UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

TEOREMA DE COMPLETACION EN MODULOS Y ANILLOS FILTRADOS

TRABAJO DE GRADUACION PRESENTADO POR:

JOSE MARTIN MONTOYA POLIO

PARA OPTAR AL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

DICIEMBRE DE 1991

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTROAMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR : Dr. Fabio Castillo Figueroa

SECRETARIO GENERAL : Lic. Miguel Angel Azucena

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO EN FUNCIONES : Ing. Juan Jesús Sánchez Salazar

SECRETARIO : Ing. José Rigoberto Murillo Campos

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE : Lic. Alba Lila Rico de Tejada

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

TRABAJO DE GRADUACION

COORDINADOR : Ing. José Francisco Marroquín

ASESOR : Ing. José Francisco Marroquín

DEDICATORIA

A MIS PADRES, José Mauro Montoya y Ana Julia Polío, por su enorme sacrificio que hizo posible coronar satisfactoriamente mis aspiraciones.

A MIS HERMANOS, Mauro, Rosibel, Julia Esther, Marlene y Carolina, con amor fraternal.

A CAROLINA, Con Amor.

A MIS AMIGOS, Especialmente a Sonia y Aracely, por su constante apoyo.

A MI PROFESOR, Ing. Francisco Marroquín, por su excelente contribución a mi formación académica.

A LOS GREMIOS, CEPRUES y SEIAS, por su apoyo en la reproducción de esta obra.

INTRODUCCION

En el presente trabajo se realiza un estudio de módulos y anillos mediante una "topologización", que se produce al definir en ellos una sucesión infinita decreciente de submódulos o ideales, según sea el caso, llamada filtración.

Nuestro objetivo es establecer la existencia y unicidad de completaciones de un módulo o un anillo, definiendo en ellos previamente una filtración.

Se supone que el lector maneja los conceptos topológicos básicos, es decir, topología, abiertos y cerrados, vecindad, clausura, espacio de Hausdorff, base, homomorfismo continuo, etc.

En el Capítulo I, se define una filtración $\{E_n\}_{n\geq 0}$ en un módulo E, se hace el estudio de sus propiedades topológicas y finalmente se establece la existencia y unicidad de completaciones de E.

En el Capítulo II, se realiza sintéticamente todo lo del Capítulo I, para un anillo R con filtración $\{A_n\}_{n\geq 0}$, considerándolo como un R-módulo. Luego, se aborda la situación en que un módulo filtrado está definido sobre un anillo filtrado.

Por último, en el Capítulo III, se obtienen más resultados de módulos y anillos, cuando se considera una filtración especial, llamada filtración multiplicativa.

INDICE

CAPITULO I

MODULOS FILTRADOS

1.1 MODULOS FILTRADOS

DEFINICION 1.1

Sean R un anillo con elemento identidad y E un R-módulo. Una filtración de E es una familia $\{E_n\}_{n\geq 0}$ de submódulos de E, ordenada por enteros no negativos, de manera que

$$E_n \supseteq E_{n+1}$$

para todo n.

En otras palabras, una filtración de E es una sucesión decreciente

$$E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \supseteq E_n \supseteq \ldots$$

de submódulos de E.
A continuación se mostrará que toda filtración de E determina una topología de E.

PROPOSICION 1.2

Sea $\{E_n\}_{n\geq 0}$ una filtración de E. Entonces, la colección Ω formada por los subconjuntos V de E tal que para todo $v \in V$ existe un entero n tal que

$$v+E_n \subseteq V$$

es una topología de E.

PRUEBA:

Obviamente E y su subconjunto vacío pertenecen a Ω .

Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de subconjuntos de E, con $V_i \in \Omega$, para todo $i \in I$. Si $v\in \bigcup_{i\in I} V_i$, entonces $v \in V_i$, para algún $i \in I$. Luego, existe un entero n tal que

$$v+E_n \subseteq V_i \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i.$$

Entonces, $\bigcup_{i\in I} V_i \in \Omega$ y, por tanto, Ω es cerrado bajo uniones arbitrarias.

Ahora, asumamos que $V_1, V_2, \ldots , V_k$ pertenecen a Ω y sea v un elemento de su intersección $\bigcap_{i=1}^{k} V_i$. Para cada i $(1\leqslant i\leqslant k)$,

$$v+E_{n_i} \subseteq V_i,$$

donde n_i es un entero no negativo seleccionado adecuadamente.

Entonces,

$$\bigcap_{i=1}^{k} (v+E_{n_i}) = v+ \bigcap_{i=1}^{k} E_{n_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} V_i.$$

Hagamos $n = \max \{n_i/ 1\leqslant i\leqslant k\}$. Entonces,

$$v+E_n = v+\bigcap_{i=1}^{k} E_{n_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} V_i,$$

es decir, $\bigcap_{i=1}^{k} V_i \in \Omega$ y, por tanto, Ω es cerrado bajo intersecciones finitas.

Por consiguiente, hay una topología de E cuyos conjuntos abiertos son precisamente aquellos subconjuntos de E que pertenecen a Ω .

Ya que la topología Ω se deriva de la filtración, podemos referirnos a ella como la topología de la filtración.

PROPOSICION 1.3

Sea E un R-módulo con filtración $\{E_n\}_{n\geq 0}$. Entonces, los subconjuntos de la forma $e+E_n$, donde $e \in E$, forman una base para la topología de la filtración. Los conjuntos de esta base que contienen un elemento dado x tienen todos la forma $x+E_n$.

PRUEBA:

Si V pertenece a la topología filtración de E, entonces

$$v+E_{n_k} \subseteq V$$

para todo $v \in V$ y n_k un entero no negativo que depende de v. Luego

$$V = \bigcup_{v\in V,\, n_k\geq 0} (v+E_{n_k}).$$

Ahora, si x pertenece a $e+E_n$, entonces $x+E_n = e+E_n$, lo cual prueba que $e+E_n$ es abierto. La primera afirmación es, por tanto, probada y la segunda afirmación se deriva de la observación precedente.

PROPOSICION 1.4

Sean E un R-módulo con filtración $\{E_n\}_{n\geq 0}$ y K un submódulo de E. Entonces, K es abierto en E (con respecto a la topología de la filtración) si y sólo si $E_m \subseteq K$ para algún entero no negativo m.

Si un submódulo es abierto, entonces es tambien cerrado.

PRUEBA:

Primero supongamos que K es abierto. Ya que $0 \in K$, vemos que

$$0+E_m = E_m \subseteq K$$

para algún entero no negativo m. Además, el complemento de K en E es la unión de todos los conjuntos $e+E_m$, donde $e \in E$, $e \notin K$. Ya que cada uno de estos conjuntos es abierto, el complemento de K es abierto y, por consiguiente, K es cerrado.

Luego, supongamos que $E_m \subseteq K$. Entonces, K es la unión de los conjuntos abiertos $k+E_m$, donde $k \in K$. Entonces, K es abierto.

COROLARIO 1.5

Cada uno de los submódulos E_n de la filtración es a la vez abierto y cerrado en E.

Consideremos ahora la clausura de un submódulo de un módulo filtrado.

PROPOSICION 1.6

Sean E un R-módulo con filtración $\{E_n\}_{n\geq 0}$ y K un submódulo de E. Entonces, la clausura de K (con respecto a la topología filtración), denotada por $\bar{K}$, está dada por

$$\bar{K} = \bigcap_{n=0}^{\infty} (K+E_n).$$

En particular, $\bar{K}$ es tambien un submódulo de E.

PRUEBA:

Ya que

$$E_n \subseteq K+E_n ,$$

por la Proposición 1.4, $K+E_n$ es un submódulo cerrado de E. Como $\bar{K}$ es la intersección de todos los conjuntos cerrados de E que contienen a K, tenemos

$$\bar{K} \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} (K+E_n).$$

Sea $e \in \bigcap_{n=0}^{\infty} (K+E_n)$. Entonces, e pertenece a $K+E_n$ para todo n y así $e+E_n$ contiene un elemento de K. Como esto es válido para todo n, se sigue que cada vecindad de e corta a K. Por consiguiente, $e \in \bar{K}$ y la igualdad se prueba.

COROLARIO 1.7

La clausura del submódulo cero de E es

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n .$$

Demos ahora un criterio para que un módulo filtrado sea un espacio de Hausdorff.

PROPOSICION 1.8

Sea E un R-módulo con filtración $\{E_n\}_{n\geq 0}$. Entonces, para que E, dotado de la topología filtración, sea un espacio de Hausdorff es necesario y suficiente que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n = 0.$$

PRUEBA:

Primero asumamos que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n = 0$$

y sean e, e' elementos distintos de E. Entonces, existe un entero m (m≥0) tal que $e-e' \notin E_m$, pues $e-e' \neq 0$. Así, $e+E_m$ y $e'+E_m$ son vecindades de e y e' respectivamente y no tienen puntos en común. Se sigue que E es un espacio de Hausdorff. Sea $e^* \neq 0$ perteneciente a E. Entonces, existe un conjunto abierto conteniendo a 0, pero no a e^*, y por tanto, hay un entero s≥0 tal que $e^* \notin E_s$. Por consiguiente, la intersección de todos los E_n no contiene a e^*. Ya que e^* fué un elemento arbitrario de E distinto de cero, esto significa que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n = 0.$$

COROLARIO 1.9

Para que E sea un espacio de Hausdorff es necesario y suficiente que el conjunto que consista solamente del elemento cero sea cerrado.

Examinemos ahora, desde el punto de vista de la continuidad, algunas de las operaciones básicas que uno ejecuta con los elementos de un R-módulo. Primero, convengamos que a menos que se diga lo contrario, en una referencia a una topología de un módulo filtrado siempre se trata de la topología de la filtración. Esta convención nos ayudará a evitar verbosidad excesiva y la usaremos de aquí en adelante.

PROPOSICION 1.10

Sea E un R-módulo filtrado. Denotemos por $\gamma : E \longrightarrow E$ el mapeo definido por $\gamma(e) = -e$; y para cada $x \in E$, sea $\tau_x : E \longrightarrow E$ en que $\tau_x(e) = x+e$. Entonces, γ y τ_x son homeomorfismos de E en si mismo.

PRUEBA:

Sea $\{E_n\}_{n \geq 0}$ la filtración en E. Entonces,

$$\gamma(e+E_n) = -e+E_n = \gamma(e)+E_n$$

y
$$\tau_x(e+E_n) = (x+e)+E_n = \tau_x(e)+E_n$$

Esto muestra que γ y τ_x son continuos y es obvio que cada uno de ellos es un mapeo uno-a-uno de E en si mismo. Ya que γ es su propio inverso, el inverso es continuo. Luego, el inverso de τ_x es τ_y, donde $y=-x$. Así, τ_x tiene tambien un inverso continuo.

PROPOSICION 1.11

Sean E un R-módulo filtrado y ExE dotado de la topología produc to. Entonces, el mapeo

$$\sigma: E\times E \longrightarrow E$$

en que $\sigma(e,e') = e+e'$ es continuo.

NOTA. Es costumbre describir este resultado diciendo que la adi ción en E es una operación continua.

PRUEBA:

Probaremos que $\sigma((e+E_m)\times(e'+E_m)) \subseteq \sigma(e,e')+E_m$.

Sea $(x,y) \in (e+E_m)\times(e'+E_m)$. Entonces, $x \in e+E_m$ y $y \in e'+E_m$. Luego,

$\sigma(x,y) = x+y \in (e+E_m)+(e'+E_m) = (e+e')+E_m = \sigma(e,e')+E_m$.

Tambien la operación producto por escalar de R en E es continua.

PROPOSICION 1.12

Sea E un R-módulo filtrado y r perteneciente a R. Entonces, el mapeo

$$\mu_r: E \longrightarrow E$$

definido por $\mu_r(e) = re$ es continuo.

PRUEBA:

Si x pertenece a $e+E_n$, entonces $rx \in re+E_n$. En consecuencia,

$$\mu_r(e+E_n) \subseteq \mu_r(e)+E_n.$$

1.2 HOMOMORFISMOS CONTINUOS, COMPATIBLES Y ESTRICTOS

Ahora pondremos nuestra atención en los homomorfismos entre módulos filtrados. Es claro que para que tal mapeo sea significativo se debe establecer alguna relación entre las respectivas filtraciones. Sin embargo, hay varias formas que tal relación puede tomar.

PROPOSICION 1.13

Sean E y E' R-módulos filtrados y $f: E \longrightarrow E'$ un R-homomorfismo. Entonces, para que f sea continuo es necesario y suficiente que sea continuo en el elemento cero de E.

PRUEBA:

La condición es necesaria por razones triviales. Debemos, por tanto, asumir que f es continuo en el elemento cero de E y deducir que f es continuo en cualquier otro elemento de E.

Sean $\{E_n\}_{n\geq 0}$ y $\{E'_n\}_{n\geq 0}$ las filtraciones de E y E', respectivamente. Supongamos que $e \in E$ y que $k\geq 0$ es un entero dado. Entonces, ya que f es continuo en el elemento cero de E, existe un entero $m\geq 0$ tal que $f(E_m) \subseteq E'_k$. Pero, ahora

$$f(e+E_m) = f(e)+f(E_m) \subseteq f(e)+E'_k,$$

con lo cual f es continuo en E.

De nuevo, sean E y E' R-módulos filtrados cuyas filtraciones son

$\{E_n\}_{n\geq 0}$ y $\{E'_n\}_{n\geq 0}$, respectivamente.

DEFINICION 1.14

Un R-homomorfismo $f\colon E \longrightarrow E'$ se dice que es "compatible con las filtraciones" si

$$f(E_n) \subseteq E'_n, \tag{1.2.1}$$

para todo $n\geq 0$.

DEFINICION 1.15

Un R-homomorfismo $f\colon E \longrightarrow E'$ se dice que es "estricto" si

$$f(E_n) = f(E)\cap E'_n, \tag{1.2.2}$$

para todo $n\geq 0$.

Es obvio, por (1.2.1), que un homomorfismo compatible es continuo en el elemento cero de su dominio. Por tanto, se sigue de la Proposición 1.13, que tal homomorfismo es continuo. Por otra parte es claro que si f es estricto, entonces es tambien compatible con las filtraciones. Posteriormente determinaremos en qué condiciones ocurre lo contrario, es decir, cuándo un homomorfismo compatible será estricto.

PROPOSICION 1.16

Sean E un R-módulo con filtración $\{E_n\}_{n\geq 0}$ y K un submódulo de E.

Entonces, la familia

$$\{K \cap E_n\}_{n \geq 0} \tag{1.2.3}$$

de submódulos de K, constituye una filtración de K.

La filtración (1.2.3) se conoce como la filtración inducida. Observe que si $k \in K$, entonces

$$k + K \cap E_n = (k + E_n) \cap K. \tag{1.2.4}$$

Se sigue que un subconjunto de K es abierto en la topología derivada de la filtración inducida, si y solo si, es la intersección de un subconjunto abierto de E con K. En otras palabras, la topología derivada de la filtración inducida es la misma que la topología que K adquiere como un subespacio de E.

PROPOSICION 1.17

Sea E un R-módulo con filtración $\{E_n\}_{n \geq 0}$ y K un submódulo de E. Entonces, la familia

$$\{(E_n + K)/K\}_{n \geq 0} \tag{1.2.5}$$

de submódulos del cociente E/K, constituye una filtración en E/K.

La filtración (1.2.5) es llamada la filtración factor de E/K. Note que en la sucesión exacta canónica

$$K \longrightarrow E \longrightarrow E/K$$

ambos homomorfismos son estrictos, si K y E/K están dotados de las filtraciones inducida y factor, respectivamente.

