de los n puntos $f(A_i)$.

Sea $K = \{G \in \mathbb{H} / G$ es baricentro de los n puntos $A_i\}$

Sea $G \in K$

$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que G es el baricentro de los n puntos ponderados $(A_1,\alpha_1),\ldots,(A_n,\alpha_n)$, por proposición III.4.1 f(G) es el baricentro de los n puntos ponderados $(f(A_1),\alpha_1),\ldots,(f(A_n),\alpha_n)$.

$\therefore$ f(G) es un baricentro de los n puntos $f(A_1),\ldots,f(A_n)$

$\therefore$ f(K) esta incluido en el conjunto de los baricentros de los n puntos $f(A_i)$.

Sea x que pertenece al conjunto de los baricentros de los n puntos $f(A_i)$.

$\therefore \exists \alpha_1,\ldots,{}_n$ tal que x es el baricentro de los n puntos ponderados $(f(A_1),\alpha_1),\ldots(f(A_n),\alpha_n)$.

Sea y el baricentro de los n puntos ponderados (A_1,α_1), $(A_2,\alpha_2),\ldots,(A_n,{}_n)$. Por lo anterior, f(y) es el baricentro de los n puntos ponderados:

$(f(A_1),\alpha_1),(f(A_2),\alpha_2),\ldots,(f(A_n),\alpha_n)$. Como el baricentro de n puntos ponderados es único entonces $f(y) = x$, de donde $x \in f(K)$.

Luego f(K) = conjunto de baricentros de los n puntos $f(A_i)$, $i \leq n$.

2. PROPOSICION

El conjunto de baricentros de dos puntos distintos A y B de

$\mathcal{H}$ es la recta (AB).

Sea $M \in \mathcal{H}$ se tiene que:

$M \in (AB) \iff [\exists \alpha \in \mathbb{R};\ \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}]$

$\iff [\exists \alpha \in \mathbb{R}$, tal que: $\overrightarrow{AM} - \alpha\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AM} - \alpha(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$

$(1-\alpha)\overrightarrow{AM} + \alpha\overrightarrow{BM} = \vec{0}$, es decir que M es baricentro de $(A, 1-\alpha)$ y $(B, \alpha)]$

$\iff$ M es un baricentro de A y B.

3. PROPOSICION

La imagen de una recta por una aplicación afin f es una recta o es un punto.

Demostración

i) Sea d una recta de $\mathcal{H}$. Si la restricción de f a d es constante, f(d) es un punto.

ii) Si existen dos puntos distintos A y B de la recta d entonces las imágenes respectivas por f son f(A) y f(B) siendo $f(A) \neq f(B)$. La recta d es el conjunto de baricentros de los puntos A y B, entonces f(d) es el conjunto de los baricentros de los puntos f(A) y f(B) (por proposición III.5.1., III.5.2)

$\therefore$ La imagen de una recta por una aplicación afin f es una recta.

4. PROPOSICION

El conjunto de baricentros de dos puntos distintos A y B afectados de coeficientes positivos es el segmento [AB].

M H.

$M \varepsilon [AB] \iff [\exists \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \ \vec{AM} = \alpha\vec{AB}$

$$\vec{AM} - \alpha\vec{AB} = \vec{0}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\vec{AM} - \alpha(\vec{AM} + \vec{MB}) = \vec{0}, \ 0 < \alpha < 1$$

$$(1 - \alpha)\vec{AM} + \alpha\vec{AM} = \vec{0} \ ; \ (1-\alpha) = \beta \geq 0, \ \alpha \geq 0]$$

$\iff$ M es baricentro de (A,α) y (B,α).

5. PROPOSICION

Sean A,B,C tres puntos no alineados de $\mathbb{H}$.

El conjunto de baricentros de puntos A,B y C es el plano (ABC).

Para todo punto M de $\mathbb{H}$, se tiene:

$[M \varepsilon (ABC)] \iff [\exists \alpha, \beta \varepsilon IR, \ \vec{AM} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}.$

$$\vec{AM} - \alpha\vec{AB} - \beta\vec{AC} = \vec{0}$$

$$\vec{AM} - \alpha(\vec{AM}+\vec{MB}) - \beta(\vec{AM}+\vec{MC}) = \vec{0}$$

$$(1-\alpha-\beta)\vec{AM} + \alpha\vec{BM} + \beta\vec{CM} = \vec{0}$$

$\iff [\exists \alpha, \beta \varepsilon IR$, M es baricentro de

$(A, 1-\alpha-\beta), \ (B,\alpha), \ (C,\beta)]$

$\iff$ [M es un baricentro de A,B y C].

6. PROPOSICION

La imagen de un plano por una aplicación afin f es un plano, o una recta, o un punto.

Demostración.

Sea P un plano de $\mathbb{H}$. Si la restricción de f a P es constante, f(P) es un punto. Si no, existen tres puntos distintos A,B y C alineados del plano P con imágenes respectivas por f, f(A), f(B) y f(C), son distintas. Si la restricción de f a P es la recta d de P, d es el conjunto de baricentros para los puntos A y B (A y C ó B y C), entonces f(d) es el conjunto de los baricentros de los puntos f(A) y f(B)(f(A) y f(C) ó f(B) y f(C)), por proposiciones III.5.1 y III.5.2.

$\therefore$ La imagen de una recta d de P por una aplicación afin f es una recta.

Si no, existen tres puntos distintos A,B y C no alineados del plano P con imágenes respectivas por f, f(A), f(B) y f(C), son distintos. El plano P es el conjunto de los baricentros de los puntos A,B y C, entonces f(D) es el conjunto de los baricentros de los puntos f(A), f(B) y f(C), por proposiciones III.5.1 y III.5.2.

$\therefore$ La imagen de un plano por una aplicación afín f es un plano.

7. PROPOSICION

Sea f una aplicación afín.

Si f es una aplicación inyectiva de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$, entonces f es biyectiva.

Demostración

f inyectiva $\Rightarrow \Theta(\vec{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ es función lineal inyectiva.

$\Rightarrow \Theta$ es función lineal biyectiva.

Sea Θ^{-1} la función inversa de Θ.

Si $\Theta^{-1}(AB) = AC$ definamos $g(B) = C$. Esta función g es la inversa de f. Luego f es biyectiva.

8. PROPOSICION

Sea f una aplicación afin de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$, sea d_1 y d_2 dos rectas paralelas de $\mathbb{H}$.

Si $f(d_1)$ es una recta, entonces $f(d_2)$ es una recta paralela a $f(d_1)$.

Demostración

Sea $f: \begin{array}{l} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ M \longrightarrow M' \end{array}$ una aplicación afin

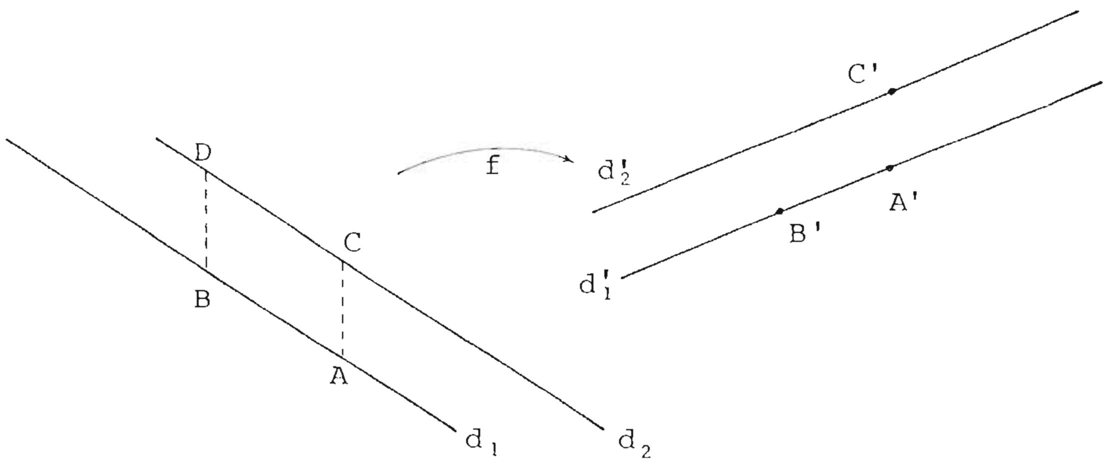


FIGURA Nº 12

Sea $\vec{u}$ un vector director de la recta d_1 y así de la recta d_2 por ser d_1 paralela a d_2. Existe $A,B \in d_1$ y $C,D \in d_2$ tales que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Se sabe entonces que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$ por que f es afin.

$f(d_1)$ es una recta, los puntos A' y B' son distintos ($f(d_1)$ es el conjunto de los baricentros de A' y B'): Por consiguiente $C' \neq D'$ y entonces, $f(d_2)$, no es un punto, es una recta, por proposición III.5.3.

Por otra parte, las rectas $f(d_1)$ y $f(d_2)$ tienen un vector director comun: $\overrightarrow{A'B'}$.

$\therefore$ $f(d_1)$ y $f(d_2)$ son paralelas.

9. PROPOSICION

Sea f una aplicación afin.

Si P_1 y P_2 son dos planos paralelos de $\mathcal{E}$ y si $f(P_1)$ es un plano, entonces $f(P_2)$ es un plano paralelo a $f(P_1)$.

Demostración.

Sea d_1 una recta contenida en P_1.

Si P_1 y P_2 son paralelos, existe d_2 recta contenida en P_2 y paralela a la recta d_1.

Por proposición III.5.8, la recta $f(d_1)$ es paralela a la recta $f(d_2)$.

Luego, toda recta del plano $f(P_1)$ es paralela a una recta de $f(P_2)$

$\therefore$ $f(P_1)$ es paralelo al plano $f(P_2)$.

6. HOMOTECIAS

1. DEFINICION

Sea I un punto de $\mathcal{E}$ u un real k no nulo.

La aplicación $h: \begin{array}{l} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \\ M \longrightarrow M' \end{array}$ tal que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$,

es llamada homotecia de centro I y de razón k.

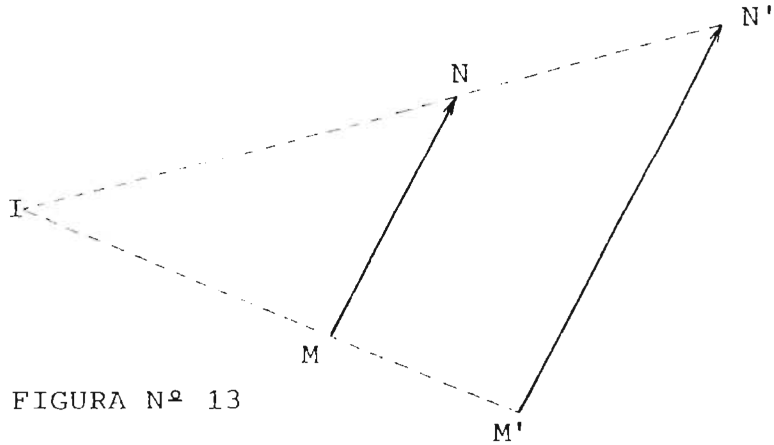


FIGURA Nº 13

2. PROPOSICION

Sea $k \in \mathbb{R}/\{0,1\}$.

Una aplicación $h: \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ A & \longrightarrow & A' \end{array}$ es una homotecia de razón K si y solamente si, para todos los puntos A y B de imágenes respectivas A' y B' por h, se tiene

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}.$$

Sea h una homotecia de razón k, A y B dos puntos de $\mathcal{H}$ de imágenes respectivas A' y B' por h.

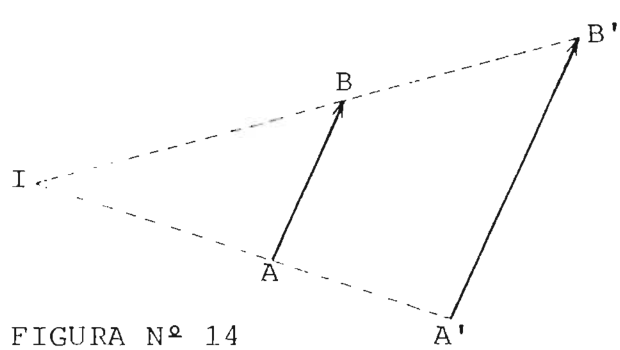


FIGURA Nº 14

Entonces a partir de la figura, tenemos por definición III. 6.1.

$$\overrightarrow{IB'} = k\overrightarrow{IB},\ k \in IR/\{0,1\}$$

$$\overrightarrow{IA'} = k\overrightarrow{IA},\ k \in IR/\{0,1\}$$

entonces

$$\overrightarrow{IB'} - \overrightarrow{IA'} = k\overrightarrow{IB} - k\overrightarrow{IA},\ k \in IR/\{0,1\}$$

$$\overrightarrow{IB'} - \overrightarrow{IA'} = k(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA})$$

$$\overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{A'I} = k(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI})$$

$$\overrightarrow{A'I} + \overrightarrow{IB'} = k(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})$$

$$\overrightarrow{A'B''} = k\overrightarrow{AB}, \text{ por relación de Chasles.}$$

3. PROPOSICION

Toda homotecia de $\mathbb{H}$ es biyectiva.

Probaremos que la homotecia $h: \begin{array}{l} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ M \longrightarrow M' \end{array}$

de razón k es inyectiva.

$$M' = N' \Longrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow k\overrightarrow{MN} = \vec{0},\ k \in IR/\{0,1\} \text{ por proposición III.6.2}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{MN} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow M = N$$

Luego, la homotecia h es inyectiva, entonces por proposición III.5.7 h es biyectiva.

CAPITULO IV

ISOMETRIAS EN EL PLANO

1. GRUPO DE ISOMETRIAS

1. DEFINICION

Una isometría de $\mathbb{H}$ es una aplicación $f: \begin{array}{l}\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}\\ A \longrightarrow A'\end{array}$ que conserva las distancias; es decir que:

$$d(A_1',A_2') = d(A_1,A_2),\ A_1,A_2 \in \mathbb{H}.$$

2. PROPOSICION

Si f y g son isometrías entonces la composición $g \circ f$ es una isometría.

DEMOSTRACION

Como f es una isometría, tenemos que:

$$f: \begin{array}{l}\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}\\ A \longrightarrow f(A)=A'\end{array} \quad ; \text{ entonces}$$

$$d(f(A),\ f(B)) = d(A,B), A,B \in \mathbb{H}. \qquad (1)$$

como g es una isometría, tenemos que:

$$g: \begin{array}{l}\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}\\ A' \longrightarrow g(A'), \text{ entonces}\end{array}$$

$$d(g(A')),\ g(B') = d(A',B'),\ A',B' \in \mathbb{H}.$$

Luego, $g \circ f: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$

$A \longrightarrow (g \circ f)(A)$

entonces

$$d(g(f(A)), g(f(B)) = d(f(A), f(B))$$

$$= d(A,B), \; A,B \in \mathbb{H}, \text{ por } \qquad (1)$$

$\therefore$ $g \circ f$ es una isometría por definición IV.1.1

3. PROPOSICION

Si f es una isometría de $\mathbb{H}$ entonces:

1º f conserva el producto escalar: $(\vec{AB}.\vec{CD} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'})$

2º f es una biyección afin.

DEMOSTRACION

Sea $f: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ una isometría.

$A \longrightarrow A'$

Sea $A,B,C \in \mathbb{H}$, probar la igualdad.

$\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{A'B'} = \vec{AC}.\vec{AB}$.

Utilizando la relación $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$ tenemos:

$$2\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'C'}^2 + \overrightarrow{A'B'}^2 - (\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'B'})^2.$$

$$= d^2(A',C') + d^2(A',B') - d^2(B',C')$$

$$= d^2(A,C) + d^2(A,B) - d^2(B,C), \text{ por ser una isometría.}$$

$$= \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - (\vec{AC} - \vec{AC})^2$$

$$= 2\,\vec{AC}.\vec{AB}.$$

DEMOSTRACION

i) Para demostrar que f es afín será suficiente verificar que:

$\vec{AC} = \alpha\vec{AB}$ se transforme en $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$.

$$(\overrightarrow{A'C'} - \alpha\overrightarrow{A'B'})^2 = \overrightarrow{A'C'}^2 - 2\alpha\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{A'B'} + \alpha^2\overrightarrow{A'B'}$$

$$= \vec{AC}^2 - 2\alpha\vec{AC}.\vec{AB} + \alpha^2\vec{AB}^2$$

$$= (\vec{AC} - \alpha\vec{AB})^2 = 0$$

de donde $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$

ii) Demostrar que f es biyectiva.

Sea $A,B \in H$; $A' = f(A)$, $B' = f(B) \in H$

"$f(A) = f(B)$ entonces $A = B$"

$A' = B'$ entonces $d(A',B') = 0$

entonces $d(A,B) = 0$, por ser f isometría

entonces $A = B$.

DEMOSTRACION DE 1º

Verifiquemos la igualdad $\vec{AB}.\vec{CD} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'}$.

Busquemos un bipunto de origen A que represente al vector $\vec{CD}$.

$(C,D) = (A,D) - (A,C) = (0,D-C)$

De aquí

$(C,D) = (A,A) + (0,D-C)$

$\quad = (A,A + D-C) = (A,H)$, de donde $\vec{AH} = \vec{CD}$.

Así:

$\vec{AB}.\vec{CD} = \vec{AB}.\vec{AH} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'H'} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'}$; por proposición III.2.1

4. PROPOSICION:

Si g es una isometría de $\mathbb{H}$, entonces su recíproca es isometría.

DEMOSTRACION

Para que g^{-1} sea una isometría, debe probarse que:

$$g^{-1}: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$
$$A \longrightarrow g^{-1}(A);\ \text{tal que}$$
$$d(g^{-1}(A), g^{-1}(B)) = d(A,B),\ A,B \in \mathbb{H}.$$

Sea g una isometría de $\mathbb{H}$ tal que

$g: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$
$\quad A \longrightarrow g(A)$, $d(g(A), g(B)) = d(A,B)$, $A,B \in \mathbb{H}$.

Sean $g^{-1}(A), g^{-1}(B) \in \mathbb{H}$, por ser g isometría es biyectiva. (proposición IV.1.3)

entonces

$$d(g(g^{-1}(A)), g(g^{-1}(B))) = d(g^{-1}(A), g^{-1}(B))$$
$$d(A,B) = d(g^{-1}(A), g^{-1}(B))$$

$\therefore$ g^{-1} es isometría

5. PROPOSICION

El conjunto de isometrías de $\mathbb{H}$ es un subgrupo del grupo de las aplicaciones afines biyectivas de $\mathbb{H}$.

Cerradura.

Se cumple de acuerdo a la proposición IV.1.2

Identidad.

Probaremos que la función identidad f es una isometría.

Como existe la función: $f: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$
$A \longrightarrow f(A) = A,$

entonces

$$d(f(A),f(B)) = d(A,B)$$
$$d(A,B) = d(A,B), \quad A,B \in \mathbb{H}.$$

Nota: Identidad: $Id\mathbb{H}$

Inversos

Se cumple de acuerdo a la proposición IV.1.4

6. PROPOSICION

La imagen de una recta L por una isometría f de $\mathbb{P}$ es entonces una recta.

DEMOSTRACIÓN

Sea $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2) \in L$, $A \neq B$.

Entonces $f(A) \neq f(B)$, $f(A)$, $f(B) \in L$, ya que las isometrías son inyectivas, entonces $f(L)$ es el conjunto de baricentros de los puntos $f(A)$ y $f(B)$, por proposición III.5.3.

2. PUNTOS INVARIANTES DE UNA ISOMETRIA

1. DEFINICION

Dada una aplicación $f: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, se dice que un punto A es un punto fijo (o invariante) de f si $f(A) = A$.

2. PROPOSICION

Sean f,g dos transformaciones del plano $\mathbb{P}$ (aplicaciones de $\mathbb{P}$ en $\mathbb{P}$) g se supone biyectiva, y

Sea $\hat{f} = g \circ f \circ g^{-1}$

Demostrar que f es biyectiva si y sólo si $\hat{f}$ lo es.

DEMOSTRACION

($\Longrightarrow$)

Como f es biyectiva f^{-1} es su inversa, luego

i) $\hat{f} \circ \hat{f}^{-1} = (g \circ f \circ g^{-1}) \circ (g \circ f^{-1} \circ g^{-1})$

$$= g\circ(f\circ g^{-1}\circ g)\circ f^{-1}\circ g^{-1}$$

$$= g\circ(f\circ Idg)\circ f^{-1}\circ g^{-1}$$

$$= g\circ(f\circ f^{-1})\circ g^{-1}$$

$$= g\circ Idf\circ g^{-1}$$

$$= g\circ g^{-1}$$

$$= IdP$$

ii) $\hat{f}^{-1}\circ\hat{f} = (g\circ f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f\circ g^{-1})$

$$= g\circ(f^{-1}\circ g^{-1}\circ g)\circ f\circ g^{-1}$$

$$= g\circ(f^{-1}\circ Idg)\circ f\circ g^{-1}$$

$$= g\circ(f^{-1}\circ f)\circ g^{-1}$$

$$= g\circ Idf\circ g^{-1}$$

$$= g\circ g^{-1}$$

$$= IdP$$

así $\hat{f}^{-1}$ es la función inversa

$\hat{f}$ es biyectiva.

($\Leftarrow$)

Sea $f = g^{-1}\circ\hat{f}\circ g$.

Como $\hat{f}$ es biyectiva $\hat{f}^{-1}$ es su inversa, luego:

i) $f\circ f^{-1} = (g^{-1}\circ\hat{f}\circ g)\circ(g^{-1}\circ\hat{f}^{-1}\circ g)$

$$= g^{-1}\circ(\hat{f}\circ g\circ g^{-1})\circ\hat{f}^{-1}\circ g$$

$$= g^{-1} \circ (\hat{f} \circ Idg) \circ \hat{f}^{-1} \circ g$$

$$= g^{-1} \circ (\hat{f} \circ \hat{f}^{-1}) \circ g$$

$$= g^{-1} \circ Id_{\hat{f}} \circ g$$

$$= g^{-1} \circ g = Id$$

ii) $f^{-1} \circ \hat{f} = (g^{-1} \circ \hat{f}^{-1} \circ g) \circ (g^{-1} \circ \hat{f} \circ g)$

$$= g^{-1} \circ (\hat{f}^{-1} \circ g \circ g^{-1}) \circ \hat{f} \circ g$$

$$= g^{-1} \circ (\hat{f}^{-1} \circ Idg) \circ \hat{f} \circ g$$

$$= g^{-1} \circ (\hat{f}^{-1} \circ \hat{f}) \circ g$$

$$= g^{-1} \circ Id\hat{q} \circ g$$

$$= g^{-1} \circ g$$

Así f^{-1} es la función inversa

f es biyectiva,

3. PROPOSICION

Sean f,g dos transformaciones del plano P (aplicaciones de P en P) g se supone biyectiva, donde $\hat{f} = g \circ f \circ g^{-1}$

Demostrar que un punto P del plano es fijado por f si y sólo si g(p) es fijado por $\hat{f}$.

Demostraremos (=>).

"$(f(P) = P) \Rightarrow (\hat{f}(g(P)) = g(P))$"

$$\hat{f}(g(P)) = (g \circ f \circ g^{-1})(g(P))$$

$$= g(f(g^{-1}(g(P))))$$

$$= g(f(P))$$

$$= g(P), \; f(P) = P \quad \text{por hipótesis}$$

Demostraremos ($\Leftarrow$).

"$(\hat{f}(g(P)) = g(P)) \Longrightarrow (f(P) = P)$"

$$f(g(P)) = g(P)$$

$$(g \circ f \circ g^{-1})(g(P)) = g(P)$$

$$g(f(g^{-1}(g(P)))) = g(P)$$

$$g(f(P)) = g(P)$$

$$g \quad (g(f(P))) = g^{-1}(g(P))$$

$$f(P) = P.$$

4. PROPOSICION

Sea f una isometría de $\mathbb{H}$.

i) Si A y B ($A \neq B$) son dos puntos fijos de f, entonces todo punto de la recta (AB) es un punto fijo de f.

ii) Si f se aplica a tres puntos fijos A,B,C no alineados entonces todo un punto del plano (ABC) es punto fijo de f.

Demostración de i).

Sea C un punto de la recta (AB):

Existen los reales α,β de suma 1 tales que C es el baricentro del sistema (A,α), (B,β) (por Propos. III.3.6); f es afin, por ello conserva el baricentro de 2 puntos ponderados (Propos. III.4.1), así f(C) es el baricentro de $(f(A),\alpha)$, $(f(B),\beta)$ y puesto que $f(A) = A$ y $f(B) = B$, f(C) es el baricentro de (A,α) y (B,β). Luego $f(C) = c$ por que f(C) y C son baricentros de (A,α) y (B,β), y la función afin relativa a los 2 puntos ponderados (A,α), (B,β) es biyectiva; se tiene que $\alpha + \beta \neq 0$ y por ello se llama baricentro de 2 puntos ponderados (A,α), (B,β) al único punto C tal que $\alpha\vec{CA} + \beta\vec{CB} = 0$ (Por Proposición III.5.1, III.3.3 y Definición III.3.4). De aquí todo punto C de la recta (AB) es un punto fijo de f.

Demostración de ii)

Sea M un punto del plano (ABC).

Existen los reales α, β, γ de suma 1 tales que M es el baricentro del sistema (A,α), (B,β), (C,γ) por proposición III.5.5; f es afín, por eso conserva el baricentro de 3 puntos ponderados, por proposición III.4.1, así f(M) es el baricentro de $(f(A),\alpha)$, $(f(B),\beta)$, $(f(C),\gamma)$ y puesto que $f(A) = A$, $f(B) = B$ y $f(C) = C$, f(M) es el baricentro de (A,α), (B,β) y (C,γ). Luego $f(M) = M$ por que f(M) y M son baricentros de (A,α), (B,β) y (C,γ), y la función afín relativa a los 3 puntos ponderados (A,α), (B,β) y (C,γ) es biyectiva; se tiene que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ y por ello se llama baricentro de 3 puntos ponderados (A,α), (B,β) y (C,γ) al único punto M tal que $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} = \vec{0}$ por proposición III.5.1, III.3.3 y definición III.3.4. De aquí todo punto M del plano (ABC) es un punto fijo de f.

Observación.

Si $\mathcal{H}$ es el plano significa, en este caso, que f es la identidad.

3. SIMETRIA AXIAL

1. DEFINICION

Dada una recta D un plano euclidiano $\mathcal{P}$. La simetría axial ortogonal del eje D es la transformación S_D que a un punto A de $\mathcal{P}$ asocia el punto A' tal que

$d(A,H) = d(H,A')$

H es la proyección ortogonal de A sobre D.

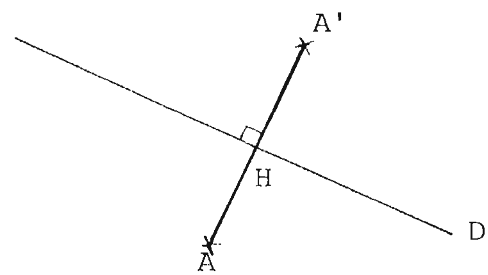


FIGURA Nº 15

1. Notación.

La simetría axial de eje D se anota por S_D.

2. Observación

El eje D es el conjunto de los puntos fijos de la simetría axial de eje D.

