

T
511.7
V652m
1977
F.I.yArq.

Fig. 1

091382

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

SEMINARIO DE GRADUACION
METODOS ITERATIVOS PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES

Diciembre 1977

San Salvador, El Salvador, Centro América



UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR: HONORABLE CONSEJO DE ADMINISTRACION
PROVISIONAL DE LA UNIVERSIDAD DE EL
SALVADOR

SECRETARIA GENERAL: DR. EDMUNDO BARRERA RODRIGUEZ

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO: ARQ. MANUEL ENRIQUE ALFARO

SECRETARIO: ING. LUIS A. CARBAJAL VALDEZ

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE DEL DEPARTAMENTO: ING. GABRIEL MELENDEZ MAYORGA

UES BIBLIOTECA CENTRAL

INVENTARIO: 10117751

TRABAJO DESARROLLADO POR:

GLORIA ESPERANZA VIDES RAMIREZ

ELADIO BERRIO SOLCHAGA

PREVIO A LA OPCION DE SU TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

SEMINARIO DE GRADUACION

ASESOR:

LIC. MARIO MORALES BURGOS

INTRODUCCION

Al desarrollar este trabajo nos hemos propuesto la siguiente idea: tratar de divulgar en nuestro medio uno de los temas más sugestivos e importantes del Análisis Numérico, cual es el tema de la Resolución de Ecuaciones. Nuestro pensamiento ha sido el de clarificar y ayudar en la medida de nuestras posibilidades al estudio de este tema, es decir a la resolución de todo tipo de ecuaciones o sistemas de ecuaciones, ya sean lineales o en especial de las no lineales. En un Capítulo especial nos ocuparemos de las ecuaciones polinómicas.

Para ello hemos buscado ayuda tanto de las explicaciones gráficas, como sobre todo de la Programación. Nuestro interés ha sido el de llegar con una solución numérica a la ejemplificación del algoritmo deseado. Con ello hemos obtenido un método fácil, susceptible de posterior empleo por medio de la computadora y que pueda servir como corroboración de los resultados obtenidos de una manera teórica.

El trabajo lo hemos dividido en cuatro Capítulos; los dos primeros referentes a las funciones reales, tanto lineales como no lineales. En el primero planteamos los algoritmos principales y en el segundo vemos la manera de acelerar la convergencia de esos métodos de solución numérica. Nuestro tercer Capítulo tiene un estudio de la solución de los sistemas de ecuaciones, siempre referentes a los no lineales y posible de utilizar por los lineales. Y en el Capítulo cuarto con un estudio preliminar y algo general de las ecuaciones de diferencia, nos ubicamos en el método de Bernoulli que nos permite la solución de todo tipo de polinomios.

Dentro de cada Capítulo se ha hecho un detenimiento especial y de tallado del funcionamiento de cada algoritmo, de sus condiciones de convergencia y sobre todo hemos puesto énfasis en la peculiar rapidez con que nos llevan a la solución deseada.

El orden en que están presentados los algoritmos es el orden creciente de mayor rapidez de convergencia.

No podemos también en cada caso de tratar de buscar una convergencia sin determinar una cota para el error que dé validez a la respuesta en contrada.

Caso especial han sido las raíces de multiplicidad variada. El algoritmo toma entonces una forma especial si se quiere que mantenga su propia rapidez de convergencia.

Antes de acabar esta introducción, señalaremos la especial forma en que se desarrollan los temas de Análisis Numérico. Lejos de creer que olvidan las normas de la rigidez matemática, han de verse como una feliz aplicación de ésta a los varios problemas que nos presenta la naturaleza y el quehacer humano.

INDICE

Página

I.	METODOS ITERATIVOS DE CONVERGENCIA LINEAL	
1.1	El Método de la Bisección	1
1.2	El Método de la Regula Falsi	7
1.3	El Método de la Secante	16
1.4	El Método de Whittaker	24
1.5	Iteración en el Punto Fijo	31
II.	ACELERACION DE LA CONVERGENCIA	
2.1	El Método de Aitken	41
2.2	En busca de una mayor rapidez de convergencia ...	53
2.3	El Método de Steffensen	55
2.4	El Método de Newton-Raphson	60
III.	ITERACION PARA LA SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES	
3.1	Estudio del Vector Fijo	77
3.2	Convergencia Cuadrática: Newton-Raphson	81
3.3	Iteración de Steffensen	90
IV.	EL METODO DE BERNOULLI	
4.1	Introducción	104
4.2	Ecuaciones de Diferencia	105
4.3	El Método de Bernoulli	110

CAPITULO I

METODOS ITERATIVOS DE CONVERGENCIA LINEAL

1.1 METODO DE BISECCION

Posee las siguientes exigencias:

- Que la función $f(x)$ sea continua en $[a_0, b_0]$, sabiendo de antemano que la raíz x está contenida dentro del intervalo a estudiar, es decir que $a_0 \leq x \leq b_0$.
- Que exista la raíz: o dicho de otra forma que $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

1.1.1 Descripción del Método

Consideremos el punto medio del intervalo, es decir $x_1 = \frac{a+b}{2}$ y calculemos $f(x_1)$. Pueden ocurrir tres condiciones:

- 1) Que $f(x_1) = 0 + \epsilon$, entonces se ha obtenido la solución.
- 2) Que $f(x_1)$ sea del mismo signo que $f(a)$ y por la hipótesis de un sola raíz se tendría que el valor estaría $x_1 \leq x \leq b_0$, o sea que la raíz se encuentra en el intervalo de $[x_1, b_0]$.
- 3) Que $f(x_1)$ sea de signo contrario a $f(a)$, por el mismo razonamiento anterior se tendrá que la raíz está en $a \leq x \leq x_1$.

En los casos anteriores 2) y 3) se volverá a iniciar de nuevo el cálculo pero con la ventaja de que el intervalo se ha reducido a la mitad.

1.1.2 Algoritmo del Método de Bisección

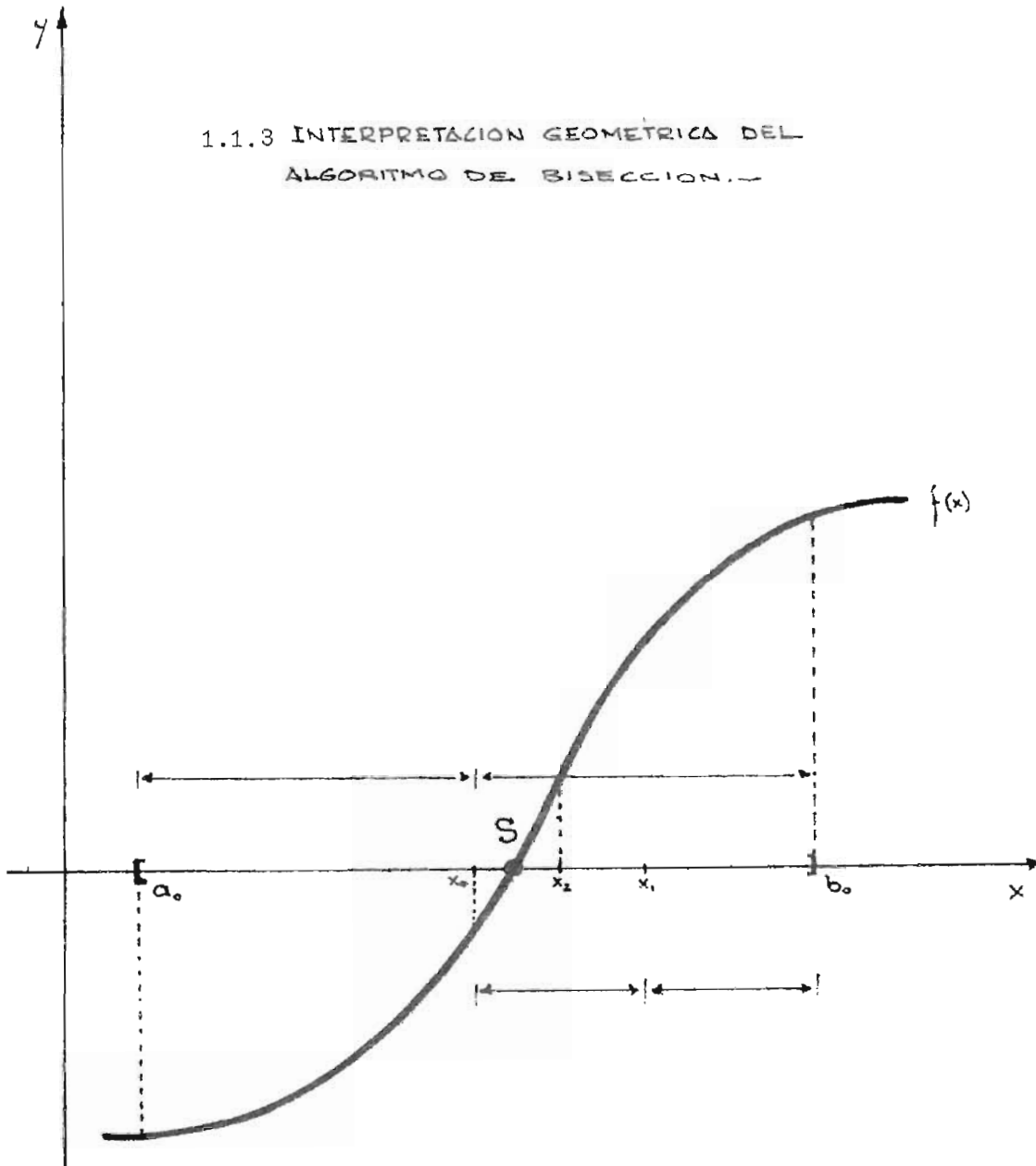
Inicialización: $a_0 = a$, $b_0 = b$. Luego hacer el cálculo de $f(a_0)$.

Calcular $x_i = (a_i + b_i)/2$. Calcular $f(x_i)$

Probar si $f(x_i) \leq \epsilon_1$ y si $(b_i - a_i)/x_i \leq \epsilon_2$

Modificación: Sustituir a_i o b_i por x_i dependiendo del signo de $f(x_i) \cdot f(a_i)$

1.1.3 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL
ALGORITMO DE BISECCION.-



1.1.4 Convergencia del Método de Bisección

En cada etapa del algoritmo, la longitud del intervalo del cual se sabe que contiene una raíz aislada, se reduce a la mitad del intervalo; -- siempre en este método se puede localizar una raíz con cualquier exactitud deseada.

Para analizar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ generada por el algoritmo definamos como S el punto de convergencia y como $e_n = x_n - S$ el valor - del error en la n -ésima iteración.

Los errores en las sucesivas iteraciones irán definidos y acotados de la - siguiente forma:

$$\begin{aligned} e_0 &= x_0 - S < \frac{|a_0 - b_0|}{2} \\ e_1 &= x_1 - S < \frac{|a_1 - b_1|}{2} = \frac{|a_0 - b_0|}{2^2} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por inducción se prueba fácilmente que e_n está acotado por

$\frac{|a_0 - b_0|}{2^{n+1}}$. Es decir que:

$$e_n < \frac{|a_0 - b_0|}{2^{n+1}} .$$

Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - S| = 0$.

1.1.5 Rapidez de Convergencia

Al observar la convergencia en cada iteración hemos podido notar

que la longitud del intervalo se reduce cada vez a la mitad, o sea que:

$$e_{n+1} \approx e_n/2$$

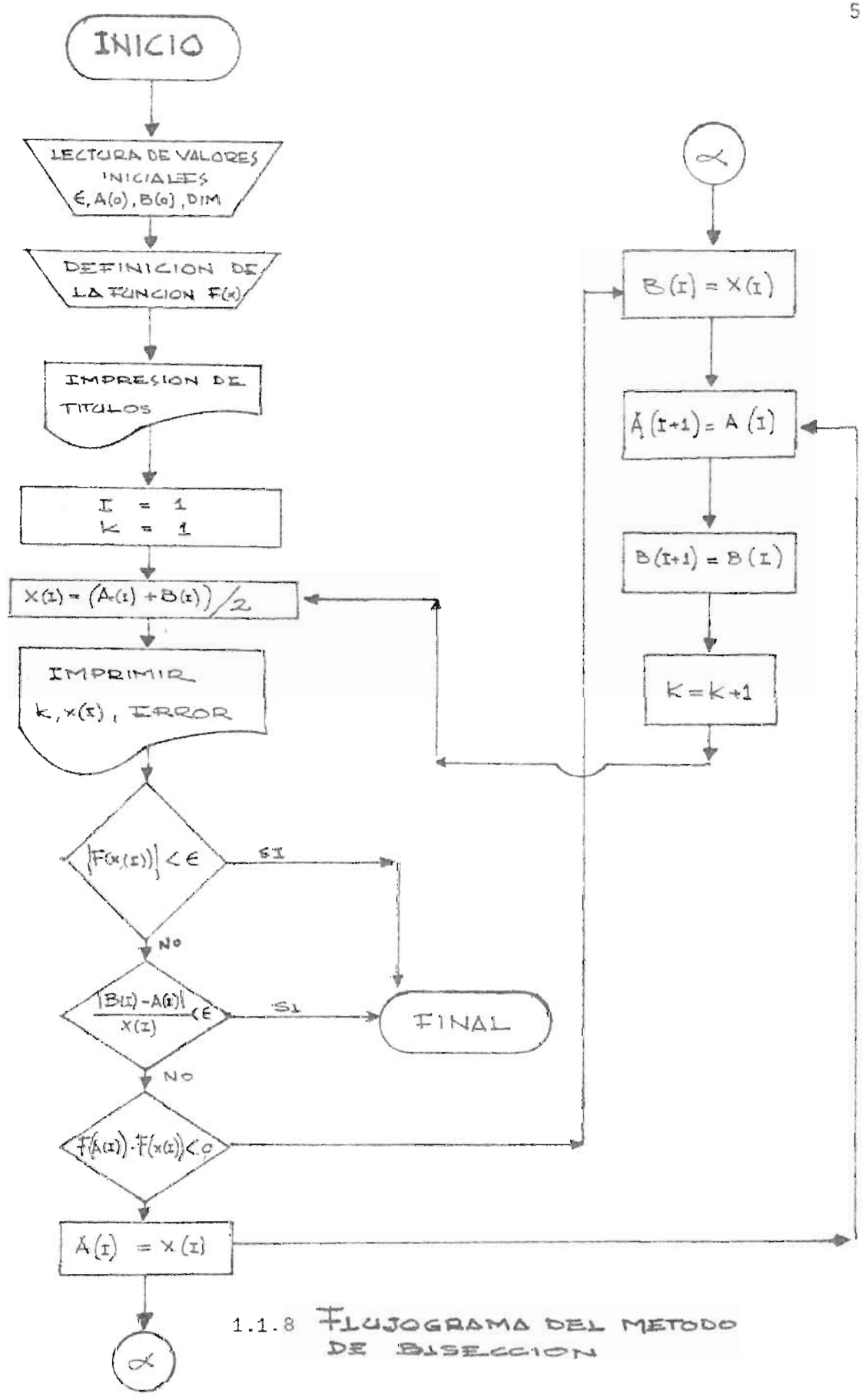
de donde afirmamos que tiene una convergencia lineal.

1.1.6 Ventajas de este Método

- 1) Es un método que siempre converge y sin muchas exigencias de hipótesis.
- 2) El error nunca da aproximaciones absurdas por eso lo llaman estable con respecto a una posición limitada.

1.1.7 Desventajas de este Método

- 1) No es posible encontrar raíces de multiplicidad par, excepto tal vez acidentalmente.
- 2) Su convergencia es muy lenta, para encontrar raíces simples, ya que -- existen otros métodos con mayor rapidez de convergencia.
- 3) Se puede obtener la raíz más rápidamente considerando a $f(x)$ en el promedio ponderado (regula falsi) en vez del punto medio.



1.1.8 FLUJOGRAMA DEL METODO DE BISECCION

```

10 REM PROGRAMA DEL METODO DE BISECCION
20 REM ENCONTRAR LA RAIZ DE LA ECUACION F(X)=X-0.2*SEN(X)-0.5
30 DIM A[50],B[50],X[50]
40 A[1]=0.5
50 B[1]=1
60 DEF FNA(X)=X-0.2*SIN(X)-0.5
70 PRINT " N", "      X(I)      ", "      ERROR      "
80 K=1
90 I=1
100 X[I]=(A[I]+B[I])/2
110 PRINT K,X[I],TAB(30),ABS((A[I]-B[I])/2^(I+1))
120 IF ABS(FNA(X[I]))<1E-09 THEN 220
130 IF ABS((B[I]-A[I])/X[I])<1E-09 THEN 220
140 IF (FNA(A[I])*FNA(X[I]))<0 THEN 170
150 A[I]=X[I]
160 GOTO 180
170 B[I]=X[I]
180 A[I+1]=A[I]
190 B[I+1]=B[I]
200 K=K+1
210 GOTO 180
220 STOP
230 END

```

N	X(I)	ERROR
1	0.75	0.125
2	0.625	0.0625
3	0.5625	0.03125
4	0.59375	0.015625
5	0.609375	7.81250E-03
6	0.6171875	3.90625E-03
7	0.61328125	1.95313E-03
8	0.615234375	9.76563E-04
9	0.616218938	4.88281E-04
10	0.615722656	2.44141E-04
11	0.615478516	1.22070E-04
12	0.615356445	6.10352E-05
13	0.615417480	3.05176E-05
14	0.615447998	1.52588E-05
15	0.615463257	7.62940E-06
16	0.615470986	3.81470E-06
17	0.615467072	1.90735E-06
18	0.615468979	9.53675E-07
19	0.615468025	4.76838E-07
20	0.615468502	2.38420E-07
21	0.615468264	1.19210E-07
22	0.615468144	5.96050E-08
23	0.615468204	2.98025E-08
24	0.615468174	1.49000E-08
25	0.615468159	7.45000E-09
26	0.615468167	3.72500E-09
27	0.615468170	1.86250E-09

PROGRAMA 1

Las variables utilizadas en el primer programa son las siguientes:

- A(1) = Extremo inferior del intervalo.
- B(1) = Extremo superior del intervalo.
- A(50) = Dimensión de la sucesión de extremos inferiores.
- B(50) = Dimensión de la sucesión de extremos superiores.
- X(50) = Valor correspondiente.
- I, K = Contadores.
- FNA(X) = Definición de la función.

1.2 METODO DE LA REGULA FALSI1.2.1 Condiciones de este Método

- Hipótesis:
- a) $f(x)$ continua en $[a_0, b_0]$
 - b) $[a_0, b_0]$ tenga una raíz aislada
 - c) $f(a_0).f(b_0) < 0$

1.2.2 Descripción del Método

Fijamos el valor x^* (el cual representa el valor de la función hacia la cual van dirigidas todas las secantes en las siguientes iteraciones).

Pueden darse los siguientes casos: (Ver figura 1.2.4)

- i) Si $f''(x) < 0$ y $f(b_0) < 0$ entonces $x^* = b_0$ (A)
 Si $f''(x) < 0$ y $f(b_0) > 0$ entonces $x^* = a_0$ (C)
 ii) Si $f''(x) > 0$ y $f(a_0) > 0$ entonces $x^* = a_0$ (B)
 Si $f''(x) > 0$ y $f(b_0) > 0$ entonces $x^* = b_0$ (D)

- Cálculo de

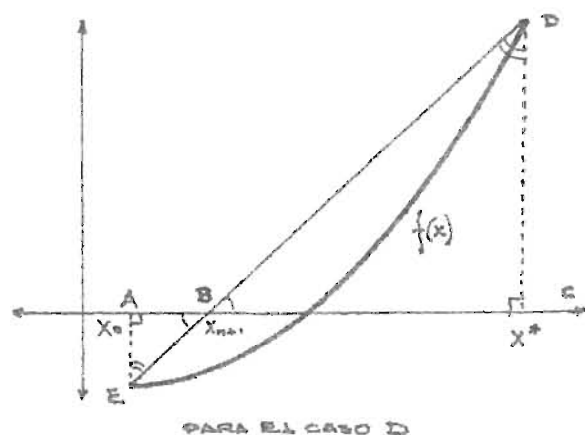
$$x_{n+1} = \frac{x^* f(x_n) - x_n f(x^*)}{f(x_n) - f(x^*)}$$

- Evaluamos $f(x_{n+1})$

- Prueba: Ver si $f(x_{n+1}) = 0 \pm \epsilon$

- y luego calculamos el siguiente término de la sucesión

1.2.3 Obtención del Algoritmo de la Regula Falsi



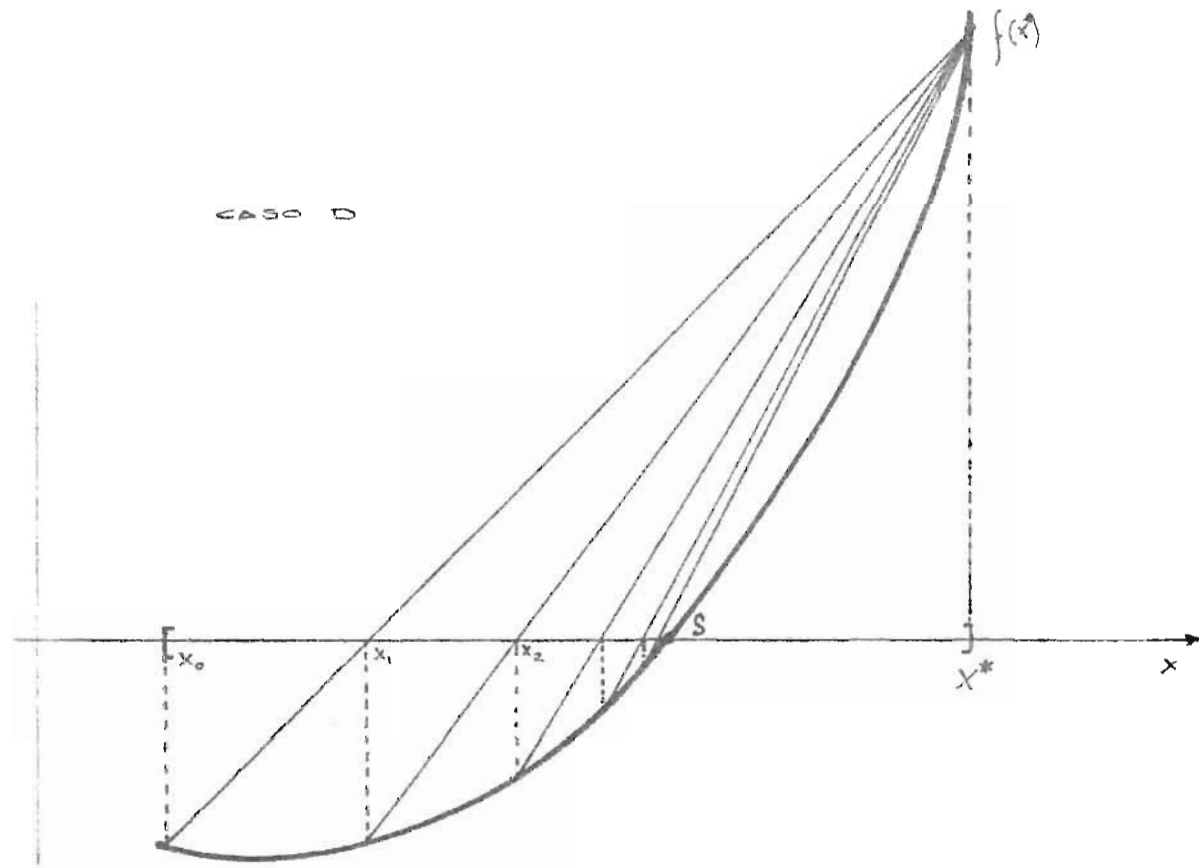
Hipótesis: $\begin{cases} A E \parallel D C \\ \hat{A} = \hat{C} = 90^\circ \\ f(x) \text{ función que corta en } D \text{ y } E \end{cases}$

Tesis: $x_{n+1} = \frac{x^* f(x_n) - x_n f(x^*)}{f(x_n) - f(x^*)}$

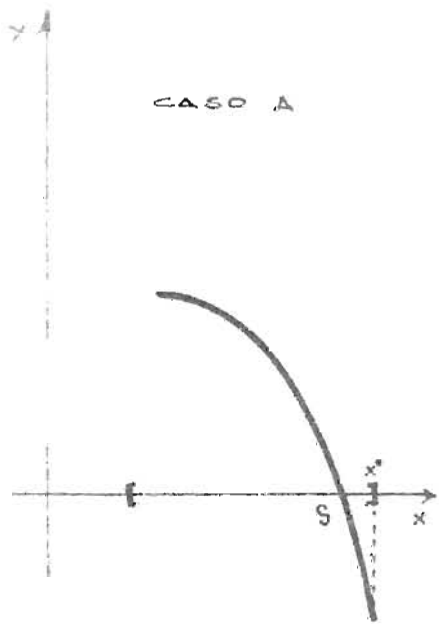
1.2.4 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL ALGORITMO DE LA REGULA FALSI

71

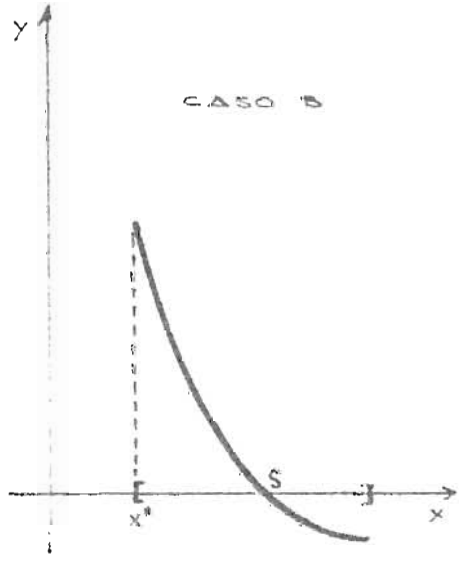
CASO D



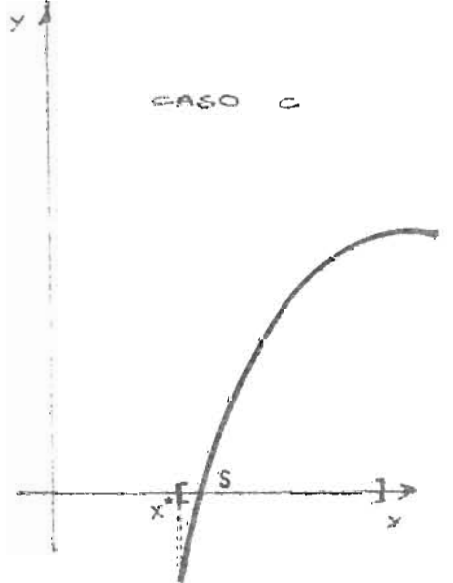
CASO A



CASO B



CASO C



Los triángulos $\triangle ABE$ y $\triangle BCD$ son semejantes por tener sus tres ángulos iguales. Por lo tanto los lados homólogos son proporcionales. De donde

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x^* - x_{n+1}} = \frac{-f(x_n)}{f(x^*)}, \quad \text{entonces}$$

$$f(x^*)x_{n+1} - f(x^*)x_n + f(x_n)x^* - f(x_n)x_{n+1} = 0$$

$$x_{n+1}(f(x^*) - f(x_n)) = f(x^*)x_n - f(x_n)x^*$$

$$y \quad x_{n+1} = \frac{x^* f(x_n) - x_n f(x^*)}{f(x_n) - f(x^*)} \quad \text{l.q.q.d.}$$

1.2.5 Algoritmo del Método Regula Falsi

Inicialización: fijación de x^* y evaluación de $f(x^*)$, $f(a_0)$ ó $f(b_0)$

Cálculo:

$$x_{n+1} = \frac{x^* f(x_n) - x_n f(x^*)}{f(x_n) - f(x^*)}$$

Evaluación de $f(x_{n+1})$

Prueba: $f(x_{n+1}) = 0 \pm E$

Modificación: Cálculo del nuevo término.