Sean E y E' R-módulos filtrados con $\{E_n\}_{n\geq 0}$ y $\{E'_n\}_{n\geq 0}$ como sus respectivas filtraciones. Además, sea $f\colon E \longrightarrow E'$ un R-homomorfismo que es compatible con estas filtraciones. Entonces, ya que $f(E_n) \subseteq E'_n$, f induce un homomorfismo

$$f_n\colon E/E_n \longrightarrow E'/E'_n \qquad (1.2.6)$$

definido por $f_n(e+E_n) = f(e)+E'_n$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_n"'] & E' \arrow[d, "\phi'_n"] \\ E/E_n \arrow[r, "f_n"'] & E'/E'_n \end{tikzcd} \qquad (1.2.7)$$

donde ϕ_n es el mapeo natural de E en E/E_n y ϕ'_n tiene un significado similar. Se sigue que si $e \in \mathrm{Ker} f$, entonces

$$f_n(\phi_n(e)) = f_n(e+E_n) = f(e)+E'_n = E'_n$$

muestra que $\phi_n(e) \in \mathrm{Ker} f_n$. Por tanto, para cada $n\geq 0$, ϕ_n da origen a un homomorfismo $\mathrm{Ker} f \longrightarrow \mathrm{Ker} f_n$.

Ahora usaremos estos mapeos para obtener un criterio útil para que un mapeo compatible sea estricto.

LEMA 1.18

Sean E y E' R-módulos filtrados y $f: E \longrightarrow E'$ un R-homomorfismo compatible con las filtraciones. Entonces, para que f sea estricto es necesario y suficiente que, para cada $n \geqslant 0$, el mapeo asociado

$$\mathrm{Ker} f \longrightarrow \mathrm{Ker} f_n \tag{1.2.8}$$

sea sobreyectivo.

PRUEBA:

Primero supongamos que f es estricto. Con la notación previa, un elemento típico de $\mathrm{Ker} f_n$ tiene la forma $\phi_n(e)$, donde $e \in E$ y $f_n\phi_n(e) = 0$. Se sigue, por (1.2.7), que $\phi_n' f(e) = \phi_n'(f(e)) = 0$ y, $f(e)$ pertenece a $\mathrm{Ker}\phi_n' = E_n'$. Luego, $f(e)$ pertenece a $f(E) \cap E_n' = f(E_n)$. Por consiguiente, existe $e_n \in E_n$ tal que $f(e) = f(e_n)$. Así, $e-e_n$ está en Kerf y $\phi_n(e-e_n) = \phi_n(e)$. Así, $\phi_n(e)$ es la imagen del elemento $e-e_n$ de Kerf y, por consiguiente, $\mathrm{Ker} f \longrightarrow \mathrm{Ker} f_n$ es sobreyectivo.

Ahora, asumamos que $\mathrm{Ker} f \longrightarrow \mathrm{Ker} f_n$ es sobreyectivo para todo n y sea e' perteneciente a $f(E) \cap E_n'$. A fin de completar la prueba, solamente tenemos que e' está en $f(E_n)$, pues la otra inclusión se cumple por ser f compatible. Ya que $e' \in f(E)$ tenemos $e' = f(x)$, para algún $x \in E$ y ahora

$$f_n\phi_n(x) = \phi_n' f(x) = \phi_n'(f(x)) = \phi_n'(e') = 0,$$

porque $e' \in E_n' = \mathrm{Ker}\phi_n'$. Así, $\phi_n(x) \in \mathrm{Ker} f_n$. Pero, $\mathrm{Ker} f \longrightarrow \mathrm{Ker} f_n$

es sobreyectivo, en consecuencia, $\phi_n(x) = \phi_n(y)$, donde $y \in \mathrm{Ker} f$. Se sigue que $x-y$ pertenece a E_n y $f(x) = f(x-y)$. Así, $e' = f(x)$ pertenece a $f(E_n)$.

1.3 MODULOS FILTRADOS COMPLETOS

Como hemos venido haciendo, suponemos que E es un R-módulo y una filtración de E es $\{E_n\}_{n \geq 0}$. Ahora, sea x un elemento de E y

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$$

una sucesión de elementos denotada por $\{x_m\}$, del módulo E.

DEFINICION 1.19

La sucesión $\{x_m\}$ se dice que "converge a x" o que "tiene a x como límite" si la siguiente condición se satisface:

Dado cualquier entero $k \geq 0$ siempre existe un entero positivo N tal que $x-x_m \in E_k$, siempre que $m>N$.

En estas circunstancias escribimos $x_m \longrightarrow x$.

Es fácil verificar que si $x_m \longrightarrow x$ y $y_m \longrightarrow y$, entonces

$$(x_m+y_m) \longrightarrow x+y, \qquad (1.3.1)$$

$$(x_m-y_m) \longrightarrow x-y \qquad (1.3.2)$$

y

$$rx_m \longrightarrow rx \qquad (1.3.3)$$

para todo r en R. Supongamos ahora que $f: E \longrightarrow E'$ es un homomorfismo continuo de E en un segundo R-módulo filtrado E'. Una simple aplicación de las definiciones muestra que la sucesión $\{f(x_m)\}$ converge a $f(x)$. Entonces,

$$x_m \longrightarrow x \text{ implica que } f(x_m) \longrightarrow f(x), \qquad (1.3.4)$$

siempre que f sea continuo.

LEMA 1.20

Sean K un subconjunto de un R-módulo filtrado E y $x \in E$. Entonces, x pertenece a $\bar{K}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_m\}$ tal que $x_m \in K$, para todo m y $x_m \longrightarrow x$.

PRUEBA:

Si tal sucesión existe, entonces toda vecindad de x contiene al menos un x_m y, por consiguiente, contiene un punto de K. En consecuencia, $x \in \bar{K}$.

Supongamos ahora que $x \in \bar{K}$. Entonces, $(x+E_m) \cap K$ es distinto de vacío y, por tanto, podemos encontrar $x_m \in K$ tal que $x-x_m \in E_m$. Se forma así la sucesión x_m tal que $x_m \longrightarrow x$.

PROPOSICION 1.21

Sean E un módulo filtrado y $\{x_m\}$ una sucesión de elementos de E tal que $x_m \longrightarrow x$ y $x_m \longrightarrow x'$. Si E es un espacio de Hausdorff, entonces $x = x'$.

PRUEBA:

Sea $k \geqslant 0$ un entero dado, entonces

$$x-x' = (x-x_m)-(x'-x_m) \in E_k$$

con tal que m sea suficientemente grande. Se sigue que

$$x-x' \in \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k.$$

Por la Proposición 1.8, $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k = 0$. Luego, $x = x'$.

Entonces, cuando E sea un espacio de Hausdorff los límites son únicos. En estas circunstancias usaremos $\lim x_m = x$ como una alternativa para $x_m \longrightarrow x$.

Hay otro concepto importante que necesitamos, relacionado con las sucesiones, planteado en la siguiente

DEFINICION 1.22

Una sucesión $\{x_m\}$ de elementos de un módulo filtrado E es llamada una "sucesión de Cauchy" si:

Dado cualquier entero $k \geqslant 0$ existe un entero N tal que $x_n-x_m \in E_k$, para cualesquiera m y n mayores que N.

Si $\{x_m\}$ es una sucesión convergente, digamos $x_m \longrightarrow x$, entonces es tambien una sucesión de Cauchy. Dado $k \geqslant 0$ existe un entero N tal que $x-x_m \in E_k$ para todo $m>N$. Se sigue que si $m,n>N$, entonces $x_m-x_n = (x-x_n)-(x-x_m) \in E_k$, lo cual prueba nuestra afirmación.

DEFINICION 1.23

Sea E un R-módulo con filtración $\{E_n\}_{n\geqslant 0}$. Se dice que E es "completo" si las siguientes condiciones se cumplen

i) $\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n = 0$, es decir, E es espacio de Hausdorff.

ii) Toda sucesión de Cauchy converge a algún elemento de E.

Sea $\{x_m\}$ una sucesión de elementos de E y supongamos que converge a x. Entonces, tambien $x_2, x_3, x_4, \ldots$ converge a x y por consiguiente, por (1.3.2), $x_{m+1}-x_m \longrightarrow 0$. Mostraremos ahora que en el caso de un módulo completo el converso se cumple.

PROPOSICION 1.24

Sean E un módulo filtrado que es completo con respecto a su filtración y $\{x_m\}$ una sucesión de elementos de E. Entonces, $\{x_m\}$ converge a x, si y sólo si, $\lim (x_{m+1}-x_m) = 0$.

PRUEBA:

Debemos asumir que $\lim (x_{m+1}-x_m) = 0$, para deducir que $\{x_m\}$ es una sucesión de Cauchy y de aquí, una sucesión convergente. Esto establecerá la proposición porque la implicación opuesta ya ha sido mostrada.

Sea un entero $k\geqslant 0$. Existe un entero N tal que $x_{m+1}-x_m \in E_k$ para para cada $m\geqslant N$. Supongamos ahora que $s,t>N$, entonces

$$x_s-x_N = (x_{N+1}-x_N)+(x_{N+2}-x_{N+1})+\ldots+(x_s-x_{s-1})$$

pertenece a E_k. Similarmente, $x_t - x_N$ está en E_k. Así, $x_s - x_t \in E_k$. Esto muestra que $\{x_m\}$ es una sucesión de Cauchy y, de acuerdo a la Definición 1.23, es convergente.

Algunas veces es conveniente hacer uso de la noción de una serie convergente.

DEFINICION 1.25

Sea $\{u_m\}$ una sucesión de elementos de un módulo filtrado E y hagamos $s_m = u_1+u_2+ \dots +u_m$. Entonces, decimos que la serie

$$u_1+u_2+ \dots +u_m+ \dots$$

converge a s si $s_m \longrightarrow s$.

Cuando E es un espacio de Hausdorff, entonces escribimos

$$s = u_1+u_2+ \dots +u_m+ \dots$$

o

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$$

PROPOSICION 1.26

Sea E un R-módulo filtrado que es completo con respecto a su filtración. Entonces, una serie

$$u_1+u_2+ \dots +u_m+ \dots$$

converge, si y sólo si, $\lim u_m = 0$.

PRUEBA:

Se sigue a un mismo tiempo, aplicando la Proposición 1.24, a las sumas parciales

$$s_m = u_1+u_2+ \dots +u_m$$

de la serie.

DEFINICION 1.27

Un subconjunto "afín" de un R-módulo E es un subconjunto de la forma e+K, donde $e \in E$ y K es un submódulo de E.

TEOREMA 1.28

Sea E un R-módulo con filtración $\{E_n\}_{n \geqslant 0}$. Supongamos que E es completo con respecto a su filtración y que, para cada $n \geqslant 0$, E/E_n satisface la condición minimal para submódulos. Si ahora

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_k \supseteq \dots$$

es una sucesión decreciente infinita de subconjuntos cerrados y afines de E, entonces

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$$

es no vacía.

PRUEBA:

Sea $M_p = u_p+K_p$, donde $u_p \in E$ y K_p es un submódulo de E. Ya que

Ya que $u_p \in M_p$, cada elemento de K_{p+1} es la diferencia de dos ele mentos de M_{p+1} y $M_{p+1} \subseteq M_p$, se sigue que $K_{p+1} \subseteq K_p$. Así

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_p \supseteq \cdots$$

es una sucesión decreciente de submódulos de E.

Por hipótesis, E/E_1 satisface la condición minimal para submódulos. Entonces, la sucesión

$$K_1+E_1 \supseteq K_2+E_1 \supseteq \cdots \supseteq K_p+E_1 \supseteq \cdots$$

es estacionaria, es decir, existe un entero v_1 tal que

$$K_{v_1}+E_1 = K_t+E_1, \text{ para todo } t \geqslant v_1.$$

Ahora, ya que E/E_2 satisface la condición minimal para submódulos, la sucesión

$$K_1+E_2 \supseteq K_2+E_2 \supseteq \cdots \supseteq K_p+E_2 \supseteq \cdots$$

es estacionaria, entonces existe un entero $v_2>v_1$ tal que

$$K_{v_2}+E_2 = K_t+E_2, \text{ para todo } t \geqslant v_2.$$

Ahora, visualizamos que es posible encontrar $v_3>v_2$ con la propiedad

$$K_{v_3}+E_3 = K_t+E_3, \text{ para todo } t \geqslant v_3.$$

De esta manera, obtenemos una sucesión estrictamente creciente $v_1, v_2, v_3, \ldots$ de enteros positivos tal que

$$K_{v_s}+E_s = K_t+E_s, \text{ para todo } t \geqslant v_s. \qquad (1.3.5)$$

Ahora, por inducción, probaremos que se puede construir una sucesión de elementos $x_1, x_2, \ldots , x_r, \ldots$ tal que

$$x_i \in M_{v_i} \text{ y } x_{i+1}-x_i \in E_i \qquad (1.3.6)$$

para todo i, $i = 1, 2, \ldots , r, \ldots$

Para $i = 1$, seleccionamos cualquier elemento x_1 de M_{v_1}.

Supongamos ahora que (1.3.6) se cumple para todo $i<r$ y probémoslo para $i = r$. Entonces,

$$M_{v_r} = u_{v_r}+K_{v_r} = x_r+K_{v_r} \subseteq x_r+K_{v_r}+E_r = x_r+K_{v_{r+1}}+E_r,$$

por (1.3.5) y, por tanto,

$$M_{v_{r+1}} \subseteq M_{v_r} \subseteq x_r+K_{v_{r+1}}+E_r.$$

Luego, $u_{v_{r+1}} = x_r+k_{v_{r+1}}+e_r$, donde la notación es explicativa por si misma. Entonces, haciendo $x_{r+1} = u_{v_{r+1}}-k_{v_{r+1}} \in M_{v_{r+1}}$, tenemos que

$$x_r \in M_{v_r} \text{ y } x_{r+1}-x_r \in E_r.$$

Esto establece la existencia de la sucesión $\{x_r\}$ teniendo la propiedad (1.3.6). Según construcción, $\lim (x_{r+1}-x_r) = 0$. Entonces, por la Proposición 1.24, la sucesión $\{x_r\}$ converge. Pongamos $x = \lim x_r$ (recuerde que E es completo). Para un entero fijo p, $x_r \in M_p$, cuando r sea suficientemente grande. Entonces, por Lema

1.20, $x \in \bar{M}_p$, pero M_p es cerrado, por lo que $x \in M_p$. Como esto es cierto para todo valor de p, entonces

$$x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} M_k.$$

En consecuencia,

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} M_k$$

es distinto de vacío.

TEOREMA 1.29

Sea E un R-módulo con filtración $\{E_n\}_{n\geqslant 0}$. Supongamos que E es completo con respecto a su filtración y que, para cada $n\geqslant 0$, E/E_n satisface la condición minimal para submódulos. Si ahora

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_p \supseteq \cdots$$

es una sucesión decreciente infinita de submódulos cerrados de E tal que

$$\bigcap_{p=1}^{\infty} K_p = 0,$$

entonces dado cualquier entero $s>0$ existe un entero v_s tal que

$$K_{v_s} \subseteq E_s.$$

PRUEBA:

Como en la prueba del Teorema 1.28, existe una sucesión creciente v_1, v_2, v_3, ... de enteros positivos tales que

$$K_{v_s}+E_s = K_t+E_s, \text{ para todo } t \geqslant v_s.$$

Pongamos $L_p = K_{v_p}$. Entonces, los L_p forman una sucesión decreciente de submódulos cerrados de E tal que

$$\bigcap_{p=1}^{\infty} L_p = 0 \text{ y } L_{p+1}+E_p = L_p+E_p, \text{ para todo p.} \quad (1.3.7)$$

Sea $s>0$. Debemos mostrar que $L_s \subseteq E_s$. Para este fin sea $x \in L_s$. Entonces, $x \in L_{s+1}+E_s$ por (1.3.7), digamos $x = e_s+y_{s+1}$, donde $e_s \in E_s$ y $y_{s+1} \in L_{s+1} \subseteq L_{s+2}+E_{s+1}$. Por tanto, $x = e_s+e_{s+1}+y_{s+2}$, donde ahora $e_{s+1} \in E_{s+1}$ y $y_{s+2} \in L_{s+2} \subseteq L_{s+3}+E_{s+2}$. Procediendo de esta manera, obtenemos sucesiones

$$e_s, e_{s+1}, e_{s+2}, \ldots$$

y

$$y_{s+1}, y_{s+2}, y_{s+3}, \ldots$$

donde $e_{s+i} \in E_{s+i}$ $(i \geqslant 0)$, $y_{s+j} \in L_{s+j}$ $(j \geqslant 1)$ y, para todo $n \geqslant 1$

$$x = (e_s+e_{s+1}+\ldots+e_{s+n-1})+y_{s+n}.$$

Por la Proposición 1.26, la serie

$$e_s+e_{s+1}+e_{s+2}+\ldots$$

converge. Sea e su suma. Entonces, ya que todas las sumas parciales pertenecen a E_s y E_s es un subconjunto cerrado de E (Corolario 1.5), tenemos que $e \in E_s$. Además, la sucesión

$$y_{s+1}, y_{s+2}, y_{s+3}, \ldots$$

converge a x-e. Ahora, para un valor fijo de p, todos los términos de esta sucesión pertenecen a L_p con, a lo sumo, un número finito de excepciones. Entonces, por Lema 1.20, y porque L_p es cerrado, $x-e \in L_p$. Esto es cierto para todo valor de p. Por tanto,

$$x-e \quad \bigcap_{p=1}^{\infty} L_p = 0$$

y, por consiguiente, $x = e \in E_s$.