3. Observación

La composición de una simetría axial de eje D por si misma es la identidad del espacio $\mathbb{H}$, es decir $S_D \circ S_D = Id_{\mathbb{H}}$.

2. PROPOSICION

En el plano $\mathbb{P}$ toda simetría axial (ortogonal) es una isometría.

Sea D el eje de la Simetría axial f y B una recta perpendicular a D.

En el sistema de ejes D y B

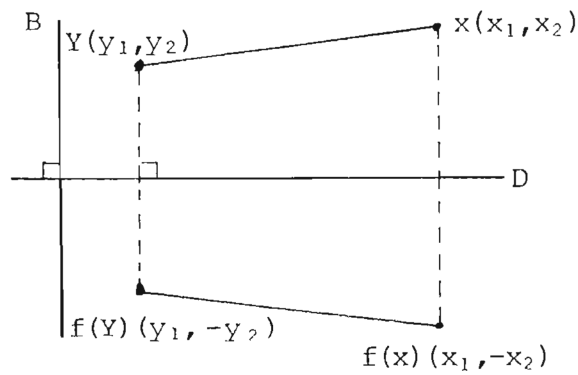


FIGURA Nº 16

Si $x = (x_1,x_2)$, $f(x) = (x_1,-x_2)$

entonces para todo $x,y \in \mathbb{P}$, se tiene que

$$d^2(f(x),f(y)) = (x_1-y_1)^2 + ((-x_2) - (-y_2))^2$$
$$= (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2$$
$$= d^2(x,y)$$

Lo que demuestra que f es una isometría.

3. PROPOSICION

Sea f una isometría plana en que el conjunto de puntos fijos es una recta D; entonces f es la simetría axial del eje D.

Demostración

Sean $M \notin D$ y $M' = f(M)$

Demostraremos primero que $M \neq M'$.

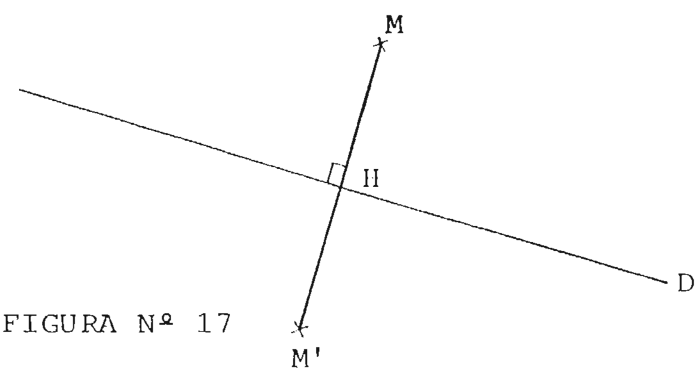


FIGURA Nº 17

Como $M \notin D$ y f es una isometría donde el conjunto de puntos invariantes es la recta D y se tiene que $f(M) \neq M'$, de aquí se deduce que $M \neq M'$.

Ahora deduciremos que f es la simetría axial S_D.

Como f es una isometría donde el conjunto de puntos invariantes es una recta D, entonces $M' = f(M)$.

$$H' = f(H) = H, \ H \in D.$$

Así $\quad d(f(M), f(H)) = d(M,H)$

$$d(M',H) = d(M,H)$$

Por lo tanto: f es una simetría axial.

4. EJEMPLO

Dar la expresión analítica de la simetría de eje D, D es la recta de ecuación x = -2.

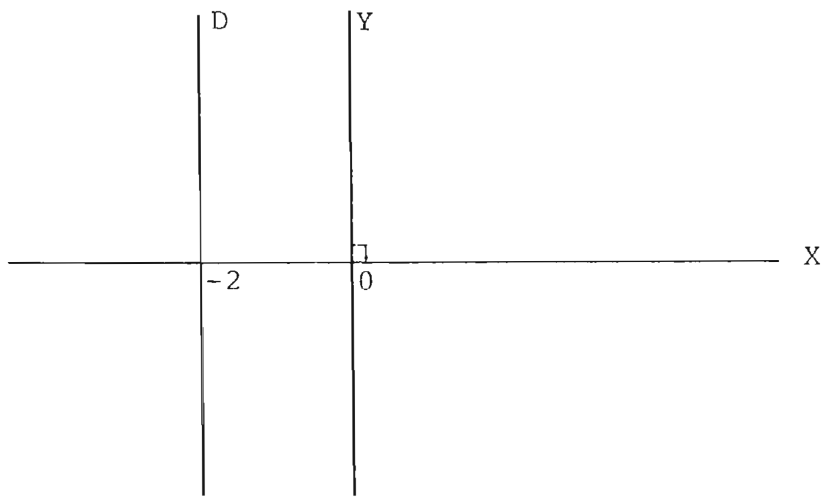


FIGURA Nº 18

Solución

Cotizaremos algunos puntos simétricos al eje D.

El simétrico de (1,1) es (-5,1)

El simétrico de (2,1) es (-6,1)

El simétrico de (3,1) es (-7,1)

.
.
.

El simétrico de (1,2) es (-5,2)

El simétrico de (2,2) es (-6,2)

El simétrico de (3,2) es (-7,2)

.
.
.

El simétrico de (1,0) es (-5,0)

El simétrico de (2,0) es (-6,0)

El simétrico de (3,0) es (-7,0)

.
.
.

El simétrico de (1,-1) es (-5,-1)

El simétrico de (2,-1) es (-6,-1)

El simétrico de (3,-1) es (-7,-1)

.
.
.

Tomando algunas parejas ordenadas cotizadas observamos que entre sus primeras componentes se manifiesta una sucesión, así:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ -5 & -6 & -7 & \ldots \end{array}$$

entonces

$$x' = -5 + (x-1)(-1)$$

$$x' = -5 - x + 1$$

$$x' = -4 - x$$

Por otra parte, las segundas componentes de las parejas ordenadas es la misma:

$$Y' = Y$$

Por lo tanto la expresión analítica de la simetría de eje D es:

$$X' = -x - 4$$

$$Y' = Y$$

4. COMPOSICION DE DOS SIMETRIAS AXIALES

1. PROPOSICION

1º La composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos es una traslación de vector ortogonal en la dirección de los ejes.

2º Recíprocamente, si t es la traslación del vector $\vec{v}$, entonces $t = S_{D_2} \circ S_{D_1}$, donde D_1 es una recta cualquiera ortogonal a $\vec{v}$ y D_2 la imágen de D_1 por la traslación del vector $\frac{1}{2}\vec{v}$.

Demostración de 1º

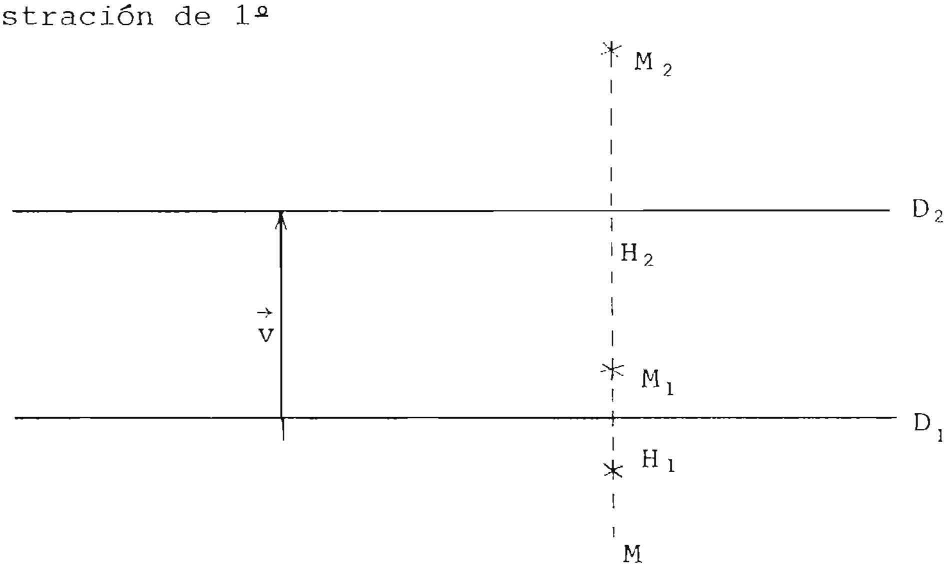


FIGURA Nº 19

Sea D_1, D_2 dos rectas paralelas de un plano.

Si $M_1 = S_{D_1}(M)$

$M_2 = S_{D_2}(M_1) = S_{D_2} \circ S_{D_1}(M)$, se tiene que:

$\vec{MM_1} = 2\overrightarrow{H_1M_1}$ y $\overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{M_1H_2}$; de donde

$\vec{MM_2} = \vec{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$

$\vec{MM_2} = 2(\overrightarrow{H_1M_1} + \overrightarrow{M_1H_2})$

$= 2\overrightarrow{H_1H_2}$, por relación de Chasles.

Si $\overrightarrow{H_1H_2} = \vec{v}$, tenemos que:

$\vec{MM_2} = 2\vec{v}$, $\forall M$

de donde $S_{D_2} \circ S_{D_1} = t_{2\vec{v}}$

Demostración de 2º)

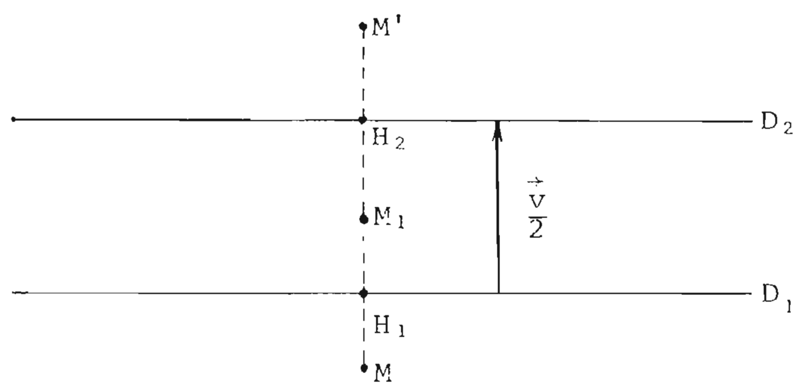


FIGURA Nº 20

La traslación $t_{\vec{v}} = S_{D_2} \circ S_{D_1}$, donde la dirección de $\vec{v}$ es ortogonal al eje D_1, D_2 es la imagen del eje D_1 por la traslación del vector $\frac{1}{2}\vec{v}$.

$$\vec{MM'} = \vec{MH_1} + \vec{H_1M_1} + \vec{M_1H_2} + \vec{H_2M'}$$

$$= 2\vec{H_1M_1} + 2\vec{M_1H_2}$$

$$= 2(\vec{H_1M_1} + \vec{M_1H_2})$$

$= 2\vec{H_1H_2}$, por relación de Chasles

$$= 2(\frac{\vec{v}}{2}) \quad ; \quad \vec{H_1H_2} = \frac{\vec{v}}{2}$$

$= \vec{v}$, $\forall$ M de donde $S_{D_2} \circ S_{D_1} = t_{\vec{v}}$

2. PROPOSICION

Si f es una simetría y g una isometría, entonces $\hat{f} = g \circ f \circ g^{-1}$ es una isometría.

DEMOSTRACION

Como f es una simetría es una isometría, por proposición IV.3.2

Por ser $g \circ f$ y g^{-1} isometrías (por propiedades IV. 1.2, IV.1.4), entonces $\hat{f}=g \circ f \circ g^{-1}$ es una isometría por proposición IV.1.2

$\therefore$ $\hat{f}$ es una isometría.

3. PROPOSICION

Sea f una simetría de eje axial D y g una isometría

$(\hat{f}(x) = (g \circ f \circ g^{-1})(x) = x) \Leftrightarrow (x \in g(D))$

DEMOSTRACION

$(\Rightarrow)$: $\quad (\hat{f}(x) = x) \Rightarrow (x \in g(D))$.

Sea x un punto fijo de $\hat{f}$

$\hat{f}(x) = (g \circ f \circ g^{-1})(x)$

$x = g(f(g^{-1}(x)))$

$g^{-1}(x) = f(g^{-1}(x))$, entonces $g^{-1}(x) \in D$ y es un punto fijo de f.

Luego, $x \in g(D)$

$(\Leftarrow)$: $\quad (x \in g(D)) \Rightarrow (\hat{f}(x) = x)$

Como $x \in g(D)$ entonces $g^{-1}(x) \in D$ y es un punto fijo de f, de donde:

$$f(g^{-1}(x)) = g^{-1}(x)$$

$$g(f(g^{-1}(x))) = x,$$

Luego, x es punto fijo de $\hat{f}$.

5. ROTACIONES

1. DEFINICION

Dado un punto 0 de P se llama rotación de centro 0 a toda isometría compuesta de dos simetrías axiales de ejes pasando por 0; si r es una rotación de centro 0, el ángulo $(\Lambda, r(\Lambda))$, es independiente de la semi recta Δ de origen 0, es denominado ángulo de la rotación.

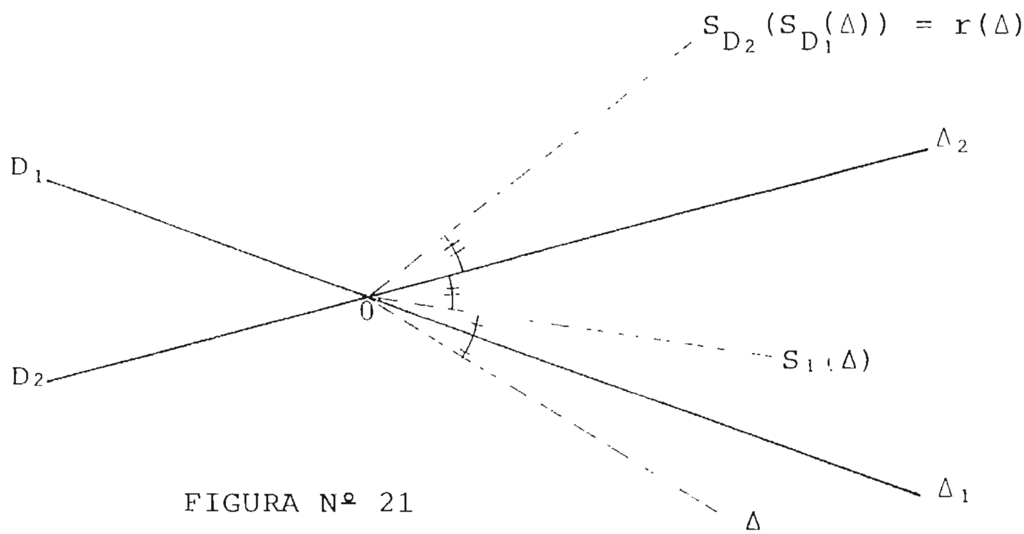


FIGURA Nº 21

1: Notación: Una rotación de centro 0 es una composición de dos simetrías axiales de ejes pasando por 0: $r(\Delta) = S_{D_2}(S_{D_1}(\Delta))$.

2: Observación: La igualdad $Id_H = S_D \circ S_D$ muestra que es una rotación; se observará que todo punto de un plano puede ser considerado como su centro y que el ángulo de la rotación es el ángulo nulo.

2. PROPOSICION

Sea r una rotación de centro 0 distinto de la identidad, entonces 0 es el único punto fijo de r.

Sean dos rectas distintas D_1 y D_2 pasando por un punto 0 y $r = S_{D_2} \circ S_{D_1}$. Demostrar que 0 es el único punto fijo de r.

a) Supongamos que $M \in D_1 \cup D_2$. Demostrar que $M = 0$.

Sea M un punto fijo de r y $M \in D_1 \cup D_2$.

Caso 1: $M \in D_1$

$(S_{D_2} \circ S_{D_1})(M) = M$

$S_{D_2}(S_{D_1}(M)) = M$

$S_{D_2}(M) = M$, ya que $M \in D_1$

como M es fijo de S_{D_2} entonces $M \in D_2$.

Luego $M = 0$.

Caso 2: $M \in D_2$.

$(S_{D_2} \circ S_{D_1})(M) = M$

$S_{D_2}(S_{D_2}(S_{D_1}(M))) = S_{D_2}(M)$

$S_{D_1}(M) = M$, ya que $M \in D_2$

Como M es fijo de S_{D_1} entonces $M \in D_1$;

Luego $M = 0$

b) Supongamos que $M \notin D_1 \cup D_2$; verificar que M y $M' = S_{D_1}(M)$ son distintos.

i) Probar que $M \neq M'$.

Como $M \notin D_1$ y S_{D_1} es una simetría donde el conjunto de puntos invariantes es la recta D_1 y se tiene que $S_{D_1}(M) \neq M'$ de aquí se deduce que $M \neq M'$.

ii) M no es invariante, $M \in D_1 \cup D_2$, entonces M = 0, ya que 0 es punto invariante.

OBSERVACIONES.

1. La proposición precedente demuestra, (la cual podría ser puesta en duda), que una rotación no es una simetría axial.

2. La rotación de centro 0, de ángulo llano, es nominada simetría de centro 0:

   Si M' es la imagen de un punto M por esta simetría entonces $\vec{OM'} = -\vec{OM}$; esta es la composición de dos simetrías de ejes ortogonales pasando por 0.

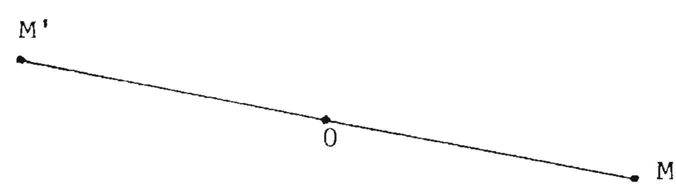


FIGURA Nº 22

3. PROPOSICION

Si r es una isometría que tiene un sólo punto fijo 0 entonces r es una rotación de centro 0.

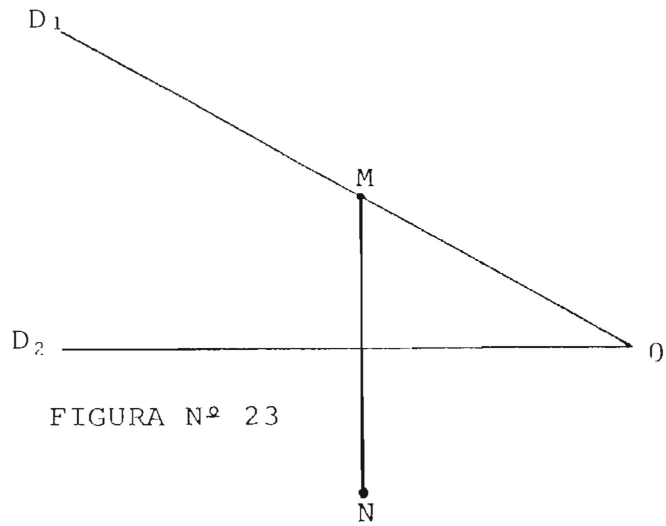


FIGURA Nº 23

Demostración.

Fijemos un punto cualquiera $M \neq 0$ y $N = r(M)$. Probemos que $M \neq N$.

Supongamos $M = N$ $M = r(M)$, entonces M es fijo, de donde $M = 0$. Por lo tanto si $M \neq 0$ entonces $M \neq N$.

Si D_2 es la mediatriz del segmento $[MN]$ entonces:

$$S_{D_2} \circ r(0) = S_{D_2}(0) = 0; \quad 0 \in D_2, \quad d(0,M) = d(0,N)$$

$$S_{D_2} \circ r(M) = S_{D_2}(N) = M$$

La isometría $S_{D_2} \circ r$ tiene entonces 2 puntos fijos 0 y M; la recta D_1 pasa por 0 y M está entonces contenida en el conjunto de puntos fijos de $S_{D_2} \circ r$: $S_{D_2} \circ r$ es la identidad ó es la simetría axial del eje D_1 (Por proposición IV.3.3)

Si $S_{D_2} \circ r = Id$ implicaría que $r = S_{D_2}$ lo que sería imposible, a causa de los dos puntos fijos.

En conclusión:

$S_{D_2} \circ r = S_{D_1} \Rightarrow (S_{D_2} \circ S_2) \circ r = S_{D_2} \circ S_{D_1} \Rightarrow r = S_{D_2} \circ S_{D_1}$

4. PROPOSICION

Si r es una rotación de centro 0 y D_1 una recta que pasa por 0 entonces existe una y sólo una recta D_2 tal que $r = S_{D_2} \circ S_{D_1}$.

Probaremos la unicidad de la recta D_2, es decir probemos que $D_2 = D_2'$.

$$\left[S_{D_2} \circ S_{D_1} = S_{D_2'} \circ S_{D_1}\right] \Rightarrow \left[S_{D_2} \circ (S_{D_1} \circ S_{D_1}) = S_{D_2'} \circ (S_{D_1} \circ S_{D_1})\right]$$

$$\Rightarrow \left[S_{D_2} = S_{D_2'} \text{ , por que } S_{D_1} \circ S_{D_1} = Id_P\right]$$

$$\Rightarrow \left[D_2 = D_2'\right]$$

5. EJEMPLO

Tomando un sistema $(0,\vec{i},\vec{j})$.

La transformación anotada $\begin{cases} x' = \psi(x,y) \\ y' = \zeta(x,y) \end{cases}$ es la transformación que a un punto M de coordenadas x,y asocia el punto M' de coordenadas $x' = \psi(x,y), y' = \zeta(x,y)$.

Mostrar que la transformación

$$x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \text{ , } y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y . \qquad (1)$$

es una rotación de centro 0.

Sea $A_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $A_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $A'_1\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}$, $A'_2\begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}$

$$(d(A'_1,A'_2))^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2$$

$$= (\frac{3}{5} x_2 + \frac{4}{5} y_2 - \frac{3}{5} x_1 - \frac{4}{5} y_1)^2 + (- \frac{4}{5} x_2 + \frac{3}{5} y_2 + + \frac{4}{5} x_1 - \frac{3}{5} y_1)^2.$$

$$= (\frac{3}{5} x_2 - \frac{3}{5} x_1 + \frac{4}{5} y_2 - \frac{4}{5} y_1)^2 + (- \frac{4}{5} x_2 + \frac{4}{5} x_1 + + \frac{3}{5} y_2 - \frac{3}{5} y_1)^2.$$

$$= (\frac{3}{5}(x_2-x_1) + \frac{4}{5}(y_2-y_1))^2 + (- \frac{4}{5}(x_2-x_1) + + \frac{3}{5}(y_2-y_1))^2$$

$$= \frac{9}{25}(x_2-x_1)^2 + \frac{24}{25}(x_2-x_1)(y_2-y_1) + \frac{16}{25}(y_2-y_1)^2 + + \frac{16}{25}(x_2-x_1)^2 - \frac{24}{25}(x_2-x_1)(y_2-y_1) + \frac{9}{25}(y_2-y_1)^2.$$

$$= (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 = (d(A_1,A_2))^2$$

Entonces $d(A'_1,A'_2) = d(A_1,A_2)$ es una isometría

Mostrar que 0 es el único punto fijo.

Para ello (1) nos queda:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3}{5} x + \frac{4}{5} y \\ y &= - \frac{4}{5} x + \frac{3}{5} y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{2}{5} x - \frac{4}{5} y &= 0 \\ \frac{4}{5} x + \frac{2}{5} y &= 0 \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones (2) por reducción, así:

$$\begin{array}{rcl} \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}y & = & 0 \\ \frac{8}{5}x + \frac{4}{5}y & = & 0 \\ \hline 2x & = & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad x = 0$$

Sustituyendo $x = 0$ en una de las ecuaciones de (2) para obtener el valor de Y, así:

$$\frac{2}{5}(0) - \frac{4}{5}y = 0 \Rightarrow -\frac{4}{5}y = 0 \Rightarrow y = 0$$

De donde $0 = (0,0)$ y es el único punto fijo.

$\therefore$ La transformación es una rotación

6. PROPOSICION

Sean f, g dos transformaciones del plano $\mathbb{P}$ (aplicaciones de $\mathbb{P}$ en $\mathbb{P}$), g se supone biyectiva:

Sea

$$\hat{f} = g \circ f \circ g^{-1}$$

Si f es una rotación y g una isometría, entonces $\hat{f}$ es una rotación de centro $g(0)$.

DEMOSTRACION

Como f es una rotación, entonces $f = S_{D_1} \circ S_{D_2}$

Se tiene $\hat{f} = g \circ S_{D_1} \circ S_{D_2} \circ g^{1}$

$$\hat{f} = (g \circ S_{D_1}) \circ (S_{D_2} \circ g^{-1})$$

Sea y punto fijo de $\hat{f}$.

$\hat{f}(y) = (g \circ S_{D_1} \circ S_{D_2} \circ g^{-1})(y)$

$y = g(S_{D_1}(S_{D_2}(g^{-1}(y))))$

$g^{-1}(y) = S_{D_1}(S_{D_2}(g^{-1}(y)))$

$g^{-1}(y) = r(g^{-1}(y))$

$g^{-1}(y) = 0$ Por Proposicion IV.4.2

entonces $y = g(0)$

entonces $\hat{f}$ es una rotación de centro g(0).

7. OBSERVACION

Se tiene así el resultado siguiente:

Para toda recta D_1 pasando por 0 existe una recta D_3 tal que $r = S_{D_1} \circ S_{D_2}$ (es suficiente aplicar el resultado precedente a r^{-1}, que es una rotación de centro 0).

8. PROPOSICION

El conjunto de las rotaciones de centro 0, dotado de la ley de composición, es un grupo conmutativo.

a) Cerradura.

Sea $r = S_{D_2} \circ S_{D_1}$, $r' = S_{D_3} \circ S_{D_2}$ rotaciones de centro 0. Probar que $r' \circ r = r''$, pertenece al conjunto de rotaciones de centro 0.

$$r' \circ r = (S_{D_3} \circ S_{D_2}) \circ (S_{D_2} \circ S_{D_1})$$

$$= S_{D_3} \circ (S_{D_2} \circ S_{D_2}) \circ S_{D_1}$$

$$= S_{D_3} \circ S_{D_1}$$

$$= r''$$

b) Identidad.