1.2.6 Rapidez de Convergencia

$$x_{n+1} = \frac{x_n^* f(x_n) - x_n f(x_n^*)}{f(x_n) - f(x_n^*)}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^* f(x_n) - x_n f(x_n^*) + x_n f(x_n) - x_n f(x_n)}{f(x_n) - f(x_n^*)}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^* [f(x_n) - f(x_n^*)] - f(x_n) [x_n - x_n^*]}{f(x_n) - f(x_n^*)}$$

$$x_{n+1} = x_n \left[\frac{f(x_n) - f(x_n^*)}{f(x_n) - f(x_n^*)} \right] - f(x_n) \left[\frac{x_n - x_n^*}{f(x_n) - f(x_n^*)} \right]$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{(x_n - x_n^*)}{f(x_n) - f(x_n^*)}$$

$$x_{n+1} - S = x_n - S - f(x_n) \frac{(x_n - S) - (x_n^* - S)}{f(x_n) - f(x_n^*)}$$

$$e_{n+1} = e_n - f(x_n) \frac{(e_n - e_n^*)}{f(x_n) - f(x_n^*)}$$

$$e_{n+1} = \frac{[e_n f(x_n) - e_n f(x_n^*)] - [(e_n - e_n^*) f(x_n)]}{f(x_n) - f(x_n^*)}$$

$$e_{n+1} = \frac{e_n f(x_n) - e_n f(x_n^*) - e_n f(x_n) + e_n^* f(x_n)}{f(x_n) - f(x_n^*)}$$

$$e_{n+1} = \frac{e_n^* f(x_n) - e_n f(x_n^*)}{f(x_n) - f(x_n^*)}$$

Aplicando el desarrollo de Taylor al Numerador

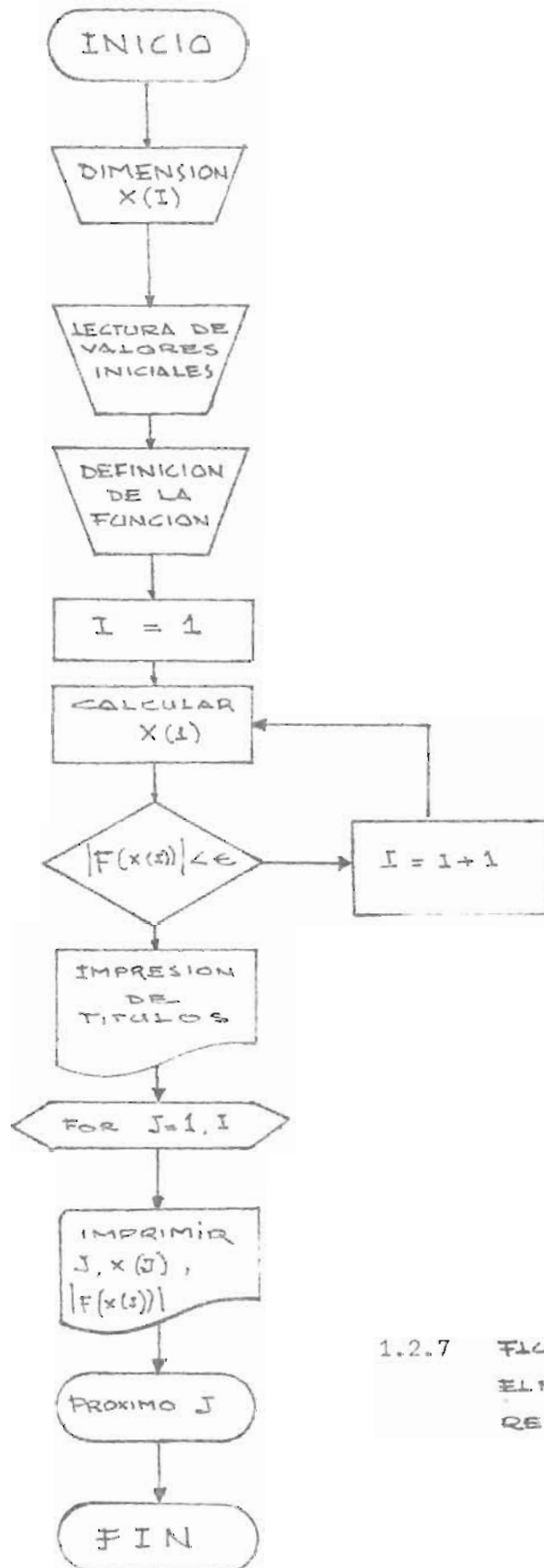
$$\begin{aligned}
 & e^* f(S + e_n) - e_n f(S + e^*) \\
 &= e^* \left[f(S) + f'(S)e_n + \frac{f''(S)e_n^2}{2} + \dots \right] + \\
 & \quad - e_n \left[f(S) + f'(S)e^* + \frac{f''(S)(e^*)^2}{2} + \dots \right] \\
 &= e^* e_n f'(S) + \frac{e^* e_n^2 f''(S)}{2} + \dots - e^* e_n f'(S) + \\
 & \quad - \frac{e_n (e^*)^2 f''(S)}{2} \dots \\
 &= \frac{f''(S)}{2} [e_n^2 e^* - e_n (e^*)^2] + \dots \\
 &\approx e_n e^* \frac{f''(S)}{2} (e_n - e^*)
 \end{aligned}$$

Aplicando el desarrollo de Taylor al Denominador

$$\begin{aligned}
 f(x_n) - f(x^*) &= f(S + e_n) - f(S + e^*) \\
 &= f(S) + f'(S)e_n + \frac{f''(S)e_n^2}{2} + \dots + \\
 & \quad - f(S) - f'(S)e^* - \frac{f''(S)(e^*)^2}{2} - \dots \\
 &= f'(S) [e_n - e^*] + \frac{f''(S)}{2} (e_n^2 - (e^*)^2), \text{ entonces} \\
 e_{n+1} &\approx \frac{e_n e^* f''(S)/2 (e_n - e^*)}{f'(S) (e_n - e^*) + \frac{f''(S)}{2} (e_n^2 - (e^*)^2)} \\
 e_{n+1} &\approx \frac{e_n e^* f''(S)}{2 f'(S)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Siendo } e^* &= \text{cte} \quad \text{y} \quad f''(S) = \text{cte}' \\ &\text{y } f'(S) = \text{cte}'' \implies \\ e_{n+1} &\approx Ke_n \quad \text{y} \quad k = \frac{e^* f''(S)}{2 f'(S)} \end{aligned}$$

∴ La convergencia es lineal.



1.2.7 FLUJOGRAMA PARA EL METODO DE LA REGULA FALSI.—

1.2.8 PROGRAMA 2

```

10 REM PROGRAMA DEL METODO DE LA REGULA FALSI
20 REM ENCONTRAR LA RAIZ DE LA ECUACION F(X)= X-0.2*SIN(X)-0.5
30 DIM X[50]
40 DEF FNA(X)=X-0.2*SIN(X)-0.5
50 M=1
60 E=1E-09
70 X[1]=0.5
80 I=1
90 X[I+1]=(M*FNA(X[I])-X[I]*FNA(M))/(FNA(X[I])-FNA(M))
100 IF ABS(FNA(X[I]))<E THEN 130
110 I=I+1
120 GOTO 90
130 PRINT " N", " X(I) ", " ERROR "
140 FOR J=1 TO I
150 PRINT J, X[J], ABS(FNA(X[J]))
160 NEXT J
170 END

```

N	X(I)	ERROR
1	0.5	0.095885108
2	0.612122481	2.79869E-03
3	0.615367726	8.40405E-05
4	0.615465151	2.52548E-06
5	0.615468079	7.58980E-08
6	0.615468167	2.28100E-09
7	0.615468169	7.30800E-11

PROGRAMA 2

Las variables utilizadas son las siguientes:

- M = Valor correspondiente del "pivote".
 X(50) = Dimensión de la sucesión generada.
 E = Cota de error.
 FNA(X) = Definición de la función.
 I, J = Contadores.

1.3 METODO DE LA SECANTE1.3.1 Condiciones de este Método

Podemos decir de este método que acelera la convergencia con respecto a los anteriores, y que posee sus peculiaridades propias.

Hipótesis: Dada una función $f(x)$ continua en el intervalo $[a_0, b_0]$ y sabiendo que $a_0 \leq S \leq b_0$, es decir que la raíz S se ha aislado en el intervalo $[a_0, b_0]$.

Además dos puntos consecutivos x_0 y x_1 que pertenecen al intervalo $[a_0, b_0]$.

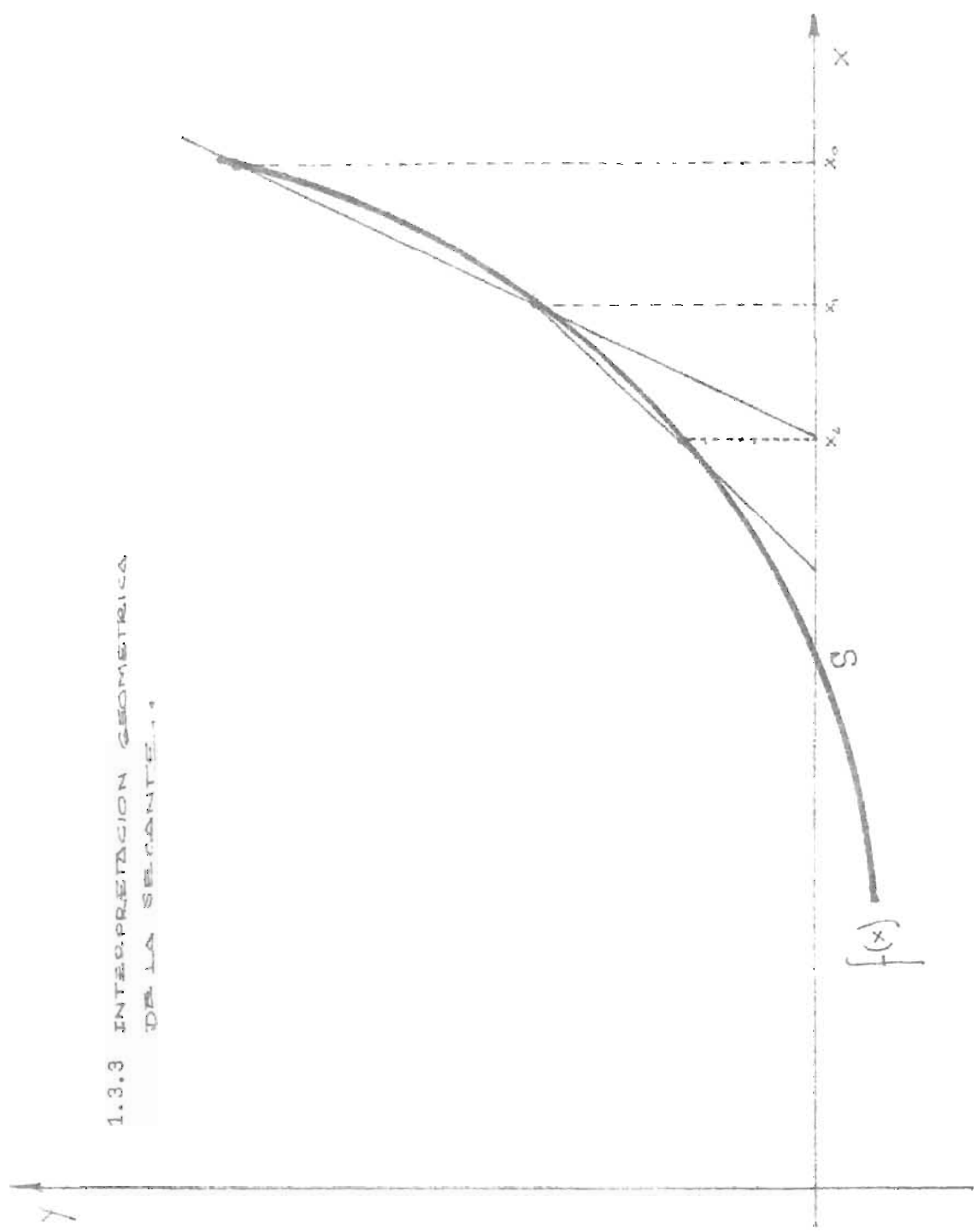
1.3.2 Descripción del Algoritmo

Calculamos el valor x_{n+1} tal que

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n) \cdot x_{n+1} - f(x_{n-1}) \cdot x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

luego evaluamos $f(x_{n+1})$ y preguntamos si $f(x_{n+1}) = 0 + \epsilon$ y en caso negativo calculamos la siguiente iteración.

1.3.3 INTERPRETACION GEOMETRICA
DE LA SECANTE. 1



1.3.4 Etapas del Algoritmo

- Inicialización: Evaluar $f(x_n)$ y $f(x_{n-1})$

- Cálculo de x_{n+1} :

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

- Evaluar $f(x_{n+1})$

- Prueba: Probar si $f(x_{n+1}) = 0 \pm \epsilon$

- Modificación: Calcular un nuevo término de la sucesión.

1.3.5 Rapidez de Convergencia

Sea la sucesión $\{x_n\}$ generada por el algoritmo del método de la secante. Estudiemos la rapidez de convergencia de éste.

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

por pasos algebraicos podemos expresar la anterior fórmula por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

de donde, restando a ambos lados S nos da el error

$$e_{n+1} = e_n - \frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

y haciendo común denominador

$$e_{n+1} = \frac{e_{n-1} f(x_n) - e_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Haciendo el desarrollo de Taylor de Segundo Grado alrededor de la raíz S para el numerador tenemos que:

$$\begin{aligned} e_{n-1} f(x_n) - e_n f(x_{n-1}) \\ &= e_{n-1} f(S + e_n) - e_n f(S + e_{n-1}) \\ &\approx e_n e_{n-1} \frac{F''(S)}{2} (e_n - e_{n-1}) \end{aligned}$$

y para el denominador

$$\begin{aligned} f(x_n) - f(x_{n-1}) &= f(S + e_n) - f(S + e_{n-1}) \\ &\approx F'(S)(e_n - e_{n-1}) + \frac{F''(S)}{2}(e_n^2 - e_{n-1}^2) \end{aligned}$$

podemos anular el segundo término por insignificante por lo que quedará algo mayorizado el error y podemos concluir del numerador y denominador que

$$e_{n+1} \approx \frac{F''(S)}{2F'(S)} e_n e_{n-1}$$

$$\text{ó} \quad e_{n+1} \approx A e_n e_{n-1}$$

Siendo $A = \frac{F''(S)}{2F'(S)}$

Estudieemos ahora si el método de la secante tiene convergencia lineal o cuadrática.

Hemos obtenido que $e_{n+1} \approx A e_n \cdot e_{n-1}$ (1)

Sea $e_{n+1} = B e_n^m$ iterando obtenemos (2)

$$e_n = B e_{n-1}^m \quad y$$

$$e_{n-1} = B^{-1/m} e_n^{1/m}$$

∴ Sustituyendo valores en (1)

$$e_{n+1} = A \cdot e_n \cdot B^{-1/m} e_n^{1/m}$$

de donde tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} e_{n+1} = A B^{-1/m} e_n^{1+1/m} \\ e_{n+1} = B e_n^m \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} A B^{-1/m} = B \\ 1 + \frac{1}{m} = m \end{cases} \implies \begin{cases} B = A^{\frac{m}{m+1}} \\ m^2 - m - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{siendo para el valor positivo}$$

$$m = 1.6180. \quad \text{Sustituyendo en (2) nos queda } e_{n+1} = B e_n^{1.6180}$$

siendo por lo tanto una convergencia intermedia entre la lineal y la cuadrática.

1.3.6 Comentario sobre este Método

En el algoritmo de la secante, la expresión:

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

tiene varias formas equivalentes:

$$* \quad x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

ó

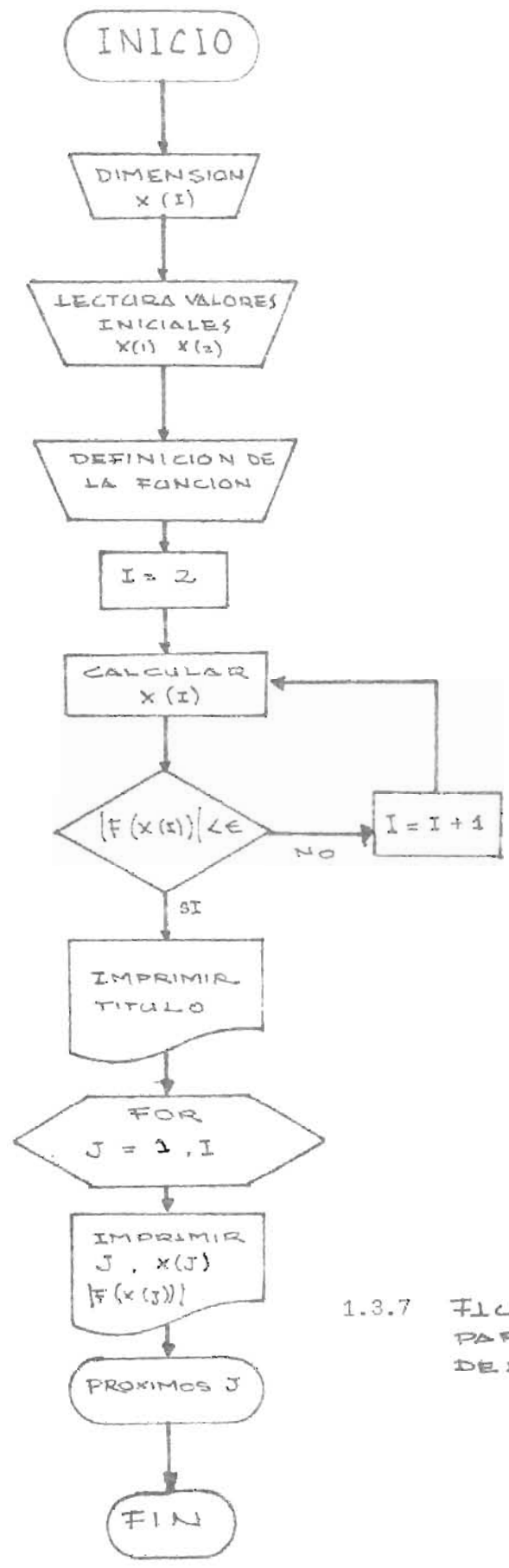
$$* \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}} \quad \text{en donde}$$

$\frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}$ es la pendiente de la secante a $f(x)$ que pasa por el punto $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$; por tanto igual a la pendiente de $f(x)$ en algún punto situado entre x_{n-1} y x_n , si $f(x)$ es diferenciable.

Si en la expresión anterior reemplazamos la pendiente de la secante a $f(x)$ por la tangente de $f(x)$ en x_n se obtiene una fórmula de iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{que es el método de Newton,}$$

que se verá en el Capítulo II por tener mayor rapidez de convergencia y merecer un estudio detallado por sus múltiples aplicaciones.



1.3.7 FLUJOGRAMA PARA EL METODO DE LA SECANTE.

1.3.8 PROGRAMA 3

```

10 REM PROGRAMA DEL METODO DE LA SECANTE
20 REM ENCONTRAR LA RAIZ DE LA ECUACION F(X)= X-0.2*SEN(X)-0.5
30 DIM X(50)
40 X(1)=1
50 X(2)=0.9
60 E=1E-09
70 DEF FNA(X)=X-0.2*SIN(X)-0.5
80 I=2
90 X(I+1)=(FNA(X(I))*X(I-1)-FNA(X(I-1))*X(I))/(FNA(X(I))-FNA(X(I-1)))
100 IF ABS(FNA(X(I)))>E THEN 130
110 I=I+1
120 GOTO 90
130 PRINT " N", "      X(I)      ", "      ERROR      "
140 FOR J=1 TO I
150 PRINT J,X(J),ABS(FNA(X(J)))
160 NEXT J
170 END

```

	X(I)	ERROR
1	1	0.331705803
2	0.9	0.243334618
3	0.624644840	7.68300E-03
4	0.615667380	1.66682E-04
5	0.615468296	1.05948E-07
	0.615468169	5.00000E-12

PROGRAMA 3

Cuadro de variables del tercer programa:

X(1) = Valor inicial.

X(2) = Valor inicial.

E = Cota de error.

FNA(X) = Definición de la función.

I = Contador de la sucesión.

J = Contador de impresión.

X(50) = Dimensión de la sucesión.

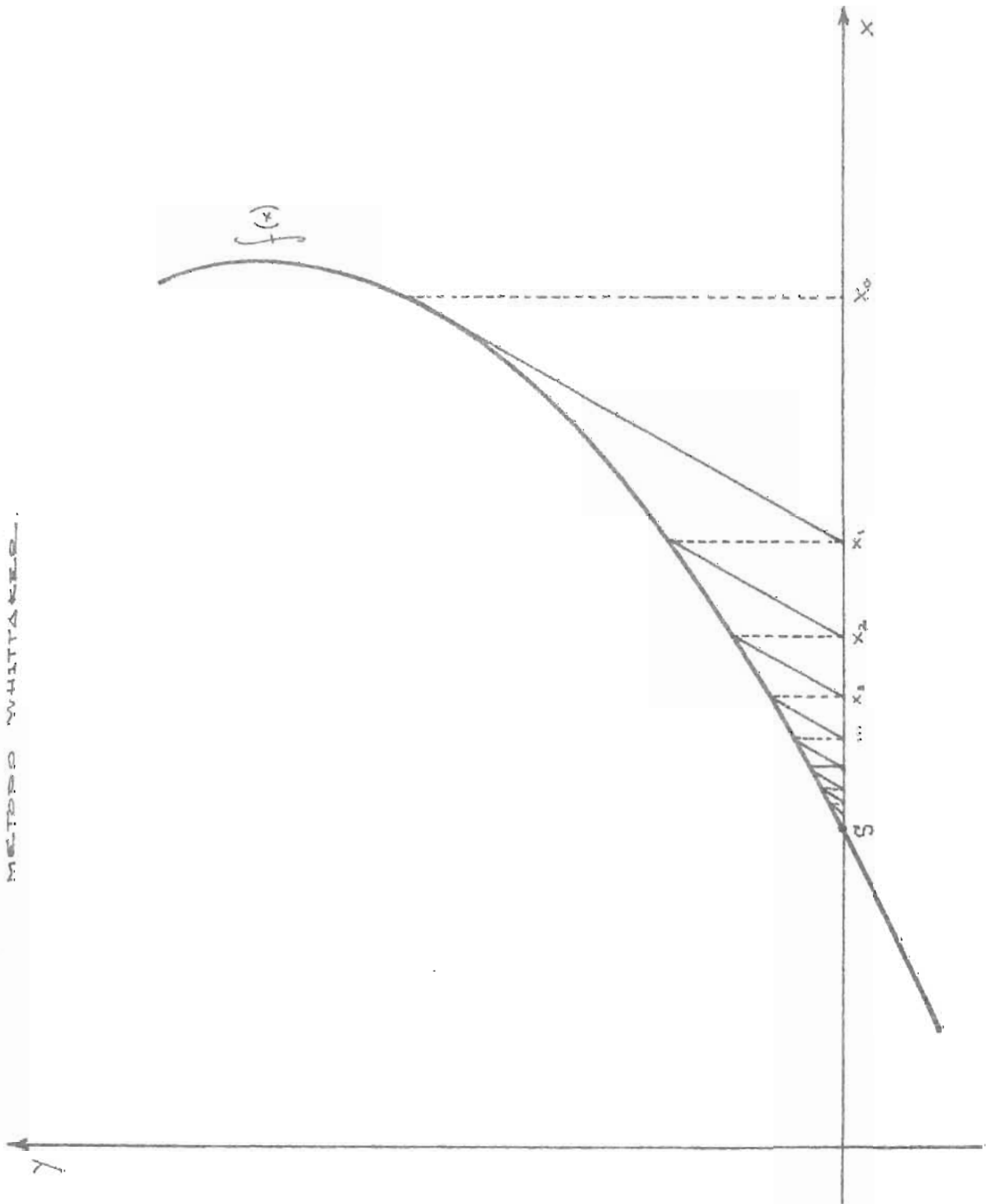
----- 0 -----

1.4 EL METODO DE WHITTAKER1.4.1 Descripción del Método

El método de Whittaker surge como una variante muy útil en el --
cálculo del algoritmo $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, que es el método Newton.

Con un valor real m evita el cálculo a veces algo engorroso de la deriva -
da.

1.4.2 INTEGRACION GEOMETRICA DEL METODO WHITTAKER.



Este valor real surge como "el apropiado" y siempre de acuerdo con la función.

Por no usar el valor óptimo que tiene la derivada, su convergencia es lineal en vez de cuadrática como el de Newton. No obstante es muy útil de considerar por su ventaja de no usar la derivada. Puede no obstante tener una convergencia más rápida cuanto más se acerque el valor de m a $f'(S)$.

1.4.3 El Algoritmo de Whittaker

- Inicialización: Se evalúa $f(x_0)$ y se da un m adecuado.
- Cálculo del Algoritmo: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m}$ y se evalúa $f(x_{n+1})$.
- Prueba: $f(x_{n+1}) = \pm \epsilon$
- Modificación: Generar el siguiente valor de la sucesión.

1.4.4 Rapidez de Convergencia

Sea m un valor real "apropiado" a la función. Consideremos el valor del error en la n -ésima iteración:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m} \quad m \in \mathbb{R}$$

dado que $e_n = x_n - S$: obtenemos

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(S + e_n)}{m}$$

y por el desarrollo de Taylor de Segundo Grado alrededor de S

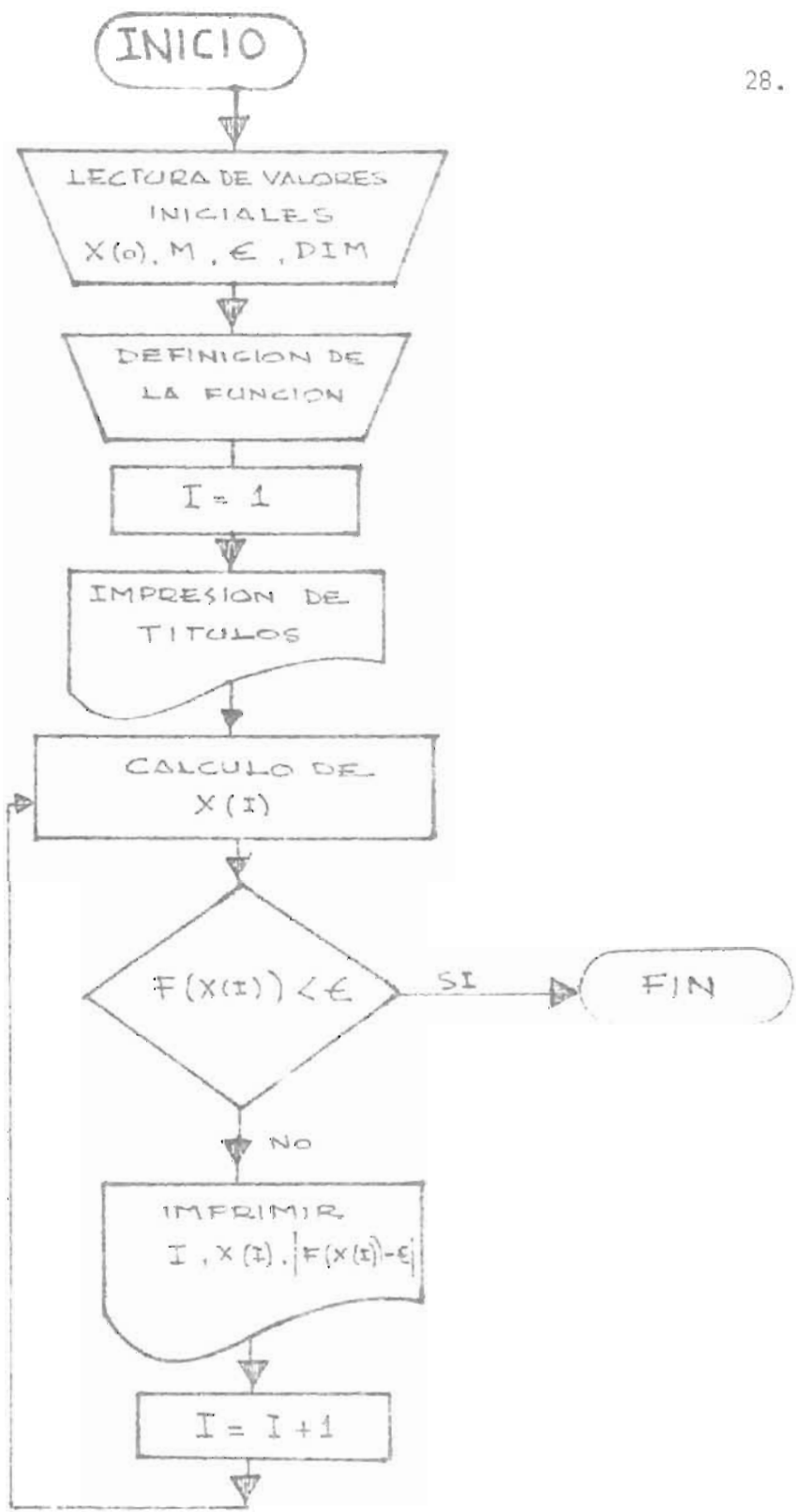
$$e_{n+1} = e_n - \frac{1}{m} \left[f(S) + f'(S)e_n + \frac{f''(S)}{2} e_n^2 + \dots \right]$$

de donde

$$e_{n+1} = \left[1 - \frac{f'(S)}{m} \right] e_n + \dots \quad \delta$$

$$e_{n+1} = A e_n \quad \text{con } A \text{ constante y}$$

$$A = \left[1 - \frac{f'(S)}{m} \right]$$



1.4.5 FLUJOGRAMA PARA EL METODO DE WHITTAKER

1.4.6 PROGRAMA 4

```

10 REM METODO WHITTAKER
20 REM ENCONTRAR LA RAIZ DE LA ECUACION F(X)=X-0.2*SEN(X)-0.5
30 DIM X(50)
40 X(1)=1
50 M=2.5
60 C=1E-09
70 DEF FNA(X)=X-0.2*SIN(X)-0.5
80 I=1
90 PRINT " N", "      X(I)      ", "      ERROR"
100 X(I+1)=X(I)-FNA(X(I))/M
110 IF ABS(FNA(X(I))) <= C THEN 160
120 E=ABS(FNA(X(I))-C)
130 PRINT I, X(I), E
140 I=I+1
150 GOTO 100
160 STOP
170 END

```

N	X(I)	ERROR
1	1	0.331705802
2	0.867317679	0.214799366
3	0.781398332	0.148543766
4	0.725180825	0.092526668
5	0.688170157	0.061145185
6	0.663712083	0.040503055
7	0.647510861	0.026870266
8	0.636762754	0.017843606
9	0.629625311	0.011856919
10	0.624882543	7.88214E-03
11	0.621729687	5.24129E-03
12	0.619633176	3.48586E-03
13	0.618238831	2.31865E-03
14	0.617311369	1.54240E-03
15	0.616694409	1.02608E-03
16	0.616283977	6.82623E-04
17	0.616010927	4.54141E-04
18	0.615829270	3.02139E-04
19	0.615708414	2.01015E-04
20	0.615628808	1.33737E-04
21	0.615574513	8.89769E-05
22	0.615538921	5.91974E-05
23	0.615515242	3.93848E-05
24	0.615499488	2.62031E-05
25	0.615489006	1.74331E-05
26	0.615482033	1.15982E-05
27	0.615477393	7.71619E-06
28	0.615474306	5.13340E-06

29	0.615472252	3.41502E-06
30	0.615470886	2.27175E-06
31	0.615469977	1.51110E-06
32	0.615469372	1.00503E-06
33	0.615468969	6.68336E-07
34	0.615468702	4.44319E-07
35	0.615468524	2.95283E-07
36	0.615468405	1.96122E-07
37	0.615468326	1.30150E-07
38	0.615468274	8.62540E-08
39	0.615468239	5.70540E-08
40	0.615468216	3.76260E-08
41	0.615468200	2.46990E-08
42	0.615468190	1.60970E-08
43	0.615468183	1.03720E-08
44	0.615468179	6.56600E-09
45	0.615468176	4.03600E-09
46	0.615468173	2.35300E-09
47	0.615468172	1.22600E-09
48	0.615468171	4.88000E-10

PROGRAMA 4

Cuadro de variables para el cuarto programa:

M = Valor de la pendiente empleada en el algoritmo.