1.4 LA COMPLETACION DE UN MODULO FILTRADO

Sea E un R-módulo y $\{E_n\}_{n\geqslant 0}$ una filtración de E. La noción de una completación de E con respecto a su filtración es central para las ideas que estamos desarrollando. La definición precisa es como sigue.

DEFINICION 1.30

Una "completación de E" con respecto a la filtración $\{E_n\}_{n\geqslant 0}$ es un objeto que consiste de un R-módulo $\hat{E}$, una filtración $\{\hat{E}_n\}_{n\geqslant 0}$ de $\hat{E}$ y un R-homomorfismo $\psi: E \longrightarrow \hat{E}$, que satisfacen las condiciones siguientes:

i) $\hat{E}$ es completo con respecto a $\hat{E}$

ii) el R-homomorfismo $\psi: E \longrightarrow \hat{E}$ es estricto

iii) $\psi(E)$ es denso en $\hat{E}$

iv) $\operatorname{Ker} \psi = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$

En la práctica uno tiende a usar una forma un tanto casual de expresión cuando se refiere a completaciones, porque es muy tedioso tener que decir todo completamente. Así, uno podría decir "Sea $\hat{E}$ con filtración $\{\hat{E}_n\}_{n\geq 0}$ una completación de un módulo filtrado E". Un ejemplo más extremo sería el enunciado "Sea $\hat{E}$ una completación de E". En ningún caso hay una referencia al importante homomorfismo ψ. Sin embargo, si más tarde llegue a ser necesario mencionar este mapeo, entonces será introducido por alguna frase tal como "donde $\psi: E \longrightarrow \hat{E}$ es el homomorfismo canónico". Ahora, asumamos que posterior a hacer la observación informal "supongamos que $\hat{E}$ es una completación de E" necesitamos mencionar la filtración especial $\{\hat{E}_n\}_{n\geq 0}$ que está implícita en la noción de completación. Acompañamos esto llamando a $\{\hat{E}_n\}_{n\geq 0}$ la filtración canónica de $\hat{E}$.

Hasta ahora no sabemos que todo módulo filtrado posea una completación. Se mostrará que esto es así en la próxima sección. Tambien necesitamos saber que las extensiones de las completaciones son únicas. Este problema será tratado en breve, pero es conveniente tratar con algunas otras cosas primero.

TEOREMA 1.31

Sean E un R-módulo con filtración $\{E_n\}_{n\geq 0}$ y $\hat{E}$ con filtración $\{\hat{E}_n\}_{n\geq 0}$ una de sus completaciones. Si ahora, $\psi: E \longrightarrow \hat{E}$ es el homomorfismo canónico, entonces

$$\hat{E}_n = \overline{\psi}(E_n) \text{ y } E_n = \psi^{-1}(\hat{E}_n). \qquad (1.4.1)$$

PRUEBA:

Ya que $\psi : E \longrightarrow \hat{E}$ es estricto, tenemos que $\psi(E_n)$ es igual a la intersección $\psi(E) \cap \hat{E}_n$ y, por tanto, $\psi(E_n) \subseteq \hat{E}_n$. Ahora, por el Corolario 1.5, $\hat{E}_n$ es cerrado en $\hat{E}$. En consecuencia, tenemos que $\overline{\psi(E_n)} \subseteq \hat{E}_n$. Sea $\xi \in \hat{E}_n$. Por la Definición 1.30, $\psi(E)$ es denso en $\hat{E}$. Entonces, para todo $k \geqslant 0$,

$$(\xi + \hat{E}_{n+k}) \cap \psi(E)$$

es distinta de vacío. Seleccionemos $\eta_k \in \hat{E}_{n+k}$ tal que $\xi + \eta_k \in \psi(E)$. Entonces,

$$\xi + \eta_k \in \psi(E) \cap \hat{E}_n = \psi(E_n).$$

Ahora, $\lim \eta_k = 0$ y, por tanto, $\lim (\xi + \eta_k) = \xi$. Así, ξ es el límite de una sucesión de elementos, cada uno de los cuales pertenece a $\psi(E_n)$. En consecuencia, por el Lema 1.20, $\xi \in \overline{\psi(E_n)}$. Se sigue que $\hat{E}_n = \overline{\psi(E_n)}$. Finalmente

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(\hat{E}_n) &= \psi^{-1}(\psi(E) \cap \hat{E}_n) = \psi^{-1}(\psi(E_n)) \\ &= E_n + \operatorname{Ker} \psi = E_n, \end{aligned}$$

porque $\ker \psi \subseteq E_n$. Así, $E_n = \psi^{-1}(\hat{E}_n)$.

TEOREMA 1.32

Sea E un R-módulo con completación $\hat{E}$. Entonces, hay una correspondencia entre los R-submódulos abiertos U de E y los R-submódulos abietos V de $\hat{E}$. Esta es tal que si U y V se corresponden y y $\psi : E \longrightarrow \hat{E}$ es el mapeo canónico, entonces

$$V = \overline{\psi(U)} \quad y \quad U = \psi^{-1}(V). \tag{1.4.2}$$

En esta situación, ψ induce un isomorfismo de R-módulos

$$E/U \longrightarrow \hat{E}/V.$$

PRUEBA:

Empleamos la notación usual para las filtraciones en E y $\hat{E}$. Primero, supongamos que V es un submódulo abierto de $\hat{E}$ y pongamos $U = \psi^{-1}(V)$. Entonces, ya que ψ es continuo, U es un submódulo abierto de E. Seleccionemos s bastante grande para que $\hat{E}_s \subseteq V$. Por la Proposición 1.4, $\psi(E)+\hat{E}_s$ es abierto y, por tanto, tambien un submódulo cerrado de $\hat{E}$. Pero, $\psi(E)$ es denso en $\hat{E}$, entonces, $\psi(E)+\hat{E}_s = \hat{E}$. Ahora, $\psi(U) = \psi(E)\cap V$, por tanto,

$$\begin{aligned}\psi(U)+\hat{E}_s &= (\psi(E)\cap V)+\hat{E}_s\\ &= (\psi(E)+\hat{E}_s)\cap V\\ &= \hat{E}\cap V\\ &= V.\end{aligned}$$

Ya que esto sucede para todo valor grande de s, se sigue, de la Proposición 1.6, que $\overline{\psi(U)} = V$. Además, ψ induce un isomorfismo $E/U \longrightarrow E/V$. Tambien, si s es grande, $\psi(E)+V \supseteq \psi(E)+\hat{E}_s = \hat{E}_s$. Así, $\psi(E)+V = \hat{E}$; que muestra que el homomorfismo en cuestión es sobreyectivo. Por otra parte, si $\psi(e)\in V$, entonces, $e\in U$. Esto muestra que $E/U \longrightarrow E/V$ es inyectivo y, entonces, isomorfismo.

Para completar la prueba, debemos mostrar ahora que si U' es un submódulo abierto de E, entonces existe un submódulo abierto V' de E' tal que $U' = \psi^{-1}(V')$. Por la Proposición 1.4, podemos encontrar un entero n tal que $E_n \subseteq U'$. Pongamos $V' = \psi(U')+\hat{E}_n$. Entonces, V' es ciertamente un submódulo abierto de $\hat{E}$ y además $U' \subseteq \psi^{-1}(V')$. Ahora, si $e \in \psi^{-1}(V')$, entonces existe $u' \in U'$ tal que $\psi(e-u') \in \hat{E}_n$. En consecuencia, por el Teorema 1.31, $e-u' \in E_n$ y entonces $e \in U'$. Se sigue que $U' = \psi^{-1}(V')$.

COROLARIO 1.33

Con la notación usual, ψ induce un isomorfismo

$$E/E_n \approx \hat{E}/\hat{E}_n$$

de R-módulos, para cada $n \geq 0$.

PRUEBA:

Por el Teorema 1.31, podemos tomar $U = E_n$ y $V = \hat{E}_n$ en el Teorema 1.32.

Ahora, consideremos un homomorfismo continuo entre dos módulos filtrados en relación a completaciones de estos módulos.

TEOREMA 1.34

Sean E y E' R-módulos filtrados y $\hat{E}$, $\hat{E}'$ completaciones de E y E', respectivamente. Si $f: E \longrightarrow E'$ es un R-homomorfismo continuo, entonces existe un único R-homomorfismo continuo $\hat{f}: \hat{E} \longrightarrow \hat{E}'$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \psi \big\downarrow & & \big\downarrow \psi' \\ \hat{E} & \xrightarrow[\hat{f}]{} & \hat{E}' \end{array}$$

es conmutativo (Aquí, ψ y ψ' son los homomorfismos canónicos de E y E' en sus completaciones).

PRUEBA:

Denotaremos las filtraciones de E, E', $\hat{E}$ y $\hat{E}'$ por $\{E_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{E'_n\}_{n\geqslant 0}$ $\{\hat{E}_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{\hat{E}'_n\}_{n\geqslant 0}$, respectivamente. Ya que f es continuo, podemos encontrar una sucesión estrictamente creciente v_0, v_1, v_2, ... de enteros no negativos tal que

$$f(E_{v_k}) \subseteq E'_k \tag{1.4.3}$$

para todo valor de k. Se sigue que

$$f(\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k) \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty} E'_k,$$

es decir, que $f(\text{Ker}\,\psi) \subseteq \text{Ker}\,\psi'$. Así, f induce un R-homomorfismo

$$f^*: \psi(E) \longrightarrow \psi'(E') \tag{1.4.4}$$

tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi' \\ \psi(E) & \xrightarrow[f^*]{} & \psi'(E') \end{array}$$

es conmutativo; por (1.4.3), tenemos que

$$f^*(\psi(E) \cap \hat{E}_{v_k}) = f^*(\psi(E_{v_k})) = \psi'(f(E_{v_k}))$$
$$\subseteq \psi'(E'_k) = \psi'(E') \cap \hat{E}'_k,$$

entonces

$$f^*(\psi(E) \cap \hat{E}_{v_k}) \subseteq \psi'(E') \cap \hat{E}'_k. \qquad (1.4.5)$$

Sea $\xi \in \hat{E}$. Ya que $\psi(E)$ es denso en $\hat{E}$, existe una sucesión $\{u_m\}$ de elementos de $\psi(E)$ tal que $\lim u_m = \xi$. Por tanto, $\{u_m\}$ es u-una sucesión de Cauchy y ahora vemos, de (1.4.5), que $\{f^*(u_m)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\hat{E}'$. Pero, $\hat{E}'$ es completo. Así, $\{f^*(u_m)\}$ tiene un límite en $\hat{E}'$ y, ya que $\hat{E}$ es un espacio de Haus-dorff, este límite está determinado únicamente por $\{u_m\}$. Supongamos que tenemos una segunda sucesión, digamos $\{v_m\}$, tal que $v_m \in \psi(E)$ para todo m y $\lim v_m = \xi$. Entonces, por supuesto, $\lim f^*(v_m)$ tambien existe. Ahora, $\lim (u_m - v_m) = 0$. De aquí, por (1.4.5), $\lim f^*(u_m - v_m) = 0$ y por tanto, $\lim f^*(u_m) = \lim f^*(v_m)$. Por tanto, $\lim f^*(u_m)$ depende sólo de ξ y es independiente de la selección de la sucesión $\{u_m\}$. Entonces, podemos definir un mapeo $\hat{f}: \hat{E} \longrightarrow \hat{E}'$ por medio de la ecuación

$$\hat{f}(\xi) = \lim f^*(u_m). \qquad (1.4.6)$$

Veamos que $\hat{f}$ es un R-homomorfismo. Si $r \in R$, entonces por (1.3.3), ambos $\lim (ru_m) = r\xi$ y $\lim f^*(ru_m) = r \lim f^*(u_m)$. Así, tenemos que $\hat{f}(r\xi) = r\, \hat{f}(\xi)$. Por otra parte, si ξ_1 y ξ_2 pertenecen a $\hat{E}$, entonces podemos encontrar sucesiones $\{u_m\}$ y $\{v_m\}$ de elementos de $\psi(E)$, las cuales convergen a ξ_1 y ξ_2, respectivamente. Pero, por (1.3.1), $\lim (u_m+v_m) = \xi_1+\xi_2$ y, así, $\hat{f}(\xi_1+\xi_2) = \hat{f}(\xi_1)+\hat{f}(\xi_2)$. Ahora, mostremos que $\hat{f}$ es continuo. Asumamos que $\xi \in \hat{E}_{V_k}$. Por el Teorema 1.31, $\hat{E}_{V_k} = \overline{\psi(E_{V_k})}$ y , por tanto, podemos arreglar que la sucesión $\{u_m\}$ esté compuesta de elementos de $\psi(E_{V_k}) = \psi(E) \cap \hat{E}_{V_k}$. Pero, en este caso, $f^*(u_m) \in \hat{E}'_k$ para todo m, en virtud de (1.4.5). Ahora, por el Corolario 1.5, $\hat{E}'_k$ es un submódulo cerrado de $\hat{E}'$ y por tanto, $\hat{f}(\xi) = \lim f^*(u_m) \in \hat{E}'_k$. Se sigue que

$$\hat{f}(\hat{E}_{V_k}) \subseteq \hat{E}'_k \qquad (1.4.7)$$

para todo valor de k. Esto muestra que el homomorfismo $\hat{f}$ es continuo en el elemento cero. Entonces, por la Proposición 1.13, $\hat{f}$ es continuo en $\hat{E}$.

Por otra parte, si $\xi \in \psi(E)$, podemos tomar por $\{u_m\}$ la sucesión cuyos términos son todos iguales a ξ y de esto vemos que $\hat{f}(\xi) = f^*(\xi)$. Así, $\hat{f}$ y f^* coinciden en $\psi(E)$ y, por consiguiente, el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & E' \arrow[d, "\psi'"] \\ \hat{E} \arrow[r, "\hat{f}"'] & \hat{E}' \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Finalmente, observamos que si dos mapeos, digamos $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$, tienen las propiedades descritas en la exposición del teorema, deden coincidir con f* en $\mathcal{V}(E)$. Así, $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$ son continuos y coinciden en un subconjunto denso de $\hat{E}$.

COROLARIO 1.35

Sea la situación como la descrita en el Teorema 1.34 y supongamos que f es compatible con las filtraciones de E y E'. Entonces, $\hat{f} : \hat{E} \longrightarrow \hat{E}'$ es compatible con las filtraciones de $\hat{E}$ y $\hat{E}'$.

PRUEBA:

Usando la misma notación como fué empleada en la prueba del Teorema 1.34, notamos que la sucesión $v_0, v_1, v_2, \ldots$ puede ser tomada para consistir de los enteros 0, 1, 2, ... en su orden natural. En este caso, (1.4.7) llega ser $\hat{f}(\hat{E}_k) \subseteq \hat{E}'_k$ para todo k.

COROLARIO 1.36

Sea la situación como la descrita en el Teorema 1.34 y supongamos que el homomorfismo $f: E \longrightarrow E'$ es estricto. Entonces, $\hat{f}: \hat{E} \longrightarrow \hat{E}'$ es tambien estricto.