Para que r sea la rotación identidad de centro 0 debe probarse que para todo $M \in \mathcal{P}$ se cumple que $r(M) = M$

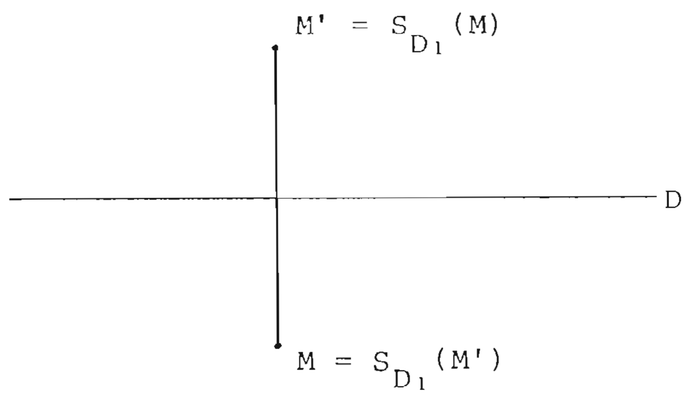


FIGURA Nº 24

Sea $M \in \mathcal{P}$, $M' = D_{D_1}(M) \in \mathcal{P}$, $M = S_{D_1}(M') \in \mathcal{P}$

entonces

$$r(M) = (S_{D_1} \circ S_{D_1})(M)$$

$$= S_{D_1}(S_{D_1}(M))$$

$$= S_{D_1}(M')$$

$$= M$$

c) Inversos

Para que r^{-1} sea rotación recíproca de r, de centro 0, se debe probar que

$$r^{-1} = S_{D_2} \circ S_{D_1}$$

Sea r rotación de centro 0 tal que

$r = S_{D_1} \circ S_{D_2} \Rightarrow r \circ r^{-1} = (S_{D_1} \circ S_{D_2}) \circ r^{-1}$, r^{-1} es la recíproca de r, ya que es biyectiva.

$$\Rightarrow Id_P = (S_{D_1} \circ S_{D_2}) \circ r^{-1}$$

$$\Rightarrow S_{D_1} = (S_{D_1} \circ S_{D_1}) \circ S_{D_2} \circ r^{-1}$$

$$\Rightarrow S_{D_1} = S_{D_2} \circ r^{-1}, \; Id_P = S_{D_1} \quad S_{D_1}$$

$$\Rightarrow S_{D_2} \circ S_{D_1} = (S_{D_2} \circ S_{D_2}) \circ r^{-1}$$

$$\Rightarrow S_{D_2} \circ S_{D_1} = r^{-1}, \; Id_P = S_{D_2} \circ S_{D_2}.$$

d) Conmutatividad

Sea r y r' dos rotaciones de centro 0; demostrar que

$r \circ r' = r' \circ r$

Sea $r = S_{D_2} \circ S_{D_1}$ y $r' = S_{D_3} \circ S_{D_2}$.

$$r' \circ r = (S_{D_3} \circ S_{D_2}) \circ (S_{D_2} \circ S_{D_1})$$

$$= S_{D_3} \circ (S_{D_2} \circ S_{D_2}) \circ S_{D_1}$$

$$= S_{D_3} \circ S_{D_1}$$

Aplicando la observación IV.5.7

$$= S_{D_1} \circ S_{D_3}$$

$$= S_{D_1} \circ (S_{D_2} \circ S_{D_2}) \circ S_{D_3}$$

$$= (S_{D_1} \circ S_{D_2}) \circ (S_{D_2} \circ S_{D_3})$$

$$= r \circ r'$$

6. DESPLAZAMIENTO, ANTIDESPLAZAMIENTO.

1. DEFINICION

Se llama desplazamiento de un plano a toda isometría que se escribe como la composición de dos simetrías axiales, Antidesplazamiento es toda isometría que no es un desplazamiento.

OBSERVACION

Un desplazamiento es entonces una traslación o una rotación.

2. PROPOSICION

El conjunto de desplazamientos es un sub-grupo del grupo de isometrías planas.

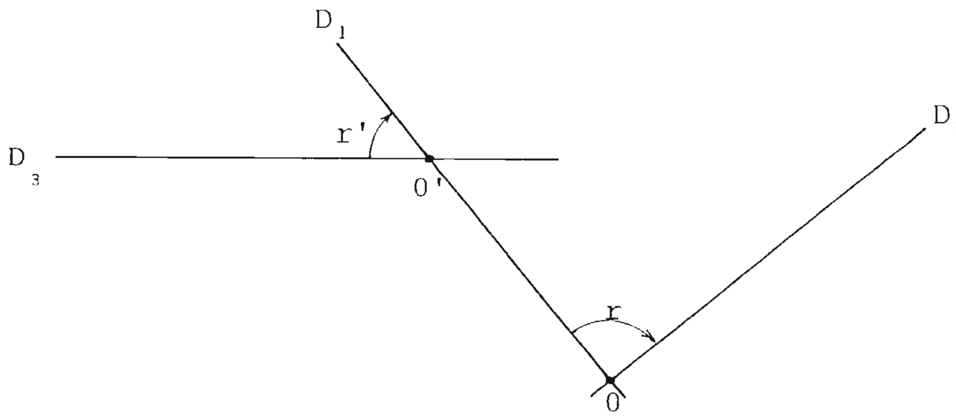


FIGURA Nº 25

DEMOSTRACION

Probaremos que la composición de dos rotaciones es un desplazamiento.

Sean r una rotación de centro 0

r' otra rotación de centro 0' y

D_1 una recta pasando por 0 y 0'.

Existe una recta D_2 tal que $r = S_{D_1} \circ S_{D_2}$ y

una recta D_3 tal que $r' = S_{D_3} \circ S_{D_1}$;

donde $r' \circ r = (S_{D_3} \circ S_{D_1}) \circ (S_{D_1} \circ S_{D_2})$

$= S_{D_3} \circ (S_{D_1} \circ S_{D_1}) \circ S_{D_2}$

$= S_{D_3} \circ S_{D_2}$

$r' \circ r$ es una composición de dos simetrías, es entonces un desplazamiento.

Probaremos que la composición de dos traslaciones es un desplazamiento.

Sean $t_{\vec{v}}$ una traslación de vector $\vec{v}$.

$t_{\vec{u}}$ es otra traslación de vector $\vec{u}$.

D_2 es una recta que es común a las traslaciones $t_{\vec{v}}$ y $t_{\vec{u}}$.

Existe una recta D_1 tal que $t_{\vec{v}} = S_{D_2} \circ S_{D_1}$

y una recta D_3 tal que $t_{\vec{u}} = S_{D_3} \circ S_{D_2}$

donde

$$t_{\vec{u}} \quad t_{\vec{v}} = (S_{D_3} \circ S_{D_2}) \circ (S_{D_2} \circ S_{D_1})$$

$$= S_{D_3} \circ (S_{D_2} \circ S_{D_2}) \circ S_{D_1}$$

$$= S_{D_3} \circ S_{D_1} \quad ; \quad S_{D_2} \circ S_{D_2} = Id_H.$$

$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ es una composición de dos simetrías axiales, es entonces un desplazamiento.

Probaremos que la composición de una rotación y una traslación es un desplazamiento.

Sea r una rotación de centro 0.

$t_{\vec{u}}$ una traslación de vector $\vec{u}$.

D_2 es una recta pasando por 0 y paralela a D_1.

Existe una recta D_3 tal que $r = S_{D_3} \circ S_{D2}$

una recta D_1 tal que $t_{\vec{u}} = S_{D_2} \circ S_{D_1}$

donde

$$r \circ t_{\vec{u}} = (S_{D_3} \circ S_{D_2}) \circ (S_{D_2} \circ S_{D_1})$$

$$= S_{D_3} \circ (S_{D_2} \circ S_{D_2}) \circ S_{D_1}$$

$$= S_{D_3} \circ S_{D_1}, \quad S_{D_2} \circ S_{D_2} = Id_{\mathbb{H}}.$$

$r \circ t_{\vec{u}}$ es una composición de dos simetrías axiales, es entonces un desplazamiento.

Para $t_{\vec{u}} \circ r$ ocurre que es un desplazamiento.

Identidad

Probaremos que existe el desplazamiento identidad f.

Como existe la isometría

$$\begin{aligned} f: \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ A &\longrightarrow f(A) = (S_D \circ S_D)(A) = A. \end{aligned}$$

entonces $f = S_D \circ S_D$ es una composición de dos simetrías axiales, es entonces un desplazamiento.

Inversos.

Para que f^{-1} sea un desplazamiento se debe de probar que

$$f^{-1} = S_{D_1} \circ S_{D_2}$$

Sea f un desplazamiento entonces $f = S_{D_2} \circ S_{D_1}$

Luego

$$f^{-1} \circ f = (S_{D_1} \circ S_{D_2}) \circ (S_{D_2} \circ S_{D_1})$$

$$= S_{D_1} \circ (S_{D_2} \circ S_{D_2}) \circ S_{D_1}$$

$$= S_{D_1} \circ S_{D_1} \quad , \quad S_{D_2} \circ S_{D_2} = Id_H$$

$$= Id_H .$$

$\therefore \quad f^{-1} = S_{D_1} \circ S_{D_2}$ es un desplazamiento.

3. PROPOSICION

La composición de un desplazamiento y un antidesplazamiento es un antidesplazamiento.

DEMOSTRACION

Sea f un desplazamiento, g un antidesplazamiento y $h = f \circ g$.

Si h es un desplazamiento la igualdad:

$g = f^{-1} \circ h$ probaría que g es un desplazamiento, lo cual no lo es.

h es entonces un antidesplazamiento.

7. DESCOMPOSICION EN SIMETRIAS

1. PROPOSICION

Toda isometría plana es la composición a lo sumo de tres simetrías axiales.

DEMOSTRACION

Sea f una isometría cualquiera de $\mathcal{P}$.

Sea $A \in \mathcal{P}$ y $A' = f(A)$. Designemos por D_1 la mediatríz del segmento $[AA']$ si $A \neq A'$. Si no una recta cualquiera pasando por A; se tiene entonces:

$$(S_{D_1} \circ f)_{(A)} = S_{D_1}(A') = A$$

Al decir que A es un punto fijo de $S_{D_1} \circ f$; tenemos tres casos posibles:

i) $S_{D_1} \circ f = Id$ entonces $f = S_{D_1}$.

como $S_{D_1} \circ f = Id$.

$$S_{D_1} \circ f = S_{D_1} \circ S_{D_1} \Rightarrow (S_{D_1} \circ S_{D_1}) \circ f = (S_{D_1} \circ S_{D_1}) \circ S_{D_1}$$

$$\Rightarrow \qquad f = S_{D_1}$$

ii) $S_{D_1} \circ f$ es distinta de la identidad pero se tiene otro punto fijo, $S_{D_1} \circ f$ es entonces una simetría: f es la composición de dos simetrías.

Como S_D $f = S_D$, S_D Simetría axial de eje D .

$(S_{D_1} \circ S_{D_1}) \circ f = S_{D_1} \circ S_{D_2} \Rightarrow f = S_{D_1} \circ S_{D_2}$.

iii) $S_{D_1} \circ f$ con un solo punto fijo A: es una rotación r de centro A. $S_{D_1} \circ f = r$ entonces $f = S_{D_1} \circ r$:

f es la composición de tres simetrías.

Como r es una rotación de centro A, $r = S_{D_2} \circ S_{D_3}$

donde S_{D_2} : Simetría axial de eje D_2

S_{D_3} : Simetría axial de eje D_3

$S_{D_1} \circ f = r$

$S_{D_1} \circ f = S_{D_2} \circ S_{D_3} \Rightarrow (S_{D_1} \circ S_{D_1}) \circ f = S_{D_1} \circ (S_{D_2} \circ S_{D_3})$

$\Rightarrow \qquad f = S_{D_1} \circ S_{D_2} \circ S_{D_3}$

8. SIMETRIAS DESLIZANTES

1. DEFINICION

Una simetría deslizante de eje D es la composición de una simetría axial de eje D y de una traslación del vector de D no nulo.

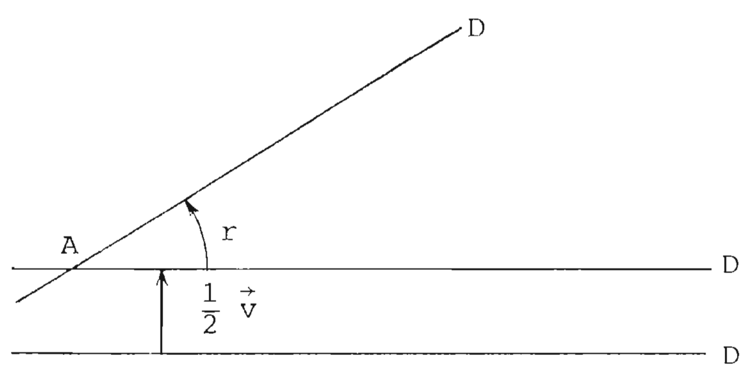


FIGURA Nº 26

Estudiaremos que $f = S_D \circ r$ donde r es una rotación de centro A.

Sea D_1 la recta pasando por A paralela a D; existe una recta D_2 tal que $r = S_{D_1} \circ S_{D_2}$, de donde:

$f = S_D \circ (S_{D_1} \circ S_{D_2}) = (S_D \circ S_{D_1}) \circ S_{D_2} = t_{\vec{v}} \circ S_{D_2}$

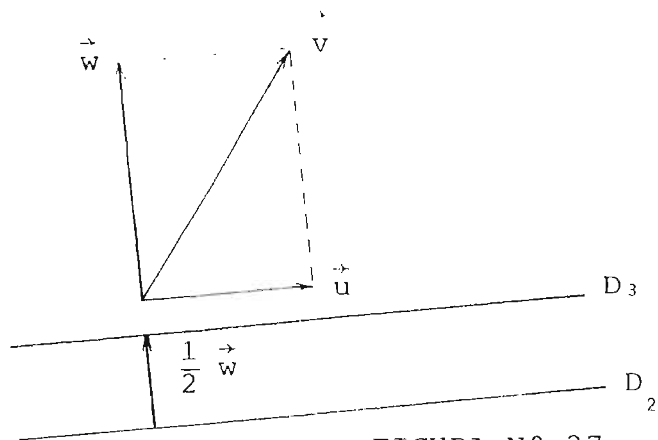


FIGURA Nº 27

Descomponiendo $\vec{v}$ en un vector $\vec{u}$ de D_2 y un vector $\vec{w}$ ortogonal a D_2: $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$.

De la igualdad $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ se tiene

$t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{w}}$, de donde: $f = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{w}} \circ S_{D_2}$.

Sea D_3 la recta paralela a D_2 definiendo $t_{\vec{w}} = S_{D_3} \circ S_{D_2}$, entonces $t_{\vec{w}} \circ S_{D_2} = (S_{D_3} \circ S_{D_2}) \circ S_{D_2}$ de donde $t_{\vec{w}} \circ S_{D_2} = S_{D_3}$

Así $f = t_{\vec{u}} \circ S_{D_3}$, $\vec{u}$ es un vector de D_3.

Se notará que si $\vec{u} = \vec{0}$ entonces f es una simetría.

2. PROPOSICION

Sea D una recta y $\vec{u}$ un vector de D:

1º $S_D \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_D$.

2º Si $\vec{u} \neq 0$, entonces $t_{\vec{u}} \circ S_D$ no tiene punto fijo pero no es una traslación.

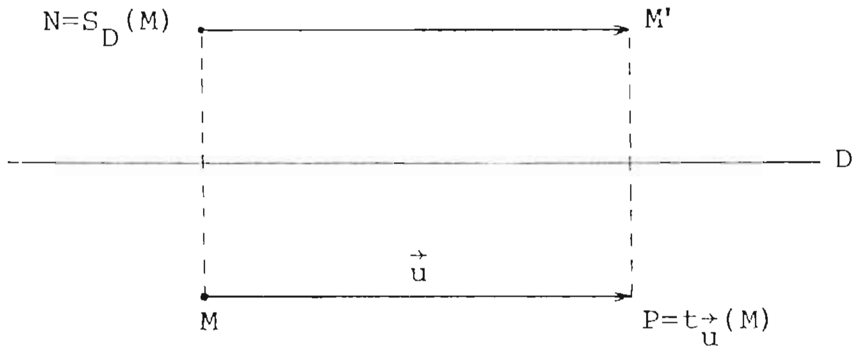


FIGURA Nº 28

Demostración de 1º

Sea $P = t_u(M)$, $M' = S_D(P)$.

i) $\quad (S_D \circ t_u)(M) = S_D(t_u(M))$

$$= S_D(P)$$

$$= M'$$

Sea $S_D(M) = M$, $M' = t_{\vec{u}}(N)$

ii) $\quad (t_{\vec{u}} \circ S_D)(M) = t_{\vec{u}}(S_D(M))$

$$= t_u(N) = M'$$

Demostración de 2º

Si $N = S_D(M)$, $M' = t_u(N)$ entonces:

$\vec{MM'} = \vec{MN} + \vec{NM'}$ pues

$d^2(M,M') = d^2(M,N) + d^2(N,M')$, $(\vec{MN}.\vec{NM'} = 0$, $\vec{MN} \perp \vec{NM'})$

entonces $d^2(M,M') \geq \vec{u}^2 = d^2(M,P)$.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, para todo M se tiene que $d(M,M') \neq 0$

entonces $M \neq M'$

Además si $t_{\vec{u}} \circ S_D$ es una traslación $t_{\vec{v}}$ se tendría:

$t_{\vec{u}} \circ S_D = t_{\vec{v}}$ entonces $(t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}}) \circ S_D = t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$

de donde $S_D = t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}-\vec{u}}$ ó

$S_D \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}}$ entonces $S_D \circ (t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}}) = t_{\vec{v}} \circ t_{-\vec{u}}$

de donde $S_D = t_{\vec{v}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{-\vec{u}+\vec{v}}$.

3. EJEMPLO

Demostrar que la transformación $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 3 \end{cases}$ es

una simetría deslizante de la cual se precisará el eje y el vector

Sea f la transformación.

La escribimos como:

$f = t_{\vec{v}} \circ S_{D_1}$, donde S_{D_1}

es la simetría de eje D_1

y $t_{\vec{v}}$ la traslación de

vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

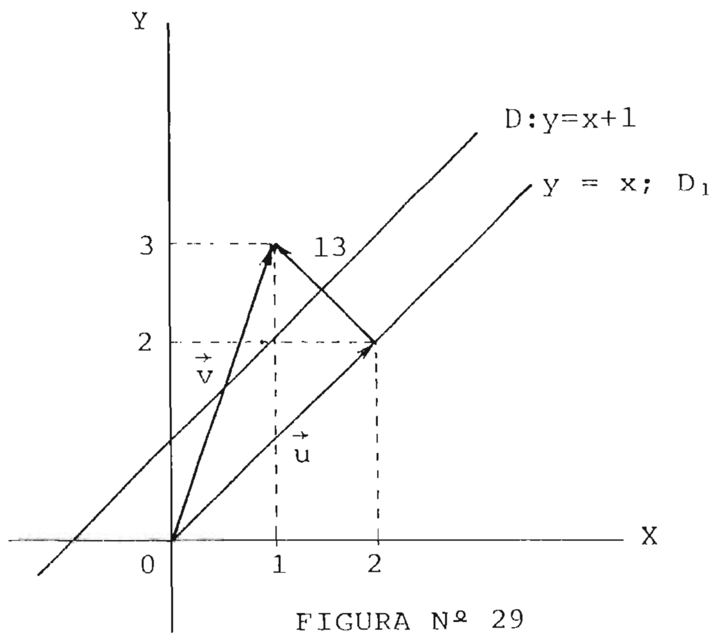


FIGURA Nº 29

Entonces $f(x,y) = t_{\vec{v}}(S_{D_1}(x,y))$

$$(y+1,x+3) = t_{\vec{v}}(S_{D_1}(x,y))$$

$$t_{-\vec{v}}(y+1,x+3) = S_{D_1}(x,y)$$

$$(y,x) = S_{D_1}(x,y)$$

S_{D_1} es la simetría de eje la recta $y = x$.

$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, con $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donde $f = t_{\vec{u}} \circ (t_{\vec{w}} \circ S_{D_1})$

$t_{\vec{w}} \circ S_{D_1}$ es la simetría axial de eje D.

$S_D = (t_{\vec{w}} \circ S_{D_1})(x,y) = t_{\vec{w}}(S_{D_1}(x,y)) = t_{\vec{w}}(y,x) = (y-1,x+1)$.

de donde D es la recta de ecuación $y = x+1$.

9. ANGULOS DE SEMIRECTAS

1. DEFINICION

Sobre el conjunto de las parejas de semi-rectas del mismo origen se considera la relación:

(Δ_1,Δ_2) está en relación con (Δ_1', Δ_2') si existe un desplazamiento f tal que:

$$f(\Delta_1) = \Delta_1' \quad y \quad f(\Delta_2) = \Delta_2'.$$

Notación.

La clase de una pareja de semi-rectas del mismo origen se anota $(\widehat{\Delta_1,\Delta_2})$ y se denomina ángulo de (Δ_1,Δ_2).

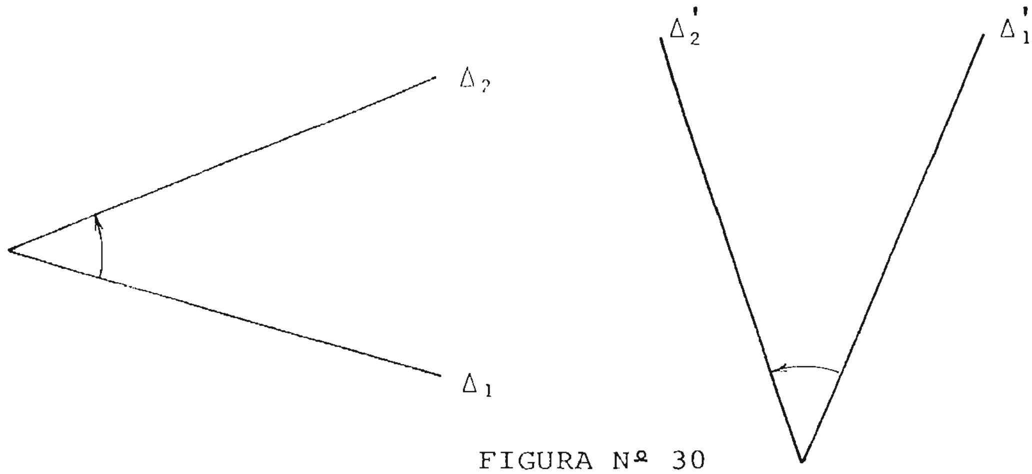


FIGURA Nº 30

2. DEFINICION

Sobre el conjunto $\mathcal{A}$ de ángulos se define la suma

$(\widehat{\Delta_1,\Delta_2}) + (\widehat{\Delta_2,\Delta_3}) = (\widehat{\Delta_1,\Delta_3})$ que llamaremos relación de Chasles.

3. DEFINICION

Fijando un punto 0 de un plano y anotemos por $\mathcal{R}_o$ el grupo de rotaciones de centro 0.

Sea $f \in \mathcal{R}_o$ y Δ una semi-recta de origen 0; el ángulo $(\widehat{\Delta,f(\Delta)})$ es independiente de Δ: se obtiene así una aplicación:

$$\mathcal{R}_o \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}$$
$$f \longrightarrow (\widehat{\Delta,f(\Delta)})$$

ϕ es una biyección que transforma la composición de dos rotaciones de centro 0 en la suma de sus ángulos; es decir:

$\forall f,g \in R_0,\ \phi(f \circ g) = \phi(f) + \phi(g)$.

Sean $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ dos vectores no nulos, es dado un punto 0 de un plano. Sea Δ_1 (respectivamente Δ_2) la semi-recta de origen 0 cambiado por $\vec{u}_1$ (respectivamente por $\vec{u}_2$): el ángulo $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$ no depende de 0 y se anota $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$.

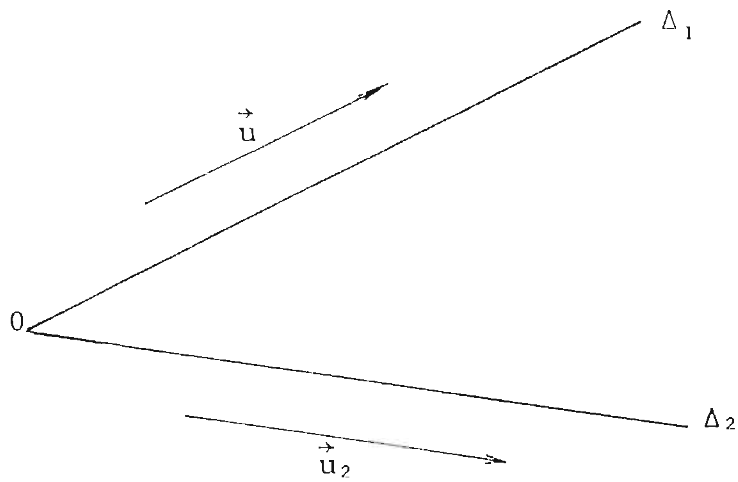


FIGURA Nº 31

10. ANGULO DE RECTAS

1. DEFINICIONES

Se llama ángulo de rectas todo par $\{a,b\}$ de ángulos (de semi-rectas) que difieren de un ángulo llano (a-b es un ángulo llano).

Dadas dos rectas D_1 y D_2, se llama ángulo de una pareja dc rectas (D_1,D_2) el ángulo de rectas $\{(\vec{u}_1,\vec{u}_2),\ (-\vec{u}_1,\vec{u}_2)\}$ donde $\vec{u}_1$ (respectivamente $\vec{u}_2$) es un vector director de D_1 (respectivamente D_2); se le anota $\widehat{(D_1,D_2)}$.

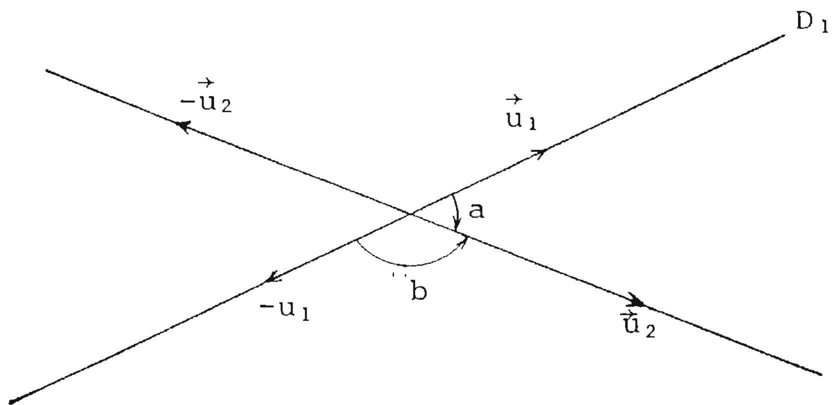


FIGURA Nº 32

De la figura 31:

Sea D_1 y D_2 dos rectas, $\vec{u}_1$ (respectivamente $\vec{u}_2$) un vector director de D_1 (respectivamente de D_2); $-\vec{u}_1$ (respectivamente $\vec{u}_2$) es así un vector director de D_1 (respectivamente D_2) y se tiene:

$\widehat{(\vec{u}_1,-\vec{u}_2)} = \widehat{(\vec{u}_1,\vec{u}_2)}$ + ángulo llano

$\widehat{(-\vec{u}_1,\vec{u}_2)} = \widehat{(\vec{u}_1,\vec{u}_2)}$ + ángulo llano

$\widehat{(-\vec{u}_1,-\vec{u}_2)} = \widehat{(\vec{u}_1,\vec{u}_2)}$.

11. ADICION DE ANGULOS DE RECTAS

1. DEFINICION

La suma de dos ángulos de rectas $w_1 = \{a_1, b_1\}$, $w_2 = \{a_2, b_2\}$ es definida por $w_3 = \{a_1 + a_2, a_2 + b_2\}$.

