

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA



# Introducción a la Simulación

TRABAJO DE GRADUACION PRESENTADO POR:

GUILLERMO MEJIA DIAZ

PREVIO A LA OPCION DEL TITULO DE:

## Licenciado en Matemática

NOVIEMBRE DE 1984

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA



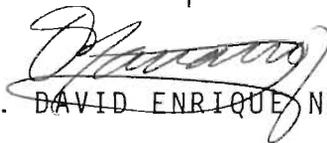
TRABAJO DE GRADUACION



COORDINADOR: Ing. ROBERTO ANTONIO ARGUETA QUAN.



ASESORES: ING. ROBERTO ANTONIO ARGUETA QUAN.



Lic. DAVID ENRIQUE NAVARRO.

T  
511-8  
M516i

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

R E C T O R

Dr. MIGUEL ANGEL PARADA

SECRETARIO GENERAL

Dra. ANA GLORIA CASTANEDA DE MONTOYA

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

D E C A N O

Ing. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

S E C R E T A R I O

Ing. RENE MAURICIO MEJIA MENDEZ

DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Lic. JOSE JAVIER RIVERA LAZO



## D E D I C A T O R I A

- A Dios : Por haberme dado la vida y el ánimo para seguir adelante.
- A mi Madre : María Concepción Díaz.  
Por su esfuerzo y sacrificio para ver culminada esta etapa de mi vida.
- A la memoria de mi Padre: Mt. Guillermo Mejía Dueñas.
- A mi Esposa : Guadalupe Esperanza, con todo mi amor.
- A mis familiares : Con amor agape.
- A mis Asesores : Quienes me incentivaron y orientaron apropiadamente en este - trabajo.
- A mis Profesores : Quienes ayudaron en mi formación profesional.

## INTRODUCCION

Tras incalculables esfuerzos he concluido el presente trabajo, sin embargo, estoy consciente que ésto como su nombre lo indica, no es más que una introducción al mundo fabuloso de la Simulación por computadoras. Pero me siento orgulloso porque la dirección de este trabajo rompe con los esquemas tradicionales y es un reto para abrir brechas en otros campos del conocimiento.

En el Capítulo I, se ha tratado de resumir al máximo los conceptos de sistemas y modelos; en el Capítulo II, se estudian los conceptos propios de la simulación; en el Capítulo III, se inicia dando una breve exposición de los conceptos estadísticos y de probabilidad básicos que se necesitan para el estudio concienzudo de los sistemas. Se estudia la generación de números aleatorios, pruebas estadísticas que se aplican a los generadores de números aleatorios, así como programas para generar en la computadora valores de variables aleatorias con ciertas distribuciones de probabilidad y los resultados obtenidos. Se plantea además el famoso problema en el cálculo de probabilidades, "el método de las agujas de Buffon para calcular un valor aproximado al valor de  $\Pi$ ". Se resuelve analíticamente y -

también usando un programa de simulación mostrándose los resultados obtenidos. En el Capítulo IV, se estudian los sistemas de colas y la simulación de sistemas de colas; finalizando en el Capítulo V con los sistemas de inventarios y la simulación de los mismos.

No me resta más que expresar mis agradecimientos a:  
La Dra. Marie Duflo por la atención prestada en los aspectos teóricos de la Simulación de Colas e Inventarios, Ing. Carlos Mauricio Canjura, por su ayuda en el campo del Análisis Matemático; Lic. Manuel de Jesús Cortez Alvarez, Ing. Gabriel Meléndez Mayorga, Ing. Samuel Martínez Gómez, Br. William Castro, por su ayuda bibliográfica; Br. Julio César Montes, por el uso de su computador personal para obtener los resultados de los programas; Ing. Víctor Hugo Anzora, por su planteamiento del problema de las agujas de Buffon; a mis compañeros de trabajo Lic. Jesús Alfredo Canjura y Lic. Mario Roberto Najarro, por su comprensión y ayuda, a la señora Nohemy de Rovelo por la mecanografía del trabajo y al señor Mauricio García por la realización de los diagramas y gráficos.

Guillermo Mejía Díaz.

Noviembre de 1984.

## INDICE

	<u>PAGINA</u>
INTRODUCCION	I
CAPITULO I SISTEMAS Y MODELOS	1
1.1 SISTEMAS	1
1.1.1 CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS	6
1.1.2 ANALISIS DE SISTEMAS	8
1.1.3 RENDIMIENTO DE LOS SISTEMAS	8
1.1.4 OPTIMIZACION	9
1.2 MODELOS	9
1.2.1 CARACTERISTICAS DE LOS MODELOS PARA LA SIMULACION	11
1.2.2 CLASIFICACION DE LOS MODELOS	19
CAPITULO II SIMULACION DE SISTEMAS Y METOLOGIA	21
2.1 SIMULACION DE SISTEMAS	21
2.1.1 CUANDO USAR LA SIMULACION DE SISTEMAS	23
2.1.2 OBJETIVOS QUE SE DEBEN TENER EN CUENTA EN EL PROCESO DE SIMULACION	25
2.1.3 APLICACIONES GENERALES DE LA SIMULACION	27
2.1.4 DIFERENTES TIPOS DE SIMULACION	32
2.1.5 METODOS DE MONTECARLO	40
2.2 METODOLOGIA	42
2.2.1 FORMULACION DEL PROBLEMA	44

2.2.2	RECOLECCION Y PROCESAMIENTO DE DATOS TOMADOS DE LA REALIDAD	45
2.2.3	FORMULACION DE MODELOS	48
2.2.4	VALIDACION DEL MODELO Y DE LOS PARAM <u>E</u> TROS ESTIMADOS	50
2.2.5	FORMULACION DE UN PROGRAMA PARA LA COMPUTADORA	52
2.2.6	PROCESAMIENTO DEL MODELO	54
2.2.7	ANALISIS DE LOS RESULTADOS	54
2.2.8	DISEÑO DE EXPERIMENTOS	56
2.3	EJEMPLO ILUSTRATIVO	56
	← CAPITULO III CONCEPTOS DE TEORIA DE LA PROBABI- LIDAD	63
3.1	CONCEPTOS	63
3.1.1	ESPACIO MUESTRAL	63
3.1.2	PROBABILIDAD	65
3.1.3	VARIABLES ALEATORIAS	68
3.1.4	FUNCION DE: PROBABILIDAD, DENSIDAD DE PROBABILIDAD Y DISTRIBUCION ACUMULATIVA	71
3.1.5	ESPERANZA Y VARIANZA	75
3.1.6	DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE PROBABILIDAD	78
3.1.7	DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD	82
3.2	GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS	87
3.2.1	NUMEROS ALEATORIOS	88

3.2.2	GENERADORES DE NUMEROS ALEATORIOS	93
3.2.3	PRUEBAS SOBRE GENERADORES DE NUMEROS ALEATORIOS	101
3.2.4	GENERACION DE VALORES DE LAS DISTRIBU- CIONES DE PROBABILIDAD USANDO UNA COM- PUTADORA	131
CAPITULO IV CONCEPTOS BASICOS DE LA TEORIA DE CO- LAS Y SIMULACION DE SISTEMAS DE COLAS		180
4.1	CONCEPTOS BASICOS DE LA TEORIA DE COLAS	180
4.1.1	ENTRADAS	183
4.1.2	DURACION O TIEMPO DE SERVICIO	183
4.1.3	ESTRUCTURA DE UN FENOMENO DE ESPERA	184
4.1.4	SISTEMA DE ESPERA DE CANAL SIMPLE Y FASE SIMPLE	193
4.1.5	SISTEMA DE ESPERA DE CANALES MULTIPLES EN PARALELO	207
4.2	SIMULACION DE SISTEMAS DE COLAS	225
4.2.1	SIMULACION DE SISTEMAS DE CANAL SIMPLE	225
CAPITULO V TEORIA DEL INVENTARIO (CONCEPTOS BASI- COS) Y SIMULACION DE SISTEMAS DE IN- VENTARIO		247
5.1	TEORIA DEL INVENTARIO (CONCEPTOS BASICOS)	248
5.2	CLASIFICACION DE LOS MODELOS DE INVENTARIO	260
5.3	MODELOS DETERMINISTICOS DE INVENTARIO	261

5.4	MODELOS ESTOCASTICOS DE INVENTARIO	279
5.4.1	MODELO CON UN SOLO PERIODO SIN COSTO DE PREPARACION	279
5.4.2	MODELO DE UN SOLO PERIODO CON UN <u>COS</u> TO DE PREPARACION	288
5.4.3	MODELO DE INVENTARIO CON DOS PERIODOS SIN COSTO DE PREPARACION	292
5.5	SIMULACION DE SISTEMAS DE INVENTARIOS	306
5.5.1	EVENTOS QUE SE DEBEN CONSIDERAR EN LA SIMULACION DE INVENTARIOS	307
5.5.2	DESCRIPCION DEL PROGRAMA	315
	ANEXO DE PROGRAMAS	
	BIBLIOGRAFIA	

## CAPITULO I

### SISTEMAS Y MODELOS

#### 1.1 SISTEMAS.

El término sistema se utiliza de muchas formas y tiene significados reservados en todas las disciplinas y todos los campos de investigación. Se dará a continuación una definición general de sistema.

##### Definición 1.1.1

Un sistema es un conjunto de entidades (o componentes) interrelacionadas a través de los atributos (propiedades o características) que cada una posee.

Todo sistema tiene tres características: tiene fronteras, existe dentro de un medio ambiente y tiene subsistemas.

##### Definición 1.1.2

El ambiente de un sistema es el conjunto de todas las entidades que:

- i) Tienen atributos cuyo cambio afecta al sistema.
- ii) Sus atributos sufren cambios debidos al comportamiento del sistema.

La frontera distingue las entidades dentro del sistema de las entidades que constituyen su medio ambiente.

En las definiciones anteriores se mencionan conceptos que son inherentes en el estudio de los sistemas: entidades o componentes; atributos, propiedades o características, de las entidades; y, relaciones entre las entidades.

Las entidades o componentes de un sistema pueden ser en gran número y de naturaleza diversa. Por ejemplo, el sistema solar tendría como entidades a los planetas, satélites, cometas, estrellas, etc. En cambio, el sistema de numeración decimal tiene como entidades a los números 0, 1, 2, 3, ..., 9.

En un sistema de colas (ver Cap. IV) los componentes son, los canales de servicio y las unidades que llegan a recibir el servicio.

En un sistema de inventario (ver Cap. V) los componentes son, los artículos en inventario y la demanda de dichos artículos.

Los atributos son las características o propiedades que poseen las entidades, y son los que permiten hacer su descripción.

Por ejemplo, un artículo en inventario tendrá los siguientes atributos: existencia en inventario, demanda, etc., y son éstos los que permitirán hacer un análisis acerca de si es necesario, o no, hacer un nuevo pedido y cuánto pedir.

Las relaciones que existen entre las unidades estructuran el sistema. Así, un sistema de colas se estructura cuando más de una unidad llegan a solicitar servicio a un canal que sólo puede dar servicio a una unidad a la vez.

Dado el conjunto de entidades y atributos, se podrán establecer numerosas relaciones. El estudio del sistema se enfoca en las relaciones que se consideran necesarias para describir el sistema y explicar el modo en que cambia.

A continuación se presentan ejemplos de sistemas, sus entidades y atributos de las entidades.

SISTEMA	ENTIDADES	ATRIBUTOS
de Inventario	Artículos	existencia en inventario.
	Demanda	determinística o aleatoria.
	Costos	de preparación, de almacenamiento, proporcionales al costo de producción, etc.
de Colas	Canales de Servicio	capacidad de servicio, tiempo de servicio, - etc.
	Unidades	Esperan recibir servicio.
	Colas	longitud.

A partir de las definiciones de sistema y ambiente es factible subdividir un sistema en subsistemas:

### Definición 1.1.3

Un subsistema, es un subconjunto de entidades del sistema reunidas por una propiedad o atributo especial, que permite caracterizarlo.

Así, por ejemplo en un sistema de inventario, donde existen muchos artículos diferentes en el inventario, un subsistema podría estar formado por la existencia y la de manda de un artículo en particular.

Para definir el estado de un sistema, recuérdese que un sistema se define como un conjunto de entidades interrelacionadas a través de sus atributos. Con el tiempo, los a tributos pueden ir asumiendo diferentes valores.

#### Definición 1.1.4

Se define el estado del sistema en cualquier punto - del tiempo, como el valor actual de sus atributos.

Son dos elementos que describen el cambio de estado del sistema:

- a) Magnitud.
- b) Retraso.

#### Definición 1.1.5

Se define la "magnitud" de un cambio de estado, como la diferencia absoluta en el valor de un atributo durante un período específico comparado con su valor antes del cam bio.

Así, si  $X_t$  y  $X_{t+1}$  representan los estados en los tiempos  $t$  y  $t+1$  entonces  $|X_{t+1} - X_t|$ , representa la magnitud del cambio de estado de  $t$  hasta  $t+1$ . Por ejemplo, en una empresa la magnitud del cambio de estado puede ser, el aumento en las utilidades de este año con respecto al año anterior.

En la mayor parte de sistemas un estímulo externo produce un cambio en el estado del sistema, este cambio puede ocurrir al instante de recibir el estímulo o después de transcurrido algún tiempo.

#### Definición 1.1.6

Se llama "retraso", al lapso de tiempo que transcurre entre el estímulo y el cambio de estado por parte del sistema.

En un estudio teórico de los sistemas de inventario, con frecuencia, se asume por simplicidad, que no existe retraso entre el hacer un pedido y la recepción del mismo.

#### 1.1.1 CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS.

Hay varios patrones de clasificación de los sistemas, se mencionarán únicamente dos, pero queda a la expectativa la existencia de otras clasificaciones.

Los sistemas se pueden clasificar en:

- a) Abiertos o Cerrados.
- b) Adaptables o Inadaptables.

Un sistema es Abierto si se intercambia objetos, energía o información con su ambiente; y es cerrado, si no existe ningún intercambio.

Un sistema de Colas puede ser abierto o cerrado. Es abierto, si las unidades al salir del canal de servicio, luego de ser atendidas, pasan a otros sistemas (o subsistemas). Y es cerrado, si las unidades al salir del canal vuelven a la fuente de origen, para entrar nuevamente al sistema.

Un sistema es adaptable si reacciona convenientemente ante los cambios ambientales, teniendo en cuenta la finalidad para la que fueron diseñados. Y es inadaptable si no reacciona convenientemente o sencillamente no reacciona ante los cambios ambientales.

Un sistema de inventario puede ser adaptable o inadaptable. Es adaptable en la medida que pueda satisfacer la demanda de los artículos, es decir, si sus existencias (en inventario o en pedidos por llegar) satisfacen la demanda. Y será inadaptable, si existe demanda de un artículo que no

se tiene en existencia y cuya producción ya se haya discontinuado.

### 1.1.2 ANALISIS DE SISTEMAS.

Así como la palabra sistema se usa de muchas maneras, al término Análisis de Sistemas se le atribuyen varios significados. Sin embargo, dado un fenómeno o situación no estructurada, interesan dos cosas: su descripción, y la explicación de la conducta observada para efectos de predicción y control.

Dado un sistema, puede interesar estudiar uno o más fenómenos en función de él, en cuyo caso los objetivos generales del análisis serán:

- i) Aprender cómo cambian los estados del sistema.
- ii) Predecir dichos cambios de estado.
- iii) Controlar los cambios de estado.

### 1.1.3 RENDIMIENTO DE LOS SISTEMAS.

Se ha mencionado que tres objetivos de analizar un sistema son comprender cómo ocurre el cambio de estado del sistema, así como predecirlo y controlarlo. Estas razones nacen del deseo de mejorar el funcionamiento o ejecución de un sistema en cierto aspecto. Se definen a continuación

los conceptos de ejecución y rendimiento de los sistemas.

#### Definición 1.1.7

Ejecución del sistema, es la secuencia de estados que un sistema adopta durante un intervalo específico de tiempo.

#### Definición 1.1.8

Rendimiento del sistema, es el aporte del sistema a la satisfacción de los objetivos o finalidad con que fue creado.

#### 1.1.4 OPTIMIZACION.

El objetivo ideal es optimizar el rendimiento del sistema, lo cual supone, controlar algún aspecto del sistema, de manera que se pueda obtener el mejor rendimiento posible. Por lo general, algunos aspectos del sistema quedan fuera del control del analista, y estos imponen restricciones sobre el comportamiento del sistema, los cuales excluyen una optimización ilimitada. En tales casos, el objetivo es optimizar la ejecución sujeta a las restricciones.

#### 1.2 MODELOS.

El análisis de sistemas y la construcción de modelos

son ideas inseparables. Describir un sistema significa que se construye algún tipo de representación de él. Es más, los modelos constituyen una necesidad central del procedimiento científico, ya que ninguna parte del universo es tan simple como para comprenderse y controlarse sin abstracción, la cual consiste en reemplazar la parte del universo bajo con-sideración, por un modelo de estructura similar, pero más simple.

#### Definición 1.2.1

Un modelo es una abstracción de algún sistema real - que tiene la posibilidad de emplearse para propósitos de - predicción y control.

Son características de los modelos:

1. Hace posible que un investigador organice sus conoci - mientos teóricos y sus observaciones empíricas sobre un sistema y deduzca las consecuencias lógicas de esta or - ganización.
2. Favorece una mejor comprensión del sistema.
3. Acelera el análisis.
4. Es más fácil de manipular que el sistema mismo.

5. Hace posible controlar más fuentes de variación que lo que permitiría el estudio directo del sistema.
6. Suele ser menos costoso.

#### 1.2.1 CARACTERISTICA DE LOS MODELOS PARA LA SIMULACION.

Para aplicar la simulación (ver Cap. II) a un modelo, éste necesariamente debe incorporar elementos de dos atributos en conflicto: realismo y simplicidad. Por un lado, el modelo ha de servir como una aproximación razonable al sistema real y debe incorporar la mayor parte de los aspectos importantes de éste; por otro, no es conveniente que el modelo resulte tan complejo y sea imposible entenderlo o manipularlo.

En general, todo modelo debe constar de las siguientes partes:

- a) Componentes,
- b) Variables,
- c) Parámetros, y
- c) Relaciones funcionales.

Los componentes de un modelo, en general, se pueden clasificar en abstractos y físicos. En un caso particular, la clase de componentes a utilizar depende en gran parte -

del sistema a simular.

Las variables que se emplean para relacionar un componente con otro se clasifican en:

- i) Variables Exógenas.
- ii) Variables de Estado.
- iii) Variables Endógenas.

Son Variables Exógenas, las independientes (o de entrada) del modelo, y se supone que han sido suministradas y predeterminadas independientemente del sistema que se modela. - Puede considerarse que estas variables actúan sobre el sistema pero que no reciben acción alguna por parte de él. Las variables Exógenas se clasifican en:

- 1) Controlables (o instrumentales).
- 2) No controlables.

Son Variables Exógenas Controlables, aquellas susceptibles de manipulación o control por quienes toman decisiones o crean políticas para el sistema. Por ejemplo, una empresa en un momento determinado es capaz de controlar la cantidad de materia prima que compra y el número de trabajadores que se emplean, entonces las variables exógenas controlables serán la cantidad de materia prima que se compra y el número de trabajadores que se emplean.

Son variables Exógenas no Controlables, aquellas que son generadas por el medio ambiente en el cual el sistema mo  
delado existe o por los encargados de tomar decisiones.

Las variables de Estado, describen el estado del mode  
lo o de uno de sus componentes, ya sea al comienzo, al final o durante un período de tiempo. Estas variables interaccionan con las variables exógenas y con las endógenas, de acuerd  
o a las relaciones funcionales supuestas para el sistema. En un modelo de inventario, la variable de estado puede ser la existencia en inventario de un artículo.

Son variables endógenas o dependientes, las de salida del modelo, y son generadas por la interacción de las variabla  
bles exógenas con las de estado de acuerdo con las características de operación del sistema. Por ejemplo, en un sistema de inventario de varios períodos con demanda aleatoria, la variable endógena al final de cada período sería la exis  
tencia en inventario de un artículo.

Las variables exógenas, pueden ser consideradas también como parámetros (determinados por el medio ambiente o por el que toma las decisiones), los cuales tienen que esti  
marse con anterioridad y almacenarse hasta que sean usados en el modelo, en el cual se introducen como datos de entra  
da.

Las relaciones funcionales describen la interacción - entre las variables y los componentes de un modelo. Hay dos relaciones funcionales:

- 1) Identidades.
- 2) Características de operación.

Ambas se usan para generar el comportamiento del sistema.

Las identidades toman la forma de definiciones o declaraciones tautológicas, relativas a los componentes del modelo. Por ejemplo, en una empresa, la utilidad total se define como la diferencia entre los ingresos y los costos totales.

Una característica de operación, es generalmente una hipótesis (casi siempre una ecuación matemática) que relaciona las variables endógenas y de estado con las exógenas. En un sistema de inventario la función costo es una característica de operación.

Para ilustrar como se relacionan las partes de los modelos, considérese el siguiente ejemplo: Modelo de un fenómeno de espera de una sola cola con canales de servicio en serie.

Los componentes de este modelo se ilustran en la siguiente figura; y consisten en "órdenes" (unidades) que llegan al sistema y "procesos" a través de los cuales un orden pasará antes de completarse.

El propósito del modelo es relacionar el tiempo total que requiere una orden para pasar a través de los  $n$  procesos, con la forma en que llegan las órdenes y el tiempo que consume cada uno de tales procesos.

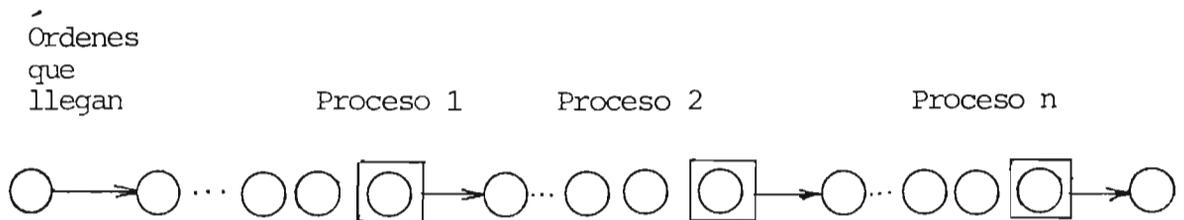


Figura 1. Modelo de fenómeno de espera de una sola cola con canales en serie.

El modelo contiene las siguientes variables, parámetros, características de operación e identidades:

Variables Exógenas:

$T_i$  : Intervalo de tiempo entre la llegada de la  $i$ -ésima orden y la  $(i-1)$ -ésima orden, donde  
 $i = 1, 2, \dots, m$

$T_{ij}$  : Tiempo de procesamiento para la  $i$ -ésima orden en el  $j$ -ésimo proceso.  $i = 1, 2, \dots, m$  ;  
 $j = 1, 2, \dots, n$ .

Variables de Estado:

$TE_{ij}$  : Tiempo que espera la  $i$ -ésima orden para entrar al  $j$ -ésimo proceso (después de salir del proceso  $j-1$ ).  $i = 1, 2, \dots, m$  ;  $j = 1, 2, \dots, n$ .

$TO_{ij}$  : Tiempo de ocio del  $j$ -ésimo proceso, mientras espera la llegada de la  $i$ -ésima orden.  
 $i = 1, \dots, m$  ;  $j = 1, \dots, n$ .

$TT_{ij}$  : Tiempo total que la  $i$ -ésima orden permanece en el  $j$ -ésimo proceso.  $i = 1, \dots, m$  ;  
 $j = 1, \dots, n$ .

Variable Endógena:

$TT_i$  : Tiempo total que la  $i$ -ésima orden permanece en el sistema, es decir, el tiempo requerido para pasar a través de los  $n$  procesos.

Parámetros:

$E(T)$  : Tiempo esperado entre las órdenes.

$Var(T)$  : La varianza del tiempo entre las órdenes.

$E(T_j)$  : Tiempo esperado de duración del  $j$ -ésimo proceso,  $j = 1, \dots, n$ .

$\text{Var}(T_j)$  : La varianza del tiempo en el  $j$ -ésimo proceso,  $j = 1, \dots, n$ .

Características de Operación:

$f(T)$  : La función de densidad de probabilidad para el tiempo entre llegadas de las órdenes.

$f(T_j)$  : La función de densidad de probabilidad para el tiempo de duración del  $j$ -ésimo proceso,  $j = 1, \dots, n$ .

Identidades:

Cuando la primer orden llega al sistema ( $i = 1$ ), las siguientes ecuaciones describen el sistema de procesos múltiples:

$$T_1 = 0$$

$$TE_{1j} = 0, \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

$$TO_{11} = 0$$

$$TO_{12} = T_{11}, TO_{13} = T_{11} + T_{12}, \dots, TO_{1n} = \sum_{j=1}^{n-1} T_{1j}.$$

Para órdenes subsiguientes ( $i = 2, 3, \dots, m$ ), las ecuaciones de tiempo se convierten en:

$$TT_{i1} = TE_{i1} + T_{i1} ; i = 2, \dots, m.$$

$$TT_{i2} = TE_{i2} + T_{i2} ; i = 2, \dots, m.$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$TT_{in} = TE_{in} + T_{in} ; i = 2, \dots, m.$$

Para investigar el tiempo de espera y el tiempo de ocio, obsérvense las siguientes diferencias, pues del signo de ellas dependerá si existe o no, tiempo de espera o de ocio.

En todos los casos se supone que  $i = 2, 3, \dots, m$ .

$$DIF_{i1} = TT_{i-1,1} - T_i$$

Si  $DIF_{i1} > 0$ , entonces para el primer proceso el tiempo de ocio será nulo y el tiempo de espera para la segunda orden será precisamente el valor de  $DIF_{i1}$ .

Si  $DIF_{i1} < 0$ , entonces el tiempo de espera será nulo y el tiempo de ocio será precisamente  $-DIF_{i1}$  (ya que el tiempo siempre es considerado positivo).

Las demás diferencias son:

$$\begin{array}{l} DIF_{i2} = (TT_{i-1,1} + TT_{i-1,2}) - (T_i + TE_{i1} + T_{i1}) \\ \vdots \\ DIF_{in} = \left( \sum_{j=1}^n TT_{i-1,j} \right) - \left( T_i + \sum_{j=1}^{n-1} TE_{ij} + T_{ij} \right) \end{array}$$

donde  $i = 2, 3, \dots, m$ .

Así, si  $DIF_{ij} > 0$  para el  $j$ -ésimo proceso, entonces el tiempo de ocio será nulo y el tiempo de espera puede calcularse con:

$$TE_{ij} = DIF_{ij} \quad i = 2, \dots, m ; j = 1, \dots, n.$$

Si  $DIF_{ij} < 0$  para el  $j$ -ésimo proceso, entonces el tiempo de espera será nulo y el tiempo de ocio será:

$$TO_{ij} = - DIF_{ij} \quad i = 2, \dots, m ; j = 1, \dots, n.$$

Si  $DIF_{ij} = 0$  para el  $j$ -ésimo proceso, entonces el tiempo de espera y el tiempo de ocio serán nulos.

### 1.2.2 CLASIFICACION DE LOS MODELOS.

Así como en los sistemas existen varios patrones de clasificación, también los modelos se pueden clasificar de diferentes maneras. Pero, para efectos de aplicación, en este trabajo sólo se mencionará un patrón de clasificación, el que clasifica los modelos en deterministas y de probabilidad.

Los sistemas a los que representan los modelos deterministas, están privados de incertidumbre y los cambios de estado se pueden predecir perfectamente. En los modelos deterministas ni las variables exógenas ni las endógenas pueden ser -

variables aleatorias (ver Cap. III); se suponen relaciones exactas para las características de operación en lugar de funciones de densidad de probabilidad, como sucede en los modelos de probabilidad.

Los modelos determinísticos requieren menos procesamiento en computadora que los modelos de probabilidad y, con frecuencia es posible resolverlos analíticamente por medio de técnicas como el cálculo de máximos y mínimos. Hay diferencia entre el tipo de información que proporciona un modelo de probabilidad y la que se puede obtener mediante un modelo determinista. No es correcto decir que la solución o, más bien, el procesamiento de un modelo de probabilidad dará como resultado una solución óptima (aunque a menudo por abuso del lenguaje se hace), dado que se ha modelado adecuadamente un proceso aleatorio con el cual se pueden trazar los estados futuros probables del sistema; pues, nunca hay una completa seguridad de que las variables asumirán la secuencia de valores que da el modelo.

En los Capítulos IV y V se estudian sistemas de colas e inventarios, donde se plantean ambos tipos de modelos.

## CAPITULO II

### SIMULACION DE SISTEMAS

#### METODOLOGIA

##### 2.1 SIMULACION DE SISTEMAS.

En el sentido más general, simulación significa representación de la realidad; por ende, la descripción verbal y la representación esquemática o gráfica de alguna parte del mundo real constituyen una simulación. Sin embargo, no es este el tipo de simulación que interesa desarrollar, sino aquel en el que se tenga que usar una computadora para su ejecución, por lo que se darán dos definiciones, la primera un tanto general y la segunda más particular con respecto al objetivo del trabajo:

##### Definición 2.1.1

La Simulación de un sistema (o un organismo) es la operación de un modelo (Simulador), el cual es una representación del sistema. La operación de un modelo puede estudiarse y con ello, inferirse las propiedades concernientes al comportamiento del sistema o subsistema real.

Antes de proponer una definición de la simulación en computadora, es conveniente notar algunas aplicaciones de la técnica. Pese a que el concepto de la simulación de sistemas cristalizó a principios de los años 1950, su desarrollo ha sido muy acelerado y sus aplicaciones son en casi todos los campos de la ciencia.

Algunas de las primeras simulaciones señaladas por los especialistas en ciencias sociales implicaban la construcción de modelos para representar grandes sistemas económicos y sociales. Trabajando con datos de los censos, los sociólogos modelaron poblaciones humanas de los Estados Unidos; en el modelo se incluyeron los procesos de la vida y la muerte, los que conducen al matrimonio y a la formación de una familia, el ingreso y la salida de la fuerza de la mano de obra y otros procesos.

La simulación ha permitido estudiar algunos procesos en los que se ven afectados los individuos en un sistema social; por ejemplo, ¿Cómo se difunde la información sobre nuevos métodos agrícolas entre la población de una nación económicamente subdesarrollada?, ¿Hay algún sistema de causalidad que se pueda modelar para explicar los conflictos entre los individuos o naciones?

Los analistas de sistemas administrativos han logrado

construir modelos de simulación en computadoras para analizar un proceso como el flujo de trabajo en grandes talleres. También se ha modelado conductas de los consumidores; como la fidelidad a una marca o el cambio de marcas.

Los modelos de simulación que mayor publicidad reciben son los que se efectúan en la NASA, especialmente los utilizados para los vuelos espaciales tripulados. Esos programas emplean una gama muy amplia de modelos y técnicas analíticas; pero lo más importante ha sido el empleo de simulaciones llenas de imaginación en las que el hombre y el vehículo interactúan en ambientes creados por las computadoras.

Por todo lo anterior se puede concluir que ha habido una verdadera explotación de la simulación en los últimos años; sin embargo, no es simplemente la popularidad de la técnica ni la facilidad con que se puede emplear lo que la hace recomendable. Es preciso comprender por qué se aplica la técnica y qué la distingue de los métodos tradicionales de análisis y resolución de problemas.

#### 2.1.1. CUANDO USAR LA SIMULACION DE SISTEMAS.

La simulación ha llegado a utilizarse cada vez más, para estudiar la conducta de sistemas cuyo estado cambia con el tiempo. El estudio de un sistema comprende en primer lugar,

la formulación de un modelo del mismo. En general, al tratar de desarrollar un modelo matemático para un determinado sistema se presenta uno de los tres casos siguientes:

1. El sistema puede someterse a la descripción y al análisis mediante un modelo matemático.
2. El sistema puede someterse a la descripción por medio de un modelo matemático; sin embargo, el análisis correcto del modelo se encuentra más allá del nivel de refinamiento, en matemática, por parte del analista.
3. El sistema es tan complejo que su descripción por medio de un modelo matemático está por encima de las capacidades del analista.

Los casos 2 y 3 se prestan a la utilización de la simulación para resolverlos; los problemas de simulación se caracterizan porque han resultado matemáticamente intratables y han resistido a la resolución por métodos analíticos. Por lo general, los problemas incluyen muchas variables, numerosos parámetros, funciones que no se comportan bien en matemática (Irresolubles), y variables que pueden tomar valores aleatorios (Variables Aleatorias, ver Cap. III).

Así, la simulación es una técnica a la que se recurre -

en última instancia; aunque hoy en día se dedican muchos esfuerzos a la simulación en computadora, porque es una técnica que da respuestas, a pesar de sus dificultades, su costo y tiempo requerido.

#### 2.1.2 OBJETIVOS QUE SE DEBEN TENER EN CUENTA EN EL PROCESO DE SIMULACION.

Para que la simulación pueda ser una técnica eficiente de análisis para la determinación de normas eficaces y racionales, hay diferentes objetivos que es preciso tener en consi  
deración en el proceso de simulación:

1. Objetivo del sistema que se está estudiando. En general, el objetivo consiste en utilizar los recursos asignados de tal modo que se optimicen una o varias cantidades que se reconocen como meta del sistema.
2. Objetivo del modelo de simulación. Este objetivo, bajo el supuesto que el modelo representa adecuada  
mente al sistema, consiste en generar eficientemen  
te estadísticas de salida. Estas últimas son los parámetros que se deben conocer para ajustar el mo  
delo de la aplicación.