PRUEBA:

Por el Corolario 1.35, $\hat{f}$ es compatible con las filtraciones de $\hat{E}$ y $\hat{E}'$. En consecuencia, $\hat{f}(\hat{E}_k) \subseteq \hat{E}'_k$ y, tenemos la inclusión $\hat{f}(\hat{E}_k) \subseteq \hat{f}(\hat{E}) \cap \hat{E}'_k$. Ahora, asumamos que $\xi' \in \hat{f}(\hat{E}) \cap \hat{E}'_k$. Entonces, existe $\xi \in \hat{E}$ tal que $\hat{f}(\xi) = \xi'$. Ahora, ya que $\psi(E)$ es denso en $\hat{E}$, existe $e \in E$ tal que $\xi - \psi(e) \in \hat{E}_k$. Se sigue que $\hat{f}(\psi(e)) \in \hat{E}'_k$. Pero, $\hat{f}(\psi(e)) = \psi'(f(e))$ y, por el Teorema 1.31, $\psi'^{-1}(\hat{E}'_k) = E'_k$. Así, $f(e) \in E'_k$ y, por tanto, $f(e) \in f(E) \cap E'_k = f(E_k)$, porque f es estricto. Ahora, vemos que hay un elemento $x \in E_k$ tal que $f(x) = f(e)$ y, por tanto, $\hat{f}(\psi(x)) = \hat{f}(\psi(e))$. Así, $\psi(e) - \psi(x) \in \mathrm{Ker}\hat{f}$ y

$$\xi = (\xi - \psi(e)) + \psi(x) + (\psi(e) - \psi(x))$$

pertenece a $\hat{E}_k + \mathrm{Ker}\hat{f}$. Finalmente,

$$\xi' = \hat{f}(\xi) \in \hat{f}(\hat{E}_k + \mathrm{Ker}\hat{f}) = \hat{f}(\hat{E}_k).$$

El corolario se sigue.

El Teorema 1.34 muestra que cada homomorfismo continuo $E \longrightarrow E'$ da origen a un homomorfismo continuo bien definido entre una completación de E y una completación de E'. En adelante, designaremos automáticamente este homomorfismo colocando una ^ sobre el símbolo del homomorfismo original.

TEOREMA 1.37

Sean E, E' y E" R-módulos filtrados teniendo a $\hat{E}$, $\hat{E}'$ y $\hat{E}''$, respectivamente, como completaciones. Suponga que

$$f\colon E \longrightarrow E' \quad \text{y} \quad g\colon E' \longrightarrow E''$$

son R-homomorfismos continuos. Entonces

$$gf: E \longrightarrow E'$$

es un R-homomorfismo continuo y $\widehat{gf} = \hat{g}\hat{f}$.

COROLARIO 1.38

Sean E y E' R-módulos filtrados con completaciones $\hat{E}$ y $\hat{E}'$, respectivamente. Si ahora, $f: E \longrightarrow E'$ es un isomorfismo continuo de E en E' y el isomorfismo inverso $g: E' \longrightarrow E$ es tambien continuo, entonces $\hat{f}: \hat{E} \longrightarrow \hat{E}'$ es un isomorfismo continuo de $\hat{E}$ en $\hat{E}'$ y su inverso es $\hat{g}$.

PRUEBA:

Tenemos $gf = i$, donde i es el mapeo identidad de E. Entonces, por el Teorema 1.37, $\hat{g}\hat{f} = \hat{i}$. Sin embargo, es obvio de la definición que $\hat{i}$ es el mapeo identidad de $\hat{E}$. Similarmente, $\hat{f}\hat{g}$ es el mapeo identidad de $\hat{E}'$. Esto completa la prueba.

El siguiente teorema nos dice que cualesquiera dos completaciones de un módulo filtrado son virtualmente únicas. En vista de esto es costumbre hablar de la completación de un módulo filtrado, más que de una completación.

TEOREMA 1.39

Sea E un R-módulo filtrado y supongamos que $\hat{E}$ con filtración

$\{E_n\}_{n\geq 0}$ y E^* con filtración $\{E_n^*\}_{n\geq 0}$ son dos completaciones de E. Entonces, existe uno y solamente un mapeo continuo w: $\hat{E} \longrightarrow \hat{E}^*$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi^*"] & \\ \hat{E} \arrow[rr, "w"'] & & \hat{E}^* \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde ψ y ψ^* son los homomorfismos canónicos asociados con las completaciones.

El mapeo w tiene las propiedades adicionales:

i) es un isomorfismo del R-módulo $\hat{E}$ en el R-módulo $\hat{E}^*$.

ii) $w(\hat{E}_n) = \hat{E}_n^*$ para todo n.

PRUEBA:

Al tomar E = E' y f como el mapeo identidad de E, se sigue, del Teorema 1.34, la existencia y unicidad de w y, del Corolario 1.38, que es un isomorfismo de R-módulos. Finalmente, por el Corolario 1.36, w es estricto, que en el presente caso significa que $w(\hat{E}_n) = W(\hat{E}) \cap \hat{E}_n^* = \hat{E}^* \cap \hat{E}_n^* = \hat{E}_n^*$ para todo n.

DEFINICION 1.40

Sea R un anillo. Se define el "centro" de R como el conjunto de todos los elementos $r \in R$ tal que

$$rx = xr$$

para todo $x \in R$.

Sea $f: E \longrightarrow E'$ un homomorfismo de un R-módulo E en un R-módulo E' y sea $r \in R$. En general, el mapeo $\phi: E \longrightarrow E'$ definido por $\phi(e) = r f(e)$ no es un homomorfismo, porque no estamos asumiendo que R es conmutativo. Sin embargo, lo será cuando r pertenezca al centro de R. Con esta observación damos el siguiente

TEOREMA 1.41

Sean E y E' R-módulos filtrados con E y E' sus respectivas filtraciones. Además, sean f, f_1 y f_2 homomorfismos continuos de E en E' y r perteneciente al centro de R. Entonces

$$f_1+f_2, \quad f_1-f_2 \quad \text{y} \quad rf$$

son homomorfismos continuos de E en E' y,

$$\widehat{f_1+f_2} = \hat{f}_1+\hat{f}_2, \quad \widehat{f_1-f_2} = \hat{f}_1-\hat{f}_2 \quad \text{y} \quad \widehat{rf} = r\hat{f}.$$

PRUEBA:

Probemos solamente la relación aditiva, pues las otras se siguen por medio de consideraciones similares.

Sea s un entero no negativo. Podemos encontrar $t \geqslant 0$ tal que

$$f_1(E_t) \subseteq E'_s \quad \text{y} \quad f_2(E_t) \subseteq E'_s.$$

Se sigue que

$$(f_1+f_2)(E_t) \subseteq E'_s$$

y, por tanto, f_1+f_2 es continuo. Similarmente, $\hat{f}_1 + \hat{f}_2$ es conti nuo. Ya que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f_1+f_2"] \arrow[d, "\psi"'] & E' \arrow[d, "\psi'"] \\ \hat{E} \arrow[r, "\hat{f}_1+\hat{f}_2"'] & \hat{E}' \end{tikzcd}$$

es conmutativo (ψ y ψ' son los homomorfismos canónicos), tenemos que $\widehat{f_1+f_2} = \hat{f}_1+\hat{f}_2$.

COROLARIO 1.42

Si $f\colon E \longrightarrow E'$ es un homomorfismo nulo, entonces $f\colon \hat{E} \longrightarrow \hat{E}'$ tambien lo es.

Supongamos ahora que E, E', E" son R-módulos filtrados y que f, g son homomorfismos

$$E'' \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} E'$$

que son compatibles con las filtraciones apropiadas. Esto da lugar a la situación

$$\hat{E}'' \xrightarrow{\hat{g}} \hat{E} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{E}'$$

en la cual, por Corolario 1.35, $\hat{f}$ y $\hat{g}$ satisfacen similarmente las condiciones de compatibilidad. Ahora, para cada $n\geq 0$, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} E''/E''_n & \longrightarrow & E/E_n & \longrightarrow & E'/E'_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{E}''/\hat{E}''_n & \longrightarrow & \hat{E}/\hat{E}_n & \longrightarrow & \hat{E}'/\hat{E}'_n \end{array} \qquad (1.4.8)$$

Acá, los mapeos de arriba son inducidos por f y g, mientras que los de abajo por $\hat{f}$ y $\hat{g}$. Los mapeos verticales, por otra parte, vienen de los mapeos canónicos de E", E y E' en sus respectivas completaciones. En consecuencia, por el Corolario 1.33, todos los mapeos verticales son isomorfismos.

LEMA 1.43

Sea la situación como la descrita arriba y supongamos que, en a dición, g es estricto y

$$E''/E''_n \longrightarrow E/E_n \longrightarrow E'/E'_n$$

es exacta, para todo $n \geqslant 0$. Entonces, la sucesión

$$\hat{E}'' \longrightarrow \hat{E} \longrightarrow \hat{E}'$$

es tambien exacta.

PRUEBA:

Las propiedades del diagrama (1.4.8) muestran que

$$\hat{E}''/\hat{E}''_n \longrightarrow \hat{E}/\hat{E}_n \longrightarrow \hat{E}'/\hat{E}'_n$$

es exacta, para todo $n \geqslant 0$. Tambien, por el Corolario 1.36, $\hat{g}$ es estricto. Esto significa que para los propósitos de la prueba po demos asumir que E, E', E" son ellos mismos completos y deduciendo que

$$E'' \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} E'$$

es exacta, establecemos el lema.

Sea $e'' \in E''$. Ya que el resultado de la composición

$$E''/E''_n \longrightarrow E/E_n \longrightarrow E'/E'_n$$

es un mapeo nulo, se sigue que $(fg)(e'') \in E'_n$, para todo n. Pero,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} E'_n = 0,$$

porque E' es completo. Entonces, $(fg)(e'') = 0$ y, por tanto, fg es un homomorfismo nulo, es decir, $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Ker} f$.

Ahora, probemos la otra inclusión. Sea $\xi \in \operatorname{Ker} f$; mostraremos que $\xi = g(\eta)$, para algún $\eta \in E''$. Para este fin construimos una sucesión $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ de elementos de E" que satisfacen

i) $\xi - g(\eta_n) \in E_n$, y

ii) $\eta_{n+1} - \eta_n \in E''_n$,

para todo n. Asumimos, por el momento, que tenemos tal sucesión. Por la Proposición 1.24 y ii), se sigue que $\lim \eta_n = \eta$ (digamos) existe. Ahora, de i) y el hecho que g es continuo, obtenemos

$$\xi = \lim g(\eta_n) = g(\lim \eta_n) = g(\eta)$$

como es requerido. Así, solamente resta mostrar que una sucesión

$\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ con las propiedades necesarias puede ser encontrada. Esto será hecho para construir los términos en sucesión. Iniciamos tomando η_0 como un elemento arbitrario de E". Ahora, supongamos que hemos obtenido $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_k$ y que satisfacen i) y ii), en cuanto que estas condiciones relacionan a estos elementos. Ya que $\xi \in \operatorname{Ker} f$, la imagen natural de ξ en E/E_{k+1} pertenece a

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ker}(E/E_{k+1} \longrightarrow E'/E'_{k+1}) \\ = &\operatorname{Im}(E''/E''_{k+1} \longrightarrow E/E_{k+1}) \end{aligned}$$

y así, existe $\eta^* \in E''$ tal que $g(\eta^*) - \xi \in E_{k+1}$. Por consiguiente, $g(\eta^*) - g(\eta_k) \in E_k$ y así $g(\eta^* - \eta_k)$ pertenece a $g(E'') \cap E_k = g(E''_k)$, porque g es estricto. Entonces, existe $e''_k \in E''_k$ tal que $g(\eta^* - \eta_k) = g(e''_k)$. Hagamos $\eta_{k+1} = \eta_k + e''_k$. Luego, $\eta_{k+1} - \eta_k \in E''_k$ y, porque $g(\eta_{k+1}) = g(\eta^*)$, debemos tener que $\xi - g(\eta_{k+1}) \in E_{k+1}$. Esto muestra que la sucesión $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_k$ puede ser continuada; lo que completa la prueba.

TEOREMA 1.44

Sean E, E' y E" R-módulos con filtraciones $\{E_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{E'_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{E''_n\}_{n\geqslant 0}$ y completaciones $\hat{E}$, $\hat{E}'$ y $\hat{E}''$. Además, sea

$$E'' \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} E'$$

una sucesión exacta, en la que f y g son homomorfismos estrictos. Entonces, para cada $n \geqslant 0$, la sucesión inducida

$$E''/E_n'' \longrightarrow E/E_n \longrightarrow E'/E_n' \qquad (1.4.9)$$

es exacta. En adición, $\hat{f}$ y $\hat{g}$ son homomorfismos estrictos y

$$\hat{E}'' \xrightarrow{\hat{g}} \hat{E} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{E}'$$

es tambien una sucesión exacta.

PRUEBA:

Solamente es necesario mostrar que (1.4.9) es una sucesión exacta, porque entonces el teorema se seguirá en virtud del Corolario 1.36 y Lema 1.43. Obviamente,

$$\operatorname{Im} (E''/E_n'' \longrightarrow E/E_n) \subseteq \operatorname{Ker} (E/E_n \longrightarrow E'/E_n').$$

En lo que sigue, $\phi_n : E \longrightarrow E/E_n$ y $\phi_n'' : E'' \longrightarrow E''/E_n''$ denotarán los mapeos naturales.

Sea $w \in \operatorname{Ker} (E/E_n \longrightarrow E'/E_n')$. Ya que f es estricto, se sigue del Lema 1.18, que $w = \phi_n(e)$, para algún $e \in \operatorname{Ker} f$. Pero, tenemos que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} g$. Consecuentemente, $e = g(e'')$, para algún elemento apropiado $e'' \in E''$. Así, $w = \phi_n(g(e'')) = (\phi_n g)(e'')$, que muestra que w es la imagen de $\phi_n''(e'')$ bajo el mapeo $E''/E_n'' \longrightarrow E/E_n$. Por tanto, $w \in \operatorname{Im} (E''/E_n'' \longrightarrow E/E_n)$ y la sucesión (1.4.9) es exacta.

1.5 LA EXISTENCIA DE COMPLETACIONES

En la sección anterior establecimos un número de propiedades de las completaciones de módulos filtrados, pero tenemos que mostrar que un módulo filtrado siempre posee una completación. Hay más de una manera en que podemos hacerlo. El método que usaremos emplea la noción de límite proyectivo.

Sea $\{E_n\}_{n\geq 0}$ una filtración de un R-módulo E. Entonces el mapeo identidad de E induce un R-homomorfismo

$$\sigma_n : E/E_n \longrightarrow E/E_{n-1}$$

para cada $n\geq 1$. Por consiguiente, tenemos mapeos

$$\cdots \longrightarrow E/E_{n+1} \xrightarrow{\sigma_{n+1}} E/E_n \xrightarrow{\sigma_n} E/E_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow E/E_1 \xrightarrow{\sigma_1} E/E_0. \qquad (1.5.1)$$

Supongamos que $\xi = \{x_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión en que $x_n \in E/E_n$ para todo $n\geq 0$ y $\sigma(x_n) = x_{n-1}$ para todo $n\geq 1$. La totalidad de tales sucesiones será denotada por $\hat{E}$. Este es llamado el "límite proyectivo" del sistema (1.5.1). Obviamente $\hat{E}$ es no vacío. Además, podemos darle la estructura de un R-módulo, de manera que, si $\{x_n\}$ y $\{x_n'\}$ pertenecen a $\hat{E}$ y $r \in R$, entonces

$$\{x_n\} + \{x_n'\} = \{x_n + x_n'\} \qquad (1.5.2)$$

y

$$r\{x_n\} = \{rx_n\}. \qquad (1.5.3)$$

Para $k\geq 0$, sea $\hat{E}_k$ el R-submódulo de $\hat{E}$ consistiendo de todos los elementos de $\hat{E}$ para los que $x_k = 0$. Entonces

$$\hat{E}_0 \supseteq \hat{E}_1 \supseteq \hat{E}_2 \supseteq \cdots \supseteq \hat{E}_k \supseteq \cdots$$

Así, $\{\hat{E}_k\}_{k\geq 0}$ es una filtración de $\hat{E}$ y tenemos

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \hat{E}_k = 0$$

Ahora debemos mostrar que $\hat{E}$ es completo con respecto a su filtración.