C = Valor de la cota del error.

FNA(X) = Definición de la función.

X(1) = Valor inicial.

X(50) = Dimensión de la sucesión generada por el algoritmo.

E = Error.

I = Contador.

1.5 ITERACION EN EL PUNTO FIJO1.5.1 Descripción del Método

Hemos mencionado la iteración del punto fijo como un método posible de obtener una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

Para la aplicación de este método deducimos una ecuación de la forma $x = g(x)$ de modo que cualquier solución de esta ecuación, es decir, cualquier punto fijo de $g(x)$ es una solución de $f(x) = 0$.

Ejemplo. Dada la función $f(x) = x^2 - x - 2$, entre las posibles funciones $g(x)$ que podemos deducir están las siguientes:

$$i) \quad g(x) = x-2$$

$$ii) \quad g(x) = \sqrt{2+x}$$

$$iii) \quad g(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

A la función $g(x)$ se le llama función de iteración.

1.5.2 Algoritmo del Punto Fijo

Dada una función de iteración $g(x)$ y con una escogencia arbitraria de un punto $x_0 \in I$ (Intervalo de convergencia), se genera la sucesión $\{x_n\}$ recursivamente mediante la relación

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Para ver las condiciones "necesarias" para la convergencia del algoritmo estudiaremos las siguientes funciones:

$$a) \quad g_1(x) = \sqrt{2+x} \quad \text{en } I = [0,2] \quad \text{con } x_0 = 0$$

$$b) \quad g_2(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \quad \text{en } I = [1,3] \quad \text{con } x_0 = 1$$

$$c) \quad g_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3/2 \quad \text{en } I = [0,2] \quad \text{con } x_0 = 0.5$$

Para que el algoritmo esté definido hemos de dejar claro que dado $I = [a,b]$, $g(I) \subset I$, ya que si $x_0 \in I$ podemos decir que todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$ están en I .

De la misma forma podemos notar que si la función $g(x)$ no es continua en I no tenemos garantía de que intersekte a la gráfica $y = x$.

Analizando las tres funciones anteriores tendremos que las tres son continuas y $g_i(I) \subset I \quad \forall i = 1,2,3$.

Analizando y estudiando cada una de las funciones anteriores por separado tenemos los siguientes resultados:

$$a - g_1(x) = \sqrt{2+x} \quad I = [0,2] \quad \text{con } x_0 = 0$$

$$x_0 = 0$$

$$g(x_0) = 1.4142 = x_1$$

$$\begin{aligned}
 g(x_1) &= 1.8477 = x_2 \\
 g(x_2) &= 1.9615 = x_3 \\
 &\vdots \\
 g(x_8) &= 1.9999
 \end{aligned}$$

Este algoritmo converge a 2; analizando la función:

- i) Es continua en I
- ii) $g(I) \subset I$

$$\begin{aligned}
 \text{ya que } 0 \leq x \leq 2 \quad \text{y} \quad 2 \leq x+2 \leq 4 \\
 \text{de donde } 0 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{x+2} \leq \sqrt{4} = 2
 \end{aligned}$$

Y además tenemos que su pendiente máxima la alcanza en "0"

$$g'(0) = 1/2\sqrt{2} < 1 \quad \text{luego } g'(x) < 1 \quad \forall x \in I$$

$$\begin{aligned}
 \text{b - } g_2(x) &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \text{en } I = [1, 3] \quad x_0 = 1 \\
 x_0 &= 1 \\
 g(x_0) &= 3 = x_1 \\
 g(x_1) &= 1.44444 = x_2 \\
 g(x_2) &= 1.17160 = x_3 \\
 g(x_3) &= 1.67250 = x_4 \\
 g(x_4) &= 1.95540 = x_5 \\
 g(x_5) &= 1.77293 = x_6 \\
 g(x_6) &= 1.88217 = x_7 \\
 &\vdots \\
 g(x_{27}) &= 1.83928
 \end{aligned}$$

Con lo cual su punto fijo o su punto de convergencia es 1.8392 y la función cumple:

- i) Es continua en I.
- ii) $g(I) \subset I$

Veamos el valor que alcanza la pendiente en el intervalo I: Dado que $g'_2(x) = \frac{-1}{x} - \frac{2}{x^3}$, entonces su máximo valor vendrá dado por:

$$|g'_2(1)| = |-3| = 3$$

$$c - g_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3/2 \quad \text{en } I = [0,2] \quad \text{y con } x_0 = 0.5$$

$$x_0 = 0.5$$

$$g(x_0) = 1.125 = x_1$$

$$g(x_1) = 0.39257 = x_2$$

$$g(x_2) = 1.25228 = x_3$$

$$g(x_3) = 0.32742 = x_4$$

$$g(x_4) = 1.32069 = x_5$$

$$g(x_5) = 0.31514 = x_6$$

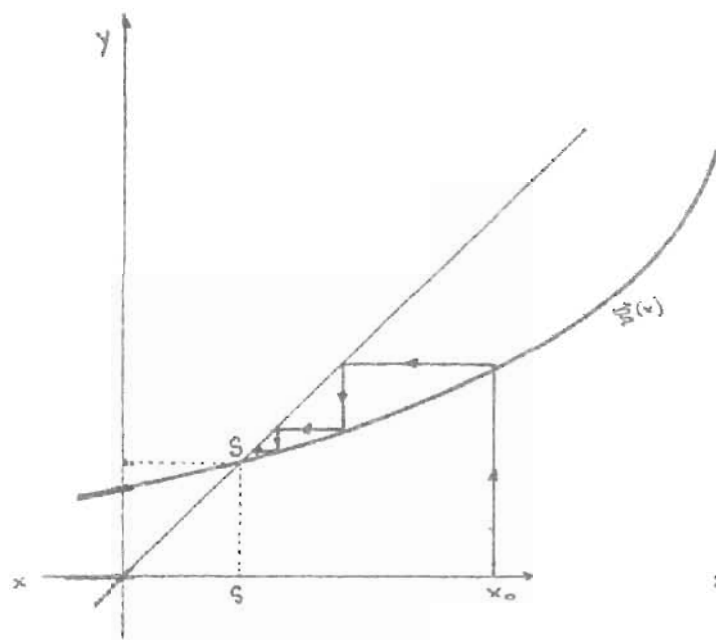
$$g(x_6) = 1.33267 = x_7$$

$$\vdots$$

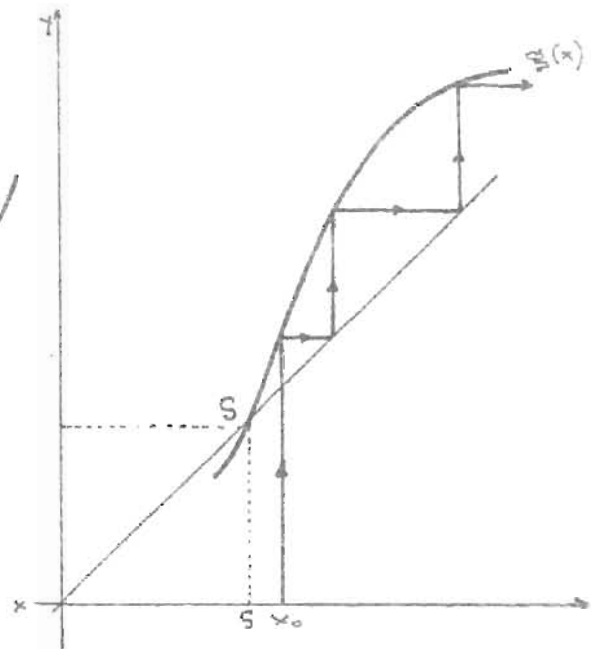
Su punto fijo lo tiene alrededor de 0.77. Claramente la iteración no converge y en cada nuevo paso se aleja cada vez más del punto fijo.

Analizando esta función tenemos que:

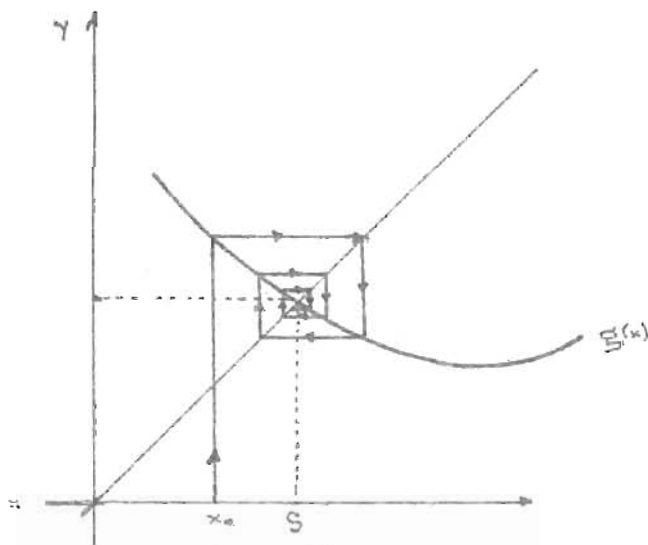
- i) $g_3(x)$ es continua en el intervalo I.
- ii) $g_3(I) \subset I$.



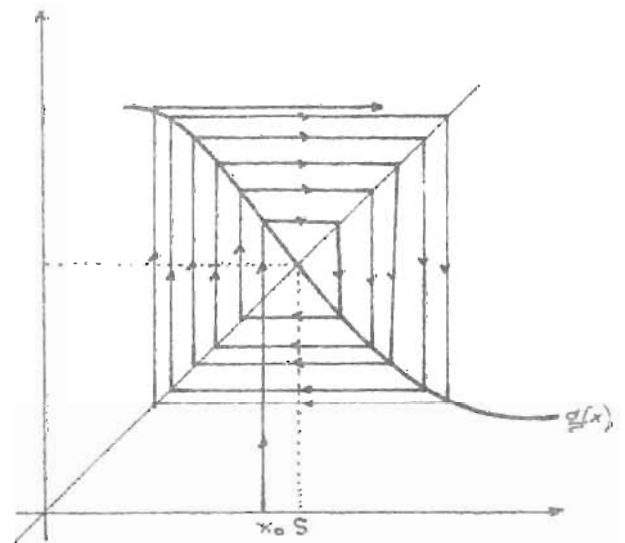
$$0 \leq g'(x) < 1$$



$$|g'(x)| > 1$$



$$-1 < g'(x) \leq 0$$



$$|g'(x)| > 1$$

I.5.3 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL ALGORITMO DEL PUNTO FIJO

Preguntándonos cuál será la máxima pendiente que alcanza la función en I tenemos: que $g'_3(x) = 3x^2 - 4x$. Claramente alcanzará su máximo valor en $x = 2$ siendo por lo tanto $g'_3(2) = 4$.

Este estudio comparativo de las funciones $g_i(x)$ con $i = 1, 2, 3$; nos lleva a las siguientes condiciones:

1ra.) Que la función de iteración debe ser continua en todo el intervalo I .

2da.) Dado $I = [a, b]$ la función de iteración debe de pertenecer a I , o sea que $g(I) \subset I$.

3ra.) $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$. Ya que con esta hipótesis nos estamos garantizando que no tenga variaciones rápidas y que posea una pendiente suave que permita la convergencia en el intervalo. Puede darse que el algoritmo converja, como se ha visto, aún a pesar de que $|g'(x)| > 1$. Por lo que deducimos que esta condición es "necesaria" pero no suficiente.

1.5.4 Equivalencia para Lipschitz

Proposición: Sea f es diferenciable en un intervalo I . Entonces f satisface la condición de Lipschitz en I si y sólo si $|f'(x)| < L$, $L \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$.

Demostración:

i) (\implies) Sea $x_0 \in I$

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq L|h| \quad \text{para } h \neq 0$$

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| \leq L \quad \text{de donde}$$

$$- L \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq L. \text{ Aplicando } \lim_{h \rightarrow 0}$$

$$- L \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq L \text{ por lo tanto}$$

$$|f'(x_0)| \leq L$$

ii) (\Leftarrow) Sean $x_1, x_2 \in I$ entonces $x^* \in (x_1, x_2)$

tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(x^*)(x_2 - x_1)$ T.V.M.

entonces $|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(x^*)| |x_2 - x_1|$

por lo tanto $|f(x_2) - f(x_1)| \leq L |x_2 - x_1|$

1.5.5 Existencia, Unicidad y Convergencia del punto Fijo

a) Existencia:

"En el algoritmo $x_{n+1} = g(x_n)$ existe una solución en el intervalo $I = [a, b]$ ".

Construyamos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x - g(x) \quad \forall x \in I$.

Tenemos que $f(x)$ es continua por diferencia de funciones continuas. Además satisface que $f(a) \leq 0$ y que $f(b) \geq 0$, ya que $g(a) \geq a$ y que $g(b) \leq b$. De donde se deduce que existe $x_0 \in I$ donde la función $f(x_0)$ deba anularse - por el teorema de Rolle. Lo cual quiere decir que existe $S (S = x_0)$ con $S \in I = [a, b]$ tal que $f(S) = 0$; de donde se deduce que $g(S) = S$.

b) Unicidad:

"Con las hipótesis dadas anteriormente la existencia de la raíz es única".

Sean S_1 y $S_2 \in I$ valores distintos tales que $S_1 = g(S_1)$ y $S_2 = g(S_2)$. Entonces tenemos que

$$|S_1 - S_2| = |g(S_1) - g(S_2)| \leq L|S_1 - S_2| < |S_1 - S_2|$$

ya que $0 \leq L < 1$, lo cual es una contradicción, por lo que $S_1 = S_2$ y la solución es única.

c) Convergencia:

Veremos que el algoritmo $x_{n+1} = g(x_n)$ con las hipótesis anteriores, además de existir una solución, ésta es única y converge.

Podemos decir que:

$$\begin{aligned} e_n = |x_n - S| &= |g(x_{n-1}) - g(S)| \leq L|x_{n-1} - S| \\ &= L|g(x_{n-2}) - g(S)| \leq L^2|x_{n-2} - S| \end{aligned}$$

⋮

$$e_n = |x_n - S| = L^n |x_0 - S|$$

Aplicando límites a la expresión anterior, cuando $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - S| = \lim_{n \rightarrow \infty} L^n |x_0 - S| = 0$$

ya que $0 \leq L < 1$. De lo que podemos concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S$$

1.5.6 Rapidez de Convergencia

Analicemos la rapidez de convergencia del punto fijo. Sea

$$e_n = S - x_n = g(S) - g(x_{n-1}) = g'(x^*) (S - x_{n-1})$$

por aplicación del teorema del valor medio. Nota: x^* está entre x_{n-1} y S .

Quando $n \rightarrow \infty$, $x_n \rightarrow S$ por convergencia y $x^* \rightarrow S$ por lo tanto $g'(x^*) \rightarrow g'(S)$ por ser $g'(x)$ una función continua por lo tanto

$e_n \approx g'(S)e_{n-1}$. Claramente tiene una convergencia lineal.

Nota: $0 \leq |g'(S)| < 1$.

1.5.7 El error después de un número finito de pasos

Nuestro propósito es el de definir una cota para el error $|x_n - S|$ que esté en función de valores conocidos y que se pueda encontrar después de haber efectuado cierto número de pasos.

$$S - x_{n-1} = S - x_n + x_n - x_{n-1}$$

$$|S - x_{n-1}| = |S - x_n| + |x_n - x_{n-1}|.$$

Por el teorema de Valor Medio podemos decir que a su vez

$$|S - x_n| = |g(S) - g(x_{n-1})| \leq |g'(x_{n-1}^*)| |S - x_{n-1}|$$

para $x_{n-1}^* \in (S, x_{n-1})$. Como por hipótesis $|g'(x)| \leq L$ para todo $x \in I$ y

$0 \leq L < 1$ obtenemos

$$|S - x_{n-1}| \leq L|S - x_{n-1}| + |x_n - x_{n-1}|$$

$$|S - x_{n-1}| - L|S - x_{n-1}| \leq |x_n - x_{n-1}|$$

$$|S - x_{n-1}| \leq \frac{1}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

$$|S - x_n| \leq L|S - x_{n-1}| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

$$\text{ó} \quad |S - x_n| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

Podemos demostrar por inducción que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq L^n |x_1 - x_0|$$

de donde, se sigue que:

$$|S - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

CAPITULO II
ACELERACION DE LA CONVERGENCIA

2.1 EL METODO AITKEN

2.1.1 Aceleración de la Convergencia

En el estudio de la rapidez de convergencia del punto fijo, se obtuvo:

$$e_n \approx g'(S) \cdot e_{n-1}$$

También hemos hablado que es un método de convergencia lineal, ya que el error está dispuesto en una función lineal. Estudiaremos ahora la aceleración de convergencia y en general otros métodos que permitan encontrar raíces de una manera mucho más rápida que las anteriores.

2.1.2 Obtención del Algoritmo

Supongamos ahora que la función g satisface ser continuamente diferenciable en el intervalo I y que $g'(x) \neq 0$ para todo x que pertenece a I , además de las hipótesis exigidas en la iteración del punto fijo. Podremos así estudiar cómo acelerar la convergencia. Se tiene

$$\begin{aligned} e_n &\approx g'(S)(e_{n-1}) \\ S - x_n &\approx g'(S)(S - x_{n-1}) \\ S - x_{n+1} &\approx g'(S)(S - x_n) \end{aligned}$$

dividiendo obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{S - x_n}{S - x_{n+1}} &\approx \frac{S - x_{n-1}}{S - x_n} \\ (S - x_n)^2 &\approx (S - x_{n-1})(S - x_{n+1}) \end{aligned}$$

operando obtenemos:

$$S(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) \approx x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2$$

o también

$$\begin{aligned}
 S(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) &\approx x_{n-1} x_{n+1} - x_n^2 + 2x_n \cdot x_{n+1} + \\
 &\quad - x_{n+1}^2 - 2x_n x_{n+1} + x_{n+1}^2 \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned}$$

de donde

$$S \approx x_{n+1} - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}$$

De esta forma, es de esperarse que, para un valor de n grande, obtenemos una mejor aproximación a S con la siguiente expresión:

$$x'_n = x_{n+1} - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}$$

Esta expresión la podemos denotar más convenientemente por medio del operador de diferencias " Δ ".

Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 x_n &= \Delta(\Delta x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = \\
 &= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n.
 \end{aligned}$$

recursivamente

$$\Delta^n x_n = \Delta(\Delta^{n-1})x_n.$$

De esta forma

$$x'_n = x_{n+1} - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}$$

es equivalente a

$$x'_n = x_{n+1} - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_{n-1}}$$

A este proceso de obtener una sucesión a partir de una conocida x_0, x_1, x_2, \dots encontrando otra x'_0, x'_1, x'_2, \dots , que se espera con -
verja más rápidamente, se le llama proceso de Aitken.

2.1.3 Algoritmo de Aitken

Dada una sucesión de números $\{x_n\}$, se genera de ella una nueva sucesión $\{x'_n\}$ por medio de la expresión

$$x'_n = x_{n+1} - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_{n-1}} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

2.1.4 Error Asintótico

La expresión $x'_n = x_{n+1} - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_{n-1}}$ obtenida de la sucesión --
 $\{x_n\}$, generada por el método iterativo del punto fijo, con la condición -
adicional de que la primera derivada de la función iterativa sea distinta
de cero para todo x en I , nos evidencia de que si $x_0 \neq S$, ninguna x_n es -
igual a la solución exacta S . Tenemos entonces que el proceso de itera-
ción no termina en un número finito de pasos, es decir que existe siempre
un valor significativo para el error. Le llamamos "error asintótico" y -
su expresión nos la proporciona el siguiente lema.

2.1.5 Lema 1 "El error nunca es cero"

Sea g una función que cumple las hipótesis del punto fijo, - además continuamente diferenciable en I y $g'(x) \neq 0$ en todo x que pertenece a I , si $x_0 \neq S$, entonces ninguna x_n es igual a la solución exacta S , es decir e_n nunca es cero y por venir dado por la siguiente expresión le llamamos "error asintótico":

$$e_n = (g'(S) + \theta_{n-1})e_{n-1}$$

donde θ_{n-1} es un valor que tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

Prueba

Supongamos que para cierto n , $x_n = S$, entonces $g(x_n) = x_n$, siendo n el primer iterando para el cual esto sucede. Entonces $x_n \neq x_{n-1}$ y

$$\begin{aligned} g(x_n) &= x_n = g(x_{n-1}) \\ 0 &= g(x_{n-1}) - g(x_n) = g'(x^*)(x_{n-1} - x_n) \\ &\text{con } x^* \in (x_{n-1}, x_n). \quad \text{T.V.M.} \end{aligned}$$

Como $x_n \neq x_{n-1}$, entonces $g'(x^*) = 0$ lo que es contradictorio a la hipótesis de que $g'(x) \neq 0$ para todo x que pertenece a I .

Determinemos ahora el valor que tiene el error:

$$\begin{aligned} e_n &= x_n - S \neq 0 \\ e_n &= g(x_{n-1}) - S \\ e_n &= g(S + e_{n-1}) - g(S) = g'(\xi_n)e_{n-1} \end{aligned}$$

para algún $\xi_n \in (S, S + e_{n-1})$

luego, $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = S$.

De donde $\lim_{n \rightarrow \infty} g'(\xi_n) = g'(S)$, ya que g' es continua.

Además

$$e_n = g'(S)e_{n-1} + \theta_{n-1} e_{n-1}$$

donde $\theta_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$

$$e_n = (g'(S) + \theta_{n-1})e_{n-1}$$

2.1.6 Lema 2 "El Algoritmo está bien definido"

Sea $\{x_n\}$ una expresión convergente al límite S tal que

$e_n = (g'(S) + \theta_{n-1})e_{n-1} \neq 0$. Con $\theta_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces $\{x'_n\}$

derivada de $\{x_n\}$ por la expresión $x'_n = x_{n+1} - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_{n-1}}$ está bien definida y converge a S .

Prueba

Para esta prueba basta demostrar que $\Delta^2 x_{n-1} \neq 0$. Tenemos que:

$$\Delta^2 x_{n-1} = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}$$

$$\Delta^2 x_{n-1} = e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1}$$

por hipótesis $e_n = (g'(S) + \theta_{n-1})e_{n-1}$; iterando

$$e_{n+1} = (g'(S) + \theta_n)(g'(S) + \theta_{n-1})e_{n-1}$$

luego

$$\Delta^2 x_{n-1} = [(g'(S) + \theta_n)(g'(S) + \theta_{n-1}) - 2(g'(S) + \theta_{n-1} + 1)] e_{n-1}$$

$$\Delta^2 x_{n-1} = [(g'(S) - 1)^2 + (\theta_{n-1} + \theta_n)g'(S) + \theta_n \theta_{n-1} - 2\theta_{n-1}] e_{n-1}$$

haciendo $\phi_n = (\theta_{n-1} + \theta_n)g'(S) + \theta_n \theta_{n-1} - 2\theta_{n-1}$ tenemos que:

$$\Delta^2 x_{n-1} = [(g'(S) - 1)^2 + \phi_n] e_{n-1} \neq 0 \text{ para } n \text{ grande ya que si } n \rightarrow \infty,$$

$\theta_n \rightarrow 0$ por lo tanto $\phi_n \rightarrow 0$ luego

$$x'_n = x_{n+1} - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_{n-1}}$$

está bien definida.

Veamos que x'_n converge a S

$$\begin{aligned} x'_n &= x_{n+1} - \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \\ &= x_{n+1} - \frac{x_{n+1} - x_n}{(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n)} \\ &= x_{n+1} - \frac{1}{\frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} - 1} \\ &= x_{n+1} - \frac{1}{g'(x_n^*) \frac{(x_{n+1} - x_n)}{(x_{n+1} - x_n)} - 1} \\ &= x_{n+1} - \frac{1}{g'(x_n^*) - 1} \end{aligned}$$

Como por hipótesis $|g'(x_n^*)| < 1$, nunca el denominador se hará

cero y $x'_n \rightarrow S$.

2.1.7 Aplicación del Método de Aitken

La aplicación de este método no se limita sólo a las sucesiones que surjan de un proceso iterativo, sino que también es aplicable a sucesiones arbitrarias con ciertas propiedades de convergencia.

2.1.8 Teorema de Rapidez de Convergencia

Sea $\{x_n\}$ una sucesión que converge al límite S , tal que $e_n = x_n - S \neq 0$ y $e_n = (A + \theta_{n-1})e_{n-1}$ donde A es una constante, $|A| < 1$ y $\theta_{n-1} \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. Entonces la sucesión $\{x'_n\}$ derivada de $\{x_n\}$ por medio del Algoritmo de Aitken está bien definida y converge a S más rápidamente que la sucesión $\{x_n\}$.

Prueba

La expresión $x'_n = x_{n+1} - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_{n-1}}$ está bien definida, ya que por el Lema 2

$$\Delta^2 x_{n-1} = [(g'(S) - 1)^2 + \phi_n] e_{n-1} \neq 0$$

y $|g'(S)| < 1$. Haciendo $A = g'(S)$ tenemos que $\Delta^2 x_{n-1} = [(A-1)^2 + \phi_n] e_{n-1} \neq 0$.

Probemos que $\{x'_n\}$ converge a S más aprisa que $\{x_n\}$. Para esto haremos

uso del siguiente criterio:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_n - S}{x_n - S} = 0, \text{ con lo cual garantizamos que } x'_n \rightarrow S \text{ más rapidamen}$$

te que $x_n \rightarrow S$.

$$\text{De la expresión } x'_n = x_{n+1} - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_{n-1}}$$

tenemos
$$x'_n - S = e_{n+1} - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_{n-1}}$$

y de las expresiones
$$e_{n+1} = (A + \theta_n)e_n$$

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = e_{n+1} - e_n$$

tenemos
$$\Delta x_n = (A + \theta_n - 1)e_n$$

$$(\Delta x_n)^2 = (A + \theta_n - 1)^2 e_n^2$$

y
$$\Delta^2 x_n = \frac{[(A-1)^2 + \phi_n]e_n}{(A + \theta_{n-1})}$$

luego sustituyendo en la expresión

$$x'_n - S = e_{n+1} - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_{n-1}}$$

obtenemos:

$$x'_n - S = (A + \theta_n)e_n - \frac{(A + \theta_{n-1})(A + \theta_n - 1)e_n^2}{[(A - 1)^2 + \phi_n]e_n}$$

$$\frac{x'_n - S}{e_n} = A + \theta_n - \frac{(A + \theta_{n-1})(A + \theta_n - 1)^2}{(A - 1)^2 + \phi_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_n - S}{x_n - S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[A + \theta_n - \frac{(A + \theta_{n-1})(A + \theta_n - 1)^2}{(A - 1)^2 + \phi_n} \right] = 0$$

ya que si $n \rightarrow \infty$, entonces $\theta_n \rightarrow 0$ y $\phi_n \rightarrow 0$.

Luego $x'_n \rightarrow S$ más rápidamente que $x_n \rightarrow S$.

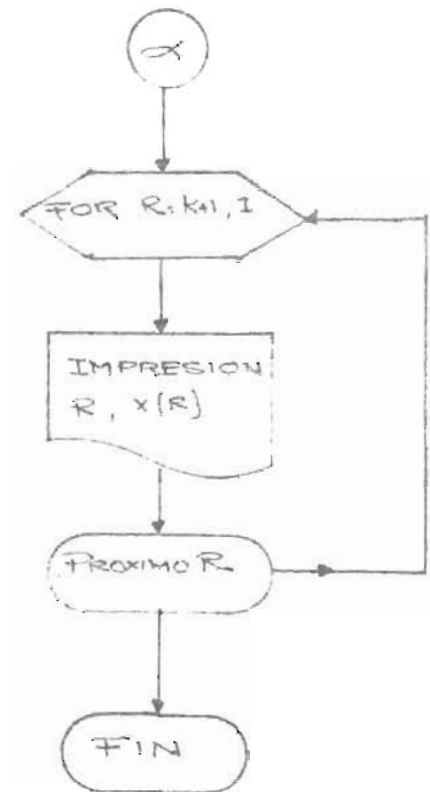
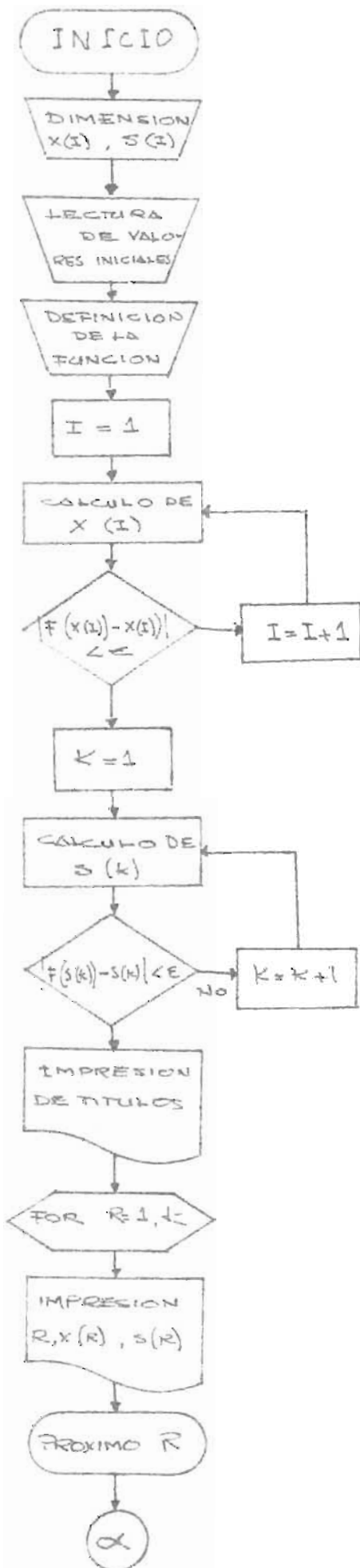
2.1.9 Aplicación de Aitken a iteración

Corolario 1

Supongamos que la función iterativa g además de cumplir las hipótesis del teorema del punto fijo, tiene una derivada continua y $g'(x) \neq 0$ para todo x en I ; si $x_0 \in S$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ satisface las hipótesis del teorema anterior y el algoritmo de Aitken acelera la convergencia de $\{x_n\}$.