Dados dos ángulos de rectas w_1, w_2 tal que $w_1 = \{a_1, b_1\}$. $w_2 = \{a_2, b_2\}$ se tiene, según figura 33, que $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$, $a_1 + b_2$, $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$ y que los ángulos $a_1 + a_2$, $a_1 + b_2$ difieren de un ángulo llano

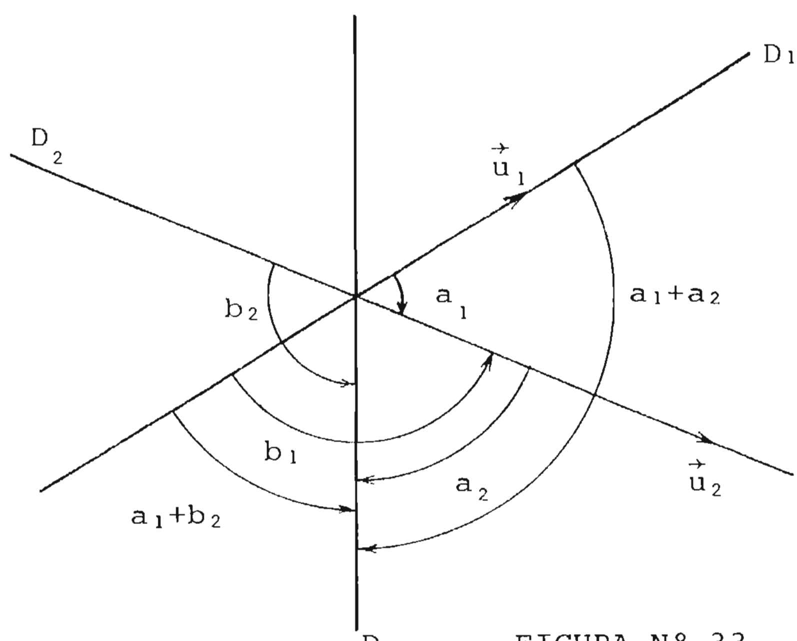


FIGURA Nº 33

2. PROPOSICION

1º El conjunto de ángulos de rectas tienen una estructura de grupo conmutativo, para la adición de ángulos de rectas; el elemento neutro de esta ley es el par $\{\hat{0}$, ángulo llano$\}$

2º Si D_1, D_2, D_3 son tres rectas de un plano, se tiene la relación de Chasles:

$$(\widehat{D_1, D_2}) + (\widehat{D_2, D_3}) = (\widehat{D_1, D_3}).$$

Demostración de 1º

i) Cerradura se cumple por definición IV.11.1.

ii) Asociatividad.

Sea $w_1 = \{a_1, b_1\}$, $w_2 = \{a_2, b_2\}$, $w_3 = \{a_3, b_3\}$ ángulos de rectas del conjunto de ángulos Λ.

Verificar que se cumple:

$$w_1 + (w_2 + w_3) = (w_1 + w_2) + w_3.$$

$$\begin{aligned}
w_1 + (w_2 + w_3) &= \{a_1, b_1\} + (\{a_2, b_2 \;+\; a_3, b_3\}) \\
&= \{a_1, b_1\} + \{a_2 + a_3,\ a_2 + b_3\} \\
&= \{a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + b_3\} \\
(w_1 + w_2) + w_3 &= (\{a_1, b_1\} + \{a_2, b_2\}) + \{a_3, b_3\}. \\
&= \{a_1 + a_2, a_1 + b_2\} + \{a_3, b_3\}. \\
&= \{a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + b_3\}.
\end{aligned}$$

iii) Identidad por la derecha

En el conjunto de ángulos Λ

Probaremos que:

$\exists$ la identidad por la derecha $x \in \Lambda$, $\forall w_1 \in \Lambda$ tal que $w_1 + x = w_1$.

Sean $w_1 = \{a_1, b_1\}$, $x = \{x_1, x_2\} \in A$.

$w_1 + x = \{a_1, b_1\} + \{x_1, x_2\} = \{a_1, b_1\} = w_1$.

$\Rightarrow \{a_1 + x_1,\ a_1 + x_2\} = \{a_1, b_1\}$

$\Rightarrow a_1 + x_1 = a_1,\ a_1 + x_2 = b_1$

$\Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = b_1 - a_1$

$\therefore\ x = \{\hat{0}, b_1 - a_1\} = \{\hat{0}$, Angulo llano$\}$.

iv) Inverso por la derecha.

En el conjunto de ángulos A.

Probaremos que:

$\forall w_1 \in A$, $\exists$ inverso por la derecha $y \in A$ tal que:

$w_1 + y = \{\hat{0}$, Angulo llano$\}$

Sean $w_1 = \{a_1, b_1\}$, $y = \{y_1, y_2\} \in A$.

$w_1 + y = \{a_1, b_1\} + \{y_1, y_2\} = \{\hat{0}$, Angulo llano$\}$

$\Rightarrow \{a_1 + y_1,\ a_1 + y_2\} = \{\hat{0},\ b_1 - a_1\}$

$\Rightarrow a_1 + y_1 = \hat{0}\ ,\ a_1 + y_2 = b_1 - a_1$.

$\Rightarrow y_1 = -a_1 \wedge y_2 = b_2 - 2a_1$

$\therefore\ y = \{y_1, y_2\} = \{-a_1, b_1 - 2a_1\}$.

v) Conmutatividad

En el conjunto de ángulos A

Verificaremos que:

rectas $(\widehat{D_1,D_2})$ si existe un vector director $\vec{u}_1$ de D_1 (respectivamente $\vec{u}_2$ de D_2) tal que x sea una medida del ángulo $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$.

Observación.

Las medidas de los ángulos seran expresados en radianes.

C A P I T U L O   V

ISOMETRIAS EN EL ESPACIO

1. IMAGEN DE UNA RECTA, DE UN PLANO POR UNA ISOMETRIA

1. PROPOSICION

Sea f una isometría del espacio euclidiano $\mathbb{E}$.

La imagen de una recta L por la isometría f de $\mathbb{E}$ es una recta.

Sea $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2) \in L$, $A \neq B$.

Entonces $f(A) \neq f(B)$, $f(A), f(B) \in f(L)$,

ya que las isometrías son inyectivas.
entonces f(L) es el conjunto de baricentros de los puntos f(A) y f(B) (por proposición III.5.2).

2. PROPOSICION

Si A y B son puntos fijos de la isometría f, entonces f(AB) = (AB); además, todos los puntos de la recta (AB) son puntos fijos de f.

Demostración

Sea $f: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ una isometría

Todos los puntos de la recta (AB) son puntos fijos de f, porque el conjunto de baricentros de dos puntos distintos

A y B de E es la recta (AB) (por proposición III.5.2), y si (AB) es el conjunto de los baricentros de n puntos A_i, siendo f afin biyectiva (por proposición IV.1.3), entonces f(AB) es el conjunto de baricentros de los n puntos $f(A_i)$ (por proposición III.5.1).

3. PROPOSICION

La imagen de un plano por una isometría de E es un plano.

Demostración.

Sea f una isometría de E.

Sea P un plano de E, A,B y C tres puntos no alineados de P, entonces f(A), f(B) y f(C) son imágenes distintas y puntos no alineados de f(P) (por ser f isometría es inyectiva) entonces f(P) es el conjunto de baricentros de los puntos f(A), f(B) y f(C) (por proposiciones III.5.1 y III.5.6).

Debemos probar que:

Si los puntos f(A), f(B) y f(C) no son alineados entonces la imagen por f de un plano P es el plano f(P).

Supongamos que los puntos f(A), f(B) y f(C) son alineados.

La aplicación f^{-1} es una isometría, entonces los puntos $f^{-1}(f(A))$, $f^{-1}(f(B))$ y $f^{-1}(f(C))$, es decir A,B y C serían entonces alineados, lo cual es contrario a lo que se afirma para A,B y C.

4. PROPOSICION

Si A,B y C son puntos fijos de una isometría f, no alineados, entonces, (ABC) designa el plano pasando por A,B y C:

f(ABC) = (ABC);

Todos los puntos del plano (ABC) son puntos fijos de f.

Demostración.

Todos los puntos del plano (ABC) son fijos de f, por que si A,B,C son tres puntos no alineados de $\mathbb{H}$, el conjunto de baricentros de A,B y C es el plano (ABC) (proposición III.5.5), y si (ABC) es el conjunto de baricentros de n puntos A_i, siendo f afin biyectiva (proposición IV.1.3), entonces f(ABC) es el conjunto de baricentros de los n puntos $f(A_i)$ (proposición III.5.1).

5. PROPOSICION

Si una isometría de $\mathbb{E}$ admite 4 puntos fijos no coplanares entonces la isometría es la aplicación identidad de $\mathbb{E}$.

Demostración

Sea f una isometría que deja fijos cuatro puntos no coplanares A,B,C y D. Los puntos del plano (ABC) son fijos de f.

Sea $M \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$

a) Si la recta (MD) no es paralela al plano (ABC), (MD) tiene al menos dos puntos fijos. Probar que $f(M) = M$.

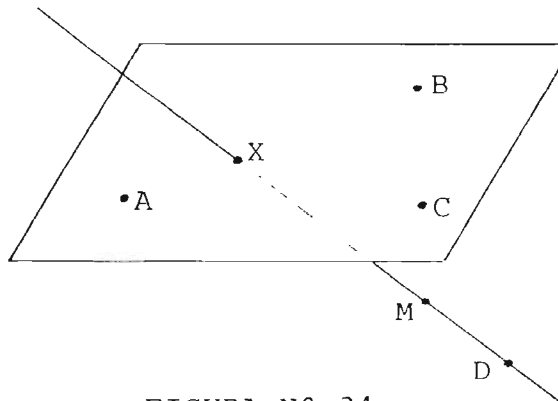


FIGURA Nº 34

Como X es fijado por f y por hipótesis D es fijado por f, entonces X y D son puntos fijos de f. Entonces $f(XD) = (XD)$, a lo sumo todos los puntos de la recta son puntos fijos de f, por proposición V.1.4. Por lo tanto, como $M \in (XD)$, entonces $f(M) = M$.

b) Si la recta (MD) es paralela al plano (ABC), existen los puntos H y K del plano (ABC) tales que $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{HK}$.

Probar que $f(M) = M$.

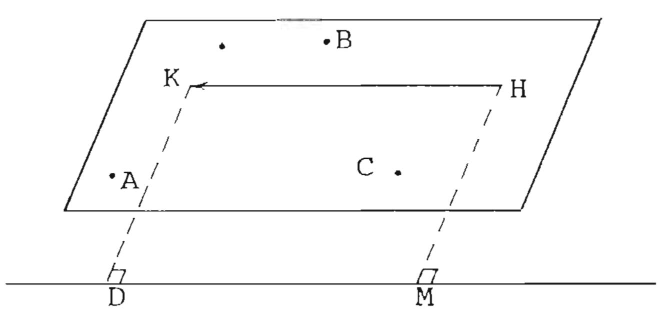


FIGURA Nº 35

Sea H = Proyección de M

K = Proyección de D,

entonces

$$d(M,H) = d(D,K).$$

Por Pitágoras, tenemos que:

$$d^2(H,M) + d^2(M,d) = d^2(H,D) \qquad (1)$$

$$d^2(H,K) + d^2(K,D) = d^2(H,D) \qquad (2)$$

Como $d(M,H) = d(D,K)$, tenemos que (1) nos queda:

$$d^2(K,D) + d^2(M,D) = d^2(H,D) \qquad (3)$$

Igualando (2) y (3), tenemos

$$d^2(K,D) + d^2(M,D) = d^2(H,K) + d^2(K,D)$$

$$d^2(M,D) = d^2(H,K), \text{ de donde}$$

$$\overrightarrow{DM}^2 = \overrightarrow{HK}^2$$

entonces

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{HK}$$

De a) y b): $f = Id_E$, para todo $M \varepsilon E$

$\therefore$ Como $M \varepsilon E$, $f(M) = M$.

6. PROPOSICION

Sea f y g transformaciones del espacio E; g es biyectiva. El punto M es fijo de f si y sólo si g(M) es punto fijo de $\hat{f} = g \circ f \circ g^{-1}$.

Demostración de ($\Rightarrow$).

"Si M es un punto fijo de f, entonces g(M) es un punto fijo de $\hat{f} = g \circ f \circ g^{-1}$".

Sea $f(M) = M$.

Como $\hat{f} = g \circ f \circ g^{-1}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\hat{f}(g(M)) &= (g \circ f \circ g^{-1})(g(M)) \\ &= g(f(g^{-1}(g(M)))) \\ &= g(f(M)) \\ &= g(M), \quad M = f(M).\end{aligned}$$

$\therefore$ g(M) es punto fijo de $\hat{f}$.

Demostración de (<=).

Si $g(M)$ es punto fijo de $\hat{f} = g \circ f \circ g^{-1}$. Probar que M es punto fijo de f.

Como $\hat{f}(g(M)) = g(M)$.

$$g(f(g^{-1}(g(M)))) = g(M)$$

$$g(f(M)) = g(M)$$

$$g^{-1}(g(f(M))) = g^{-1}(g(M)),\ g \text{ es biyectiva.}$$

$$f(M) = M.$$

$\therefore$ M es punto fijo de f.

7. PROPOSICION

Si f es una rotación y g una isometría, entonces $\hat{f} = g \circ f \circ g^{-1}$ es una rotación

Demostración .

Si f es una rotación de eje δ, $f \neq Id_E$, entonces δ es el conjunto de puntos fijos de $f(f(\delta) = \delta)$.

Probaremos que el conjunto de puntos fijos de $\hat{f}$ es $g(\delta)$. Es decir que:

$$\hat{f}(g(\delta)) = g(\delta)$$

$$\hat{f}(g(\delta)) = g(f(g^{-1}(g(\delta))))$$

$$= g(f(\delta))$$

$$= g(\delta); \quad \delta = f(\delta)$$

$\therefore$ $\hat{f}$ es una rotación.

2. CONSERVACION DE PARALELISMO

1. PROPOSICION

1. Sea f una isometría.

Si d_1 y d_2 son dos rectas paralelas del espacio euclidiano E, entonces $f(d_1)$ y $f(d_2)$ son dos rectas paralelas.

2. Si P_1 y P_2 son dos planos paralelos del espacio euclidiano E, entonces $f(P_1)$ y $f(P_2)$ son dos planos ralelos.

Demostración de V.2.1.1

Como f es una isometría por proposición IV.1.3 f es una biyección afín, se puede decir que si d_1 y d_2 son rectas paralelas del espacio euclidiano E, entonces $f(d_1)$ y $f(d_2)$ son dos rectas paralelas por proposición III.5.8.

Demostración de V.2.1.2

Como f es una isometría por proposición IV.1.3 f es una biyección afín y como f es una biyección afín se puede afirmar que si P_1 y P_2 son planos paralelos del espacio euclidiano E, entonces $f(P_1)$ y $f(P_2)$ son dos planos paralelos por proposición III.5.9.

2. PROPOSICION

Sea f una isometría.

Sea δ una recta paralela al plano P. Entonces $f(\delta)$ es una paralela al plano f(P).

Demostración.

Sea la recta $d \subset P$, $d \parallel \delta$ entonces $f(d) \parallel f(\delta)$ (por proposición V.2.1) como $d \subset P$, $f(d) \subset f(P)$ entonces $f(\delta)$ es paralela a $f(P)$ (por proposición III.14.3)

3. CONSERVACION DE ORTOGONALIDAD

1. PROPOSICION

Sea f una isometría.

1. Si d_1 y d_2 son rectas ortogonales de $\mathbb{E}$, entonces $f(d_1)$ y $f(d_2)$ son rectas ortogonales.

2. Si d es una recta ortogonal a un plano P, entonces f(d) es una recta ortogonal al plano f(P).

Demostración de V.3.1.1.

Sea $f: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ una isometría
$A \longrightarrow A'$

Sea $\vec{u}$ un vector director de la recta d_1 y $\vec{u}^{\perp}$ el vector director de d_2 que es perpendicular a $\vec{u}$. Existe $A,B \in d_1$ y $C,D \in d_2$ tales que $\vec{u}.\vec{u}^{\perp} = \vec{AB}.\vec{CD} = 0$.

Sabemos entonces que el producto escalar se conserva: $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'} = 0$ por ser f isometría (proposición IV.1.3).

$f(d_1)$ es una recta, porque los puntos A' y B' son distintos

($f(d_1)$ es el conjunto de baricentros de A' y B') por consiguiente C' $\neq$ D' y entonces, $f(d_2)$ no es un punto, es una recta, por proposición III.5.3. Por otra parte $f(d_1)$ y $f(d_2)$ tiene, vectores directores perpendiculares.

$\therefore$ $f(d_1)$ y $f(d_2)$ son rectas ortogonales.

Demostración de V.3.1.2

Sea $f: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ es una isometría
$A \longrightarrow A'$

i) Como d es una recta ortogonal a un plano P, entonces la recta d es ortogonal a una recta d_1 contenida en el plano P por propiedad II.14.5, entonces $f(d)$ y $f(d_1)$ son rectas ortogonales, proposición V.3.1.1 y como $f(d_1)$ es una recta la cual está contenida en un plano del espacio, proposición II.14.1.

ii) Como el plano P es el conjunto de los baricentros de n puntos Ai, siendo f afín biyectiva, por proposición IV.1.3., entonces f(P) es el conjunto de baricentros de los n puntos f(Ai), por proposición III.5.1.

De i) e ii) $f(d_1) \subset f(P)$, ya que $d_1 \subset P$ ($f(d)$ y $f(P)$ tienen vectores directores ortogonales).

$\therefore$ $f(d)$ es ortogonal a $f(P)$.

2. PROPOSICION

Sea f una isometría.

Si P_1 y P_2 son dos planos perpendiculares de $\mathcal{E}$, entonces $f(P_1)$ y $f(P_2)$ son dos planos perpendiculares.

Demostración

Sea la recta $d \subset P_2$, $d \perp P_1$ entonces

$f(d) \perp f(P_1)$ (por proposicion V.3.2)

como $d \subset P_2$, $f(d) \subset f(P_2)$

entonces $f(P_1)$ es perpendicualr a $f(P_2)$ (por proposición II.14.4)

4. SIMETRIAS ORTOGONALES RESPECTO A UN PLANO

1. DEFINICION

Sea P un plano de $\mathcal{E}$.

La simetría relativa a un plano P es la aplicación

$$\begin{array}{l} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \\ M \longrightarrow M' \end{array} \text{ donde } \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}, \text{ H designa la proyección ortogonal}$$

de M sobre el plano P.

2. EJEMPLO

Dar una expresión analítica de la isometría f.

La isometría f es la simetría de centro $A(2,1,-1)$.

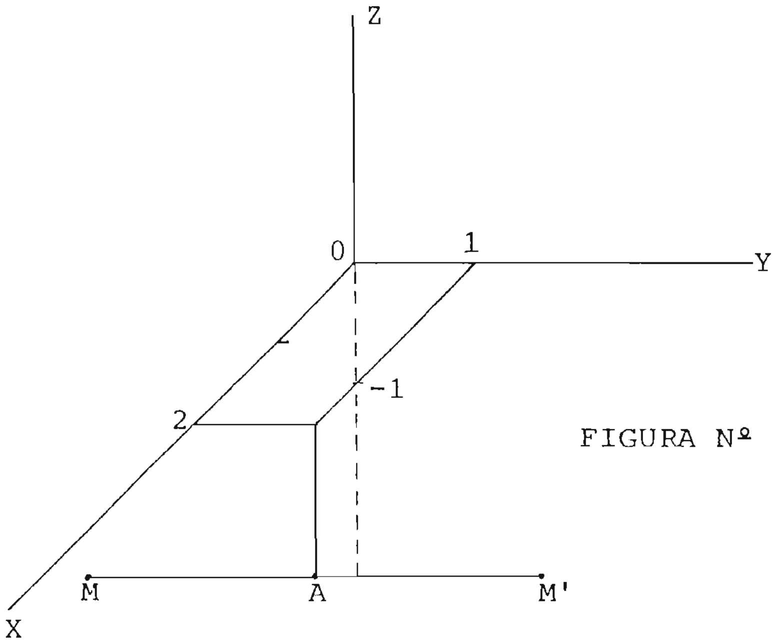


FIGURA Nº 36

Sea M(x,y,z) de imagen M'(x',y',z') mediante la simetría f de centro A(2,1,-1). A partir de la igualdad de la definición V.4.1:

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA}$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - x \\ x' - z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 - x \\ 1 - y \\ -1 - z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2x \\ 2 - 2y \\ -2 - 2z \end{pmatrix}$$

Por igualdad de vectores, se tiene:

$x' - x = 4 - 2x \Rightarrow x' = 4 - x$

$y' - y = 2 - 2y \Rightarrow y' = 2 - y$

$z' - z = -2 - 2z \Rightarrow z' = -2 - z$

$\therefore$ La expresión analítica de la isometría

f es: $\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = 2 - y \\ z' = 2 - z \end{cases}$

3. PROPOSICION

Sea f y g transformaciones del espacio E; g es biyectiva.

Si f es una simetría y g una isometría, entonces

$\hat{f} = g \circ f \circ g^{-1}$ es una simetría.

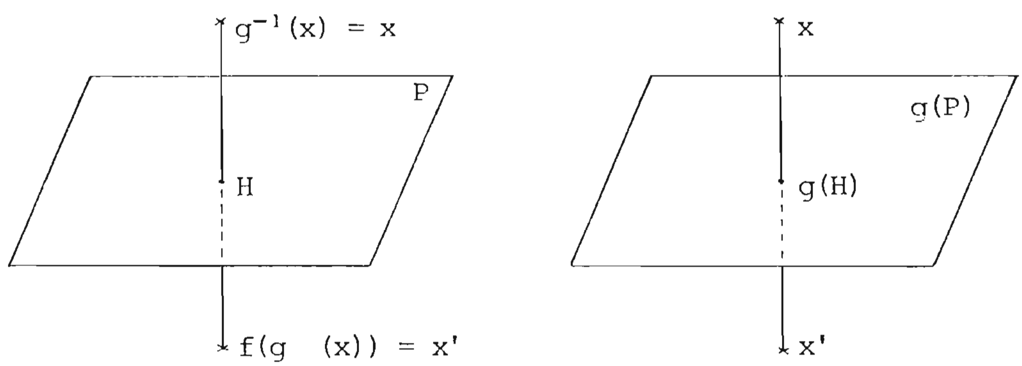


FIGURA Nº 37

Sea $x, x' \in E$.

$$\hat{f}(x) = (g \circ f \circ g^{-1})(x)$$

$$x' = g(f(g^{-1}(x)))$$

Por definición IV.1.1

$$
\begin{aligned}
d(x,x') &= d(x,g(f(g^{-1}(x)))) \\
&= d(g(g^{-1}(x)),g(f(g^{-1}(x)))) \\
&= d(g^{-1}(x),f(g^{-1}(x))),\ \text{por definición IV.1.1. por} \\
&\quad \text{que } g \text{ es isometría.} \\
&= 2d(H,g^{-1}(x)),\ (H \text{ proyección ortogonal de } x = g^{-1}(x) \\
&\quad \text{sobre el plano } P),\ \text{por definición V.4.1.} \\
&= 2d(g(H),x).
\end{aligned}
$$

Probaremos que: $d(H,g^{-1})x)) = d(g(H),x)$.

Si H = proyección de $g^{-1}(x)$ en el plano P, entonces

$g(H)$ = Proyección de x en $g(P)$ como

$$
\begin{aligned}
d(H,g^{-1}(x)) &= d(g(H),g(g^{-1}(x))) \\
&= d(g(H),x)
\end{aligned}
$$

Probaremos que:

Si Y = Proyección de x en P, entonces $g(Y)$ = Proyección de $g(x)$ en $g(P)$.

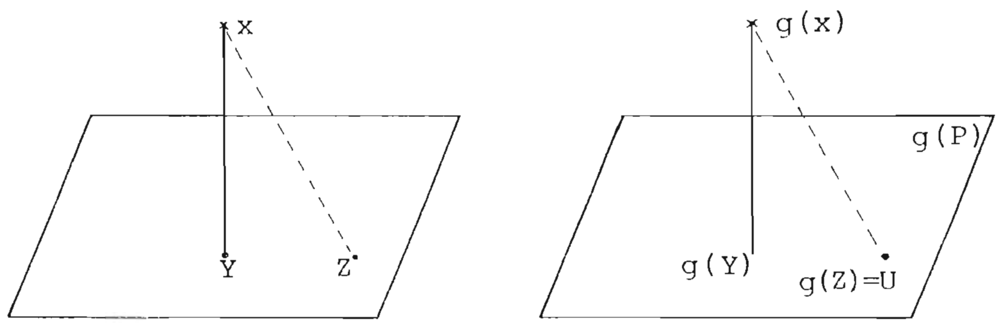


FIGURA Nº 38

Para todo $g(z) \in g(P)$:

"$d(g(x),z) \geq d(g(x),g(Y))$"

$d(g(x),g(Y)) \leq d(g(x),u)$, para todo $u \in g(P)$.

como $d(x,Y) \leq d(x,z)$, para todo $z \in P$.

$$\begin{aligned} g: E &\longrightarrow E \qquad\qquad x,Y,z \in E \\ x &\longrightarrow x' = g(x) \end{aligned}$$

$d(x',Y') = d(x,Y) \Rightarrow d(g(x),g(Y)) = d(x,y)$

$d(x',z') = d(x,z) \Rightarrow d(g(x),g(z)) = d(x,z)$

$d(g(x),g(Y)) \leq d(g(x),g(z))$, para todo $z \in P$.

$d(g(x),g(y)) \leq d(g(x),u)$, para todo $u \in g(P)$.

4. EJEMPLO

Dar una expresión analítica de la isometría f. La isometría f es la simetría ortogonal relativa a un plano P de ecuación $x-y+z+2 = 0$.

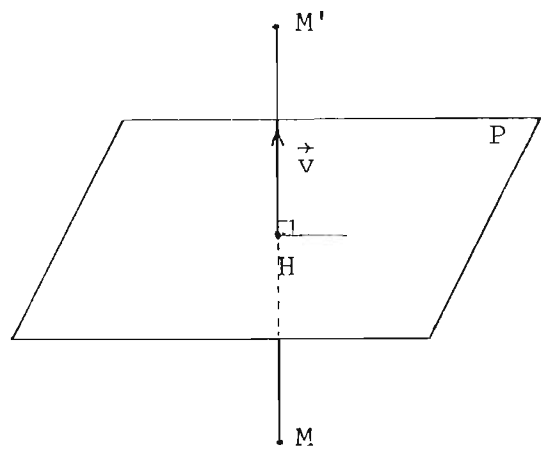


FIGURA Nº 39

El vector $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ es ortogonal al plano P: $x-y+z+2=0$.

Por un punto $M(x,y,z)$ de imagen $M'(x',y',z')$, anotando con H la proyección ortogonal del punto M sobre el plano P.

i) Como $\overrightarrow{MM'}$ es ortogonal al plano P, $\overrightarrow{MM'}$ es colineal al vector $\vec{v}$. De donde

$$\exists k \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\\z'-z\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ es decir que:}$$

$$\begin{aligned} x'-x &= k\\ y'-y &= -k \qquad (1).\\ z'-z &= k \end{aligned}$$

ii) Como $H \in P$. $H\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$ es el punto medio del segmento $[MM']$.

Luego, evaluando las coordenadas de H en el plano P: $x-y+z+2=0$, tenemos:

$$\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \left(\frac{y+y'}{2}\right) + \left(\frac{z+z'}{2}\right) + 2 = 0 \qquad (2)$$

Ahora sustituiremos en (2) el punto $M'(x',y',z')$, cuyas coordenadas se extraen de (1) y obtenemos k. así:

$$\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \left(\frac{y+y'}{2}\right) + \left(\frac{z+z'}{2}\right) + 2 = 0$$

$$\left(\frac{x+x+k}{2}\right) - \left(\frac{y+y-k}{2}\right) + \left(\frac{z+z+k}{2}\right) + 2 = 0$$

$$\frac{2x+k}{2} - \frac{2y-k}{2} + \frac{2z+k}{2} + 2 = 0$$

$2x + k - 2y + k + 2z + k + 4 = 0$

$3k = -2x + 2y - 2z - 4$

$k = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{4}{3}$

Sustituyendo k en (1) obtendremos los valores de las componentes del punto $M'(x',y',z')$ así:

$x' = x - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{4}{3}$

$x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{4}{3}.$

$y' = y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}$

$y' \doteq \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}.$

$z' = z - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{4}{3}$

$z' = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{4}{3}$

$\therefore$ La expresión analítica de la isometría f es:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{4}{3} \\ y' = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{4}{3} \end{cases}$$

5. DEFINICION

Sea A y B dos puntos distintos de E.