Sea $\{\xi^{(s)}\}$, donde $\xi^{(s)} = \{x_n^{(s)}\}_{n\geq 0}$ y $s = 1, 2, 3, \ldots$, una sucesión de Cauchy de elementos de $\hat{E}$ y supongamos que $k\geq 0$ es un entero dado. Entonces, $\xi^{(s+1)} - \xi^{(s)} \in \hat{E}_k$ cuando s es grande y, por tanto,

$$x_k^{(s+1)} = x_k^{(s)}.$$

Así, la sucesión $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}, \ldots$ eventualmente llega a ser constante. Sea x_k el valor terminal y hagamos $\xi = \{x_k\}_{k\geq 0}$. Obviamente, $\xi \in \hat{E}$ cuando s es suficientemente grande. Por tanto, $\xi^{(s)} \longrightarrow \xi$ y $\hat{E}$ ha sido mostrado como completo.

Sea $\phi_n\colon E \longrightarrow E/E_n$ el mapeo natural. Entonces, para cada $e \in E$ la sucesión $\{\phi_n(e)\}_{n\geq 0}$ es un elemento de $\hat{E}$. Podemos definir así un mapeo $\psi\colon E \longrightarrow \hat{E}$ tal que

$$\psi(e) = \{\phi_n(e)\}_{n\geq 0}.$$

Este es claramente un R-homomorfismo y Ker $\psi = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$. Afirmamos que ψ es estricto. En verdad, supongamos que $\xi = \{x_n\}_{n\geq 0}$ per tenece a $\Psi(E) \cap \hat{E}_k$. Entonces, existe $e \in E$ tal que $\Psi(e) = \xi$ y, por tanto, $x_n = \phi_n(e)$ para todo $n \geqslant 0$. Pero, $x_k = 0$. En consecuencia, $e \in E_k$ y $\xi = \Psi(e) \in \Psi(E_k)$. Se sigue que

$$\Psi(E) \cap \hat{E}_k \subseteq \Psi(E_k)$$

y, como la inclusión opuesta es obvia, nuestra afirmación de que Ψ es estricto ha sido establecida.

Hay una propiedad final que debemos comprobar, antes que podamos asegurar que tenemos una completación de E, a saber, debemos mostrar que la clausura $\overline{\Psi(E)}$, de $\Psi(E)$, coincide con $\hat{E}$. Para ello, sean $\eta = \{y_n\}_{n \geqslant 0}$ un elemento dado de $\hat{E}$ y $k \geqslant 0$ un entero dado. Entonces, $y_k \in E/E_k$ y, por tanto, existe $e \in E$ tal que $\phi_k(e) = y_k$. Si ahora se sigue que $\eta - \Psi(e)$ pertenece a $\hat{E}_k$ y, por tanto, $\eta + \hat{E}_k$ corta a $\Psi(E)$. Además, esto es cierto para todo k. Esto muestra que $\eta \in \overline{\Psi(E)}$ y así vemos que $\overline{\Psi(E)} = \hat{E}$ como era requerido. Resumimos y asentamos nuestras conclusiones en el siguiente

TEOREMA 1.45

Sea $\{E_n\}_{n \geqslant 0}$ una filtración de un R-módulo E. Entonces, E posee una completación con respecto a su filtración. Además, una completación puede ser obtenida como el límite proyectivo del sistema

$$\cdots \longrightarrow E/E_{n+1} \xrightarrow{\sigma_{n+1}} E/E_n \xrightarrow{\sigma_n} E/E_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow E/E_1 \xrightarrow{\sigma_1} E/E_0.$$

en la manera descrita arriba.

CAPITULO II

ANILLOS FILTRADOS

2.1 ANILLOS FILTRADOS

DEFINICION 2.1

Sea R un anillo. Entonces, una filtración de R es una familia $\{A_n\}_{n\geq 0}$ de ideales (izquierdos y derechos) que satisface

$$A_n \supseteq A_{n+1}$$

para todo $n\geq 0$.

Ahora, si consideramos a R como un módulo (izquierdo) con respecto a si mismo, tenemos que R es un módulo filtrado, con $\{A_n\}_{n\geq 0}$ como filtración. Esto nos conducirá a un número de resultados del capítulo anterior. Por ejemplo, hay una topología de la filtración en R que tiene a los conjuntos de la forma $\alpha + A_n$, donde $\alpha \in R$ y $n\geq 0$, como una base. Ahora, por la Proposición 1.10, el mapeo $R \longrightarrow R$ en el que cada elemento es mapeado a su opuesto es un homomorfismo y, así tambien, el mapeo $\tau_p: R \longrightarrow R$ donde $\tau_p(r) = r + p$. Aquí por supuesto, p es un elemento fijo de R. Sea RxR dotado con la topología producto. Ya sabemos, de la Proposición 1.11, que el mapeo σ: $RxR \longrightarrow R$ definido por $\sigma(r,r') = r + r'$ es continuo. En la presente ocasión, tambien tenemos un mapeo multiplicativo μ : $RxR \longrightarrow R$ en que $\mu(r,r') = rr'$. Este tambien es continuo. Sean α, β pertenecientes a R y $k\geq 0$ un entero. Entonces, cuando x pertenece a $\alpha + A_k$ y y pertenece a

$\beta + A_k$, $\mathcal{M}(x,y) = xy$ pertenecerá a $\alpha\beta + A_k$. Entonces, $\mathcal{M}(\alpha + A_k, \beta + A_k) \subseteq \mathcal{M}(\alpha, \beta) + A_k$ y la continuidad de $\mathcal{M}$ queda demostrada.

Sean $\{\alpha_m\}$ y $\{\beta_m\}$ sucesiones de elementos de un anillo filtrado R y supongamos que $\alpha_m \longrightarrow \alpha$ y $\beta_m \longrightarrow \beta$. Ya sabemos que

$$\alpha_m + \beta_m \longrightarrow \alpha + \beta \tag{2.1.1}$$

y

$$\alpha_m - \beta_m \longrightarrow \alpha - \beta \tag{2.1.2}$$

Como hemos visto, la multiplicación es una función continua; por lo que podemos agregar

$$\alpha_m \beta_m \longrightarrow \alpha\beta \tag{2.1.3}$$

Sin embargo, el concepto de completación de un anillo filtrado requiere un breve comentario.

DEFINICION 2.2

Sea $\{A_n\}_{n\geq 0}$ una filtración de un anillo R. Una completación de R con respecto a su filtración es un objeto que consiste de un anillo $\hat{R}$, una filtración $\{\hat{A}_n\}_{n\geq 0}$ de ideales de $\hat{R}$ y un homomorfismo de anillos $\Psi: R \longrightarrow \hat{R}$, que satisfacen las siguientes condiciones:

i) $\hat{R}$ es completo con respecto a $\{\hat{A}_n\}_{n\geq 0}$

ii) $\Psi(A_n) = \Psi(R) \cap \hat{A}_n$ para todo $n\geq 0$

iii) $\psi(R)$ es denso en $\hat{R}$

iv) $\operatorname{Ker} \psi = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.

Como en el caso de módulos, debemos referirnos a $\{\hat{A}_n\}_{n\geqslant 0}$ como la filtración canónica en $\hat{R}$ y a $\psi\colon R \longrightarrow \hat{R}$ como el homomorfismo canónico (suponemos que para un homomorfismo de anillos el elemento identidad mapea al elemento identidad). Notemos, de paso, que si R es un anillo conmutativo, entonces lo es tambien $\hat{R}$. Es claro que si ξ, η pertenecen a $\psi(R)$, entonces $\xi\eta = \eta\xi$. Pero, todo elemento de $\hat{R}$ es el límite de una sucesión de elementos de $\psi(R)$. En consecuencia, el acierto se sigue de (2.1.3) y la unicidad de límites.

Supongamos que $\hat{R}$ es una completación de un anillo R. Si $r \in R$ y $\xi \in \hat{R}$, podemos convertir $\hat{R}$ en un R-módulo (izquierdo) definiendo

$$r\xi = \psi(r)\xi,$$

donde ψ es el homomorfismo canónico. Los R-ideales A_n entonces llegan a ser R-submódulos de $\hat{R}$. Podemos considerar, por tanto, a R y $\hat{R}$ como R-módulos filtrados, teniendo a $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{\hat{A}_n\}_{n\geqslant 0}$ como sus respectivas filtraciones. En este entendido, $\hat{R}$ es una completación de R, en el sentido que fué establecido en la sección (1.4). De esta manera, podemos hacer uso de un número de resultados iniciales sin el problema de examinar sus pruebas para ver el cambio de módulos a anillos que hace cualquier diferencia esencial. Así, del Teorema 1.31, se sigue que $\hat{A}_n$ es la clau sura de $\psi(A_n)$ en $\hat{R}$ y $A_n = \psi^{-1}(\hat{A}_n)$. Ahora, por el Corolario 1.33, ψ induce una mapeo uno-a-uno

$$R/A_n \longrightarrow \hat{R}/\hat{A}_n$$

de R/A_n en $\hat{R}/\hat{A}_n$. Ya que ψ es un homomorfismo de anillos y A_n, $\hat{A}_n$ son ideales, el mapeo es efecto un isomorfismo de anillos.

La cuestión de la unicidad de la completación de un anillo filtrado puede ser establecida con la ayuda de resultados iniciales. Supongamos que $\hat{R}$ con filtración $\{\hat{A}_n\}_{n\geq 0}$ y $\hat{R}'$ con filtración $\{\hat{A}'_n\}_{n\geq 0}$ son dos completaciones del anillo filtrado R y sean ψ: $R \longrightarrow \hat{R}$ y ψ': $R \longrightarrow \hat{R}'$ los mapeos canónicos. La teoría de los módulos filtrados nos dice que existe uno y sólo un mapeo continuo

$$w\colon \hat{R} \longrightarrow \hat{R}'$$

tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi'"] & \\ \hat{R} \arrow[rr, "w"'] & & \hat{R}' \end{tikzcd} \qquad (2.1.4)$$

es conmutativo. Tenemos que $w(\hat{A}_n) = \hat{A}'_n$ para todo n, y w mismo es un isomorfismo de anillos. Además, considerando a R, $\hat{R}$ Y $\hat{R}'$ como módulos filtrados y aplicando el Teorema 1.39, se sigue que

i) $w(\hat{A}_n) = \hat{A}'_n$

ii) w es un mapeo uno-a-uno de $\hat{R}$ en $\hat{R}'$

iii) si $\xi, \eta \in \hat{R}$, entonces

$$w(\xi + \eta) = w(\xi) + w(\eta).$$

Ahora, porque (2.1.4) es conmutativo y ψ, ψ' son homomorfismos de anillos, vemos que $w(1_{\hat{R}}) = 1_{\hat{R}'}$. De acuerdo a esto, sólo es necesario mostrar que

$$w(\xi\eta) = w(\xi)w(\eta)$$

para todo ξ, η en $\hat{R}$. Sin embargo, cuando ξ, η pertenecen a $\psi(R)$, esto es una consecuencia de las propiedades conmutativas del diagrama (2.1.4). En el caso general, cada ξ, η en $\hat{R} = \overline{\psi(R)}$ es el límite de una sucesión de elementos pertenecientes a $\psi(R)$. Ya que w es continua, el resultado se sigue de (2.1.3) y (1.3.4).

Por otra parte, la existencia de completaciones de anillos filtrados puede ser establecida modificando el método usado en el caso de módulos. Para ver esto, sea R un anillo filtrado con filtración $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$. Entonces, el mapeo identidad induce un homomorfismo sobreyectivo de anillos

$$\sigma_n : R/A_n \longrightarrow R/A_{n-1}$$

para cada $n\geqslant 1$. Ahora, sea $\hat{R}$ el límite proyectivo del sistema

$$\cdots \longrightarrow R/A_{n+1} \xrightarrow{\sigma_{n+1}} R/A_n \xrightarrow{\sigma_n} R/A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow R/A_1 \xrightarrow{\sigma_1} R/A_0$$

y sean $\{x_n\}_{n\geq 0}$, $\{y_n\}_{n\geq 0}$ elementos típicos de $\hat{R}$. Entonces, $\hat{R}$ tiene una estructura natural como un anillo con elemento identidad, en que

$$\{x_n\}_{n\geq 0} + \{y_n\}_{n\geq 0} = \{x_n + y_n\}_{n\geq 0}$$

y

$$\{x_n\}_{n\geq 0}\{y_n\}_{n\geq 0} = \{x_n\, y_n\}_{n\geq 0}.$$

El elemento identidad es la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ en que, para cada $n\geq 0$, x_n es el elemento identidad del anillo R/A_n.
Para $k\geq 0$, sea $\hat{A}_k$ el $\hat{R}$-ideal que consiste de aquellas sucesiones $\{y_n\}_{n\geq 0}$ para las que $y_k = 0$. Entonces, $\{\hat{A}_k\}_{k\geq 0}$ es una filtración en $\hat{R}$ y $\hat{R}$ es completo con respecto a su filtración.
Finalmente, sea ϕ_n: $R \longrightarrow R/A_n$ el mapeo natural y definamos ψ: $R \longrightarrow \hat{R}$ por $\psi(r) = \{\phi_n(r)\}_{n\geq 0}$. Entonces, ψ es un homomorfismo de anillos. Además, $\hat{R}$, la filtración $\{\hat{A}_n\}_{n\geq 0}$ y el homomorfismo ψ constituyen una completación del anillo filtrado R. Las razones por las cuales ellos tienen las propiedades necesarias son esencialmente las mismas que aquellas encontradas en la teoría de módulos filtrados.
A continuación, presentamos casos sobre anillos filtrados que tienen significado para nuestras investigaciones siguientes.

LEMA 2.3

Sea R un anillo filtrado, $\hat{R}$ su completación y $\psi: R \longrightarrow \hat{R}$ el homomorfismo canónico de anillos. Si ahora, r pertenece al centro de R, entonces $\psi(r)$ pertenece al centro de $\hat{R}$.

PRUEBA:

Si η pertenece a $\psi(R)$, entonces $\eta\psi(r) = \psi(r)\eta$. Sin embargo, $\psi(R)$ es denso en $\hat{R}$ y la multiplicación es una función continua. Se sigue que $\xi\psi(r) = \psi(r)\xi$ para todo $\xi \in \hat{R}$.

LEMA 2.4

Sea R un anillo filtrado. Denotemos por Ω el subconjunto de R consistiendo de todos los elementos x tal que x^n converge a cero cuando n tiende al infinito. Entonces, Ω es cerrado con respecto a la topología filtración.

PRUEBA:

Sea $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ la filtración en R y supongamos que y pertenece a la clausura $\overline{\Omega}$ de Ω. Si ahora un entero $k\geqslant 0$ es dado, entonces $y + A_k$ corta a Ω y por tanto

$$y - x \in A_k$$

para algún $x \in \Omega$. Pero, A_k es un ideal. En consecuencia,

$$y^n - x^n \in A_k$$

para todo n. Sin embargo, $x^n \in A_k$ para todo n grande y por consiguiente $y^n \in A_k$ cuando n es grande. Así, $y^n \longrightarrow 0$, que es decir

$y \in \Omega$.

PROPOSICION 2.5

Sean R un anillo filtrado completo y B un ideal (izquierdo) de R. Supongamos que para todo $x \in B$, x^n converge a cero cuando n tiende al infinito. Entonces, B está contenido en el radical de Jacobson de R.

PRUEBA:

Sean $x \in B$ y L un ideal maximal (izquierdo). Será suficiente mostrar que x pertenece a L. Asumamos lo contrario. Entonces,

$$Rx + L = R$$

y así $rx + \lambda = 1$ para elementos convenientes $r \in R$ y $\lambda \in L$. Pongamos $rx = y$. Entonces, $\lambda = 1 - y$ y $y \in B$. Se sigue que $y^n \longrightarrow 0$ y por tanto, por la Proposición 1.26, la serie

$$1 + y + y^2 + y^3 + \ldots$$

converge. Sea z su suma. Entonces, ya que

$$(1 + y + y^2 + y^3 + \ldots + y^n)(1 - y) = 1 - y^{n+1}$$

para todo $n \geqslant 0$. Se sigue que $z(1 - y) = 1$. Así, $z\lambda = 1$ y ahora tenemos una contradicción, porque L es un ideal propio izquierdo.