Prueba

Por el lema 1 y 2 garantizamos las hipótesis del teorema anterior.



2.1.10 FLUJOGRAMA PARA
EL PUNTO FIJO Y AITKEN

```

10 REM METODO ITERATIVO DEL PUNTO FIJO Y METODO DE AITKEN
20 REM ENCONTRAR LA RAIZ DE LA ECUACION F(X)=X-.2*SIN(X)-0.5
30 DIM X(150),S(100)
40 X(1)=1
50 I=1
60 DEF FNA(X)=+0.2*SIN(X)+0.5
70 X(I+1)=FNA(X(I))
80 IF (ABS(FNA(X(I))-X(I))<1E-10) THEN 110
90 I=I+1
100 GOTO 70
110 K=1
120 S(K)=X(K)-(X(K+1)-X(K))^2/(X(K+2)-2*X(K+1)+X(K))
130 IF (ABS(FNA(S(K))-S(K))<1E-10) THEN 160
140 K=K+1
150 GOTO 120
160 PRINT "ITERACIONES", "PUNTO FIJO", "METODO AITKEN"
170 PRINT
180 PRINT " N", "      X(I)      ", "      S(I)      "
190 FOR R=1 TO K
200 PRINT R, X(R), S(R)
210 NEXT R
220 FOR R=K+1 TO I
230 PRINT R, X(R)
240 NEXT R
250 END

```

ITERACIONES	PUNTO FIJO	METODO AITKEN
N	X(I)	S(I)
1	1	0.617079853
2	0.668294197	0.615499758
3	0.623929688	0.615468977
4	0.616845778	0.615468191
5	0.615693824	0.61546817
6	0.615504885	0.615468170
7	0.615474165	
8	0.615469149	
9	0.615468329	
10	0.615468196	
11	0.615468174	
12	0.615468170	
13	0.615468170	

PROGRAMA 5

Cuadro de variables del quinto programa:

X(150) = Dimensión de la sucesión del Punto Fijo.

S(100) = Dimensión de la sucesión de Aitken.

X(1) = Valor Inicial.

FNA(X) = Función iterativa.

I,K,R = Contadores

2.2 EN BUSCA DE UNA MAYOR RAPIDEZ DE CONVERGENCIA

2.2.1 En busca de una mayor rapidez de Convergencia

Observando el ejemplo anterior, podemos afirmar que efectivamente el método de Aitken logra una mayor aceleración que la computación directa, cumpliendo la exigencia de que $f'(x) \neq 0$.

Un análisis de los métodos estudiados y el ejemplo anterior, muestra que una mejor aceleración de convergencia restringe el campo de aplicación, ya que las exigencias de las hipótesis son mayores.

De esto podemos decir que para lograr una mayor aceleración de las convergencias ya estudiadas, se harán necesarias mayores hipótesis.

Haremos ahora un estudio de las hipótesis necesarias que requiere una convergencia más acelerada; partamos de la aproximación de Taylor de una función que cumple las hipótesis del punto fijo alrededor de ese punto. Si f es continuamente diferenciable m veces, en un vecindario $x=S$ tenemos por la aproximación de Taylor que:

$$f(x) - f(S) = (x-S)f'(S) + \dots + \frac{(x-S)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(S) + \\ + \frac{(x-S)^m}{m!} f^m(\xi)$$

Si $f^{(\lambda)}(x) = 0$ para $\lambda = 1, 2, \dots, m-1$,

tenemos:

$$f(x) - S = \frac{(x-S)^m f^m(\xi)}{m!}$$

$$f(x_n) - S = \frac{(x_n - S)^m f^m(\xi)}{m!}$$

$\xi \in (x_n, S)$ t.q. si $n \rightarrow \infty$, $\xi \rightarrow S$

$$e_{n+1} \approx \frac{e_n^m f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^m} = \frac{f^{(m)}(S)}{m!}$$

de donde $e_{n+1} \approx \frac{e_n^m f^{(m)}(S)}{m!}$

Con lo que notamos que dependiendo de las hipótesis que cumpla la función f , así será la rapidez de convergencia; estudiamos algunos casos:

2.2.2 Convergencia Cuadrática

Si $f'(x) = 0$ en un vecindario $x=S$, f dos veces continuamente diferenciable y f cumple las hipótesis del teorema del punto fijo, obtendríamos por el desarrollo anterior la expresión:

$$e_{n+1} \approx \frac{e_n^2 f''(S)}{2!} .$$

Este tipo de convergencia mejora notablemente a la convergencia lineal, ya que e_{n+1} es aproximadamente proporcional al cuadrado del error del paso anterior. Por ello a este tipo de convergencia le llamamos "convergencia cuadrática"; caracterizada porque el número de cifras significativas se duplican aproximadamente en cada paso.

2.2.3 Convergencia Cúbica

Si $f^{(\lambda)}(x) = 0$, $\lambda = 1,2$ en un vecindario $x=S$, f es tres ve

ces continuamente diferenciable y f cumple las hipótesis del teorema del punto fijo, se obtendría la expresión

$$e_{n+1} \approx \frac{e_n^3 f'''(S)}{3!}$$

Esta convergencia es aún más rápida que la convergencia cuadrática porque e_{n+1} es aproximadamente proporcional al cubo del error del paso anterior, por ello le llamamos "convergencia cúbica".

Observemos que en la práctica este tipo de convergencia y en los demás casos en que si bien es cierto que la convergencia es mucho más rápida no tienen una mayor aplicación por las exigencias que piden de una función. Es por eso que nuestro objeto de estudio será sobre métodos que nos garanticen una convergencia cuadrática; como lo son el método de Steffensen y el método de Newton en el que haremos mayor énfasis por sus múltiples aplicaciones.

2.3 METODO DE STEFFENSEN

2.3.1 Descripción del Algoritmo

Este método se deriva del Algoritmo de Aitken; surgió al observar que x'_k (Algoritmo de Aitken) es una aproximación mucho mejor a "S" que x_k (Algoritmo del punto fijo); parecía más razonable iniciar la iteración del punto fijo con x'_k , que continuar generando x_{k+1} , x_{k+2} , etc.... Y es así, que éste algoritmo consta de dos etapas. La primera etapa es la iteración del punto fijo para encontrar dos valores a los que en la segunda etapa se les aplica la iteración de Aitken; iniciándose un nuevo

ciclo y aplicándole a este último valor el mismo proceso.

Nota

Antes de establecer el algoritmo vamos a hacer notar que la expresión $x_{n+1} - \frac{(\Delta x_{n+1})^2}{\Delta^2 x_n}$ es equivalente a $x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$; para su prueba -

basta desarrollarlo.

2.3.2 Algoritmo de Steffensen

Dada $g(x)$, función iterativa, y un punto y_0 .

$$\text{Inicio: } x_n^k = y_k \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

Cálculo:

$$x_{n+1}^k = g(x_n^k)$$

$$x_{n+2}^k = g(x_{n+1}^k)$$

Definamos:

$$d(x_n^k) = x_{n+1}^k - x_n^k$$

$$H(x_n^k) = x_{n+2}^k - 2x_{n+1}^k + x_n^k$$

$$y_{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} x_n^k - \frac{(d(x_n^k))^2}{H(x_n^k)}, \quad H(x_n^k) \neq 0 \\ x_n^k, \quad H(x_n^k) = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Así: } \left. \begin{array}{l} x_0^0 = y_0 \\ x_1^0 = g(x_0^0) \\ x_2^0 = g(x_1^0) \end{array} \right\} \rightarrow y_1 = x_0^0 - \frac{(x_1^0 - x_0^0)^2}{(x_2^0 - 2x_1^0 + x_0^0)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_0^1 = y_1 \\ x_1^1 = g(x_0^1) \\ x_2^1 = g(x_1^1) \end{array} \right\} \rightarrow y_2 = x_0^1 - \frac{(x_1^1 - x_0^1)^2}{x_2^1 - 2x_1^1 + x_0^1}$$

⋮
⋮
etc.

Si el denominador de la fórmula de Aitken es cero, entonces $y_{k+1} = y_k$, terminando así la iteración.

Proporcionaremos una manera equivalente de exponer el algoritmo con el propósito de estudiar su convergencia. Como $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1) = g(g(x_0))$ es conveniente definir para x en los reales

$$H(x) = g(g(x)) - 2g(x) + x$$

y

$$Y(x) = \begin{cases} x - \frac{(g(x) - x)^2}{H(x)}, & H(x) \neq 0 \\ x, & H(x) = 0 \end{cases}$$

Notemos que la función está bien definida.

2.3.3 Teorema de Convergencia

Sea g una función iterativa que cumple las hipótesis del teorema del punto fijo y g sea tres veces continuamente diferenciable, entonces, la sucesión $\{Y_n\}$ que genera el Algoritmo de Steffensen converge cuadráticamente a S , solución de $g(x) = x$.

Para ello bastará probar que cumple las hipótesis de la convergencia cuadrática:

- a) Y es dos veces continuamente diferenciable en un vecindario $x=S$.
- b) $Y'(S) = 0$ y
- c) Y satisface $Y(S) = S$.

Para demostrar que Y es dos veces continuamente diferenciable y facilitar el trabajo, introducimos una función auxiliar, definida como:

$$f(h) = \begin{cases} \frac{g(S+h) - S}{h}, & h \neq 0 \\ g'(S), & h = 0 \end{cases}$$

Cuyas dos primeras derivadas tienen respectivamente las siguientes expresiones:

$$f'(h) = \begin{cases} \frac{h g'(S+h) - g(S+h) + S}{h^2}, & h \neq 0 \\ g''(S)/2, & h = 0 \end{cases}$$

$$f''(h) = \begin{cases} \frac{h^2 g''(S+h) - 2h g'(S+h) + 2g(S+h) - 2S}{h^3}, & h \neq 0 \\ g'''(S)/3, & h = 0 \end{cases}$$

Notemos que f es al menos 2 veces continuamente diferenciable - cerca de $h=0$. Por la definición de f tenemos:

$$\begin{aligned} g(S+h) &= S + h f(h) \\ g(g(S+h)) &= g(S + h f(h)) \\ &= S + h f(h) f(h.f(h)) \end{aligned}$$

haciendo $x = S+h$

$$H(x) = g(g(x)) - 2g(x) + x = h F(h)$$

donde $F(h) = 1 - 2f(h) + f(h).f(h.f(h))$

Como f es dos veces continuamente diferenciable en un vecindario de h , tenemos entonces que F también lo es y $F(0) \neq 0$ ya que:

$$\begin{aligned} F(0) &= 1 - 2g'(S) + (g'(S))^2 \\ &= (1 - g'(S))^2 \neq 0 \end{aligned}$$

porque $g'(S) \neq 1$, ya que g cumple la Condición de Lipschitz. Para un valor de $x=h$ suficientemente pequeño, $F(x) \neq 0$ y $N(x) \neq 0$ y

$$Y(x) = x - \frac{(g(x) - x)^2}{H(x)}$$

si $x = S+h$, tenemos:

$$\begin{aligned} Y(S+h) &= S + h - \frac{(S+h.f(h) - S - h)^2}{h.F(h)} \\ Y(S+h) &= S + h - \frac{h(f(h) - 1)^2}{F(h)} \end{aligned}$$

esta representación de Y muestra que es dos veces continuamente diferenciable.

Como $F(0) \neq 0$, evaluando la función Y en S, se tiene:

$$Y(S) = S$$

además

$$Y'(S) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(S+h) - S}{h}$$

$$Y'(S) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 - \frac{(f(h) - 1)^2}{F(h)} \right)$$

$$Y'(S) = 1 - \frac{(f(0) - 1)^2}{F(0)}$$

$$Y'(S) = 1 - \frac{(g'(S) - 1)^2}{(g'(S) - 1)^2}$$

$$Y'(S) = 0$$

2.4 EL METODO DE NEWTON-RAPHSON

2.4.1 Condiciones Requeridas

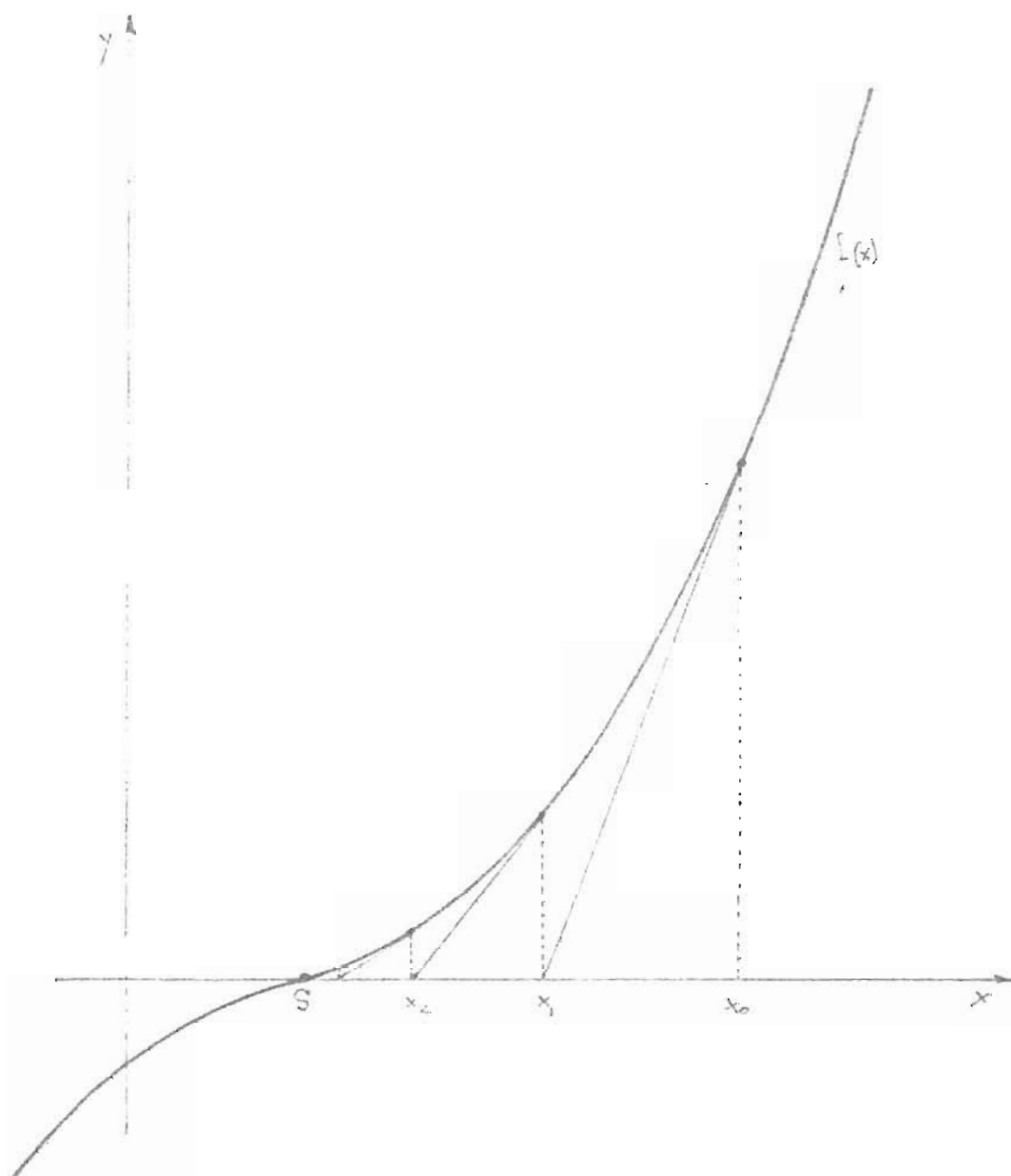
Es tal vez el más popular de todos los procesos iterativos para la resolución de ecuaciones. Proporciona una convergencia rápida y tiene sus peculiaridades que han de tenerse bien en cuenta.

Hipótesis

Dada una función 3 veces continuamente diferenciable en un intervalo $I = [a,b]$ tal que:

- i) $f(a).f(b) < 0$
- ii) $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

2.4.2 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL ALGORITMO DE NEWTON RAPHSON



En este caso se da que el Algoritmo de Newton-Raphson converge a la solución S tal que $f(S) = 0$, con la elección de un x_0 próximo a S .

2.4.3 Descripción del Algoritmo

Calculemos el valor de x_{n+1} tal que

$$g(x_n) = x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

luego evaluamos $f(x_{n+1})$ y nos preguntamos si $f(x_{n+1}) = 0 \pm \epsilon$. En el caso de que no se cumpla la anterior igualdad calculamos la siguiente iteración.

2.4.4 Etapas del Algoritmo

- Inicialización: Dar un valor de x_0 próximo a S .
- Cálculo de $f(x_n)$ y $f'(x_n)$ $n = 0, 1, 2, \dots$
- Luego cálculo de $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Prueba: Ver si $f(x_{n+1}) = 0 \pm \epsilon$
- Modificación: Calcular el nuevo término de la sucesión.

2.4.5 Rapidez de Convergencia

Sea $\{x_n\}$ la sucesión generada por el algoritmo de Newton-Raphson. Estudiemos su rapidez de convergencia.

El valor en la n -ésima iteración viene dado por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

restando S a ambos lados, se da que

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n - \frac{f(S + e_n)}{f'(S + e_n)} \\ &= \frac{e_n f'(S + e_n) - f(S + e_n)}{f'(S + e_n)} \end{aligned}$$

Haciendo el desarrollo de Taylor de segundo grado para el numerador y el denominador alrededor de S , tenemos que

$$e_n f'(S + e_n) - f(S + e_n) \approx \frac{f''(S)}{2} e_n^2$$

ya que $f(S) = 0$, y como $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$

$$e_{n+1} \approx \frac{\frac{f''(S)}{2} e_n^2}{f'(S)}$$

o mejor

$$e_{n+1} \approx \frac{f''(S)}{2 f'(S)} e_n^2$$

Podemos deducir de ello que su convergencia es cuadrática.

Nota

Conviene señalar en el algoritmo de Newton como en todos los demás algoritmos, que éstos son un caso particular del punto fijo. Dado -- que nosotros queremos la solución de $f(x) = 0$, con la condición en Newton de que $f'(x) \neq 0$ para todo x en $[a, b]$. Y claramente si se quiere una convergencia cuadrática, la función iterativa

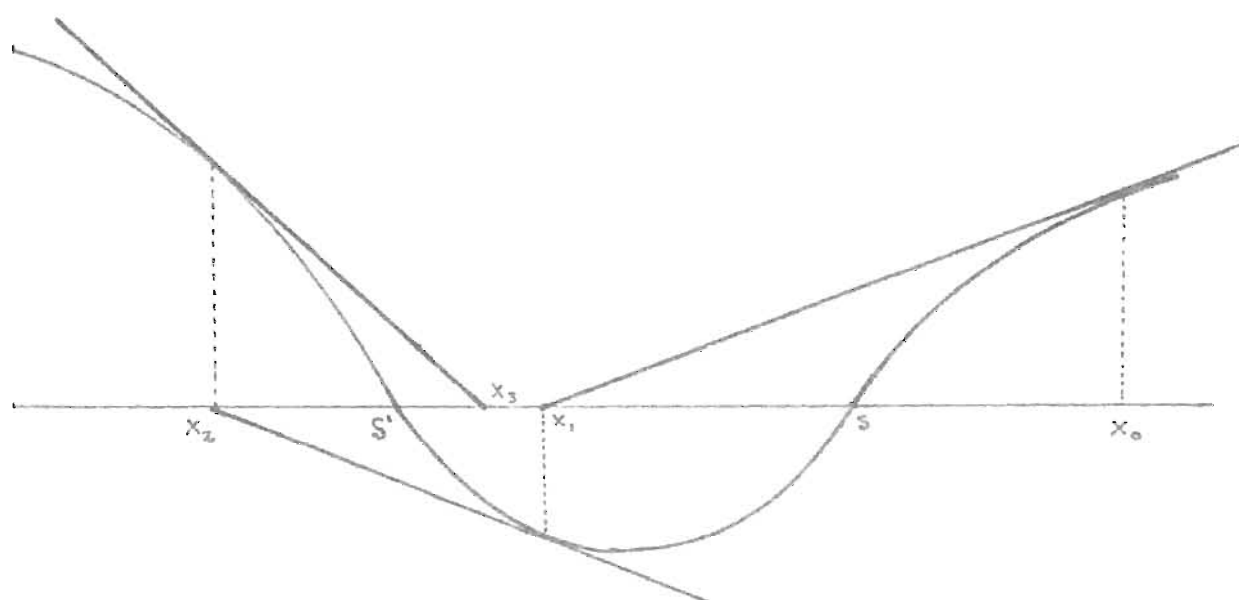
$$g(x_n) = x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

debe además cumplir de que $g'(S) = 0$ y $g(x)$ sea al menos 2 veces continuamente diferenciable.

2.4.6 Convergencia "no local".

Hemos trabajado el Algoritmo de Newton, siempre tomando un punto x_0 próximo a la raíz S . Esta proximidad es condición necesaria para la convergencia en Newton. Al tomar un punto x_0 no próximo a la raíz -- puede suceder que el algoritmo converja hacia otra raíz S' o no converja. Esto claramente se producirá cuando $f''(x)$ cambie de signo en un vecindario de la raíz como lo muestra la figura siguiente:

Cambio de S a S' por poca proximidad de x_0 a S .



2.4.7 Teorema de Convergencia para la elección de un punto arbitrario en $[a,b]$.

Si a las hipótesis anteriores del Algoritmo de Newton añadimos las siguientes condiciones:

1ra. Que $f''(x)$ no cambie de signo dentro del intervalo.

2da. Sea c el extremo de $[a,b]$ donde $|f'(x)|$ es más pequeña y $\left| \frac{f(c)}{f'(c)} \right| \leq (b-a)$.

Entonces el Algoritmo de Newton converge a S en $[a,b]$ para cualquier elección de x_0 en el intervalo anterior.

Bajo las hipótesis anteriores se pueden dar los siguientes casos:

- | | | | | |
|----|-------------|-------------|-----------------|-----------|
| a) | $f(a) > 0,$ | $f(b) < 0,$ | $f''(x) \leq 0$ | $(c = a)$ |
| b) | $f(a) > 0,$ | $f(b) < 0,$ | $f''(x) \geq 0$ | $(c = b)$ |
| c) | $f(a) < 0,$ | $f(b) > 0,$ | $f''(x) \geq 0$ | $(c = a)$ |
| d) | $f(a) < 0,$ | $f(b) > 0,$ | $f''(x) \leq 0$ | $(c = b)$ |

2.4.7.1 Prueba para el caso a)

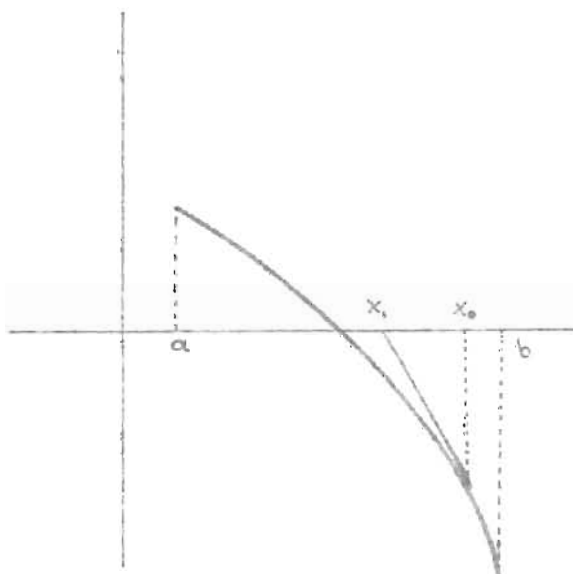
Sea S la única solución en $[a,b]$ de $f(x) = 0$. Supongamos primeramente que

$$S \leq x_0 \leq b,$$

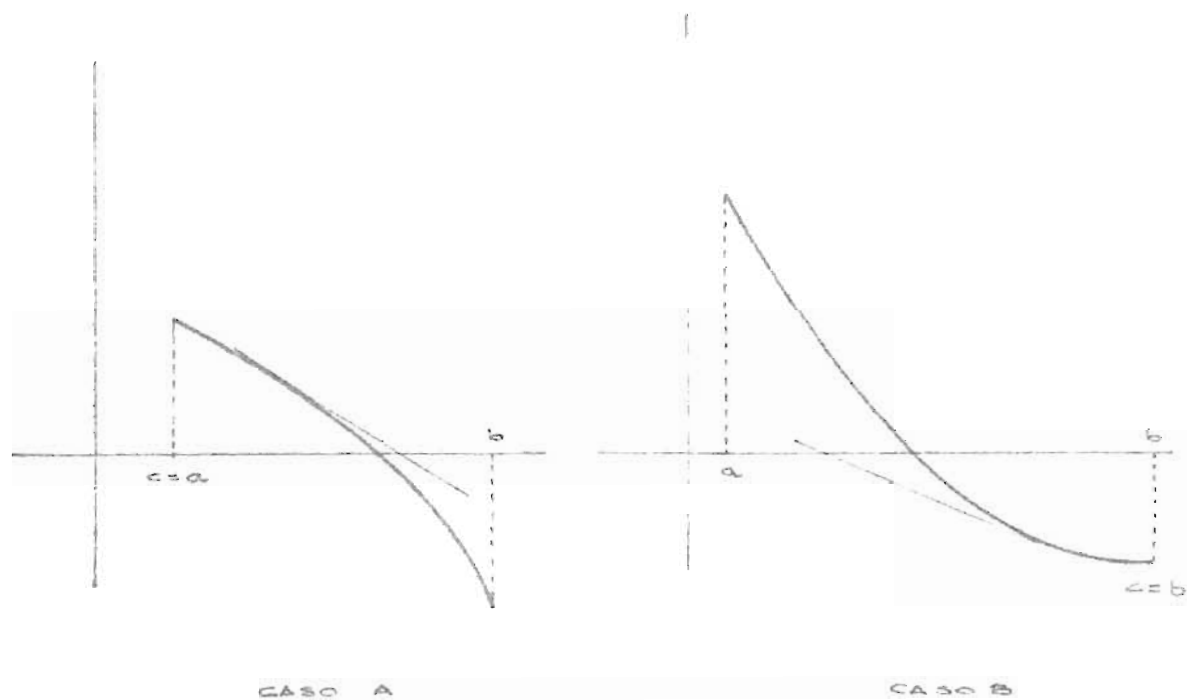
tenemos que: $f(x_0) \leq 0$

y que $f'(x_0) < 0$

$$\text{luego } x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq x_0.$$

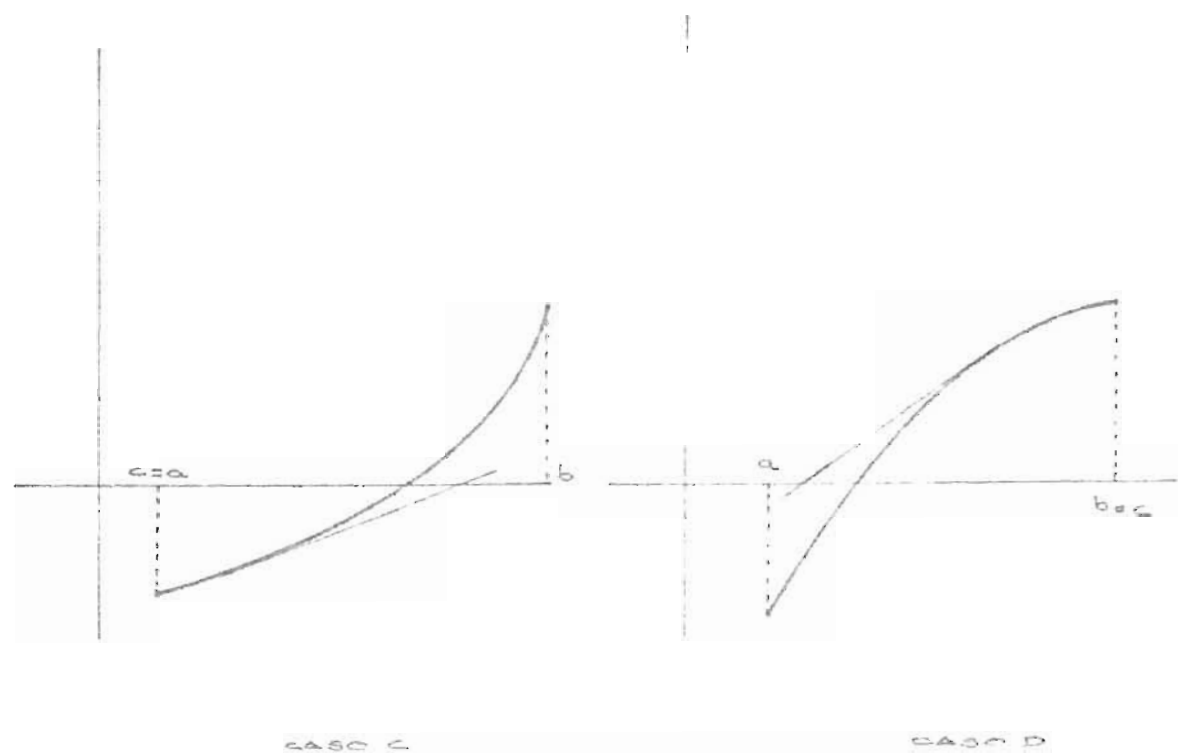


INTERPRETACION GEOMETRICA
DE LAS CUATRO SITUACIONES...



CASO A

CASO B



CASO C

CASO D

Probaremos por inducción que $\{x_n\}$ es acotada inferiormente y monótona de creciente. $(x_n \geq S)$ y $(x_{n+1} \leq x_n)$.