Llamaremos a P el plano mediador del segmento $[AB]$ si se cumple que:

$$M \varepsilon P \text{ si y sólo si } d(M,A) = d(M,B).$$

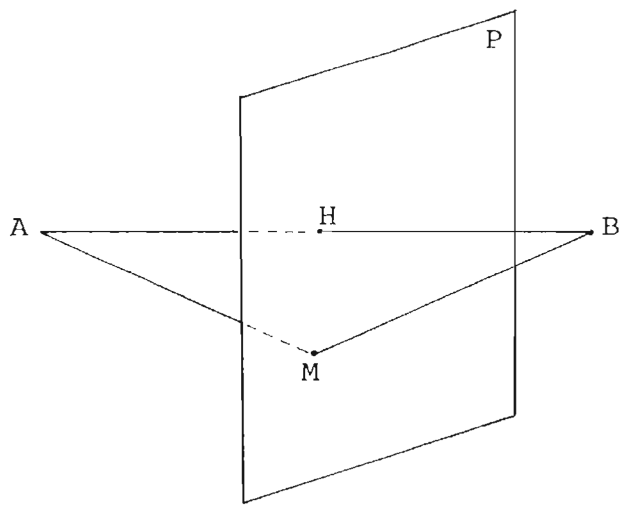
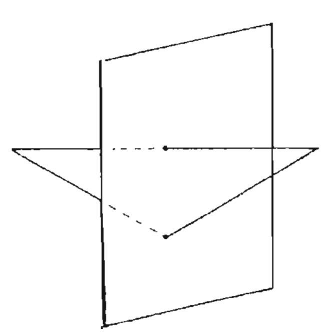


FIGURA Nº 40

6. PROPOSICION

Sea A y B dos puntos distintos de $\mathcal{E}$.

El conjunto P de puntos de $\mathcal{E}$ equidistantes de A y B es el plano pasando por el punto medio H del segmento [AB] y ortogonal a la recta (AB).



Demostración

Probaremos que el conjunto P de puntos de E equidistantes de A y B es un plano.

Sea $M = (x,y,z)$, $A = (a_1,a_2,a_3)$ y $B = (b_1,b_2,b_3) \in E$

$$P = \{M = (x,y,z) \in E / d(M,A) = d(M,B)\}$$

$$P = \{M \in E / \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2} = \sqrt{(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 + (z-b_3)^2}\}$$

$$P = \{M \in E / (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 = (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 + (z-b_3)^2\}$$

$$P = \{M \in E / x^2 - 2xa_1 + a_1^2 + y^2 - 2ya_2 + a_2^2 + z^2 - 2za_3 + a_3^2 = x^2 - 2xb_1 + b_1^2 + y^2 - 2yb_2^2 + b_2^2 + z^2 - 2zb_3 + b_3^2\}$$

$$P = \{M \in E / (2b_1 - 2a_1)x + (2b_2 - 2a_2)y + (2b_3 - 2a_3)z + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2) = 0\} \quad (1)$$

$\therefore$ P es un plano.

Probaremos que $H = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$ es el punto medio del segmento $[AB]$.

Verificar que $d(A,H) = d(B,H) = \frac{1}{2}\, d(A,B)$.

$$d(A,H) = \sqrt{\left(a_1 - \frac{a_1+b_1}{2}\right)^2 + \left(a_2 - \frac{a_2+b_2}{2}\right)^2 + \left(a_3 - \frac{a_3+b_3}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(b_1 - \frac{a_1+b_1}{2}\right)^2 + \left(b_2 - \frac{a_2+b_2}{2}\right)^2 + \left(b_3 - \frac{a_3+b_3}{2}\right)^2} = d(B,H)$$

$$d(A,H) = \sqrt{\left(\frac{a_1-b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_2-b_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_3-b_3}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{b_1-a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_2-a_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_3-a_3}{2}\right)^2} = d(B,H).$$

$$d(A,H) = \frac{1}{2}\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2} = d(B,H) = \frac{1}{2}\, d(A,B)$$

$\therefore$ H es punto medio del segmento $[A\ B]$

Sea el vector direccional de $[AB]$:

$$\begin{pmatrix} 2b_1 - 2a_1 \\ 2b_2 - 2a_2 \\ 2b_3 - 2a_3 \end{pmatrix} \text{ y el vector } \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} - x \\ \frac{a_2+b_2}{2} - y \\ \frac{a_3+b_3}{2} - z \end{pmatrix} \text{ que dá la dirección}$$

a P. Verificar que el producto escalar

$$\begin{pmatrix} 2b_1 - 2a_1 \\ 2b_2 - 2a_2 \\ 2b_3 - 2a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} - x \\ \frac{a_2+b_2}{2} - y \\ \frac{a_3+b_3}{2} - z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2b_1 - 2a_1 \\ 2b_2 - 2a_2 \\ 2b_3 - 2a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} - x \\ \frac{a_2+b_2}{2} - y \\ \frac{a_3+b_3}{2} - z \end{pmatrix} =$$

$$= (2b_1-2a_1)\left(\frac{a_1+b_1}{2} - x\right) + (2b_2-2a_2)\left(\frac{a_2+b_2}{2} - y\right) +$$

$$+ (2b_3-2a_3)\left(\frac{a_3+b_3}{2} - z\right) =$$

$$= b_1^2-a_1^2-(2b_1-2a_1)x + b_2^2-a_2^2-(2b_2-2a_2)y + b_3^2-a_3^2-(2b_3-2a_3)z =$$

$$= (2b_1-2a_1)x + (2b_2-2a_2)y + (2b_3-2a_3)z + (a_1^2+a_2^2+a_3^2-b_1^2-b_2^2-b_3^2)=0,$$

por definición de P de (1).

7. PROPOSICION

Sean A,B y C tres puntos no alineados y A',B' y C' tres puntos que verifican:

$d(A'B') = d(A,B)$, $d(A',C') = d(A,C)$ y $d(B',C') = d(B,C)$.

Demostrar que existe al menos una simetría g tal que A',B' y C' son imágenes respectivas por g de los puntos A,B y C.

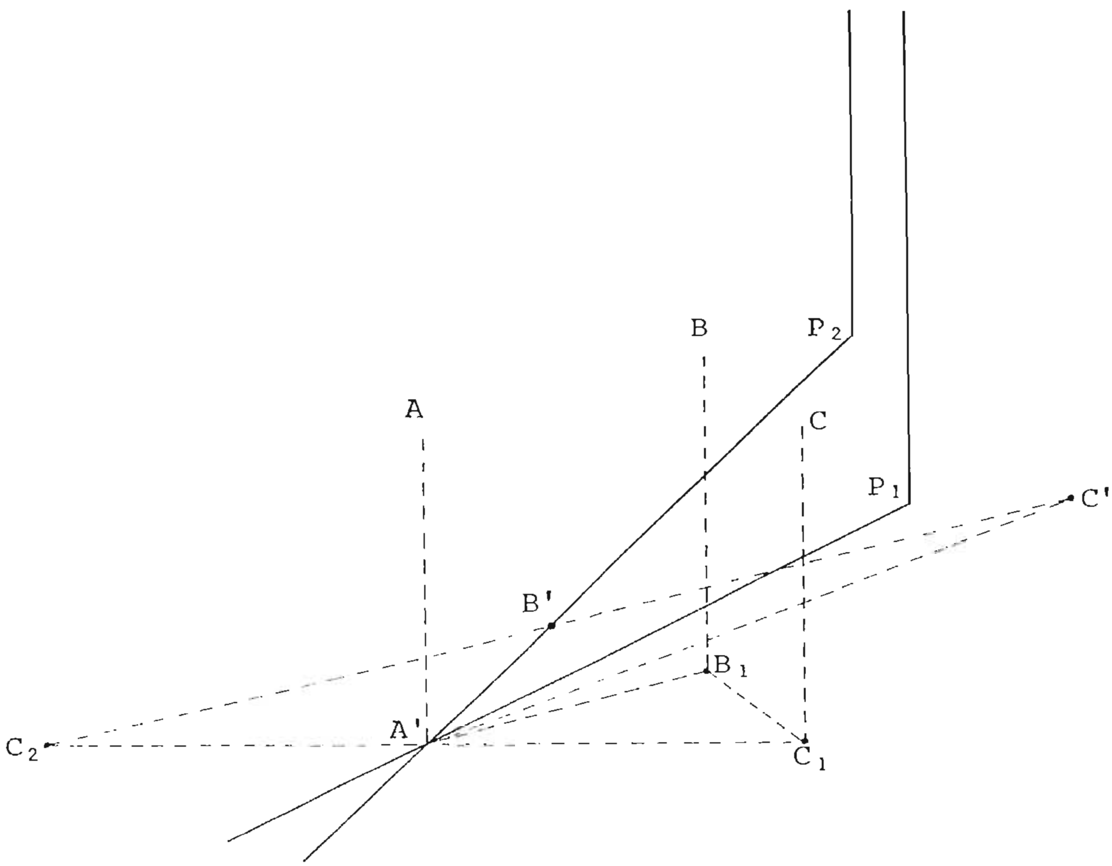


FIGURA Nº 42

Demostración.

Sea t la traslación del vector $\vec{AA'}$.

$$t: \begin{cases} A \longrightarrow A' \\ B \longrightarrow B_1 \\ C \longrightarrow C_1 \end{cases}$$

Probaremos que $d(A',B_1) = d(A',B')$.

Ver figura 42:

$d(A',B_1) = d(A,B)$ por traslación t,

$d(A,B) = d(A,B')$ por hipótesis; de donde por transitividad

$d(A',B_1) = d(A',B')$.

Si $B_1 \neq B'$, f_1 designa la simetría relativa al plano mediador P_1 del segmento $[B_1B']$, si no $f_1 = Id_E$

$$f_1 \circ t: \begin{cases} A \longrightarrow A' \\ B \longrightarrow B' \\ C \longrightarrow C_2 \end{cases}$$

Probaremos que $d(A',C_2) = d(A',C')$

Ver figura 42.

$d(A',C_2) = d(A',C_1)$, por simetría f_1,

$d(A',C_1) = d(A,C)$, por traslación t,

$d(A,C) \quad = d(A',C')$, por hipótesis; de donde por transitividad

$d(A',C_2) = d(A',C')$.

Probaremos que: $d(B',C_2) = d(B',C')$

Según la figura 42.

$d(B',C_2) = d(B\ ,C_1)$ por simetría f',

$d(B_1,C_1) = d(B,C)$ por traslación t,

$d(B,C) = d(B',C')$ por hipótesis, de donde por transitividad.

$d(B',C_2) = d(B',C')$.

Si $C_2 \neq C'$, f_2 designa la simetría relativa a un plano mediador P_2 del segmento $[C'C_2]$, si no $f_2 = Id_E$.

La simetría $g = f_2 \circ f_1 \circ t$ es una isometría.

5. UNA CARACTERIZACION DE LAS SIMETRIAS RELATIVAS A UN PLANO.

1. PROPOSICION

Sea P un plano de E.

Una aplicación f de E en E es la simetría relativa al plano P si y solamente si f es una isometría en el conjunto de puntos fijos P.

Demostraremos (=>)

Sea A y B puntos de E, A' y B' sus imágenes respectivas por S_P.

Demostraremos que $d(A,B) = d(A',B')$

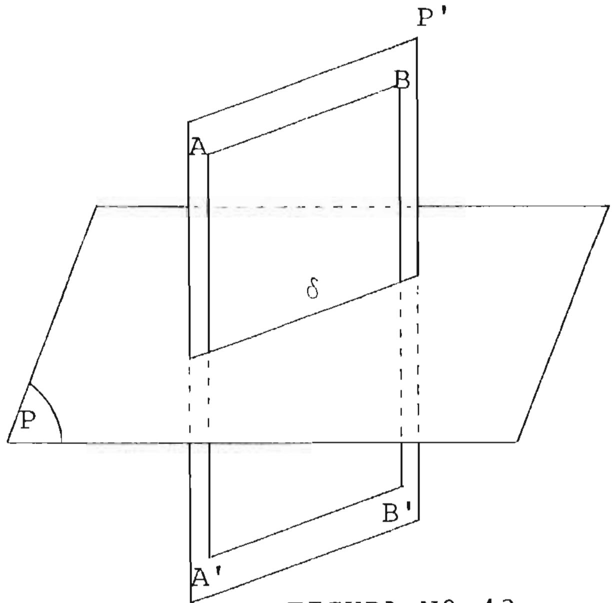


FIGURA Nº 43

Existe un plano P' que contiene a A y B (Proposiciones II.14.1 y II.14.2) perpendicular a P. (δ es la proyección de (AB)).

Sea δ la recta de intersección de P y P'.

$S_P(P') \subset P'$ y la restricción de S_P en el plano P' es S_δ.

como S_δ es una isometría, $d(A,B) = d(A',B')$.

La simetría S_P es entonces una isometría en el conjunto de puntos fijos P.

Demostraremos (<=).

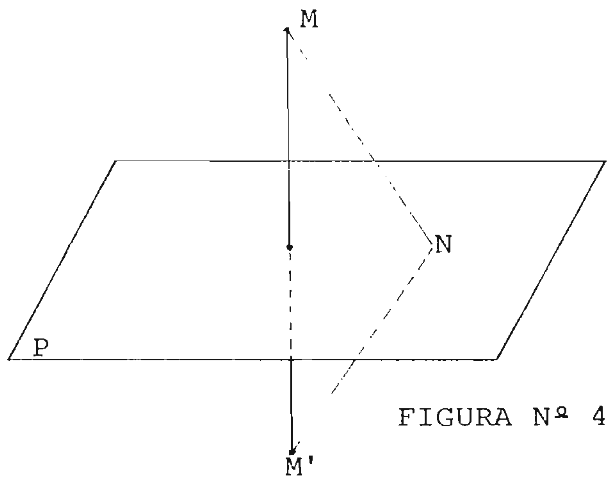


FIGURA Nº 44

Sea f una isometría en el conjunto de puntos fijos P.

Si $M \in P$, entonces $f(M) = S_P(M) = M$

Si $M \notin P$, Ponemos $M' = f(M)$; entonces $M' \neq M$ por que $M \notin P$.

Para todo punto $N \in P$, $d(N,M) = d(N,M')$ por que f es una isometría y $f(N) = N$; el plano mediador de $[MM']$ es entonces P. (Por definición V.4.6.)

Por consiguiente

$$f(M) = S_P(M).$$

$\therefore$ La aplicación f es entonces la simetría S_P.

2. PROPOSICION

Sea S_P una simetría relativa a un plano P.

a) Si Q es un plano paralelo a P, entonces $S_P(Q)$ es paralelo a P.

b) Si d es una recta paralela a P, entonces $S_P(d)$ es paralela a P.

Demostración de a).

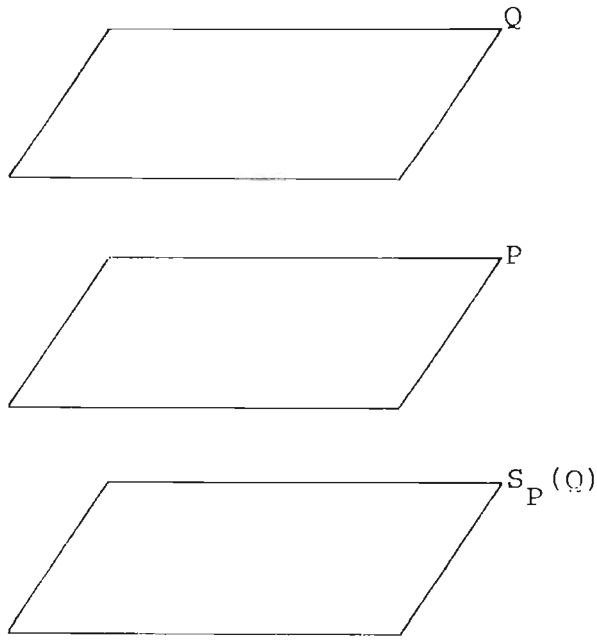


FIGURA Nº 45

Sean los planos P y Q.

$P \| Q \Rightarrow S_P(P) = P$ es el conjunto de puntos fijos de

$S_P \wedge S_P(P) \| Q$

$\Rightarrow S_P(P) \| Q \wedge Q \| S_P(Q)$

$\Rightarrow S_P(P) \| S_P(Q)$

$\therefore \quad P \| S_P(Q)$

Demostración de b).

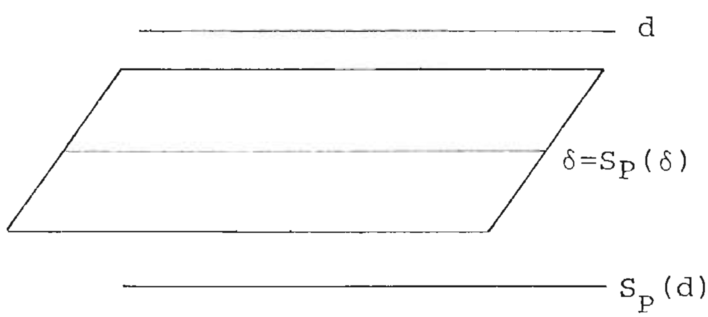


FIGURA Nº 46

Sea P un plano y d una recta paralela a P. Existe una recta δ contenida en P y paralela a d (proposición II.14.3), entonces $S_p(d)$ es paralela (prop. V.1.1) a la recta $S_p(\delta)=\delta$ contenida en P. Entonces $S_p(d)$ es paralela al plano P.

3. PROPOSICION

Sea S_p una simetría relativa a un plano P y Q un plano secante a P, entonces $S(Q) \cap P = Q \cap P$.

Probar que $S(Q) \cap P = Q \cap P$.

i) Probar que $S(Q) \cap P \subseteq Q \cap P$.

$x \in S_p(Q) \cap P \Rightarrow x \in S_p(Q) \wedge x \in P$

como $x = S_p(y)$, $y \in Q$

$$x = S_p(x) = S_p(S_p(y)) = y$$

$\therefore \quad x \in Q$

$\therefore \quad x \in Q \cap P$

ii) Probar que $Q \cap P \subset S_p(Q) \cap P$.

$x \in Q \cap P \Rightarrow x \in Q \wedge x \in P$

como $x \in P$.

$$x = S_p(x) \in S_p(Q).$$

$$x \in Q \Rightarrow S_p(x) \in S_p(Q)$$

$\therefore \quad x \in S_p(Q)$

$\therefore \quad Q \cap P \subset S_p(Q) \cap P.$

4. EJEMPLO

Sea un sistema ortonormal $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de E. Para la transformación de E anotada:

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = y \\ z' = x \end{cases}$$, decir si es una isometría, estudiar

su conjunto de puntos fijos y determinar si es simetría, rotación, ...

Solución

i) Verificar que la transformación es una isometría.

Sean $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ puntos de E, de imágenes respectivas $A'(x_1',y_1',z_1')$ y $B'(x_2',y_2',z_2')$ de E.

Verificar que $d(A',B') = d(A,B)$.

$$d(A',B') = \sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2}$$

$$= \sqrt{(z_1 - z_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

$$= d(A,B).$$

$\therefore$ La transformación es una isometría.

ii) Encontrar el conjunto de puntos fijos de la isometría.

Sea $f: E \longrightarrow E$ la isometría y $A(x,y,z)$ punto fijo de f, es decir que:

$f(A) = f(x,y,z) = (x,y,z) = A$

$A(x,y,z)$ es un punto fijo si y sólo si:

$$\begin{cases} x = z \\ y = y \\ z = x \end{cases} \text{, es decir } \begin{cases} z - x = 0 \\ y - y = 0 \\ z - x = 0 \end{cases}$$

Luego, $A(x,y,z)$ es un punto fijo de f si y sólo si $x = z$. El conjunto de puntos fijos es el plano P cuya ecuación es: $z - x = 0$ que es paralelo al eje $(0,\vec{j})$

iii) Entonces de ii) f es la simetría al plano P.

5. PROPOSICION

Una isometría de E que deja fijos tres puntos no aliniados A,B y C es la aplicación identidad de E o la simetría relativa al plano (ABC).

Demostración.

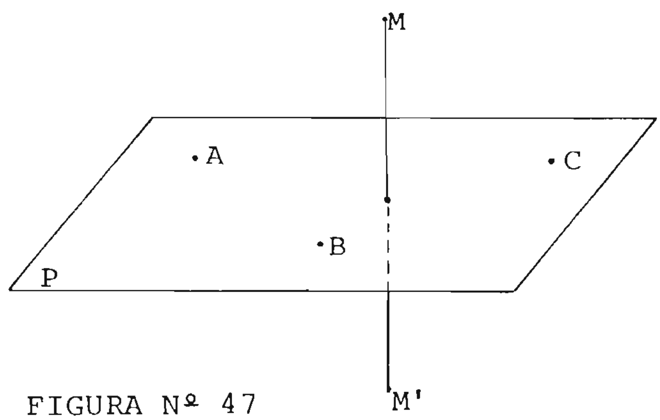


FIGURA Nº 47

Sea P el plano (ABC) y sea M un punto que no pertenece a P.

Pongamos $M' = f(M)$.

Si $M = M'$, entonces $f = Id_E$ por que f deja fijos los cuatro puntos no coplanares. (proposicion V.1.5).

Si $M \neq M'$, entonces todos los puntos de un plano P son puntos fijos de f (proposición V.1.4), por consiguiente, P es el plano mediador del segmento $[MM']$ (Por definición V.4.5).

La isometría $S_p \circ f$ deja fijos los cuatro puntos no coplanares A,B,C y M. en efecto.

$$(S_p \circ f)(A) = A \Rightarrow (S_p \circ S_p)(f(A)) = S_p(A)$$

$$\Rightarrow f(A) = S_p(A), \; Id_E = S_p \circ S_p.$$

$$(S_p \circ f)(B) \quad \Rightarrow (S_p \circ S_p)(f(B)) = S_p(B)$$

$$\Rightarrow f(B) = S_p(B), \; Id_E = S_p \circ S_p.$$

$$(S_p \circ f)(C) = C \Rightarrow (S_p \circ S_p)(f(C)) = S_p(C)$$

$$\Rightarrow f(C) = S_p(C), \; Id_E = S_p \circ S_p.$$

$$(S_p \circ f)(M) = M \Rightarrow (S_p \circ S_p)(f(M)) = S_p(M)$$

$$\Rightarrow f(M) = S_p(M), \; Id_E = S_p \circ S_p.$$

de donde

$S_p \circ f = Id_E \Rightarrow f = S_p$

6. COMPOSICION DE SIMETRIAS RELATIVAS A PLANOS

1. PROPOSICION

1) La composición de dos simetrías relativas a planos paralelos es una traslación del vector ortogonal a la dirección de los planos.

2) Si t es una traslación de vector $\vec{v}$, entonces $t = S_{P_2} \circ S_{P_1}$ donde P_1 es un plano cualquiera ortogonal a $\vec{v}$ y P_2 la imagen de P_1 por la traslación del vector $\vec{v}/2$.

Demostración de 1).

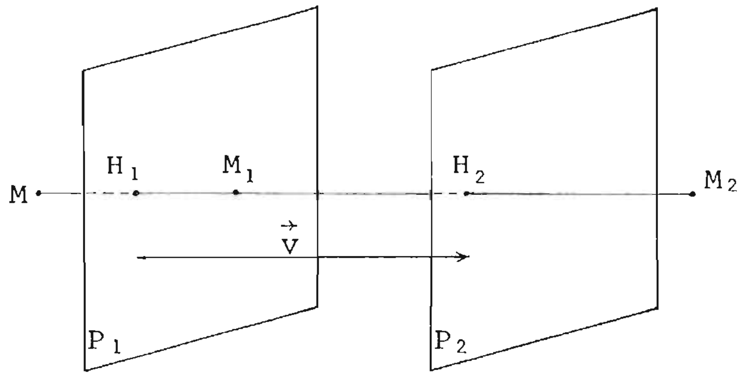


FIGURA Nº 48

Sea $M \in E$, H_1 y H_2 las proyecciones ortogonales respectivas de M sobre P_1 y P_2.

Si $M_1 = S_{P_1}(M)$ y $M_2 = S_{P_2}(M_1) = S_{P_2}(S_{P_1}(M))$, entonces

$\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{H_1M_1}$ y $\overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{M_1H_2}$

De donde: $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$

$$\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{H_1M_1} + 2\overrightarrow{M_1H_2} = 2(\overrightarrow{H_1M_1} + \overrightarrow{M_1H_2})$$
$$= 2\overrightarrow{H_1H_2}$$

Es decir que, anotemos con $\vec{v}$ el vector ortogonal a P_1 en que $t_{\vec{v}}(P_1) = P_2$, $\overrightarrow{MM} = 2\vec{v}$.

De donde $S_{P_2} \circ S_{P_1} = t_{2\vec{v}}$

Demostración de 2).

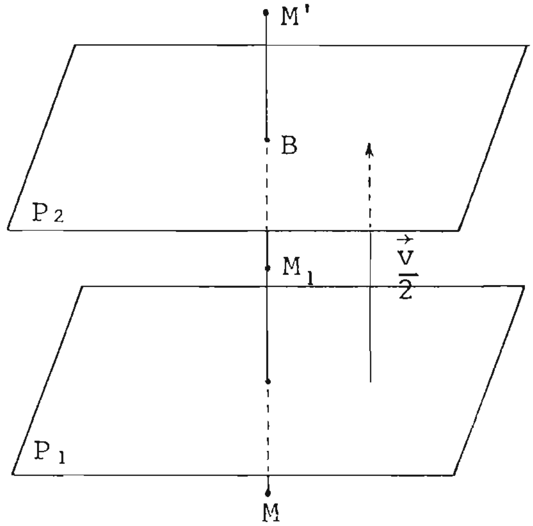


FIGURA Nº 49

La traslación $t_{\vec{v}} = S_{P_2} \circ S_{P_1}$, donde la dirección de $\vec{v}$ es ortogonal al plano P_1, siendo P_2 la imagen del plano P_1 por la traslación del vector $\frac{1}{2}\vec{v}$.

$$\begin{aligned} t_{\vec{v}} &= \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{M_1B} + \overrightarrow{BM'} \\ &= 2\overrightarrow{AM_1} + 2\overrightarrow{M_1B} \\ &= 2(\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1B}) \\ &= 2\overrightarrow{AB}\ , \text{ Relación de Chasles} \\ &= 2\left(\frac{\vec{v}}{2}\right) \\ &= \vec{v},\ \forall M, \text{ de donde } S_{P_2} \circ S_{P_1} = t_{\vec{v}} \end{aligned}$$

7. ROTACIONES

1. DEFINICION

Dada una recta δ, se llama rotación de eje E a toda transformación de E que se escribe como la composición de dos si_ metrías relativas a los planos secantes que contienen a δ.