3. Objetivos del analista de simulación. Este objetivo consiste en distribuir los recursos del presupuesto del proyecto de simulación de tal modo que se maximicen los beneficios esperados (gracias a recomendaciones hechas con los resultados del proyecto). Esto quiere decir, que el objetivo del analista de simulación consiste en determinar normas eficaces con tanta eficiencia como sea posible.

Existe una jerarquía entre esos objetivos; el del sistema que se estudia debe preceder necesariamente a los demás; la realización o el alcance de ese objetivo es primordial para la organización; el segundo en importancia es el del analista de simulación y en último lugar aparece el objetivo del modelo de simulación.

Esto significa que el sistema no existe con el único fin de que lo analicen y, el analista no tiene que escribir necesariamente programas para simular en computadoras.

Esos objetivos están siempre presentes en todos los análisis de simulación, y se deben tener en consideración para obtener los beneficios máximos del proyecto.

### 2.1.3 APLICACIONES GENERALES DE LA SIMULACION.

Las dos aplicaciones generales de la simulación son:

- a) El diseño de Sistemas.
- b) El análisis de la conducta de los Sistemas.

El diseño o el problema del diseño significa que, el analista tiene medios alternativos para reunir los componentes del sistema. Dada la especificación del resultado deseado del sistema propuesto, se busca un diseño que optimice alguna medida del comportamiento del sistema, tal como los beneficios, los costos, el tiempo, la utilización de recursos y la estabilidad. Se procesa un modelo del sistema, incluyendo cambios sucesivos que corresponden a diseños alternativos. Se traza la influencia del diseño sobre la medida de eficiencia, y a continuación el analista tiene una base para seleccionar el diseño que logre eficazmente el resultado deseado del sistema.

Como ilustración, considérese el problema de diseñar un sistema de inventario al menudeo (Figura 2.1).

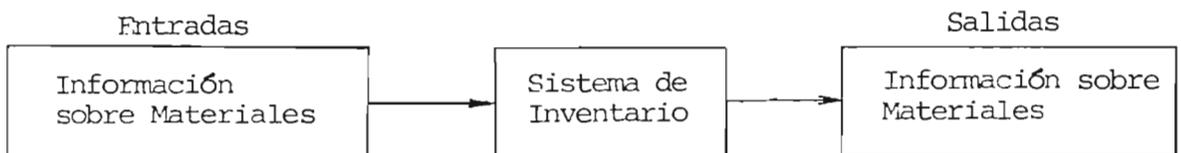


Figura 2.1 Modelo de un sistema de inventario.

Las entradas al sistema son recepciones de nuevas existencias de los abastecedores y los pedidos de los clientes. Los resultados son materiales enviados y pedidos de reabastecimiento. El tiempo promedio para procesar o llenar un pedido se selecciona arbitrariamente como medida de la eficiencia del sistema. La casilla identificada como sistema de inventario representa el conjunto de entidades, renglones de existencias, empleados y documentos que el diseñador puede disponer en cualquier orden para minimizar el tiempo promedio de procesamiento de pedidos.

Cuando se especifica el contenido de la casilla (entidades, atributos de entidades y relaciones; por ejemplo, el modo en que los atributos asumen valores), el diseñador propone una alternativa de diseño. Supóngase que, en este caso, el analista desea considerar y comparar las alternativas de diseño A, B y C (el diseño A es la configuración estándar, en cambio B y C representan alteraciones o cambios del diseño A). Los diseños alternativos pueden diferir en el número de empleados, la cantidad de documentación, el orden en que se le da servicio a los clientes, las reglas para el repedido de existencias y así sucesivamente. Ahora supóngase que se proporciona un modelo del diseño A con información sobre una secuencia de pedidos de los clientes y que el modelo se procesa o se pone en ejecución, de tal modo que incluya la actividad de satis

facер pedidos y completar existencias de renglones de inventario. Supóngase también que puede hacerse el modelo para informar sobre valores periódicos de diversos atributos: nivel de inventario, existencia sobre pedidos, pedidos atrasados y otros. A partir de esta información el analista puede obtener la medida de la eficiencia dependiente del diseño A.

A continuación se modifica el diseño A, de modo que se introducen las alteraciones o los cambios que se resumen como diseño B. El procedimiento se repite. Luego, se hacen los cambios correspondientes a la alternativa de diseño C y se procesa el modelo.

Utilizando los tres valores de la medida de eficiencia, el analista tiene una base comparativa para decidirse por uno de los diseños para su aplicación, o sea, la construcción en el mundo real. Este procedimiento se muestra esquemáticamente en la Figura 2.2.

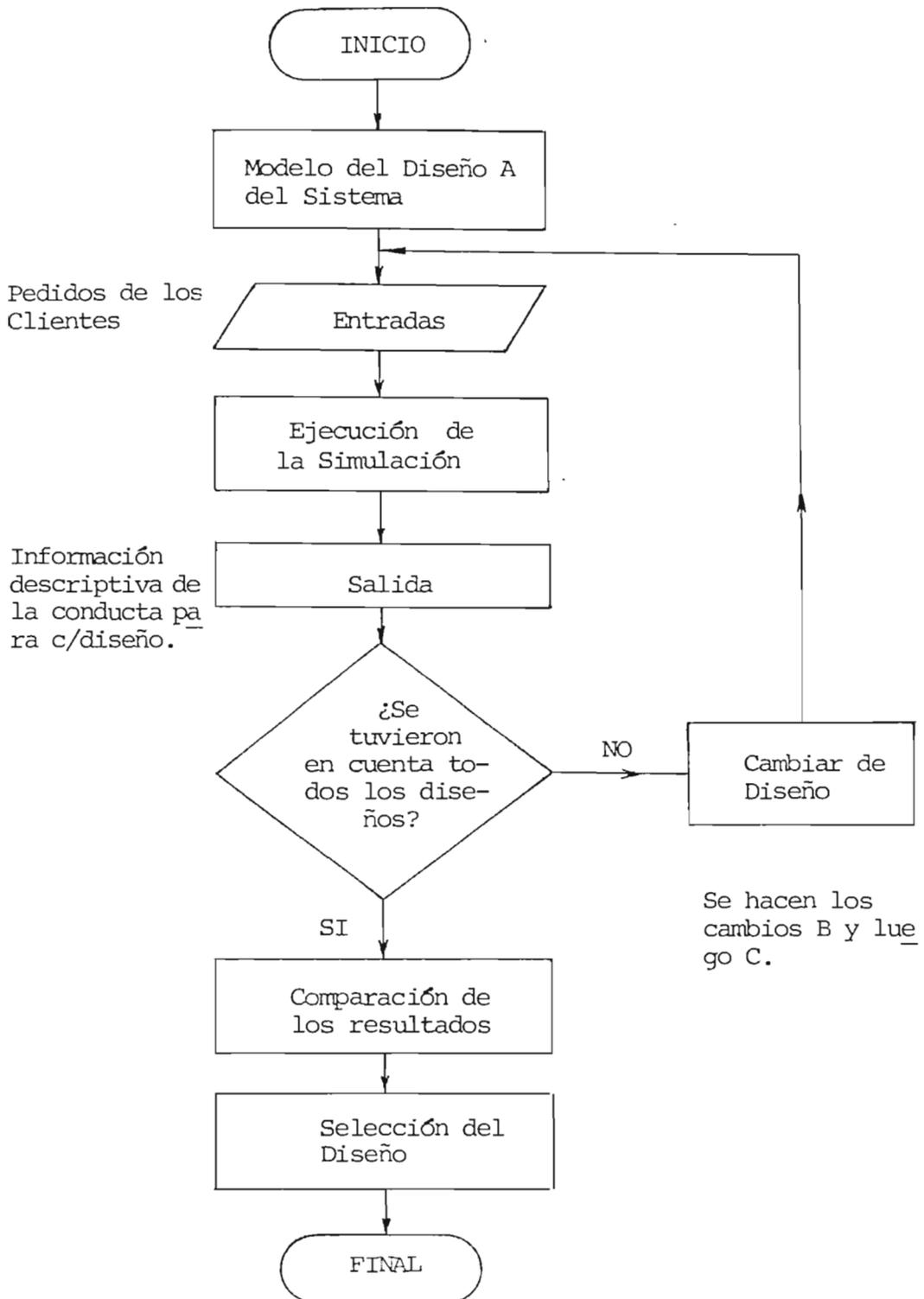


FIGURA 2.2. Simulación para el Diseño de un Sistema.

La segunda aplicación general tiene por objeto analizar el comportamiento de los sistemas. El analista observa entradas y salidas de sistemas y trata de explicar cómo se logra la transformación. Postula una configuración del sistema en términos de entidades y sus relaciones, compone un modelo de computadora de su sistema teórico, proporciona al modelo entradas como las del sistema real y trata de producir salidas del modelo que correspondan a las del mundo real.

El punto hasta el cual logra hacerlo se toma como medida de la validez del modelo, o sea, una verificación de que el analista pueda explicar lo que ocurrió en el sistema real.

Las dos aplicaciones parecen similares, pero en realidad no lo son. En el primer caso, se utiliza la simulación para obtener información sobre un sistema que ha creado el analista y sobre el cual sabe mucho. En el segundo caso, el analista emplea la simulación para comprobar hipótesis sobre un sistema que no conoce bien y cuyo comportamiento sólo puede explicarlo presuponiendo la existencia de entidades y relaciones particulares. El procedimiento para el análisis de sistemas por medio de la simulación se muestra esquemáticamente en la Figura 2.3.

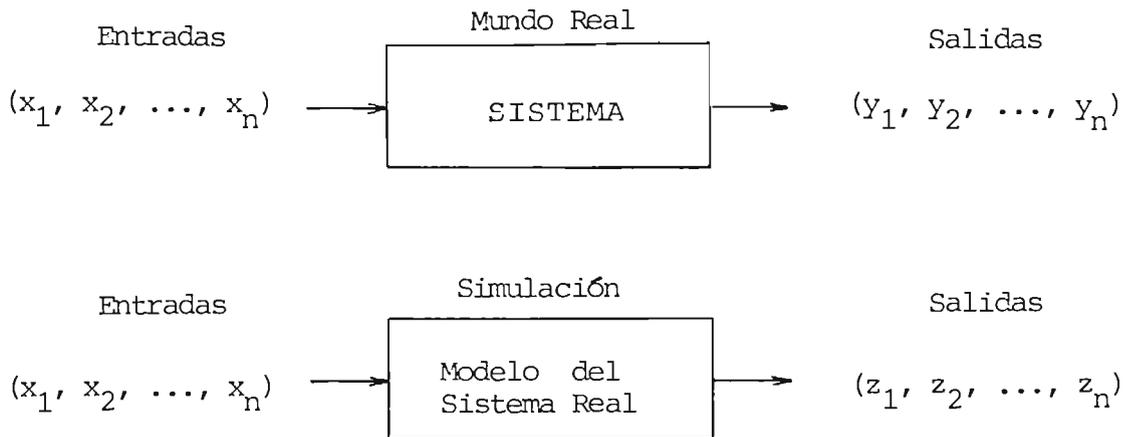


Figura 2.3 Análisis de Sistemas por medio de la Simulación.

Como ya se indicó, la teoría del comportamiento del sistema, representado por el modelo, se valida comparando diferencias entre salidas del sistema del mundo real,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  salidas del modelo del sistema,  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Se hacen modificaciones y se vuelve a poner en ejecución el modelo hasta que las salidas sean arbitrariamente similares o hasta que el analista descarte su teoría particular en favor de la otra.

#### 2.1.4 DIFERENTES TIPOS DE SIMULACION.

Existen varios tipos de simulación (o formas de simular modelos de sistemas):

- a) Simulación por identidad.

- b) Simulación por Cuasi-identidad.
  - c) Simulación de Laboratorio.
  - d) Simulación por Computadora.
- a) El espectro que comprende los modelos de la simulación de sistemas es extenso. En un extremo se encuentran los modelos que sustentan la simulación por identidad, en la cual el mismo sistema es considerado como modelo para obtener conocimiento de su comportamiento. Esta simulación por identidad pasa por alto algunas reglas fundamentales de los modelos. Por lo general es cara, rara vez es factible y, permite muy poco o ningún control sobre los fenómenos que afectan la respuesta. No es competente cuando se necesitan las respuestas en un período breve en comparación con el intervalo necesario para un estudio real - que hace uso del sistema verdadero.

Por ejemplo, si el Ministerio de Defensa quisiera probar la defensa marina de la nación. Un enfoque sería utilizar los yates guardacostas de la Marina Nacional y, supóngase que se consideran como invasores enemigos los barcos pesqueros del Golfo de Fonseca, una simulación por identidad exigiría que los guardacostas atacaran realmente a los barcos pesqueros.

- b) Un paso muy semejante a una simulación por identidad es tratar de establecer el modelo que conserve todos los aspectos posibles del sistema real pero excluya elementos cuya presencia harían imposible una simulación por identidad. Por ejemplo, en el caso anterior, lo que imposibilita una simulación por identidad es que los guardacostas ataquen verdaderamente a los barcos pesqueros, por tanto, si se sustituyen éstos por boyas colocadas en lugares estratégicos se obtendría una simulación por cuasi-identidad.
- c) La simulación de Laboratorio ofrece un método de análisis más factible y económico que las simulaciones anteriores: preservando al mismo tiempo las características esenciales del sistema en cuestión. Los componentes del laboratorio consisten en elementos tan diversos como personas, computadoras, maquinaria, procedimientos de operación, funciones matemáticas y distribuciones de probabilidad. Se mencionan dos tipos de simulación de laboratorio:
1. Los juegos operacionales.
  2. La Simulación hombre-máquina.

En los juegos operacionales, se utiliza una computadora para reunir, procesar y producir información que los jugadores humanos, usualmente adversarios, necesitan para to-

mar decisiones sobre la operación del sistema. El objetivo de cada jugador es operar lo mejor que le sea posible, dada cierta información específica. Además, las decisiones de cada jugador afectan la información que proporciona la computadora conforme avanza el juego durante el tiempo simulado. La computadora también puede desempeñar una función activa tomando medidas predeterminadas o aleatorias a las cuales responden los jugadores. Las dos formas de juegos operacionales más ampliamente usadas, son los juegos militares y los juegos de gerencia. Los primeros constituyen un instrumento para entrenar dirigentes militares, que permite probar los efectos de las estrategias alternativas bajo condiciones simuladas de guerra. Los juegos de gerencia, forman también un tipo de instrumento educativo para el entrenamiento de directores de empresas, ya sea en ejercicio presente o futuro. En la actualidad ha surgido con mucho auge un juego operacional conocido como juegos electrónicos o más comúnmente como "Las maquinitas", en el que pueden interactuar dos personas o una sola persona contra la máquina.

En la simulación hombre-máquina, además de la computadora se usan máquinas y personas que participan activamente en el juego, y es el hombre mismo el que analiza y toma las decisiones; por ejemplo, se puede hacer la simulación de

dos grandes sistemas de logística a fin de comparar su eficiencia bajo diferente administración y las políticas de aprovechamiento de recursos. Cada sistema consiste de hombres y máquinas, junto con las reglas para la política de utilización de recursos en situaciones simuladas de conflicto, como lo es la guerra. El medio ambiente simulado requiere de un número específico de aviones en estados de vuelo y alerta; la capacidad del sistema para satisfacer dichos objetivos está limitada por partes que funciona mal, retrasos en la obtención y transporte de los recursos, etc.

El componente humano representa al personal administrativo y las políticas de nivel superior para el aprovechamiento de los recursos son simuladas en computadora. El criterio final de la eficiencia de cada sistema es el número de aviones operacionalmente listos y el costo de mantener este número en vuelo, criterio que es utilizado por el analista para decidir qué sistema es el mejor.

- d) Simulación por Computadora; si se elimina al personal y al equipo en el concepto de la simulación de laboratorio y se conserva la Computadora, las reglas de trabajo, las funciones matemáticas y las distribuciones de probabilidad, se tendrán las características esenciales de una simulación total por medio de una computadora.

La segunda definición de simulación a considerar es la siguiente:

Definición 2.1.2:

La Simulación, es una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora digital, los cuales requieren ciertos tipos de modelos lógicos y matemáticos, que describen el comportamiento de un sistema (o algún componente de él) en períodos extensos de tiempo real.

En esta definición se observa la referencia a las computadoras y a los modelos matemáticos. Puesto que los modelos de sistemas se procesan en computadoras, son modelos de computadora, de acuerdo a cómo se definió este término en el capítulo anterior. La simulación de un modelo de computadora consiste en emplear una computadora para trazar numérica o gráficamente las trayectoras de tiempo de todas las variables endógenas generadas por el modelo.

La simulación por computadora ofrece muchas conveniencias, algunas de ellas son:

- a) Puede comprimir el tiempo de manera que varios años de actividad puedan simularse en minutos (y a veces en segundos).

Esta propiedad hace posible que el investigador pueda exa

minar diversas características del sistema simulado que desea estudiar, en un lapso muy pequeño del tiempo necesario para probar cada una en el sistema real.

- b) También puede expandir el tiempo, haciendo que se obtengan las estadísticas de interés en pequeños intervalos de tiempo simulado, de esta manera el investigador puede estudiar el cambio en un sistema real, aunque no se pueda observar el cambio en el tiempo real. Esta expansión figurada del tiempo es especialmente útil cuando se dispone de pocos datos sobre el cambio del sistema real.
- c) Tiene la capacidad que en ella se pueden identificar y controlar las fuentes de variación. Esta capacidad es importante cuando se lleve a cabo un análisis estadístico de la relación entre factores independientes (entradas) y dependientes (salidas) en un experimento. En una simulación por computadora, se debe explicitar las fuentes de variación y el grado de variación de cada fuente, a fin de hacer la ejecución de la simulación; lo que permite eliminar fuentes inconvenientes de variación simplemente omitiéndolas de la simulación. Sin embargo, esta capacidad también exige que el investigador dedique suficiente atención a un sistema para que comprenda debidamente cómo describir en forma cuantitativa las fuentes de variación de

la entrada que desea incluir.

- d) En este tipo de simulación no ocurren errores de medición, y los errores de redondeo debidos a la longitud finita de palabras en una computadora, se pueden hacer relativamente insignificantes si se tiene cuidado.
- e) En el curso de un experimento suele convenir "detener" el experimento y "revisar" los resultados que ya se han obtenido, lo cual significa que todos los fenómenos relativos al experimento tendrán que mantener sus estados corrientes hasta que el experimento se reanude. Por lo que la parte de "terminación del Programa" debe contener instrucciones para "registrar" todos los estados importantes y cuando el experimento continúa los estados terminales se convierten en los estados iniciales de manera que no se pierde la continuidad.

Los conceptos como: "detener", "revisar", "terminación del programa", "registrar"; son propios de la programación de Computadoras.

- f) Permite hacer réplicas de los experimentos. Las réplicas significan repetir un experimento con cambios seleccionados de los parámetros o de las condiciones operantes que hace el investigador.

Si bien la utilidad de la simulación por computadora, es considerable, el método también ofrece gran flexibilidad para estudiar diversos problemas. Según se mencionó anteriormente la simulación por computadora se convierte en un método legítimo de investigación cuando los métodos analíticos conocidos no pueden resolver un problema.

#### 2.1.5 METODOS DE MONTECARLO.

Al inicio de la década de los 40, durante la segunda guerra mundial, y específicamente en la construcción de reactores nucleares, se presentó el problema de difusión de neutrones a través de diversos materiales. Debido al carácter tan complejo del problema, no se pudo dar una respuesta directa. Por un lado, la solución experimental resultaba demasiado costosa y llevaba mucho tiempo. Por otra parte, se conocían las distancias promedio que recorre un neutrón de velocidad dada dentro de una sustancia antes de chocar con un núcleo. Se sabía la probabilidad de que el neutrón fuera rechazado por el núcleo y se conocía la energía que probablemente perdería el neutrón después del choque. Sin embargo, no fué posible unir todas estas consideraciones en una fórmula práctica para predecir el resultado de una secuencia completa de tales eventos.

Para resolver este problema, J. Von Neumann y S. Ulam, propusieron un método en el cual las probabilidades de los -

eventos separados se combinan paso a paso en un modelo total que proporciona una solución aproximada. Esta técnica recibió el nombre de "Clave de Montecarlo", y a partir de entonces, se ha hecho un amplio uso de la misma, recibiendo además los nombres de: Métodos, Análisis, Técnicas de Montecarlo.

En sí este método involucra la solución de un problema matemático no probabilístico, mediante la simulación de un proceso estocástico cuyos momentos o distribuciones de probabilidad satisfacen las relaciones matemáticas del problema no probabilístico.

Después de la segunda Guerra Mundial una de sus primeras aplicaciones se tuvo en la solución de ecuaciones integrales lineales. Otras aplicaciones se tuvieron en la resolución de ecuaciones de diferencias, asociadas con ecuaciones diferenciales parciales elípticas, así como en problemas de mecánica estadística. Con la aparición de la computadora de gran velocidad han sido posibles aplicaciones en el campo de la investigación de operaciones, en problemas tales como operación de teléfonos, control de tráfico, inventarios, etc.

Ejemplo: Aplicar el método de Montecarlo para estimar el número  $\Pi$  a través del problema de la aguja de Buffon; el problema consiste en encontrar el valor de  $\Pi$ , tomando una aguja de longi-

tud  $L$ , y lanzándola sobre una superficie plana en donde se tiene un conjunto de líneas paralelas separadas entre sí - por una distancia  $D$  (ver Figura 2.4).

El proceso se repite varias veces y se anota cada una de las ocasiones en que la aguja intersecta una de las líneas. Si  $N$  es el número de veces que se lanza la aguja y  $n$  el número de aciertos logrados al cruzar las líneas, entonces cuando  $N$  es suficientemente grande se cumple:

$$N \cong \Pi n$$

Es decir,  $\Pi$  se puede obtener en forma aproximada de la relación  $\frac{N}{n}$ .

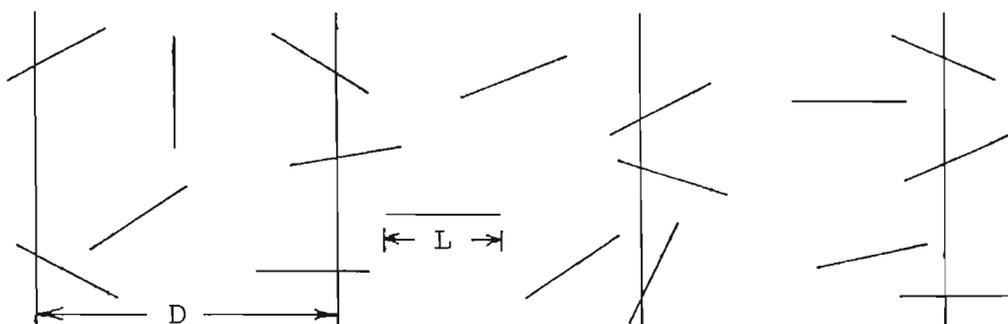


Figura 2.4 Problema de la Aguja de Buffon, para estimar el valor de  $\Pi$ .

## 2.2 METODOLOGIA.

La metodología general de la simulación por computadora

se bosqueja en la gráfica de flujo de la Figura 2.5.

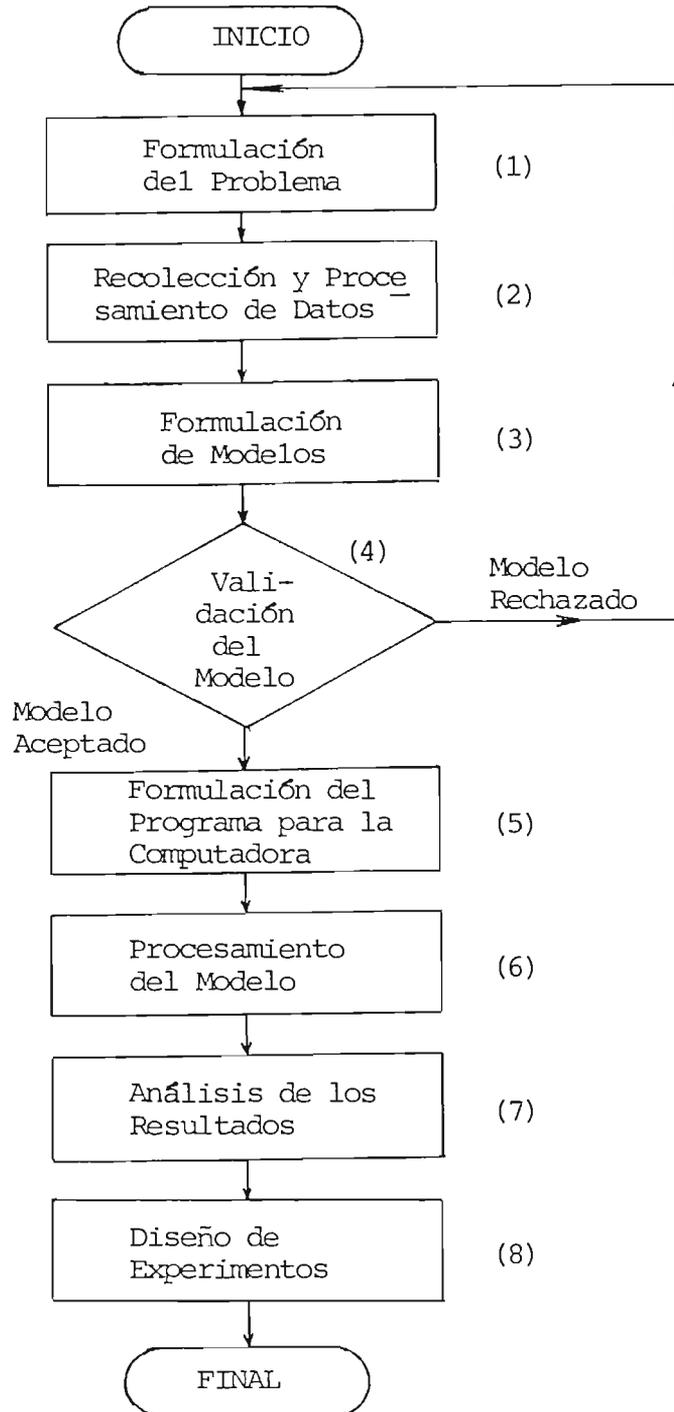


Figura 2.5 Procedimiento de la Simulación.

### 2.2.1 FORMULACION DEL PROBLEMA.

El estudio de la simulación por computadora tiene que comenzar con la formulación de un problema o con una declaración explícita de los objetivos del experimento, es decir, que es necesaria en primer lugar, la definición clara de los objetivos de la investigación antes de hacer cualquier intento encaminado a planear la realización de un experimento usando simulación. Resulta frecuente que la exposición original del problema varíe considerablemente de la versión final, ya que la formulación del problema es un proceso secuencial que generalmente requiere una reformulación continua y progresiva y un refinamiento de los objetivos del experimento durante su realización.

Por consiguiente, deben tomarse dos decisiones importantes antes de comenzar a trabajar con cualquier experimento de simulación. En primer término, hay que decidir los objetivos de la investigación, y en segundo lugar, es necesario decidir el conjunto de criterios para evaluar el grado de satisfacción al que deba sujetarse el experimento a fin de que cumpla los objetivos.

En general, los objetivos pueden ser:

- Preguntas que deben contestarse.

- Hipótesis que deben probarse.
- Efectos por estimarse.

Si el objetivo del estudio de simulación es obtener respuestas a una o más preguntas, es necesario plantear éstas desde el inicio del experimento, aún cuando sea posible refinarlas en el transcurso del mismo; estas preguntas deben redactarse en forma específica. Además, debe especificarse los criterios objetivos para evaluar las posibles respuestas a estas preguntas, es decir, debe especificarse lo que se entenderá por una respuesta adecuada a una pre - gunta. Así, por ejemplo, es necesario definir lo que se - entenderá por utilización óptima de las pistas de aterrizaje, si se desea encontrar respuesta a la pregunta:

¿Cuántas pistas se requiere en el aeropuerto internacional de Comalapa, durante los picos de servicio?

#### 2.2.2 RECOLECCION Y PROCESAMIENTO DE DATOS TOMADOS DE LA REALIDAD.

Podrá argumentarse, legítimamente, que una discusión - sobre los requisitos para procesar los datos en experimentos de simulación, tendría que preceder a la formulación del problema, por ser simplemente imposible formular un problema o

un conjunto de objetivos para un experimento, sin tener acceso adecuado a la información (cuantitativa o de otra clase) acerca del sistema que se investiga. Sin embargo, resulta irrelevante que los requerimientos para el procesamiento de datos precedan a la formulación del problema, o viceversa; si se ha de dirigir experimentos de simulación, es necesario que ambas funciones se realicen. Existen por lo menos cinco razones por las cuales es necesario disponer de un sistema eficiente para el procesamiento de datos, que permita alcanzar el éxito al realizar los experimentos de simulación:

- a) La información descriptiva y cuantitativa (datos) referente al sistema que se va a investigar.
- b) Los datos, pueden sugerir hipótesis de cierta validez, las cuales se usarán en la formulación de los modelos que describen el comportamiento del sistema.
- c) Los datos, pueden sugerir mejoras o refinamientos en los modelos que ya se tienen del sistema por simularse.
- d) Es necesario que los datos, reducidos a una forma final, se utilicen para estimar los parámetros de las características de operación relativas a las variables endógenas, exógenas y de estado del sistema.

- e) Sin los datos, sería imposible probar la validez de un modelo para la simulación.

Es posible identificar seis funciones importantes del procesamiento de datos que forman parte integral del procedimiento para implementar experimentos de simulación en computadoras:

- a) Recolección de Datos: Es el proceso de captación de los hechos disponibles, con lo cual éstos pueden ser procesados posteriormente.
- b) Almacenamiento de Datos: Esta es una consecuencia implícita del paso a), pues al ser recolectados los datos ya se implica un almacenamiento de los mismos, es decir a) y b) ocurren simultáneamente.
- c) Conversión de Datos: La utilización de la información como datos de entrada a una computadora exige que la información - sea codificada en el Lenguaje que la máquina entiende.

- d) Transmisión de los Datos: Que es el transporte (o acceso) de la información desde una localidad hasta el lugar donde será procesada.
- e) Manipulación de los Datos: Son las operaciones que se hacen con los datos como las de clasificar, cotejar (comparar), intercalar, recuperar información, etc..
- f) Salida final de los Datos: Son los resultados finales que se obtienen.

### 2.2.3 FORMULACION DE MODELOS.

Se puede resumir la formulación de modelos en tres pasos según las características de los mismos vistas en 1.2.1.

1. Especificación de los Componentes.
2. Especificación de las variables y los parámetros.
3. Especificación de las relaciones funcionales.

Se presentan a continuación algunas consideraciones que deben tomarse en cuenta en la formulación de modelos:

- a) La primera consiste en saber cuántas variables se deben incluir en el modelo. Se encuentra poca dificultad en lo referente a las variables endógenas o de salida del modelo, debido, por lo general, a que estas variables se determinan al comenzar el experimento, - cuando se formulan los objetivos. Obviamente, existe un límite superior en el número de las variables endógenas posibles, impuesto por el tamaño de la computadora.

Sin embargo, la dificultad real surge en la elección de las variables exógenas (algunas de las cuales pudieran ser aleatorias) que afectan a las variables endógenas. La existencia de muy pocas variables exógenas puede conducir a modelos inválidos, en cambio la abundancia de ellas hace imposible la simulación debido a la insuficiencia en la capacidad de memoria del computador, o bien, por complicar de modo innecesario el programa de computación.

- b) No deben construirse modelos tan complejos y que usen un tiempo irrazonable de computación. Por lo general, interesan modelos que produzcan descripciones o predicciones, razonablemente exactas, referentes al comportamiento de un sistema dado y reduzcan a la vez el -

tiempo de Computación y Programación.

#### 2.2.4 VALIDACION DEL MODELO Y DE LOS PARAMETROS ESTIMADOS.

Es necesario hacer un juicio del valor inicial de la suficiencia de nuestro modelo una vez que se ha formulado un conjunto de modelos que describen el comportamiento del sistema en estudio y se ha estimado los parámetros de sus características operacionales sobre la base de observaciones tomadas del mundo real; para lo cual debe responderse a las siguientes preguntas:

1. ¿Se ha incluido variables que no sean pertinentes, en el sentido de que contribuyen muy poco a nuestra capacidad de predecir el comportamiento de las variables endógenas del sistema?
2. ¿Se ha omitido la inclusión de una o más variables exógenas que pudieran afectar el comportamiento de las variables endógenas del sistema?
3. ¿Se ha formulado incorrectamente una o más relaciones funcionales entre las variables exógenas y endógenas del sistema?

4. ¿Se ha apreciado debidamente las estimaciones de los parámetros de las características operacionales del sistema?
5. ¿Son estadísticamente significativas las estimaciones de los parámetros en el modelo?
6. ¿Cómo se comparan los valores teóricos de las variables endógenas del sistema con los valores históricos o reales basados en cálculos manuales? (Ya que aún no se formula un programa de Computadora).

Sólo si se responde satisfactoriamente a las 6 preguntas se procede al paso (5): La formulación de un programa para la Computadora. De otro modo, se repiten los pasos del (1) al (4) (ver Figura 2.5), hasta que sea posible responder satisfactoriamente a las preguntas ya mencionadas.

En el caso en que las características operacionales tomen la forma de distribuciones de probabilidad, será necesario aplicar pruebas de bondad de ajuste que determinen qué tan bien se ajusta una distribución hipotética de probabilidad a los datos del mundo real, de los cuales se ha derivado. - Se deseará también probar la importancia estadística de las estimaciones de los valores esperados, varianzas y otros pa-

rámetros de estas distribuciones de probabilidad; los cuales se estudiarán en el Capítulo III.