2.2 MODULOS FILTRADOS SOBRE ANILLOS FILTRADOS

Sean R un anillo filtrado con filtración $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ y E un R-módulo con filtración $\{E_n\}_{n\geqslant 0}$. Entonces, podemos completar R para obtener un anillo $\hat{R}$ y tambien completar E para obtener un R-módulo $\hat{E}$. Naturalmente, esperamos que $\hat{E}$ tendrá la estructura de un R-módulo siempre que las dos filtraciones estén convenientemente conectadas. Esta es la idea que ahora será explorada.

Ya que E es un R-módulo, tenemos un mapeo multiplicativo

$$RxE \longrightarrow E$$

en que (r,e) es llevado a re. Además, R y E están dotados cada uno de una topología filtración; así, podemos dotar a RxE de la topología producto.

DEFINICION 2.6

Diremos que la filtración en E es "compatible" con la filtración en el anillo R si el mapeo multiplicativo RxE $\longrightarrow$ E es continuo.

Supongamos por el momento que este es el caso y sean $\alpha_m \longrightarrow \alpha$ y $x_m \longrightarrow x$, donde $\{\alpha_m\}$ es una sucesión de elementos de R y $\{x_m\}$ una sucesión de elementos de E. Entonces, por supuesto,

$$\alpha_m x_m \longrightarrow \alpha x. \qquad (2.2.1)$$

LEMA 2.7

Las siguientes dos proposiciones son equivalentes:

a) el mapeo multiplicativo RxE $\longrightarrow$ E es continuo

b) dado $e \in E$ y $k \geqslant 0$ existe un entero $p \geqslant 0$ tal que

$$A_p e \subseteq E_k.$$

PRUEBA:

Supongamos que a) es cierto y sean $e \in E$ y $k \geqslant 0$ dados. Ya que la multiplicación es continua en $(0,e)$; existen enteros $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ tales que

$$A_p(e + E_q) \subseteq E_k.$$

En particular, $A_p e \subseteq E_k$. Así, a) implica b).

Ahora asumamos que b) es cierta. Debemos mostrar que la multiplicación es continua en (r,e). Para este fín supongamos que un entero k es dado. Entonces, $A_p e \subseteq E_k$ para un entero p. Si ahora α pertenece a $r + A_p$ y x pertenece a $e + E_k$, entonces αx está en $re + E_k$. Consecuentemente, tenemos continuidad en (r,e).

Consideremos la situación en que la filtración en E es compatible con la de R y sean $\hat{E}$ y $\hat{R}$ las respectivas completaciones. Debemos usar ψ_R: R $\longrightarrow$ $\hat{R}$ y ψ_E: E $\longrightarrow$ $\hat{E}$ para denotar los mapeos canónicos (Así, ψ_R es un homomorfismo de anillos y ψ_E es un homomorfismo de R-módulos). La notación para las filtraciones de R, E, $\hat{R}$ y $\hat{E}$ serán las usuales.

Sea $\hat{e} \in \hat{E}$ y $k \geqslant 0$ un entero dado. Podemos encontrar entonces $e \in E$ tal que $\hat{e} - \psi_E(e) \in \hat{E}_k$. Ahora, por el Lema 2.7, existe $p \geqslant 0$ tal que $A_p e \subseteq E_k$ y, por consiguiente, $A_p \psi_E(e) \subseteq \hat{E}_k$. Se sigue que

$$A_p \hat{e} \subseteq \hat{E}_k. \tag{2.2.2}$$

Esto muestra que la filtración en $\hat{E}$ es compatible con la filtración en R.

Ahora, sea $\alpha \in \hat{R}$ y $\hat{e} \in \hat{E}$. Existe una sucesión $\{a_m\}$ de elementos de R tal que $\alpha = \lim \psi_R(a_m)$. Supongamos que $k \geqslant 0$ es dado y seleccionemos $p \geqslant 0$ tal que (2.2.2) se cumple. Hay entonces un entero positivo N tal que, cuando $m,q \geqslant N$, la diferencia

$$\psi_R(a_m) - \psi_R(a_q)$$

pertenece a $\hat{A}_p$. En este caso, $a_m - a_q$ pertenece a $\psi_R^{-1}(\hat{A}_p) = A_p$ y, por tanto, $a_m\hat{e} - a_q\hat{e}$ está en $\hat{E}_k$. Esto muestra que $\{a_m\hat{e}\}$ es una sucesión de Cauchy y, entonces, una sucesión convergente. Además, si $\{a'_m\}$ es otra sucesión de elementos de R para la cual $\alpha = \lim \psi_R(a'_m)$, entonces podemos fácilmente verificar que $\{a_m\hat{e} - a_m\hat{e}\}$ converge a cero. Por consiguiente, podemos definir el producto $\hat{R} \times \hat{E} \longrightarrow \hat{E}$ así

$$\alpha\hat{e} = \lim (a_m\hat{e}). \tag{2.2.3}$$

Observe que si $a \in R$, entonces

$$\psi_R(a)\hat{e} = a\hat{e}. \tag{2.2.4}$$

Ahora supongamos que $\alpha \in \hat{A}_p$. Entonces, ya que $\hat{A}_p$ es la clausura de $\psi_R(A_p)$, podemos arreglar que todos los elementos a_m estén en A_p. Pero, en este caso, $a_m\hat{e} \in \hat{E}_k$, por (2.2.2), y así $\alpha\hat{e} \in \hat{E}_k$, porque $\hat{E}_k$ es cerrado. Esto muestra que

$$\hat{A}_p\hat{e} \subseteq \hat{E}_k. \tag{2.2.5}$$

Ahora, si $\hat{e} \in \hat{E}_k$ y α es ahora arbitraria, entonces $a_m\hat{e} \in \hat{E}_k$, porque $\hat{E}_k$ es un R-módulo. Así, obtenemos $\alpha\hat{e} \in \hat{E}_k$ y hemos mostrado que

$$\alpha\hat{E}_k \subseteq \hat{E}_k. \tag{2.2.6}$$

Pretendemos que $\hat{E}$ llegue a ser un R-módulo. Para este fin, supongamos que $\alpha, \beta \in \hat{R}$ y $\hat{e} \in \hat{E}$. Debemos mostrar que $\alpha(\beta\hat{e})$ coincide con $(\alpha\beta)\hat{e}$ (La verificación de los otros axiomas de módulo es sencilla y se deja al lector). Seleccionemos sucesiones $\{a_m\}$ y $\{b_m\}$, de elementos de R, tal que $\alpha = \lim \psi_R(a_m)$ y $\beta = \lim \psi_R(b_m)$ y sea $k \geqslant 0$ un entero dado. Cuando m es suficientemente grande, tenemos que $\beta\hat{e} - b_m\hat{e} \in \hat{E}_k$ y, por tanto, $a_m(\beta\hat{e}) - (a_mb_m)\hat{e}$ pertenece a $\hat{E}_k$. Por (2.2.3), $a_m(\beta\hat{e}) \longrightarrow \alpha(\beta\hat{e})$. Además, $\psi_R(a_mb_m) = \psi_R(a_m)\psi_R(b_m)$ tiende a $\alpha\beta$. Entonces, $(a_mb_m)\hat{e} \longrightarrow (\alpha\beta)\hat{e}$. Se sigue que $\alpha(\beta\hat{e}) - (\alpha\beta)\hat{e}$ pertenece a $\hat{E}_k$. Pero, esto es cierto para todo k. Consecuentemente, $\alpha(\beta\hat{e}) = (\alpha\beta)\hat{e}$ y nuestra pretensión está justificada.

Por (2.2.6), $\hat{E}_k$ es un $\hat{R}$-módulo. Así, $\{\hat{E}_n\}_{n\geqslant 0}$ es una filtración en $\hat{E}$, cuando $\hat{E}$ es considerado como un $\hat{R}$-módulo. Por (2.2.5), $\{\hat{E}_k\}_{k\geqslant 0}$

es compatible con $\{\hat{A}_k\}_{k\geq 0}$. Resumimos nuestras conclusiones en el

TEOREMA 2.8

Sea R un anillo filtrado, E un R-módulo filtrado y supongamos que la filtración en E es compatible con la de R. Si ahora, $\hat{R}$ y $\hat{E}$ son completaciones de R y E, respectivamente, y $\psi_R: R \longrightarrow \hat{R}$ es el homomorfismo canónico de anillos, entonces a $\hat{E}$ se le puede dar la estructura de un $\hat{R}$-módulo, ya que

i) $\psi_R(r)\hat{e} = r\hat{e}$ para todo $r \in R$ y $\hat{e} \in \hat{E}$

ii) la filtración de $\hat{E}$ consiste de $\hat{R}$-submódulos y es compatible con la de $\hat{R}$.

Además, estos dos requerimientos determinan completamente la estructura de $\hat{E}$ como un $\hat{R}$-módulo.

Solamente la afirmación final necesita comentarse. Sin embargo, cuando todas las condiciones son satisfechas es claro que debemos tener $\alpha\hat{e} = \lim (a_m\hat{e})$, con tal de que $\{a_m\}$ sea una sucesión de elementos de R tal que $\{\psi_R(a_m)\}$ converge a α. Esto muestra que hay sólo un valor posible para el producto de α y $\hat{e}$.

COROLARIO 2.9

Sea la situación como la descrita en el enunciado del Teorema 2.8. Entonces, para $r \in R$ y $e \in E$ tenemos el producto

$$\psi_E(re) = \psi_R(r)\,\psi_E(e),$$

donde ψ_E: $E \longrightarrow \hat{E}$ es el homomorfismo canónico de R-módulos.

PRUEBA:

Esto se sigue enseguida porque, por el Teorema 2.8,

$$\psi_R(r)\,\psi_E(e) = r\,\psi_E(e),$$

y
$$r\,\psi_E(e) = \psi_E(re),$$

porque ψ_E es un R-homomorfismo.

COROLARIO 2.10

Con las mismas suposiciones del Teorema 2.8, los $\hat{R}$-submódulos abiertos de $\hat{E}$ coinciden con los R-submódulos abiertos de $\hat{E}$.

PRUEBA:

Sea V un R-submódulo abierto de $\hat{E}$. Debemos demostrar que es también un $\hat{R}$-submódulo. El converso es obvio porque cualquier $\hat{R}$-submódulo de $\hat{E}$ es un R-módulo.

Sea $\alpha \in \hat{R}$ y $v \in V$. Ya que V es abierto en $\hat{E}$, existe un entero k tal que $\hat{E}_k \subseteq V$. Ahora, la filtración de $\hat{E}$ es compatible con la de $\hat{R}$. Consecuentemente, por el Lema 2.7, existe un entero p tal que $\hat{A}_p v \subseteq \hat{E}_k$. Seleccionemos $r \in R$ tal que $\alpha - \psi_R(r)$ pertenece a $\hat{A}p$. Entonces

$$(\ \alpha - \psi_R(r)\ )v \in \hat{E}_k \subseteq V.$$

Pero $\psi_R(r)v = rv \in V$, porque V es un R-módulo. Se sigue que αv

V. En consecuencia, V es un $\hat{R}$-módulo de $\hat{E}$.

En el futuro, si R es un anillo filtrado, E un R-módulo con una filtración compatible y hablamos de $\hat{E}$ como un $\hat{R}$-módulo, entonces siempre es posible entender que nos referimos a la estructura , como un $\hat{R}$-módulo, suministrada por el Teorema 2.8. Esto se aplica, en particular, al teorema que sigue

TEOREMA 2.11

Sea R un anillo filtrado y E, E' R-módulos filtrados cuyas filtraciones son compatibles con las de R. Si ahora

$$f: E \longrightarrow E'$$

es un R-homomorfismo continuo, entonces el mapeo asociado

$$f: \hat{E} \longrightarrow \hat{E}'$$

(ver Teorema 1.34) es un homomorfismo de $\hat{R}$-módulos.

PRUEBA:

Sean $\alpha \in \hat{R}$ y $\hat{e} \in \hat{E}$. Existe una sucesión $\{a_m\}$ de elementos de R tal que $\alpha = \lim \psi_R(a_m)$ y entonces $a_m\hat{e} \longrightarrow \alpha\hat{e}$. En consecuencia

$$\lim \hat{f}(a_m\hat{e}) = \hat{f}(\alpha\hat{e}),$$

porque $\hat{f}$ es continuo. Sin embargo, sabemos que $\hat{f}$ es un R-homo morfismo. Entonces, $\hat{f}(a_m\hat{e}) = a_m\hat{f}(\hat{e})$ y, por tanto, tenemos que $\lim \hat{f}(a_m\hat{e}) = \alpha\hat{f}(\hat{e})$. Así, $\hat{f}(\alpha\hat{e}) = \alpha\hat{f}(\hat{e})$.

CAPITULO III

FILTRACIONES MULTIPLICATIVAS

Hasta ahora las filtraciones que hemos considerado han sido extremadamente generales. Ahora debemos investigar filtraciones de una clase un tanto especial. Estas son tales que la teoría de módulos y anillos graduados nos provee de poderosas herramientas para el estudio de las propiedades de completaciones.

DEFINICION 3.1

Sea $\{A_n\}_{n\geq 0}$ una filtración de ideales (izquierdos y derechos) de un anillo R. Diremos que $\{A_n\}_{n\geq 0}$ es una "filtración multiplicativa" si

$$A_0 = R \qquad (3.1.1)$$

y

$$A_m A_n \subseteq A_{m+n}, \text{ para todo } m, n \geq 0. \qquad (3.1.2)$$

Un ejemplo muy importante de filtración multiplicativa es $\{I^n\}_{n\geq 0}$ donde I es un ideal (izquierdo y derecho) de un anillo R. Por supuesto, I^0 significa R mismo.

DEFINICION 3.2

Sea R un anillo con filtración multiplicativa $\{A_n\}_{n\geq 0}$. Diremos que

$$G(R) = (A_0/A_1) \oplus (A_1/A_2) \oplus \ldots \oplus (A_n/A_{n+1}) \oplus \cdots \qquad (3.1.3)$$

es el anillo graduado asociado con el anillo filtrado multiplicativamente R.

En primera instancia G(R) es un grupo abeliano, pero podemos convertirlo en un anillo sin dificultad. Sean $\rho \in (A_m/A_{m+1})$ y $\rho' \in (A_n/A_{n+1})$ con representantes r y r', respectivamente, donde $r \in A_m$ y $r' \in A_n$. Por (3.1.2), rr' pertenece a A_{m+n} y uno puede verificar sin dificultad que la imagen natural de rr' en A_{m+n}/A_{m+n+1} depende solamente de ρ y ρ' y es independiente de la selección de los representantes r y r'. Despues de esto, es una cuestión simple comprobar que G(R) tiene una estructura natural como un anillo graduado en que

$$\rho\rho' = \text{imagen de } rr' \text{ en } A_{m+n}/A_{m+n+1} \qquad (3.1.4)$$

y los elementos homogéneos de grado m ($m \geqslant 0$) son justamente aquellos en A_m/a_{m+1} (Note que G(R) posee como elemento identidad la imagen de 1_R en $A_0/A_1 = R/A_1$).

DEFINICION 3.3

Sea E un R-módulo y $\{E_n\}_{n\geqslant 0}$ una filtración en E. La filtración $\{E_n\}_{n\geqslant 0}$ se dirá que es "fuertemente compatible" con la filtración multiplicativa en R si

$$E_0 = E \qquad (3.1.5)$$

y

$$A_m E_n \subseteq E_{m+n} \qquad (3.1.6)$$

para todo m, n $\geqslant$ 0.

Ya que esto implica que $A_m E \subseteq E_m$, se sigue que tal filtración es compatible con la filtración en R en el sentido de la Sección 2.2, Capítulo II.