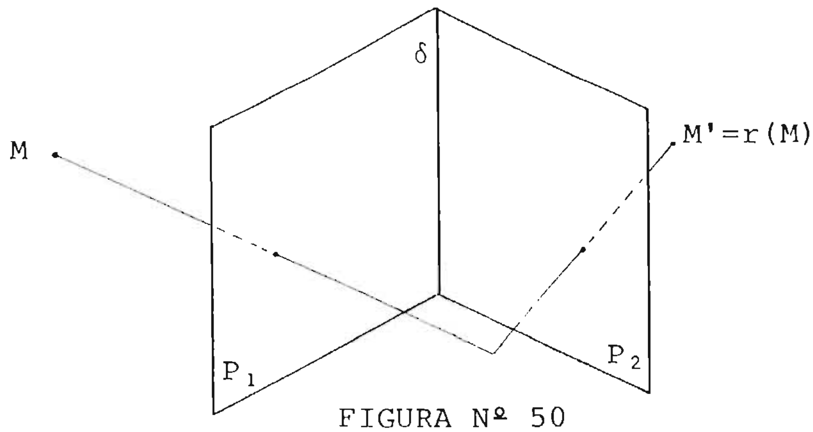


FIGURA Nº 50

2. PROPOSICION

Una rotación es una isometría.

Demostración.

Como una rotación de eje δ es una composición de simetrías, es decir $r = S_{p_2} \circ S_{p_1}$, y sabemos que cada simetría es una isometría (Proposición IV.3.2). Luego, por la proposición IV.1.2 la composición de isometrías es una isometría.

Por lo tanto, una rotación es una isometría.

3. PROPOSICION

Una rotación de eje δ deja fijos todos los puntos de δ.

Demostración.

Sea P_1 y P_2 planos secantes que contienen a δ como eje de una rotación r.

Sea $M \varepsilon \delta$

$$
\begin{aligned}
r(M) &= (S_{p_2} \circ S_{p_1})(M) \\
&= S_{p_2}(S_{p_1}(M)) \\
&= S_{p_2}(M); \ M \varepsilon P_1, \ M \varepsilon \delta \\
&= M; \ M \varepsilon P_2, \ M \varepsilon \delta
\end{aligned}
$$

4. EJEMPLO

Sea un sistema ortonormal $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de E

Para la transformación de ξ anotada:

$$
\begin{cases}
x' = \frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} y + 1 \\
y' = \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y - 1 \\
z' = z
\end{cases}
$$

, decir si es una isometría, estudiar su conjunto de puntos fijos y determinar si es simetría, rotación,...

i) Mostrar que la transformación es una isometría.

Sean $M(x_1,y_1,z_1)$, $N(x_2,y_2,z_2)$ puntos de ξ, de imágenes respectivas $M'(x_1',y_1',z_1')$, $N'(x_2',y_2',z_2)$.

Mostrar que $d(M',N') = d(M,N)$.

$$d(M',N') = \sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2}$$

$$= \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 - 1)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + 1)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$= \sqrt{[\frac{2}{2}(x_1 - x_2) - \frac{\sqrt{2}}{2}(y - y)]^2 + [\frac{\sqrt{2}}{2}(x - x) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y_1 - y_2)]^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2 - 2(\frac{1}{2})(x_1-x_2)(y_1-y_2) + \frac{1}{2}(y_1-y_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1-x_2)^2 + 2(\frac{1}{2})(x_1-x_2)(y_1-y_2) + \frac{1}{2}(y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

$$= d(M,N).$$

ii) Sea $f: E \longrightarrow E$ la aplicación y $M(x,y,z)$ punto fijo de f, entonces $f(M) = f(x,y,z) = (x,y,z) = \mathbf{M}$.

$M(x,y,z)$ es un punto fijo si y sólo sí:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1 \\ z = z \end{cases}$$

entonces resolviendo, así:

$$x + y = \sqrt{2}\,x \Rightarrow (1-\sqrt{2})x + y = 0 \qquad (1)$$

$$x - y = -\sqrt{2}y + 2 \Rightarrow x - (1 - \sqrt{2})y = 2 \qquad (2)$$

Multiplicando (1) por $(1 - \sqrt{2})$, tenemos:

$(3 - 2\sqrt{2})x + (1-\sqrt{2}) = 0$ (3)

Resolviendo el sistema de ecuaciones (2) y (3)

$$x - (1 - \sqrt{2})\, y = 2 \qquad (2)$$

$$\underline{(3 - 2\sqrt{2})\, x + (1 - \sqrt{2})\, y = 0} \qquad (3)$$

$$(4 - 2\sqrt{2})x \qquad = 2$$

Entonces $x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. De donde

$M(x,y,0) = (\frac{2 + \sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ es un punto fijo de la intersección de los planos P_1 y P_2, que es una recta δ.

iii) Por i) la transformación es una isometría, y por ii) como $M(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \in \delta$ y la recta δ es paralela al eje $(0,\vec{k})$ podemos afirmar que la isometría es una rotación de eje la recta δ.

5. PROPOSICION

Para todo plano P ortogonal a la recta δ, $r(P) = P$.

Demostración.

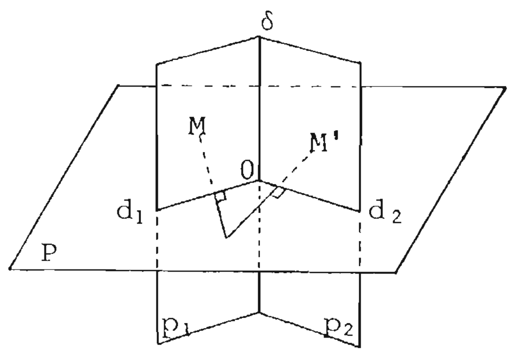


FIGURA Nº 51

Sea P un plano ortogonal a la recta δ

La rotación r es una isometría y $r(\delta) = \delta$ (Por proposición V.7.3)

δ y P son ortogonales, r(P) es un plano ortogonal a δ.

Si 0 es el punto de intersección de P y de δ, 0 es un punto fijo de r, r(P) pasa por 0

$\therefore\ r(P) = P$.

Nota: La restricción de r al plano P lo anotamos así:

$$r/P.$$

6. PROPOSICION

El plano P por ser ortogonal al eje δ, la restricción a P de la rotación de eje δ es una rotación de P.

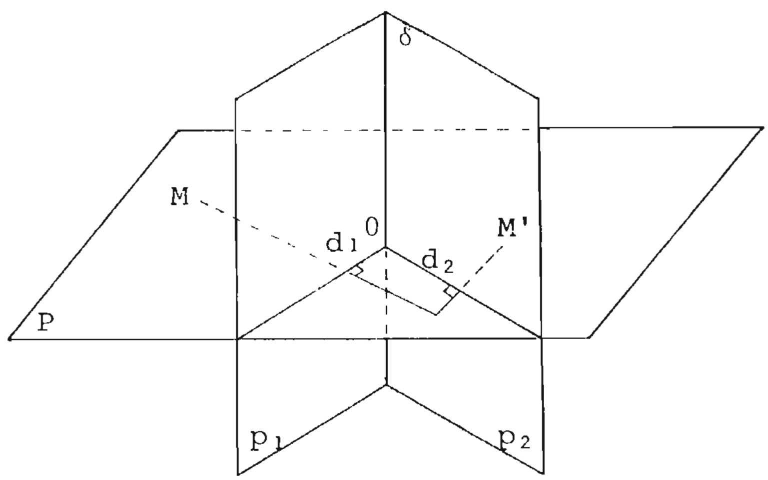


FIGURA Nº 52

Sea d_1 y d_2 las rectas de intersección de P con P_1 y P_2.

Para todo punto M de P, se tiene:

$r(M) = S_{d_2}(S_{d_1}(M))$

Donde $r/P = S_{d_2} \circ S_{d_1}$

7. PROPOSICION

Sea P_1 y P_2 dos planos del espacio.

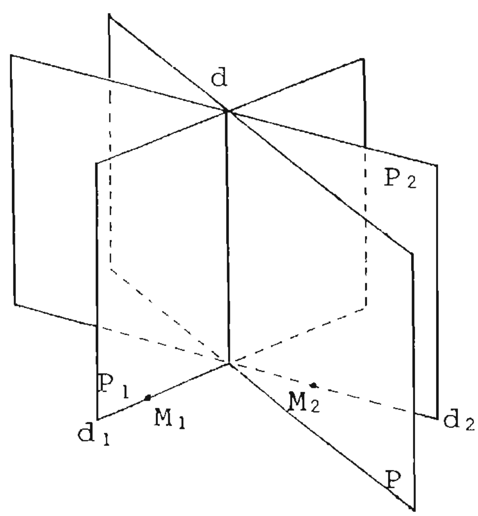
a) Entonces existe al menos una isometría g tal que $g(P_1) = P_2$.

b) Entonces $S_{p_2} = g \circ S_{p_1} \circ g^{-1}$

Demostración de a).

Si los planos P_1 y P_2 son paralelos, existe una traslación t tal que $g(P_1) = t(P_1) = P_2$ (Proposición V.6.1)

Si los planos P_1 y P_2 son secantes, d es su recta común.



Sea 0 un punto de d, d_1 y d_2 rectas ortogonales a d en 0 respectivamente contenidas en P_1 y P_2.

Si existen los puntos M_1 y M_2 respectivamente sobre d_1 y d_2, distintos de 0, tales que.

$d(0,M_1) = d(0,M_2)$. g es la simetría relativa al plano mediador P del segmento $[M_1 M_2]$

Demostración de b).

Para todo punto M de P_2, $g^{-1}(M) \in P_1$,

$S_{p_1} o\, g^{-1}(M) = g^{-1}(M)$, $g^{-1}(M)$ es punto fijo de S_{p_1}.

$g o\, S_{p_1} o\, g^{-1}(M) = g\, o\, g^{-1}(M) = M$, todo punto de P_2 es fijado por $g\, o\, S_{p_1} o\, g^{-1}$ ó

$$g\, o\, S_{p_1} o\, g^{-1} = Id_E \Rightarrow (g\, o\, S_{p_1})\, o\, (g^{-1} o g) = g$$

$$\Rightarrow g\, o\, S_{p_1} = g \; ; \; g^{-1} o g = Id_E$$

$$\Rightarrow (g^{-1} o g)\, o\, S_{p_1} = g^{-1} o g$$

$$\Rightarrow S_{p_1} = Id_E, \; g^{-1} o g = Id_E.$$

Este úlimo es imposible, entonces

$g\, o\, S_{p_1} o\, g^{-1} = S_{p_2}$.

8. PROPOSICION

Sea δ_1 y δ_2 dos rectas complanares, entonces $S_{\delta_2} o\, S_{\delta_1}$ es una rotación ó es una traslación.

Demostración

Sea P el plano que contiene a δ_1 y δ_2, P_1 contiene a δ_1, P_2

contiene a δ_2 y P_1, P_2 son perpendiculares a P.

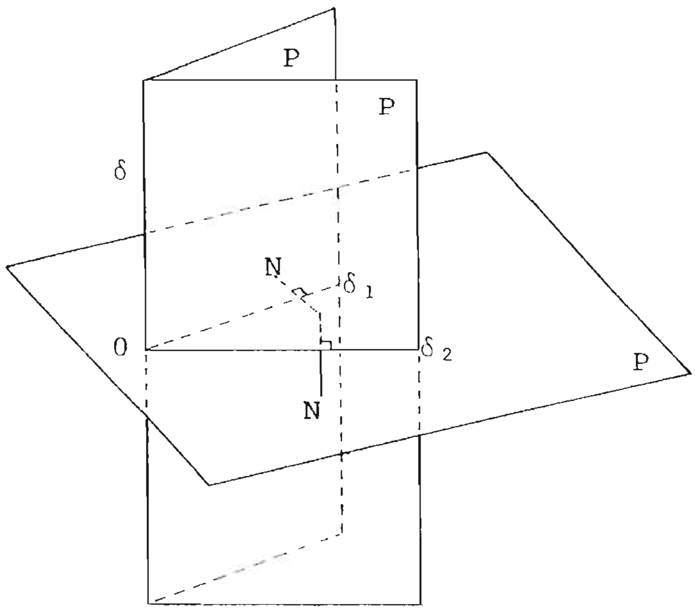


FIGURA Nº 54

Verifiquemos que $S_{\delta_2} \circ S_{\delta_1} = S_{p_2} \circ S_{p_1}$

Para todo punto N de P, se tiene que:

$r(N)$: $S_{\delta_2}(S_{\delta_1}(N)) = N'$, ($r/P$: restricción de r a un plano P.).

Para todo punto N de P, se tiene que:

$r(N) = S_{p_2}(S_{p_1}(N)) = N'$, ya que r es una rotación de eje δ (δ contenida en P_1 y P_2).

Por lo tanto: $S_{\delta_2} \circ S_{\delta_1} = S_{p_2} \circ S_{p_1}$.

1er. Caso: Probar que $S_{\delta_2} \circ S_{\delta_1}$ es una rotación.

Si $P_1 \neq P_2$, entonces por definición IV.5.1

$S_{\delta_2} o\ S_{\delta_1}$ es una rotación, ya que r/p es rotación de P.

2do. Caso: Probar que $S_{\delta_2} o\ S_{\delta_1}$ es una traslación Si $P_1 \| P_2$ entonces por la proposición V.6.1 parte 1a. $S_{\delta_2} o\ S_{\delta_1}$ es una traslación.

8. PROPOSICION CARACTERISTICA DE LAS ROTACIONES

1. PROPOSICION

Si r es una rotación de eje δ, diferente de Id_E, δ es el conjunto de puntos fijos de r.

Demostración.

Sea r una rotación de eje δ.
Sea P_1 y P_2 planos que contienen a δ tales que $r = S_{p_2} o\ S_{p_1}$
Sea M un punto fijo de r. Por lo que:

$S_{p_2}(S_{p_1}(M)) = M$ lo que implica

$$S_{p_2}(S_{p_2}(S_{p_1}(M))) = S_{p_2}(M)$$
$$S_{p_1}(M) = S_{p_2}(M)$$

Pongamos $N = S_{p_1}(M) = S_{p_2}(M)$.

Si $N \neq M$, P_1 y P_2 son planos mediadores de $[MN]$, lo que no es posible si $P_1 = P_2$, es decir cuando $r = Id_E$ esto implica que todos los puntos de E son puntos fijos de r.

En el caso donde $P_1 \neq P_2$, $M = N$, entonces $M \varepsilon P_1 \cap P_2$, M es un punto fijo de S_{p_1} y S_{p_2}.

Por consiguiente

$$M \in \delta.$$

2. PROPOSICION

Una isometría es una rotación diferente de Id_E si y solamente si el conjunto de sus puntos fijos es una recta.

Demostración.

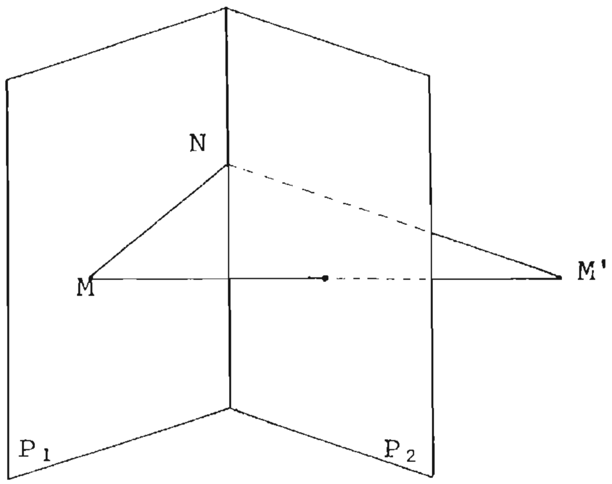


FIGURA Nº 55

Sea $M \in E/\delta$, y sea P_1 el plano pasando por M y contiene a δ.

Pongamos $M' = f(M)$.

Sea P_2 el plano mediador del segmento $[MM']$; existe porque M no es un punto fijo de f, $M \neq M'$.

Verifiquemos que el plano P_2 contiene a δ es decir que:

Para todo $N \in \delta$, $d(N,M) = d(N,M')$.

$d(N,M) = d(N',M')$, por ser f isometría

$\quad = d(N,M')$, donde $N' = N$.

Verifiquemos que $S_{P_1} \circ f$ deja fijos los puntos del plano P_1.

Sea $M \in P_1$

$$(S_{p_2} \circ f)(M) = S_{p_2}(f(M))$$
$$= S_{p_2}(M')$$
$$= M$$

Se tiene entonces que:

$$S_{p_2} \circ f = Id_E \Rightarrow (S_{p_2} \circ S_{p_2}) \circ f = S_{p_2}$$
$$\Rightarrow f = S_{p_2} \qquad \text{ó}$$

$$S_{p_2} \circ f = S_{p_1} \Rightarrow (S_{p_2} \circ S_{p_2}) \circ f = S_{p_2} \circ S_{p_1}$$
$$\Rightarrow f = S_{p_2} \circ S_{p_1}$$

Decir que S_{p_2} es el conjunto de puntos fijos de f es imposible porque el conjunto de puntos fijos de f es δ, f es entonces una rotación de eje δ.

3. PROPOSICION

Si r es una rotación de eje δ y π_1 un plano que contiene a δ, existe un único plano π_2 que contiene a δ tal que $r = S_{\pi_2} \circ S_{\pi_1}$.

Probaremos la unicidad del plano π_2, es decir probaremos que $\pi_2 = \pi_2'$.

$$[S_{\pi_2} \circ S_{\pi_1} = S_{\pi'_2} \circ S_{\pi_1}] \Longrightarrow [S_{\pi_2} \circ (S_{\pi_1} \circ S_{\pi_1}) = S_{\pi'_2} \circ (S_{\pi_1} \circ S_{\pi_1})]$$

$$\Longrightarrow [S_{\pi_2} = S_{\pi'_2}, \text{ por que } S_{\pi_1} \circ S_{\pi_1} = Id_E]$$

$$\Longrightarrow [\pi_2 = \pi'_2]$$

4. PROPOSICION

El conjunto de las rotaciones de eje δ, dotado de la ley de composición, es un grupo conmutativo.

a) Cerradura.

Sea $r = S_{p_2} \circ S_{p_1}$, $r' = S_{p_3} \circ S_{p_2}$ rotaciones de eje δ. Probar que:

$$r' \circ r = r'', \text{ es una rotación de eje } \delta.$$

$$r' \circ r = (S_{p_3} \circ S_{p_2}) \circ (S_{p_2} \circ S_{p_1})$$

$$= S_{p_3} \circ (S_{p_2} \circ S_{p_2}) \circ S_{p_1}, \quad Id_E = S_{p_2} \circ S_{p_2}.$$

$$= S_{p_3} \circ S_{p_1} = r''$$

b) Para que r sea la rotación identidad de eje δ, debe probarse que para todo $M \in E$ se cumple que $r(M) = M$.

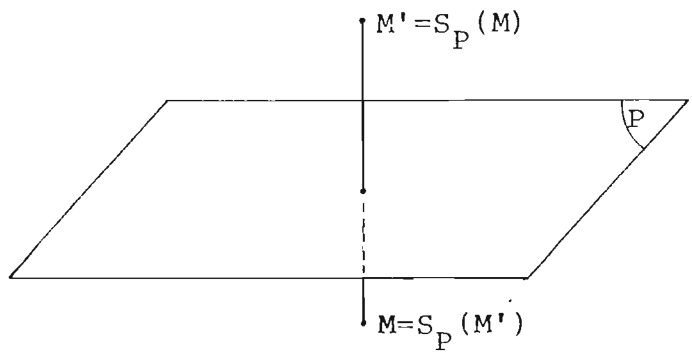


FIGURA Nº 56

Sea $M \in E$, $M' = S_p(M) \in E$, $M = S_p(M') \in E$.

entonces

$$r(M) = S_p(S_p(M))$$

$$= S_p(M')$$

$$= M.$$

c) Inversos

Para que r^{-1} sea rotación recíproca de r, de eje δ, se debe probar que

$$r^{-1} = S_{p_2} \circ S_{p_1}$$

Sea r rotación de eje δ tal que

$r = S_{p_1} \circ S_{p_2} \Rightarrow r \circ r^{-1} = (S_{p_2} \circ S_{p_1}) \circ r^{-1}$, r^{-1} es la recípro ca de r, ya que es biyectiva.

$$\Rightarrow Id_E = (S_{p_1} \circ S_{p_2}) \circ r^{-1}$$

$$\Rightarrow S_{p_1} = (S_{p_1} \circ S_{p_1}) \circ S_{p_2} \circ r^{-1}$$

$$\Rightarrow S_{p_1} = S_{p_2} \circ r^{-1},\ Id_E = S_{p_1} \circ S_{p_2}.$$

$$\Rightarrow S_{p_2} \circ S_{p_1} = (S_{p_2} \circ S_{p_2}) \circ r^{-1}$$

$$\Rightarrow S_{p_2} \circ S_{p_1} = r^{-1},\ Id_E = S_{p_2} \circ S_{p_2}.$$

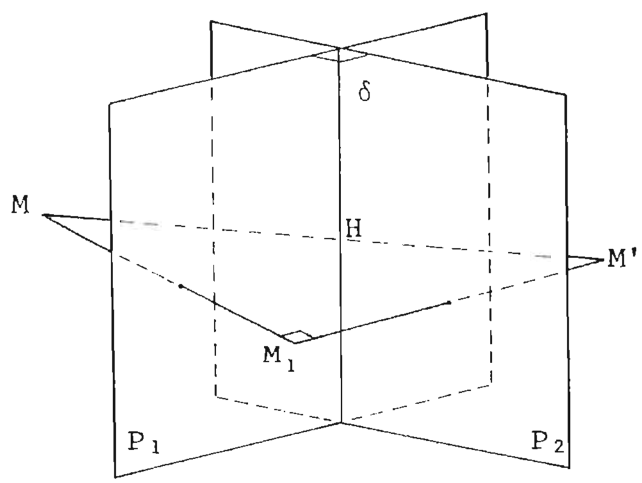
9. ROTACIONES PARTICULARES: SIMETRIAS AXIALES

1. DEFINICION

Se llama simetría ortogonal a una recta δ a la transformación de E anotada por S_δ y definida por

$$M \longrightarrow M' \quad \text{donde } \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH},$$

H designa la proyección ortogonal de M sobre la recta δ.



2. PROPOSICION

S_δ es la rotación de eje δ y de ángulo llano.

Demostración. (Ver figura 57)

Sean dos planos perpendiculares P_1 y P_2 de recta de intersección δ.

Entonces:

$$S_{\delta} = S_{p_2} \circ S_{p_1}.$$

En efecto,

Sea $M \in E$. Consideremos P el plano ortogonal a δ y que pasa por M, sea H el punto de intersección de P y δ;

Pongamos $r = S_{p_2} \circ S_{p_1}$. Entonces

H es la proyección ortogonal de M sobre δ.

3. PROPOSICION

Si P_1 y P_2 son planos perpendiculares que contienen al eje δ, entonces $S_{p_1} \circ S_{p_2} = S_{p_2} \circ S_{p_1}$.

Demostración.

Sea $M' \in E$, $S_{p_2}(M') = M_1 \in E$, $S_{p_1}(M_1) = M \in E$. (Ver figura 57)

$$S_{p_1}(S_{p_2}(M')) = S_{p_1}(M_1)$$
$$= M$$

y si δ es la recta de intersección de P_1 y P_2

$S_{\delta}(M') = M$

Entonces $S_{p_1} \circ S_{p_2} = S_{\delta}$.

Sea $M \in E$, $S_{p_1}(M) = M_1 \in E$, $S_{p_2}(M_1) = M' \in E$. (Ver figura 57)

$$S_{p_2}(S_{p_1}(M)) = S_{p_2}(M_1)$$
$$= M'$$

y si δ es la recta de intersección de P_1 y P_2

$S_\delta\ (M) = M'$

Entonces $S_{p_2} \circ S_{p_1} = S_\delta$.

$\therefore\quad S_{p_1} \circ S_{p_2} = S_{p_2} \circ S_{p_1}$.

4. EJEMPLO

Sea un sistema ortonormal $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\mathcal{E}$.

Para la transformación de $\mathcal{E}$ anotada:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2 - y \\ z' = 2 - z \end{cases}$$

, decir si es una isometría,

estudiar su conjunto de puntos fijos y determinar si es simetría, rotación...

i) Mostrar que la transformación es una isometría.

Sean $T(x_1,y_1,z_1)$, $G(x_2,y_2,z_2)$ puntos de $\mathcal{E}$, de imágenes respectivas $T'(x_1',y_1',z_1')$, $G'(x_2',y_2',z_2')$.

Mostrar que $d(T',G') = d(T,G)$.

$$\begin{aligned} d(T',G') &= \sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2} \\ &= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (2-y_1-2+y_2)^2 + (2-z_1-2+z_2)^2} \\ &= \sqrt{(x - x_2)^2 + [(-1)(y_1-y_2)]^2 + [(-1)(z_1-z_2)]^2} \\ &= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2} \\ &= \quad d(T,G). \end{aligned}$$

ii) Sea $f: E \longrightarrow E$ una aplicación y $G(x,y,z)$ punto fijo de f, entonces

$$f(G) = f(x,y,z) = (x,y,z) = G$$

$G(x,y,z)$ es punto fijo si y solo sí:

$$\begin{cases} x = x \\ y = 2 - y \quad :P_1 \\ z = 2 - z \quad :P_2 \end{cases} \text{, es decir} \quad \begin{array}{l} x = x \Longrightarrow x = 0 \\ 2y = 2 \Longrightarrow y = 1 \\ 2z = 2 \Longrightarrow z = 1 \end{array}$$

Luego, el conjunto de puntos fijos es la recta δ [intersección entre los planos P_1 y P_2], pasando por el punto $G(0,1,1)$ y paralela al eje $(0,i)$.

iii) La transformación es una simetría axial de eje la recta $\delta = \{(t,1,1) \in \mathbb{R}^3\}$ (S_δ).

5. EJEMPLO

Dar una expresión analítica de la isometría f.