#### 2.2.5 FORMULACION DE UN PROGRAMA PARA LA COMPUTADORA.

La formulación de un programa para computadora, cuyo propósito sea dirigir los experimentos de simulación con los modelos del sistema bajo estudio, requiere lo siguiente:

1. Diagrama de Flujo.
2. Lenguaje de la Computadora.

1. Al escribir un programa de simulación para computadora, la primera etapa requiere la formulación de un diagrama de flujo que bosqueje la secuencia lógica de los pasos que realizará la computadora, al generar los tiempos planificados para las variables endógenas del modelo. En el Capítulo III, se formularán suficientes diagramas de flujo.
2. En cuanto se termine el diagrama de flujo con la lógica del experimento, debe considerarse el problema de escribir el código para la computadora, que se utilizará en las ejecuciones de los experimentos, para lo cual se dispone generalmente de dos alternativas:

- a) Escribir el programa en un lenguaje de Propósitos generales como el FORTRAN, BASIC, ALGOL, PASCAL o PL/I.
- b) Emplear uno de los nuevos lenguajes de simulación de propósitos especiales como el GPSS, SIMSCRIPT, GASP, SIMPAC, SIMULA, DYNAMO o PROGRAM SIMULATE.

El ahorro en tiempo de programación constituye la principal ventaja de estos lenguajes ya que han sido creados para facilitar la programación de ciertos tipos de sistemas. Por ejemplo, PROGRAM SIMULATE, se diseñó teniendo en mente la simulación de sistemas económicos de gran escala. Por otro lado GPSS, SIMSCRIPT y GASP son particularmente útiles para los problemas de planeación y fenómenos de espera, que se verán en el Capítulo IV. Otra ventaja importante de los lenguajes de simulación de propósitos especiales consiste en que proporcionan técnicas para la búsqueda de errores, muy superiores a las provistas por el FORTRAN, ALGOL, etc. El usar lenguajes de propósitos especiales tiene la desventaja que reduce la flexibilidad en los modelos e incrementa los tiempos de cómputo.

#### 2.2.6 PROCESAMIENTO DEL MODELO.

Este aspecto involucra la ejecución del programa por la computadora, desde la introducción de los datos hasta la obtención de las salidas o reportes de salida.

Los datos y los parámetros del modelo se introducen en el momento que se comienza a simular, pero también pueden ser generados internamente en el computador usando las técnicas numéricas para la generación de datos que se estudiarán en el Capítulo III. La clase de reportes de salida, necesarios para dar la información relativa al comportamiento del sistema bajo simulación, constituye una consideración final en el desarrollo de un programa de computadora y si se decide usar un lenguaje de propósitos generales como el FORTRAN entonces existirá un mínimo de restricciones impuestas sobre el formato de los reportes de salida. Sin embargo, si se utiliza un lenguaje como el SIMSCRIPT, se deberá ajustar a los requisitos en el formato de salida, impuestos por este lenguaje.

#### 2.2.7 ANALISIS DE LOS RESULTADOS.

Esta etapa comprende el análisis de los datos generados por la computadora, a partir del modelo que se simula. Tal análisis consiste de tres pasos:

- a) Recolección y procesamiento de los datos simulados.
- b) Cálculo de la estadística de las pruebas.
- c) Interpretación de los resultados.

El paso (a) es similar a la recolección y procesamiento de datos tomados de la realidad, salvo que ahora estos datos se obtienen de los resultados provistos por la computadora. Sin embargo, los pasos (b) y (c) difieren un poco del análisis de los datos del mundo real, pues en éste, la forma en la cual la aleatoriedad se toma en cuenta en el muestreo de las distribuciones está bien entendida y existe la posibilidad de enunciarla explícitamente; en cambio, en los experimentos de simulación la aleatoriedad se considera en una forma más complicada y por lo general, sus relaciones no son enunciables explícitamente excepto en el algoritmo para calcular los valores numéricos.

Otra diferencia que dificulta el análisis de los datos simulados se debe a que la salida es un conjunto de series relacionadas de tiempo, cuyo análisis es más difícil que el de un conjunto de números que representan la muestra de una distribución dada en la realidad.

### 2.2.8 DISEÑO DE EXPERIMENTOS.

Esta es la etapa final del proceso de simulación, y consiste en construir o hacer nuevos experimentos de simulación, en base al que ya se ha hecho, únicamente haciendo los cambios pertinentes en el modelo utilizado.

### 2.3 EJEMPLO ILUSTRATIVO.

Para mostrar los conceptos y la metodología de la simulación, considérese el siguiente ejemplo que tiene como finalidad mostrar algunas características del procedimiento, sin mucho rigor.

#### FORMULACION DEL PROBLEMA:

Suponga que un repartidor de periódicos intenta establecer una regla de pedido de periódicos (pedido de inventario) que haga aumentar al máximo sus beneficios.

#### OBJETIVO:

Establecer una regla de pedido de inventario para maximizar las ganancias del repartidor de periódicos.

Se entiende por ganancia máxima, el mayor ingreso que le es posible obtener al repartidor por la venta de periódicos.

En esta situación existe incertidumbre, porque no es posible predecir el número de periódicos que adquirirán diariamente sus clientes.

RECOLECCION DE DATOS TOMADOS DE LA REALIDAD:

Supóngase que el vendedor sabe, por experiencia propia, que la demanda diaria de los clientes puede ser de 15, 16, 17, 18, 19 ó 20 periódicos. También conoce la frecuencia relativa con que ocurrió cada valor y, por lo tanto, - puede construir la siguiente tabla:

Demanda	Frecuencia Relativa
15	1/12
16	2/12
17	4/12
18	3/12
19	1/12
20	1/12
Total	12/12

Considera que el valor de la Demanda,  $D$ , se determina en forma aleatoria, pero que a la larga, los valores se presentan con la frecuencia indicada.

## FORMULACION DEL MODELO:

En el sistema de inventario presentado, se tienen las entidades:

a) Periódicos , b) Clientes , c) Vendedor , d) Beneficios

La entidad periódicos, tiene las variables:

$Q_n$ : Cantidad pedida cada día (Pedidos a la fábrica).

$V_n$ : Cantidad vendida cada día.

$D_n$ : Cantidad demandada cada día (demanda diaria).

el subíndice  $n$  sirve como calendario y cada día asume el valor siguiente del conjunto de enteros.

Estas variables se registran en unidades del artículo de inventario, el cual tiene los parámetros: Costos (C) y Precio (P).

Con valores unitarios de 5 y 15 centavos respectivamente, es decir,  $C = \text{¢ } 0.05$  y  $P = \text{¢ } 0.15$ .

Los beneficios tienen una variable interesante, su magnitud diaria, la cual se denota por  $G_n$ , y se calcula a través de:

$$G_n = (V_n \cdot P) - (Q_n \cdot C)$$

Se deben generar las variables de estado  $Q$  y  $V$ .  $Q$  asume diariamente valores producidos utilizando una regla arbitraria de decisión establecida por el vendedor de periódicos; esta regla constituye el MODELO y, consiste en: "Pedir cada día una cantidad de periódicos igual a la cantidad de la demanda del día anterior", así:  $Q_n = D_{n-1}$  recordando que  $n$  es la fecha del día de hoy.

$V$  se determina en parte por el evento exógeno  $D$  y es también función de  $Q$ . Se evalúan dos relaciones condicionales, una de las cuales produce a  $V$ :

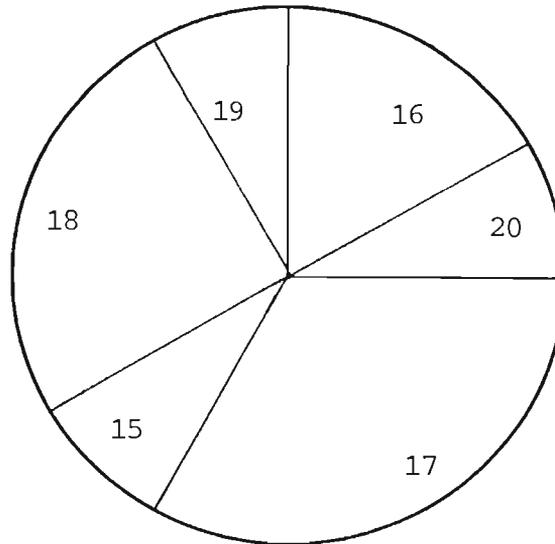
1. Si  $D_n \leq Q_n$ , entonces  $V_n = D_n$ .
2. Si  $D_n > Q_n$ , entonces  $V_n = Q_n$ .

Los valores de  $V$  son condicionales, y el criterio anterior se aplica simplemente para asegurar que  $V \leq Q$  (Para simplificar la ilustración, se pasa por alto la pérdida de oportunidad, cuando  $D > Q$ ).

#### SIMULACION DEL MODELO:

Con la tabla proporcionada por la experiencia del vendedor, se construye un tipo de rueda de ruleta en la que el área total se divide en seis segmentos, cada uno marcado con un valor de la variable y con cada segmento proporcio-

nal, en tamaño, a su frecuencia relativa.



Cada día se hace girar la rueda y se considera que el número del segmento es el valor de la variable  $D$ . El vendedor está listo para simular el sistema y comprobar su regla de pedido. La tabla siguiente muestra una ganancia diaria promedio de  $\phi$  1.62, y resume la actividad de 10 días.

#### SIMULACION DEL VENDEDOR DE PERIODICOS.

$n$	$D_n$	$Q_n$	$D_n < Q_n$	$D_n > Q_n$	$V_n$	$G_n$	$G_n$ Acumulativa
0	18	-	-	-	-	-	-
1	17	18	si	-	17	1.65	1.65
2	17	17	si	-	17	1.70	3.35
3	16	17	si	-	16	1.55	4.90
4	17	16	-	si	16	1.60	6.50
5	15	17	si	-	15	1.40	7.90
6	17	15	-	si	15	1.50	9.40
7	18	17	-	si	17	1.70	11.10
8	20	18	-	si	18	1.80	12.90
9	17	20	si	-	17	1.55	14.45
10	18	17	-	si	17	1.70	16.15

Para iniciar la simulación, el vendedor hace girar la rueda generadora de la demanda y hace que el primer valor represente a  $D_{n-1}(D_0)$ . Esto es necesario, puesto que su modelo requiere de un valor anterior (en su intento ese valor fué  $D_0 = 18$ ); por tanto,  $Q_1 = 18$  periódicos.

A continuación, se usa la rueda para generar  $D_1$ , es decir, la demanda para el primer día. Al realizar la simulación, ese valor resultó 17.

Al comparar la demanda y la cantidad pedida para el día 1, la demanda de los clientes fué inferior a la cantidad pedida. Mediante esta regla el vendedor determina que  $V_1 = 17$  y

$$G_1 = (17) (0.15) - (18) (0.05) = \text{¢ } 1.65.$$

En seguida, la variable  $n$  toma el valor  $n + 1 = 2$ , lo que conduce al segundo día simulado. Se repite la actividad durante 10 días.

#### DISEÑO DE EXPERIMENTOS.

El vendedor puede ahora proponer cambios en el sistema, sobre todo en la regla de pedidos. Puede desear probar una regla en la que, por ejemplo, pida una cantidad -

igual a las ventas promedios de los tres o los cinco últimos días. Puede proponer también otros cambios. No se sugiere que una simulación de 10 días produzca información fidedigna, ni que se hayan considerado todas las propiedades del sistema; pero la ilustración sirve para señalar el modo en que se aplica la metodología. Si se ampliara el modelo y se propusiera una simulación de varios cientos o miles de días para cada uno de una serie de diseños del sistema, se pone en evidencia la cantidad de esfuerzo necesario, es por esto que se recurre a las computadoras.

## CAPITULO III

### CONCEPTOS DE TEORIA DE LA PROBABILIDAD

Lo que se presenta a continuación no es un desarrollo formal de la teoría de la probabilidad, sino un estudio elemental en el que se mencionan los conceptos que se necesitarán en éste y en los siguientes capítulos. Se sugiere para un estudio formal, revisar la bibliografía que se menciona al final.

#### 3.1 CONCEPTOS.

##### 3.1.1 ESPACIO MUESTRAL.

###### Definición 3.1.1

Se llama "experimento" o "experiencia aleatoria", a cualquier experimento real o hipotético que pueda dar lugar a varios resultados sin que sea posible anunciar con certeza cuál de estos resultados va a ser observado.

###### Definición 3.1.2

Se llama "espacio muestral" de una experiencia aleatoria, al conjunto cuyos elementos son, los posibles resultados diferentes a que puede dar lugar la experiencia en cuestión. A los elementos del espacio muestral se les acos

tumbra llamar "puntos muestrales" o, simplemente "puntos". Si el conjunto de puntos es finito o infinito numerable, el espacio muestral es "discreto"; y, si el conjunto de puntos es no numerable el espacio muestral es continuo.

Usualmente se denota por  $\epsilon$  a una experiencia aleatoria, y por  $S$  al espacio muestral asociado a ella. Así, si el experimento,  $\epsilon$ , se refiere al tiempo hasta que el primer cliente llega a una tienda, como éste puede llegar en cualquier instante hasta que la tienda cierre (suponiendo un día de 8 horas), para los fines de este experimento se puede considerar el espacio muestral como todos los puntos de la recta real entre cero y 8 horas. Por tanto,  $S$  consta de todos los puntos  $s$  tales que  $0 \leq s \leq 8$ . Bajo el supuesto que al menos llega un cliente al día.

Un evento o suceso se define como un conjunto de resultados del experimento (o dicho de otra manera, como cualquier subconjunto del espacio muestral).

Se dice que un suceso  $A$  ocurre, si y sólo si, al realizar  $\epsilon$  el resultado es un punto de  $A$ .

Los sucesos pueden combinarse, conduciendo en consecuencia a la formación de nuevos sucesos:

1. Si  $A$  y  $B$  son sucesos, entonces  $A \cup B$  es el su-

ceso que ocurre ssi A o B o ambos ocurren.

2.  $A \cap B$  es el suceso que ocurre ssi A y B ocurren.
3. El suceso complementario de A, denotado por  $A'$ , - es el suceso que ocurre ssi A no ocurre.
4. Sea  $\epsilon$  un experimento y S su espacio muestral. Si  $\epsilon$  se realiza dos veces, entonces  $S \times S$  se puede utilizar para representar todos los resultados de esas dos repeticiones, es decir,  $(s_1, s_2) \in S \times S$  significa que  $s_1$  resultó cuando se realizó  $\epsilon$  la primera vez y  $s_2$  cuando  $\epsilon$  se realizó la segunda vez.

Por supuesto, se pueden extender todos estos conceptos para un número finito de eventos y realizaciones, según sea el caso.

### Definición 3.1.3

Se dice que dos sucesos A y B son mutuamente excluyentes, si no pueden ocurrir simultáneamente, esto se expresa escribiendo  $A \cap B = \phi$ .

### 3.1.2 PROBABILIDAD.

Definir el concepto de probabilidad con todo rigor es

tá más allá del propósito de este texto. No obstante, para la mayor parte de los fines basta con postular la existencia de valores numéricos  $P\{E\}$  asociados con los sucesos  $E$  del espacio muestral. El valor  $P\{E\}$  se conoce como "probabilidad de ocurrencia del suceso  $E$ ". Además, se supondrá que  $P\{E\}$  -satisface las siguientes propiedades razonables:

1.  $0 \leq P\{E\} \leq 1$ . Esto implica que la probabilidad de un suceso siempre es no negativa y nunca puede ser mayor que 1.
2. Si  $E_0 = \phi$ , significa que  $E_0$  es un suceso que no puede ocurrir (un suceso nulo) en el espacio muestral, entonces  $P\{E_0\} = 0$ .
3. Si  $E = S$ , es decir si el suceso consiste en el espacio muestral completo, entonces  $P\{S\} = 1$ .
4. Si  $E_1$  y  $E_2$  son sucesos excluyentes en  $S$ , entonces:

$$P\{E_1 \cup E_2\} = P\{E_1\} + P\{E_2\}.$$

Aún cuando estas propiedades son un tanto formales, -conforman la noción intuitiva de la probabilidad. Sin embargo, no pueden utilizarse estas propiedades con el fin de obtener valores para  $P\{E\}$ . En ocasiones, resulta conveniente la determinación de valores exactos, o al menos valores apro

ximados. Pueden obtenerse valores aproximados, junto con una interpretación de la probabilidad, a través de una interpretación de frecuencia de tal probabilidad. Puede enunciarse esto de manera precisa como sigue:

Sean  $\epsilon$  un experimento,  $E$  un suceso,  $n$  el número de veces que se realiza  $\epsilon$  y  $m$  el número de ocurrencias con éxito del suceso  $E$ . Entonces, para tal fenómeno,  $P\{E\}$  puede aproximarse a  $\frac{m}{n}$  cuando  $n$  toma valores suficientemente grandes.

Puede utilizarse la razón  $\frac{m}{n}$  para obtener una aproximación de  $P\{E\}$ . Además,  $\frac{m}{n}$  satisface las propiedades requeridas de las probabilidades; es decir,

1.  $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$
2.  $\frac{0}{n} = 0$ . (Si el suceso  $E$  no puede ocurrir, entonces  $m = 0$ ).
3.  $\frac{n}{n} = 1$ . (Si el suceso  $E$  ocurre cada vez que se realiza el experimento, entonces  $m = n$ ).
4.  $\frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}$ , si  $E_1$  y  $E_2$  son excluyentes.

(Si el suceso  $E_1$  ocurre  $m_1$  veces en las  $n$  tentativas y el suceso  $E_2$  ocurre  $m_2$  veces en las  $n$  tenta

tivas, y  $E_1$  y  $E_2$  son excluyentes, entonces el número total de ocurrencias con éxito del suceso  $E_1 \cup E_2$  es simplemente  $m_1 + m_2$ ).

Como estas propiedades son verdaderas para un  $n$  finito, resulta razonable esperar que sean verdaderas para  $P\{E\}$ .

### 3.1.3 VARIABLES ALEATORIAS.

En muchas situaciones experimentales, se desea asignar un número real  $x$ , a cada uno de los elementos  $s$  del espacio muestral  $S$ . Es decir,  $x = X(s)$  es el valor de una función  $X$  que va del espacio muestral  $S$  a los números reales,

$$X : S \longrightarrow \mathbb{R}.$$

#### Definición 3.1.4

Se llama variable aleatoria unidimensional o simplemente variable aleatoria, a toda función  $X$  que asigna a cada uno de los elementos  $s$  de  $S$ , un número real  $X(s)$ .

Se puede hablar de variables aleatorias  $n$ -dimensionales, pero para los propósitos del presente texto, bastará con la definición dada. Si se desea ampliar estos concep-

tos, sírvase revisar la bibliografía indicada al final del texto.

En general,  $R$  no es el rango de la variable aleatoria  $X$ . Se llama "recorrido de  $X$ ", al conjunto de todos los valores posibles de  $X$ , y se denota por  $R_x$ . Así,  $X:S \rightarrow R_x$ .

### Definición 3.1.5

Una variable aleatoria  $X$  es discreta si, y sólo si, su recorrido es finito o infinito numerable. Y en caso contrario, se dice que la variable aleatoria  $X$  es continua.

Para ejemplarizar el concepto de variable aleatoria, suponga que se ha concluido el experimento de medir los tiempos de primera llegada (de un cliente) en dos días, con el fin de determinar a qué hora se debe abrir la tienda. Antes del experimento la tienda se abría a las 9 A.M., y el dueño de la tienda decide que si el promedio de los tiempos de llegada es mayor que una hora, de allí en adelante abrirá a las 10 A.M.

Obsérvese que este es un caso en el que el experimento de observar la primera llegada a la tienda en un día se realiza dos veces, luego el espacio muestral para el experimento de los dos días tendrá la forma  $S \times S$  y sus puntos  $(s_1, s_2)$ . Además, el promedio de los dos tiempos de llegada

$s_1$  y  $s_2$ , no es un punto del espacio muestral y, por tanto, el dueño no puede tomar su decisión observando directamente el resultado del experimento. Por el contrario, toma su decisión de acuerdo con los resultados de una regla que asigna el promedio de  $s_1$  y  $s_2$  a cada punto  $(s_1, s_2)$  en  $S^2$ .

Así;  $X : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(s_1, s_2) \longrightarrow X(s_1, s_2) = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

es la variable aleatoria que representa a la regla usada por el dueño.

#### Definición 3.1.6

Sea  $\epsilon$  un experimento,  $S$  su espacio muestral,  $X$  una variable aleatoria definida en  $S$  y  $R_X$  su recorrido. Sea  $B$  un suceso respecto a  $R_X$ , es decir,  $B \subset R_X$ . Supóngase que  $A$  se define como:  $A = \{s \in S / X(s) \in B\}$ . En este caso, se dice que  $A$  y  $B$  son sucesos equivalentes.

#### Definición 3.1.7

Sea  $B$  un suceso en el recorrido  $R_X$ , se define a  $P(B)$  como:  $P(B) = P(A)$  donde  $A = \{s \in S / X(s) \in B\}$ .

Nótese que  $P(B)$  es una probabilidad diferente a  $P(A)$ , puesto que no están definidas sobre el mismo espacio muestral, aunque usualmente no se hace distinción entre ambas.

### 3.1.4 FUNCION DE: PROBABILIDAD, DENSIDAD DE PROBABILIDAD, Y DISTRIBUCION ACUMULATIVA.

#### Definición 3.1.8

Sea  $X$  una variable aleatoria discreta. Entonces,  $R_X$  puede asumir a lo sumo, un número infinito numerable de valores  $x_1, x_2, \dots$ . Con cada resultado posible  $x_i$ , se asocia un número  $P(x_i)$  para  $i = 1, 2, \dots$ ; los cuales deben cumplir las condiciones:

$$a) \quad P(x_i) \geq 0, \text{ para todo } i.$$

$$b) \quad \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1.$$

La función  $P$  definida de esta manera recibe el nombre de "función de probabilidad" (o función de probabilidad puntual) de la variable aleatoria  $X$ . Y al conjunto de pares  $(x_i, P(x_i))$ ,  $i = 1, 2, \dots$  se le llama "Distribución de probabilidad de  $X$ ".

#### Definición 3.1.9

Sea  $X$  una variable aleatoria continua. La función  $f$  se llama "función de densidad de probabilidad de  $X$ " denotada por fdp de  $X$ , si satisface:

$$a) \quad f(x) \geq 0, \text{ para todo } x.$$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Observaciones:

1. Se suele definir una variable aleatoria continua  $X$  como sigue:

$X$  es una variable aleatoria continua, si y sólo si, existe una función de densidad de probabilidad de  $X$ , tal que, para cualquier  $a, b$  con  $-\infty < a < b < \infty$  se tiene:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

2. Fundamentalmente, se quiere decir que  $X$  es una variable aleatoria continua, si  $X$  puede tomar todos los valores en algún intervalo  $(c, d)$  donde  $c$  y  $d$  pueden ser  $-\infty$  y  $\infty$  respectivamente. Además, si  $X$  sólo toma valores en un intervalo  $[a, b]$ , se establece  $f(x) = 0$  para todo  $x \notin [a, b]$  y así, la fdp de  $X$ , está definida para todos los valores reales de  $x$ .
3.  $f(x)$  no representa la probabilidad de nada, solamente cuando la función se integra entre dos límites se produce una probabilidad.

De acuerdo con las definiciones 3.1.6 y 3.1.7, se de

fine lo siguiente.

Definición 3.1.10

Sea  $X$  una variable aleatoria, entonces  $P\{X \leq b\}$  lo cual se denota por  $F_X(b)$ , recibe el nombre de "función de distribución acumulativa de  $X$ " (fda de  $X$ ) y está definida para todos los valores reales de  $b$ . Y cuando no existan posibilidades de confusión, la fda de  $X$  se denotará por  $F(b)$ ; es decir,

$$F(b) = F_X(b) = P\{s/X(s) \leq b\} = P\{X \leq b\}$$

Si  $X$  es una variable aleatoria discreta,  $F(b) = \sum_j P(x_j)$ . En donde la suma se toma sobre los índices  $j$  tales que:  $x_j \leq b$ .

Si  $X$  es una variable aleatoria continua, con fdp de  $X = f$ , entonces

$$F(b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx.$$

La fda de una variable aleatoria  $X$ , es una función de valor numérico definida para todo  $b$ ,  $-\infty \leq b \leq \infty$ , y cumple las propiedades:

1.  $F_X(b)$  es una función no decreciente de  $b$ .
2.  $\lim_{b \rightarrow -\infty} F_X(b) = F_X(-\infty) = 0$ .
3.  $\lim_{b \rightarrow \infty} F_X(b) = F_X(\infty) = 1$ .

Sucesos de la forma  $\{s/a < X(s) \leq b\}$ , es decir, el conjunto de resultados  $s$  en el espacio muestral, tales que la variable aleatoria  $X$  toma valores mayores que  $a$  pero que no sean mayores que  $b$ , pueden expresarse en términos de sucesos de la forma  $B = \{s/X(s) \leq b\}$ . En particular,  $B$  puede expresarse como la unión de dos sucesos excluyentes, como sigue:

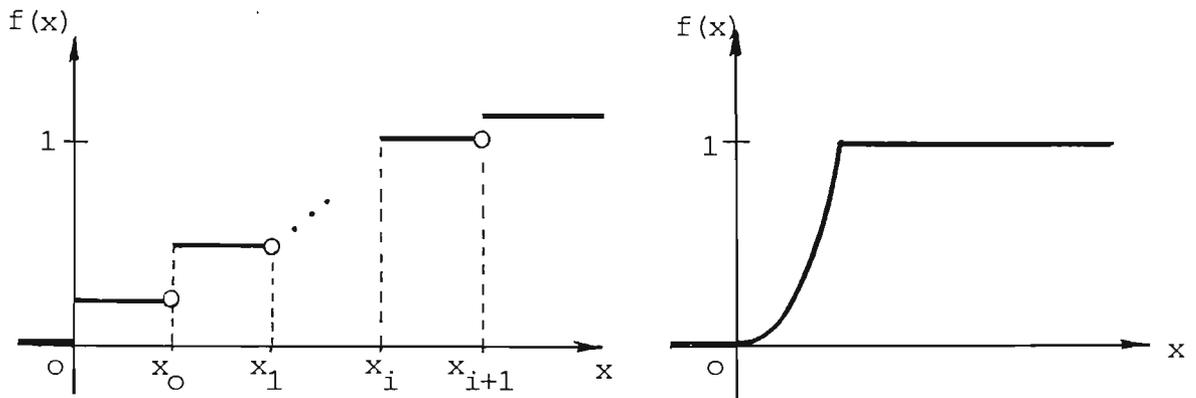
$$B = \{s/X(s) \leq b\} = \{s/X(s) \leq a\} \cup \{s/a < X(s) \leq b\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Es una conclusión inmediata que, } P\{s/a < X(s) \leq b\} \\ &= P\{a < X \leq b\} \\ &= F_X(b) - F_X(a). \end{aligned}$$

Un teorema que es de mucha utilidad y que se presenta sin demostrar es el siguiente: Sea  $F$  la fda de una variable aleatoria continua con fdp  $f$ , entonces:  $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$ .

Los gráficos para la fda son típicos en el siguiente sentido:

- a) Si  $X$  es una variable aleatoria discreta con recorrido finito, entonces el gráfico de  $F$  se formará de trazos horizontales (función escalonada) y será continua por tramos.
- b) Si  $X$  es una variable aleatoria continua,  $F$  será una función continua para todo  $x$ .



### 3.1.5 ESPERANZA Y VARIANZA.

#### Definición 3.1.11

a) Sea  $X$  una variable aleatoria discreta, con valores posibles  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Sea  $P(x_i) = P(X=x_i)$  con  $i=1,2,\dots$

El valor esperado de  $X$  (o esperanza matemática de  $X$ ), denotada por  $E(X)$ , se define por:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x_i)$$

si la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x_i)$  converge absolutamente, es decir

circ  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(x_i) < \infty$ . [El número resultante, también se llama valor promedio de  $X$ ].

b) Sea  $X$  una variable aleatoria continua con fdp  $f$ . El valor esperado de  $X$  se define por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Como es posible que la integral impropia no converja, se dice que  $E(X)$  existe, si y sólo si,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx \text{ es finita.}$$

Definición 3.1.12 (Esperanza de una función de una variable aleatoria).

Sea  $X$  una variable aleatoria y sea  $Y = H(X)$ .

a) Si  $Y$  es una variable aleatoria discreta, con valores posibles  $y_1, y_2, \dots$  y si  $q(y_i) = P(Y = y_i)$ , entonces

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i q(y_i).$$

b) Si  $Y$  es una variable aleatoria continua con fdp  $g$ , se define

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y g(y) dy$$

Obsérvese que para encontrar  $E(Y)$ , es necesario conocer la distribución de probabilidad de  $Y$ . Ante esta situación existe la siguiente alternativa.

Teorema:

Sea  $X$  una variable aleatoria y sea  $Y = H(X)$ .

- a) Si  $X$  es una variable aleatoria discreta y  $P(x_i) = P(X=x_i)$ , entonces

$$E(Y) = E(H(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} H(x_j) P(x_j)$$

- b) Si  $X$  es continua con fdp  $f$ , entonces

$$E(Y) = E(H(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) f(x) dx$$

Este teorema hace mucho más fácil la evaluación de  $E(Y)$ , puesto que no se necesita conocer la distribución de probabilidad de  $Y$ , basta con conocer la distribución de probabilidad de  $X$ .

Propiedades del Valor Esperado.

1. Si  $X = C$ , donde  $C = \text{constante}$ , entonces  $E(X) = C$ .
2. Si  $C$  es constante y  $X$  es una variable aleatoria  
 $E(CX) = CE(X)$ .
3. Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias,  
 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .

### Definición 3.1.13 (VARIANZA)

Sea  $X$  una variable aleatoria, se define la varianza de  $X$ , denotada por  $V(X)$ , como sigue:

$$V(X) = E(X - E(X))^2.$$

La raíz cuadrada positiva de  $V(X)$  se llama desviación estándar de  $X$  y se denota por  $\sigma_X$ .

El cálculo de  $V(X)$  se simplifica usando

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Propiedades de la Varianza.

1. Si  $C$  es una constante, entonces  $V(X + C) = V(X)$ .
2. Si  $C$  es una constante,  $V(CX) = C^2 V(X)$ .
3. Si  $X, Y$  son variables aleatorias independientes  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .
4. Sea  $X$  una variable aleatoria con varianza finita, entonces para cualquier valor real  $\alpha$ ,

$$V(X) = E [(X - \alpha)^2] - [E(X) - \alpha]^2.$$

### 3.1.6 DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE PROBABILIDAD.

#### DISTRIBUCION BINARIA O DE BERNOULLI.

Considérese una experiencia aleatoria en la cual sólo hay dos resultados posibles, que se pueden llamar en general, "éxito" y "fracaso" asociados con la aparición o no

del suceso en el cual se tenga interés. Una experiencia de esta naturaleza se llama "ensayo de Bernoulli", su espacio muestral consta únicamente de dos puntos y es muy frecuente definir en él una variable aleatoria  $X$ , que toma el valor 1 si el resultado es un éxito y el valor 0 si el resultado es un fracaso. Si la probabilidad asignada a un éxito es " $p$ ", entonces la función de probabilidad de la variable aleatoria  $X$ , será:

$$P(X = 1) = p \quad \text{y} \quad P(X = 0) = 1 - p$$

Y se dice que  $X$  tiene una distribución binaria o de Bernoulli con parámetro  $p$ . Se acostumbra hacer la sustitución  $1-p = q$ .

La esperanza y la varianza de la distribución de Bernoulli están dadas por:  $E(X) = p$  y  $V(X) = pq$ .

#### DISTRIBUCION BINOMIAL.

Considérese la experiencia aleatoria consistente en llevar a cabo  $N$  ensayos independientes de Bernoulli, es decir, que la realización de un ensayo, no afecta en nada a la realización (ni a los resultados) de los otros ensayos. Considere la variable aleatoria

$X =$  número total de éxitos en los  $N$  ensayos. Es claro que  $X$  puede tomar los valores:  $0, 1, 2, \dots, N$ .

La función de probabilidad de  $X$  está dada por:

$$P(X = K) = \binom{N}{K} p^k q^{N-k} \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, N \text{ y } q = 1-p$$

Y se dice que  $X$  tiene una distribución binomial con parámetros  $N$  y  $p$ .

La esperanza y la varianza de  $X$  están dadas por:

$$E(X) = Np \quad \text{y} \quad V(X) = Npq.$$

#### DISTRIBUCION GEOMETRICA.

Considérese la experiencia aleatoria en llevar a cabo una serie de ensayos independientes de Bernoulli. Interesa en este caso conocer cuál es la distribución del número de ensayos efectuados "hasta obtener el primer éxito" (es decir, el número de fracasos consecutivos hasta obtener el primer éxito). Sea  $X$  = número de repeticiones necesarias hasta obtener el primer éxito.

La función de probabilidad de la variable aleatoria  $X$  será:

$$P(X = K) = q^k p \quad \text{con } K = 0, 1, 2, \dots \text{ y } q = 1-p.$$

Y se dice que la variable  $X$  tiene una distribución geométrica con parámetro  $p$ . La esperanza y la varianza de

X están dadas por:

$$E(X) = \frac{q}{p} \quad \text{y} \quad V(X) = \frac{q}{p^2} .$$

DISTRIBUCION DE POISSON.

Sea X una variable aleatoria que toma los valores posibles  $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ . Si X tiene la siguiente función de probabilidad:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!} \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, n, \dots ; \lambda > 0$$

entonces se dice que X tiene una distribución de Poisson con parámetro  $\lambda$ . Obsérvese que en la definición de P, se ha utilizado  $\exp(-\lambda)$  para indicar  $e^{-\lambda}$  y, en lo sucesivo, siempre que sea necesario utilizar la función exponencial de base e, se escribirá "exp".