Para $n=0$ se cumple por lo anterior. Supongamos que es cierto para $n = k-1$, tenemos

$$x_{k-1} \leq S \quad \text{y} \quad x_{k-1} \leq x_k.$$

Como $f(x_{k-1}) - f(S) = (x_{k-1} - S)f'(x_{k-1}^*)$ por el Teorema del Valor Medio y por hipótesis inductiva $S \leq x_{k-1}^* \leq x_k$ y $f'(x)$ decreciente para todo $x \in I$.

$$\begin{aligned} \text{Obtenemos que } f'(x_{k-1}^*) &\geq f'(x_{k-1}) \text{ luego} \\ f(x_{k-1}) &\geq (x_{k-1} - S) f'(x_{k-1}) \quad \text{también} \quad \frac{-f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \geq S - x_{k-1} \end{aligned}$$

$$\text{de donde } x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \geq S.$$

Por lo tanto $x_k \geq S$.

De lo anterior podemos obtener que $f(x_k) \leq 0$ y $f'(x_k) < 0$,

$$\text{luego } x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \leq x_k \quad \text{con lo que completamos la inducción.}$$

Como toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente tiene un límite, podemos decir que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = w$ donde $w \geq S$. Al sustituir

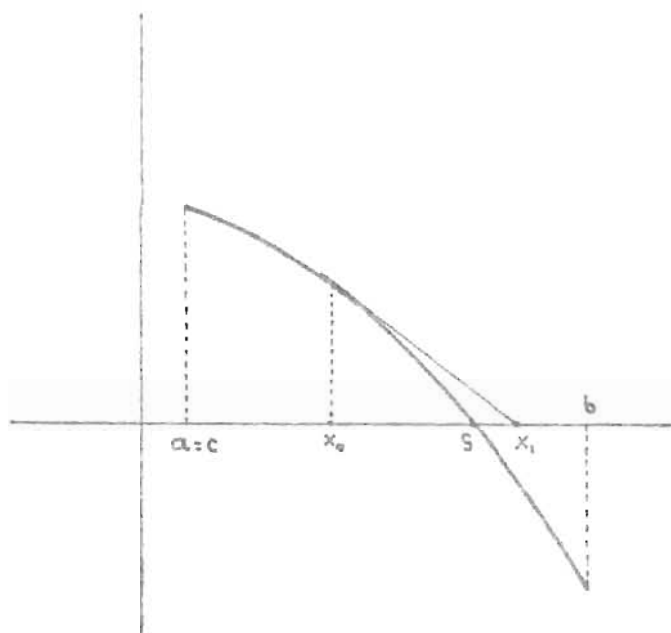
esta relación queda:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ya que f y f' son continuas tenemos que $w = w - \frac{f(w)}{f'(w)}$ de donde $f(w) = 0$

y para que se cumpla lo anterior se deriva que $w = S$.

Consideremos el caso en que $a \leq x_0 \leq S$.



Por el teorema del valor medio

$$f(S) - f(x_0) = f'(x_0^*)(S - x_0)$$

$$\text{con } x_0 \leq x_0^* \leq S$$

f' es decreciente, por lo tanto

$$f'(x_0) \geq f'(x_0^*) \quad \text{y como}$$

$$f'(x_0) \leq 0 \quad \text{se tiene}$$

$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geq S - x_0$$

y

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geq S \quad (1)$$

Veamos ahora si $x_1 \leq b$

$$\text{Por t.v.m. } f(b) - f(x_0) = (b-x_0) f'(x_0^*) \quad \text{con } x_0 \leq x_0^* \leq b$$

$$\text{o } f(x_0) = f(b) - (b-x_0) f'(x_0^*)$$

tenemos por (1) que:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq x_0 - \frac{f(a)}{f'(a)} - (x_0 - a)$$

Nota: Véase la interpretación geométrica.

Como $-\frac{f(a)}{f'(a)} = b-a$ por hipótesis; tenemos que

$$x_1 \leq x_0 + (b-a) - (x_0 - a) = b$$

Generalizando todos los casos

Podemos reducir el caso c) al caso a) y el d) al b) basta considerar la función $-f$ en lugar de f ; y el caso c) se reduce al a) reemplazando x por $-x$.

La sucesión $\{x_n\}$ se transforma en $\{-x_n\}$ que converge a $-S$. Es pues suficiente probar el caso a).

2.4.8 Aplicación del Algoritmo de NewtonA. Cálculo de la raíz r -ésima de un número A .

Este método de encontrar raíces proviene de la resolución de la ecuación $x^r - A = 0$. El método de Newton, con $f(x) = x^r - A$ nos da el siguiente algoritmo

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^r - A}{r x_n^{r-1}} \\ &= \frac{r x_n^{r-1} x_n - x_n^r + A}{r x_n^{r-1}} \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{x_n^r (r-1)}{x_n^{r-1}} + \frac{A}{x_n^{r-1}} \right] \\ \therefore x_{n+1} &= \frac{1}{r} \left[(r-1)x_n + \frac{A}{x_n^{r-1}} \right] \end{aligned}$$

En especial para $r=2$, tenemos la raíz cuadrada de un número A

y

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left[x_n + \frac{A}{x_n} \right]$$

Este es un ejemplo de convergencia "no local" ya que $f(x) = x^2 - A$ cumple las hipótesis requeridas; $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ para $x > 0$ (caso c), de donde $S = \sqrt{A}$, y $b \geq \frac{1}{2} \left(a + \frac{A}{a} \right)$ que garantizan $\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| \leq b-a$, 2da. hipótesis del teorema de convergencia "no local". La pendiente más suave está en a . Por lo tanto la sucesión converge para $x_0 \in \left] 0, \frac{1}{2} \left(a + \frac{A}{a} \right) \right[$.

B. Raíces de multiplicidad p

Es posible también generalizar el Algoritmo de Newton para el caso en el cual la raíz S sea de multiplicidad p . Es el caso en que $f'(S) = 0$ y que habíamos puesto como condición su no cumplimiento en las hipótesis.

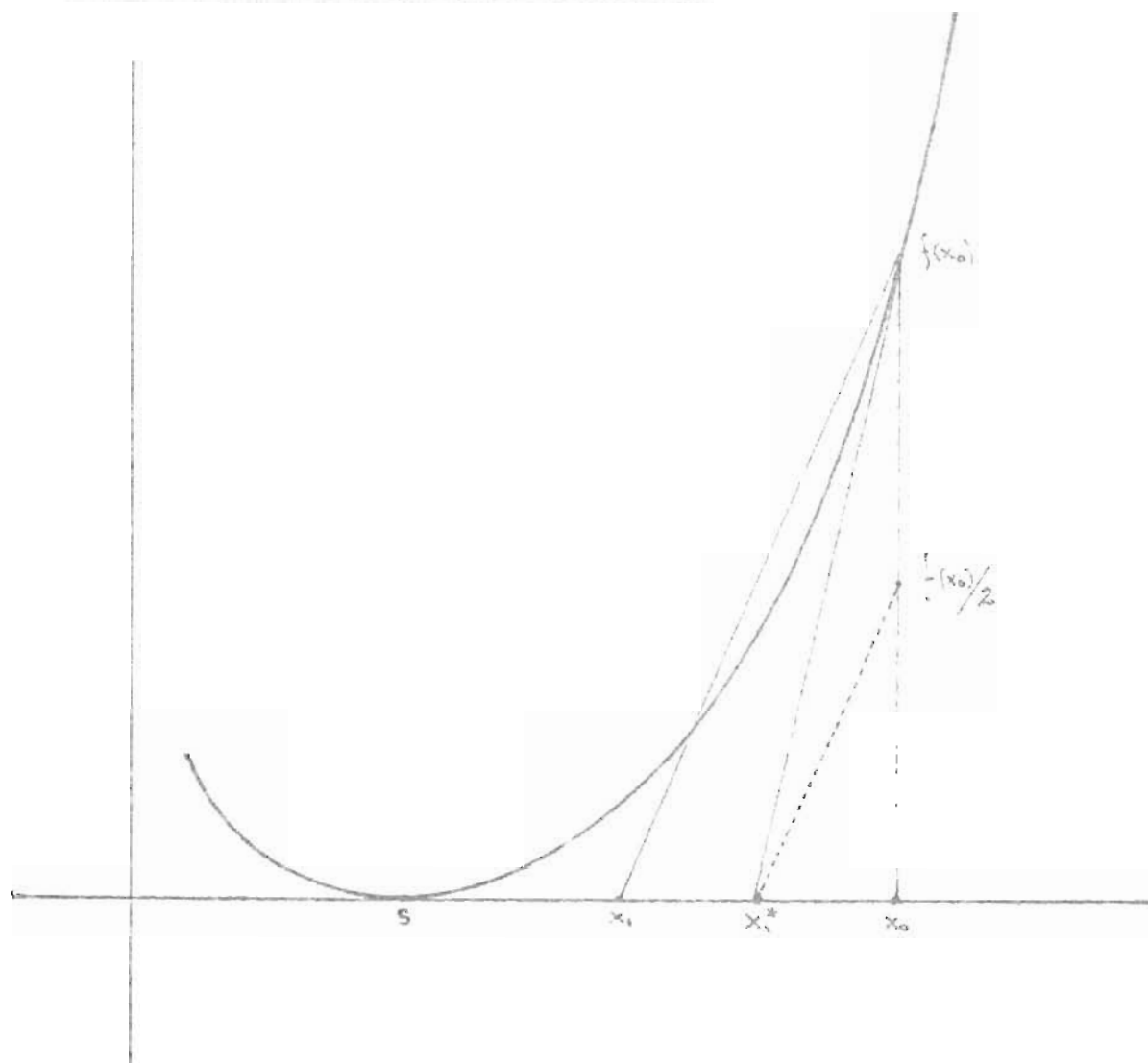
Haciendo $h(x) = f(x)^{1/p}$ tenemos que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^{1/p}}{\frac{1}{p} f(x_n)^{(1/p)-1} \cdot f'(x_n)}$$

$$\therefore x_{n+1} = x_n - p \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

C. La interpretación geométrica para $p=2$



La interpretación geométrica de $x_{n+1} = x_n - 2 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ es la si

guiente: A la iteración normal del Algoritmo de Newton

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ se le asigna el doble para evitar una convergencia

lineal. Gráficamente se encuentra x_1 buscando primero $x_1^* = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Luego se une x_1^* con $f(x_0)/2$. A partir de $f(x_0)$ trazo una paralela a $\frac{f(x_0)}{2}$, x_0^* y el lugar donde corte al eje X será x_1 .

2.4.9 Cota de error para el Algoritmo de Newton

Nuestro propósito es encontrar una cota para el error $|x_n - S|$ después de un número finito de pasos. El Algoritmo de Newton nos dice que

$$g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Sea $h(x_n) = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1} - x_n$ para x en el conjunto de los Reales, definamos

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad y$$

$$|h| \geq \left| \frac{f(x)}{f'(x)} \right|$$

donde $g(x)$ es una función que cumple las hipótesis del Teorema del Punto Fijo, teniendo por ello su cota de error adecuada

$$|x_n - S| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

Con $|g'(x)| = L < 1$. Derivando $g(x)$ obtenemos:

$$\left| g'(x) \right| = \left| \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f''(x)}{f'(x)} \right| = L < 1 \quad (2)$$

Sea $M = \sup_I \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right|$ de donde obtenemos la siguiente relación con (2)

$$L \leq M |h|$$

$$y \quad \frac{L}{1-L} \leq \frac{M |h|}{1 - M |h|}$$

$$\text{Luego } |x_n - S| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{L |h|}{1-L}$$

$$\text{Por lo tanto } |x_n - S| \leq \frac{M |h|^2}{1 - M |h|}$$

PROGRAMA 6

Variables del programa número 6, por orden de aparición:

Y,Z = Valores Iniciales.

X(50) = Dimensión de la sucesión de Newton-Raphson.

S(50) = Dimensión de la sucesión de Steffensen.

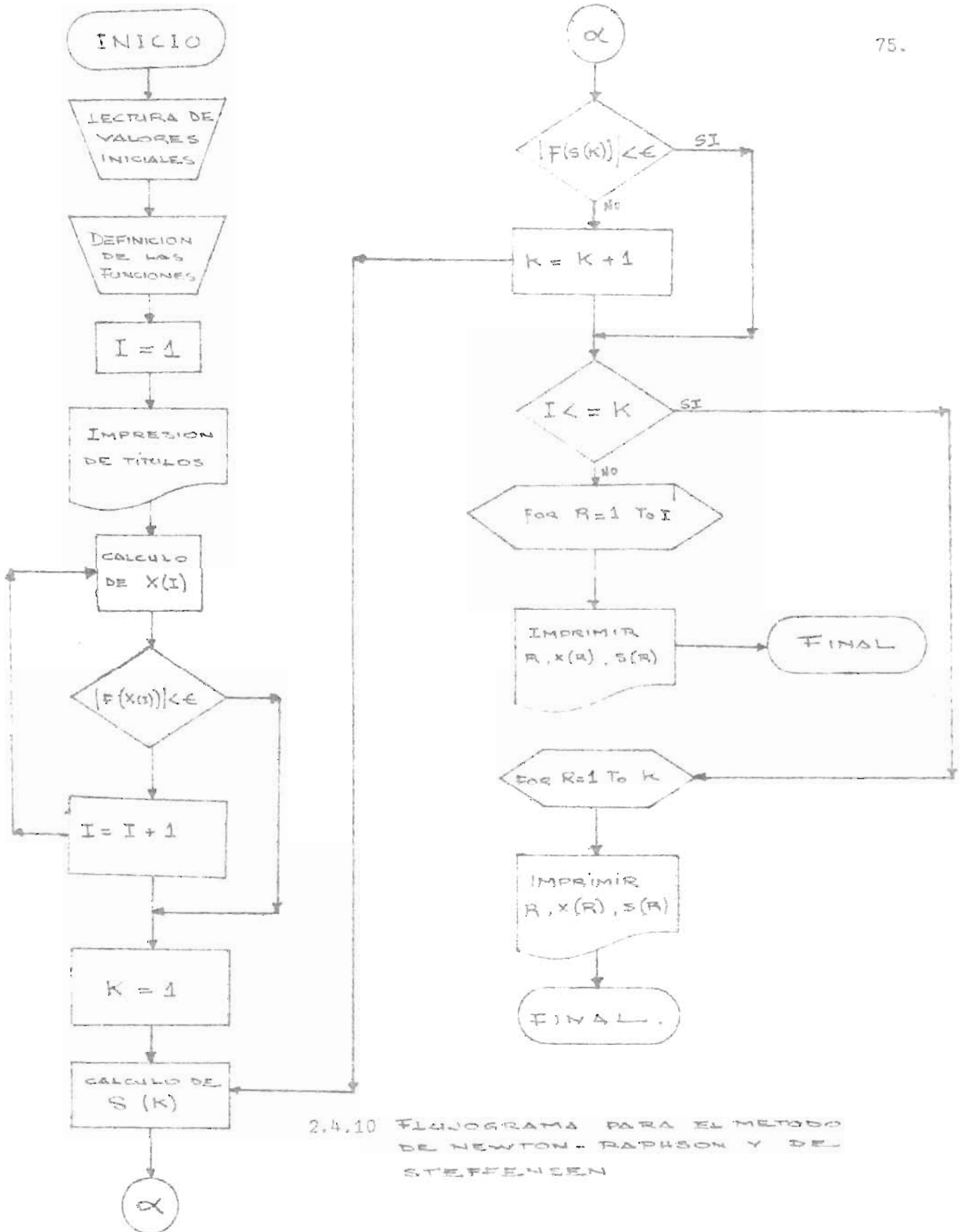
X(1) = Valor Inicial.

FNA(X) = Función.

FNB(X) = Derivada de la función.

FNC(X) = Función iterativa.

I,K,R = Contadores.



2.4.10 FLUJOGRAMA PARA EL METODO DE NEWTON-RAPHSON Y DEL STEFFENSEN

```

10 REM METODO DE NEWTON RAPHSON Y METODO DE STEFFENSEN
20 REM ENCONTRAR LA RAIZ DE LA ECUACION F(X)=X-0.2*SEN(X)-0.5
30 Y=0
40 Z=0
50 DIM X(50),S(50)
60 X(1)=1
70 DEF FNA(X)=X-0.2*SIN(X)-0.5
80 I=1
90 PRINT "ITERACIONES", "NEWTON-RAPHSON",TAB(35),"STEFFENSEN"
100 PRINT " N", " X(I) ",TAB(38)," S(I)
110 DEF FNB(X)=1-0.2*COS(X)
120 X(I+1)=X(I)-(FNA(X(I)))/(FNB(X(I)))
130 IF ABS(FNA(X(I)))<1E-10 THEN 160
140 I=I+1
150 GOTO 120
160 S(1)=X(1)
170 Y=FNC(X(1))
180 Z=FNC(Y)
190 K=1
200 DEF FNC(S)=0.2*SIN(S)+0.5
210 S(K+1)=S(K)-(Y-S(K))^2/(Z-2*Y+S(K))
220 Y=FNC(S(K+1))
230 Z=FNC(Y)
240 IF (ABS(FNC(S(K))-S(K))<1E-10) THEN 270
250 K=K+1
260 GOTO 210
270 IF I <= K THEN 320
280 FOR R=1 TO I
290 PRINT R,X(R),TAB(35),S(R)
300 NEXT R
310 GOTO 350
320 FOR R=1 TO K
330 PRINT R,X(R),TAB(35),S(R)
340 NEXT R
350 END

```

ITERACIONES	NEWTON-RAPHSON	STEFFENSEN
N	X(I)	S(I)
1	1	1
2	0.628187300	0.617879853
3	0.615479304	0.615468199
4	0.615468170	0.615468168

CAPITULO III
ITERACION PARA LA SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES

3.1 ESTUDIO DEL VECTOR FIJO

3.1.1 Resolución de un Sistema de Ecuaciones

Los anteriores algoritmos son aplicables a ecuaciones lineales y no lineales, siempre dentro del conjunto de los números Reales. Nuestro propósito es el de generalizar lo visto anteriormente para sistemas de ecuaciones.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

que tiene n ecuaciones con n incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n . Trataremos de encontrar una raíz S en la ecuación vectorial $f(X) = 0$; considerando los vectores en \mathbb{R}^n . O sea que:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad f(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(X) \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \end{pmatrix}$$

Las funciones f_1, f_2, \dots, f_n son supuestas continuas y con relación a nuestro conjunto de variables, x_1, x_2, \dots, x_n , diferenciables hasta el orden deseado.

3.1.2 Algoritmo del Vector Fijo

Sea G una función definida así, $G: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tal que

$$G(X) = X \pm f(X).$$

Donde $f(X)$ es una función a la cual queremos encontrar su solución en D para $f(X) = 0$.

Nuestro algoritmo vendrá definido de la siguiente forma:

$$X_{n+1} = G(X_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En el siguiente teorema veamos bajo qué condiciones el algoritmo $X_{n+1} = G(X_n)$ converge hacia la raíz S en D a partir de un vector inicial X_0 .

Nota: Sean X, Y vectores arbitrarios. La expresión $\|G(X) - G(Y)\| \leq L \|X - Y\|$ llamada condición de Lipschitz, desarrollada para una función $G: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es condición suficiente para que: $\|J_G(X)\| < L$.

Tenemos que:

$$\begin{bmatrix} G_1(X) - G_1(Y) \\ G_2(X) - G_2(Y) \\ \vdots \\ G_n(X) - G_n(Y) \end{bmatrix} \leq L \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{bmatrix}, \text{ por otra parte}$$

por el Teorema del Valor Medio,

$$\begin{bmatrix} G_1(X) - G_1(Y) \\ G_2(X) - G_2(Y) \\ \vdots \\ G_n(X) - G_n(Y) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1^*} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_2^*} \\ \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_n^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{bmatrix}$$

donde $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ y $X^* \in \bar{B}(X^*, \delta)$ y $\delta = d(X, Y)$. Por comparación de las dos desigualdades podemos establecer que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \leq L < 1, \text{ de donde } \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} < 1$$

3.1.3 Teorema del Vector Fijo

- Sea $\bar{B} \subset D$ la bola cerrada con centro w y un radio apropiado r , donde $r \in \mathbb{R}^+$. La designaremos por $\bar{B}(w, r)$.
- G la función iterativa continua en D .
- Si para todo $X \in \bar{B}(w, r)$ se tiene que $G(X) \in \bar{B}(w, r)$.
- Y si existe una constante $k \in \mathbb{R}^+$, con $0 \leq k \leq 1$, tal que dados X_1 y $X_2 \in \bar{B}(w, r)$ se tiene que

$$\|G(X_1) - G(X_2)\| \leq k \|X_1 - X_2\|$$

Entonces: La ecuación $X = G(X)$ ó $G(X) = X \pm f(X)$ admite una sola raíz $S \in \bar{B}(w, r)$. Siendo S el límite de la sucesión $X_0, X_1 = G(X_0), X_2 = G(X_1), \dots, X_{n+1} = G(X_n), \dots$ cualquiera que sea la escogencia del vector inicial X_0 .

Demostración: Probaremos.

- a) La existencia y convergencia en S para la sucesión X_n .
- b) La unicidad de la solución $S \in D$.

Para a). Tomemos la matriz jacobiana de la función $G: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$J_G(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Dados X_0 y $X_1 \in \overline{B}(w, r)$ y aplicando el Teorema del Valor Medio en n variables se tiene que:

$$X_1 - S = G(X) - G(S) = J(\xi)(X_0 - S)$$

$$\text{donde } \xi \in \overline{B}(X_0, r) \subset \overline{B}$$

$$\text{y } r_1 = d(X_0, S)$$

se deduce que $\|X_1 - S\| \leq k \|X_0 - S\|$ donde $k \in \mathbb{R}$ y $\forall x \in \overline{B}$;

$\|J_G(X)\| \leq k < 1$, dada la "suficiencia" con la condición de Lipschitz.

De manera análoga a como se vió en el punto fijo, se deduce que:

$$\|X_n - S\| \leq k^n \|X_0 - S\|, \text{ de donde se tiene que:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = S, \text{ ya que } 0 \leq k < 1.$$

Ahora bien, dado que la sucesión $\{X_n\}$ \in a la bola cerrada $\overline{B}(w, r) \subset D \subset \mathbb{R}^n$ y \mathbb{R}^n es un espacio métrico, y el $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = S$. Entonces tenemos que $S \in \overline{B}(w, r)$.

Nota: (Proposición 11, página 84 Topología de Mauricio Marroquín Escoto).

Para b). Unicidad de la solución S

Sean S_1 y S_2 dos soluciones distintas de $\{X_n\}$ tales que $S_1 = G(S_1)$ y $S_2 = G(S_2)$; entonces se tiene que:

$$\|S_1 - S_2\| = \|G(S_1) - G(S_2)\| \leq k \|S_1 - S_2\|$$

$$< \|S_1 - S_2\| \quad \text{por } 0 \leq k < 1$$

de donde se tiene $\|S_1 - S_2\| < \|S_1 - S_2\|$ lo cual es una contradicción; se

deduce pues que $S_1 = S_2$.

Con esto hemos probado que las hipótesis anteriores son suficientes para garantizarnos que en el Dominio de G no es posible la existencia de dos vectores fijos; es decir de dos soluciones de la ecuación $f(X) = 0$.

3.2 CONVERGENCIA CUADRÁTICA: NEWTON-RAPHSON

3.2.1 Convergencia cuadrática para Sistemas de Ecuaciones

Supongamos que la función G cumple las condiciones del "vector fijo S ". Y G es por lo menos dos veces continuamente diferenciable. Aproximando por Taylor la función G en el valor x_n , alrededor del vector fijo S , por un polinomio de primer grado, tenemos que:

$$G(X_n) = G(S) + (X_n - S) J_G(S) + \frac{(X_n - S) J_G^{(2)}(C)}{2!}$$

donde $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ y $C \in B(S, \delta)$ con $\delta = d(S, X_n)$

y donde

$$J_G^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial c_1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial c_i} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial c_n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial c_i} \right) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial c_1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial c_i} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial c_n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial c_i} \right) \end{bmatrix}$$

Si se cumple que $J_G(S) = 0$ entonces:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{J_G^{(2)}(C)}{2!} \quad \text{donde} \quad e_n = X_n - S \quad (n = 0, 1, \dots)$$

y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{e_n} = \frac{J_G^{(2)}(S)}{2!}$ ya que cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene que $C \rightarrow S$ y

G es dos veces continuamente diferenciable, por lo tanto

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2 J_G^{(2)}(S)}{2!}$$

3.2.2 Newton-Raphson en Sistemas de Ecuaciones

A. Su obtención.

En el caso de querer solucionar $f(X) = 0$, el Algoritmo de Newton-Raphson se puede obtener a partir del siguiente desarrollo.

Construyamos un polinomio de grado ≤ 1 alrededor de $X_n \in \bar{B}(w,r)$.

Estará definido de la siguiente forma:

$$f(X) = f(X_n) + J(X_n)(X - X_n) + \frac{J_f^{(2)}(C^*)(X - X_n)^2}{2!}$$

$C^* = (c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*)$ y donde $C^* \in B(X_n, \epsilon)$ y $\epsilon = d(X_n, X)$.

Buscando la solución de un sistema de ecuaciones $f(X) = 0$ y reteniendo la parte lineal, tenemos:

$$0 = f(X_n) + J(X_n)(X - X_n) \quad \text{de donde}$$

$$X = X_n - J^{-1}(X_n) f(X_n). \quad \text{Haciendo } X = X_{n+1}, \text{ ya que es una}$$

nueva aproximación, y si $J(X_n) \neq 0$ para $n = 0, 1, \dots$ se tiene

$$X_{n+1} = X_n - J^{-1}(X_n) f(X_n);$$

obteniéndose así el Algoritmo de Newton-Raphson para Sistemas de Ecuaciones.

Si converge, obtenemos la raíz S del sistema $f(X) = 0$.

Nota: Este algoritmo estará bien definido si el jacobiano J no se anula en ningún vector de la sucesión $\{X_n\}$.

Obtendremos una convergencia a S con un vector inicial X_0 suficientemente próximo a S . Por similitud en una variable habrá una duplicidad en las cifras para cada paso iterativo, característica fundamental de toda convergencia cuadrática. Como se muestra en tema de la siguiente sección.

3.2.3 Convergencia Cuadrática de Newton-Raphson en Sistemas de Ecuaciones

La sucesión generada por el Algoritmo de Newton-Raphson converge a S . Nuestro objetivo es mostrar que esa convergencia es cuadrática.

Para ello definamos $G: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $G(X) = X - \frac{f(X)}{J_f(X)}$; de donde $G(X_n) = X_n - \frac{f(X_n)}{J_f(X_n)}$. Derivando la función G obtenemos:

$$J_G(X) = I - \frac{[J_f(X)]^2 - f(X) J_f^{(2)}(X)}{[J_f(X)]^2}$$

de donde

$$J_G(X) = I - I + \frac{f(X) J_f^{(2)}(X)}{[J_f(X)]^2}$$

$$J_G(X) = \frac{f(X) J_f^{(2)}(X)}{[J_f(X)]^2}$$

evaluando en S tenemos que:

$$J_G(S) = \frac{f(S) J_f^{(2)}(S)}{[J_f(S)]^2}$$

Como $f(S) = 0$ y $J_f(S) \neq 0$ se tiene que $J_G(S) = 0$,

lo que nos indica que el Algoritmo de Newton-Raphson para Sistemas de Ecuaciones cumple las hipótesis de la convergencia cuadrática.

3.2.4 Utilización del Algoritmo de Newton-Raphson

Del punto de vista práctico el Algoritmo de Newton-Raphson puede ser utilizado bajo la siguiente forma:

$$J(X_n) \Delta X_n = -f(X_n) \quad (*)$$

Con la ventaja de que este sistema puede utilizarse sin el empleo de la matriz inversa $J^{-1}(X_n)$, y proporcionará las correcciones $\Delta X_0, \Delta X_1, \dots$ a los puntos:

$$X_1 = X_0 + \Delta X_0$$

$$X_2 = X_1 + \Delta X_1$$

.

.

. y en general

$$X_{n+1} = X_n + \Delta X_n$$

(*) Nota: ΔX_n se define como: $\Delta X_n = X_{n+1} - X_n$ o más claramente:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{n,1} \\ \Delta x_{n,2} \\ \vdots \\ \Delta x_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1,1} \\ x_{n+1,2} \\ \vdots \\ x_{n+1,n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ \vdots \\ x_{n,n} \end{pmatrix}$$

3.2.5 Solución General de Newton-Rapson para n-variables

Tenemos que: $J(X_n) \cdot \Delta(X_n) = -f(X_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{n,1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n,2}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n,n}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{n,1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n,2}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n,n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{n,1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n,2}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n,n}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_{n,1} \\ \Delta x_{n,2} \\ \vdots \\ \Delta x_{n,n} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}) \\ f_2(x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}) \\ \vdots \\ f_n(x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}) \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} nxn & & nx1 & & nx1 \end{matrix}$

que nos proporciona el siguiente sistema de n-ecuaciones con n-incógnitas resoluble por cualquier sistema de eliminación.

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_{n,1}} \cdot \Delta x_{n,1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_{n,2}} \cdot \Delta x_{n,2} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_{n,n}} \cdot \Delta x_{n,n} = -f_1(x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{n,1}} \cdot \Delta x_{n,1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_{n,2}} \cdot \Delta x_{n,2} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_{n,n}} \cdot \Delta x_{n,n} = -f_2(x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{n,1}} \cdot \Delta x_{n,1} + \frac{\partial f_n}{\partial x_{n,2}} \cdot \Delta x_{n,2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_{n,n}} \cdot \Delta x_{n,n} = -f_n(x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}) \end{cases}$$

Notación: $X_{n,i} = \begin{cases} i: i\text{-ésima componente } i = 1, \dots, n \\ n: n\text{-ésima iteración } n = 0, 1, \dots \end{cases}$

Nota: El anterior sistema de ecuaciones tendrá solución única siempre que las filas

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_{n,1}} \cdot \Delta x_{n,1} + \frac{\partial f_i}{\partial x_{n,2}} \cdot \Delta x_{n,2} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_{n,n}} \cdot \Delta x_{n,n}$$

sean linealmente independientes y si los $-f_i(x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n})$ pueden ser escritos como combinación lineal de las anteriores filas.