La isometría f es la simetría ortogonal de eje δ, δ es una recta que pasa por $A(1,0,0)$ y cuyo vector director es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Para un punto $M(x,y,z)$ de imagen $M'(x',y',z')$, anotando con H la proyección ortogonal de M sobre δ

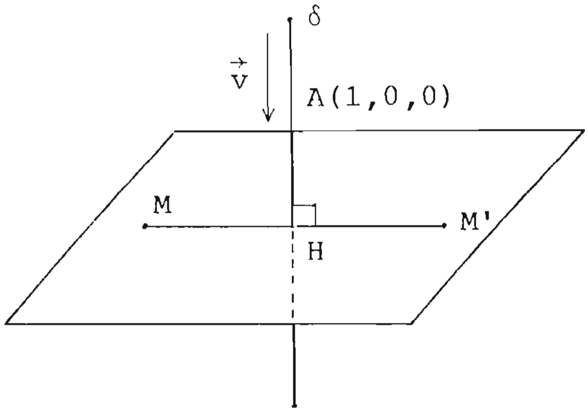


FIGURA Nº 58

Como:

i) $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{v} = 0$ ó $\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Se obtiene

$2(x'-x) - (y'-y) + (z'-z) = 0$, (ecuación del plano) (1)

ii) $\exists k \in \mathbb{R}$; $\overrightarrow{AH} = K\vec{v}$., $H \in \delta$

$$\begin{pmatrix} \frac{x+x'}{2} - 1 \\ \frac{y+y'}{2} - 0 \\ \frac{z+z'}{2} - 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \frac{x+x'}{2} - 1 = 2k \\ \frac{y+y'}{2} = -k \\ \frac{z+z'}{2} = k \end{cases} \qquad (2)$$

Despejamos de (2) a x',y',z':

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x + x'}{2} - 1 = 2k, \text{ tenemos } x' = -x + 4k + 2 \\ \frac{y + y'}{2} = -k, \text{ tenemos } y' = -2k - y \\ \frac{z + z'}{2} = k, \text{ tenemos } z' = 2k - z \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Sustituyendo en (1) los valores de (3) y luego despejamos k.

$$2(-x + 4k + 2 - x) - (-2k - y - y) + (2k - z - z) = 0$$

$$-2x + 8k + 4 - 2x + 2k + 2y + 2k - 2z = 0$$

$$-4x + 12k + 2y - 2z + 4 = 0$$

$$12k = 4x - 2y + 2z - 4$$

$$k = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y + \frac{1}{6}z - \frac{1}{3}$$

Ahora sustituyamos el valor de k en (3) y tenemos los valores de x',y',z' así:

$$x' = -x + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} + 2$$

$$x' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}$$

$$y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} - y$$

$$y' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}$$

$$z' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3} - z$$

$$z' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}$$

Luego la expresión analítica de la isometría es:

$$x' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}$$

$$y' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}$$

$$z' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}$$

10. COMPOSICION DE DOS ROTACIONES DE EJES COPLANARES

1. PROPOSICION

Si r y r' son dos rotaciones de ejes δ y δ' coplanares, respectivamente, contenidos en un plano P entonces se cumple la igualdad $r o r' = S_{P_1} \circ S_{P_2}$.

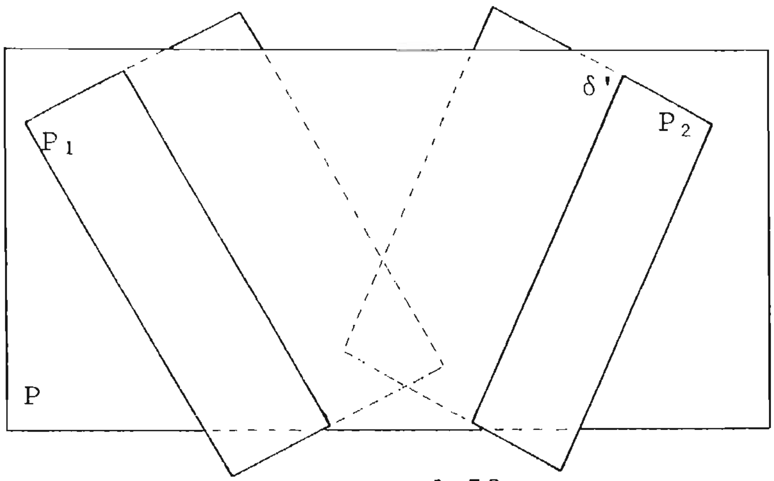


FIGURA Nº 59

Sea P el plano que contiene a δ y δ'.

Sea el plano P_1 que contiene a δ tal que: $r = S_{P_1} \circ S_P$

Sea el plano P_2 que contiene a δ' tal que: $r' = S_P \circ S_{P_2}$.

$$r \circ r' = (S_{P_1} \circ S_P) \circ (S_P \circ S_{P_2})$$

Luego,

$$= S_{P_1} \circ (S_P \circ S_P) \circ S_{P_2}$$

$$= S_{P_1} \circ S_{P_2} \;,\; Id_E = S_P \circ S_P$$

Así, $r \circ r'$ es:

Una traslación si $P_1 \| P_2$. (proposición V.6.1)

Una rotación Si $P_1 \cap P_2 \neq \phi$. (Definición V.7.1)

11. COMPOSICION DE UNA SIMETRIA RELATIVA A UN PLANO Y UNA TRASLACION

1. PROPOSICION

1) Si S_p es la simetría relativa al plano P y $t_{\vec{v}}$ una traslación de vector $\vec{v}$ ortogonal a P, entonces.

$$S_p \circ t_{\vec{v}} = S_{p'}$$

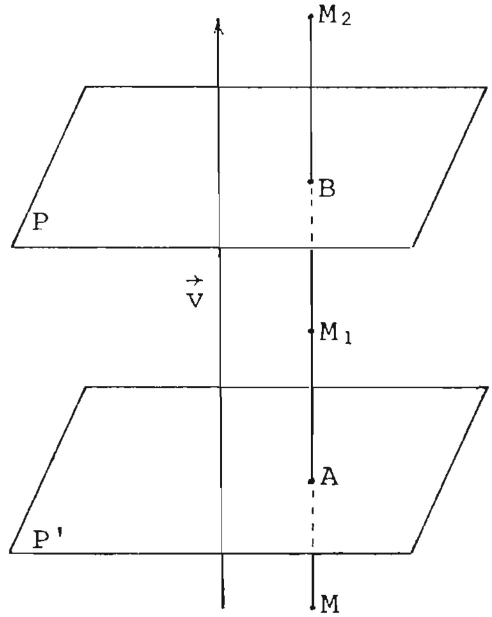


FIGURA Nº 60

Como $t_{\vec{v}} = S_p \circ S_{p'}$, donde P' es la imagen del plano P por la traslación $t_{(-\vec{v}/2)}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1B} + \overrightarrow{BM_2}\\ &= 2\overrightarrow{AM_1} + 2\overrightarrow{M_1B}\\ &= 2(\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1B})\\ &= 2(\overrightarrow{AB}) \;, \quad \text{Relación de Chasles}\\ &= (\tfrac{\vec{v}}{2})\\ &= \vec{v}.\end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$t_{\vec{v}} = S_P \circ S_{P'} \Rightarrow S_P \circ t_{\vec{v}} = (S_P \circ S_P) \circ S_{P'}$$

$$\Rightarrow S_P \circ t_{\vec{v}} = S_{P'}, \; Id_E = S_P \circ S_P$$

2) Si S_P es la simetría relativa al plano P y $t_{\vec{v}}$ una traslación de vector ortogonal a P, entonces

$$t_{\vec{v}} \circ S_P = S_{P''}$$

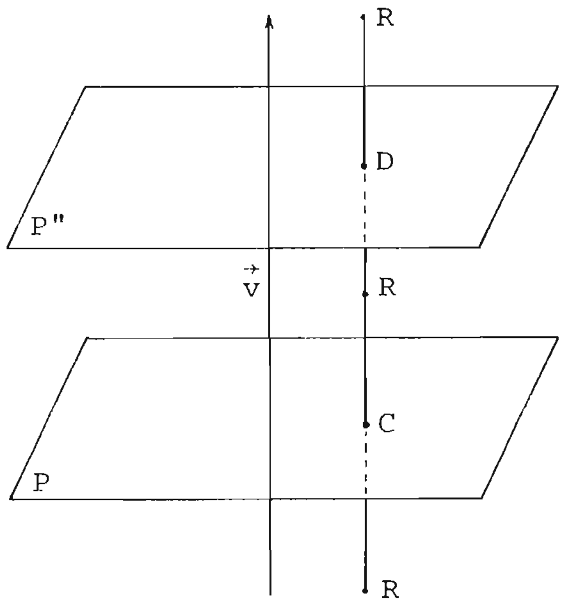


FIGURA Nº 61

Como $t_{\vec{v}} = S_{P''} \circ S_P$, donde P" es la imagen del plano P por la traslación $t_{(\vec{v}/2)}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{RR_2} &= \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CR_1} + \overrightarrow{R_1D} + \overrightarrow{DR_2} \\
&= 2\overrightarrow{CR_1} + 2\overrightarrow{R_1D} \\
&= 2(\overrightarrow{CR_1} + \overrightarrow{R_1D}) \\
&= 2(\overrightarrow{CD}), \text{ por relación de Chasles.} \\
&= 2\left(\frac{\vec{v}}{2}\right) \\
&= \vec{v}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$t_{\vec{v}} = S_{P''} \circ S_P \Rightarrow t_{\vec{v}} \circ S_P = S_{P''} \circ (S_P \circ S_P)$$

$$\Rightarrow t_{\vec{v}} \circ S_P = S_{P''},\ Id_E = S_P \circ S_P.$$

Observación: Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, $S_P \circ t_{\vec{v}} \neq t_{\vec{v}} \circ S_P$

12. CASOS ESPECIALES

1. CASO DONDE LA DIRECCION DE $\vec{v}$ ESTA CONTENIDA EN EL PLANO P.

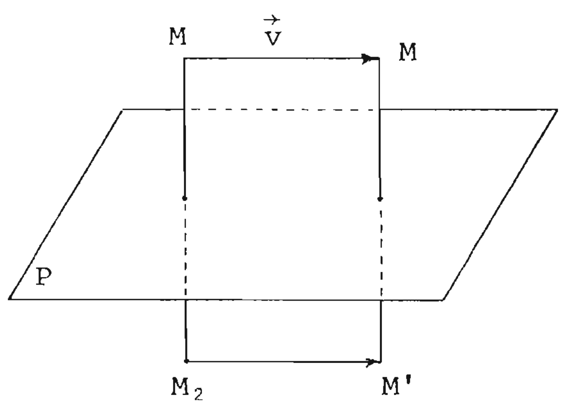


FIGURA Nº 62

$S_p \circ t_{\vec{v}}$ no tiene puntos fijos cuando $\vec{v} \neq 0$

Además $S_p \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ S_p$.

2. CASO GENERAL:

El vector $\vec{v}$ se escribe $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ donde $\vec{v}_1$ es ortogonal a P y $\vec{v}_2$ tiene su dirección contenida en P.

Por consiguiente:

$S_p \circ t_{\vec{v}} = S_{p'} \circ t_{\vec{v}_2}$, donde $P' = t_{(-\vec{v}_1/2)}(P)$;

$t_{\vec{v}} \circ S_p = S_{p''} \circ t_{\vec{v}_2}$, donde $P'' = t_{(\vec{v}_1/2)}(P)$

3 OBSERVACION

Se repite las simetrías deslizantes.

13. COMPOSICION DE UNA ROTACION DE EJE δ Y DE UNA SIMETRIA RELATIVA A UN PLANO ORTOGONAL A δ

1. PROPOSICION

Si r es una rotación de eje δ y S_p la simetría relativa a un plano P ortogonal a δ, entonces $r \circ S_p = S_p \circ r$.

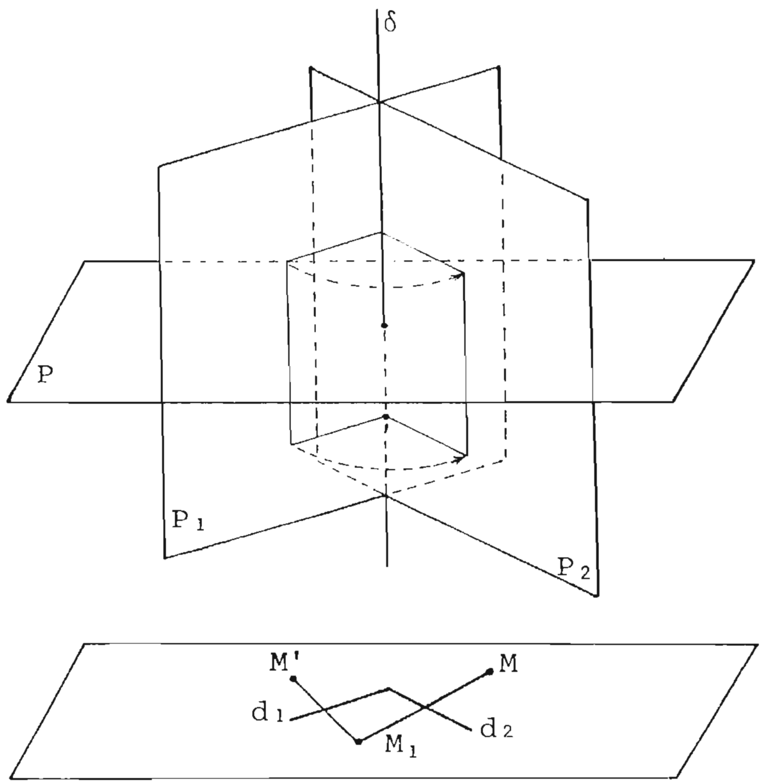


FIGURA Nº 63

Sea $M \varepsilon P$, verificaremos que $(r \circ S_p \circ r^{-1})(M) = M$.

$$(r \circ S_p \circ r^{-1})(M) = r(S_p(r^{-1}(M)))$$

$$= r(S_p(M')), \quad r^{-1}(M) = M'$$

en que, $S_{d_2}(M) = M_1 \varepsilon P$, $S_{d_1}(M_1) = M' \varepsilon P$. así:

$$r^{-1}(M) = S_{d_1}(S_{d_2}(M))$$

$$= S_{d_1}(M_1)$$

$$= M'$$

Entonces

$(r \circ S_p \circ r^{-1})(M) = r(M')$; M' es punto fijo de S_p.

Entonces

$(r \circ S_p \circ r^{-1})(M) = M$

en que, $S_{d_1}(M') = M_1$, $S_{d_2}(M_1) = M$ así:

$$\begin{aligned} r(M') &= S_{d_2}(S_{d_1}(M')) \\ &= S_{d_2}(M_1) \\ &= M. \end{aligned}$$

De donde:

1º) $r \circ S_p \circ r^{-1} = Id_E \Rightarrow (r^{-1} \circ r) \circ S_p \circ r^{-1} = r^{-1}$

$\Rightarrow S_p \circ r^{-1} = r^{-1}$, $Id_E = r^{-1} \circ r$.

$\Rightarrow S_p \circ (r^{-1} \circ r) = r^{-1} \circ r$.

$S_p = Id_E$.

Lo cual no es posible por que el conjunto de puntos fijos de $r \circ S_p \circ r^{-1}$ es el plano P y no el espacio E.

2º) $r \circ S_p \circ r^{-1} = S_p \Rightarrow r \circ S_p \circ (r^{-1} \circ r) = S_p \circ r$

$\Rightarrow r \circ S_p = S_p \circ r$, $Id_E = r^{-1} \circ r$

$\therefore$ $r \circ S_p = S_p \circ r$.

2. CASO PARTICULAR DONDE r ES LA SIMETRÍA DEL EJE δ.

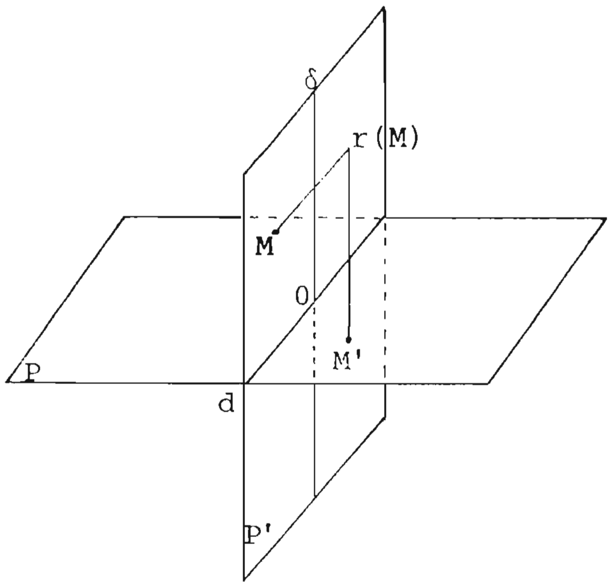


FIGURA Nº 64

Sea 0 el punto de intersección de P y de δ.

Sea $M \varepsilon E$.

Consideremos un plano P' pasando por M y conteniendo a δ este plano P contiene a la recta d.

Los puntos r(M) y $S_p \circ r(M) \varepsilon P'$ y, en este plano tenemos:

$$S_p \circ r(M) = S_d \circ S_\delta(M)$$

Como d y δ son perpendicualres, M' es el punto simétrico de M relativo al punto 0.

De donde $S_p \circ r = r \circ S_p = S_0$.

donde S_0 es la simetría de centro 0

CAPITULO VI

SIMILITUDES

1. PROPIEDADES GENERALES

1. DEFINICION

Se llama similitud de un plano $\mathcal{P}$ a toda aplicación f de $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}$ para la cual existe un número real α estrictamente positivo verificandose, para toda pareja de puntos A,B de un plano:

$d(A',B') = \alpha d(A,B)$, con $A' = f(A)$, $B' = f(B)$

α es llamada la razón de similitud de f.

2. PROPOSICION

Una isometría es una similitud de razón 1.

Demostración

Sea f una isometría de $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}$.

Por definición, tenemos que:

$$f: \begin{array}{l} \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \\ A \longrightarrow A' = f(A) \end{array}$$

$d(A_1',A_2') = d(A_1,A_2)$, $A_2,A_2 \in \mathcal{P}$.

la cual podemos escribirla así:

$d(A'_1, A'_2) = (1) \times d(A_1, A_2)$, con $A'_1 = f(A_1)$,

$A'_1 = f(A_2) \in \mathcal{P}$

donde $\alpha = 1$ que es la razón .

Por lo tanto f es una similitud de razón 1.

3. PROPOSICION

Una homotecia de razón β es una similitud de razón $|\beta|$.

Demostración

Sea h una homotecia de $\mathcal{P}$, de razon β

$$.h: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$A \longrightarrow A' = h(A)$$

$.\overrightarrow{A'B'} = \beta\overrightarrow{AB}$, $h(A) = A'$, $h(B) = B'$, $\beta \in \mathbb{R} - \{0,1\}$

$\overrightarrow{A'B'} = \beta\overrightarrow{AB}^2 \Rightarrow d^2(A',B') = \beta^2 d^2(A,B)$

$\Rightarrow d(A',B') = |\beta|\ d(A,B)$, $A'=h(A)$,

$B'=h(B)$.

de razón $|\beta|$

$\therefore$ h es una similitud (por definición VI.1.1)

2. FIGURAS SEMEJANTES

1. DEFINICION

Una figura $\mathcal{A}$ se dice semejante a una figura $\mathcal{B}$ si existe una similitud f que transforma $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.

3. DESCOMPOSICION DE UNA SIMILITUD

1. PROPOSICION

Sea $f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, una similitud
$\quad\;\; A \longrightarrow A'$

1º Si f es una similitud de razón α y h una homotecia de la misma razón, entonces f se escribe como $h \circ g$, donde g es una isometría.

2º Toda similitud es una aplicación afín biyectiva.

Demostración de 1º.

Sea f una similitud de razón α; si ha es una homotecia de razón α, entonces $h^{-1} \circ f = g$ es una isometría, en efecto si A y B son dos puntos de un plano, tenemos que si:

$A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $A'' = h^{-1}(A')$, $B'' = h^{-1}(B')$

Se obtiene:

$d(A',B') = \alpha d(A,B)$, $d(A'',B'') = \alpha^{-1} d(A',B')$

y entonces:

$$d(A'',B'') = \alpha^{-1}.\alpha d(A,B) = d(A,B)$$

$\therefore$ g es una isometría.

Demostración de 2º.

Sea f una similitud de $\mathcal{P}$

La aplicación f es inyectiva.

$A' = B' \Rightarrow d(A',B.) = 0$

$\Rightarrow \alpha d(A,B) = 0$ (por definición VI.1.1)

$\Rightarrow d(A,B) = 0;\ \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\Rightarrow A = B$

f es afín e inyectiva es por tanto biyectiva (Por proposición III.5.7)

4. SIMILITUDES DIRECTAS

1. DEFINICION

Se llama similitud directa de un plano P a toda aplicación f de P en P que se escribe h o g, donde g es un desplazamiento del plano y h una homotecia.

2. PROPOSICION

1º Dada una similitud directa f, existe un único real $\alpha > 0$ y un único ángulo θ verificandose para toda pareja de puntos distintos A,B de un plano:

$$\left.\begin{aligned} d(A',B') &= \alpha d(A,B) \\ \widehat{(\vec{AB},\vec{A'B'})} &= \theta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

2º Si una aplicación f verifica la propiedad (1), entonces es una similitud directa.

El real α es la razón de la similitud f; θ es el ángulo de la similitud f.

Demostración de 1ª.

Sea $f = h_{p,\alpha} o g$ la similitud directa donde α es un real estrictamente positivo y g un desplazamiento.

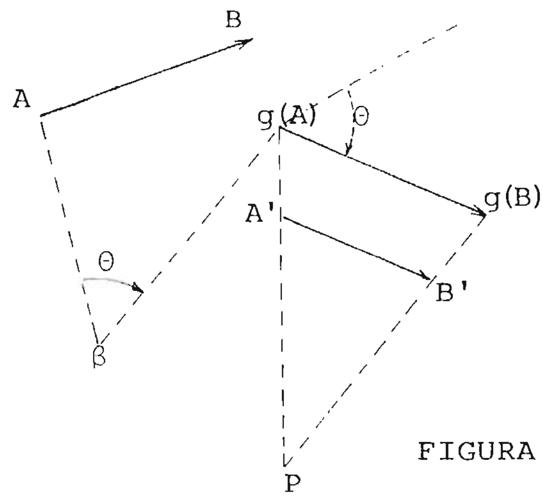


FIGURA Nº 65

Si g es una rotación, representemos por Θ el ángulo de la rotación g.

Si g es una traslación, representemos por $\Theta = \hat{0}$.

Se tiene en todos los casos, para dos puntos distintos A y B de un plano:

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{g(A)g(B)})} = \Theta$$

Puesto que $A' = h_{p,\alpha}(g(A))$, $B' = h_{p,\alpha}(g(B))$, tenemos

$$\overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{g(A)g(B)},$$

pues

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})} = \Theta$$

Demostración de 2ª.

Sea f una aplicación que verifica

$d(A',B') = \alpha d(A,B)$ y $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}) = \theta$

Sea un punto P del plano

Si $r_{p,-\theta}$ es una rotación de centro P y ángulo $-\theta$. Si $h_{p,\alpha^{-1}}$ es una homotecia de centro P y razón α^{-1}.

Sea k la aplicación definida por:

$k = r_{p,-\theta} \circ h_{p,\alpha^{-1}} \circ f.$

Para dos puntos A,B distintos del plano

$k(A) = r_{p,-\theta}(h_{p,\alpha^{-1}}(f(A)))$

$= r_{p,-\theta}(h_{p,\alpha^{-1}}(h_{p,\alpha}(g(A))));\ f(A) = h_{p,\alpha}(g(A)).$

$= r_{p,-\theta}(g(A)),\ Id_E = h_{p,\alpha^{-1}} \circ h_{p,\alpha}.$

$= A$

$k(B) = r_{p,-\theta}(h_{p,\alpha^{-1}}(f(B)))$

$= r_{p,-\theta}(h_{p,\alpha^{-1}}(h_{p,\alpha}(g(B)))),\ f(B) = h_{p,\alpha}(g(B))$

$= r_{p,-\theta}(g(B)),\ Id_E = h_{p,\alpha^{-1}} \circ h_{p,\alpha}.$

$= B$

de donde

$d(k(A),\ k(B)) = d(A,B),\ (\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{k(A)k(B)}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}}) = \hat{0}$

Por consiguiente $\overrightarrow{k(A)k(B)} = \overrightarrow{AB}$, y entonces k es una traslación.

Se tiene que:

$$k = r_{p,-\Theta} o h_{p,\alpha^{-1}} o f \Rightarrow r_{p,\Theta} o k = (r_{p,\Theta} o r_{p,-\Theta}) o\ h_{p,\alpha^{-1}} o f$$

$$\Rightarrow r_{p,\Theta} o k = h_{p,\alpha^{-1}} o f,\ Id_E = r_{p,\Theta} o r_{p,-\Theta}$$

$$\Rightarrow h_{p,\alpha} o r_{p,\Theta} o k = (h_{p,\alpha} o h_{p,\alpha^{-1}})\ o\ f$$

$$\Rightarrow h_{p,\alpha} o r_{p,\Theta} o k = f,\ Id_E = h_{p,\alpha} o h_{p,\alpha^{-1}}.$$

$\therefore$ $f = h_{p,\alpha} o (r_{p,\Theta} o k)$ es una similitud directa.

5. GRUPO DE SIMILITUDES DIRECTAS

1. PROPOSICION

El conjunto de similitudes directas, dotado de la ley de composición, es un grupo.

(La razón de la composición es el producto de las razones, el ángulo de la composición es la suma de los ángulos).

a) Cerradura

Sea f_1 y f_2 similitudes directas de razones α_1 y α_2, de ángulos Θ_1 y Θ_2 respectivamente.

Sea A y B dos puntos de un plano; pongamos:

$A' = f_1(A)$, $B' = f_1(B)$, $A'' = f_2(A')$, $B'' = f_2(B')$

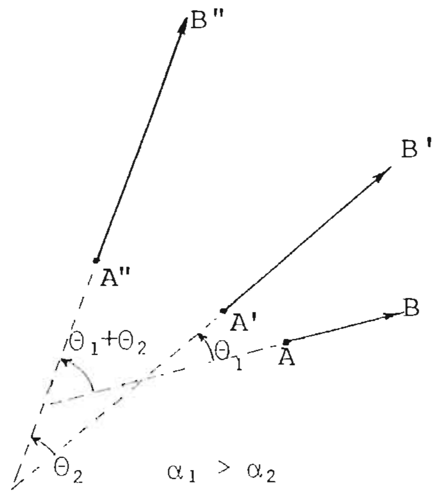


FIGURA Nº 66

Se tiene entonces:

$d(A',B') = \alpha_1 d(A,B)$ y $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}) = \Theta_1$

$d(A'',B'') = \alpha_2 \alpha_1 d(A,B)$ y $(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A''B''}}) = \Theta_2$

de donde

$d(A'',B'') = \alpha_2\alpha_1 d(A,B)$ y $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A''B''}}) = \Theta_2 + \Theta_1$,

puesto que $A'' = (f_2 \circ f_1)(A)$ y $B'' = (f_2 \circ f_1)(B)$, que es $f_2 \circ f_1$ una similitud directa de razón $\alpha_2\alpha_1$ y de ángulo $\Theta_2 + \Theta_1$.

b) Identidad

f es la similitud directa identidad.

Como $\alpha = 1$ y $\Theta = 0$ tales que para toda pareja de puntos $A,B \in P$, $A \neq B$.

$d(f(A),\ f(B)) = d(A,B),\ \alpha = 1.$

de donde $f(A) = A$ y $f(B) = B.$

así $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})} = 0$

c) Inversos.