La esperanza y la varianza de X están dadas por:

$$E(X) = \lambda \quad \text{y} \quad V(X) = \lambda .$$

Esta distribución resulta apropiada en muchas situaciones en las que ocurre un "suceso" sobre un período, como la llegada de un cliente; cuando es tan probable que ocurra este "suceso" en un intervalo como en cualquier otro; también, la ocurrencia de un "suceso" no tiene efecto en la

ocurrencia o no de otro "suceso". Con frecuencia se supone que el número de llegadas de clientes en un tiempo fijo tiene una distribución de Poisson.

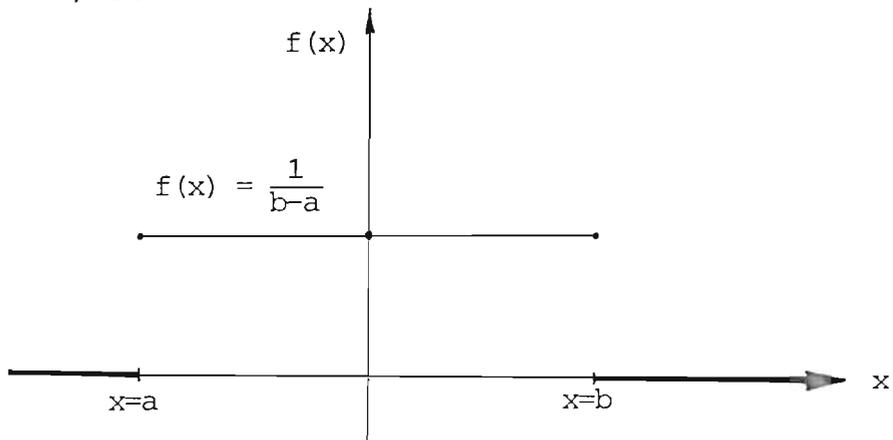
### 3.1.7 DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD.

#### DISTRIBUCION UNIFORME.

Sea  $X$  una variable aleatoria, que toma todos los valores en el intervalo real  $[a,b]$ , si la fdp de  $X$  está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} , & \text{si } a \leq x \leq b. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

entonces se dice que  $X$  está distribuida uniformemente en el intervalo  $[a,b]$  y el gráfico de su fdp es el de una constante en el intervalo  $[a,b]$  igual al recíproco de la longitud del mismo, así:

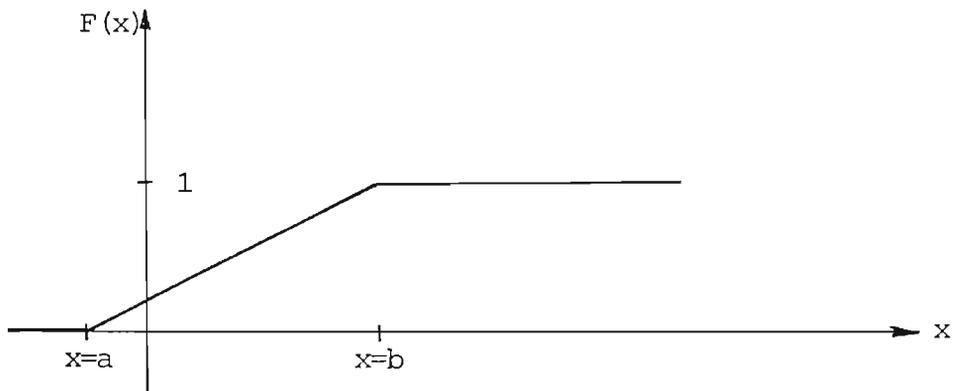


Una expresión para la fda de una variable aleatoria distribuida uniformemente es:

$$\left[ \text{Recuérdese que } F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds \right]$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a. \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x < b. \\ 1, & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

Gráficamente:



La esperanza y la varianza para una variable distribuida uniformemente en el intervalo  $[a, b]$  están dadas por:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{y} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} .$$

## DISTRIBUCION NORMAL (O GAUSSIANA).

Una variable aleatoria continua  $X$ , con fdp de  $X$  dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } -\infty < x < \infty \quad \text{y} \quad \sigma > 0$$

se dice que es una variable aleatoria normalmente distribuida con parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ . La esperanza y la varianza de  $X$  están dados por  $E(X) = \mu$  y  $V(X) = \sigma^2$ .

La fda de  $X$  está dada por:

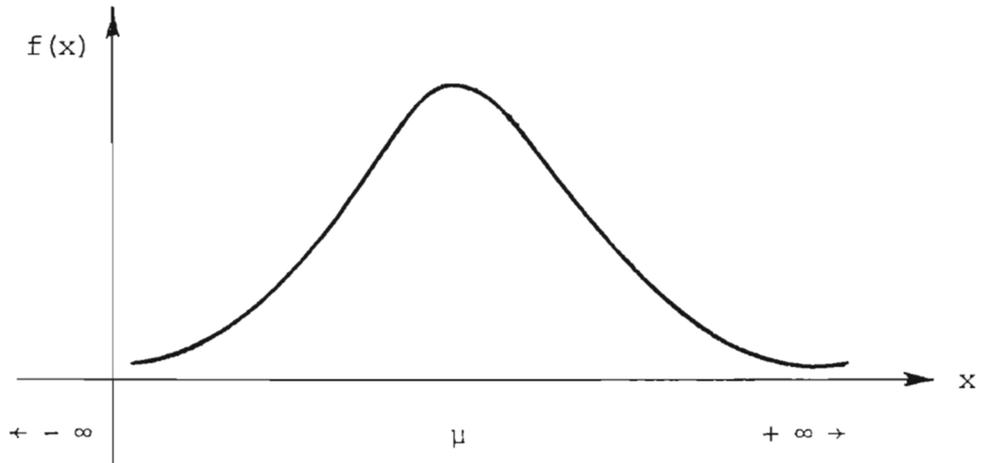
$$F(b) = \int_{-\infty}^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx$$

Haciendo la transformación  $E = \frac{x-\mu}{\sigma}$ , la fda puede escribirse como

$$F(b) = \int_{-\infty}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{z^2}{2} \right] dz$$

De donde aún cuando esta función no es integrable, se encuentra ampliamente tabulada.

En la siguiente figura se ilustra gráficamente una función de densidad normal típica.



Se observa la forma de campana característica propia de esta función, con eje de simetría en  $x = \mu$  y estará, tanto más concentrada alrededor de su eje de simetría, cuanto menor sea  $\sigma$ .

#### DISTRIBUCION EXPONENCIAL.

Una variable continua  $X$ , con fdp dada por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \exp(-\alpha x), & \text{si } x > 0. \text{ con } \alpha > 0. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

se dice que está exponencialmente distribuida, con parámetro  $\alpha$ .

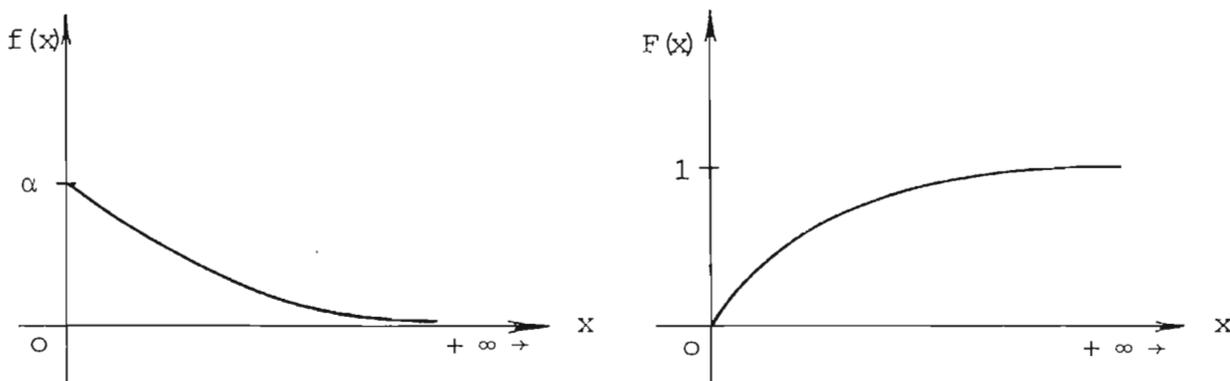
La fda de  $X$  está dada por:

$$F(x) = \int_0^x \alpha \exp(-\alpha t) dt = 1 - \exp(-\alpha x).$$

La esperanza y la varianza de X están dadas por:

$$E(X) = \frac{1}{\alpha} \quad \text{y} \quad V(X) = \frac{1}{\alpha^2} .$$

Los gráficos de la fdp y la fda de X tienen la forma:



DISTRIBUCION GAMMA.

Una variable aleatoria continua X, con fdp dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\Gamma(k)} (\alpha x)^{k-1} \exp(-\alpha x) , & x > 0 , \alpha > 0 , k > 0 . \\ 0 , & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

se dice que tiene una distribución gamma, con parámetros  $\alpha$  y  $k$ .  $\Gamma(k)$  se define como:

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} \exp(-x) dx, \quad \text{para todo } k > 0 .$$

En particular, si  $k$  es un entero positivo, la integración repetida por partes conduce a  $\Gamma(k) = (k - 1)!$ , apoyándose en que  $\Gamma(1) = 1$ . La fda de  $X$  no existe en forma explícita, sin embargo se encuentra tabulada. La esperanza y la varianza de  $X$  están dadas por:

$$E(X) = \frac{k}{\alpha} \quad \text{y} \quad V(X) = \frac{k}{\alpha^2} .$$

Relacionada con la función gamma, se encuentra la distribución "ji cuadrada". Si  $X$  es una variable aleatoria que tiene una distribución gamma con parámetros  $\alpha = 1$  y  $k = \frac{\nu}{2}$ ,  $\nu \in \mathbb{Z}^+$  entonces se dice que una nueva variable aleatoria  $Z = 2X$  tiene una distribución "ji cuadrada" con  $\nu$  grados de libertad.

### 3.2 GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS.

Considérese el siguiente fenómeno:

A un conductor de Buses, de una cooperativa transportista urbana, se le entrega cada vez al iniciar su jornada de trabajo, un conjunto de talonarios con igual número de boletos numerados en orden creciente, que él entregará a cada una de las personas que aborden el bus.

Suponga que el conductor introduce en una caja el con

junto de talonarios que se le da y los revuelve, entonces al iniciar su jornada de trabajo escoge al azar un talonario.

Resulta claro, que no se sabra cuál será el número del boleto inicial del talonario seleccionado (excepto el del último talonario extraído) y, también es claro, que una vez conocido el número del boleto inicial del talonario seleccionado los números de los boletos consecutivos del talonario quedan completamente determinados.

En el fenómeno anterior se pueden distinguir dos conjuntos de números, el conjunto de los números de los boletos iniciales de los talonarios seleccionados al azar (excepto el del último talonario) y el conjunto formado por los números de los boletos restantes de los talonarios seleccionados.

La finalidad del presente estudio es analizar las propiedades de los números aleatorios (números obtenidos al azar) utilizados en experimentos de simulación, así como de presentar algunos métodos para generar dichos números y, finalmente presentar algunas pruebas estadísticas que se aplican a los números para determinar su aleatoriedad.

### 3.2.1 NUMEROS ALEATORIOS.

Los números aleatorios para ser considerados como tales deben poseer ciertas características, entre las que se mencionan:

- a) Deben estar uniformemente distribuidos.
- b) Deben ser estadísticamente independientes.
- c) Deben pasar satisfactoriamente varias pruebas de aleatoriedad.

Existen antecedentes históricos muy interesantes con respecto a la generación de sucesiones de números aleatorios formulando diferentes métodos de acuerdo a las capacidades técnicas de la época entre los que se mencionan, según su aparición:

- a) Métodos Manuales. (Usando ruletas, barajas, lanzando monedas, etc...).
- b) Tablas de números aleatorios. (Usando los métodos manuales se construían tablas).
- c) Métodos de Computación analógica. (Usando computadoras Analógicas).
- d) Métodos de Computación digital. (Usando Computadoras digitales).

No se hará ninguna extensión de los métodos (a), (b), (c); sino únicamente de los expresados en (d), pero antes de analizar métodos para diseñar generadores de números aleatorios o dar ejemplos de ellos, se examinarán las propiedades que debe poseer todo generador de números aleatorios.

Obsérvese que como sólo se analizará el caso de la generación de sucesiones de números aleatorios por métodos de computación digital, habrá necesidad de establecer un programa de computadora para generar dichas sucesiones, por ende, las características que se mencionen estarán atribuidas a tales programas.

Las características que debe poseer todo programa generador de números aleatorios son:

1. La serie de números que produce el generador deje ajustarse lo más posible a la distribución uniforme.
2. Los números de la serie deben ser estadísticamente independientes.
3. La generación de un número debe hacerla en el menor tiempo posible, es decir, el generador debe ser rápido. Puesto que el tiempo de computación suele ser muy costoso.
4. La serie de números aleatorios debe tener un período largo; el período de un generador de números aleatorios es una medida de la cantidad de números que se generan, antes que reaparezca la misma secuencia de números ya generados.

Cuando comienza a reaparecer la misma secuencia de núme-

ros, se dice que el generador comienza a "repetir el ciclo". Por lo tanto, decir que cierto generador de números aleatorios tiene un período de  $N$  números significa que se generarán  $N$  términos antes que el generador comience a repetir el ciclo. El generador puede repetir el ciclo, sin comenzar necesariamente del primer número de la secuencia generada, sino que puede comenzar, por ejemplo, a partir del séptimo número de la secuencia generada y siempre se considera que dicho generador ha comenzado a repetir el ciclo.

5. El generador debe ser capaz de reproducir la misma serie de números las veces que se desee. (Por ejemplo, para hacer repeticiones de experimentos bajo las mismas condiciones).
6. El generador debe ser de naturaleza no degenerativa. Se dice que un generador se degenera cuando comienza a reproducir continuamente el mismo número. Si el generador tiene degeneración, el programa debe poder hacer correcciones y continuar.

En general, se puede decir, que un generador de números aleatorios debe ser un programa breve y rápido que produzca una larga secuencia de números aleatorios (que pasen las pruebas estándar) antes de comenzar a repetir el ciclo

y que tenga una naturaleza recurrente.

NOTAS:

1. Si un generador dado de números aleatorios genera perfectamente 30 números aleatorios antes de repetir el ciclo y sólo se necesitan 20 para el experimento, entonces ese generador es el apropiado. en general, basta tener un generador con un período más largo de la cantidad de números que son necesarios para un experimento dado.
2. Antes se indicó que el generador debe ser de naturaleza recurrente, esto es, que se utiliza el resultado del cálculo anterior para determinar el siguiente. Así, el término  $I$  sirve para calcular el  $I+1$ , y el  $I+1$  sirve para calcular el  $I+2$ , y así sucesivamente; esta propiedad permitirá reproducir la misma secuencia de números aleatorios para poder repetir un experimento bajo las mismas condiciones.
3. Los métodos que aquí se presentan para la generación de números aleatorios son verdaderamente determinísticos - puesto que todos ellos involucran una técnica repetitiva o una relación de congruencia, expresada por medio de alguna fórmula. Por lo que muchos autores, hablan de "generadores de números pseudoaleatorios" en lugar de "generadores de números aleatorios". Por comodidad, en este -

trabajo, se utilizará la segunda advirtiéndole que puede -  
faltar cierta precisión en la terminología.

### 3.2.2 GENERADORES DE NUMEROS ALEATORIOS.

No está dentro del alcance de este tópic, repetir en forma detallada los antecedentes de la generación de secuencias aleatorias, sin embargo, se revisarán algunas de las - primeras técnicas de generación de números aleatorios.

#### METODO DEL CUADRADO MEDIO.

El primer método propuesto para la generación de números aleatorios se conoce como "técnica del cuadrado medio"; fué propuesto por Von Neumann y Metropolis en 1946. También se le conoce con el nombre de técnica de los cuadrados centrales. En este método, cada número sucesivo se genera tomando los  $n$  dígitos centrales del cuadrado del número anterior de  $n$  dígitos. Por ejemplo, supóngase que se desea generar números aleatorios de tres dígitos. Tomando arbitrariamente como primer valor el número de tres dígitos 239, se obtiene la siguiente secuencia:

$$\begin{array}{rcl}
 (239)^2 & = & 57121 \quad \text{--->} \quad 712 \\
 (712)^2 & = & 506944 \quad \text{--->} \quad 694 \\
 (694)^2 & = & 481636 \quad \text{--->} \quad 163 \\
 (163)^2 & = & 26569 \quad \text{--->} \quad 656 \\
 & \vdots & \\
 & & \vdots
 \end{array}$$

Los problemas que se presentan con este método dependen del valor inicial considerado; dependiendo de éste el método pierde rapidez y puede degenerar al cabo de pocos términos. Por ejemplo, supóngase que se desea generar números aleatorios de cuatro dígitos y que el  $n$ -ésimo número generado sea 3500, obsérvese la secuencia que sigue:

$$r_n^2 = 12\ 250\ 000 \longrightarrow r_{n+1} = 2500.$$

$$r_{n+1}^2 = 625\ 000 \longrightarrow r_{n+2} = 2500.$$

Se ha llegado a una condición degenerada. Por lo tanto, es preciso comprobar siempre la serie de números, tal y como se genera para evitar este problema. Además, para aplicar este método en un lenguaje de alto nivel, se necesitan por lo menos dos multiplicaciones y quizá tres divisiones para poder tener acceso a los cuatro dígitos centrales en una computadora binaria de palabras fijas, en consecuencia, este método no es muy rápido.

#### METODO DEL PRODUCTO MEDIO.

Otro método de generación de números aleatorios se denomina técnica del producto medio, en la que el número aleatorio resultante se genera tomando los dígitos centrales del producto de los dos números aleatorios anteriores.

Esta técnica implica la elección inicial de dos números aleatorios  $r_1$  y  $r_2$ , cada uno de ellos con  $n$  dígitos, luego se multiplica  $r_1$  por  $r_2$  para obtener  $U$ . Se hace  $r_3$  igual a los  $n$  dígitos centrales de  $U$ . A continuación  $r_4$  es igual a los  $n$  dígitos centrales del producto de  $r_2$  con  $r_3$ , y así sucesivamente. Por ejemplo, sean

$$r_1 = 712 \quad \text{y} \quad r_2 = 694$$

$$r_1 \times r_2 = U_1 = 494\ 028 \longrightarrow r_3 = 402 \quad ,$$

$$r_2 \times r_3 = U_2 = 278\ 988 \longrightarrow r_4 = 898 \quad ,$$

$$r_3 \times r_4 = U_3 = 360\ 996 \longrightarrow r_5 = 099 \quad ; \text{ etc.}$$

Una modificación de este método consiste en utilizar un multiplicador constante, en lugar de números aleatorios, o sea:  $r_{m+1} = K \times r_m$  (Tomando sólo los  $n$  dígitos centrales de  $K \times r_m$ ).

Estas técnicas tienen también sus desventajas relativas a los valores iniciales que se escogen.

#### MÉTODOS CONGRUENCIALES.

Las técnicas que utilizan los métodos de congruencia están basadas en la siguiente definición de congruencia.

##### Definición 3.2.1

Se dice que un entero  $a$  es congruente con otro entero  $b$

módulo  $m$ , si y sólo si, la diferencia  $a-b$  es múltiplo entero de  $m$ .

Y usan la relación:  $r_{i+1} \equiv ar_i + c \pmod{m}$  ;  $0 \leq r_i \leq m$ .

que se lee: " $r_{i+1}$  es congruente con  $ar_i + c$ , módulo  $m$ " y,  $r_i$  nunca puede ser mayor que  $m$ , para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$ .

La relación implica que  $r_{i+1}$  se obtiene como el residuo al efectuar la división entera de  $ar_i + c$  entre  $m$ , según el siguiente esquema:

$$\begin{array}{r} ar_i + c \\ \hline k \\ r_{i+1} \end{array} \quad \text{donde } a, r_i, r, m \text{ son enteros positivos y } k \text{ entero.}$$

Este método exige que sean proporcionados inicialmente, los valores de  $a, c, m$  y  $r_0$  ( $r_0$ , recibe el nombre de semilla).

Como una ilustración de la aplicación de esta técnica, considérense:

$$m = 25, a = 6, c = 1 \text{ y } r_0 = 1$$

Sustituyendo en:  $r_{i+1} \equiv ar_i + c \pmod{m}$  se obtiene:

$$r_1 \equiv 6(1) + 1 \pmod{25} \rightarrow r_1 \equiv 7 \pmod{25}$$

y  $r_1$  se obtiene como el residuo de la división entera de 7 entre 25.  $\rightarrow r_1 = 7$

$$\text{Así, } r_2 \equiv 6(7) + 1 \pmod{25} \rightarrow r_2 \equiv 43 \pmod{25} \rightarrow r_2 = 18$$

$$r_3 \equiv 6(18) + 1 \pmod{25} \rightarrow r_3 \equiv 109 \pmod{25} \rightarrow r_3 = 9$$

·  
·  
·

De los métodos de congruencia, el método multiplicativo fué el primero en aparecer, propuesto por Lhemer (1949), el cual suponía particularmente que  $c=0$ , obteniéndose la relación:  $r_{i+1} \equiv ar_i \pmod{m}$ .

Apareciendo posteriormente modificaciones a la relación presentada por Lhemer, creándose los métodos:

1) Método Aditivo:  $r_{i+1} \equiv r_i - r_{i-1} \pmod{m}$ .

2) Método Mixto:  $r_{i+1} \equiv ar_i + C \pmod{m}$ .

Como ilustración, considérese la siguiente aplicación del método multiplicativo de congruencia en computadoras binarias. Esta técnica está cimentada por toda una teoría algebraica que puede revisarse en la bibliografía recomendada. Las características necesarias para optimizar la aplicación del método, pueden resumirse como sigue:

Sea  $m = 2^b$ , donde  $b$  es el número de bits en cada palabra;  $a$  y  $r_0$  primos relativos con  $2^b$ . [En general  $a$  debe escogerse como el primo relativo más próximo a 2, que sea de la forma  $a \equiv \pm 3 \pmod{8}$ ].

En una computadora binaria, el período máximo,  $h$ , que se puede obtener viene dado por:

$$h = 2^{b-2}, \text{ para } b > 2.$$

Considérese  $b = 4$ , el proceso producirá cuatro números aleatorios antes de repetir el ciclo  $[h = 2^{4-2} = 4]$ . Sea  $m = 2^4 = 16$ . Elíjase  $r_0 = 7$ , lo que equivale a  $r_0 = 0111$  en forma binaria. Como  $a$  debe ser de la forma

$$a \equiv \pm 3 \pmod{8} \rightarrow a = 8K \pm 3, \quad K \neq 0.$$

$$\rightarrow a = \begin{cases} 11 & \text{con } K=1 \\ 5 & \text{con } K=1 \end{cases}$$

se escoge el valor más próximo a 2, así:  $a = 5$ , que equivale a  $a = 0101$  en forma binaria.

$$ar_0 \text{ será: } ar_0 = (0101)(0111) = 00100011 \rightarrow r_1 = 0011 \text{ y,}$$

para obtener un valor uniformemente distribuido, hágase:

$n_1 = \frac{r_1}{m}$ . Así,  $n_1 = \frac{3}{16} = 0.1875$  que representa al primer número aleatorio.

$$ar_1 = (0101)(0011) = 00001111 \rightarrow r_2 = 1111 \text{ y } n_2 = \frac{15}{16} = 0.9375$$

$$ar_2 = (0101)(1111) = 00001011 \rightarrow r_3 = 1011 \text{ y } n_3 = \frac{11}{16} = 0.6875$$

$$ar_3 = (0101)(1011) = 00000111 \rightarrow r_4 = 0111 \text{ y } n_4 = \frac{7}{16} = 0.4375$$

Obsérvese que  $r_0 = r_4$ , y al hacer  $r_4$  el ciclo comenzará a repetirse.

Se presenta a continuación un programa que genera números aleatorios por el método multiplicativo de congruencia - codificado en lenguaje FORTRAN IV y palabras de 35 bits.

```

FUNCTION RANDU (IX , IY)
  IY = IX * 03125
  IF(IY) 5, 6, 6
5  IY = IY + 2 ** 35
6  YFL = IY
  RANDU = YFL * 2.0 ** (-35)
  IX = IY
  RETURN
END

```

lo único que debe hacerse es proporcionar el primer número aleatorio y asegurarse que es impar de cinco dígitos. Este método además de ser rápido requiere poco almacenamiento.

La definición de las variables es como sigue:

RANDU: Nombre de la función Generadora de números aleatorios.

IX: Primera entrada, debe contener cualquier número

entero impar de cinco dígitos; después de la 1a. entrada IX deberá ser el valor anterior de IY calculado por la función.

IY: Un número aleatorio entero resultante que se requiere como siguiente entrada de la función. El intervalo de este número se encuentra entre cero y  $2^{35}$ .

YFL: Es el número aleatorio de punto flotante uniformemente distribuido en el intervalo de cero a 1.0.

La subrutina que sigue, escrita por IBM, funciona para la computadora IBM System/360. Calcula números uniformemente distribuidos sobre el intervalo  $[0,1]$ . Se entra a la subrutina mediante la proposición CALL RANDU (IX, IY, YFL). La definición de las variables es como sigue:

IX: Para la 1a. entrada debe contener cualquier número entero impar con nueve o menos dígitos. Después de la 1a. entrada, IX deberá ser el valor anterior de IY calculado por la subrutina.

IY: Número aleatorio entero resultante que se requiere para la entrada siguiente a esta subrutina, el intervalo de este número se encuentra en cero y  $2^{31}$ .

YFL: El número aleatorio y punto flotante resultante, uniformemente distribuido en el intervalo  $[0,1]$ .

La lista de subrutina es la siguiente:

```

SUBROUTINE RANDU (IX, IY, FYL)
  IY = IX * 65539
  IF(IY) 5, 6, 6
5  IY = IY + 2147483647 + 1
6  YFL = IY
  YFL = YFL * .4656613 E - 9
  RETURN
END

```

### 3.2.3 PRUEBAS SOBRE GENERADORES DE NUMEROS ALEATORIOS.

Uno de los análisis básicos que se deben hacer siempre es el de la validación de la uniformidad de la distribución. Para ello se pueden aplicar dos pruebas básicas de buen ajuste:

- i) La prueba de ji cuadrada.
- ii) La prueba de Kolmogorov - Smirnov.

Estas pruebas reciben el nombre de buen ajuste, ya que ambas se interesan por el grado de acuerdo (concordancia) - que existe entre la distribución de una muestra de números aleatorios generados y la distribución uniforme teórica. -

Además, las dos pruebas se basan en una hipótesis nula de que hay una diferencia no detectable entre una distribución muestral y la teórica. Las dos pruebas se basan en el agrupamiento de datos muestrales en clases, dentro del intervalo  $[0,1]$ .

#### PRUEBA DE JI CUADRADA.

Se trata de comprobar la hipótesis de que no existe diferencia entre la distribución de frecuencias de la muestra y la distribución uniforme teórica. Supóngase que se han generado  $n$  números  $U_1, \dots, U_n$ . Se divide el intervalo unitario en  $r$  subintervalos iguales\* de manera que, bajo la hipótesis de uniformidad, la probabilidad de que un número  $U_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , quede en un subintervalo particular es  $\frac{1}{r}$ . También el número esperado de "números aleatorios" en un subintervalo específico es  $n \cdot \frac{1}{r}$ . Si se está probando números en una computadora decimal, entonces  $r = 10^\alpha$  hace que se examinen los  $\alpha$  dígitos más significativos para buscar la uniformidad; y en máquinas binarias, una selección de  $r = 2^\alpha$ , permite probar los  $\alpha$  bits más significativos, siempre para buscar la uniformidad. Sea  $f_j$ , la frecuencia con la cual los números caen dentro del intervalo  $\left[\frac{j-1}{r}, \frac{j}{r}\right]$ . Si  $\{U_j\}_{j \geq 1}$  es una sucesión de números aleatorios independien

\* Clases de equivalencia, también llamadas celdas.

tes distribuidos uniformemente, entonces el estadístico:

$$\chi_1^2 = \frac{r}{n} \sum_{j=1}^r \left( f_j - \frac{n}{r} \right)^2$$

tiene una distribución que converge hacia la distribución - "ji cuadrada" con  $r-1$  grados de libertad conforme  $n$  crece. Se recomienda la selección de  $n > 5r$  para reducir la probabilidad de que existan muy pocos números en un subintervalo cualquiera.

Bajo la hipótesis de independencia y uniformidad, se espera que:

$$P \left[ \chi_1^2 < Q_{1-\alpha} (r-1) \right] = 1 - \alpha .$$

Donde  $\alpha$  es un valor crítico seleccionado, por ejemplo, 0.05 ó 0.1 y  $Q_{1-\alpha} (r-1)$  es el punto sobre la distribución - acumulativa ji cuadrada con  $r-1$  grados de libertad correspondiente a la probabilidad  $1-\alpha$  .

No se presenta ningún ejemplo específico de esta prueba, sin embargo, se dan a continuación varias consideraciones generales sobre la aplicación de esta técnica.

1. La elección del número de subintervalos se recomendó anteriormente que fuera  $r = 10^\alpha$  para computadoras decimal

les, y  $r = 2^\alpha$  para binarias; siendo  $\alpha$  un valor crítico seleccionado en base al nivel de significancia de la prueba.

2. Cuando  $n > 2$ , no se deberá utilizar la prueba ji cuadrada en caso de que más del 20% de las frecuencias esperadas sean menores que cinco o cuando cualquier frecuencia esperada sea menor que uno; para que no existan muy pocos números aleatorios en un intervalo cualquiera.
3. La cantidad de números aleatorios que se generen deberá basarse en la aplicación propiamente dicha.

#### PRUEBA KOLMOGOROV - SMIRNOV.

Una vez más, interesa el grado de concordancia entre la distribución muestral de frecuencias y la distribución uniforme teórica, bajo la hipótesis de que, de hecho, no existe diferencia entre ellas.

Sea  $F_X(x)$  la función acumulativa continua para la distribución uniforme. Es decir, que para cualquier valor de  $x$ , el valor de  $F_X(x)$  es la proporción de observaciones\* esperadas con valores menores o iguales que  $x$ .

Sea  $S_T(x)$  la distribución acumulativa de frecuencias observada en una muestra de  $T$  números aleatorios, es decir,

---

\* Cada observación, es la generación de un número aleatorio por el generador.

que para cualquier número aleatorio dado,  $x$ ,  $S_T(x) = \frac{m}{T}$ , donde  $m$  denota el total de números aleatorios menores o iguales que  $x$ .

La prueba de Kolmogorov-Smirnov se ocupa de la mayor desviación simple entre  $F_X(x)$  y  $S_T(x)$  sobre el intervalo unitario. De acuerdo con la hipótesis nula, se espera de que estas desviaciones sean pequeñas y que se encuentran dentro de los límites de los errores aleatorios. En esta prueba, la mayor desviación,  $D$ , entre  $F_X(x)$  y  $S_T(x)$ , se denomina máxima desviación, donde

$$D = \text{máx} \left| F_X(x) - S_T(x) \right|$$

La distribución muestral de  $D$  se conoce y es dependiente de la distribución  $T$ .

El procedimiento general para realizar esta prueba consiste en:

- 1) Especificar la función de distribución acumulativa para la distribución uniforme basada en el número de intervalos.
- 2) Ordenar la muestra observada de números aleatorios en una distribución acumulativa de frecuencias con esos mismos intervalos.

- 3) Encontrar el  $\max \left| F_X(x) - S_T(x) \right|$ , determinando así el valor de  $D$ .
  
- 4) Consultar la siguiente tabla para encontrar el valor crítico de  $D$  correspondiente al error  $\alpha$  especificado. Si el valor de la tabla,  $D_{1-\alpha}$  es menor que  $D$ , se rechaza la hipótesis de que los datos proceden de la distribución uniforme.

TABLA PARA APLICAR EN LA PRUEBA DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

Valores críticos,  $d(N)$ , de la diferencia máxima absoluta entre las distribuciones acumulativas de la muestra y la población\*.

Tamaño Muestral (N)	Nivel de Significación ( $\alpha$ )				
	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.828
4	0.494	0.525	0.564	0.624	0.733
5	0.446	0.474	0.510	0.565	0.669
6	0.410	0.436	0.470	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.360	0.388	0.432	0.514
10	0.322	0.342	0.368	0.410	0.490
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.450
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.392
17	0.250	0.266	0.286	0.318	0.381
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.371
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.363
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.356
25	0.21	0.22	0.24	0.27	0.32
30	0.19	0.20	0.22	0.24	0.29
35	0.18	0.19	0.21	0.23	0.27
Más de 35	<u>1.07</u>	<u>1.14</u>	<u>1.22</u>	<u>1.36</u>	<u>1.63</u>
	$\sqrt{N}$	$\sqrt{N}$	$\sqrt{N}$	$\sqrt{N}$	$\sqrt{N}$

\* Valores de  $d(N)$  tales que  $P[\max |S(x) - F_0(x)| > d(N)] = \alpha$  en donde  $F_0(x)$  es la distribución acumulativa teórica y  $S(x)$  es una distribución acumulativa observada para una muestra de  $N$ .