Asumamos que $\{E_n\}_{n\geq 0}$ es fuertemente compatible con $\{A_n\}_{n\geq 0}$. Pongamos

$$G(E) = (E_0/E_1) \oplus (E_1/E_2) \oplus \ldots \oplus (E_n/E_{n+1}) \oplus \ldots \qquad (3.1.7)$$

Para comenzar, G(E) tiene la estructura de un grupo abeliano aditivo. Ahora supongamos que $\rho \in (A_m/A_{m+1})$ y $\eta \in (E_n/E_{n+1})$. Seleccionemos un representante $r \in A_m$ para ρ y un representante $y \in E_n$ para η. Entonces, por (3.1.6), $ry \in E_{m+n}$. Tambien, la imagen de ry en E_{m+n}/E_{m+n+1} depende solamente de ρ y η y es independiente de la selección de sus representantes r y y, respectivamente. Ahora podemos, en una única manera, dotar a G(E) con la estructura de G(R)-módulo (izquierdo) graduado en que

$$\rho\eta = \text{imagen de } ry \text{ en } E_{m+n}/E_{m+n+1}, \qquad (3.1.8)$$

y los elementos de G(E) homogéneos de grado n $(n\geq 0)$ son aquellos que pertenecen a E_n/E_{n+1}.

TEOREMA 3.4

Sea R un anillo completo con respecto a la filtración multiplicativa $\{A_n\}_{n\geq 0}$ y E un R-módulo con una filtración $\{E_n\}_{n\geq 0}$ que es fuertemente compatible con la filtración en R y que satisface

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n = 0.$$

Además, sean $e_1, e_2, \dots, e_s$ elementos de E, donde $e_i \in E_{p_i}$, y denotemos por $\overline{e_i}$ la imagen natural de e_i en E_{p_i}/E_{p_i+1} de modo que $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_s}$ son elementos homogéneos de G(E). Si ahora $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_s}$ generan a G(E) como un G(R)-módulo, entonces

a) $E = Re_1 + Re_2 + \dots + Re_s$,

b) $E_k = A_{k-p_1}e_1 + A_{k-p_2}e_2 + \dots + A_{k-p_s}e_s$ y

c) E es completo con respecto a $\{E_n\}_{n \geqslant 0}$.

OBSERVACION: Ponemos $A_n = R$ cuando $n<0$. Esta convención se necesita para dar significado a b), para valores de k que son más pequeños que

$$\max(p_1, p_2, \dots, p_s).$$

Tambien será útil en el curso de la prueba.

PRUEBA:

Sea $k \geqslant 0$ un entero dado y $e \in E_k$. Debemos comenzar mostrando que existen sucesiones infinitas

$$a^{(i)}_{k-p_i}, a^{(i)}_{k-p_i+1}, a^{(i)}_{k-p_i+2}, \dots, a^{(i)}_{k-p_i+m}, \dots,$$

una para cada valor de i $(1 \leqslant i \leqslant s)$, tal que

$$a^{(i)}_{k-p_i+m} \in A_{k-p_i+m}$$

y

$$e - \sum_{i=1}^{s} \Big(\sum_{\mu=0}^{m} a^{(i)}_{k-p_i+\mu} \Big) e_i \in E_{k+m+1} \tag{3.1.9}$$

para todo $m\geq 0$. Para este fin, supongamos que, para $1\leq i\leq s$,

$$a_{k-p_i}^{(i)},\ a_{k-p_i+1}^{(i)},\ \ldots\ ,\ a_{k-p_i+m-1}^{(i)}$$

ya han sido construidas de conformidad con los requerimientos de arriba. Mostraremos que las sucesiones pueden ser llevadas más allá. Ya que el método por el cual esto está hecho puede ser fácilmente adaptado a mostrar que las sucesiones pueden ser iniciadas, esto establecerá la existencia de sucesiones infinitas teniendo las propiedades necesarias.

Consideremos el elemento

$$z = e - \sum_{i=1}^{s}\Big(\sum_{\nu=0}^{m-1} a_{k-p_i+\nu}^{(i)}\Big)e_i .$$

Por nuestra hipótesis, tenemos que $z\in E_{k+m}$. Sea $\bar{z}$ que denota la imagen natural de z en E_{k+m}/E_{k+m+1}. Entonces, $\bar{z}$ es un elemento homogéneo de $G(E)$ cuyo grado es igual a $k+m$. Por consiguiente, puede ser expresado en la forma

$$\bar{z} = w_1\overline{e_1} + w_2\overline{e_2} + \ldots + w_s\overline{e_s},$$

donde w_i pertenece a $A_{k-p_i+m}/A_{k-p_i+m+1}$ si $k-p_i+m \geq 0$ y es cero de otro modo. En aquel caso, sea $a_{k-p_i+m}^{(i)}$ un representante de w_i en A_{k-p_i+m} y, en este caso, sea cero. Entonces, en todo caso, tenemos

$$a_{k-p_i+m}^{(i)} \in A_{k-p_i+m}$$

Tambien tenemos

$$z = a^{(1)}_{k-p_1+m}e_1 + a^{(2)}_{k-p_2+m}e_2 + \dots + a^{(s)}_{k-p_s+m}e_s \in E_{k+m+1}.$$

Así, los elementos $e^{(i)}_{k-p_i+m}$ proveen las continuaciones deseadas de nuestras sucesiones finitas.

Ya que R es completo con respecto a su filtración, se sigue, de la Proposición 1.26, que la serie

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a^{(i)}_{k-p_i+\mu}$$

converge. Sea $a^{(i)}$ su suma. Entonces, todos los términos y sumas parciales de las series pertenecen a A_{k-p_i} y este es un subconjunto de R. Así, $a^{(i)} \in A_{k-p_i}$. Tambien, la sucesión cuyo m-ésimo término es

$$\sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{\mu=0}^{m} a_{k-p_i+\mu}\right) e_i$$

converge a $\sum_{i=1}^{s} a^{(i)} e_i$ y, por (3.1.9), la misma sucesión converge a e. Pero, por hipótesis, E es un espacio de Hausdorff. Consecuentemente, los dos límites son el mismo y, por tanto,

$$e = a^{(1)}e_1 + a^{(2)}e_2 + \dots + a^{(s)}e_s .$$

La relación b) se sigue y derivamos a) de b) tomando k = 0.

Sea $\{\xi_m\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de E. Entonces

$$\lim\ (\xi_{m+1} - \xi_m) = 0.$$

Se sigue que existe una sucesión infinita $v_1, v_2, v_3, \ldots$ de enteros no negativos tal que $v_m \longrightarrow \infty$ y $(\xi_{m+1} - \xi_m) \in E_{v_m}$ para todo m. Por b), tenemos

$$\xi_{m+1} - \xi_m = c_{m1}e_1 + c_{m2}e_2 + \ldots + c_{ms}e_s,$$

donde $c_{mi} \in A_{v_m - p_i}$. Así, cada sucesión $c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, \ldots$ converge a cero y por tanto, ya que R es completo, la serie

$$c_{1i} + c_{2i} + c_{3i} + \ldots + c_{mi} + \ldots$$

converge (Proposición 1.26). Sea c_i su suma. Entonces, como $m \rightarrow \infty$

$$\xi_{m+1} - \xi_m = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{\mu=1}^{m} c_{\mu i} \right) e_i$$

tiende a $\sum_{i=1}^{s} c_i e_i$. Se sigue que $\{\xi_m\}$ es una sucesión convergente y entonces que el módulo filtrado E es completo.

TEOREMA 3.5

Sea R completo con respecto a la filtración multiplicativa $\{A_n\}_{n \geq 0}$ y E un R-módulo con una filtración $\{E_n\}_{n \geq 0}$ que es fuertemente compatible con la filtración en R y que satisface $\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n = 0$. Además, sea G(E) un G(R)-módulo Noetheriano. Entonces

i) E es completo con respecto a su filtración

ii) E es un R-módulo Noetheriano

iii) Todo R-submódulo de E es cerrado en E.

PRUEBA:

G(E) es un G(R)-módulo finitamente generado. Por consiguiente, puede ser generado por un número finito de elementos homogéneos. El Teorema 3.4 muestra ahora que E es completo.

Sea K un submódulo de E y pongamos $K_n = K \cap E_n$. Esto produce una filtración $\{K_n\}_{n\geqslant 0}$ en K que es fuertemente compatible con la filtración en R. Ahora

$$(K_0+E_1)/E_1 \oplus (K_1+E_2)/E_2 \oplus (K_2+E_3)/E_3 \oplus \ldots \qquad (3.1.10)$$

es un G(R)-submódulo homogéneo de G(E). Además, $K_n \cap E_{n+1} = K_{n+1}$. Consecuentemente, el mapeo inclusión $K_n \longrightarrow (K_n+E_{n+1})$ induce un isomorfismo

$$K_n/K_{n+1} \approx (K_n+E_{n+1})/E_{n+1}$$

de R-módulos para cada $n\geqslant 0$. Usando estos mapeos derivamos un isomorfismo entre

$$G(K) = (K_0/K_1) \oplus (K_1/K_2) \oplus \ldots \oplus (K_n/K_{n+1}) \oplus \ldots$$

considerado como un R-módulo y el R-módulo en (3.1.10). En verdad, un examen del mapeo muestra que este es un isomorfismo que preserva grado de G(R)-módulos graduados. En consecuencia, podemos concluir que G(K) es generado, como un G(R)-módulo, por un número finito de elementos homogéneos y, ya que $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n = 0$, podemos aplicar el Teorema 3.4. Esto muestra, entre otras cosas, que K es un R-módulo finitamente generado y que es completo con respecto a la filtración

$$\{K \cap E_n\}_{n\geqslant 0}.$$

Nos resta mostrar que K es cerrado en E. Sea ξ que pertenece a la clausura de K en E. Entonces, $\xi = \lim \xi_m$, donde $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ es una sucesión de elementos de K y el límite es tomado con respecto a la filtración en E. Además, $\{\xi_m\}$ es una sucesión de Cauchy relativa a la filtración en E y por tanto tambien relativa a la filtración en K. Pero K es completo con respecto a su filtración. Así, existe $\xi' \in K$ tal que $\{\xi_m\}$ converge a ξ', con respecto a la filtración en K. Sin embargo, esto implica que $\{\xi_m\}$ converge a ξ', con respecto a la filtración en E. Así, $\xi' = \xi$ porque E es un espacio de Hausdorff. Se sigue que $\xi \in K$ y la prueba está completa.

Estos resultados ahora serán aplicados a la teoría de completaciones. Sea $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ una filtración multiplicativa en un anillo R y $\hat{R}$ la completación de R. Entonces, $\hat{R}$ posee una filtración canónica por virtud de ser una completación. Esta filtración será denotada por $\{\hat{A}_n\}_{n\geqslant 0}$. Ahora, para m, n $\geqslant 0$, $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$ y así, con la notación usual

$$\psi_R(A_m)\psi_R(A_n) \subseteq \psi_R(A_{m+n}) \subseteq \hat{A}_{m+n}.$$

Pero las clausuras de $\psi_R(A_m)$ y $\psi_R(A_n)$ son $\hat{A}_m$ y $\hat{A}_n$, respectivamente, y $\hat{A}_{m+n}$ es cerrado en $\hat{R}$. Se sigue que $\hat{A}_m \hat{A}_n \subseteq \hat{A}_{m+n}$. Además,

$\hat{A}_0$, ya que es la clausura de $\psi_R(A_0) = \psi_R(R)$, coincide con $\hat{R}$. Así, la filtración canónica en $\hat{R}$ es tambien una filtración multiplicativa.

El homomorfismo de anillos ψ_R: $R \longrightarrow \hat{R}$ induce un homomorfismo $R \longrightarrow \hat{R}/\hat{A}_{n+1}$. En verdad, el hecho que ψ_R da origen a un isomorfismo $R/A_{n+1} \approx \hat{R}/\hat{A}_{n+1}$ muestra que R es mapeado hacia $\hat{R}/\hat{A}_{n+1}$ y que su núcleo es A_{n+1}. Ahora la imagen inversa de $\hat{A}_n/\hat{A}_{n+1}$ es $\psi_R^{-1}(\hat{A}_n) = A_n$ (ver Teorema 1.31). Consecuentemente, para cada $n \geqslant 0$, ψ_R induce un isomorfismo

$$A_n/A_{n+1} \approx \hat{A}_n/\hat{A}_{n+1}$$

de grupos abelianos. Usemos estos isomorfismos para establecer un mapeo uno-a-uno de

$$G(R) = (A_0/A_1) \oplus (A_1/A_2) \oplus \ldots \oplus (A_n/A_{n+1}) \oplus \ldots$$

en

$$G(\hat{R}) = (\hat{A}_0/\hat{A}_1) \oplus (\hat{A}_1/\hat{A}_2) \oplus \ldots \oplus (\hat{A}_n/\hat{A}_{n+1}) \oplus \ldots$$

Entonces, se encuentra que este mapeo es un isomorfismo preservante de grado del anillo graduado G(R) en el anillo graduado $G(\hat{R})$. Así, G(R) y $G(\hat{R})$ pueden ser identificados (como anillos graduados) en una manera natural.

Ahora sea E un R-módulo y $\{E_n\}_{n\geqslant 0}$ una filtración en E que es fuertemente compatible con la filtración multiplicativa en R. Ya que $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$, se sigue, del Corolario 2.9, que

$$\psi_R(A_m)\, \psi_E(E_n) \subseteq \hat{E}_{m+n} \;,$$

donde $\psi_E : E \longrightarrow \hat{E}$ es el homomorfismo canónico de E en su completación. Pero, $\psi_R(A_m)$ tiene clausura $\hat{A}_m$ en $\hat{R}$, $\psi_E(E_n)$ tiene clausura $\hat{E}_n$ en $\hat{E}$, y la filtración en $\hat{E}$ es compatible con la de $\hat{R}$. De esto concluimos que $\hat{A}_m \hat{E}_n \subseteq \hat{E}_{m+n}$. Además, $\hat{E}_0$, ya que es la clausura de $\psi_E(E_0) = \psi_E(E)$ en $\hat{E}$, coincide con $\hat{E}$. Así, cuando la filtración en E es fuertemente compatible con la de R, la filtración canónica en $\hat{E}$ es fuertemente compatible con la filtración canónica en $\hat{R}$.

Ya ha sido observado que ψ_R da origen a isomorfismos de cocientes $A_n/A_{n+1} \approx \hat{A}_n/\hat{A}_{n+1}$. En una manera similar, usando ψ_E en lugar de ψ_R, obtenemos isomorfismos $E_n/E_{n+1} \approx \hat{E}_n/\hat{E}_{n+1}$ de R-módulos. Esto puede ser usado, de una manera obvia, para producir un isomorfismo entre

$$G(E) = (E_0/E_1) \oplus (E_1/E_2) \oplus \dots \oplus (E_n/E_{n+1}) \oplus \dots$$

y

$$G(\hat{E}) = (\hat{E}_0/\hat{E}_1) \oplus (\hat{E}_1/\hat{E}_2) \oplus \dots \oplus (\hat{E}_n/\hat{E}_{n+1}) \oplus \dots$$

donde, en primera instancia, $G(E)$ y $G(\hat{E})$ son considerados como R-módulos. Ahora, $G(E)$ es un $G(R)$-módulo y $G(\hat{E})$ es un $G(\hat{R})$-módulo, y tenemos un isomorfismo natural de anillos de $G(R)$ en $G(\hat{R})$. Así, es fácilmente verificado que el producto de un elemento de $G(R)$ con un elemento de $G(E)$ es mapeado en el producto del elemento correspondiente de $G(\hat{R})$ con el elemento correspondiente de $G(\hat{E})$. Por tanto, el isomorfismo $G(E) \approx G(\hat{E})$ "iguala" los $G(R)$-submódulos de $G(E)$ con los $G(\hat{R})$-submódulos de $G(\hat{E})$. En particular, $G(\hat{E})$ es un $G(\hat{R})$-módulo Noetheriano cuando, y solamente cuando, $G(E)$ es un $G(R)$-módulo Noetheriano. Combinando esta observación con el Teorema 3.5 obtenemos

TEOREMA 3.6

Sea R un anillo con una filtración multiplicativa y E un R-módulo filtrado cuya filtración es fuertemente compatible con la filtración en R. Además, sea $G(E)$ un $G(R)$-módulo Noetheriano. Entonces

i) $\hat{E}$ es un $\hat{R}$-módulo Noetheriano

ii) Todo $\hat{R}$-submódulo de $\hat{E}$ es cerrado en $\hat{E}$.