Para que f^{-1} sea similitud directa se debe probar que: existe la razón α y el ángulo Θ tales que para toda pareja de puntos $A, B \in P$, $A \neq B$

$$d(f^{-1}(A),\ f^{-1}(B)) = \alpha d(A,B)$$

$$\widehat{(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{f^{-1}(A) f^{-1}(B)})} = \Theta$$

Sea β la razón de f y ϕ el ángulo de f tales que para toda pareja de puntos $A, B \in P$, $A \neq B$

$$d(f(A),\ f(B)) = \beta d(A,B)$$

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{f(A) f(B)})} = \phi$$

Sean A y $B \in P$, $A \neq B$; $f^{-1}(A),\ f^{-1}(B) \in P$

además $f^{-1}(A) \neq f^{-1}(B)$, por ser f biyectiva.

se cumple que:

$$d(f(f^{-1}(A)),\ f(f^{-1}(B))) = \beta d(f^{-1}(A), f^{-1}(B))$$

$$d(A,B) = \beta d(f^{-1}(A), f^{-1}(B))$$

$$d(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) = \frac{1}{\beta}\, d(A,B)$$

$$\widehat{(\overrightarrow{f^{-1}(A) f^{-1}(B)}, \overrightarrow{AB})} = \phi$$

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{f^{-1}(A) f^{-1}(B)})} = -\phi$$

6. CENTRO DE UNA SIMILITUD DIRECTA

1. DEFINICION

Dado un número real positivo α, un ángulo Θ, un punto P de un plano, se llama similitud de centro P, de razón α, de ángulo Θ, la aplicación f definida por:

$$\begin{cases} \text{Si } M \neq P: \ (\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PM'}) = \Theta, \ d(P,M') = \alpha d(P,M) \\ P' = P \end{cases}$$

2. PROPOSICION

El conjunto de similitudes directas de centro P, dotada de la ley de composición, es un subgrupo de todas las similitudes directas.

i) Ley de cierre.

Sea $f = h_{p,\alpha} \circ w_1$, $g = h_{p,\beta} \circ w_2$ similitudes directas

Probaremos que: $f \circ g = h$ es una similitud directa de centro P.

$$\begin{aligned} f \circ g &= (h_{p,\alpha} \circ w_1) \circ (h_{p,\beta} \circ w_2) \\ &= h_{p,\alpha} \circ (w_1 \circ h_{p,\beta}) \circ w_2 \\ &= h_{p,\alpha} \circ (h_{p,\beta} \circ w_1) \circ w_2 \\ &= (h_{p,\alpha} \circ h_{p,\beta}) \circ (w_1 \circ w_2) \\ &= h_{p,\alpha\beta} \circ w_3 \quad ; \quad w_3 = w_1 \circ w_2 \end{aligned}$$

ii) Identidad

Existe la identidad de P (Id_P) la cual es la identidad de las similitudes directas.

iii) Inversos

Para cada f existe una similitud directa inversa j tal que se cumple que

$$f \circ j = j \circ f = Id_P$$

Sea $f = h_{p,\alpha} \circ w$, donde $h_{p,\alpha}$ es una homotecia de centro P y razón α y w es un desplazamiento.

$$f \circ j = (h_{p,\alpha} \circ w) \circ j = Id_P$$

$$(h_{p,\alpha} \circ w) \circ j = (h_{p,\alpha} \circ w)(h_{p,\alpha} \circ w)^{-1}$$

$$j = (h_{p,\alpha} \circ w)^{-1}$$

$$j = h^{-1}_{p,\alpha} \circ w^{-1}$$

$$j = h_{p,\frac{1}{\alpha}} \circ w^{-1}$$

3. PROPOSICION

Sean los puntos A,B,A', B' de un plano P con $A \neq B$, $A' \neq B'$ existe una y solo una similitud directa que transforma A en A', B en B'.

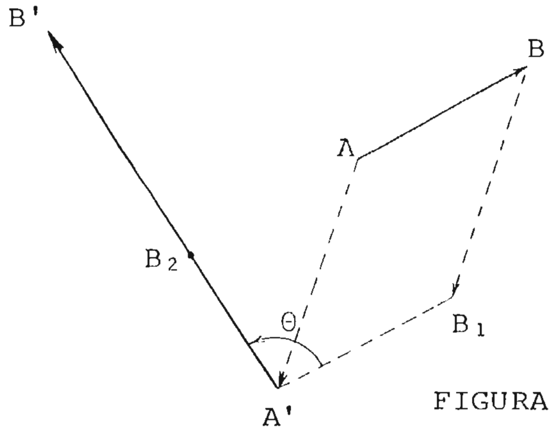


FIGURA Nº 67

Demostración

Sea f una aplicación que verifica

$d(A', B') = kd(A,B)$ y $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = \Theta$

Sea un punto A' del plano

Si $h_{A',k}$ es una homotecia de centro A' y razón k.

Si $r_{A',\Theta}$ es una rotación de centro A' y ángulo Θ

Si $t_{\overrightarrow{AA'}}$ es una traslación de vector $\overrightarrow{AA'}$

Sea f la aplicación definida por:

$f = h_{A',k} \circ r_{A',\Theta} \circ t_{\overrightarrow{AA'}}$.

Para dos puntos A,B distintos del plano. Además $A', B_1 \in P$, $A' \neq B_1$; $A', B_2 \in P$, $A' \neq B_2$

De donde: $A' = t_{\overrightarrow{AA'}}(A)$, $B_1 = t_{\overrightarrow{AA'}}(B)$, $r_{A',\Theta}(A) = A'$,

$r_{A',\Theta}(B_1) = B_2$, $h_{A',k}(A') = A'$, $h_{A',k}(B_2) = B'$.

Entonces:

$$f(A) = h_{A',k}(r_{A',\Theta}(t_{\vec{AA'}}(A)))$$

$$= h_{A',k}(r_{A',\Theta}(A'))$$

$$= h_{A',k}(A'), \text{ A' es un punto fijo de } r_{A',\Theta}$$

$$= A', \text{ A' es un punto fijo de } h_{A',k}.$$

$$f(B) = h_{A',k}(r_{A',\Theta}(t_{\vec{AA'}}(B)))$$

$$= h_{A',k}(r_{A',\Theta}(B_1))$$

$$= h_{A',k}(B_2)$$

$$= B'.$$

4. PROPOSICION

Toda similitud directa f que no es una traslación tiene un único punto fijo P; se sigue que si α es la razón de f y Θ es su ángulo, entonces:

f es la similitud de centro P, de razón α, de ángulo Θ.

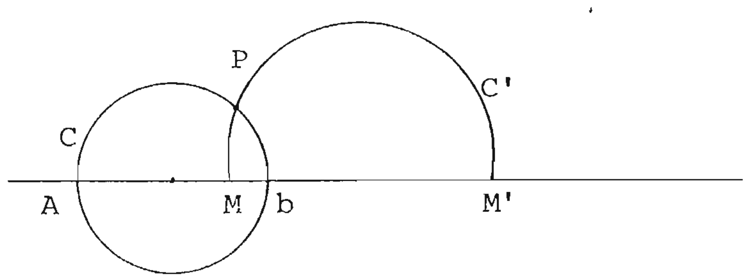


FIGURA Nº 68

Sea f una similitud directa de razón α, de ángulo Θ.

Si $\alpha = 1$, f es un desplazamiento. El conjunto de puntos fijos de f es entonces igual al plano P si f es la identidad y un punto si f es una rotación.

Si $\alpha \neq 1$.

Sea (M,M') una pareja de puntos $(M \neq M')$, P es punto fijo, de ángulo Θ la aplicación f se define así:

Si $M \neq P$: $\widehat{(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PM'})} = \Theta$ (1)

$P' = P$: $d(P,M') = |\alpha| d(P,M)$ (2)

El conjunto de puntos P verifica (1) es el círculo C de diámetro $[A\ B]$ con A que es el baricentro de dos puntos ponderados (M,k) y $(M',1)$ y B es el baricentro de dos puntos ponderados $(M, -k)$ y $(M',1)$.

El conjunto C' de los puntos P verifican (2) es un arco de círculo de extremos M y M' donde $(MM') - [MM']$. Existe un único punto P de intersección de C y C'.

7. ALGUNOS PRERREQUISITOS DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

1. REPRESENTACION GEOMETRICA DE UN NUMERO COMPLEJO.

Definición

Sea un número complejo cualquiera

$z = a + ib, \ (a,b) \in \mathbb{R}^2$

La imagen de z, relativa a un sistema de coordenadas ortonormal de ejes $(\overrightarrow{ox},\overrightarrow{oy})$ es el punto M(a,b). $\overrightarrow{OM}$ es el vector imagen de z.

z es el afijo del punto M ó del vector $\overrightarrow{OM}$.

Así, z se representa en el plano complejo.

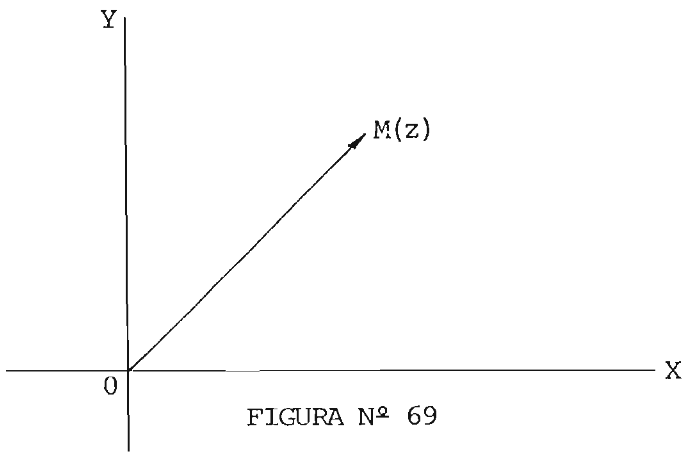


FIGURA Nº 69

2. ARGUMENTO DE UN NUMERO COMPLEJO

Definición

Dado un número complejo no nulo z, se llama argumento de z, se representa por Arg(z), a todo real α tal que:

$z = |z|(\text{Cos}\,\alpha + i\ \text{Sen}\,\alpha)$.

El segundo miembro se denomina forma trigonométrica de z.

3. SIGNIFICACION GEOMETRICA

Si M es la imagen de z, los valores del Arg(z) son las medi das en radianes del ángulo $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})$:

$$\alpha = (\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM}}) + 2k\pi$$

4. FORMA EXPONENCIAL DE a = Cos θ + i Sen θ

Es conveniente anotar el número Cos θ + i Sen θ con la expresión $e^{i\theta}$ (de módulo 1, de árgumento θ)

$$e^{i\theta} = \text{Cos}\ \theta + i\ \text{Sen}\ \theta. \qquad (1)$$

5. FORMA EXPONENCIAL DE z = r (Cos θ + i Sen θ)

z se puede escribir, así: $z = r\,e^{i\theta}$, por (1)

8. TRASLACION Y ROTACION EN EL PLANO COMPLEJO

1. TRASLACION DEL VECTOR $\overrightarrow{OM}$.

Sea, en el plano complejo, un punto P de afijo z, y un punto fijo M de afijo a.

La imagen P' de P en la traslación del vector $\overrightarrow{OM}$ es el punto P' tal que:

$$z' = z + a$$

Si P describe un conjunto B, P' describe un conjunto B', imagen de B en la traslación del vector a.

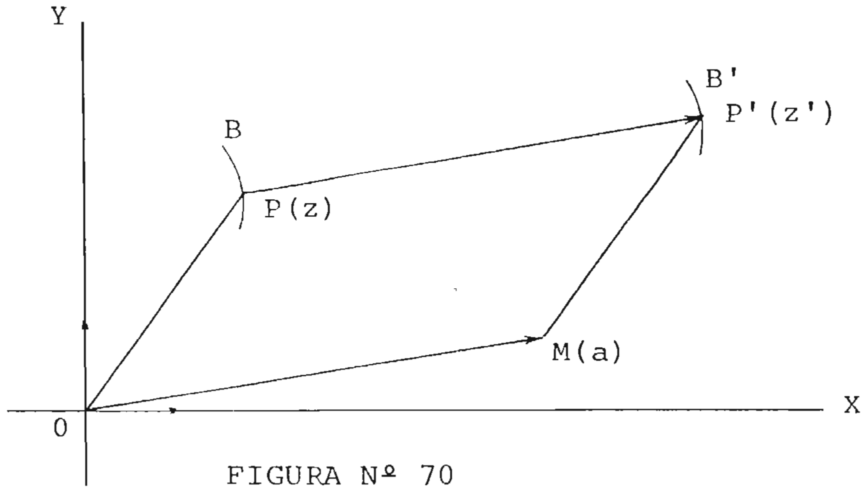


FIGURA Nº 70

2. ROTACION DE CENTRO O, DE ANGULO DE MEDIDA θ.

Sea, en el plano complejo, un punto P de afijo z y la medida θ de un ángulo.

La imagen P' de P en la rotación de centro O, de ángulo de medida θ es tal que:

$$d(O,P') = d(O,P)$$
$$(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OP'}}) = \theta$$

El afijo z' de P' es $z' = ze^{i\theta}$

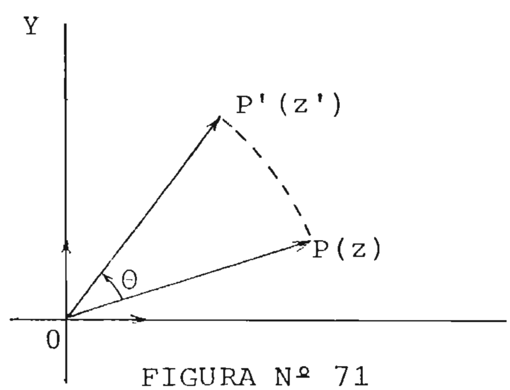


FIGURA Nº 71

3. ROTACION DEL ANGULO DE MEDIDA Θ CON RESPECTO AL PUNTO P DE AFIJO a.

Sea $M'(z')$ la imagen de $M(z)$.

El vector $\vec{PM}$ tiene por afijo $z - a$,

el vector $\vec{PM'}$ tiene por afijo $z' - a$,

y como $d(P,M) = d(P,M')$

$$\widehat{(\vec{PM},\vec{PM'})} = \Theta$$

se tiene: $z' - a = (z - a)e^{i\Theta}$

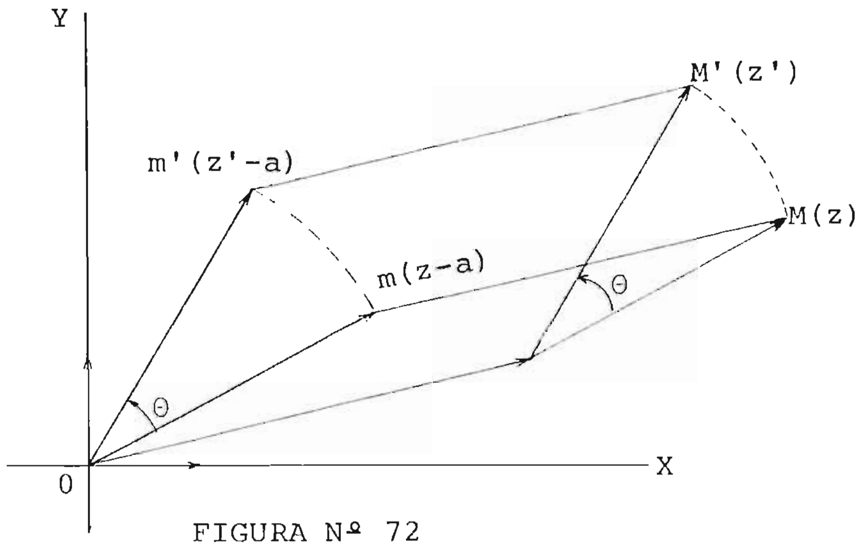


FIGURA Nº 72

Nota:

Se han presentado algunos conceptos sobre la teoría de los números complejos, para tener alguna idea de lo útil que son para la interpretación compleja de las similitudes Directas. (Dejamos al lector que revice, si es necesario, otros conceptos sencillos utilizados aquí, para la resolución de problemas).

9. INTERPRETACION COMPLEJA DE LAS SIMILITUDES DIRECTAS

1. EJEMPLO

Sea $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$; encontrar la recíproca de la similitud directa representada por:

$$f: z \longrightarrow az + b$$

Como $z' = az + b$, haciendo cambio de variable, tenemos

$z = az' + b$, luego despejamos z'. Así:

$az' = z - b$

$z' = a^{-1}z - a^{-1}b.$

Para tener seguridad que, $f^{-1}: z \longrightarrow a^{-1}z - a^{-1}b$ es la similitud recíproca directa, comprobaremos que:

$f \circ f^{-1} = Id$

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(z) &= f(f^{-1}(z)) = f(a^{-1}z - a^{-1}b)\\ &= a(a^{-1}z - a^{-1}b) + b\\ &= aa^{-1}z - aa^{-1}b + b\\ &= z - b + b\\ &= z.\end{aligned}$$

$\therefore$ $f^{-1}: z \longrightarrow a^{-1}z - a^{-1}b$ es la similitud recíproca directa.

2. EJEMPLO

A cada pareja (a,b) de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ se le asocia la similitud directa $f_{a,b}$ representada por

$$f_{a,b}: z \longrightarrow az + b$$

Escribir en función de a,b,a',b' la pareja asociada a la similitud directa

$$f_{a',b'} \circ f_{a,b}.$$

Sea $z \in \mathbb{C}$.

$$z \xrightarrow{f_{a,b}} az + b \xrightarrow{f_{a',b'}} aa'z + a'b + b'$$

$$\begin{aligned}(f_{a',b'} \circ f_{a,b})(z) &= f_{a',b'}(f_{a,b}(z)) \\ &= f_{a',b'}(az + b) \\ &= a'(az + b) + b' \\ &= aa'z + a'b + b'\end{aligned}$$

La escritura es: $(aa', a'b + b')$.

3. PROPOSICION

Toda similitud f se representa por una aplicación de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ de la forma $z \longrightarrow az + b$ donde $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$, y recíprocamente. En esta representación, $|a|$ es la razón de la similitud, arg(a) el ángulo de la similitud; en particular.

$a = 1$ si y solamente si f es una traslación.

$|a| = 1$ si y solamente si f es un desplazamiento.

Por otra parte, si $a \neq 1$ la ecuación $az + b = z$ admite una única solución zo que es afijo de centro de la similitud f.

Demostración

Sea f una transformación de $\mathcal{P}$ que se representa por la aplicación

$$z \longrightarrow az + b.$$

Sean $A, B \in \mathcal{P}$, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$.

Si z_M es el afijo de un punto M, se tiene:

$z_{B'} - z_{A'} = (az_B + b) - (az_A + b) = a(z_B - z_A)$, de donde

$$a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$$

Así, pues:

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})} = \arg\left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right) = \arg(a),$$

$$\begin{aligned} \text{y } d(A', B') &= |z_{B'} - z_{A'}| = az_B + b - az_A - b| \\ &= |az_B - az_A| \\ &= |a||z_B - z_A| \\ &= |a|d(A,B) \end{aligned}$$

La transformación f es entonces bien una similitud de razón $|a|$ y de ángulo $\arg(a)$.

Recíprocamente

Sea f una similitud de razón α y de ángulo θ; si M y N son dos puntos distintos del plano, se tiene:

$$d(N',M') = \alpha d(N,M), \quad \widehat{(\overrightarrow{N'M'}, \overrightarrow{NM})} = \theta$$

La relación entre afijos es:

$$z_{M'} - z_{N'} = \alpha e^{i\Theta}(z_M - z_N),$$

En particular para N = 0:

$$z_{M'} - z_{O'} = \alpha e^{i\Theta} z_M$$

$$z_M' = \alpha e^{i\Theta} z_M + z_{O'}$$

Si se pone $a = \alpha e^{i\Theta}$ y $b = z_{O'}$ se tiene:

$$z_{M'} = az_M + b$$

Esta forma prueba que f se representa por $z \longrightarrow az + b$.

4. EJEMPLO

Dar el centro, la razón y el ángulo de la similitud directa en el plano complejo:

$$z \longrightarrow 4jz - 1, \quad j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

a) Centro de la similitud

Por la proposición VI.6.4, tenemos:

Sea P punto fijo de f.

$$f(P) = 4\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) P - 1 = P$$

$$\Rightarrow \quad (-3 + 2\sqrt{3}\ i)\ P = 1$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{1}{-3 + 2\sqrt{3}\ i} = \frac{-3 - 2\sqrt{3}\ i}{21}$$

El centro de la similitud es $P = -\dfrac{3 + 2\sqrt{3}\ i}{21}$

b) La razón de a: $|a|$

$$|a| = \sqrt{a\ \bar{a}} = \sqrt{(-2 + 2\sqrt{3}\ i)(-2 - 2\sqrt{3}\ i)}$$

$$= \sqrt{4 + 12}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$|a| = 4.$$

donde $a = 4j = -2 + 2\sqrt{3}\ i.$

c) El ángulo de la similitud es $\operatorname{Arg}(a) = \alpha.$

Como $a \in \mathbb{C}$, tenemos que:

$$a = |a|\ (\operatorname{Cos}\alpha + i\ \operatorname{Sen}\alpha)$$

$$\frac{a}{|a|} = \operatorname{Cos}\alpha + i\ \operatorname{Sen}\alpha \Rightarrow \frac{-2 + 2\sqrt{3}\ i}{4} = \operatorname{Cos}\alpha + i\ \operatorname{Sen}\alpha$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} = \operatorname{Cos}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore \operatorname{Arg}(a) = \{\tfrac{2}{3}\pi\}$$

5. EJEMPLO

Escribir la forma de $z \longrightarrow az + b$ de la similitud de afijo $1 + 2i$, de ángulo $\frac{\pi}{6}$ y de razón $\frac{1}{2}$.

Como $a = |a|\ (\operatorname{Cos}\alpha + i\ \operatorname{Sen}\alpha)$, tenemos que

$$a = \frac{1}{2}\ (\operatorname{Cos}\frac{\pi}{6} + i\ \operatorname{Sen}\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\ e^{\pi/6\, i} = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{i}{2})$$

$a = \frac{\sqrt{3} + i}{4}$

Como f(P) = P (proposición VI.6.4), tenemos que

$$f(P) = aP + b = (\frac{\sqrt{3} + i}{4})(1 + 2i) + b = (1 + 2i) = P$$

$$b = 1 + 2i - (\frac{\sqrt{3} + i}{4})(1 + 2i)$$

$$b = \frac{(6 - \sqrt{3}) + i\,(7 - 2\sqrt{3})}{4}$$

La forma es: $z \longrightarrow (\frac{\sqrt{3} + i}{4})z + \frac{(6 - \sqrt{3}) + i(7 - 2\sqrt{3})}{4}$

6. EJEMPLO

Sea, en el plano complejo, la similitud directa f de centro el punto P de afijo $2 - 3i$, de ángulo $\frac{\pi}{4}$, de razón $3\sqrt{2}$.

a) Si z es el afijo de un punto M, determine el afijo z' del punto M' imagen de M para esa similitud.

El afijo a encontrar es de la forma: $z' = az + b$.

$$a = |a|\ (\text{Cos}\ \Theta + i\ \text{Sen}\Theta) = 3\sqrt{2}\ (\text{Cos}\ \frac{\pi}{4} + i\ \text{Sen}\ \frac{\pi}{4})$$

$$a = 3\sqrt{2}\ (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2}) = 3(1 + i)$$

Usemos el hecho de que f(P) = P (Proposición VI.6.4)

$$f(P) = 3(1+i)P + b = P \Rightarrow 3(1+i)(2-3i) + b = 2 - 3i.$$

$$\Rightarrow b = (2 - 3i)(-2 - 3i) = -13$$

$$\therefore\ z' = 3(1+i)z - 13$$

b) Expresar en función de las coordenadas (x,y) de M las coordenadas (x',y') del punto M',

$$z' = x' + iy' = az + b = a(x + iy) + b \Rightarrow$$

$$z' = x' + iy' = 3(1 + i)(x + iy) - 13$$

$$z' = x' + iy' = 3(x + iy + ix - y) - 13$$

$$z' = x' + iy' = [3(x - y) - 13] + 3(x + y)i$$

$$\Rightarrow \quad x' = 3(x - y) - 13$$

$$y' = 3(x + y)$$

$$\Rightarrow \quad (x', y') = (3(x-y) - 13,\ 3(x + y))$$

7. PROPOSICION

La similitud de centro P, de razón α, de ángulo Θ se representa por la aplicación $g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$g(z) - z_P = \alpha e^{i\Theta}(z - z_P),$$

donde z_P designa el afijo del punto P.

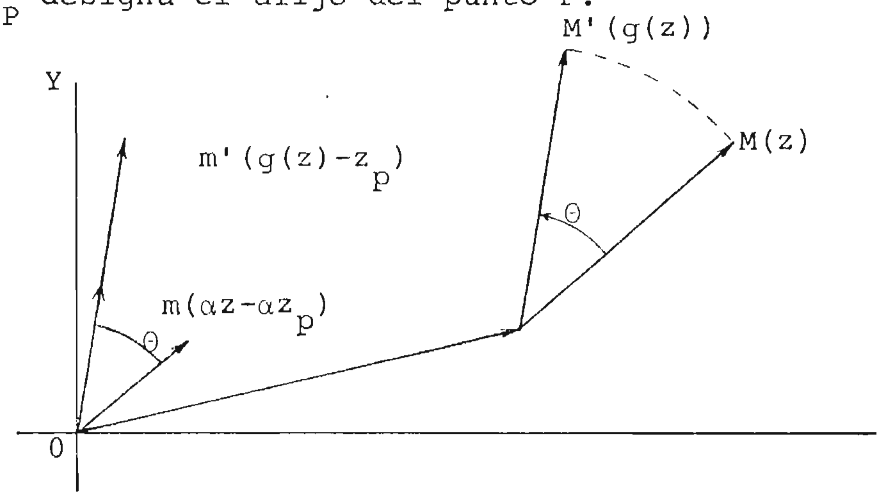


FIGURA Nº 73

Sea M'(g(z)) la imagen de M(z)

El vector $\overrightarrow{PM}$ tiene por afijo $z - z_P$

el vector $\overrightarrow{PM'}$ tiene por afijo $g(z) - z_P$

y como

$$d(P,M) = d(P,M')$$

$$(\widehat{\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PM'}}) = \Theta \quad \text{se tiene la relación}$$

$$g(z) - z_P = \alpha e^{i\Theta}(z - z_P)$$

8. EJEMPLO

En el plano complejo, sea f la similitud que a un punto M de afijo z le asocia el punto de afijo $2iz - 4i$ y g la rotación de centro P de afijo $2 + 3i$ y de ángulo $\frac{3}{4}\pi$.

¿Cual es el afijo de $(g \circ f)(M)$?

Como g es una rotación de centro P de afijo $2 + 3i$ y ángulo $\frac{3}{4}\pi$, es una isometría (Def. IV. 5.1, Prop. IV.3.2 y IV.1.2). Así g es entonces una similitud de razón $\alpha = 1$ (proposición VI.1.2).

Para encontrar el afijo z' de $(g \circ g)(M)$, utilizamos la relación de la proposición VI.9.7:

$g(z) - z_P = \alpha e^{i\Theta}(f(M) - z_P)$. Así:

$$z' - (2+3i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + I)\left[(2iz - 4i) - (2 + 3i)\right], \quad \alpha = 1, \quad e^{i\Theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\ (-1+i)(2iz - 7i - 2) + (2 + 3i).$$

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-2(1 + i)z + 5i + 9\right] + 2 + 3i$$

$$z' = -\sqrt{2}\ (1+i)z + (3 + \frac{5\sqrt{2}}{2})i + 2 + \frac{9}{2}\sqrt{2}.$$

B I B L I O G R A F I A

. ANGEL R. LAPROTONDA / EUDEBA.

"Algebra Lineal y Geometría"

. ARMANDO O. ROJO / EL ATENEO

"Algebra II".

. J. DIEUDONNE / HERMANN

"Linear Algebra and Geometry"

. MARIE - NOELLE AUDIGIER y otros / DIDIER

"Mathématiques Collection H. Dimathéme".