Ejemplo: Supóngase que se ha generado 100 números aleatorios y se desea comprobar su uniformidad sobre 10 intervalos equidistantes, utilizando la prueba Kolmogorov-Smirnov. Sea el nivel de significación  $\alpha = 0.05$  y siguiendo el procedimiento ya explicado, se obtiene la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$F_X(x)$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	
$S_T(x)$	0.08	0.25	0.30	0.35	0.47	0.65	0.70	0.84	0.97	1.00	
$ F_X(x) - S_T(x) $	0.02	0.05	0.00	0.05	0.03	0.05	0.00	0.04	0.07	0.00	$\rightarrow D = 0.07$

el valor crítico  $D$ , en la tabla de pruebas Kolmogorov-Smirnov es  $d = \frac{1.36}{\sqrt{100}} = 0.136$

$\rightarrow D < d$  .\*. la secuencia del generador está uniformemente distribuida sobre  $(0,1)$ .

#### PRUEBAS DE RACHAS.

Las pruebas anteriormente utilizadas pudieran sugerir - que se puede suponer que una secuencia de números se ha generado a partir de una población uniforme y, no obstante, el orden de los números dentro de la secuencia puede ser de índole tal que haya dudas sobre la aleatoriedad de los números.

ros. Considérese por ejemplo, la siguiente secuencia de números:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,  
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Una aplicación sencilla de la prueba de Kolmogorov-Smirnov pone de manifiesto la uniformidad de la distribución de esos números, pero es difícil afirmar su aleatoriedad. Es así como también interesa el orden particular de los números dentro de la secuencia, para determinar su aleatoriedad. La finalidad de las pruebas de rachas es evaluar el carácter de aleatoriedad de la secuencia de números.

Se dan a continuación conceptos propios, en forma ejemplarizada, de este tipo de pruebas:

Supóngase que se lanza al aire una moneda 10 veces, obteniéndose los siguientes resultados: corona, cara, corona, corona, cara, corona, cara, cara, cara, corona. Es posible dividir los casos posibles (las ocurrencias posibles) en un conjunto de tres resultados o eventos mutuamente excluyentes:

- a) No hay evento.
- b) Caras.
- c) Coronas.

La ocurrencia de los casos b) y c) es trivial; la ocurrencia del caso a), se interpreta como sigue: La primera corona de la secuencia va precedida por "No hay evento", y la última corona va seguida por "No hay evento". - Nótese que por ser excluyentes los eventos, también la primer cara va precedida por "No hay evento" y, la última cara va sucedida por "No hay evento". Por ende, se puede decir que cada secuencia de eventos comienza y termina sin eventos.

Así, una racha se define como una sucesión de eventos similares precedidos y seguidos por un evento diferente. - La longitud de una racha constituye el número de eventos que ocurren en la racha.

En el ejemplo del lanzamiento de la moneda al aire se tienen siete rachas: La primera y la segunda de longitud uno, la tercera de longitud dos, la cuarta y la quinta de longitud uno, la sexta de longitud tres y la séptima de longitud uno.

Al evaluar la aleatoriedad de una secuencia de números, puede interesar la longitud de las rachas que se producen. En este caso interesarán dos tipos de rachas: ascendentes y descendentes.

Si se tiene una secuencia de números de índole tal que a cada uno de los números siga otro mayor, la secuencia será ascendente. Si cada número va seguido de otro menor, la secuencia será descendente.

Se asocia un signo + ó - a cada número de la secuencia, de la siguiente manera; si a un número le sigue otro mayor, se le asigna + y, si el número siguiente es menor se le asigna -. Puesto que el último número de cada secuencia va seguido por un evento "nulo" no se le asigna ni + ni -. Cada sucesión de signos "+" ó "-" constituye una racha, cuya longitud la determina el número de signos iguales que contiene.

Ejemplo: Tómese en consideración la siguiente secuencia de 20 números de un sólo dígito: 3, 1, 2, 3, 6, 4, 5, 4, 1, 2, 6, 8, 9, 7, 5, 2, 3, 1, 5, 1. Se tiene entonces la siguiente secuencia de signos: -+++--+---++++---+---. Por tanto, - la primera racha es descendente de longitud 1, la segunda - es ascendente de longitud 3, y así sucesivamente.

Una secuencia de números puede ser no aleatoria si se tienen demasiadas o muy pocas rachas [Estas corresponden a las dos colas en una distribución normal estándar, de las que dado un cierto nivel de significación,  $\alpha$ , se puede concluir que si la probabilidad de una secuencia particular -

cae en cualquiera de las dos colas, dicha secuencia no se puede considerar aleatoria].

Por ejemplo, considérense las siguientes secuencias:

Secuencia A: 28, 47, 49, 63, 77, 82, 87, 91, 96, 99

Secuencia B: 01, 61, 32, 94, 21, 78, 39, 42, 17, 34.

En la secuencia A, se tiene una sola racha ascendente, y en la secuencia B se tienen nueve rachas cinco ascendentes y cuatro descendentes. Se descartan estas secuencias como aleatorias ya que no se puede esperar que los números verdaderamente aleatorios aumenten continuamente, por otra parte el otro extremo es también inaceptable, en el que los números aumentan, disminuyen, aumentan, disminuyen, etc...

Por lo tanto, se espera que el número de rachas presentes en una secuencia de  $N$  números aleatorios, se encuentre entre el número máximo  $(N-1)$  y el número mínimo  $(1)$  de rachas.

Sea  $C$  el número total de rachas en una secuencia. La media y la varianza de  $C$  vienen dadas por:

$$E(C) = \frac{2N - 1}{3} \quad \text{y} \quad V(C) = \frac{16N - 29}{90}$$

Para un valor de  $N$  suficientemente grande ( $N > 20$ ) es

posible aproximarse a la distribución de  $C$ , mediante una distribución normal con la media y la varianza dadas.

Como ya se señaló, se puede rechazar la hipótesis de que una secuencia de números es aleatoria, cuando haya un número excesivo o demasiado bajo de rachas. Por lo que se requiere una prueba de dos colas para saber si se ha presentado alguna de esos casos. Usando como estadística de la prueba:

$$Z = \frac{C - E(C)}{\sqrt{V(C)}}$$

donde  $Z$  tiene una distribución normal con media cero y varianza la unidad.  $Z$  también puede escribirse como:

$$Z = \frac{C - \frac{2N - 1}{3}}{\sqrt{\frac{16N - 29}{90}}}$$

Sea  $\alpha$  el nivel de significancia y  $Z_{1 - (\alpha/2)}$  el nivel de  $Z$  que hace que  $P\left\{Z \geq Z_{1 - (\alpha/2)}\right\} = \frac{\alpha}{2}$ , entonces si  $|Z| \geq Z_{1 - (\alpha/2)}$  se rechaza la hipótesis de aleatoriedad.

Ejemplo: Determínese si los números, de rachas, que aparecen en la siguiente secuencia son tales que se pueda rechazar la hipótesis de que son aleatorios. Sea  $\alpha = 0.05$  (este

valor es escogido arbitrariamente de acuerdo a las exigencias del problema).

59, 12, 19, 05, 59, 58, 83, 18, 36, 00, 61, 47, 24, 41, 42,  
98, 23, 67, 84, 43, 29, 71, 88, 74, 60, 10, 46, 23, 15, 11,  
78, 31, 11, 91, 99, 57, 28, 18, 32, 21, 12, 95, 38, 76, 07,  
96, 33, 63, 10, 05.

La secuencia de números ascendentes y descendentes es como sigue:

--++--++--++--+++--++--++--++--++--++--++--++--++--

Por consiguiente  $C = 33$ .

Puesto que  $N = 50$ , para la media y la varianza de  $C$ , se tiene:

$$E(C) = \frac{2N - 1}{3} = \frac{99}{3} = 33$$

$$V(C) = \frac{16N - 29}{90} = \frac{771}{90} = 8.57$$

$$\therefore Z = \frac{C - E(C)}{\sqrt{V(C)}} = \frac{33 - 33}{\sqrt{8.57}} = 0.00$$

Y  $Z_{1-(\alpha/2)} = Z_{1 - \frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$  (Valor que se encuentra en Tablas para la distribución normal).



Se distinguirán para este fin las rachas, diciendo que están por encima o por debajo de la media y, un signo + denotará una observación por encima de la media y un signo - denotará una observación por debajo de la media.

Ejemplo: Sea la siguiente secuencia: 9, 4, 5, 6, 1, 0, 6, 6, 4, 9, 2, 8, 4, 0, 3, 7, 5, 5, 5, 7, 1, 8, 9, 1, 0.

La media de dicha secuencia es: 4.5

Tiéndose entonces la siguiente asignación de signos + y - :

+---+---+---+---+-----+++++---+---

en este caso se tienen: una racha de uno sobre la media, seguida de una racha de uno bajo la media, seguida de una racha de dos sobre la media, y así sucesivamente. Se tienen en total siete rachas por encima de la media y 7 por debajo de ella.

Sean S y b el número de observaciones individuales sobre y bajo la media, respectivamente. Sea C el número total de rachas. Para la prueba de rachas por encima y por debajo de la media, la media y la varianza de C están dadas por:

$$E(C) = \frac{2sb}{s+b} + 1 \quad V(C) = \frac{2sb(2sb - s - b)}{(s+b)^2 (s+b-1)}$$

Para  $s$  ó  $b$  suficientemente grande ( $> 20$ ),  $C$  tiene una distribución normal y la estadística de la prueba viene dada por:

$$Z = \frac{C - E(C)}{\sqrt{V(C)}}$$

y se rechaza la hipótesis de aleatoriedad si  $|Z| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

siendo  $\alpha$  el nivel de significancia.

Hasta ahora se ha centrado la atención en el número de rachas que aparecen en una secuencia dada de números, sin tener en cuenta la longitud de esas rachas. Caso que se estudiará ahora.

Sea  $R_i$  el número de rachas de longitud  $i$  en una secuencia de  $N$  números, para el valor esperado de  $R_i$  se tiene:

$$E(R_i) = 2N \left(\frac{s}{N}\right)^i \left(\frac{b}{N}\right)^2$$

para rachas por encima y por debajo de la media y  $N$  grande.

$$y E(R_i) = \begin{cases} \frac{2}{(i+3)!} \left[ N(i^2 + 3i + 1) - (i^3 + 3i^2 - i - 4) \right] & \text{para } i \leq N-2 \\ \frac{2}{N!} & \text{para } i = N-1 \end{cases}$$

para rachas ascendentes y descendentes.

Utilizando la prueba "ji cuadrada", se puede comparar el número observado de rachas de una longitud dada con el número esperado. Es decir, si  $O_i$  es el número observado de rachas de longitud  $i$ , se tiene como estadística de la prueba:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^L \frac{[O_i - E(R_i)]^2}{E(R_i)}$$

donde  $L=N$  para rachas por encima y por debajo de la media y  $L = N-1$  para rachas ascendentes y descendentes.

Y si  $\chi^2 < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$  entonces no se puede rechazar la hipótesis de que los números dados no son aleatorios. Siendo  $\alpha$  el nivel de significación y  $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$  se encuentra en tablas.

PRUEBAS DE CORRELACION (O AUTOCORRELACION).

Las pruebas de correlación examinan la tendencia de los números a ir seguidos por otros números. Exámínesse la siguiente secuencia:

.20, .96, .78, .18, .92, .90, .80, .02, .53, .05, .30, .70,  
 .59, .98, .90, .03, .37, .86, .73, .06, .53, .25, .67, .78,  
 .33, .97, .63, .25, .33, .72, .91, .00, .24, .64, .90, .08,  
 .33, .94, .33, .16, .45, .70, .18, .07.

Obsérvese que a partir del segundo número, cada sexto - número siguiente varía en magnitud sucesivamente de muy grande a muy pequeño. Este ejemplo manifiesta la propiedad que se investigará.

Supóngase que se desea determinar si hay alguna relación entre los números  $r_i, r_{i+m}, r_{i+2m}, \dots, r_{i+Mm}, r_{i+(M+1)m}$ ; es decir, se desea investigar la amplitud de la autocorrelación - entre cada  $m$ -ésimo número aleatorio, partiendo del  $i$ -ésimo. Y suponiendo además que la distribución de los números es uniforme e independiente, se tiene que la media y la varianza del producto de dos números aleatorios son:

$$E\left(r_{i+km} \cdot r_{i+(k+1)m}\right) = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad V\left(r_{i+km} \cdot r_{i+(k+1)m}\right) = \frac{7}{144} \cdot$$

Para analizar la correlación general para todos los pares sucesivos de números aleatorios, se usará la estadística:

$$\rho_{im} = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M \left[ r_{i+km} \quad r_{i+(k+1)m} \right] \cdot$$

Con media y varianza dadas por:  $E(\rho_{im}) = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\text{y} \quad V(\rho_{im}) = \frac{13M + 7}{144(M + 1)^2}$$

Para valores grandes de  $M$ , la distribución de  $\rho_{im}$  es a proximadamente normal, si las variables

$r_i, r_{i+m}, \dots, r_{i+(M+1)m}$  no están correlacionadas. La estadística de la prueba para determinar la significancia de la autocorrelación para la secuencia propuesta de  $M + 1$  números es:

$$Z = \frac{\rho_{im} - E(\rho_{im})}{\sqrt{V(\rho_{im})}} = \frac{\rho_{im} - 0.25}{\frac{\sqrt{13M + 7}}{12(M+1)}}$$

que tiene una distribución normal con media cero y varianza la unidad, bajo la suposición de independencia.

Puesto que lo que interesa es la detección de los valores grandes y pequeños de  $\rho_{im}$ , se requiere una prueba de dos colas. Por consiguiente, se rechaza la hipótesis de la independencia si:  $|Z| \geq Z_{1-(\alpha/2)}$  donde  $\alpha$ , es el nivel de significancia de la prueba.

Ejemplo: Determinése si el 2o., 7o., 12o., 17o., 22o. número aleatorio de la siguiente secuencia, están autorrelacionados.  $\alpha = 0.10$

0.13, .91, .11, .02, .65, .33, .86, .63, .05, .25, .28, .80, .82, .10, .78, .88, .76, .29, .20, .66, .17, .71, .45, .40, .35

Puesto que interesa el grado de autocorrelación de cada quinto número a partir del segundo, se tiene:

$$i = 2, m = 5, N = 25, M = 3$$

$$\rightarrow \rho_{25} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 (r_{2+5k}) (r_{2+5(k+1)})$$

$$\begin{aligned} \rho_{25} &= \frac{1}{4} [(0.91) (0.86) + (0.86) (0.80) + (0.80) (0.76) + (0.76) (0.71)] \\ &= 0.6546 \end{aligned}$$

$$y \quad \sigma_{\rho_{25}} = \frac{\sqrt{13(3) + 7}}{12(4)} = 0.141$$

$$\therefore Z = \frac{0.6546 - 0.25}{0.141} = 2.87$$

Y en tablas se encuentra que  $Z_{0.95} = 1.645$

Y se tiene entonces que  $|Z| > Z_{0.95}$ , por lo que debe rechazarse la hipótesis de que los números analizados no están autorrelacionados significativamente (es decir, que los números si están correlacionados).

El estudio precedente concentra la atención en el análisis de un cierto conjunto de números dentro de la secuencia total de  $N$  números.

Un análisis más generalizado consiste en examinar la autocorrelación para cada secuencia del tipo

$r_i, r_{i+m}, r_{i+2m}, \dots, r_{i+(M+1)m}$  Para obtener esa prueba de-

fínase:

$$\rho_m = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^{N-m} r_i \cdot r_{i+m}$$

Para  $N$  grande en relación a  $m$ ,  $\rho_m$  tiene aproximadamente una distribución normal con media y varianza dadas por:

$$E(\rho_m) = 0.25 \quad \text{y} \quad V(\rho_m) = \frac{13N - 19m}{144(N - m)^2}$$

Ejemplo: Determinése la significancia de la autocorrelación para cada décimo número en la secuencia de números que se dió en el ejemplo anterior.

$$\alpha = 0.10$$

$$\rho_m = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^{N-m} r_i \cdot r_{i+m} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} r_i \cdot r_{i+10} \quad \text{ya que}$$

$$N = 25 \quad \text{y} \quad m = 10.$$

$$= \frac{1}{15} [(0.13)(0.28) + (0.91)(0.80) + (0.11)(0.82) + (0.02)(0.10) + (0.65)(0.78) + (0.33)(0.88) + (0.86)(0.76) + (0.63)(0.29) + (0.05)(0.20) + (0.25)(0.66) + (0.28)(0.17) + (0.80)(0.71) + (0.82)(0.45) + (0.10)(0.40) + (0.78)(0.35)]$$

$$= 0.264$$

$$\sigma_{\rho_{10}} = \frac{\sqrt{13(25) - 190}}{180} = 0.065$$

Y al utilizar Z como estadística de la prueba se tiene:

$$z = \frac{0.264 - 0.25}{0.065} = 0.215$$

Como antes, es apropiada la prueba de dos colas y como  $z_{0.95} = 1.645$  se tiene que  $|z| < z_{0.95}$  y no es posible rechazar la hipótesis de que los datos tal y como se analizaron, no están autocorrelacionados.

Aparentemente, los resultados se contradicen en los dos ejemplos mostrados. Lo cual podría plantear dudas sobre la propiedad relativa de las dos pruebas analizadas. [Es decir, ¿debería haberse analizado separadamente o en grupo cada una de las 15 secuencias posibles de  $r_i, r_{i+10}, \text{etc...?}$ ]. A continuación se menciona la dificultad que aparece cuando se aplican pruebas múltiples sobre el mismo conjunto de datos.

Supóngase que se ha analizado cada una de las 15 secuencias posibles de  $r_i, r_{i+10}, \dots$ ; utilizando un  $\alpha = 0.10$ . Además, supóngase que, de hecho, no hay autocorrelación entre cada una de esas secuencias.

La probabilidad de que se llegue a la conclusión correcta de falta de una autocorrelación significativa, en cualquier prueba simple, es de 0.90 [ya que  $\alpha = 0.10$ , es precisamente la probabilidad de rechazar la "hipótesis nula", siendo cierta. En este caso la hipótesis nula es, que las secuencias no están correlacionadas].

La probabilidad de que se llegue a esa misma conclusión en las 15 pruebas es de  $(0.90)^{15} = 0.20589113 \approx 0.2$ . Dicho de otra manera, la probabilidad de que se encuentre una autocorrelación significativa en una o más secuencias es de aproximadamente el 80%.

Por lo tanto, la contradicción observada en ambos ejemplos anteriores no es completamente inesperada.

Existen otro tipo de pruebas en las que se estudian las propiedades relacionadas con los dígitos individuales que contiene un determinado número. Por ejemplo, los números que siguen se considerarían aleatorios sobre la base de todas las pruebas que se han visto:

0.599, .122, .199, .055, .599, .588, .833, .188, .366, .000,  
 .611, .477, .244, .411, .422, .988, .233, .677, .844, .433,  
 .299, .711, .888, .744, .600

Sin embargo, un simple vistazo a la secuencia indica - que el tercer dígito en cada número no es de ninguna manera aleatorio.

Tres pruebas encargadas de revisar esta propiedad son:

- a) La Prueba de Huecos.
- b) La Prueba de Póquer.
- c) La Prueba de Yule.

#### PRUEBA DE HUECOS.

Esta prueba se utiliza para determinar la significancia de los intervalos entre la repetición de cierto dígito. Si el dígito  $k$  va seguido por  $x$  dígitos distintos de  $k$ , - antes que vuelva a aparecer  $k$ , se dice que existe un hueco de tamaño  $x$ . Si  $k$  aparece  $N$  veces habrá  $N-1$  huecos.

En una secuencia de  $N$  números de los cuales  $r$  son - distintos entre sí, se tendrá un total de  $N-r$  huecos.

Si se tiene una secuencia de  $N$  números de un dígito cada uno, la probabilidad para cualquier dígito dado  $k$ , de que vaya seguido por  $x$  dígitos distintos de  $k$ , antes que vuelva a aparecer  $k$ , está dada por:

$$\begin{aligned}
 P(x/k) &= P(k \text{ vaya seguido de exactamente } x \text{ dígitos dis-} \\
 &\quad \text{tintos de } k) \\
 &= (0.9)^x (0.1) \quad , \quad x = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

para una secuencia dada de dígitos se anota el número de veces que aparecen huecos de longitudes  $0, 1, 2, \dots$ . Luego se compara la frecuencia acumulativa relativa observada con la frecuencia acumulativa teórica, y mediante la prueba de Kolmogorov-Smirnov se concluye sobre la aleatoriedad de los números de la secuencia.

La distinción de frecuencias acumulativas teóricas, para este caso, viene dada por:

$$F_X(x) = \sum_{n=0}^x (0.1) (0.9)^n = 1 - (0.9)^{x+1} \quad .$$

#### PRUEBA DE POQUER.

Esta prueba se utiliza para analizar la frecuencia con que se repiten los dígitos en números aleatorios individuales. Por ejemplo, si se tiene una secuencia de números de cinco dígitos cada uno, interesará examinar la frecuencia con que ocurre lo siguiente (en cada número):

1. Los cinco dígitos son diferentes.
2. Hay exactamente un par (un dígito repetido exactamente una vez en un número aleatorio).
3. Hay dos pares diferentes.
4. Tres dígitos iguales (trío).
5. Tres dígitos iguales más un par (Full).
6. Cuatro dígitos iguales (Póquer).
7. Cinco dígitos iguales (Poquerín).

Para aplicar la prueba del Póquer, se escoge primeramente un nivel de significancia,  $\alpha$ , y se enumeran todas las combinaciones diferentes que indican el grado de repetición de los dígitos.

A continuación, se calculan las probabilidades de aparición de cada una de esas combinaciones. Luego, se examina la frecuencia con que se presenta cada combinación en la secuencia de números estudiados. Se compara posteriormente la frecuencia observada con que aparece cada combinación con la frecuencia esperada, mediante la aplicación de la prueba ji cuadrada.

## PRUEBA DE YULE.

Esta prueba involucra la suma de los dígitos que aparecen en cada número de la secuencia, de la siguiente manera:

Sea  $r$  un número de cuatro dígitos ( $r$  es una variable aleatoria), de tal forma que cada uno de los cuatro dígitos esté distribuido uniformemente sobre el intervalo 0 a 9. - Sea  $r_i$  el  $i$ -ésimo dígito de  $r$  entonces

$$P_{R_i}(r_i) = 0.1 ; r_i = 0, 1, \dots, 9$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Defínase  $Y$  como la suma de los cuatro dígitos de

$$r : Y = \sum_{i=1}^4 r_i . \quad \text{La función de probabilidad de } Y, P_Y(y),$$

está dada por:

$$P_Y(y) = \begin{cases} \frac{(y+3)!}{3! y!} \left(\frac{1}{10}\right)^4 ; & y = 0, 1, \dots, 9. \\ \left[ \frac{(y+3)!}{y! 3!} - \frac{4(y-7)!}{(y-10)! 3!} \right] \left(\frac{1}{10}\right)^4 ; & y = 10, 11, \dots, 18. \\ \left[ \frac{(39-y)!}{(36-y)! 3!} - 4 \frac{(29-y)!}{(26-y)! 3!} \right] \left(\frac{1}{10}\right)^4 ; & y = 19, 20, \dots, 26. \\ \frac{(39-y)!}{(36-y)! 3!} \left(\frac{1}{10}\right)^4 ; & y = 27, 28, \dots, 36. \end{cases}$$

Si se tienen  $N$  números aleatorios, de los que cada número se compone de cuatro dígitos y si los números aleatorios están uniformemente distribuidos sobre el intervalo de 0 a 9999, entonces el número esperado de veces que se presentará la suma " $y$ " está dado por  $N.P_Y(y)$ .

La función de la Prueba Yule es determinar si el número esperado de veces que se produce la suma  $y$  es significativamente diferente de  $N.P_Y(y)$ .

Sean  $E(y)$  = el número esperado de veces que aparece la suma  $y$   
 $= N.P_Y(y)$  ,  $y = 0, 1, 2, \dots, 36$ .

y  $O(y)$  = el número observado de veces que aparece la suma  $y$ .

Si los números están uniformemente distribuidos sobre el intervalo de 0 a 9999, la cantidad  $T$  estará distribuida como  $\chi^2$  con 36 grados de libertad:

$$T = \sum_{y=0}^{36} \frac{(O(y) - E(y))^2}{E(y)} .$$

Si  $T > \chi_{1-\alpha}^2(36)$ , entonces debe llegarse a la conclusión de que los dígitos no aparecen aleatoriamente dentro de los números aleatorios generados.

CONSIDERACION SOBRE EL NIVEL DE SIGNIFICANCIA ( $\alpha$ ).

Recuérdese que  $\alpha$  es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo cierta.

Si se tuviera que aplicar  $n$  pruebas diferentes a una serie de números y el nivel de significancia para cada prueba tuviera que ser  $\alpha$ ; entonces el nivel compuesto de significancia,  $\alpha_T$ , está dado por:

$$\alpha_T = 1 - (1 - \alpha)^n$$

O sea, si la hipótesis nula para cada prueba es realmente verdadera la probabilidad de que se rechace una o más de esas hipótesis está dada por  $\alpha_T$ . Por ende, para un  $\alpha_T$  dado, el error  $\alpha$  para cada una de las pruebas individuales está dado por:

$$\alpha = 1 - (1 - \alpha_T)^{1/n}$$

Por ejemplo, si se tienen que aplicar cinco pruebas diferentes a una serie de números aleatorios de modo que la probabilidad de rechazo incorrecto en una o más pruebas, ( $\alpha_T$ ), sea de 0.05, el error  $\alpha$  para cada prueba será:

$$\alpha = 1 - (0.95)^{0.2} \approx 0.01 .$$

### 3.2.4 GENERACION DE VALORES DE LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD USANDO UNA COMPUTADORA.

El objetivo principal de este tema, es el de proveer un conjunto de técnicas específicas para generar con una computadora valores de las variables aleatorias a partir de las distribuciones de probabilidad más conocidas y que ya han sido presentadas en este capítulo.

Antes de detallar la forma en que se generarán por medio de la computadora estos valores, se dará una breve explicación de los procedimientos matemáticos que cimentan estas técnicas.

Se tienen dos métodos básicos para generar los valores de variables aleatorias a partir de las distribuciones de probabilidad:

- a) El método de la transformación inversa.
- b) El método de rechazo.

#### EL METODO DE LA TRANSFORMACION INVERSA.

Si se desea generar los valores  $x_i$  de las variables aleatorias a partir de cierta estadística de población cuya función de densidad de probabilidad (fdp) esté dada por -

$f(x)$ , se debe en primer lugar obtener la función de distribución acumulativa (fda) dada por  $F(x)$  (Que para el caso continuo viene dada como

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \text{ con } 0 \leq F(x) \leq 1).$$

Puesto que  $F(x)$  se define sobre el intervalo de 0 a 1 (Rango de  $F(x)$ ), se pueden generar números aleatorios distribuidos uniformemente y además hacer  $F(x) = r$ , lo que permite determinar unívocamente a  $x$ . Se sigue entonces que para cualquier valor particular de  $r$ , por ejemplo  $r_0$ , siempre es posible encontrar un valor de  $x$ ; en este caso  $x_0$ , que corresponde a  $r_0$  aplicando la función inversa de  $F$ , si es conocida. Es decir,

$$x_0 = F^{-1}(r_0).$$

Donde  $F^{-1}(x)$  es la transformación inversa de  $r$  sobre el intervalo unitario en el dominio de  $x$ . Si se generan números aleatorios correspondientes a una  $F(x)$  dada, este método se puede resumir como sigue:

$$r = F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (1)$$

Entonces  $P(X \leq x) = F(x) = P(r \leq F(x)) = P(F^{-1}(r) \leq x)$  y consecuentemente  $F^{-1}(r)$  es una variable que tiene a  $f(x)$  como fdp.

Este criterio equivale a resolver la ecuación (1), en términos de  $r$ .

Ejemplo: Genérense los valores  $x$  de variables aleatorias con una función de densidad  $f(x) = 2x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

De la ecuación (1) resulta que

$$r = F(x) = \int_0^x 2t \, dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$r = x^2.$$

Tomando la transformación inversa  $F^{-1}(r)$  (es decir, resolviendo para  $x$ ) se tiene:

$$x = F^{-1}(r) = \sqrt{r}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Por lo tanto, los valores de  $x$  con fdp  $f(x) = 2x$  se pueden generar al determinar la raíz cuadrada de los números aleatorios  $r$ .

#### EL METODO DE RECHAZO.

Si  $f(x)$  es una función acotada y  $x$  tiene además un Dominio finito, como  $a \leq x \leq b$ , entonces se puede utilizar la técnica de rechazos para generar los valores de variables aleatorias. La aplicación de esta técnica requiere que se realicen las siguientes etapas:

1. Normalizar el rango de  $f$  mediante un factor de escala  $C$ , tal que:

$$c.f(x) \leq 1 \quad ; \quad a \leq x \leq b.$$

2. Definir  $x$  como una función lineal de  $r$ , es decir,  
 $x = a + (b-a)r$ .
3. Generar parejas de números aleatorios  $(r_1, r_2)$ .
4. Se aceptarán únicamente las parejas que satisfagan la relación

$$r_2 \leq c.f[a + (b-a)r_1].$$

y se utilizará  $x = a + (b-a)r_1$  como el valor generado de la variable aleatoria.

Esta técnica se apoya en el hecho que

$$P[r \leq c.f(x)] = C.f(x)$$

En conclusión, si se elige  $x$  al azar dentro del intervalo  $[a,b]$ , se acepta de acuerdo con la ecuación dada en el numeral 2, pero se rechaza en el caso de que  $r > c.f(x)$ . La fdp de los valores  $x$  aceptados deberá ser  $f(x)$ .

Ejemplo: Utilice el método de rechazo para generar valores -

de  $x$  de las variables aleatorias con una fdp

$$f(x) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Puesto que  $x$  ha sido definida sobre el intervalo unitario,  $a = 0$  y  $b = 1$  y se tendrá en  $x = a + (b-a)r$  que  $x = r$ .

Pero  $f(r) = 2r$ , está definida en el intervalo  $0 \leq f(r) \leq 2$ .

Entonces, hay que normalizar, haciendo:  $g(r) = \left(\frac{1}{2}\right) f(r)$

Logrando así, pasar a  $f(r)$  al intervalo unitario y obteniendo que  $g(r) = r$ .

El método de rechazo consta de los siguientes pasos:

1. Generar  $r_1$  y calcular  $g(r_1)$ .
2. Generar  $r_2$  y compararlo con  $g(r_1)$ .
3. Si  $r_2 \leq g(r_1)$ , se acepta a  $r_1$  tomándolo como una  $x$  de  $f(x)$ ;

Si  $r_2 > g(r_1)$ , se rechaza a  $r_1$  y se vuelve a empezar por el paso 1.

4. Este proceso se repite hasta haber generado  $n$  valores de  $x$ .

Se representará a continuación un diagrama de flujo y un programa FORTRAN para generar valores de las variables -

aleatorias mediante una computadora digital, tratando en primer lugar las distribuciones continuas y luego las discretas.

Las proposiciones FORTRAN se presentarán como subrutinas (SUBROUTINE) y suponen la existencia de un programa principal de simulación, el cual llama a las apropiadas subrutinas mediante la proposición CALL.

A fin de evitar complicaciones notacionales al escribir subrutinas FORTRAN que contenga otras subrutinas, se establecerá que los números aleatorios están generados por una función propia del compilador y disponible en un programa almacenado y previamente programado (programa de biblioteca). Esta función se denota por RND y se supone programada de acuerdo a uno de los métodos de generación de números aleatorios ya vistos.

A fin de evitar confusiones con las variables FORTRAN que llevan subíndice, se utilizan los símbolos EX y VX para indicar, respectivamente, la media (o valor esperado) y la varianza de X, en lugar de  $E(X)$  y  $V(X)$ .

DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD.

LA DISTRIBUCION UNIFORME. (UNIFRM).

Matemáticamente la fdp para la distribución uniforme se

define como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{fuera del intervalo } (a,b). \end{cases}$$

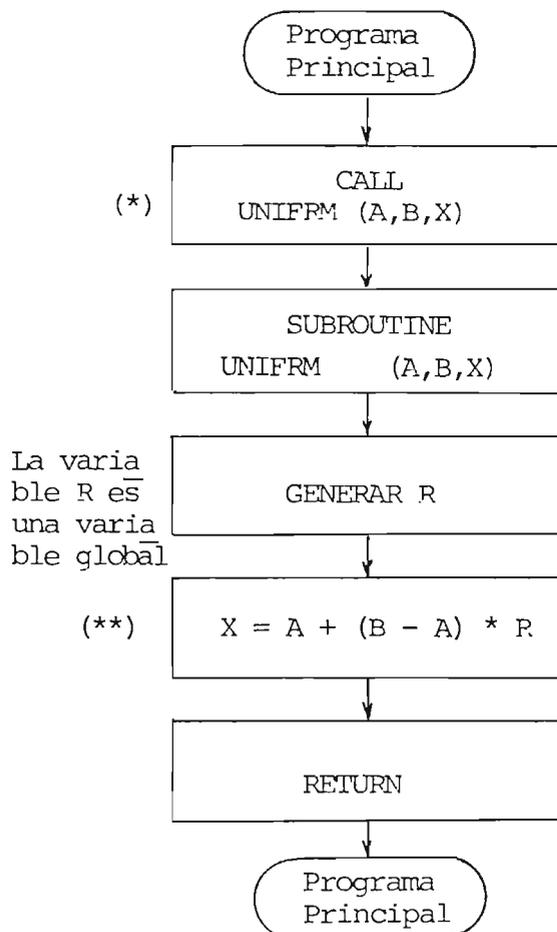
Para generar la distribución uniforme sobre cierto intervalo conocido  $(a,b)$  se deberá en primer lugar obtener la transformación inversa para la fda, así:

La fda  $F(x)$ , para una variable aleatoria  $X$ , distribuida uniformemente viene dada por:

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a} \quad , \quad 0 \leq F(x) \leq 1$$

Por lo tanto, de acuerdo con el método de la transformación inversa, se tiene:  $x = a + (b-a)r$  ,  $0 \leq r \leq 1$ .