COROLARIO 3.7

Asumamos las condiciones del Teorema 3.6 y supongamos, en adición, que K es un R-submódulo de E. Entonces, con la notación usual, la clausura de $\psi_E(K)$ en $\hat{E}$ es el $\hat{R}$-submódulo de $\hat{E}$ generado por $\psi_E(K)$.

PRUEBA:

Denotemos la clausura de $\psi_E(K)$ en $\hat{E}$ por $\overline{\psi_E(K)}$ y sea el $\hat{R}$-submódulo de $\hat{E}$ generado por $\psi_E(K)$ designado por $\hat{R}\psi_E(K)$. Si

$$r_1, r_2, \ldots, r_p \in R$$

y $$k_1, k_2, \ldots, k_p \in K,$$

entonces, por el Corolario 2.9,

$$\psi_R(r_1)\psi_E(k_1) + \psi_R(r_2)\psi_E(k_2) + \ldots + \psi_R(r_p)\psi_E(k_p)$$

pertenece a $\psi_E(K)$. Pero, $\psi_R(R)$ es denso en $\hat{R}$. Entonces, por continuidad, $\hat{R}\,\psi_E(K) \subseteq \overline{\psi_E(K)}$. O de otra manera, $\hat{R}\,\psi_E(K)$ es cerrado en $\hat{E}$ porque es un $\hat{R}$-submódulo. Además tenemos $\psi_E(K) \subseteq \hat{R}\,\psi_E(K)$. Así, $\overline{\psi_E(K)} \subseteq \hat{R}\,\psi_E(K)$.

El caso especial en que E = R es bastante importante para merecer una mención aparte.

COROLARIO 3.8

Sea R un anillo con una filtración multiplicativa y supongamos que el anillo graduado asociado G(R) satisface la condición maximal para ideales izquierdos. Entonces

i) $\hat{R}$ satisface la condición maximal para ideales izquierdos

ii) Todo ideal izquierdo de $\hat{R}$ es cerrado en $\hat{R}$.

Además, si B es un R-ideal izquierdo y $\psi: R \longrightarrow \hat{R}$ es el homomorfismo canónico de anillos, entonces

$$\overline{\psi(B)} = \hat{R}\,\psi(B)$$

donde $\hat{R}\,\psi(B)$ es un $\hat{R}$-ideal izquierdo. En particular, si $\{\hat{A}_n\}_{n\geqslant 0}$ es la filtración canónica en $\hat{R}$, entonces

$$\hat{A}_n = \hat{R}\,\psi(A_n)$$

para todo $n \geqslant 0$.

DEFINICION 3.9

Sea I un ideal (izquierdo y derecho) de R. Llamaremos "filtración I-ádica en R", a la filtración multiplicativa

$$\{I^n\}_{n\geq 0} \ .$$

DEFINICION 3.10

Sean E un R-módulo e I un ideal (izquierdo y derecho) de R. Llamaremos "filtración I-ádica en E", a la filtración

$$\{I^n E\}_{n\geq 0} \ .$$

Nótese que la filtración I-ádica en E es fuertemente compatible con la filtración I-ádica en R.

TEOREMA 3.11

Sea I un ideal (izquierdo y derecho) de R y $\hat{R}$ la completación de R con respecto a su filtración I-ádica. Si ahora $\Psi: R \longrightarrow \hat{R}$ es el homomorfismo canónico de anillos, entonces la clausura de $\Psi(I)$ en $\hat{R}$ está contenida en el radical de Jacobson de $\hat{R}$. Además hay una correspondencia uno-a-uno entre los ideales maximales izquierdos L de R que contienen a I y los ideales maximales izquierdos M de $\hat{R}$. Esta es tal que si L se corresponde con M, entonces

$$L = \Psi^{-1}(M) \quad y \quad M = \overline{\Psi(L)} \ .$$

OBSERVACION: Naturalmente, en este teorema, la expresión 'ideal maximal izquierdo' puede ser reemplazada por 'ideal maximal derecho' dondequiera que ocurra y esto no afectará la veracidad de las afirmaciones.

PRUEBA:

Sea $\overline{\psi(I)}$ que denota la clausura de $\psi(I)$ en $\hat{R}$ y $\{\hat{A}_n\}_{n\geqslant 0}$ la filtración canónica en $\hat{R}$. Entonces, $\overline{\psi(I)} = \hat{A}_1$. Ahora si $y \in \psi(I)$, entonces $y^n \in \psi(I^n) \subseteq \hat{A}_n$ y por tanto la sucesión y^n converge a cero. Por consiguiente, se sigue, del Lema 2.4, que si $x \in \overline{\psi(I)} = \hat{A}_1$, entonces $\{x^n\}$ converge a cero. Así, por la Proposición 2.5, $\hat{A}_1$ está contenido en el radical de Jacobson de $\hat{R}$.

Recordamos que podemos considerar a R con filtración $\{I^n\}_{n\geqslant 0}$ y $\hat{R}$ con filtración $\{\hat{A}_n\}_{n\geqslant 0}$ como R-módulos izquierdos filtrados. En este entendido, $\hat{R}$ será la completación de R, en el sentido de la teoría de módulos filtrados. Ahora sea L un ideal maximal izquierdo de R y supongamos que $I \subseteq L$. Entonces, L es abierto en R y por tanto, por Teorema 1.32, la clausura $\overline{\psi(L)}$ de $\psi(L)$ será el correspondiente R-submódulo abierto de $\hat{R}$. Sin embargo, por Corolario 2.10, los R-submódulos abiertos de $\hat{R}$ son los mismos que los $\hat{R}$-ideales izquierdos abiertos. Así, $\overline{\psi(L)}$ es un ideal izquierdo de $\hat{R}$. Por otra parte, por Teorema 1.32, R/L y $\hat{R}/\overline{\psi(L)}$ son R-módulos isomorfos y así no hay un R-submódulo de $\hat{R}$ estrictamente entre $\overline{\psi(L)}$ y $\hat{R}$. Se sigue que no hay un $\hat{R}$-ideal estrictamente entre $\overline{\psi(L)}$ y $\hat{R}$. Entonces, $\overline{\psi(L)}$ es un ideal izquierdo maximal de $\hat{R}$. Finalmente, supongamos que M es un ideal maximal izquierdo de $\hat{R}$ y pongamos

$$L' = \psi^{-1}(M)$$

Entonces, $\overline{\psi(I)} = \hat{A}_1 \subseteq M$

porque $\hat{A}_1$ está contenido en el radical de Jacobson de $\hat{R}$. Se sigue que M es un R-submódulo abierto de $\hat{R}$, L' es el correspondiente ideal izquierdo abierto de R, y $\overline{\psi(L')} = M$. Además, no hay un R-submódulo de $\hat{R}$ que esté estrictamente entre $\hat{R}$ y M, pues un submódulo tal sería abierto y entonces un $\hat{R}$-ideal izquierdo. Así, $\hat{R}/M$ es un R-módulo simple. Evidentemente $I \subseteq L'$ y, ya que (Teorema 1.32) R/L' y $\hat{R}/M$ son R-módulos isomorfos, L' debe ser un ideal maximal izquierdo de R. Esto completa la prueba.

Por otra parte, sea I un ideal (izquierdo y derecho) de R. Ha sido notado que, hasta ahora, hemos dicho muy poco sobre la naturaleza de la filtración canónica en la completación I-ádica de R. Esto será investigado ahora bajo la suposición que I puede ser generado por un conjunto finito $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ de elementos centrales. Esto, por supuesto, impone una severa restricción en el caso de anillos generales. Para anillos conmutativos la limitación causada por esta suposición es menos notable.
El anillo graduado asociado con R por medio de la filtración I-ádica es

$$G(R) = (R/I) \oplus (I/I^2) \oplus \ldots (I^n/I^{n+1}) \oplus \ldots \qquad (3.1.11)$$

y R/I es el subanillo de G(R) formado por los elementos de grado cero. Denotemos por $\overline{\gamma}_i$ la imagen natural de γ_i en I/I^2. Entonces, $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_s$ pertenecen al centro de G(R) y son homogéneos de grado uno. Además, cada elemento de G(R) puede, en un significado obvio, ser expresado como un polinomio en $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_s$ con coeficientes en R/I. Indiquemos esto escribiendo por

$$G(R) = (R/I)[\,\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_s\,]\,. \qquad (3.1.12)$$

Supongamos ahora que k es un entero positivo. El ideal de G(R) generado por todos los productos-potencia de $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_s$ de grado k es

$$I^k/I^{k+1} \oplus I^{k+1}/I^{k+2} \oplus I^{k+2}/I^{k+3} \oplus \ldots \qquad (3.1.13)$$

Sea $\hat{R}$ la completación I-ádica de R, $\{\hat{A}_n\}_{n\geqslant 0}$ la filtración canónica en $\hat{R}$, y $\psi : R \longrightarrow \hat{R}$ el homomorfismo canónico de anillos. Ya hemos visto que existe un isomorfismo de anillos natural $G(R) \approx G(\hat{R})$. Pongamos $\psi(\gamma_i) = w_i$ $(1\leqslant i\leqslant s)$. Entonces, $w_i \in \hat{A}_1$ y, por el Lema 2.3, w_i pertenece al centro de $\hat{R}$. Debemos usar $\overline{w}_i$ para denotar la imagen natural de w_i en $\hat{A}_1/\hat{A}_2$. Con esta notación, el isomorfismo $G(R)\approx G(\hat{R})$ hace que $\overline{\gamma}_i$ corresponda a $\overline{w}_i$ e iguala el ideal (3.1.13) con

$$\hat{A}_k/\hat{A}_{k+1} \oplus \hat{A}_{k+1}/\hat{A}_{k+2} \oplus \hat{A}_{k+2}/\hat{A}_{k+3} \oplus \ldots$$

Entonces, si $v_1, v_2, \ldots, v_s$ denotan enteros no negativos que satisfacen

$$v_1 + v_2 + \dots + v_s = k,$$

entonces

$$\sum_{(v)} G(\hat{R})\bar{w}_1^{v_1}\bar{w}_2^{v_2}\dots\bar{w}_s^{v_s} = \hat{A}_k/\hat{A}_{k+1} \oplus \hat{A}_{k+1}/\hat{A}_{k+2} \oplus \dots \quad (3.1.14)$$

Pongamos $E = \hat{A}_k$ y consideremos a E como un $\hat{R}$-módulo. Obtenemos u na filtración $\{E_n\}_{n\geqslant 0}$ en E colocando $E_n = \hat{A}_k$ para $0 \leqslant n < k$ y $E_n = \hat{A}_n$ para $n \geqslant k$. Esta filtración es fuertemente compatible con $\{\hat{A}_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n = 0$. Además

$$G(E) = 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus \hat{A}_k/\hat{A}_{k+1} \oplus \hat{A}_{k+1}/\hat{A}_{k+2} \oplus \dots$$

Ahora si $v_1 + v_2 + \dots + v_s = k$, entonces

$$w_1^{v_1}w_2^{v_2}\dots w_s^{v_s} = \psi(\gamma_1^{v_1}\gamma_2^{v_2}\dots\gamma_s^{v_s}) \in \hat{A}_k = E_k.$$

Además, la imagen natural de $w_1^{v_1}w_2^{v_2}\dots w_s^{v_s}$ en $\hat{A}_k/\hat{A}_{k+1}$ es $\bar{w}_1^{v_1}\bar{w}_2^{v_2}\dots\bar{w}_s^{v_s}$ y, por (3.1.14), tales elementos generan a G(E) co mo un $G(\hat{R})$-módulo. Así, por Teorema 3.4,

$$\hat{A}_k = E = \sum_{(v)} \hat{R}w_1^{v_1}w_2^{v_2}\dots w_s^{v_s} .$$

Ahora $I\hat{R} = w_1\hat{R} + w_2\hat{R} + \dots + w_s\hat{R}$. La relación de arriba puede ser ahora reescrita como

$$\hat{A}_k = (I\hat{R})^k.$$

Hemos establecido por tanto el

TEOREMA 3.12

Sea $\hat{R}$ una completación I-ádica de R, donde I es un ideal central finitamente generado de R. Entonces, $I\hat{R}$ es un ideal central finitamente generado de $\hat{R}$. Además, si $\{\hat{A}_n\}_{n\geqslant 0}$ es la filtración canónica que $\hat{R}$ posee por virtud de ser una completación, entonces

$$\hat{A}_n = (I\hat{R})^n$$

para todo $n\geqslant 0$.

TEOREMA 3.13

Si el R-módulo E satisface la condición maximal para submódulos, entonces la misma condición es satisfecha por $E[X_1, X_2, \ldots ,X_n]$ cuando éste es considerado como un módulo sobre el anillo $R[X_1, X_2, \ldots , X_n]$.

PROPOSICION 3.14

Sea I un ideal central finitamente generado de R y E un R-módulo. Si ahora E/IE es un R-módulo Noetheriano, entonces G(E) es un G(R)-módulo Noetheriano.

OBSERVACION: En esta proposición es entendido que G(R) y G(E) son derivados de las filtraciones I-ádicas de R y E, respectivamente.

PRUEBA:

Sea I generado por los elementos centrales $\gamma_1, \gamma_2, \ldots , \gamma_s$ y $X_1, X_2, \ldots , X_s$ indeterminadas (En lo que sigue emplearemos la misma notación que fué usada en la discusión dirigida al Teorema

3.12). Por (3.1.12),

$$G(R) = (R/I)[\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots , \overline{\gamma}_s].$$

Entonces, existe un homomorfismo de anillos del anillo de polinomios $(R/I)[X_1, X_2, \ldots , X_s]$ en $G(R)$ en que los elementos de R/I son izquierdos fijos y X_i es mapeado en $\overline{\gamma}_i$. Usando este homomorfismo, podemos considerar $G(E)$ como un módulo con respecto a $(R/I)[X_1, X_2, \ldots , X_s]$ y es entonces suficiente para establecer que

$$G(E) = (E/IE) \oplus (IE/I^2E) \oplus \ldots \oplus (I^nE/I^{n+1}E) \oplus \ldots$$

es Noetheriano como un $(R/I)[X_1, X_2, \ldots , X_s]$-módulo. Ahora E/IE puede ser considerado como un R/I-módulo y como tal es Noetheriano. Se sigue, por el Teorema 3.13, que $(E/I)[X_1, X_2, \ldots , X_s]$ es un $(R/I)[X_1, X_2, \ldots , X_s]$-módulo Noetheriano. Por tanto, es suficiente para mostrar que existe un mapeo

$$(E/IE)[X_1, X_2, \ldots , X_s] \longrightarrow G(E)$$

que es un homomorfismo sobreyectivo de $R[X_1, X_2, \ldots , X_s]$-módulos. Pero si

$$\sum \eta_{v_1 v_2 \ldots v_s} X_1^{v_1} X_2^{v_2} \ldots X_s^{v_s} ,$$

donde $\eta_{v_1 v_2 \ldots v_s}$ pertenece a E/IE, es un elemento típico de

$$(E/IE)[X_1, X_2, \ldots , X_s] ,$$

entonces un mapeo con las propiedades que se requieren es obtenido, transportando este elemento en

$$\sum \overline{\gamma}_1^{v_1}\overline{\gamma}_2^{v_2}\cdots\overline{\gamma}_s^{v_s}\,\eta_{v_1 v_2 \ldots v_s}.$$

La prueba está ahora completa.

BIBLIOGRAFIA

- **Lessons on rings, modules and multiplicities**
  D. G. Northcott
  Cambridge University Press 1968

- **Introduction to Commutative Algebra**
  M. F. Atiyah, I. J. Macdonald
  Editorial Addison-Wesley 1969

- **El Grupo Fundamental del Círculo**
  William Castro Guzmán
  Trabajo de Graduación
  Departamento de Matemáticas
  Facultad de Ingeniería y Arquitectura
  Universidad de El Salvador
  Julio 1986