3.2.6 Ejemplo

La resolución del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ xy + x - 1 = 0 \end{cases}$$

Utiliza el Algoritmo de Newton de la siguiente forma:

dado $J(X_n) \Delta(X_n) = -f(X_n)$

para nuestro caso puede aplicarse

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(x_n, y_n) \\ f_2(x_n, y_n) \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1(x_n, y_n)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n + \frac{\partial f_1(x_n, y_n)}{\partial y_n} \cdot \Delta y_n = -f_1(x_n, y_n) \\ \frac{\partial f_2(x_n, y_n)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n + \frac{\partial f_2(x_n, y_n)}{\partial y_n} \cdot \Delta y_n = -f_2(x_n, y_n) \end{cases}$$

Y obtendríamos

$$\begin{cases} 2x_n \Delta x_n + 2y_n \Delta y_n = -(x_n^2 + y_n^2 - 1) \\ (y_{n+1}) \Delta x_n + x_n \Delta y_n = -(x_n y_n + x_{n-1}) \end{cases}$$

Resolviendo por Cramer obtendríamos en general que

$$\Delta x_n = \frac{\begin{vmatrix} -f_1(x_n, y_n) & \frac{\partial f_1(x_n, y_n)}{\partial y_n} \\ -f_2(x_n, y_n) & \frac{\partial f_2(x_n, y_n)}{\partial y_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x_n, y_n)}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1(x_n, y_n)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2(x_n, y_n)}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2(x_n, y_n)}{\partial y_n} \end{vmatrix}} \quad \text{y que}$$

$$\Delta y_n = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x_n, y_n)}{\partial x_n} & -f_1(x_n, y_n) \\ \frac{\partial f_2(x_n, y_n)}{\partial x_n} & -f_2(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x_n, y_n)}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1(x_n, y_n)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2(x_n, y_n)}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2(x_n, y_n)}{\partial y_n} \end{vmatrix}}$$

Y en nuestro caso especial:

$$\Delta x_n = \frac{\begin{vmatrix} -x_n^2 - y_n^2 + 1 & 2y_n \\ -x_n y_n - x_n + 1 & x_n \\ (y_{n+1}) & x_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x_n & 2y_n \\ (y_{n+1}) & x_n \end{vmatrix}} = \frac{x_n(-x_n^2 - y_n^2 + 1) - 2y_n(-x_n y_n - x_n + 1)}{2x_n^2 - 2y_n(y_{n+1})}$$

$$\Delta y_n = \frac{\begin{vmatrix} 2x_n & -x_n^2 - y_n^2 + 1 \\ (y_{n+1}) & -x_n y_n - x_n + 1 \\ 2x_n & 2y_n \\ (y_{n+1}) & x_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x_n & 2y_n \\ (y_{n+1}) & x_n \end{vmatrix}} = \frac{2x_n(-x_n y_n - x_n + 1) - (y_{n+1})(-x_n^2 - y_n^2 + 1)}{2x_n^2 - 2y_n(y_{n+1})}$$

$$\text{Como definimos } X_{n+1} = X_n + \Delta X_n$$

Nuestro vector

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta x_n \\ y_{n+1} = y_n + \Delta y_n \end{cases}$$

Para nuestro caso

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n(-x_n^2 - y_n^2 + 1) - 2y_n(-x_n y_n - x_n + 1)}{2x_n^2 - 2y_n(y_{n+1})}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2x_n(-x_n y_n - x_n + 1) - (y_n + 1)(-x_n^2 - y_n^2 + 1)}{2x_n^2 - 2y_n(y_n + 1)}$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

3.3 ITERACION DE STEFFENSEN PARA SISTEMAS DE ECUACIONES

3.3.1 Método de Steffensen para Sistemas de Ecuaciones

Surge la inquietud de aplicar la iteración de Steffensen a los sistemas de ecuaciones, dado que por este método obtuvimos antes una convergencia cuadrática.

Al estudiarlo en Sistemas de Ecuaciones es claro que tiene que presentar notables modificaciones, debido a que sus elementos de trabajo son ahora vectores.

Denotamos por $\{X_n\}$ a la sucesión de vectores generada por el Algoritmo del vector fijo. S es el vector solución de $X_{n+1} = G(X_n)$ y e_{n+1} es el vector error en el n ésimo paso.

3.3.2 Obtención del Algoritmo

Partimos de la aproximación de Taylor de la función iterativa G , alrededor del vector S .

Suponemos, como en el caso de una variable, que la función G cumple las hipótesis del vector fijo y es por lo menos tres veces diferenciable en un vecindario de $X = S$.

Obtenemos

$$G(X) = G(S) + J_G(S)(X-S) + \frac{J_G^{(2)}(S)(C)(X-S)^2}{2!}$$

donde $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ y $C \in B(X, \delta)$ con $\delta = d(X, S)$.

Iterativamente,

$$G(X_n) = G(S) + J_G(S)(X_n - S) + \frac{J_G^{(2)}(S)(C)(X_n - S)^2}{2!}.$$

Reteniendo su parte lineal obtenemos:

$$G(X_n) = G(S) + J_G(S) (X_n - S)$$

o

$$\boxed{X_{n+1} - S = J_G(S) (X_n - S)}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad (\alpha)$$

iterando la expresión anterior obtenemos

$$X_{n+2} - S = J_G(X_{n+1} - S) \text{ y restando ambas}$$

$$X_{n+2} - X_{n+1} = J_G(X_{n+1} - X_n)$$

o por notación de diferencias:

$$\boxed{\Delta X_{n+1} = J_G \Delta X_n}$$

(\beta)

resolviendo para S en (\alpha)

$$S - J_G S = X_{n+1} - J_G X_n$$

$$(I - J_G)S = X_{n+1} - X_n + X_n - J_G X_n$$

$$\text{o} \quad (I - J)S = \Delta X_n + (I - J_G)X_n$$

Si suponemos que $(I - J_G)$ es una matriz no singular,

$$S = (I - J_G)^{-1} \Delta X_n + X_n$$

$$\boxed{S = X_n + (I - J_G)^{-1} \Delta X_n}$$

(\gamma)

Nuestro problema ahora es que desconocemos $J_G(S)$. Para ello -- buscaremos una equivalencia con datos conocidos.

a) Definamos la matriz

$$\underline{X}_n = (X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+N-1})$$

donde X_n es el n -ésimo vector de la sucesión $\{X_n\}$, N representa el número de componentes del vector. Más claramente, X_{n+i} es un vector columna de finido así

$$X_{n+i} = \begin{pmatrix} x_{n+i, 1} \\ \vdots \\ x_{n+i, N} \end{pmatrix} \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Luego, expandiendo la expresión anterior, se tiene que la matriz

$\underline{X}_n (N \times N)$ está representada por

$$\underline{X}_n = \begin{bmatrix} x_{n,1} & x_{n+1,1} & x_{n+2,1} & \dots & x_{n+N-1,1} \\ x_{n,2} & x_{n+1,2} & x_{n+2,2} & \dots & x_{n+N-1,2} \\ x_{n,3} & x_{n+1,3} & x_{n+2,3} & \dots & x_{n+N-1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,N} & x_{n+1,N} & x_{n+2,N} & \dots & x_{n+N-1,N} \end{bmatrix}_{N \times N}$$

Notación:

$$x_{n+i,j} \begin{cases} n+i = \text{iteración} & (i = 0, 1, \dots, N-1) \\ j = \text{componente} & (j = 1, 2, \dots, N). \end{cases}$$

b) Un operador de diferencias

$$\Delta \dot{X}_n = X_{n+1} - \dot{X}_n$$

Aplicando a (β) nos da que

$$J_G \Delta \dot{X}_n = \Delta X_{n+1}$$

Y si suponemos a la matriz ΔX_n no singular se tiene que

$$J_G = (\Delta X_n)^{-1} \Delta X_{n+1}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} (I - J_G)^{-1} &= \left[I - (\Delta X_n)^{-1} \Delta X_{n+1} \right]^{-1} \\ &= \left[\Delta X_n (\Delta X_n)^{-1} - (\Delta X_n)^{-1} \Delta X_{n+1} \right]^{-1} \\ &= \left[(\Delta X_n - \Delta X_{n+1}) (\Delta X_n)^{-1} \right]^{-1} \\ &= - \left[(\Delta X_{n+1} - \Delta X_n) (\Delta X_n)^{-1} \right]^{-1} \\ &= - \left[\Delta^2 X_n (\Delta X_n)^{-1} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Dado que $(A.B)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$ para A y B matrices N x N se tiene que

$$(I - J_G)^{-1} = -\Delta X_n (\Delta^2 X_n)^{-1} \quad (6)$$

Sustituyendo la expresión (δ) en (γ) obtenemos

$$S = X_n - \Delta X_n (\Delta^2 X_n)^{-1} \Delta X_n.$$

Esta fórmula la hemos obtenido despreciando el resto $\frac{J_G^{(2)}(C) (X_n - S)^2}{2}$ de donde inferimos que un vector aproximado a S , llamémosle X'_n vendría dado por:

$$X'_n = X_n - \Delta X_n (\Delta^2 X_n)^{-1} \Delta X_n$$

donde $X'_n = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_N \end{pmatrix}$. Esta fórmula podría aplicarse a una sucesión de

vectores $\{X_n\}$ ya construida, obteniéndose una nueva sucesión $\{X'_n\}$ que se presume converge a S más rápidamente que $\{X_n\}$. Podría llamarse a $\{X'_n\}$ la sucesión de vectores generada por el Algoritmo de Aitken.

3.3.3 Algoritmo de Steffensen

- Escójase un vector inicial $X^{(0)}$ y genérese la sucesión de vectores $\{X_n^{(k)}\}$ $k = 0, 1, 2, \dots$
- Iniciación: $X_0 = X^{(k)}$
- Cálculo $X_{n+1} = G(X_n)$ $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.
($N =$ número de componentes del vector inicial)
- Generación $X'_0 = X_0 - \Delta X_0 (\Delta^2 X_0)^{-1} \Delta X_0$
- Modificación $X^{(k+1)} = X'_0$

Ejemplo: Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = x^2 + y^2 \\ y = x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$G(x, y) = \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}. \quad \text{La sucesión}$$

$$\{X_n^{(k)}\} = \left\langle \begin{pmatrix} x_n^{(k)} \\ y_n^{(k)} \end{pmatrix} \right\rangle \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n^{(k)} \\ y_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n^{(k+1)} \\ y_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x_n & \Delta x_{n+1} \\ \Delta y_n & \Delta y_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^2 x_n & \Delta^2 x_{n+1} \\ \Delta^2 y_n & \Delta^2 y_{n+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \end{bmatrix}$$

$$\text{donde } \Delta x_n = g_1(x_n, y_n) - x_n = x_{n+1} - x_n \dots$$

$$\text{idem para } \Delta y_n, \quad \Delta x_{n+1} \quad \text{y} \quad \Delta y_{n+1}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_n &= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = g_1(g_1(x_n, y_n)) - 2g_1(x_n, y_n) \\ &\quad + g_1(x_n, y_n) \end{aligned}$$

$$\text{Idem para } \Delta^2 y_n, \quad \Delta^2 x_{n+1} \quad \text{y} \quad \Delta^2 y_{n+1}.$$

3.3.4 Comentario

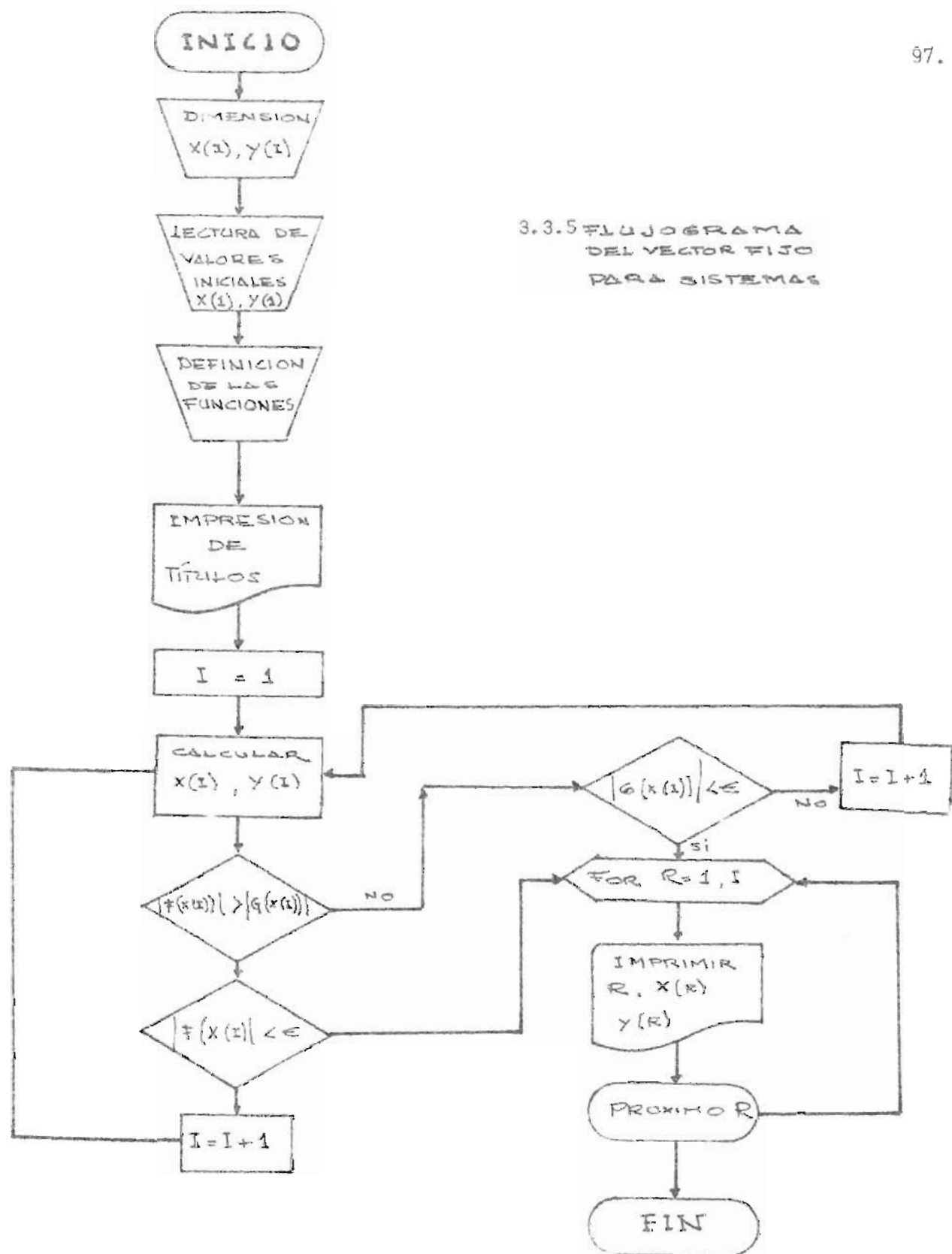
1^o. Al estudiar el Método de Steffensen para Sistemas de Ecuaciones hemos tratado de aplicar los conocimientos adquiridos en el Capítulo II relativos a la aceleración de la convergencia. Nuestro empeño ha sido el de tratar de buscar una mayor rapidez de convergencia.

2^o. El problema básico encontrado ha sido el que no se ha podido hallar solución para los casos en que no exista la matriz $(\Delta^2 x_0)^{-1}$.

3^o. Con todo hemos procurado dar un estudio general y susceptible de ulterior investigación. El hecho de tener que buscar una matriz inversa lo hace largo, complicado y a veces sin solución.

4^o. Pensamos que pueda haber ciertos casos para los cuales aún, con todas esas dificultades sea aplicable y pueda, utilizando un programa adecuado para una computadora, encontrar una solución cuadráticamente convergente.

3.3.5 FLUJOGRAMA
DEL VECTOR FIJO
PARA SISTEMAS



```

0 REM PROGRAMA DEL PUNTO FIJO PARA VARIAS VARIABLES
0 DIM X(50),Y(50)
0 DEF FNA(X)=0.7*SIN(X)
0 DEF FNB(Y)=0.2*COS(Y)
0 DEF FNC(X)=0.7*COS(X)
0 DEF FND(Y)=-0.2*SIN(Y)
0 X(1)=0
0 Y(1)=0
0 PRINT "ITERACIONES", "METODO", "PUNTO FIJO"
00 I=1
10 X(I+1)=FNA(X(I))+FNB(Y(I))
20 Y(I+1)=FNC(X(I))+FND(Y(I))
30 IF (ABS(X(I)-FNA(X(I))-FNB(Y(I)))>ABS(Y(I)-FNC(X(I))-FND(Y(I)))) THEN 160
40 IF (ABS(Y(I)-FNC(X(I))-FND(Y(I)))<1E-09) THEN 190
50 GOTO 170
60 IF (ABS(X(I)-FNA(X(I))-FNB(Y(I)))<1E-09) THEN 190
70 I=I+1
80 GOTO 110
90 FOR R=1 TO I
00 PRINT R-1, X(R), Y(R)
10 NEXT R
20 STOP
30 END

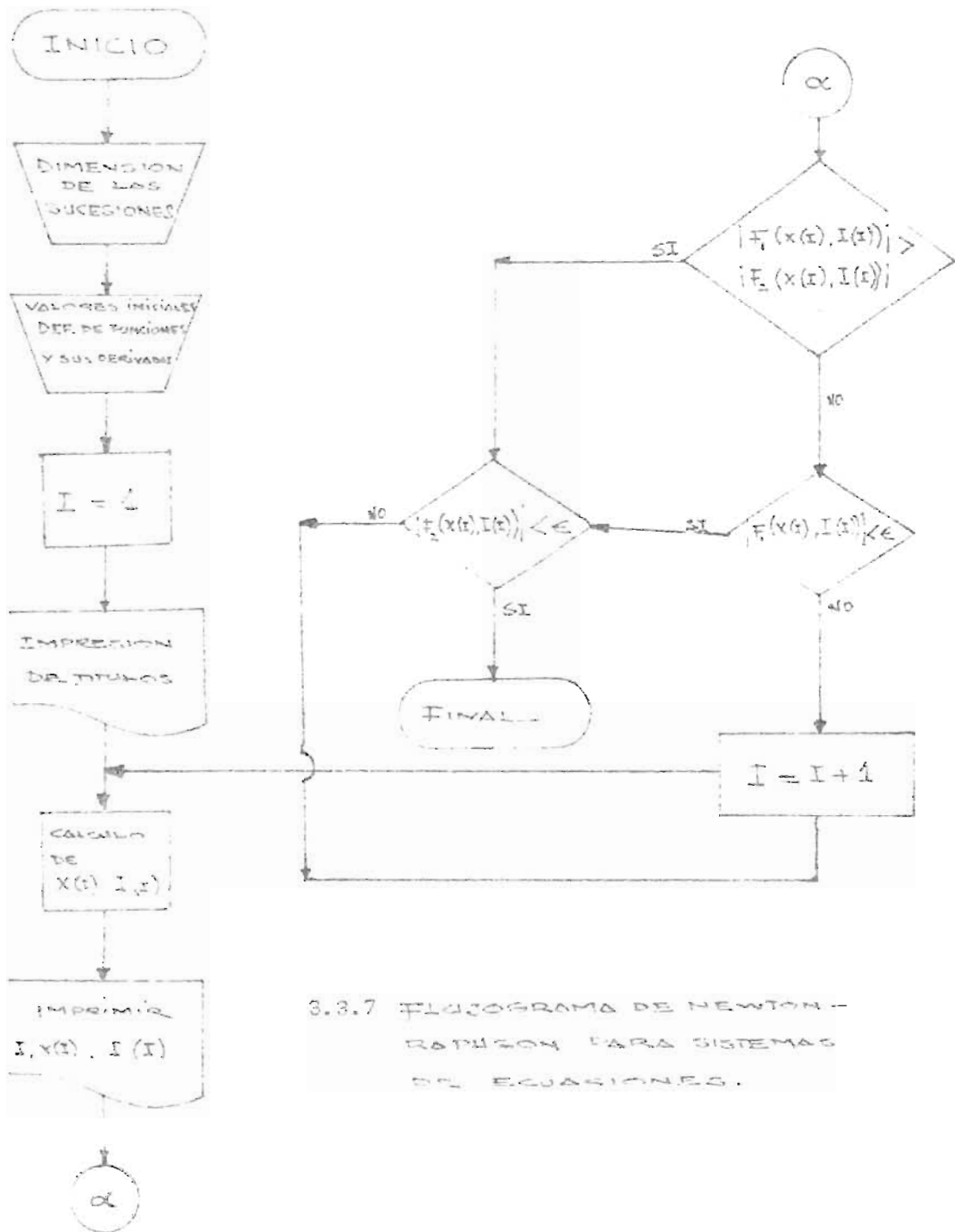
```

N	X(I)	Y(I)
ITERACIONES	METODO	PUNTO FIJO
0	0	0
1	0.2	0.7
2	0.092036969	0.557203067
3	0.371279978	0.564598707
4	0.422926624	0.545289236
5	0.458297142	0.534591089
6	0.481798537	0.525867181
7	0.497334437	0.519924026
8	0.507538596	0.515837326
9	0.514198422	0.513118468
10	0.518525448	0.511385923
11	0.521341216	0.510122325
12	0.523167494	0.509349583
13	0.524358885	0.508846776
14	0.525117224	0.508520282
15	0.525613290	0.508308568
16	0.525934319	0.508171481
17	0.526142038	0.508082584
18	0.526276426	0.508025894
19	0.526363364	0.507987892
20	0.526419684	0.507963821
21	0.526455985	0.507948248
22	0.526479518	0.507938173
23	0.526494748	0.507931656
24	0.526504587	0.507927441
25	0.526510956	0.507924714
26	0.526515876	0.507922958
27	0.526517741	0.507921889

28	0.526519465	0.507921071
29	0.526520580	0.507920593
30	0.526521301	0.507920285
31	0.526521767	0.507920085
32	0.526522069	0.507919956
33	0.526522264	0.507919872
34	0.526522391	0.507919810
35	0.526522472	0.507919783
36	0.526522525	0.507919760
37	0.526522559	0.507919746
38	0.526522581	0.507919736
39	0.526522596	0.507919730
40	0.526522605	0.507919726
41	0.526522611	0.507919724
42	0.526522615	0.507919722
43	0.526522617	0.507919721
44	0.526522619	0.507919720
45	0.52652262	0.507919720

EXPLICACION DE VARIABLES

X(50) = Dimensión de la sucesión para X(I).
Y(50) = Dimensión de la sucesión para Y(I).
FNA(X) = Definición de la función iterativa en X.
FNB(Y) = Definición de la función iterativa en Y.
FNC(X) = Definición de la función iterativa en X.
FND(Y) = Definición de la función iterativa en Y.
X(1), Y(1) = Valores Iniciales.
I,R = Contadores



3.3.7 FLUJOGRAMA DE NEWTON-RAPHSON PARA SISTEMAS DE ECUACIONES.

```

REM SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR NEWTON RAPHSON
DIM X(50),Y(50)
DEF FNK(X)=X-0.7*SIN(X)
DEF FNY(Y)=-0.2*COS(Y)
DEF FNU(X)=-0.7*COS(X)
DEF FV(Y)=Y+0.2*SIN(Y)
DEF FNC(X)=1-0.7*COS(X)
DEF FND(Y)=0.2*SIN(Y)
DEF FNE(X)=0.7*SIN(X)
DEF FNF(Y)=1+0.2*COS(Y)
@ X(1)=0
@ Y(1)=0
@ PRINT " N", "      X(I)      ", "      Y(I)      "
@ I=1
@ PRINT " 0",X(1),Y(1)
@ D=(FNC(X(1))*FNF(Y(1)))-(FND(Y(1))*FNE(X(1)))
@ E=((-(FNK(X(1))+FNY(Y(1))*FNF(Y(1)))+(FNU(X(1))+FV(Y(1))*FND(Y(1)))))/D
@ F=(FNC(X(1))*(-(FNU(X(1))+FV(Y(1)))))+FNE(X(1))*(FNK(X(1))+FNY(Y(1))))/D
@ X(I+1)=X(I)+E
@ Y(I+1)=Y(I)+F
@ PRINT I,X(I+1),Y(I+1)
@ IF (ABS(FNK(X(I))+FNY(Y(I))))>ABS(FNU(X(I))+FV(Y(I)))) THEN 250
@ IF (ABS(FNU(X(I))+FV(Y(I)))<1E-99) THEN 280
@ GOTO 260
@ IF (ABS(FNK(X(I))+FNY(Y(I)))<1E-99) THEN 280
@ I=I+1
@ GOTO 160
@ STOP
@ END

```

X(I)	Y(I)
0	0
0.666666667	0.503333333
0.536239964	0.508849087
0.526561990	0.507931930
0.526522623	0.507919719
0.526522622	0.507919719

PROGRAMA 8EXPLICACION DE VARIABLES

X(50), Y(50)	=	Dimensión de cada una de las sucesiones.
DEF FNI(X)	=	Definición de funciones ya sean iterativas o derivadas.
Y(1), X(1)	=	Valores iniciales.
E, F	=	Incrementos para las sucesiones
I	=	Contador.

CAPITULO IV
EL METODO DE BERNOULLI

4.0 INTRODUCCION

4.0.1 Objetivos Específicos

- 1) Generalizar el estudio de la resolución de Ecuaciones. Con la utilización del método de Bernoulli aplicado a polinomios, logramos dar una visión más general y total a la solución de ecuaciones.
- 2) Lograr un método que pueda utilizarse para los casos que por no cumplir las hipótesis requeridas no han podido ser estudiados en los métodos anteriores.
- 3) Objetivo específico del método de Bernoulli es el de dar una aproximación inicial al valor de la raíz dominante (de mayor módulo). Sirve adecuadamente como método para aislar raíces.

4.0.2 Justificación Programática

Al estudiar este método hemos querido dar unas razones sobre la inclusión de este método que se aparta del esquema llevado durante todo el trabajo.

En primer lugar creemos que este método complementa los anteriormente vistos para la solución de las ecuaciones. Nos presenta una solución de las ecuaciones polinómicas en general.

Queda plenamente justificado en nuestro trabajo su estudio por ser un método enteramente iterativo y con mucha similitud en su forma de desarrollarse a los métodos de resolución de los capítulos anteriores; con una rapidez de convergencia adecuada, asequible de poderse acelerar, etc.

Al llegar al capítulo final de este trabajo hemos pensado que el

estudio de este método sirve para dar una visión más completa de "los métodos iterativos para la solución de las ecuaciones".

4.1 ECUACIONES DE DIFERENCIA

En el Capítulo II cuando estudiábamos el Método de Aitken que permitía una mejor aceleración de la convergencia vimos el operador de diferencias " Δ " que facilitaba la expresión del Algoritmo de Aitken.

Nuestro propósito ahora es el de hacer un estudio somero de las ecuaciones de diferencia que están basadas en las diferencias finitas, para una posterior aplicación en el Método de Bernoulli.

4.1.1 Definición de Diferencias Finitas

"Son las relaciones que existen entre los valores asumidos por una función, cuando la variable independiente toma valores en progresión aritmética".

Sea: $U: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, una función(*).

Cuando $x \rightarrow (x + \Delta x)$

entonces $y(x) \rightarrow y(x + \Delta x)$.

$$\text{Primera diferencia: } \Delta U_x = U_{x+1} - U_x$$

$$\text{Segunda diferencia: } \Delta^2 U_x = \Delta(\Delta U_x) = U_{x+2} - 2U_{x+1} + U_x$$

$$\text{y recursivamente: } \Delta^S U_x = \Delta(\Delta^{S-1} U_x) \quad S = 1, 2, \dots$$

(*) NOTA: D: dominio de elementos discretos.

4.1.2 Propiedades

- a) $\Delta c = c - c = 0$, c una constante.
- b) $\Delta p_x = 0$ si p es una función periódica de período 1.
- c) $\Delta^n (c U_x \pm k V_x) = c \Delta^n U_x \pm k \Delta^n V_x$ k, c constantes.

4.1.3 Definición de Ecuación de Diferencia

"Son ecuaciones que expresan la relación entre la variable independiente y diferencias sucesivas de una variable dependiente".

Ejemplo: $\Delta^3 U_x + 2 \Delta U_x + U_x = 0$

4.1.4 Orden de Una Ecuación

"El orden de una ecuación de diferencia viene dado por la mayor diferencia presente en la ecuación".

El ejemplo $\Delta^3 U_x + 2 \Delta U_x + U_x = 0$ es una ecuación de diferencia de orden 3.

Si en el ejemplo $\Delta^3 U_x + 2 \Delta U_x + U_x = 0$ operamos las diferencias, la ecuación se simplifica a $U_{x+2} = 0$.

Esto nos muestra que la notación de diferencias muchas veces ocurese la información. Por ello generalmente, se escriben de manera directa en términos de valores de U_x .

Ejemplo: $U_{x+n} + a_{1,n} U_{x+n-1} + \dots + a_{N,n} U_{x+N-n} = b_n$

donde $a_{k,n}$ y b_n son sucesiones dadas. $k = 1, 2, \dots, N$.

En nuestro estudio adoptamos una notación simple para un manejo más fácil

de los términos, así: (para el ejemplo anterior)

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_N x_{n-N} = 0$$

a_k son los coeficientes dados y $\{x_n\}$ la sucesión solución a determinar.

4.1.5 Solución de Ecuaciones de Diferencia Homogéneas

$$\text{Sea } x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_N x_{n-N} = 0.$$

Asociamos a esta ecuación un polinomio del mismo orden; al cual le daremos el nombre de polinomio característico $P(z)$:

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_N z^{n-N}.$$

Los ceros o raíces de $P(z)$ serán z_1, z_2, \dots, z_N . Según las diferentes clases de raíces que obtengamos en $P(z) = 0$, obtenemos los siguientes casos.