La siguiente figura presenta un diagrama de flujo, asociado a la lógica que debe emplearse al simular una distribución uniforme para un intervalo dado  $(a,b)$ .



La subrutina para esta generación viene dada por:

```

SUBROUTINE UNIFORM (A, B, X)
R = RND(R)
X = A + (B - A) * R
RETURN
  
```

- (\*) Forma parte del programa principal UNIFORM: Nombre de la subrutina. A y B: representan los parámetros a y b respectivamente.
- (\*\*) El valor x se genera por medio de la subrutina y se regresa al programa principal con la instrucción RETURN.
- X: Representa la variable aleatoria uniforme.

La segunda proposición de esta subrutina es una función predefinida (de biblioteca) cuyo efecto es el de asignar a la variable R un número aleatorio generado por la función RND; cada vez que se llama la subrutina se genera un nuevo valor para R.

NOTA:

El nombre de la subrutina consta de seis caracteres, que es la longitud usual de los nombres de las variables, aunque algunos compiladores aceptan hasta un máximo de 15 caracteres como el de la HP-3000.

LA DISTRIBUCION EXPONENCIAL. (EXPENT).

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución exponencial, si se puede definir su fdp como:

$$f(x) = \alpha \cdot \exp(-\alpha x) \text{ con } \alpha > 0 \text{ y } x \geq 0.$$

donde  $\alpha$  es el parámetro.

La fda de X está dada por:

$$F(x) = \int_0^x \alpha \exp(-\alpha t) dt = 1 - \exp(-\alpha x) \text{ y}$$

la media se puede expresar como:  $EX = \int_0^{\infty} x \alpha \exp(-\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha}$

Luego el parámetro  $\alpha$  se puede expresar como  $\alpha = \frac{1}{EX}$

Puesto que  $F(x)$  existe explícitamente, la técnica de la transformación inversa permite desarrollar métodos directos - para la generación de valores para la variable aleatoria  $X$ .

$$\text{Por lo tanto sea } r = \exp(-\alpha x) \Rightarrow x = - \left[ \frac{1}{\alpha} \right] \ln(r)$$

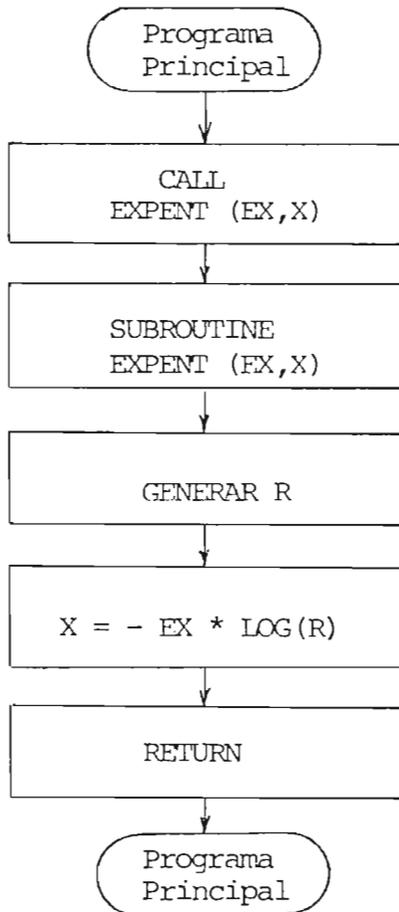
$$\Rightarrow x = - EX \ln(r)$$

Existen funciones predefinidas, para la función logaritmo natural y exponencial las cuales están denotadas por LOG y EXP respectivamente.

Por consiguiente, para cada valor del número aleatorio  $r$ , se determina un único valor para  $x$  dado por:  $x = - EX * LOG(r)$ .

Los valores de  $x$  toman magnitudes no negativas debido a que  $LOG(r) \leq 0$  para  $0 \leq r \leq 1$ , y además se ajustan a la fdp de la variable aleatoria que se comporta exponencialmente, con un valor esperado EX.

Diagrama de flujo para la generación de valores de variables aleatorias que se comportan exponencialmente (o que tienen una distribución exponencial):



Y la subrutina para dicha generación viene dada por:

```
SUBROUTINE EXPENT (EX, X)
```

```
R = RND (R)
```

```
X = - EX * LOG (R)
```

```
RETURN
```

Conviene aclarar que en una computadora digital, el cálculo del logaritmo natural involucra una expansión en serie de potencias (o una técnica equivalente de aproximación) para cada valor de la variable aleatoria que se deba generar; sin embargo, el método expuesto conserva una ligera diferencia en rapidez con respecto a otros métodos utilizados para el mismo propósito.

#### LA DISTRIBUCION GAMMA.

La función Gamma puede ser descrita por la siguiente fdp:

$$f(x) = \frac{\alpha^k x^{(k-1)} e^{-\alpha x}}{(k-1)!}$$

con parámetros  $\alpha > 0$  y  $k > 0$ , tomando  $x \geq 0$ .

La media y la varianza de esta distribución se expresan por:

$$EX = \frac{k}{\alpha} \quad y \quad VX = \frac{k}{\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{EX}{VX} \quad y \quad K = \frac{(EX)^2}{VX}$$

Debido a que para una distribución gamma no es posible formular explícitamente una función de distribución acumulativa, debe considerarse un método alternativo para gene

rar valores de variable aleatoria con distribución gamma.

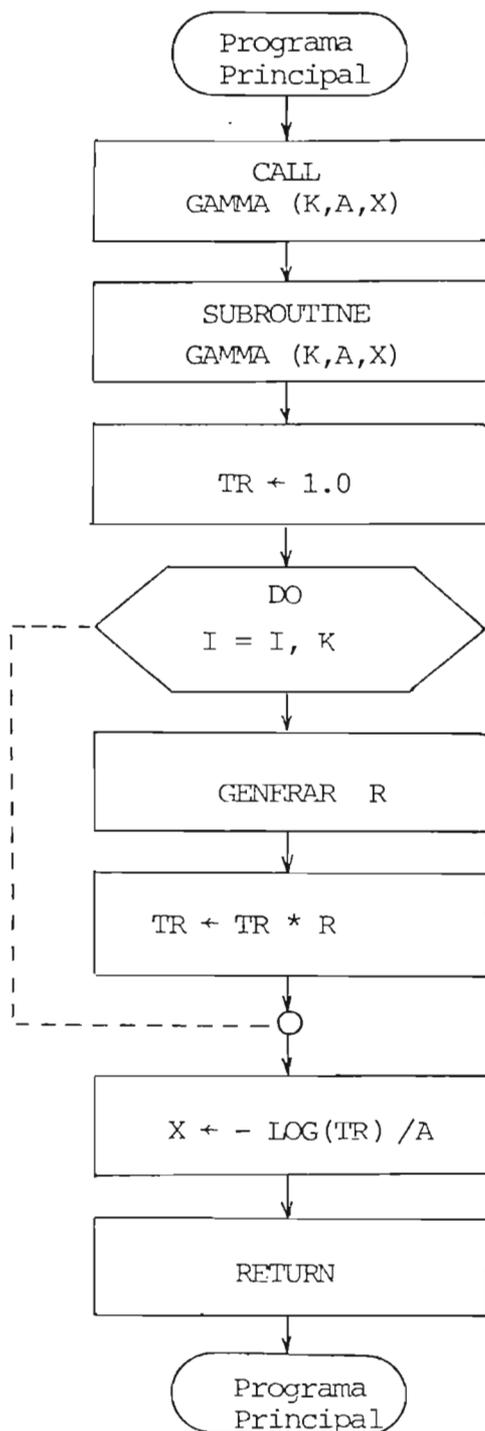
Tómese la suma de los  $k$  valores de variable aleatoria con distribución exponencial  $x_1, x_2, \dots, x_k$  cuyo valor esperado es el mismo e igual a  $\frac{1}{\alpha}$ . Entonces el valor  $x$  de la variable aleatoria se puede expresar como:

$$x = \sum_{i=1}^k x_i = -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k \text{LOG}(r_i). \text{ Y para efectos del}$$

cálculo en el computador se substituye por:

$$x = -\frac{1}{\alpha} \left( \text{LOG} \prod_{i=1}^k r_i \right).$$

En el siguiente diagrama de flujo, para generar valores de variable aleatoria con distribución gamma, se utilizan  $A$  y  $K$  para denotar  $\alpha$  y  $k$ , respectivamente.



Y la subrutina FORTRAN en la que K toma únicamente valores enteros viene dada por:

```

SUBROUTINE GAMMA (K, A, X)
  TR = 1.0
  DO 5 I = 1, K
    R = RND(R)
  5 TR = - LOG(TR) / A
  RETURN
  
```

## LA DISTRIBUCION NORMAL. (NORMAL)

Un método para generar valores de una variable aleatoria distribuidos en forma normal es el del límite central, - que está basado en el teorema del límite central, el cual - postula lo siguiente:

La distribución de probabilidad de la suma de N valores de variable aleatoria  $x_i$  independientes pero idénticamente - distribuidos con medias respectivas  $\mu_i$  y varianzas  $\sigma_i^2$ , se - aproxima asintóticamente a una distribución normal, a medida que el valor de N aumenta y, que dicha distribución tiene como media y varianza respectivamente, a:

$$\mu = \sum_{i=1}^N \mu_i \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \quad .$$

Se presentan a continuación algunos conceptos sobre la distribución normal.

Si la variable aleatoria X tiene una fdp dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad -\infty < x < \infty$$

entonces X tiene una distribución normal con parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ .

Y la media y la varianza vienen dadas por:  $EX = \mu$  y  $VX = \sigma^2$ .

La fda de X no existe en forma explícita. Por otra parte, si los parámetros tienen los valores  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$  la distribución se llama normal estándar y la fdp viene dada por:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} z^2\right], \quad -\infty < z < \infty$$

Y cualquier distribución normal puede estandarizarse mediante la sustitución

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (1)$$

A fin de simular una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  conocidas, se presenta la siguiente interpretación del teorema del límite central:

Si  $r_1, r_2, \dots, r_N$  representan variables aleatorias independientes, cada una de las cuales posee la misma distribución de probabilidad caracterizada por  $E(r_1) = \theta$  y  $V(r_i) = \sigma^2$ , entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left[ a < \frac{\sum_{i=1}^N r_i - N\theta}{\sqrt{N} \sigma} < b \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2} z^2} dz,$$

donde:

$$N\theta = E \left( \sum_{i=1}^N r_i \right)$$

$$N\sigma^2 = V \left( \sum_{i=1}^N r_i \right)$$

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^N r_i - N\theta}{\sigma\sqrt{N}}$$

[ En estas expresiones se ha usado la escritura usual para la media y la varianza, es decir,  $E(X)$  y  $V(X)$  ]

Tanto de la definición de la distribución normal estándar como de la ecuación (1), se sigue que  $Z$  es un valor de variable aleatoria con distribución normal estándar.

El procedimiento para simular valores normales requiere el uso de la suma de  $K$  valores de variable aleatoria distribuidos uniformemente en el intervalo ( $a = 0$ ,  $b = 1$ ); es decir, la suma de  $r_1, r_2, \dots, r_k$ , con cada  $r_i$  definida en el intervalo  $0 < r_i < 1$ . Se encuentra entonces que:

$$\theta = \frac{a + b}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2} .$$

$$\sigma = \frac{b - a}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}} .$$

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^K r_i - \frac{K}{2}}{\sqrt{\frac{K}{12}}} \quad (2)$$

Pero, por definición,  $Z$  es un valor de variable aleatoria con distribución normal estándar que se puede escribir en la forma sugerida por la ecuación (1), donde  $x$  es un valor de variable aleatoria distribuido forma normal que se va a simular, con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Igualando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^K r_i - \frac{K}{2}}{\sqrt{\frac{K}{12}}}, \text{ y resolviendo para } x, \text{ se}$$

tiene:

$$x = \sigma \left( \frac{12}{K} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^K r_i - \frac{K}{2} \right) + \mu .$$

Por lo tanto, con esta última ecuación se puede generar valores de variable aleatoria normalmente distribuidos cuya media sea igual a  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ ; para lo cual bastará con sumar  $K$  números aleatorios distribuidos en el intervalo de 0 a 1, y sustituir el valor de esta suma junto con los valores de  $\mu$  y  $\sigma$  en la ecuación anterior. Con un valor de  $K = 12$  se logra cierta ventaja computacional, aunque para mayor precisión podría usarse  $K = 24$ , teniendo en cuenta que el tiempo de máquina también aumenta al aumentar  $K$ .

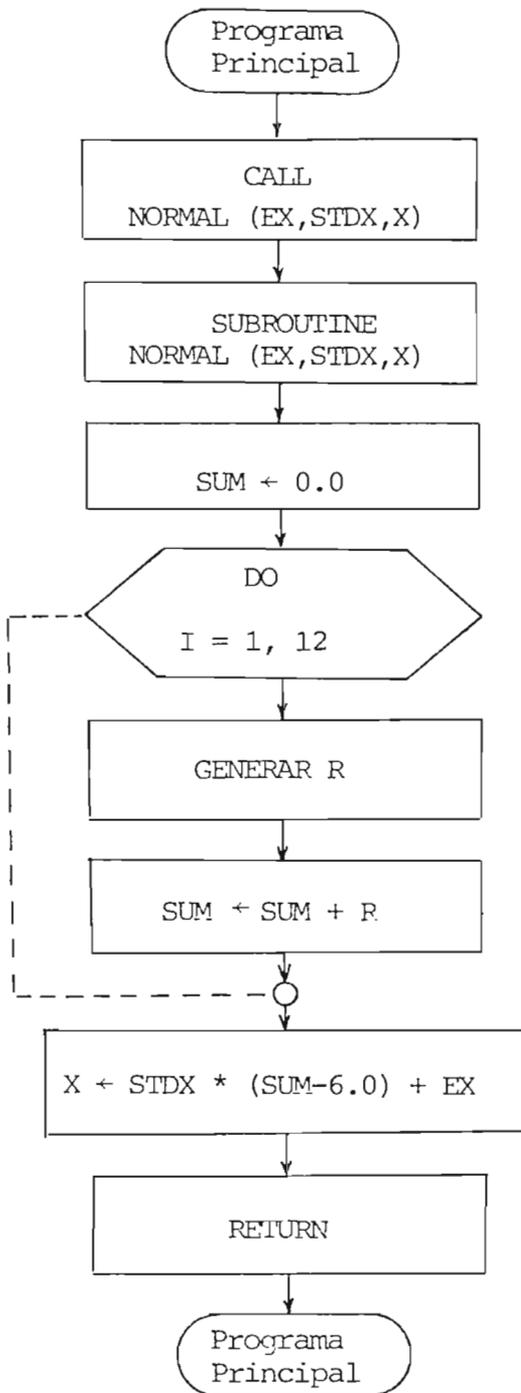


Diagrama de Flujo para la generación de valores de variable aleatoria con distribución normal. (K = 12).

En la subrutina se usa la siguiente notación:

$$EX = \mu$$

$$STD = \sigma$$

$$SUM = \sum R$$

La subrutina viene dada por:

SUBROUTINE NORMAL (EX, STD, X)

SUM = 0.0

DO 5 I = 1,12

R = RND(R)

5 SUM = SUM + R

X = STD \* (SUM - 6.0) + EX

RETURN

## DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE PROBABILIDAD.

## LA DISTRIBUCION BINOMIAL: (BINOM)

La distribución Binomial proporciona la probabilidad de que un evento o acontecimiento tenga lugar  $x$  veces en un conjunto de  $n$  ensayos, donde la probabilidad de éxito, en cada ensayo, está dada por  $p$ . La función de probabilidad para esta distribución se expresa como:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad \text{donde } x \text{ se toma como un entero -}$$

finito entre  $0, 1, \dots, n$  y al que se le asocia el valor  $q = (1 - p)$ . La media y la varianza de la variable binomial  $X$  son:

$$EX = np \quad ; \quad VX = npq.$$

$$\Rightarrow p = \frac{EX - VX}{EX} \quad \text{y} \quad n = \frac{(EX)^2}{(EX - VX)} \quad , \quad \text{con } EX \quad \text{y} \quad VX \text{ conocidas.}$$

La distribución normal proporciona una buena aproximación para la distribución binomial, para  $n$  grande. Puesto que con la distribución normal resulta posible manipular valores negativos, los cuales no interesan, deberá ser despreciablemente pequeña la probabilidad de registrar observaciones negativas. En la práctica esto significa que el valor esperado deberá ser por lo menos tres veces mayor que la des

viación estándar, es decir:

$$np \geq 3 \quad (npq)^{1/2} \Rightarrow n \geq 9q/p$$

Los valores de variable aleatoria con distribución binomial, en el caso que  $n$  sea moderado, se pueden generar mediante la reproducción de ensayos de Bernoulli siguiendo el método de rechazos. Este método empieza con valores conocidos de  $p$  y  $n$  y consiste en generar  $n$  números aleatorios después de fijar  $x_0 = 0$ . Para cada número aleatorio  $r_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) se efectúa una prueba y la variable  $x_i$  se incrementa de acuerdo con el siguiente criterio:

$$x_i = x_{i-1} + 1 \quad \text{si } r_i \leq p \quad ; \quad x_i = x_{i-1} \quad \text{si } r_i > p.$$

Después de haber generado  $n$  números aleatorios, el valor  $x_n$  será igual al valor de la variable aleatoria con distribución binomial  $x$ . Este proceso se puede repetir tantas veces como valores binomiales se requieran.

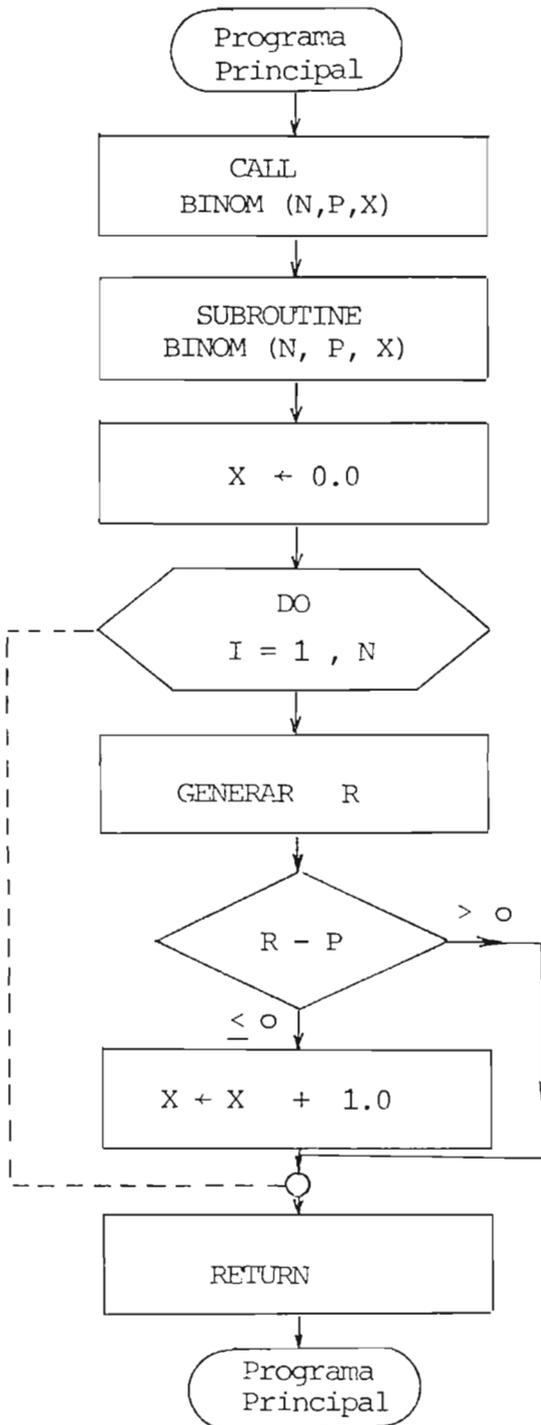


Diagrama de flujo para la generación de valores de variable aleatoria con distribución binomial.

Subrutina FORTRAN para generar valores de variable aleatoria con distribución binomial.

```

SUBROUTINE BINOM (N, P, X)
  X = 0.0
  DO = RND(R)
  IF (R - P) 6, 6, 7
6 X = X + 1.0
7 CONTINUE
RETURN
  
```

## LA DISTRIBUCION GEOMETRICA. (GEOMET)

Los valores de variable aleatoria que se generan al contar el número de fracasos en una sucesión de ensayos de Bernoulli antes de que ocurra el primer éxito, son valores de variable aleatoria que se ajustan a una distribución geométrica; - la cual queda descrita por la siguiente función de probabilidad:

$$f(x) = pq^x \quad , \quad x = 0, 1, 2, \dots, \text{ con parámetro } p.$$

y la fda está definida por:

$$F(x) = \sum_{X=0}^x pq^X \quad , \quad X = 0, 1, 2, \dots, x.$$

Puesto que por definición se tiene que  $F(x) = P(X \leq x)$ , y como  $P(X = 0) = F(0) = p$ , el rango de  $F(x)$  es  $p \leq F(x) \leq 1$ . Por otra parte  $P(X > x) = 1 - F(x) \Rightarrow P(X > 0) = q$ , y además  $1 - F(x) = q^{x+1}$ . La Esperanza y la varianza de la variable con distribución geométrica están dados por:

$$EX = \frac{q}{p} \quad \text{y} \quad VX = \frac{q}{p^2} = \frac{EX}{p} \quad .$$

El parámetro  $p$ , se puede encontrar en función de la esperanza como:

$$p = \frac{1}{1 + EX} \quad .$$

Para generar valores de una variable aleatoria con distribución geométrica se emplea la técnica de la transforma -ción inversa y la ecuación

$1 - F(x) = q^{x+1}$  . Como el rango de  $\frac{1 - F(x)}{q}$  es unitario, -resulta que  $r = q^x$  con  $r = \frac{1 - F(x)}{q}$  y en consecuencia:

$$x = \frac{\text{LOG}(r)}{\text{LOG}(q)} , \text{ donde } x \text{ siempre se } \underline{\text{re}}$$

dondea al entero próximo menor.

El diagrama de flujo y la subrutina FORTRAN para esta -distribución se especifican a continuación, donde Q es la probabilidad fija dada para los fracasos.

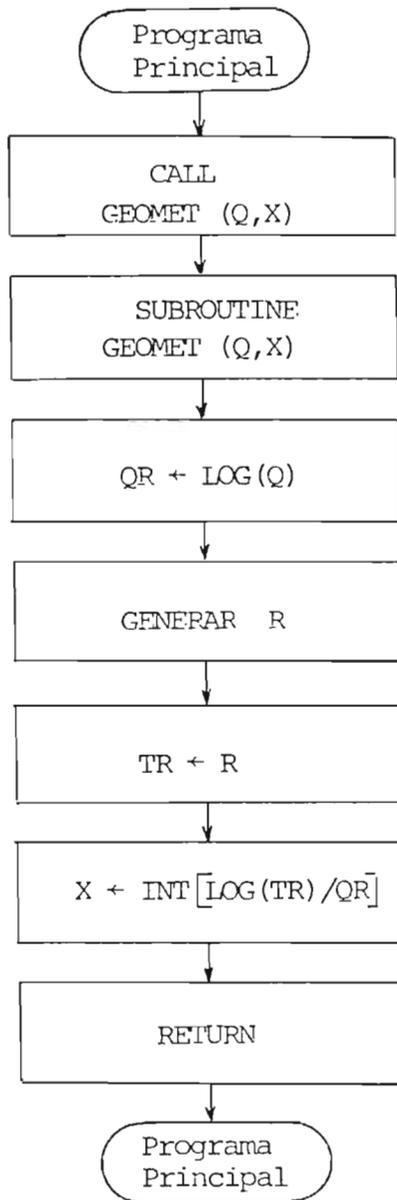


Diagrama de flujo para generar valores de variable aleatoria con distribución geométrica.

Subrutina FORTRAN para la generación de valores de variable aleatoria con distribución geométrica:

```
SUBROUTINE GEOMET (Q, X)
```

```
QR = LOG(Q)
```

```
R = RND(R)
```

```
TR = R
```

```
X = INT (LOG (TR) / QR)
```

```
RETURN
```

## LA DISTRIBUCION DE POISSON (POISON).

Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución de Poisson con parámetro  $\lambda$ , si su fdp está dada por:

$$f(x) = \exp(-\lambda) \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \quad \text{son } x = 0, 1, 2, \dots \text{ y } \lambda > 0.$$

Para simular una distribución de Poisson con parámetro  $\lambda$ , se puede usar la conocida relación entre las distribuciones exponenciales y las de Poisson en la que se afirma que la probabilidad de que ocurran  $x$  eventos en el tiempo  $t$  viene dada por:

$$f(x) = \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^x}{x!} ; \text{ para todo } x \text{ y para todo } t.$$

En particular, el número de eventos  $x$  que ocurren durante un tiempo unitario seguirán una distribución de Poisson, con esperanza  $\lambda$ .

Un método para generar valores de variable aleatoria con distribución de Poisson deberá considerar la generación de intervalos de tiempo  $t_1, t_2, \dots$  distribuidos en forma exponencial con valor esperado igual a 1; acumulándolos hasta que su suma exceda al valor de  $\lambda$ .

En términos matemáticos, el valor Poissoniano se determina haciendo uso de la desigualdad:

$$\sum_{i=0}^x t_i \leq \lambda < \sum_{i=0}^{x+1} t_i \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

donde los valores de la variable aleatoria  $t_i$  se generan por medio de la fórmula:  $t_i = -\text{LOG}(r_i)$  con una media unitaria.

Sin embargo, un método más rápido para generar los valores Poissonianos  $x$  es el que consiste en reformular la ecuación anterior como sigue:

$$\prod_{i=0}^x r_i \geq \exp(-\lambda) > \prod_{i=0}^{x+1} r_i$$

Representando a  $\lambda$  por  $P$  se obtiene la siguiente subrutina FORTRAN para generar valores de variable aleatoria con distribución de Poisson:

```

SUBROUTINE POISON (P,X)
X = 0.0
B = EXP(-P)
TR = 1.0
5 R = RND(R)
TR = TR * R
IF (TR - B) 10, 8, 8
8 X = X + 1.0
GO TO 5
10 RETURN.

```

A continuación se presentan programas que generan valores de diferentes distribuciones de probabilidad y los resultados obtenidos.

Listing of exponencial on 28/10/84 at 19:53

```
10 REM PROGRAM EXPONENCIAL
20 OPEN 6.4:
   CMD 6
30 REM ESTE PROGRAMA GENERA VALORES DE DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL
40 R2=-1:
   E1=2
50 PRINT CHR$(16)"14":"tabla de valores con distribución exponencial"
60 PRINT CHR$(16)"25x":
70 PRINT CHR$(16)"47r"
80 FOR I=1 TO 50
90   R2=RND(R2)
100  X2=-E1%LOG(R2)
110  PRINT CHR$(16)"19":X2;
120  PRINT CHR$(16)"46":R2
130 NEXT I
140 CLOSE 6
150 END
```

TABLA DE VALORES CON DISTRIBUCION EXPONENCIAL

X	R
34.649501	2.99196472E-08
2.22472758	.328780872
.0425206412	.978964886
.220167954	.895758909
3.65230806	.161031701
7.59669014	.0224078245
6.61928594	.0365292135
4.10876201	.128172149
1.36928499	.504270478
.785906647	.675261268
.486439119	.784099338
3.72666237	.155153367
1.33251969	.513826032
3.91807002	.140994413
.08642111	.957769718
.87824595	.644601505
1.56956381	.45621782
3.65837722	.160543778
1.03478079	.596096967
3.70575053	.156785717
4.06681245	.1307581
.178357539	.914467655
.43848803	.803157645
1.14906946	.562966738
1.27459813	.528718519
.122328068	.946668326
.521430265	.770500402
.0661873213	.96744731
.113218266	.944967132
1.32929891	.514469783
.216717146	.900031748
3.38264757	.18339818
1.85156059	.396228072
2.96828553	.224668082
.608436503	.737859845
2.84977693	.240563329
3.38229249	.183163406
13.74228635	1.03923897E-03
1.547335339	.401256324
7.02214837	.0296648867
1.623241804	.463998542
.938898719	.820844946
.586871978	.786871978
1.85671649	.393971649
3.92121517	.0369905732
2.036603039	.3539903039
1.733071883	.4744471883
2.103071883	.3444471883
.857188307	.857188307
2.036603039	.3539903039

Listing of uniforms on 25/10/64 at 20-41

```
10 REM PROGRAM UNIFORME
15 OPEN 3,4
16 R1=3
   R2=5
   R3=-1
20 REM ESTE PROGRAMA GENERA VALORES CON DISTRIBUCION UNIFORME
30 PRINT #5,CHR$(16),"15", "tabla de valores con distribucion uniforme"
40 PRINT #5,CHR$(16),"25x"
50 PRINT #5,CHR$(16),"47r"
60 FOR I=1 TO 50
70   R1=RND*(R1)
80   X1=R1+(R2-R1)*R1
90   PRINT #5,CHR$(16),"13" (X1)
91   PRINT #5,CHR$(16),"48" (R1)
92 NEXT I
95 CLOSE 3
100 END
```

TABLA DE VALORES CON DISTRIBUCION UNIFORME

X	R
3.00000006	2.99196472E-08
3.65756174	.328788872
4.95792817	.978964886
4.79151782	.895758989
3.3228634	.161031701
3.04481565	.0224078245
3.07385843	.0365292135
3.2563443	.128172149
4.00854096	.504278478
4.35012254	.675061268
4.56819868	.784099338
3.31030673	.155153367
4.02725286	.513626032
3.28198863	.148994413
4.91541944	.957789718
4.28920301	.644601585
3.91243564	.45621782
3.32108756	.168543778
4.19219398	.586096987
3.31357144	.156785717
3.2615162	.1307581
4.82881531	.914407655
4.68631569	.803157845
4.12593348	.562966738
4.05743704	.528718519
4.88133785	.840668926
4.54100081	.770500402
4.93489562	.96744791
4.88993427	.944967132
4.02893957	.514469783
4.8000035	.980001748
3.33679636	.16839818
3.79245615	.396228872
3.44933004	.22466582
4.47539969	.737699845
3.48107058	.24853525
3.37232681	.186163486
3.00287466	1.03733897E-08
3.92253265	.461266324
3.05972977	.0298648867
3.88797709	.443988542
4.25888389	.625441946
4.4891585	.744579249
3.87353415	.436767073
3.13981147	.0699057352
3.71114347	.355571734
4.05563929	.547819644
3.6686935	.33034675
4.2755593	.637779649
3.73172664	.365863316

Listing of Poisson on 29/10/84 at 21:26

```
10 REM PROGRAM POISSON
20 OPEN 12,4
30 REM ESTE PROGRAMA GENERA VALORES CON DISTRIBUCION DE POISSON
50 PRINT #12,CHR$(16)"14";"tabla de valores con distribucion de Poisson"
55 FOR W=1 TO 3:
    PRINT #12:
    NEXT W
60 PRINT #12,CHR$(16)"21x";
70 PRINT #12,CHR$(16)"46t3"
80 FOR I=1 TO 50
81     T3=1:
        R8=1:
        X8=0:
        P3=20
90     R8=RND(R8)
100    T3=T3*R8
110    IF (T3-EXP(-P3))<0 GOTO 140
120    X8=X8+1
130    GOTO 90
140    PRINT #12,CHR$(16)"19";X8,
150    PRINT #12,CHR$(16)"48";T3
160 NEXT I
170 CLOSE 12
180 END
```

TABLA DE VALORES CON DISTRIBUCION DE POISSON

X	T3
23	1.59209275E-11
17	1.90348426E-09
22	1.55517393E-09
21	1.921363E-09
24	5.76524678E-10
16	1.27421966E-09
20	1.70546242E-09
18	1.25505048E-09
19	1.10406329E-09
20	6.74076591E-10
24	1.061341E-10
19	8.28123542E-10
22	9.48970956E-10
22	7.15627267E-10
22	7.25730269E-10
24	1.96148393E-09
25	1.23120351E-09
17	3.20105243E-10
21	1.52487697E-09
16	1.96292305E-09
15	4.84674911E-10
23	3.75716469E-10
15	9.67062493E-10
13	1.17243513E-09
21	1.66430962E-09
20	7.66261133E-10
24	1.3425131E-09
25	1.55765691E-09
19	1.67989809E-09
13	6.44978612E-10
24	7.95502053E-10
24	6.51241463E-10
15	9.35712246E-10
18	1.19423265E-09
17	9.48153614E-10
17	1.59499092E-09
29	1.17269054E-09
26	1.04561042E-09
19	1.5261796E-09
12	3.41721926E-10
22	1.33314856E-09
28	1.42000874E-09
12	1.73005184E-09
17	5.36967565E-10
24	6.87236534E-10
26	8.52282391E-10
12	1.17567929E-09
17	6.24865776E-10
14	2.62211547E-10
25	2.14616685E-10

Listing of binomial on 30/10/84 at 11:45

```
10 REM PROGRAM BINOMIAL
20 OPEN 9:4
30 REM ESTE PROGRAMA GENERA VALORES CON DISTRIBUCION BINOMIAL
40 N=15:
   RS=-1:
   P1=0.5:
   NS=0
50 PRINT #9,CHR$(16)*"15": "tabla de valores con distribucion binomial"
55 FOR W=1 TO 3:
   PRINT #9:
   NEXT W
60 PRINT #9,CHR$(16)*"21": " "
70 PRINT #9,CHR$(16)*"40": " "
80 FOR I=1 TO 50:
   RS=0
90   FOR J=1 TO N
100     RS=RS+P1
110     IF (RS-P1)<=0 THEN
       NS=NS+1
120   NEXT J
130   PRINT #9,CHR$(16)*"15": NS:
140   PRINT #9,CHR$(16)*"40": RS
150 NEXT I
160 CLOSE #9
170 END
```

TABLA DE VALORES CON DISTRIBUCION BINOMIAL

X	R
8	.957709718
4	.514469783
11	.0699057352
9	.728991898
9	.424791679
7	.936074588
7	.338019112
6	.158735545
4	.737044139
8	.860055748
8	.269986207
7	.756393964
8	.0220915013
8	.47336075
6	.965444245
8	.671144341
9	.900956639
7	.0526207
7	.951030187
10	.594625287
9	.148507633
7	.434340045
4	.536266009
7	.195282495
5	.45063785
6	.365638466
8	.185164737
8	.389319332
7	.648957531
6	.491288876
9	.806137061
6	.759012432
6	.621512803
6	.587764655
9	.630298113
9	.44517854
5	.891155043
5	.739090901
7	.650684346
10	.086173213
10	.239914631
6	.197129617
7	.201837396
10	.281094479
10	.15501396
4	.744242006
8	.892239602
7	.530051767
7	.769236306
6	.265661632

Listing of normal on 29/10/84 at 20:03

```
10 REM PROGRAM NORMAL
20 OPEN 8,4:
   CMD 8
30 REM ESTE PROGRAMA GENERA VALORES DE DISTRIBUCION NORMAL
40 K2=12:
   R4=-1:
   DX=1:
   E2=0
50 PRINT CHR$(16)"16": "tabla de valores con distribucion normal"
60 FOR W=1 TO 3:
   PRINT :
   NEXT W
70 PRINT CHR$(16)"25x":
80 PRINT CHR$(16)"47sm"
90 FOR I=1 TO 50
100   SM=0
110   FOR J=1 TO K2
120     R4=RND(R4)
130     SM=SM+R4
140   NEXT J
150   X4=DX*(SM-(K2/2))+E2
160   PRINT CHR$(16)"19": X4,
170   PRINT CHR$(16)"40": SM
180 NEXT I
190 CLOSE 8
END
```

TABLA DE VALORES CON DISTRIBUCION NORMAL

X	SM
-1.32977076	4.67022924
.0378663093	6.03786631
1.33430083	7.33430083
-1.76724738	4.23275262
-.323224314	5.67677569
-.487502376	5.51249763
-.43307264	5.56692736
1.72570238	7.72570238
.836400617	6.83640062
.721464571	6.72146457
.817161527	6.81716153
.352705196	6.3527052
-.0390623994	5.96093761
.242181215	6.24218122
-.0399229769	5.96007702
-.363844611	5.63615539
-1.89277561	4.10722439
.165964436	6.16596444
.571447257	6.57144726
.338960543	6.33896054
-9.18623619E-03	5.99081377
-1.46896939	4.53103061
1.5608753	7.56087531
1.06397065	7.06397065
-1.65415775	4.34584225
-1.09647893	4.90352107
-1.73126045	4.26873955
.859561052	6.85956106
.871736202	6.8717362
1.19991376	7.19991376
1.46473932	7.46473932
.271713821	6.27171382
1.44969696	7.44969696
-1.5802659	4.4997341
-.494047577	5.50595242
1.12048532	7.12048532
.628030952	6.62803095
-.273037048	5.72696295
.145827107	6.14582711
.383775482	6.38377548
-.264116947	5.73586305
1.96743387	7.96743387
-1.57293616	4.42706384
.326347852	6.32634785
-.817034747	5.18296525
5.83535805E-03	6.00533536
.784985954	6.78498596
.928519068	6.92851907
-.0937697105	5.90623029
-.635070993	5.36492901

Listing of gamma on 29/10/84 at 21:37

```
10 REM PROGRAM GAMMA
20 OPEN 7,4
30 REM ESTE PROGRAMA GENERA VALORES DE DISTRIBUCION GAMMA
40 K1=4.
   T1=1:
   R3=2:
   R3=-1
50 PRINT #7,CHR$(16)"16": "tabla de valores con distribucion gamma"
60 PRINT #7
70 PRINT #7
80 PRINT #7,CHR$(16)"25x":
90 PRINT #7,CHR$(16)"47t1"
100 FOR I=1 TO 50
101   T1=1
110   FOR J=1 TO K1
120     R3=RND(R3)
130     T1=T1*R3
140   NEXT J
150   IF (T1=0 OR T1<=10-8) THEN
       T1=1:
       GOTO 110
160   X3=-LOG(T1)/R3
170   PRINT #7,CHR$(16)"13":X3,
180   PRINT #7,CHR$(16)"46":T1
190 NEXT I
200 CLOSE 7
210 END
```

TABLA DE VALORES CON DISTRIBUCION GAMMA

X	T1
5.49426154	1.68944891E-05
1.59207753	.0414132226
1.55381419	.0447068572
2.49210034	6.8452474E-03
1.45881188	.0540619986
.49613596	.370733456
1.30400307	.073681307
2.0740084	.0157957116
6.41854313	2.6602612E-06
1.20227226	.0903066197
2.70202872	4.49829235E-03
1.54868053	.045168242
3.16237913	1.79139925E-03
1.36143407	.0656860876
1.65372904	.0386609113
1.54597318	.0454134775
3.39585658	1.12304317E-03
1.42792242	.0575072157
4.34342574	1.68790629E-04
1.55868306	.044273626
1.06008289	.120011731
3.04321791	2.27349764E-03
.300780007	.46693743
.639197367	.278483982
1.94851166	.0203022547
1.40033549	.0517841599
1.21316683	.0888601988
2.90575065	2.9929334E-03
1.18982106	.0925837056
1.80045155	.0272990576
1.35929204	.0659680937
1.48216963	.0515945407
.855131183	.180818346
1.97236608	.0193564
1.37233729	.0642692123
2.68811955	4.62518408E-03
1.42090415	.0583107802
1.48835816	.0509598953
3.30960048	1.33449680E-03
1.31944355	.0714407321
1.49157318	.0506332722
1.8304584	.0257089318
1.48482111	.0513216693
2.27553201	.0105559666
1.08011687	.115298169
4.51786913	1.19077232E-04
1.79847053	.0274069933
3.85137696	4.51581852E-04
2.82082518	3.54700971E-03
3.93688831	3.76317556E-04

Para mostrar una aplicación de la generación de números aleatorios, utilizando la función generadora de la computadora; considérese el problema de encontrar el valor de  $\pi$  (aproximado), através del método de la aguja de Buffon, simulando los lanzamientos de la aguja en la computadora.

En general, el método establece que si se tiene un conjunto de líneas paralelas coplanares separadas entre si por una distancia  $D$ , y una aguja de longitud  $L$  (con  $D > L$ ), es lanzada al azar sobre la superficie que contiene a las paralelas, entonces la probabilidad de que la aguja corte a una cualquiera de las paralelas es:  $P = \frac{2L}{\pi D}$ .

Este resultado se justifica mediante el siguiente análisis: Si un extremo de la aguja cae a una distancia  $b$  ( $b < L$ ) de cualquier paralela, la probabilidad de que la aguja corte a una paralela es la misma en todos los casos. (Ver Figura 1).

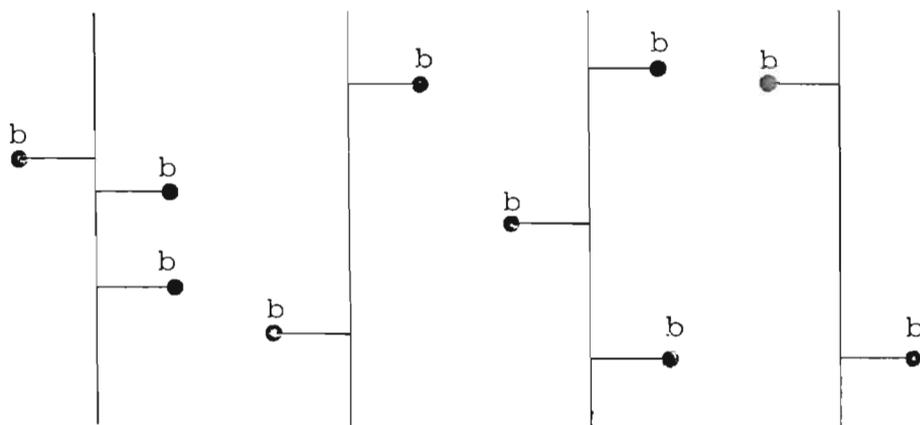


FIGURA 1. ( $b < L$ ).

Por lo anterior, la cuestión se simplifica si se discute la probabilidad en los puntos del segmento OA de longitud  $D/2$ , comprendido entre el punto medio entre dos paralelas consecutivas y una de ellas. (Ver Figura 2).

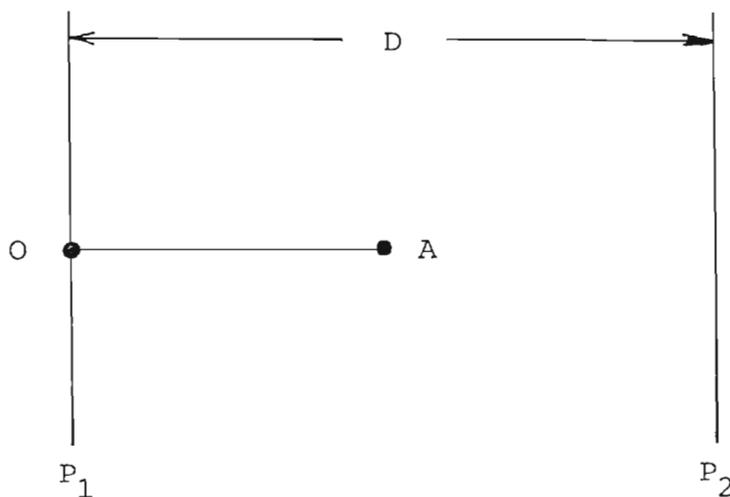


FIGURA 2. ( $OA = D/2$ )

En general, deben considerarse dos casos:

Caso I : si  $0 < L \leq \frac{D}{2}$

Caso II: si  $\frac{D}{2} < L < D$

Se estudiará únicamente el caso I; existen dos variables independientes  $B$  y  $\theta$ , donde  $B$  representa al punto sobre el segmento OA (Ver Figura 3) ocupado por un extremo de la aguja y  $\theta$  el ángulo que forman la aguja con el segmento OB.

Además,  $B$  es una variable uniforme en  $\left[0, \frac{D}{2}\right]$  - ya que en todo el segmento  $OA$  ningún punto tiene preferencia sobre otro, es decir, el extremo de la aguja puede ocupar indistintamente cualquier punto del segmento  $OA$  de longitud  $\frac{D}{2}$ . Y  $\theta$  también es una variable independiente en  $[0, \pi]$ . (Ver Figura 3).

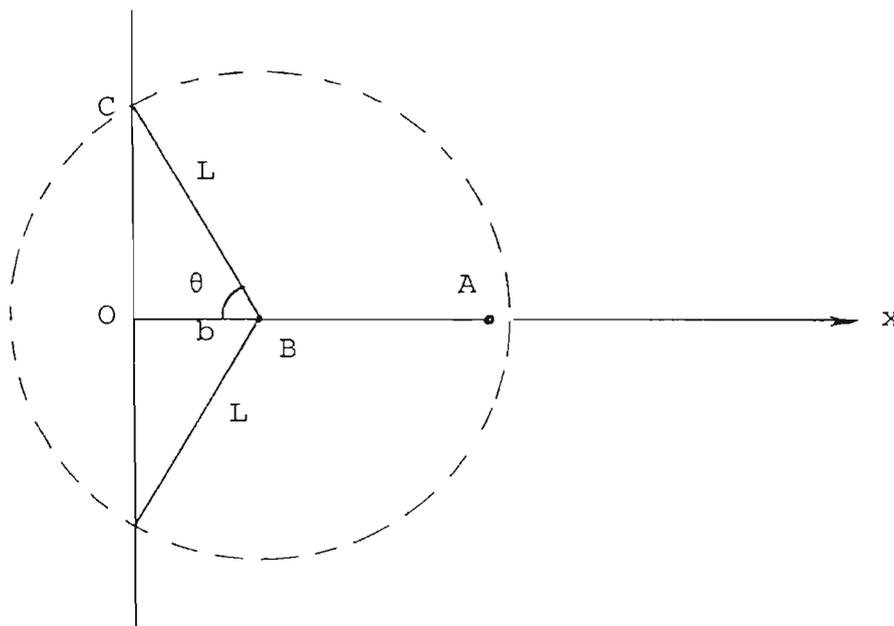


FIGURA 3.

En virtud de la simetría se puede considerar que  $\theta$  está variando indistintamente entre  $0$  y  $\pi$  radianes.

Considerando que el segmento  $OA$  se encuentra sobre el eje real  $x$  y que  $O$  coincide con el origen de coordenadas se puede escribir la fdp de  $B$  como:

$$f_B(b) = \begin{cases} \frac{1}{D/2}, & \text{si } 0 \leq b \leq \frac{D}{2} \\ 0, & \text{si } b \text{ está en otro lugar} \end{cases}$$

La fdp de  $\theta$  vendría dada por:

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\Pi}, & \text{si } 0 \leq \theta \leq \Pi \\ 0, & \text{para cualquier otro } \theta. \end{cases}$$

De la figura 3 se observa que  $\theta$  se puede escribir en función de  $b$  y  $L$ , de la siguiente manera:

$$\theta = \text{Arc Cos} \left( \frac{b}{L} \right) \quad (\text{del triángulo BOC}).$$

Y además, de la misma figura se deduce que la aguja - cortará a la paralela únicamente si las siguientes condiciones se cumplen simultáneamente:

$$\text{a) } 0 \leq \theta \leq \text{arc cos} \left( \frac{b}{L} \right)$$

$$\text{b) } 0 \leq b \leq L$$

Entonces la probabilidad de que la aguja corte a la paralela se puede establecer en términos de la función de densidad de probabilidad conjunta de la variable bidimensional  $(B, \theta)$ , la cual vendrá dada por:

$$f(b, \theta) = f_B(b) \cdot f_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi D}, & \text{si } 0 \leq b \leq \frac{D}{2} \wedge 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\text{Así, } P = P \{\text{corte}\} = P \left\{ 0 \leq b \leq L \wedge 0 \leq \theta \leq \arccos \left( \frac{b}{L} \right) \right\}$$

$$= \int_{b=0}^{b=L} \int_{\theta=0}^{\theta=\arccos \left( \frac{b}{L} \right)} \frac{2}{\pi D} \, d\theta \, db.$$

$$= \frac{2}{\pi D} \int_{b=0}^{b=L} \left[ \theta \right]_0^{\arccos \left( \frac{b}{L} \right)} \, db$$

$$= \frac{2}{\pi D} \int_{b=0}^{b=L} \arccos \left( \frac{b}{L} \right) \, db$$

$$= \frac{2}{\pi D} \left[ b \arccos \left( \frac{b}{L} \right) - \sqrt{L^2 - b^2} \right]_{b=0}^{b=L}$$

$$P = \frac{2L}{\pi D}$$

Tomando el caso particular  $D = 2L$ , entonces en  $P = \frac{2L}{\Pi D}$  se tiene:  $P = \frac{1}{\Pi}$ . De acuerdo con la teoría de probabilidades, si  $N$  es el número de veces que se lanza la aguja, y  $n$  el número de veces que corta a una paralela, entonces el cociente  $\frac{n}{N}$  tiende a la probabilidad  $P$  cuando  $N$  toma valores suficientemente grandes; bajo esta consideración  $P \approx \frac{n}{N}$ , es decir,

$$\frac{1}{\Pi} \approx \frac{n}{N} \Rightarrow \Pi \approx \frac{N}{n}$$

que es la relación a utilizar para encontrar un valor aproximado para  $\Pi$ .

Para simular el proceso de lanzar la aguja, conviene considerar la Figura 4, donde se muestra una posición cualquiera que puede tomar la aguja al caer cerca de una paralela.

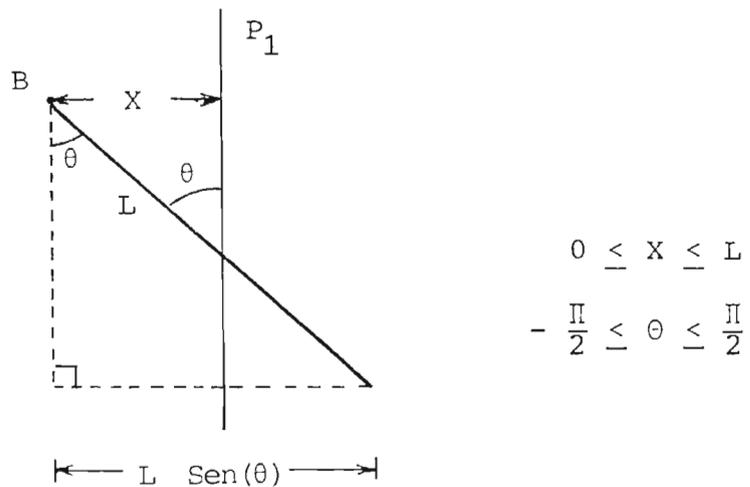


FIGURA 4.

Se observa la posibilidad de cortar la paralela, se puede establecer en términos de  $X$  y  $\theta$ , siendo  $X$  la distancia del extremo de la aguja (sobre el cual se hace girar el otro extremo) y la paralela, y  $\theta$  es el menor ángulo que forman la aguja y la paralela. Así, si  $X \leq L \text{ Sen}(\theta)$  la aguja deberá cortar a la paralela, y si  $X > L \text{ Sen}(\theta)$  la aguja no la cortará. De la figura se observa que  $X$  y  $\theta$  quedan limitados por:

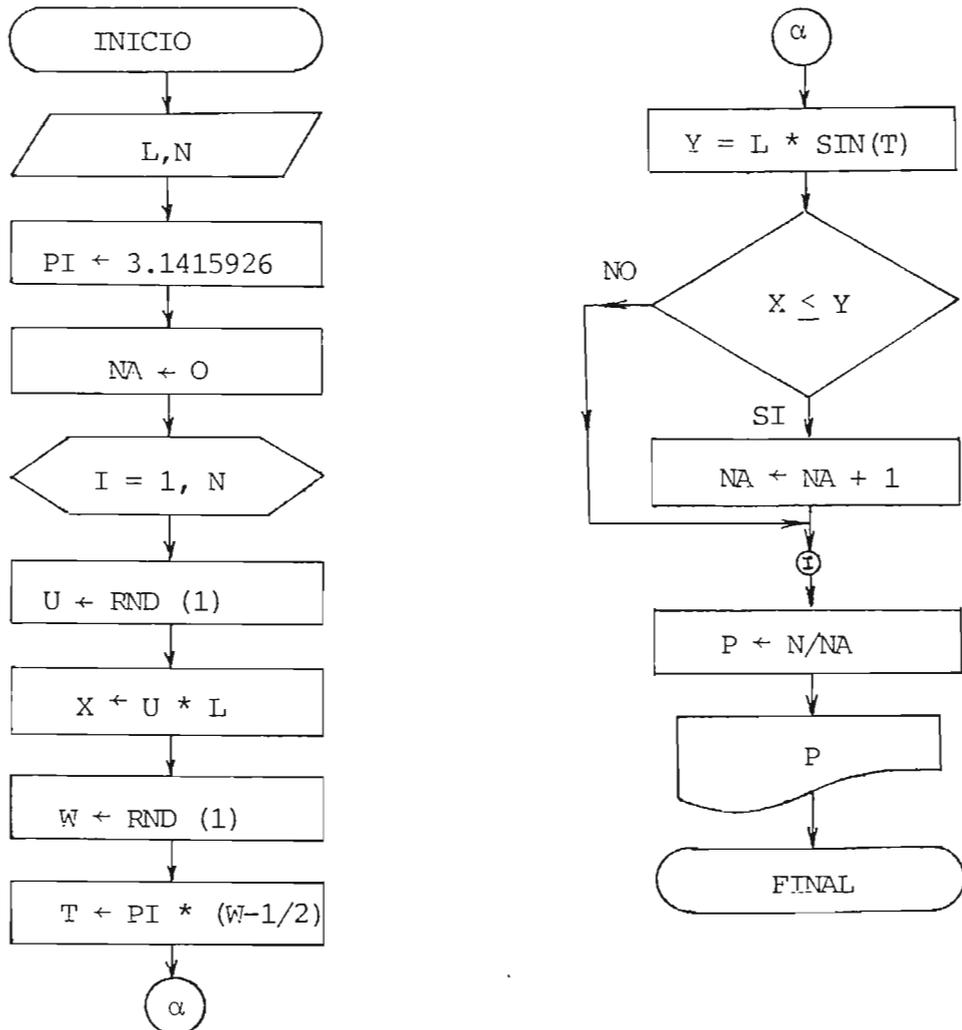
$$0 \leq X \leq L \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} .$$

Para simular el lanzamiento de la aguja, se generan dos números aleatorios, uno servirá para representar la distancia del extremo de la aguja a la paralela, así, si  $U$  es el número aleatorio,  $X$  se obtendrá por:  $X = U * L$ , siendo  $L$  la longitud de la aguja. Y el otro número aleatorio, supóngase  $W$ , servirá para representar el ángulo entre la aguja y la paralela, así  $\theta$  se obtendrá por:

$$\theta = (W - \frac{1}{2}) * \pi, \text{ esto es así porque } \theta \text{ varía entre } -\frac{\pi}{2} \text{ y } \frac{\pi}{2} .$$

Luego, se calcula el valor  $Y = L * \text{Sen}(\theta)$  y, si el valor de  $X$  es menor o igual que  $Y$  se contabiliza como un corte. Se procede a generar otros dos números para si-

mular un nuevo lanzamiento. El proceso se repite  $N$  veces y si  $n$  es el número de aciertos, entonces  $\Pi = \frac{N}{n}$ . A continuación se muestra un diagrama de flujo que representa los pasos a seguir, y en seguida se presenta un programa en lenguaje BASIC, el cual se ha ejecutado 6 veces para  $N = 100$  y  $L = 3$ , y 7 veces para  $N = 10,000$  y  $L = 3$  mostrándose los resultados obtenidos.



Listing of Prueba on 18/10/84 at 13:55

```
10 REM  AGUJAS DE BUFFON
20 REM--INICIALIZANDO
  OPEN 1,4:
  READ L,N:
  NA=0:
30 FOR I=1 TO N:
  U=RND(1):
  X=U*L:
  W=RND(1):
  Y=L*SIN(W*(W-1/2))
40   IF Y>=X THEN
  NA=NA+1
50 NEXT I
60 P=NA/N:
  PI=1/P
70 PRINT#1,TAB(15);PI:
  CLOSE 1:
  END
80 DATA 3.100
```

#### RESULTADOS OBTENIDOS

3.22588645

2.94117647

2.63157895

3.19488818

3.64878849

3.888888

Listing of Prueba on 18/10/84 at 14:14

```
10 REM  AGUJAS DE BUFFON
20 REM--INICIALIZANDO
   OPEN 1,4
   READ L,N:
   NA=0:
30 FOR I=1 TO N:
   U=RND(1):
   X=U*L:
   W=RND(1):
   Y=L*SIN(PI*(W-1/2))
40   IF Y>=X THEN
   NA=NA+1
50 NEXT I
60 P=NA/N:
   PI=1/P
70 PRINT#1,TAB(15),PI:
   CLOSE 1:
   END
80 DATA 3.10000
```

RESULTADOS OBTENIDOS

3.13873195  
3.07692300  
2.88184438  
3.25732899  
3.14465409  
2.94117647  
3.37837838

## CAPITULO IV

### CONCEPTOS BASICOS DE LA TEORIA DE COLAS Y SIMULACION DE SISTEMAS DE COLAS

La Teoría de Colas, también conocida como teoría de los fenómenos de espera, tiene una abrumadora aplicación en la vida diaria, pues se forma parte de Colas o líneas de espera en muchas facetas de la vida: Se hace cola para abordar el autobus, esperando el verde de un semáforo, esperando ser atendido en una clínica de asistencia médica, realizando llamadas telefónicas a teléfonos cuyas líneas están ocupadas - (es interesante hacer notar que los orígenes de la teoría de colas se encuentran en los problemas de congestión de redes telefónicas; atribuyéndose a Erlang, ser el iniciador de los trabajos en este campo).

La presente teoría y sus aplicaciones serán estudiadas reduciendo al mínimo los implementos matemáticos necesarios; aunque habrá excepciones, en las que se hará algún detalle.

#### 4.1 CONCEPTOS BASICOS DE LA TEORIA DE COLAS.

En general un fenómeno de espera presenta las siguientes características:

1. Llegada de unidades (a veces también denominadas: clientes o llamadas) a intervalos de tiempo, regulares o - irregulares, a un punto dado llamado centro de servicio. Por ejemplo, entrada de clientes a una tienda, llegadas de barcos a un puerto, llegadas de camiones a una estación de carga, etc.; estas unidades se llamarán entradas o llegadas.
2. Uno o varios canales de servicio o estaciones, reunidos en el centro de servicio. Estos canales de servicio - pueden ser cajas registradoras, muelles, pistas de aterrizaje, etc.; las unidades deben esperar eventualmente que un canal se encuentre disponible para que puedan - ser atendidas.

Ejemplos de Fenómenos de Espera:

ENTRADAS	NATURALEZA DEL SERVICIO	CANALES O ESTACIONES
Clientes	Venta de Artículos	Vendedores
Barcos	Descarga	Muelle
Aviones	Aterrizaje	Pistas
Llamadas Telefónicas	Conversación	Circuitos telefónicos
Incendios	Extinción	Carros de Bomberos
Alumnos	Educación	Profesores

Se profundizará en la estructura de estos fenómenos, con el fin de identificar varios casos para las entradas y los canales

#### 4.1.1 ENTRADAS.

Una de las características asociadas a las entradas - de los fenómenos de espera es el intervalo de tiempo que transcurre entre el apareamiento de dos entradas sucesivas por lo que se puede establecer una clasificación según esta característica.

Las entradas pueden ser:

- a) Separadas por intervalos de tiempo iguales;
- b) Separadas por intervalos de tiempo desiguales pero determinados;
- c) Separadas por intervalos de tiempo desiguales, conocidos según probabilidad; se dice entonces que los intervalos son aleatorios.

#### 4.1.2 DURACION O TIEMPO DE SERVICIO.

De igual forma que los intervalos entre las entradas, el tiempo de servicio puede ser:

- a) Constante;
- b) Variable pero determinado;
- c) Aleatorio (por lo tanto, conocido en probabilidad).

Se puede considerar que los intervalos entre las llegadas sucesivas son irregulares y desconocidos en probabilidad; pero ese caso no interesa puesto que nada puede preverse o estimarse. Esta observación también vale para el tiempo de servicio.

#### 4.1.3 ESTRUCTURA DE UN FENOMENO DE ESPERA.

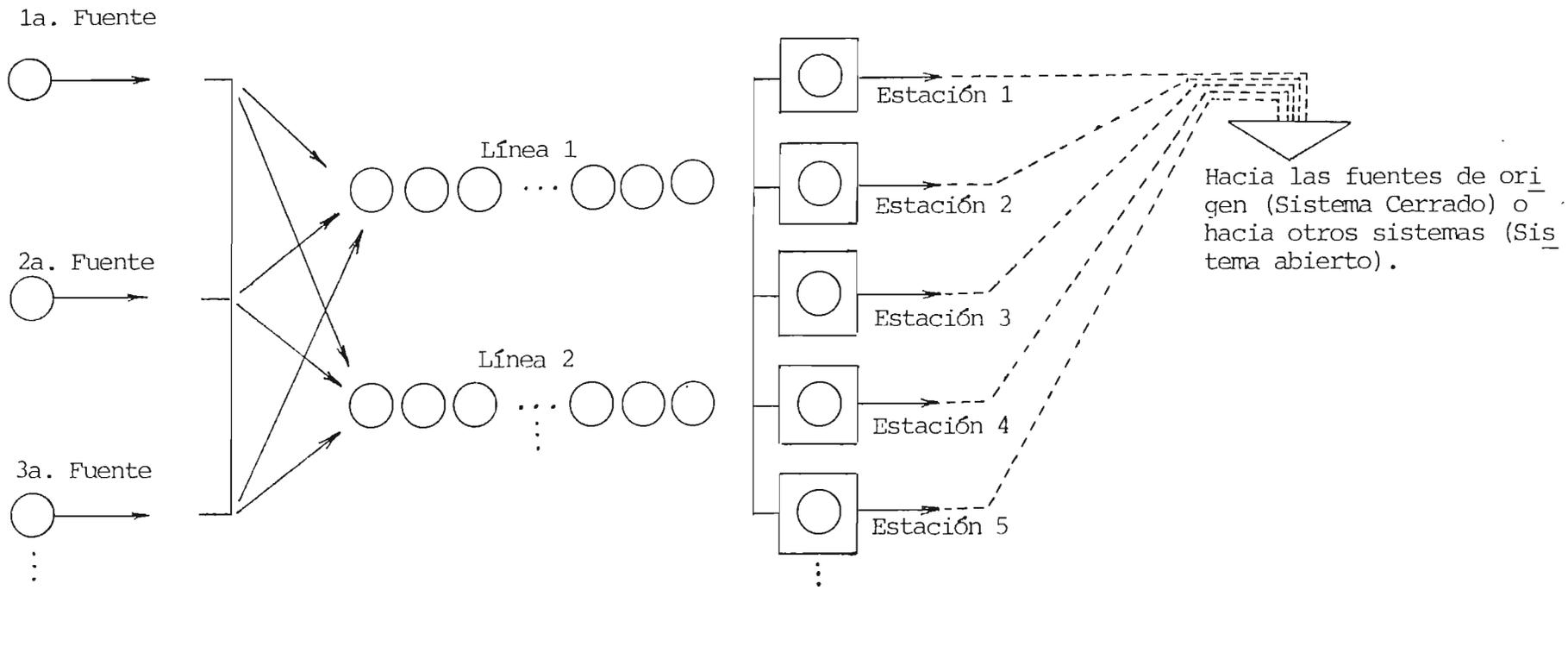
Para que aparezca una cola o línea de espera, basta - que las entradas y/o el servicio, se produzcan a intervalos irregulares. También, puede formarse una cola para intervalos constantes de entradas y de tiempo de servicio, si la duración del servicio es más alta que el intervalo de tiempo que separa las llegadas; entonces la línea de espera aumenta regularmente y en forma indefinida. Un caso de esta naturaleza, no es interesante en este estudio por lo que no se analizará.

Existen diversas estructuras de los fenómenos de espera, las cuales en general, están determinadas por el número y la forma en que los canales de servicio participan en el

fenómeno; y por la disciplina de espera; así, se puede hablar de sistemas de espera de canales múltiples en serie, en paralelo, etc.

Con el propósito de hacer aparecer la diversidad de estructuras de los fenómenos de espera, se representa en la siguiente figura un esquema de fenómeno de espera, en el cual existen tres fuentes, dos colas (o líneas de espera) y cinco canales (o estaciones de servicio).

El conjunto de las Colas (Líneas de espera) y los canales (estaciones) constituyen el "Sistema de espera".



Fuentes o Entradas.

Colas. [v]

Canales o Estaciones. [j]

SISTEMA DE ESPERA. [n]

FENOMENO DE ESPERA. [m]

Las letras encerradas en los corchetes, denotan lo si siguiente:

m : Número de unidades en el fenómeno de espera (puede ser finito o infinito).

n : Número de unidades en el sistema (haciendo cola o recibiendo servicio).

v : Número de unidades en las colas.

j : Número de unidades recibiendo servicio.

Otras variables importantes:

$\rho$  = Número de canales desocupados.

S = Número total de canales o estaciones de servicio.

Se deduce entonces que:

$$n = \begin{cases} j, & \text{si } n \leq S. \\ v + j, & \text{si } n > S. \end{cases}$$

Varias concepciones se pueden hacer de todo lo anterior:

Por ejemplo, cada fuente puede tener diferente distribución de probabilidad. Se pueden concebir además, varias Colas, ubicándose las unidades en la cola más corta, o establecién-

dose prioridades; dando lugar a lo que se conoce como "disciplina de espera" o "disciplina de las colas", que no es más que el conjunto de relaciones de orden o prioridades que intervienen en las líneas.

Otra consideración puede hacerse con respecto al comportamiento de las unidades, el cual puede ser variable: Las unidades que llegan pueden "rebelarse" (es decir, no unirse a la cola), ya sea por la longitud de la cola existente o simplemente por no querer esperar, originando como consecuencia, que se "pierdan" las unidades.