- 1) Si $z_1 \neq z_2 \neq \dots \neq z_k$, es decir si los ceros o raíces son diferentes, las sucesiones solución son las siguientes:

$$\{z_1^n\}, \quad \{z_2^n\}, \quad \{z_3^n\}, \quad \dots, \quad \{z_N^n\}.$$

- 2) Si existen en $P(z)$ ceros de multiplicidad k . Por Ej., para $k=2$ la solución de la ecuación de diferencia viene dada por la combinación lineal de:

$$\{z_1^n\}, \quad \{n z_1^n\}$$

- 3) Si existen en $P(z)$ ceros complejos; la sucesión solución de la ecuación de diferencia viene dada por la combinación lineal de:

$$\{z_1^n\}, \quad \{\bar{z}_1^n\}$$

La solución general de la ecuación de diferencia es la combinación lineal de las sucesiones solución encontradas anteriormente. Podría representarse como:

$$x_n = c_1 \{x_n^{(1)}\} + c_2 \{x_n^{(2)}\} + \dots + c_n \{x_n^{(N)}\};$$

donde $\{x_n^{(k)}\}$ representa las sucesiones solución para cada uno de los casos anteriores, así:

$$\text{Caso 1) } \{x_n^k\} = \{z_k^n\} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{Caso 2) } \{x_n^k\} = \{n^k z_1^k\} \quad \text{para } k = 0, \dots, N$$

$$\text{Caso 3) } \{x_n^{(1)}\} = \{z_1^n\}, \quad \{x_n^{(2)}\} = \{z_1^{-n}\}$$

donde z_k es cero o solución del polinomio característico $P(z)$.

4.1.6 Ejemplo 1^a

Muéstrese que la solución general de la ecuación de diferencia $x_n + A x_{n-1} + B x_{n-2} = 0$ con $A^2 - 4B < 0$, A y B reales; puede representarse como $x_n = r^n (k_1 \cos n\phi + k_2 \sin n\phi)$, donde

$$A = -2r \cos \phi \quad \text{y} \quad B = r^2.$$

Prueba:

$$x_n + A x_{n-1} + B x_{n-2} = 0$$

su polinomio característico viene dado por

$$z^2 + A z + B = 0$$

Solución:

$$z = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2 - 4B}{4}} :$$

por hipótesis $A^2 - 4B < 0$; entonces las soluciones complejas y conjugadas son así:

$$z_1 = -\frac{A}{2} + i \frac{\sqrt{4B - A^2}}{2}$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = -\frac{A}{2} - i \frac{\sqrt{4B - A^2}}{2}$$

La representación en forma polar de z_1 y \bar{z}_1 será:

$$z_1 = r(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$$

$$\bar{z}_1 = r(\cos \phi - i \operatorname{sen} \phi)$$

La solución general de la ecuación:

$$x_n = c_1(r^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi)) + c_2(r^n(\cos n\phi - i \operatorname{sen} n\phi))$$

$$x_n = r^n \cos n\phi (c_1 + c_2) + r^n \operatorname{sen} n\phi (i)(c_1 - c_2)$$

Si $c_1 + c_2 = k_1$ y $i(c_1 - c_2) = k_2$ entonces:

$$x_n = k_1 r^n \cos n\phi + k_2 r^n \operatorname{sen} n\phi$$

$$x_n = r^n (k_1 \cos n\phi + k_2 \operatorname{sen} n\phi) \quad \text{l.q.q.d.}$$

$$r = |z_1| = \sqrt{\frac{A^2}{4} + B - \frac{A^2}{4}} = \sqrt{B}$$

$$r^2 = B$$

$$-\frac{A}{2} = r \cos \phi \quad \therefore \quad A = -2r \cos \phi \quad \text{donde } r \text{ es real.}$$

4.2 EL METODO DE BERNOULLI

4.2.1 Generalidades

Nuestro objetivo es encontrar los ceros o raíces de un polinomio $P(z)$. Para la resolución de este problema nos valdremos del método de Bernoulli; que consiste en asociar a $P(z)$ una ecuación de diferencia, para la cual $P(z)$ es el polinomio característico.

Iterando entonces la ecuación de diferencias, obtendremos fácilmente la información sobre los ceros de $P(z)$.

A. Definición: "Cero dominante de un polinomio"

"Es uno de los ceros del polinomio, tal que su módulo mayoriza al módulo de los restantes ceros del polinomio". Es decir z_1, z_2, \dots, z_N ceros de $P(z)$ y $|z_1| > |z_k|$ para $k = 2, 3, \dots, N$. Entonces el cero dominante es z_1 .

B. Descripción del Algoritmo

Sea $P(z) = a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_n$, el polinomio al cual queremos encontrar las raíces; le asociamos una ecuación de diferencia tal que $P(z)$ sea su polinomio característico;

$$a_0 x_{n+1} + a_1 x_n + \dots + a_n x_{n-N+1} = 0$$

Escogemos los valores arbitrarios $x_0, x_1, \dots, x_{-N+1}$ y generamos la sucesión $\{x_n\}$, por la relación de recurrencia:

$$x_{n+1} = -\frac{a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \dots + a_n x_{n-N+1}}{a_0}$$

luego podemos formular la sucesión de cocientes:

$$q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para un valor de n apropiado, q_n llega a ser un punto fijo, terminando para ello la iteración de valores.

C. Algoritmo de Bernoulli

Iniciación: Dar los valores iniciales $x_0, x_1, \dots, x_{-N+1}$.

$$\text{Cálculo: } x_{n+1} = - \frac{a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \dots + a_n x_{n-N+1}}{a_0}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Generar: la sucesión $q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Prueba: $|\Delta c_n| \leq \epsilon$, entonces termina la iteración.

4.2.2 Solución de Ecuaciones

Consideremos el polinomio $P(z)$ de grado N :

$$P(z) = a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N$$

Con respecto a los ceros de $P(z)$ podemos obtener distintos casos:

- $P(z)$ tiene N ceros reales distintos.
- $P(z)$ tiene ceros de multiplicidad mayor de 1.
- $P(z)$ tiene ceros complejos.

Consideremos inicialmente el caso de un cero dominante único.

A. Cero dominante único

Si $P(z)$ tiene N ceros reales distintos, entonces existe z_1 tal

que $|z_1| > |z_k|$, $k = 2, \dots, N$. z_1 es cero dominante único de $P(z)$. --

Si a $P(z)$ le asociamos la ecuación de diferencia:

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_N x_{n-N} = 0 \quad \text{donde } P(z) \text{ es su}$$

polinomio característico, entonces $\{x_n\}$ es la sucesión solución que vendrá representada de la siguiente forma:

$$x_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \dots + c_N z_N^n$$

por ser z_1, \dots, z_N ceros distintos de $P(z)$.

Y si los valores iniciales escogidos para encontrar $\{x_n\}$ de la ecuación diferencial, son tales que $c_1 \neq 0$ (c_1 es el coeficiente que acompaña al cero dominante) entonces $x_n \neq 0$ para $n = 1, 2, \dots$. En efecto,

$$x_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \dots + c_N z_N^n \quad c_1 \neq 0$$

y z_1 es cero dominante, es decir si

$$|z_1| > |z_k| \quad \text{para } k = 2, 3, \dots, N \quad \text{entonces } z_1 \neq 0.$$

- Teorema de Convergencia

Si $P(z) = a_0 z^n + \dots + a_N$ tiene un cero dominante único, y si los valores iniciales son tales que $c_1 \neq 0$, entonces la sucesión cociente $\{q_n\}$ $n = 0, 1, 2, \dots$, converge al cero dominante de $P(z)$.

Prueba:

Consideremos ahora la razón de dos valores consecutivos de la sucesión solución de la ecuación de diferencia

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{c_1 z_1^{n+1} + c_2 z_2^{n+1} + \dots + c_N z_N^{n+1}}{c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \dots + c_N z_N^n}$$

Como por hipótesis $c_1 \neq 0$ tenemos que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = z_1 \cdot \frac{1 + \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{n+1} + \dots + \frac{c_N}{c_1} \left(\frac{z_N}{z_1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n + \dots + \frac{c_N}{c_1} \left(\frac{z_N}{z_1}\right)^n}$$

Como $|z_1| > |z_k|$ $k = 2, \dots, N$ tenemos $|z_k/z_1| < 1$

entonces $\left(\frac{z_k}{z_1}\right)^n \rightarrow 0$.

Cuando $n \rightarrow \infty$ para $k = 2, \dots, N$, luego la fracción que multiplica a z_1 tiende a 1, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = z_1$$

- Rapidez de Convergencia

Consideremos $e_n = q_n - z_1$ y analicemos la forma como el error e_n tiende a cero, bajo las hipótesis del teorema de convergencia.

Como la consideración para los ceros de $P(z)$ es que sean ceros distintos y reales, se tiene entonces, que el cero que sigue al dominante en su módulo es único, representado por z_2 en la sucesión solución $\{x_n\}$ de la ecuación de diferencia .

Tomemos valores iniciales t.q. $c_2 \neq 0$, bajo estas hipótesis

$$e_n = \frac{x_{n+1} - z_1 x_n}{x_n}$$

$$e_n = \frac{c_1 z_1^{n+1} + c_2 z_2^{n+1} + \dots + c_n z_n^{n+1} - z_1 (c_1 z_1^n + \dots + c_n z_n^n)}{c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \dots + c_n z_n^n}$$

$$e_n = \frac{c_2 (z_2 - z_1) z_2^n + \dots + c_N (z_N - z_1) z_N^n}{c_1 z_1^n + \dots + c_N z_N^n}$$

podemos escribirlo en la forma: $e_n = A h^n (1 + \theta_n)$

$$A = \frac{c_2 (z_2 - z_1)}{c_1} \quad \text{y} \quad h = \frac{z_2}{z_1}$$

$$1 + \theta_n = \frac{1 + \frac{c_3 (z_3 - z_1)}{c_2 (z_2 - z_1)} \left(\frac{z_3}{z_2}\right)^n + \dots + \frac{c_N (z_N - z_1)}{c_2 (z_2 - z_1)} \left(\frac{z_N}{z_2}\right)^n}{1 + \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n + \dots + \frac{c_N}{c_1} \left(\frac{z_N}{z_1}\right)^n}$$

por hipótesis $|z_2| > |z_k| \quad k = 3, \dots, N$ y z_2 es único; $\left(\frac{z_k}{z_2}\right)^n \rightarrow 0$

cuando $n \rightarrow \infty$ luego $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \theta_n) = 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$

entonces $e_n \neq 0$ (α)

consideremos la razón:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{A h^{(n+1)} (1 + \theta_{n+1})}{A h^n (1 + \theta_n)}$$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = h \frac{1 + \theta_{n+1}}{1 + \theta_n} \quad (\beta)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = h \quad \text{y} \quad h = \frac{z_2}{z_1}$$

$$e_{n+1} \sim h e_n$$

$$\delta \quad e_{n+1} \sim \left(\frac{z_2}{z_1} \right) e_n$$

luego la rapidez de convergencia es lineal.

- Aceleración de Convergencia

La sucesión $\{q_n\}$ del algoritmo de Bernoulli tiene una convergencia lineal. Comprobaremos que esta sucesión cumple las hipótesis del Corolario 1° del teorema de aceleración de convergencia de Aitken.

En efecto por (α) tenemos que $e_n \neq 0$, por (β)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = h \frac{1 + \theta_{n+1}}{1 + \theta_n} \quad \text{donde} \quad \frac{e_{n+1}}{e_n} = h(1 + \epsilon_n)$$

$$\text{con } \epsilon_n = \frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{1 + \theta_n} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad h = \frac{z_2}{z_1} < 1.$$

Comprobadas las hipótesis anteriores, tenemos entonces que la sucesión $\{q'_n\}$ derivada de la sucesión $\{q_n\}$ por medio de la fórmula de Aitken

$$q'_n = q_n - \frac{(\Delta q_n)^2}{\Delta^2 q_n}$$

converge más rápidamente al cero dominante z_1 que la sucesión $\{q_n\}$.

B. Ceros de Multiplicidad mayor a uno

En nuestro estudio hemos considerado hasta ahora el caso de ceros de multiplicidad igual a 1. Veremos ahora, los que poseen una multiplicidad mayor a 1.

Por efectos de estudio podemos considerar dos casos:

- a) Si el polinomio $P(z)$ tiene ceros no dominantes repetidos.
- b) Si el polinomio $P(z)$ tiene el cero dominante repetido.

Caso a) Ceros no dominantes repetidos

Para este caso, en que los ceros repetidos son los ceros no dominantes, tenemos aún la hipótesis de que el cero dominante es único, es decir que:

$$|z_1| > |z_k| \quad \text{para } k = 2, \dots, n.$$

La solución general de la ecuación de diferencia por tener ceros de multiplicidad m , contiene términos de la forma: $n^{(m-1)} z_k^n$

$$\text{y } q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad \text{contiene términos } n^{(m-1)} \left(\frac{z_k}{z_1} \right)^n.$$

Como por hipótesis $z_k/z_1 < 1$ por ser el cero dominante único, tenemos que

$$\left(\frac{z_k}{z_1} \right)^n \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Entonces también

$$n^{(m-1)} \left(\frac{z_k}{z_1} \right)^n \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

para cualquier valor fijo de m .

Luego para este caso la sucesión $\{q_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ es una sucesión convergente al cero dominante.

Caso b) El polinomio $P(z)$ tiene el cero dominante repetido

Si el polinomio $P(z)$ tiene el cero dominante repetido, es decir, el cero dominante tiene multiplicidad mayor a 1; supongamos de multiplicidad 2. Entonces la solución general de la ecuación de diferencia vendría dada por:

$$x_n = c_1 n z_1^n + c_2 z_1^n + c_3 z_3^n + \dots$$

donde z_1 es el cero dominante ($|z_k| < |z_1|$ $k = 3, \dots, n$) y con la suposición de que $c_1 \neq 0$.

$$q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{c_1(n+1)z_1^{n+1} + c_2 z_1^{n+1} + c_3 z_3^{n+1} + \dots}{c_1(n)z_1^n + c_2 z_1^n + c_3 z_3^n + \dots}$$

$$q_n = \frac{z_1^{n+1}(c_1(n+1) + c_2) + c_3 z_3^{n+1} + \dots}{z_1^n(c_1(n) + c_2) + c_3 z_3^n + \dots}$$

dividiendo entre $z_1^{n+1}(c_1(n+1) + c_2)$ nos queda:

$$q_n = \frac{1 + \frac{c_3}{c_1(n+1) + c_2} \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^{n+1} + \dots}{\left[\frac{c_1(n) + c_2}{z_1(c_1(n+1) + c_2)}\right] \left[\left(\frac{z_1}{z_1}\right)^n + \frac{c_3}{c_1(n) + c_2} \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^n + \dots\right]}$$

$$q_n = \frac{z_1(c_1(n+1) + c_2)}{c_1(n) + c_2} \left[\frac{1 + \frac{c_3}{c_1(n+1) + c_2} \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^{n+1} + \dots}{1 + \frac{c_3}{c_1(n) + c_2} \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^n + \dots} \right]$$

$$q_n = z_1 \left(\frac{c_1(n+1) + c_2}{c_1(n) + c_2} \right) \left[\frac{1 + \frac{c_3}{c_1(n+1) + c_2} \left(\frac{z_3}{z_1} \right)^{n+1} + \dots}{1 + \frac{c_3}{c_1(n) + c_2} \left(\frac{z_3}{z_1} \right)^n + \dots} \right] \quad (\beta)$$

Como $\frac{c_1(n+1) + c_2}{c_1(n) + c_2} = 1 + \frac{1}{n + c_2/c_1}$ cuando $n \rightarrow \infty$ es claro

que $\{q_n\} \rightarrow z_1$ pero con una velocidad mucho más lenta que en los casos anteriores, ya que la convergencia no sólo depende de $\left(\frac{z_k}{z_1}\right)^n$ (casos anteriores) sino también del factor $1/n$.

Problema:

"Diséñese un esquema de aceleración análogo al de Aitken para el caso de un cero dominante único de multiplicidad 2".

Desarrollo:

"De la ecuación (β) , despreciando el segundo factor, tenemos:

$$q_n \approx z_1 \left(1 + \frac{1}{n + \frac{c_2}{c_1}} \right), \text{ haciendo } c = \frac{c_2}{c_1} \text{ obtenemos que el error } n\text{-ésimo}$$

$$e_n = q_n - z_1 \approx \frac{z_1}{n+c}$$

y $e_{n+1} \approx \frac{z_1}{(n+1) + c}$, de donde

$$(n+c) + 1 = \frac{z_1}{e_{n+1}} = \frac{z_1}{e_n} + 1$$

$$e_n z_1 = e_{n+1}(z_1 + e_n)$$

$$(q_n - z_1) \cdot z_1 = (q_{n+1} - z_1) q_n$$

$$q_n z_1 - z_1^2 = q_n q_{n+1} - z_1 q_n$$

de donde $z_1^2 - 2q_n z_1 + q_n q_{n+1} = 0$

$$z_1 = q_n \pm \sqrt{q_n^2 - q_n q_{n+1}}$$

$$z_1 = q_n \pm \sqrt{q_n (q_n - q_{n+1})}$$

por lo tanto

$$\{q'_n\} = q_n \pm \sqrt{q_n (q_n - q_{n+1})}$$

con $0 < q_{n+1} < q_n$.

$$\delta \begin{cases} q_n < q_{n+1} \\ < \\ q_n < 0 \end{cases}$$

- Elección de Vectores Iniciales

Si los valores iniciales se escogen

$$x_{-N+1} = x_{-N+2} = \dots = x_{-1} = 0; \quad x_0 = 1$$

la condición del método de Bernoulli que $c_1 \neq 0$ se satisface.

Consideremos ahora la solución general de la ecuación de diferencia asociada a un polinomio de grado 2.

$$x_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n$$

para $x_0 = 1$ y $x_{-1} = 0$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 0 = \frac{c_1}{z_2} + \frac{c_2}{z_2} \end{cases}$$

Aplicando Cramer

$$\text{con } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/z_1 & 1/z_2 \end{vmatrix} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/z_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1/z_2}{\Delta}$$

donde

$$c_1 = \frac{1}{z_2} \left(\frac{z_1 z_2}{z_1 - z_2} \right) = \frac{z_1}{z_1 - z_2}$$

Como $z_1 \neq 0$ y $z_1 \neq z_2$ entonces $c_1 \neq 0$.

Consideremos la solución de la ecuación de diferencia asociada a un polinomio de grado 3.

$$x_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + c_3 z_3^n$$

para $x_0 = 1$, $x_{-1} = 0$, $x_{-2} = 0$ obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 + c_3 \\ 0 = c_1/z_1 + c_2/z_2 + c_3/z_3 \\ 0 = c_1/z_1^2 + c_2/z_2^2 + c_3/z_3^2 \end{cases}$$

$$y \quad c_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/z_2 & 1/z_3 \\ 0 & 1/z_2^2 & 1/z_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Con} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/z_1 & 1/z_2 & 1/z_3 \\ 1/z_1^2 & 1/z_2^2 & 1/z_3^2 \end{vmatrix}$$

Este determinante es llamado de "Vandermonde" cuya solución viene dada por el producto de las diferencias posibles entre los términos diferentes de la segunda fila.

Esta representado por:

$$\prod_{i > j} \left(\frac{1}{z_i} - \frac{1}{z_j} \right) .$$

De esta forma obtenemos que:

$$\Delta = \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right) \left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_1} \right) \left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2} \right)$$

$$\Delta = \frac{z_1 - z_2}{z_1 \cdot z_2} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 z_3}$$

$$\Delta = \frac{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)}{(z_1 z_2 z_3)^2}$$

Para el valor de:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{z_3} \\ 0 & \frac{1}{z_2^2} & \frac{1}{z_3^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{z_2 z_3} - \frac{1}{z_2 z_3} = \frac{z_2 - z_3}{(z_2 z_3)^2}$$

$$c_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/z_2 & 1/z_3 \\ 0 & 1/z_2^2 & 1/z_3^2 \end{vmatrix} = \frac{(z_1 z_2 z_3)^2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)} \cdot \frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 z_3)^2}$$

$$c_1 = \frac{z_1^2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} \cdot \text{Como } z_1 \neq z_2 \neq z_3 \text{ y } z_1 \neq 0 \text{ de donde:}$$

$$c_1 \neq 0.$$

Consideremos la solución de la ecuación de diferencia asociada a un polinomio de grado N.

$$x_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + c_3 z_3^n + \dots + c_N z_N^n$$

$$\text{con } x_{-N+1} = x_{-N+2} = \dots = x_{-1} = 0, \quad x_0 = 1$$

se obtendrá el sistema

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 + \dots + c_N \\ 0 = \frac{c_1}{z_1} + \frac{c_2}{z_2} + \dots + \frac{c_N}{z_N} \\ \vdots \\ 0 = \frac{c_1}{z_1^{N-1}} + \frac{c_2}{z_2^{N-1}} + \dots + \frac{c_N}{z_N^{N-1}} \end{cases}$$

Sistema cuya solución para c_1 se puede inferir por la naturaleza de los determinantes que siempre son similares:

$$c_1 = \frac{z_1^{N-1}}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4) \dots (z_1 - z_N)}$$

Como $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq \dots \neq z_N$ y $z_1 \neq 0$, se sigue que $c_1 \neq 0$.

- Caso Particular: "Un polinomio de segundo grado con ceros conjugados"

"Consideremos ahora la solución general de la ecuación de diferencia asociada a un polinomio de grado 2 y con ceros complejos conjugados".

$$x_n = c_1 z_1^n + c_2 \bar{z}_1^n$$

para $x_0 = 1$ y $x_{-1} = 0$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 0 = \frac{c_1}{z_1} + \frac{c_2}{\bar{z}_1} \end{cases}$$

aplicando la regla de Cramer

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/\bar{z}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/z_1 & 1/\bar{z}_1 \end{vmatrix}} + \frac{1/\bar{z}_1}{\frac{z_1 - \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1}} = \frac{z_1}{z_1 - \bar{z}_1}, \quad \text{por lo tanto}$$

$$c_1 \neq 0$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/z_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/z_1 & 1/\bar{z}_1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{z_1}}{\frac{z_1 - \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1}} = \frac{\bar{z}_1}{z_1 - \bar{z}_1}, \text{ por lo tanto}$$

$$c_2 = \bar{c}_1 \neq 0.$$

C) Dos Complejos conjugados como ceros dominantes

Para completar nuestro estudio, falta considerar cuando $P(z)$ de coeficientes reales, tiene como ceros dominantes un par de complejos conjugados:

$$z_1 \text{ y } z_2 = \bar{z}_1, \text{ de multiplicidad 1.}$$

Sin perder generalidad, podemos asumir que los ceros no dominantes tienen multiplicidad 1. Estos ceros cumplen la desigualdad:

$$|z_k| < |z_1| \quad \text{para } k = 3, 4, \dots, N.$$

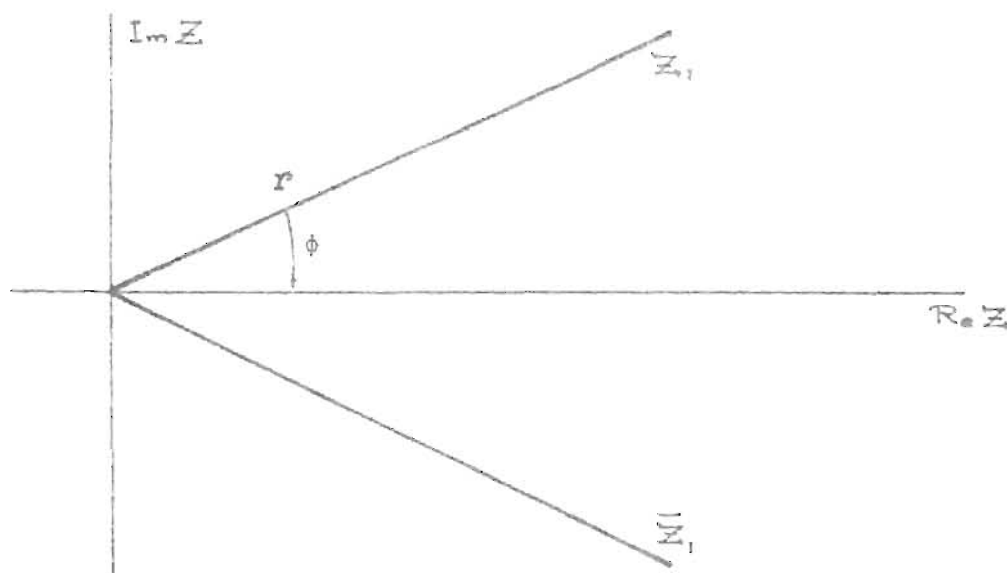
Si tomamos las mismas consideraciones anteriores para los valores iniciales de la sucesión $\{x_n\}$, la sucesión solución toma la forma:

$$x_n = c_1 z_1^n + \bar{c}_1 \bar{z}_1^n + c_3 z_3^n + \dots + c_N z_N^n \quad (\lambda)$$

(*) Nota: Ver el caso particular anterior.

c_1 y z_1 , números complejos, al representarlos en forma polar:
 $z_1 = r e^{i\phi}$ y $c = a e^{i\delta}$ con $r = |z_1|$, $r > 0$ y $a > 0$.

Supongamos que z_1 es un cero situado en el semiplano superior,
 es decir: $0 < \phi < \Pi$



La sucesión solución

$$x_n = a e^{i\delta} r^n e^{in\phi} + a e^{-i\delta} r^n e^{-in\phi} + c_3 z_3^n + \dots + c_N z_N^n$$

$$x_n = a r^n (e^{i(n\phi+\delta)} + e^{-i(n\phi+\delta)}) + c_3 z_3^n + \dots + c_N z_N^n$$

$$x_n = 2 a r^n \cos(n\phi+\delta) + c_3 z_3^n + \dots + c_N z_N^n$$

$$x_n = 2 a r^n [\cos(n\phi+\delta) + \epsilon_n]$$

$$\epsilon_n = \frac{c_3}{2a} \left(\frac{r_3}{r}\right)^n + \dots + \frac{c_N}{2a} \left(\frac{z_N}{r}\right)^n \quad \text{donde } \left|\frac{z_3}{r}\right| < 1.$$

Luego $\epsilon_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Nuestro objeto es encontrar los valores de r y ϕ en la sucesión solución; para esto supongamos $c_n \neq 0$ tenemos entonces

$$x_n = 2 a r^n (\cos (n\phi + \delta)) \quad (*)$$

Siendo esta la representación de $c_1 z_1^n$ y de $\bar{c}_1 \bar{z}_1^n$, en forma polar tenemos que es solución de la ecuación de diferencia

$$x_n + A x_{n-1} + B x_{n-2} = 0$$

Por el ejemplo (1) tenemos: $B = r^2$ y $A = -2r \cos \phi$.

Para encontrar los valores de A y B de

$$\begin{cases} x_n + A x_{n-1} + B x_{n-2} = 0 \\ x_{n+1} + A x_n + B x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

los resolvemos por la regla de Cramer y

$$A = -\frac{E_n}{D_n} \quad B = \frac{D_{n+1}}{D_n}$$

con

$$E_n = \begin{vmatrix} x_n & x_{n-2} \\ x_{n+1} & x_{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad D_n = \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_{n-2} \\ x_n & x_{n-1} \end{vmatrix}$$

Veamos como $D_n \neq 0$

$$\begin{aligned} D_n &= 4 a^2 r^{2n-2} \{ \cos^2 [(n-1)\phi + \delta] - \cos(n\phi + \delta) \cdot \cos[(n-2)\phi + \delta] \} \\ &= 4 a^2 r^{2n-2} \operatorname{sen}^2 \phi. \end{aligned}$$

Como $0 < \phi < \pi$, entonces $D_n \neq 0$.

y los valores de r y ϕ vendrán dados por:

$$r = \sqrt{B} = \sqrt{\frac{D_{n+1}}{D_n}},$$

$$\cos \phi = -\frac{A}{2r} = \frac{E_n}{2\sqrt{D_n \cdot D_{n+1}}}$$

pero esto resuelve el problema, siempre que $\epsilon_n = 0$.

Si $\{x_n\}$ es una solución donde $\epsilon_n \neq 0$ tenemos:

$$x_n = 2a r^n [\cos(n\phi + \delta) + \epsilon_n]$$

$$D_n = \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_{n-2} \\ x_n & x_{n-1} \end{vmatrix} = x_{n-1}^2 - x_n x_{n-2}$$

$$E_n = \begin{vmatrix} x_n & x_{n-2} \\ x_{n+1} & x_{n-1} \end{vmatrix} = x_n x_{n-1} - x_{n+1} x_{n-2}$$

De donde

$$\begin{aligned} D_n &= \{4a^2 r^{2n-2} (\cos^2(n-1)\phi + \delta) - \cos((n-2)\phi + \delta) \cdot \cos(n\phi + \delta) \\ &\quad + \epsilon_{n-1} \cos((n-1)\phi + \delta) + \epsilon_{n-1}^2 - \epsilon_n \epsilon_{n-2} - \cos(n\phi + \delta) \epsilon_{n-2} \\ &\quad - \cos((n-2)\phi + \delta) \epsilon_n\} \\ &= 4a^2 r^{2n-2} [\sin^2 \phi + \epsilon_{n-1} \cos((n-1)\phi + \delta) - \cos(n\phi + \delta) \cdot \epsilon_{n-2} \\ &\quad - \cos((n-2)\phi + \delta) \epsilon_n - \epsilon_n \epsilon_{n-2} + \epsilon_{n-1}^2] \end{aligned}$$

$$y \quad E_n = 2 a^2 r^{2n-1} (\cos \phi - \cos 3\phi) + 4 a^2 r^{2n-1} .$$

$$[\cos (n\phi+\delta)\epsilon_{n-1} + \cos ((n-1)\phi+\delta)\epsilon_n - \cos ((n+1)\phi+\delta) .$$

$$- \epsilon_{n-2} + \cos ((n-2)\phi+\delta)\epsilon_{n+1} + \epsilon_n \epsilon_{n-1} + \epsilon_{n+1} \epsilon_{n+2}]$$

Como $\epsilon_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y transformando los cosenos a la forma exponencial tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{2 D_n} = \frac{r (\cos \phi - \cos 3\phi)}{4 \operatorname{sen}^2 \phi} = \frac{r(\cos \phi - 4 \cos^3 \phi + 3 \cos \phi)}{4 \operatorname{sen}^2 \phi}$$

$$= \frac{r(4 \cos \phi \operatorname{sen}^2 \phi)}{4 \operatorname{sen}^2 \phi} = r \cos \phi$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = \frac{4 a^2 r^2}{4 a^2} = r^2$$

-- Algoritmo:

Si $\{x_n\}$ es la sucesión solución de la ecuación de diferencia

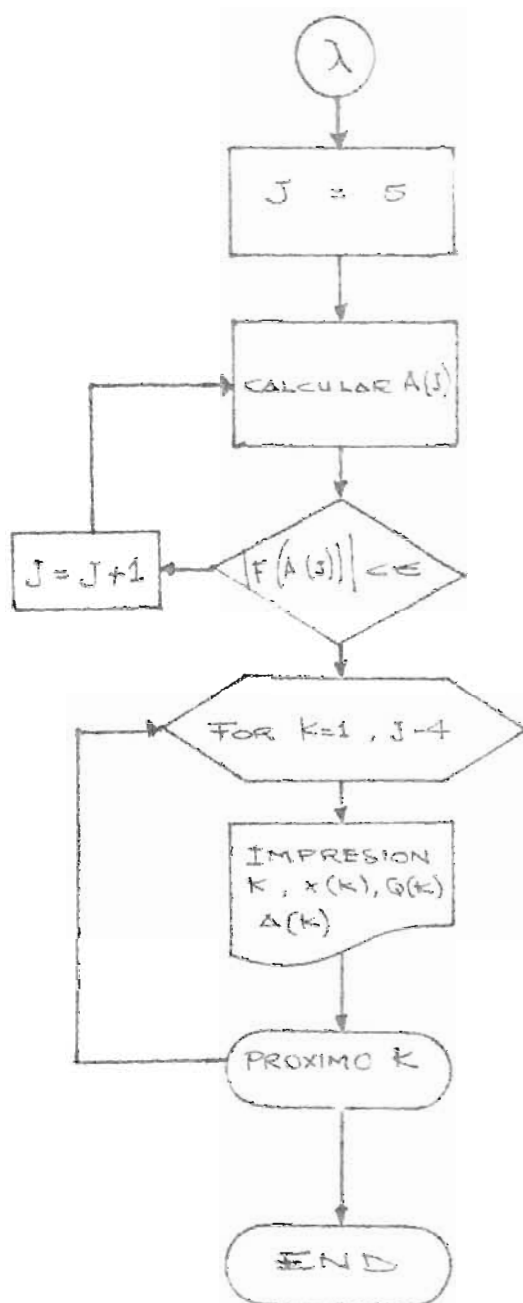
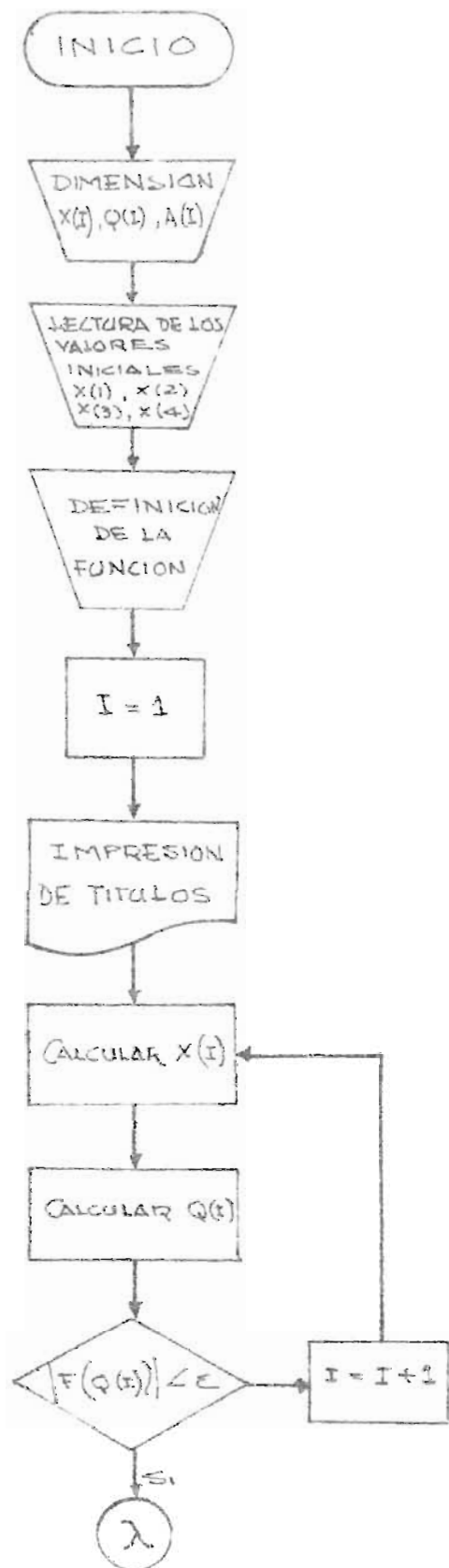
$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_n x_{n-N} = 0,$$

se calculan

$$D_n = \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_{n-2} \\ x_n & x_{n-1} \end{vmatrix} \quad E_n = \begin{vmatrix} x_n & x_{n-2} \\ x_{n+1} & x_{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{y se}$$

obtiene una sucesión de cocientes $\frac{D_{n+1}}{D_n}$ y $\frac{E_n}{2 D_n}$ los cuales convergen a

r^2 y $r \cos \phi$ respectivamente obteniéndose de estos 2 valores el valor de z_1 , la raíz compleja de $P(z)$.



4.2.3 METODO BERNOULLI
Y ACCELERACION DE
AITKEN . . .

```

0 REM ENCONTRAR LA RAIZ DOMINANTE DE LA ECUACION  $X^4-5X^3+9X^2-7X+2X=0$ 
0 REM METODO DE BERNOULLI Y ACELERACION DE AITKEN
0 DIM X(100),Q(100),A(100)
0 READ X(1),X(2),X(3),X(4)
0 DEF FNA(X)=X^4-5*X^3+9*X^2-7*X+2
0 I=1
0 PRINT "N","X(N)","Q(N)","AITKEN"
0 X(5)=5*X(4)-9*X(3)+7*X(2)-2*X(1)
0 X(I+5)=5*X(I+4)-9*X(I+3)+7*X(I+2)-2*X(I+1)
0 Q(I+4)=X(I+5)/X(I+4)
0 IF ABS(FNA(Q(I+4)))<1E-09 THEN 150
0 I=I+1
0 GOTO 00
0 J=5
0 A(J)=Q(J)-(Q(J+1)-Q(J))^2/(Q(J+2)-2*Q(J+1)+Q(J))
0 IF ABS(FNA(A(J)))<1E-09 THEN 200
0 J=J+1
0 GOTO 100
0 FOR K=1 TO J-4
0 PRINT K,X(K+4),Q(K+4),A(K+4)
0 NEXT K
0 FOR L=J-4 TO I-4
0 PRINT L,X(L+4),Q(L+4)
0 NEXT L
0 DATA 0,0,0,1
0 END

```

	X(N)	Q(N)	AITKEN
	5	3.2	2.123546512
2	16	2.625	2.040906623
3	42	2.357142857	2.010973572
4	99	2.212121212	2.001200935
5	219	2.127853881	1.998767872
6	466	2.077253219	1.998649885
7	968	2.046487603	1.999049178
8	1981	2.027763756	1.999427347
9	4017	2.016438172	1.999681644
10	8100	2.009629630	1.999831135
11	16278	2.005590367	1.999913002
12	32647	2.003216222	1.999955997
13	65399	2.00183489	1.999977999
14	130918	2.001038818	1.999989076
15	261972	2.000584032	1.999994598
16	524097	2.000326275	1.999997334
17	1048365	2.000181235	1.999998685
18	2096920	2.000100147	1.999999352
19	4194850	2.000055078	1.99999968
20	8388331	2.00003016	1.999999842
21	16776915	2.000016451	1.999999922
22	33554106	2.00000894	1.999999961
23	67108512	2.000004843	1.99999998
24	134217349	2.000002615	1.99999999
25	268435049	2.000001402	1.999999995
26	536870476	2.000000756	1.999999998
27	1073741350	2.000000405	1.999999999

28	2147483151	2.000000217	1 999999999
28	2147483151	2.000000217	
29	4294866767	2.000000115	
30	8589934030	2.000000061	
31	1.71799E+10	2.000000033	
32	3.43597E+10	2.000000017	
33	6.87195E+10	2.000000009	

PROGRAMA 9COMENTARIO DE VARIABLES

X(100) = Dimensión para la sucesión de iterandos.

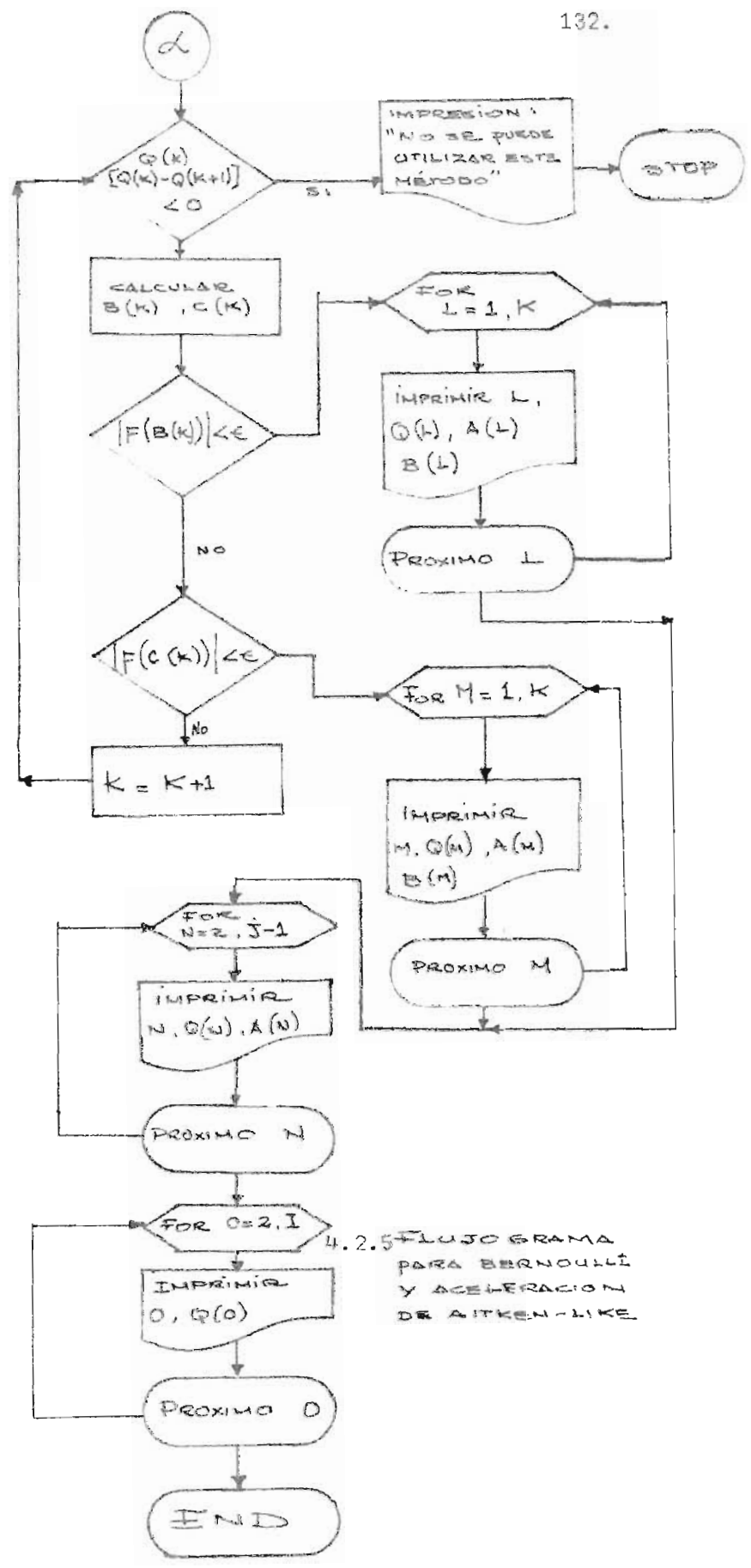
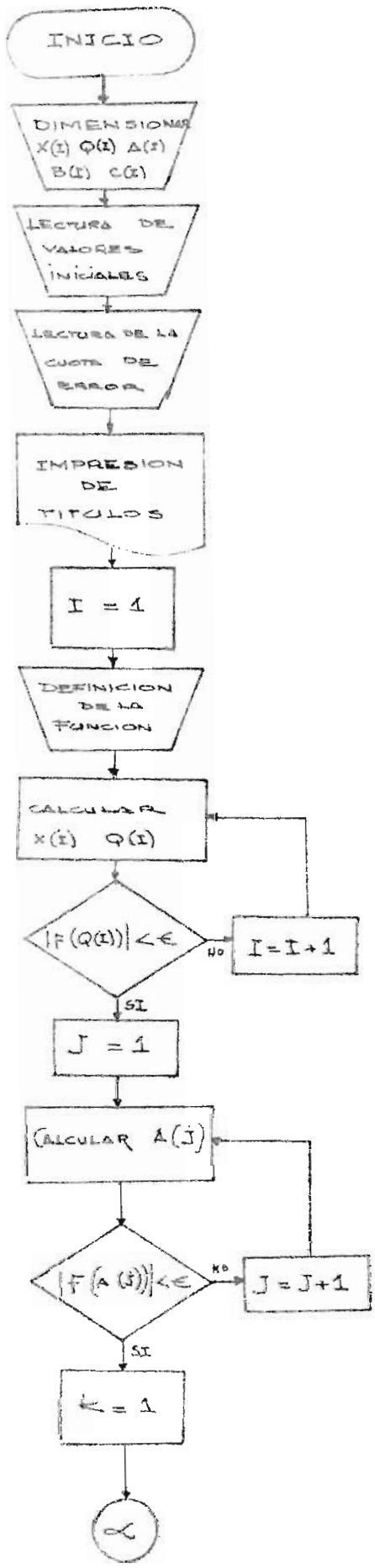
Q(100) = Dimensión para la sucesión de cocientes.

A(100) = Dimensión para la sucesión de Aitken.

I,J,K,L = Contadores

FNA(X) = Definición de la función

X(I) = Valores Iniciales (I = 1, 2, 3, 4)



4.2.5 FLUJO GRAMA PARA BERNOULLI Y ACELERACION DE AITKEN-LIKE

```

REM ENCONTRAR RAIZ DOMINANTE CON MULTIPLICIDAD 2 PARA X^4 -6X^3+8X^2+6X-9
REM METODO DE BERNOULLI-AITKEN-MODIFICADO
DIM X(200),Q(100),A(100),B(100),C(100)
READ X(1),X(2),X(3),X(4)
PRINT " N", "Q(N)", "AITKEN", "AITKEN-MOD"
X(5)=6*X(4)-8*X(3)-6*X(2)+9*X(1)
I=1
X(I+5)=6*X(I+4)-8*X(I+3)-6*X(I+2)+9*X(I+1)
Q(I+4)=X(I+5)/X(I+4)
DEF FNA(X)=X^4-6*X^3+8*X^2+6*X-9
IF ABS(FNA(Q(I+4)))<1E-02 THEN 140
I=I+1
GOTO 80
J=5
A(J)=Q(J)-(Q(J+1)-Q(J))^2/(Q(J+2)-2*Q(J+1)+Q(J))
IF ABS(FNA(A(J)))<1E-02 THEN 190
J=J+1
GOTO 150
K=5
IF Q(K)*(Q(K)-Q(K+1))<0 THEN 350
B(K)=Q(K)+SQR(Q(K)*(Q(K)-Q(K+1)))
C(K)=Q(K)-SQR(Q(K)*(Q(K)-Q(K+1)))
IF ABS(FNA(B(K)))<1E-02 THEN 270
IF ABS(FNA(C(K)))<1E-02 THEN 310
K=K+1
GOTO 200
FOR L=1 TO K-4
PRINT L, Q(L+4), A(L+4), B(L+4)
NEXT L
GOTO 340
FOR M=1 TO K-4
PRINT M, Q(M+4), A(M+4), C(M+4)
NEXT M
GOTO 370
PRINT "NO SE PUEDE UTILIZAR AITKEN MODIFICADO"
K=5
FOR N=K-3 TO J-4
PRINT N, Q(N+4), A(N+4)
NEXT N
FOR O=J-3 TO I-5
PRINT O, Q(O+4)
NEXT O
DATA 0,0,0,1
END

```

Q(N)	AITKEN	AITKEN-MOD
4.666666667	3.566518436	3.908000000
4.071428571	3.363524213	
3.798245614	3.328458663	
3.638484988	3.255400219	
3.521628489	3.222967740	
3.444364162	3.192752486	
3.387088316	3.171535279	
3.342850507	3.153735622	

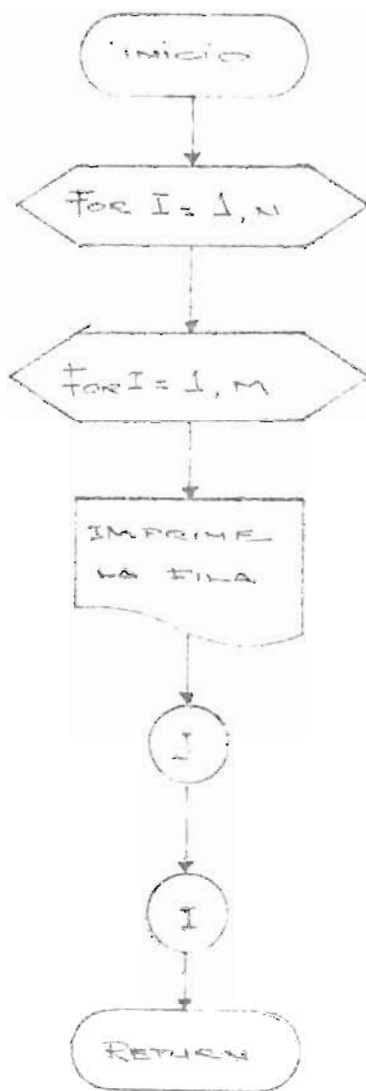
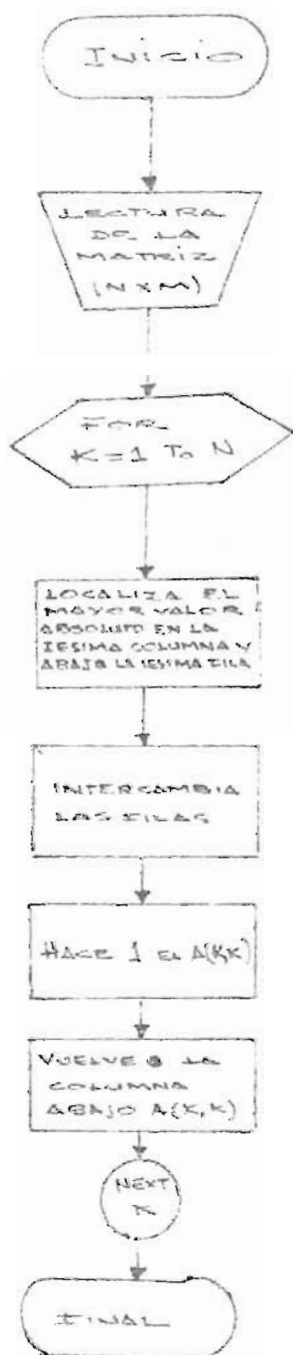
9	3.307691595	3.139549329
10	3.279069181	3.12764448
11	3.255319985	3.117648949
12	3.235294964	3.109998999
13	3.218181812	3.101695137
14	3.203389825	3.095237851
15	3.190476190	3.089552269
16	3.179104477	3.084507012
17	3.169014004	3.080000004
18	3.160000000	3.075949363
19	3.151998734	3.072289160
20	3.144578313	3.068965513
21	3.137931034	3.065934084
22	3.131868132	3.063157898
23	3.126315789	3.060606056
24	3.121212121	3.058252433
25	3.116504854	3.056074767
26	3.112149533	3.054054054
27	3.108100100	3.052173911
28	3.104347826	3.050420171
29	3.100849336	3.04878040
30	3.097568976	3.047244194
31	3.094488189	3.045801523
32	3.091609305	3.044444442
33	3.088888889	3.043165464
34	3.086338935	3.041958040
35	3.083916084	3.040816323
36	3.081632653	3.039735100
37	3.079470199	3.03870968
38	3.077419355	3.037735840
39	3.075471698	3.036809823
40	3.073619632	3.035928145
41	3.071856287	3.035087789
42	3.070175439	3.034285720
43	3.068571429	
44	3.067039106	
45	3.06557377	
46	3.064171123	
47	3.062827225	
48	3.061538462	
49	3.060301509	
50	3.0591133	
51	3.057971915	
52	3.056872838	
53	3.055813953	
54	3.05479452	
55	3.053811659	
56	3.052863466	
57	3.051948052	
58	3.051063830	
59	3.050209285	
60	3.049382716	
61	3.048582996	
62	3.047808765	
63	3.047059824	
64	3.046332046	
65	3.045627376	
66	3.04494382	
67	3.044280443	
68	3.043636364	

69	3.043910753
70	3.042402027
71	3.041811847
72	3.041237113
73	3.040677366
74	3.040133779
75	3.03960396
76	3.039087948
77	3.038585209
78	3.038095238
79	3.037617555
80	3.037151703
81	3.036697248

PROGRAMA 10EXPLICACION DE LAS VARIABLES EMPLEADAS

X(200)	=	Dimensión para la sucesión de iterandos.
Q(100)	=	Dimensión para la sucesión de cocientes.
A(100)	=	Dimensión para la sucesión de Aitken.
S(100)	=	Dimensión para la sucesión de Aitken-Like
I, J,, 0	=	Contadores
X(I)	=	Valores Iniciales (I = 1, 2, 3, 4)
FNA(X)	=	Definición de la función.

4.2.7 SUBROUTINA DE IMPRESION



FLUJOGRAMA PARA LA SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES POR ELIMINACION DE GAUSS-JORDAN

```

10 REM SOLUCION DE ECUACIONES (NMM)
20 REM METODO DE ELIMINACION DE GAUSS
30 REM METODO DE ELIMINACION CON PIVOTE
40 REM ESCOGIENDO EL MAYOR VALOR ABSOLUTO
45 REM LECTURA DE LA MATRIX
50 READ N,M
60 DIM A(4,5),C(4)
70 DATA 4,5,2,1,5,1,5,1,1,-3,-4,-1,3,6,-2,3,8,2,2,2,-3,2
80 MAY READ A
90 GOSUB 3000
100 FOR K=1 TO M
110 REM LOCALIZA EL NUMERO DE MAYOR VALOR ABSOLUTO
120 REM EN V-ESIMA COLUMNA Y ASAJO DE LA IESIMA FILA
130 FOR Z=K TO M
140 C(Z)=A(Z,K)
150 NEXT Z
160 FOR W=K TO M-1
170 FOR X=K TO M-W
180 IF ABS(C(X)) <= ABS(C(X+1)) THEN 220
190 T=C(X)
200 C(X)=C(X+1)
210 C(X+1)=T
220 NEXT X
230 NEXT W
240 IF C(N)=0 THEN 510
250 REM INTERCAMBIO DE FILAS
260 FOR Y=K TO M
270 IF C(N#A(Y,K)) THEN 530
280 FOR I=1 TO M
290 E=A(I,K)
300 A(I,K)=A(Y,K)
310 A(Y,K)=E
320 NEXT I
325 GOTO 340
330 NEXT Y
340 GOSUB 3000
350 REM VOLVIENDO 1 EL ELEMENTO A(K,K):
360 IF A(K,K)=1 THEN 410
370 P=A(K,K)
380 FOR L=K TO M
390 A(K,L)=A(K,L)/P
400 NEXT L
410 GOSUB 3000
420 REM VOLVIENDO 0 a LA COLUMNA ABAJO A(K,K):
430 FOR T=1 TO M
440 IF A(T,K)=0 THEN 500
445 IF T=K THEN 500
450 D=A(T,K)
460 FOR L=K TO M
470 A(T,L)=A(T,L)-D*A(K,L)
480 NEXT L
490 GOSUB 3000
500 NEXT T
510 NEXT K
520 GOSUB 3000
530 STOP
5000 REM SUBROUTINA DE IMPRESION
5010 FOR I=1 TO M
5020 FOR J=1 TO M

```

```

3030 WRITE (15,3040)AC I, J I;
3040 FORMAT F11.4
3050 NEXT J
3060 WRITE (15,*)
3070 NEXT I
3080 WRITE (15,*)
3090 RETURN
3100 END

```

3.0000	1.0000	5.0000	1.0000	5.0000
1.0000	1.0000	-3.0000	-4.0000	-1.0000
3.0000	6.0000	-2.0000	1.0000	8.0000
2.0000	2.0000	2.0000	-3.0000	2.0000
3.0000	6.0000	-2.0000	1.0000	8.0000
1.0000	1.0000	-3.0000	-4.0000	-1.0000
2.0000	1.0000	5.0000	1.0000	5.0000
2.0000	2.0000	2.0000	-3.0000	2.0000
1.0000	2.0000	-0.6667	0.3333	2.6667
1.0000	1.0000	-3.0000	-4.0000	-1.0000
3.0000	1.0000	5.0000	1.0000	5.0000
1.0000	2.0000	2.0000	-3.0000	2.0000
1.0000	2.0000	-0.6667	0.3333	2.6667
0.0000	-1.0000	-2.3333	-4.3333	-3.6667
2.0000	1.0000	5.0000	1.0000	5.0000
2.0000	2.0000	2.0000	-3.0000	2.0000
1.0000	2.0000	-0.6667	0.3333	2.6667
3.0000	-1.0000	-2.3333	-4.3333	-3.6667
3.0000	-3.0000	6.3333	0.3333	-0.3333
2.0000	2.0000	2.0000	-3.0000	2.0000
1.0000	2.0000	-0.6667	0.3333	2.6667
2.0000	-1.0000	-2.3333	-4.3333	-3.6667
2.0000	-3.0000	6.3333	0.3333	-0.3333
2.0000	-2.0000	3.3333	-3.6667	-3.3333
1.0000	2.0000	-0.6667	0.3333	2.6667
1.0000	-2.0000	3.3333	-3.6667	-3.3333
2.0000	-3.0000	6.3333	0.3333	-0.3333
2.0000	-1.0000	-2.3333	-4.3333	-3.6667
1.0000	2.0000	-0.6667	0.3333	2.6667
1.0000	1.0000	-1.6667	1.0333	1.6667
1.0000	-3.0000	6.3333	0.3333	-0.3333
2.0000	-1.0000	-2.3333	-4.3333	-3.6667
1.0000	0.0000	2.6667	-3.3333	-0.6667
2.0000	1.0000	-1.6667	1.0333	1.6667
2.0000	-3.0000	6.3333	0.3333	-0.3333
2.0000	-1.0000	-2.3333	-4.3333	-3.6667
1.0000	0.0000	2.6667	-3.3333	-0.6667
2.0000	1.0000	-1.6667	1.0333	1.6667
2.0000	0.0000	1.3333	5.0333	4.6667
2.0000	-1.0000	-2.3333	-4.3333	-3.6667
1.0000	0.0000	2.6667	-3.3333	-0.6667
2.0000	1.0000	-1.6667	1.0333	1.6667
2.0000	0.0000	1.3333	5.0333	4.6667

0.0000	0.0000	-4.0000	-2.5000	-2.0000
1.0000	0.0000	2.6667	-3.3333	-0.6667
0.0000	1.0000	-1.6667	1.8333	1.6667
0.0000	0.0000	-4.0000	-2.5000	-2.0000
0.0000	0.0000	1.3333	5.8333	4.6667
1.0000	0.0000	2.6667	-3.3333	-0.6667
0.0000	1.0000	-1.6667	1.8333	1.6667
0.0000	0.0000	1.0000	0.6250	0.5000
0.0000	0.0000	1.3333	5.8333	4.6667
1.0000	0.0000	0.0000	-5.0000	-2.0000
0.0000	1.0000	-1.6667	1.8333	1.6667
0.0000	0.0000	1.0000	0.6250	0.5000
0.0000	0.0000	1.3333	5.8333	4.6667
1.0000	0.0000	0.0000	-5.0000	-2.0000
0.0000	1.0000	0.0000	2.8750	2.5000
0.0000	0.0000	1.0000	0.6250	0.5000
0.0000	0.0000	1.3333	5.8333	4.6667
1.0000	0.0000	0.0000	-5.0000	-2.0000
0.0000	1.0000	0.0000	2.8750	2.5000
0.0000	0.0000	1.0000	0.6250	0.5000
0.0000	0.0000	0.0000	5.0000	4.0000
1.0000	0.0000	0.0000	-5.0000	-2.0000
0.0000	1.0000	0.0000	2.8750	2.5000
0.0000	0.0000	1.0000	0.6250	0.5000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.0000
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	2.5000
0.0000	0.0000	1.0000	0.6250	0.5000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.0000
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.2000
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.0000
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.2000
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000

PROGRAMA 11

Explicación de Variables

N = Número de filas.

M = Número de columnas.

C(X) = Vector de Ordenamiento.

I, J, K, ... = Contadores.

A(K, K) = Elemento "pivote" en la matriz

BIBLIOGRAFIA

- 1) Conte, S.D. y Carl de Boor, ANALISIS NUMERICO ELEMENTAL, Editorial McGraw-Hill, Bogotá, 1974.
- 2) Hacques, Gerard, MATHEMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE 3-ALGORITHMIQUE NUMERIQUE (I) COURS, Editorial Armand Colin, París, 1971.
- 3) Henrici, Peter, ELEMENTOS DE ANALISIS NUMERICO, Editorial Trillas, México.
- 4) Hildebrand, F.B., INTRODUCTION TO NUMERICAL ANALYSIS, Editorial McGraw Hill, Bogotá.
- 5) Froberg, Carl-Erick, INTRODUCTION TO NUMERICAL ANALYSIS.
- 6) Ralston, INTRODUCCION AL ANALISIS NUMERICO.
- 7) Richardson, C.H., INTRODUCTION TO THE CALCULES OF FINITE DEFFERENCES, Editorial Van Nostrand.
- 8) Sleigh, Francis, ANALISIS NUMERICO, Editorial Serie Schaum.