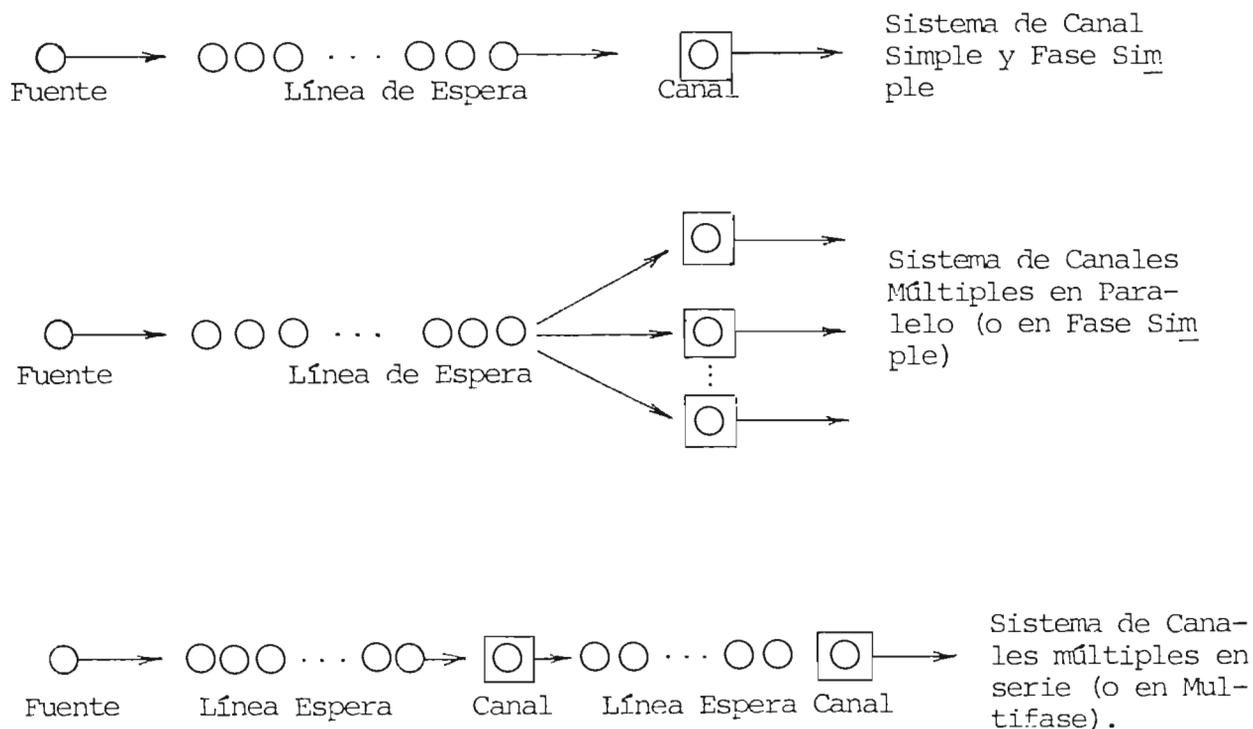
Las unidades también pueden "renunciar", es decir, que estando en la cola decidan retirarse de ella. También puede haber colusión; varias unidades están en colusión cuando una sola unidad espera en línea mientras las demás se encuentran libres. También pueden haber traslados, cuando las unidades pueden trasladarse de una línea a otra.

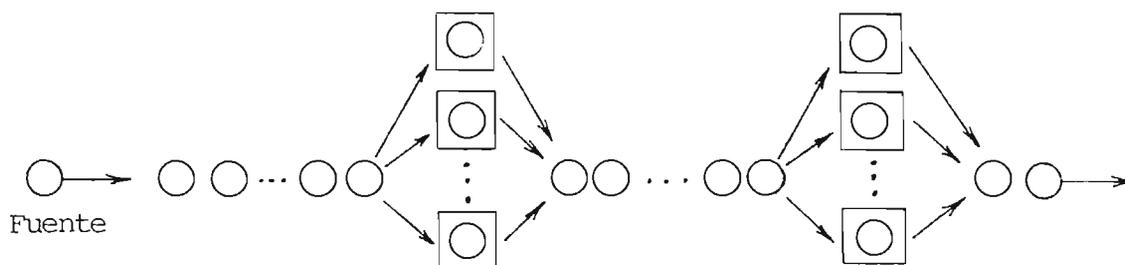
En lo que sigue se supondrá que, una vez que queda libre un canal apto para servir a una unidad que espera, la unidad entra al canal sin pérdida de tiempo.

Una instalación de servicio puede constar de varios canales los cuales pueden estar:

- a) En paralelo
- b) En serie
- c) Combinados, por ejemplo: si varios canales están en paralelo, algunos de ellos pueden estar en serie con otros; o varios canales en paralelo pueden conducir a uno o varios canales en serie.

A continuación se da una ilustración gráfica de estos sistemas de espera, comenzando con el más simple:





Sistema de canales múltiples en paralelo en serie (o Sistema Multicanal de Fase simple en multifase).

Considérense los siguientes ejemplos para concretizar la ilustración de estos sistemas de espera:

1. En el Banco Central de Reserva, en las ventanillas rotuladas "PAGADOR", se observa un sistema de espera de canales simples en fase simple; ahí una persona abandona el canal luego de habersele cambiado su cheque e inmediatamente la siguiente persona entra al canal para la misma operación.
2. En la ventanilla de venta de boletos para entrar a un cine, se observa un sistema de espera de canal simple y fase simple.
3. En una gasolinera, se observa un sistema de espera de canales múltiples en paralelo (o un sistema multicanal

en fase simple); donde cada conductor se ubica en la -  
bomba de gasolina (canal) que encuentra desocupada.

4. Otro sistema de espera, aunque talvez no conocido por -  
la generalidad, pero, evidentemente un sistema de cana-  
les múltiples en paralelo, se encuentra en las oficinas  
del registro civil de la Alcaldía Municipal de San Sal-  
vador.
5. Los sistemas de espera de canales múltiples en serie, -  
es común observarlos en los procesos industriales, don-  
de un artículo para su fabricación, pasa por varios ca-  
nales (máquinas).
6. Si en una de nuestras super carreteras, las estaciones  
de peaje fueran totalmente funcionales, es decir, si -  
funcionaran todas las ventanillas, se observaría un sis-  
tema de canales múltiples en paralelo en serie.
7. Finalmente, otro ejemplo de sistema de espera con cana-  
les múltiples en paralelo se pudiera encontrar en un -  
proceso industrial, si existieran réplicas de maquina-  
rias para determinados procesos, de tal manera que va-  
rios artículos estén realizando la misma operación al  
mismo tiempo, esto podría hacerse con el fin de aumen-  
tar la producción en el menor tiempo posible.

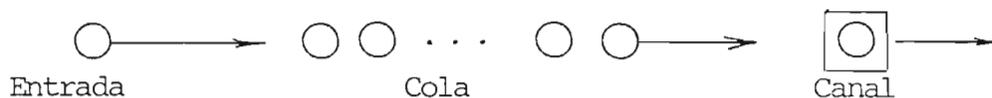
Se estudiarán a continuación, con algún rigor matemático, el sistema de espera de un solo canal en fase simple y el sistema multicanal en fase simple, extendiéndose para algunas variantes de ellos.

Al estudiar un sistema de espera, interesarán algunas características, tales como:

1. La probabilidad de varios números de unidades en las colas, en cualquier momento dado.
2. El tiempo esperado o promedio que pasará una unidad en las instalaciones de servicio.
3. La probabilidad de que las instalaciones de servicio estén ociosas.
4. El tiempo ocioso de las instalaciones durante todo el tiempo de simulación.
5. La longitud esperada o promedio de la cola.
6. La longitud máxima de la cola; y más características, las cuales dependerán del objetivo de la simulación y del sistema a simular.

## 4.1.4 SISTEMA DE ESPERA DE CANAL SIMPLE Y FASE SIMPLE.

Considérese el sistema de la siguiente figura:



En el cual existen unidades que llegan a una instalación para pedir servicio. Si el canal está vacío, la unidad - (una a la vez) entra y recibe servicio. Si el canal está ocupado, la unidad que llega debe tomar su lugar al final de la cola y esperar su turno para recibir el servicio (disciplina de la cola: se atienden las unidades sobre la base de "primero en llegar primero en ser servido").

Por simplicidad, supóngase que el sistema es totalmente de Poisson y, por ende, satisface todas las características de un proceso de Poisson; entonces el tiempo entre las llegadas tienen una distribución exponencial y, el tiempo necesario para dar servicio tiene también una distribución exponencial. Supóngase además, que interesa desarrollar un modelo para predecir:

1. La probabilidad de varios números de unidades en el sistema (o mejor dicho, en la cola del sistema de espera),

en cualquier momento dado.

2. El tiempo promedio que pasará una unidad en el sistema.
3. La probabilidad de que las instalaciones de servicio estén ociosas.

Para iniciar, supóngase que la instalación de servicio (canal) está equipada de tal modo que pueda dar servicio, - en promedio, a  $\mu$  unidades por unidad de tiempo. Por lo tanto,  $\mu$  es también el número promedio de salidas del canal durante cada unidad de tiempo. Conviene observar que  $\mu$  representa el número promedio de unidades que pueden recibir servicio por unidad de tiempo, suponiendo que el canal se mantiene ocupado y no ocioso (un canal está ocioso, si no está prestando servicio).

A continuación, considérese a  $t$  como un momento en el tiempo. Se comenzará por examinar el sistema de espera en el tiempo  $t$ .

Podría interesar desarrollar un modelo para determinar la probabilidad de que haya varios números de unidades en el sistema, en este momento del tiempo. Para lo cual, considérese una parte fraccionaria de unidad de tiempo más - allá de  $t$ , dado por  $t + \Delta t$ .

Siendo el sistema Poissoniano,  $\Delta t$  es tan pequeño que entre  $t$  y  $t + \Delta t$  es imposible más de una llegada o una salida.

A continuación desígnese por  $P_n$ , la probabilidad de que haya  $n$  unidades en el sistema en algún momento dado, siendo  $n \geq 1$ . Este valor de  $n$  debe ser así, para poder utilizar  $\mu$  con confianza.

En efecto, si  $n = 0$  no se tendría ninguna unidad en el sistema y éste estaría ocioso. Ahora bien, en tanto que en el canal exista siempre al menos una unidad, se podrá suponer que dará servicio a un promedio de  $\mu$  unidades por unidad de tiempo.

Bajo todas estas consideraciones y, para buscar una solución al problema pregúntese primero cuál es la probabilidad de que haya  $n$  unidades en el sistema en el tiempo  $t + \Delta t$ , es decir,  $P_n(t + \Delta t)$ .

Pero,  $n$  unidades en el sistema en el tiempo  $t + \Delta t$  pueden presentarse de cuatro maneras diferentes, mutuamente exclusivas:

1. Se podría tener  $n$  unidades en el sistema en el tiempo  $t$ , cero entradas durante el intervalo  $\Delta t$  y cero salidas durante el intervalo  $\Delta t$ .

Supóngase en este caso que  $P_n(t)$  es la probabilidad de  $n$  unidades en el sistema en el tiempo  $t$ . La probabilidad de  $n$  en el sistema en el tiempo  $t + \Delta t$  puede razonarse lógicamente como sigue:

Se ha supuesto que no es posible tener más de una llegada durante el intervalo  $\Delta t$ . Por consiguiente en el intervalo  $\Delta t$  se tendrán de cero a una llegadas. La probabilidad cero llegadas es igual a uno menos la probabilidad de una llegada y, la probabilidad de una llegada es  $\lambda \Delta t$ . Así, la probabilidad de cero llegadas es igual a  $1 - \lambda \Delta t$ , durante el intervalo  $\Delta t$ , siendo  $\lambda$  el número promedio de llegadas durante el intervalo  $\Delta t$ .

Como se ha supuesto que  $\mu$  es el número esperado de unidades que recibirán servicio en el canal durante una unidad de tiempo, si el canal no está ocioso, se tiene que la probabilidad de una salida del sistema (y por ende del canal) durante el intervalo  $\Delta t$  es  $\mu \Delta t$ . Y la probabilidad de cero salidas es  $1 - \mu \Delta t$ .

Entonces la probabilidad de la existencia de  $n$  unidades en el sistema en el tiempo  $t$ , cero entradas y salidas durante el intervalo  $\Delta t$  es:

$$P_n(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t) \cdot (1 - \mu \Delta t)$$

2. Se podría tener  $n - 1$  unidades en el sistema en el tiempo  $t$ , una llegada durante el intervalo  $\Delta t$  y cero salidas durante el intervalo  $\Delta t$ . Si se razona igual que antes, se concluye que la probabilidad para este caso es:

$$P_{n-1}(t) \cdot (\lambda \Delta t) \cdot (1 - \mu \Delta t)$$

3. Se podría tener  $n + 1$  unidades en el sistema en el tiempo  $t$ , cero llegadas durante el intervalo  $\Delta t$  y una salida durante  $\Delta t$ . La probabilidad para este caso es:

$$P_{n+1}(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t) \cdot (\mu \Delta t)$$

4. Se podría tener  $n$  unidades en el sistema en el tiempo  $t$ , una llegada y una salida en el intervalo  $\Delta t$ . La probabilidad de esto es:

$$P_n(t) \cdot (\lambda \Delta t) \cdot (\mu \Delta t)$$

Entonces, la probabilidad de  $n$  unidades en el sistema en el tiempo  $t + \Delta t$  es, la suma de las probabilidades de los cuatro casos individuales en los cuales se puede producir, es decir,

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta t) = & P_n(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t) (1 - \mu \Delta t) + \\ & P_{n-1}(t) \cdot (\lambda \Delta t) \cdot (1 - \mu \Delta t) + \\ & P_{n+1}(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t) \cdot (\mu \Delta t) + \\ & P_n(t) \cdot (\lambda \Delta t) \cdot (\mu \Delta t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Así, } P_n(t + \Delta t) &= P_n(t) - \mu \Delta t P_n(t) - \lambda \Delta t P_n(t) + \\
 &\quad \mu \lambda P_n(t) \Delta t^2 + \lambda \Delta t P_{n-1}(t) \\
 &\quad - \mu \lambda P_{n-1}(t) \Delta t^2 + \mu \Delta t P_{n+1}(t) \\
 &\quad - \lambda \mu P_{n+1}(t) \Delta t^2 + P_n(t) \mu \lambda \Delta t^2.
 \end{aligned}$$

En donde, desechando los infinitésimales de orden  $(\Delta t)^2$  y haciendo un arreglo se tiene:

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = P_n(t) \cdot (-\lambda - \mu) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t).$$

Ahora, percátese que el modelo provisional anterior no es válido, porque supone que no puede haber más de una llegada o una salida durante el intervalo  $\Delta t$ . Evidentemente, si se hace  $\Delta t$  menor la suposición será más cierta y mejorará la validez del modelo. Específicamente, si se deja que  $\Delta t$  tienda a cero como límite, la expresión anterior se convertirá en la ecuación diferencial:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) \quad (1)$$

donde  $n \geq 1$ .

Para determinar el caso especial en que  $n = 0$ , se razona simplemente que cuando  $n = 0$ , la probabilidad de  $n - 1$  es cero, puesto que es imposible tener menos de cero clien -

tes en el sistema, reemplazando  $P_{n-1}(t)$  por cero en la ecuación (1) se tiene:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) - \mu P_0(t) + \mu P_1(t) \quad (2)$$

Obsérvese que el término  $-\mu P_0(t)$ , tiene relación con el número esperado de salidas del sistema. Y de acuerdo con el cálculo de la probabilidad de que haya  $n$  unidades en el sistema, si  $n = 0$ , el sistema estará vacío y no podrá haber salidas; por lo tanto, el término  $-\mu P_0(t)$  se anula y la ecuación (1) para el caso  $n = 0$  se convierte en:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \quad (3)$$

Obsérvese que en las ecuaciones (1), (2), (3) el miembro izquierdo es la derivada de la probabilidad de varios números de clientes en el sistema, y dado que la derivada (como se muestra en el lado derecho del signo igual) es una función del tiempo ( $t$ ), entonces las probabilidades de que haya distinto número de unidades en el sistema cambian con el tiempo.

Suponiendo que un sistema se encuentre funcionando ininterrumpidamente, podría tenerse entonces, que el sistema se

encuentre en estado estacionario o en estado transitorio -  
 (si se está asentando para llegar a una condición estable).  
 Para ejemplarizar esto, supóngase que se comienza con el -  
 sistema de colas vacío a las 8 a. m., entonces será menos -  
 probable de que hayan 10 unidades en él a las 8:01 a. m., -  
 de que las haya a las 12:00 m. y, suponiendo que el sistema  
 siga funcionando ininterrumpidamente, por ejemplo, durante  
 cinco días el sistema se estabilizará, de tal forma que la  
 probabilidad de encontrar  $n$  unidades a las 8 a. m. del -  
 quinto día será aproximadamente igual que la probabilidad -  
 de que haya  $n$  unidades en el sistema a las 8 a. m. del -  
 día cuarto.

Ambos estados, estacionario y transitorio son de gran  
 interés, aunque por el momento sólo se estudiarán sistemas  
 en estado estacionario.

A partir de (1) y (3) se puede desarrollar el modelo  
 hacia el cual se tendía desde el principio. Estando el -  
 sistema en estado estacionario, la derivada (o sea, la ra-  
 zón de cambio en el tiempo) de la probabilidad de que haya  
 varios números de unidades en el sistema es cero y (1) se  
 convierte en:

$$(\lambda + \mu)P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} \quad (4)$$

Se ha suprimido la  $t$ , puesto que la probabilidad es independiente del tiempo; así,  $P_n$  significará ahora la probabilidad de que hayan  $n$  unidades en el sistema en cualquier momento, en el estado estacionario.

De la misma manera, (3) se convierte en:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) P_0$$

Y resolviendo (4) para  $P_{n+1}$  se tiene:

$$P_{n+1} = \left( \frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) P_n - \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) P_{n-1} \quad (5)$$

Y tomando  $n = 1$  en esta ecuación, se tiene que:

$$P_2 = \left( \frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) P_1 - \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) P_0$$

Sustituyendo el valor de  $P_1$  se tiene:

$$P_2 = \left( \frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) P_0 - \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) P_0 = \left[ \left( \frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) - 1 \right] \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) P_0 = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 P_0 .$$

Nuevamente, haciendo  $n = 2$  en (5) se sigue que:

$$P_3 = \left( \frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) P_2 - \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) P_1 \text{ y sustituyendo } P_2 = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 P_0 \text{ y } P_1 = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) P_0$$

Se tiene:

$$P_3 = \left( \frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 P_0 - \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) P_0$$

$$P_3 = \left[ \left( \frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) - 1 \right] \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 P_0$$

$$P_3 = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^3 P_0$$

Si se continúa se descubrirá que:  $P_4 = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^4 P_0$ ,  $P_5 = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^5 P_0, \dots$

y por inducción, se infiere que  $P_n = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0$ . (6)

Por otra parte, se sabe que al aumentar  $n$  sin límite, se cumple:

$$P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$$

$$\text{Por ende, } P_0 + \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) P_0 + \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 P_0 + \dots + \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 = 1$$

$$\text{y } P_0 = \frac{1}{1 + \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) + \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n}$$

El denominador es una serie geométrica con primer término 1 y razón  $\frac{\lambda}{\mu}$  y siempre que  $\frac{\lambda}{\mu} < 1$  la serie converge

y su suma es:  $\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$

Por lo que, la expresión para  $P_0$  queda:

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Ahora con este valor de  $P_0$ , se puede resolver para  $P_n$  a partir de (6), así:

$$P_n = \left[1 - \frac{\lambda}{\mu}\right] \left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^n \quad \text{donde } \frac{\lambda}{\mu} < 1 .$$

Se tiene ahora, un modelo general para determinar la probabilidad de que haya  $n$  unidades en un sistema de espera de canal simple, en estado estacionario, donde el número promedio o esperado de llegadas por unidad de tiempo,  $\lambda$ , es menor que el tiempo promedio de servicio,  $\mu$ .

Otras características que interesan estudiar en este sistema de colas de canal simple son el porcentaje de tiempo ocioso y el porcentaje de utilización. Se tratará, primero, de dar una respuesta a:

¿Qué cantidad de tiempo estará vacía la instalación de servicio, y por ende, el sistema ocioso?

Esto es sencillamente, la probabilidad de cero en el sistema, es decir,

$$P_0 = \left[1 - \frac{\lambda}{\mu}\right] \left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^0 \Rightarrow P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Y si la probabilidad de que el sistema esté ocioso es de  $1 - \frac{\lambda}{\mu}$ , entonces se sigue que la utilización fraccionaria de la capacidad total de la instalación de servicio es:

$$1 - \left[1 - \frac{\lambda}{\mu}\right] = \frac{\lambda}{\mu} .$$

¿Cuál es el número esperado de unidades en el sistema?

Esto vendría dado por: la probabilidad de 1 en el sistema por 1, más la probabilidad de 2 en el sistema por 2, más la probabilidad de 3 en el sistema por 3, es decir,

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{\lambda}{\mu}\right] \left[\frac{\lambda}{\mu}\right] \times 1 + \left[1 - \frac{\lambda}{\mu}\right] \left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^2 \times 2 + \left[1 - \frac{\lambda}{\mu}\right] \left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^3 \times 3 + \dots + \\ + \left[1 - \frac{\lambda}{\mu}\right] \left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^n \times n + \dots \end{aligned}$$

conforme  $n \rightarrow \infty$ .

Esto resulta ser una serie infinita de la forma:

$$ar + 2ar^2 + 3ar^3 + \dots + nar^n + \dots$$

donde  $a = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$  y  $r = \frac{\lambda}{\mu}$ . La suma de esta serie es:

$$\left[ a \right] \times \left[ \frac{r}{(1-r)^2} \right] = \left[ 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right] \times \left[ \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2} \right] = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Y por lo tanto, el número esperado de unidades en el sistema es  $\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ .

¿Cuál es el número esperado de unidades en espera de recibir servicio? (Número de unidades esperando en la cola).

Puesto que el número promedio o esperado en el sistema es el número esperado en el canal + el número esperado en la cola, se tiene que el número esperado en la cola es el número esperado en el sistema menos el número esperado en el canal. Pregúntese entonces:

¿Cuál es el número esperado en el canal?

- Sería:
1. El número en el canal cuando esté ocupado por la probabilidad de que esté ocupado, más
  2. El número en el canal cuando esté ocioso, por la probabilidad de que esté ocioso.

Es decir:

El número esperado en el canal es:

$$\left[ 1 \times \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) \right] + \left[ 0 \times \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \right] = \frac{\lambda}{\mu}$$

Como el número esperado en el sistema es  $\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$  ; entonces, el número esperado en la cola, aguardando servicio es

$$\frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} .$$

¿Cuánto es el tiempo esperado que permanece una unidad promedio en el sistema, es decir, aguardando en la cola y recibiendo el servicio?

El tiempo esperado en el sistema es el número esperado en el sistema dividido entre  $\lambda$  [ya que resulta lógico afirmar que el número esperado en el sistema es  $\lambda$  por el tiempo esperado en el sistema]. Así:

$$\text{El tiempo esperado en el sistema es: } \frac{\frac{\lambda}{\mu - \lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

¿Cuánto tiempo debe pasar en promedio cada unidad esperando en la cola para recibir el servicio?

Esto será, el tiempo total esperado en el sistema menos el tiempo esperado en el canal; puesto que el tiempo esperado en el canal es  $\frac{1}{\mu}$  , se tiene:

$$\text{El tiempo promedio de espera en la cola: } \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} .$$

La probabilidad de  $n$  en la cola, es simplemente la probabilidad de  $n + 1$  en el sistema. Ya que si hay  $n$  uni

dades en la cola habrá  $n + 1$  unidades en el sistema, puesto que habrá una en el canal.

Esto se aplicará únicamente cuando  $n > 0$ , ya que la probabilidad de 0 en la cola es igual a la probabilidad de 1 en el canal.

#### 4.1.5 SISTEMA DE ESPERA DE CANALES MÚLTIPLES EN PARALELO.

Este sistema es similar al anterior, en el sentido de la disciplina de la cola, porque a medida que llegan las unidades, van tomando su lugar en la cola, si no es posible obtener el servicio inmediatamente. No obstante, se supone - aquí, que hay más de un canal disponible para el servicio. La primera unidad de la línea de espera entra al primer canal de servicio que queda disponible. La figura ilustra - este sistema:



Para poder desarrollar el modelo requerido para este sistema, se incluirán conceptos estadísticos, tales como la conocida relación entre la distribución exponencial y la de Poisson, la cual es válida aquí, porque si el tiempo entre eventos sucesivos se distribuye exponencialmente, la distribución del número de eventos que tienen lugar en cualquier intervalo de tiempo sigue una distribución de Poisson. Esta relación indica la probabilidad de  $n$  llegadas en el tiempo  $t$  y viene dada por:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots$$

y  $\lambda$  el parámetro de la distribución exponencial del tiempo entre llegadas.

Para este caso, supóngase que el número de llegadas en el tiempo  $t$  tiene una distribución de Poisson, con parámetro  $\lambda t$ ; y que el número de servicios por tiempo,  $T$ , tiene también una distribución de Poisson, con parámetro  $\mu T$  para cada uno de los canales.

Sea  $K$  el número de canales en paralelo. Antes de desarrollar la distribución de probabilidad del número de unidades en el sistema, es preciso reconocer que la probabilidad de que se produzca un servicio en un pequeño intervalo de tiempo  $\Delta t$ , depende del número de canales ocupados durante

ese intervalo  $\Delta t$ . Supóngase que  $r$  de los  $K$  canales es tán ocupados.

Puesto que los canales son de Poisson, la probabilidad de más de un servicio por canal en el tiempo  $\Delta t$  es cero.

La probabilidad de un servicio en algún tiempo, entre los  $r$  canales ocupados es:

$$P(\text{Un servicio en } \Delta t) = P_1(\Delta t) = r (\mu \Delta t) e^{-\mu \Delta t}$$

puesto que el servicio puede producirse en cualquiera de los  $r$  canales.

Obsérvese que esta probabilidad tiene esa forma porque la distribución de los tiempos de servicio es exponencial - con parámetro  $\mu T$ , para cada uno de los canales de servicio.

Para el caso en que se consideren  $n$  de los  $K$  canales ( $0 < n < K$ ), y haciendo un análisis parecido al del sistema de canal simple se observa que para este sistema, sólo hay tres maneras de obtener  $n$  unidades en el tiempo  $t + \Delta t$  y éstas son:

$$1. P_n(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}) \left[ 1 - n \mu \Delta t e^{-\mu \Delta t} \right]$$

Que representa la probabilidad de encontrar  $n$  unidades en el sistema en el tiempo  $t$ , cero entradas en el -

tiempo  $\Delta t$  y cero servicios en  $\Delta t$  dado que hay  $n$  canales que pueden prestar servicio,  $n < K$ .

$$2. P_{n-1}(t) \cdot (\lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}) \cdot (1 - (n-1) \mu \Delta t e^{-\mu \Delta t})$$

Que es la probabilidad de encontrar  $n - 1$  unidades en el sistema en el tiempo  $t$ , una entrada en  $\Delta t$  y cero salidas en  $(n-1)$  canales de los  $n$  existentes en  $\Delta t$ .

$$3. P_{n+1}(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}) \cdot ((n+1) \mu \Delta t e^{-\mu \Delta t})$$

Que es la probabilidad de encontrar  $n + 1$  unidades en el sistema en el tiempo  $t$ , cero entradas y una salida en el canal  $(n + 1)$ .

Obsérvese que el caso 4 del canal simple no se puede dar acá, porque no está permitido tener más de una entrada en el tiempo  $\Delta t$ .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta t) = & P_n(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}) (1 - n \mu \Delta t e^{-\mu \Delta t}) + \\ & P_{n-1}(t) \cdot (\lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}) \cdot \left[ 1 - (n-1) \mu \Delta t e^{-\mu \Delta t} \right] + \\ & P_{n+1}(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}) \cdot \left[ (n+1) \mu \Delta t e^{-\mu \Delta t} \right] \end{aligned}$$

Y efectuando los productos y pasando  $P_n(t)$  al lado izquierdo de la ecuación y dividiendo entre  $\Delta t$  se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} &= -P_n(t) n\mu e^{-\mu\Delta t} - P_n(t) \lambda e^{-\lambda\Delta t} + \\
&P_n(t) n \lambda \mu \Delta t e^{-(\lambda + \mu) \Delta t} + P_{n-1}(t) \lambda e^{-\lambda\Delta t} \\
&- P_{n-1}(t) (n - 1) \lambda \mu \Delta t e^{-(\lambda + \mu) \Delta t} \\
&+ P_{n+1}(t) (n + 1) \mu e^{-\mu\Delta t} \\
&- P_{n+1}(t) (n + 1) \lambda \mu \Delta t e^{-(\lambda + \mu) \Delta t}
\end{aligned}$$

Y al tomar el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  se tiene:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -n\mu P_n(t) - \lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (n + 1) \mu P_{n+1}(t) \quad (1)$$

Puesto que interesa de estado estacionario:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

Por consiguiente, en el estado estacionario se tiene:

$$P_{n+1} = \frac{(\lambda + n\mu) P_n}{(n+1) \mu} - \frac{\lambda P_{n-1}}{(n+1) \mu}, \quad n=1, 2, \dots, K-1 \quad (2)$$

Obsérvese que por ser la probabilidad, independiente - del tiempo (en estado estacionario) se ha suprimido la variable t.

Para  $n = 0$ , en (1) se tiene:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \text{ por un análisis similar al}$$

del sistema de canal simple; y en estado estacionario se tiene:

$$P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0. \quad (3)$$

A partir de las ecuaciones (2) y (3) se tiene: Para

$$\begin{aligned} n=1, P_2 &= \frac{\lambda + \mu}{2\mu} P_1 - \frac{\lambda}{2\mu} P_0 \\ &= \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 - \frac{\lambda}{2\mu} P_0 \\ &= \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} - 1\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 \\ P_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 \end{aligned}$$

Para

$$\begin{aligned} n=2, P_3 &= \frac{\lambda + 2\mu}{3\mu} P_2 - \frac{\lambda}{3\mu} P_1 \\ P_3 &= \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 \end{aligned}$$

Para la solución general se tiene:

$$P_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, \quad n=0, 1, 2, \dots, K.$$

Al aumentar  $n$  sin límite se cumple:

$$P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$$

$$\Rightarrow P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 1$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^K \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}, \quad \text{para el caso particular en que } n \text{ varíe de cero a } K.$$

La suma del denominador, no se puede resolver analíticamente.

Se presenta a continuación, un resultado más general, en el que el número de unidades en el sistema excede al número de canales en servicio. No se hará ninguna deducción de este resultado.

Se ha tratado el caso en que existen  $K$  canales de servicio de los cuales  $n$  están en actividad,  $n$  representa a la vez el número de unidades en el sistema con  $0 < n < K$  y se trató por aparte el caso  $n = 0$ , ahora incluyendo el caso en que  $n \geq K$  se tiene que la distribución del número

total de unidades en el sistema es:

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0; & n = 0, 1, 2, \dots, K. \\ \frac{1}{K^{n-K} K!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0; & n = k + 1, K + 2, \dots, K + M = N, \dots \end{cases}$$

Donde  $P_0$  viene dado por:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^K \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{K! \left(1 - \frac{\lambda}{K\mu}\right)}}$$

La distribución del número de unidades en la cola,  $m$ , se puede deducir de la distribución del número de unidades en el sistema.

Sea  $Q_m$  la probabilidad de que haya  $m$  unidades en la cola en un punto aleatorio del tiempo. Si  $m = 0$ .

Entonces  $Q_0 = P$  (Número de unidades en el sistema sea  $\leq K$ )

$$\Rightarrow Q_0 = \sum_{n=0}^K \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

Y aprovechando el hecho que al aumentar  $n$  sin límite la suma de  $P_n$  sobre todos los  $n$  es igual a uno, como exisg

ten  $K$  canales de servicio se tendría:

$$1 = \sum_{n=0}^K \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{K^{n-k} K!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$$\Rightarrow 1 = Q_0 + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{K^{n-k} K!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow Q_0 = 1 - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{K^{n-k} K!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \cdot \quad \text{La sumatoria se puede}$$

resolver así:

$$\begin{aligned} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0}{K^{n-k} K!} &= \frac{K^k}{K!} P_0 \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^n \\ &= \frac{K^k}{K!} P_0 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^n - \sum_{n=0}^k \left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^n \right] \\ &= \frac{K^k}{K!} P_0 \left[ \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{k\mu}} - \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1}}{1 - \frac{\lambda}{k\mu}} \right] \quad * \text{ (Nota)} \end{aligned}$$

---

\* (Nota): La primera suma es una serie geométrica con primer término 1 y razón  $\frac{\lambda}{k\mu}$  y la segunda obedece a:

$$\sum_{n=1}^k a^n = \frac{a(1-a^n)}{1-a} \quad \cdot \quad \text{En efecto,}$$

$$\sum_{n=0}^k a^n = a^0 + \sum_{n=1}^k a^n = 1 + \frac{a(1-a^n)}{1-a} = \frac{1-a + a-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad \cdot$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{K^k}{K!} \frac{\left(\frac{\lambda}{K\mu}\right)^{k+1}}{\left(1 - \frac{\lambda}{K\mu}\right)} P_0 \\
 &= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}}{KK! \left(1 - \frac{\lambda}{K\mu}\right)} P_0
 \end{aligned}$$

Por consiguiente  $Q_0 = 1 - \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}}{KK! \left(1 - \frac{\lambda}{K\mu}\right)} P_0$

Y en el caso que  $m > 0$ ,

$$Q_m = P(\text{Número de unidades en el sistema sea} = K + m)$$

$$Q_m = \frac{1}{K^m K!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+m} P_0 \cdot$$

Si la capacidad del sistema es limitada,  $n \leq N$ , los límites de la suma en la ecuación (4) son de  $K + 1$  a  $N$ , así:

$$\sum_{n=k+1}^N \frac{1}{K^{n-k} K!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \frac{K^k}{K!} P_0 \sum_{n=k+1}^N \left(\frac{\lambda}{K\mu}\right)^n = \sum_{n=0}^N \left(\frac{\lambda}{K\mu}\right)^n - \sum_{n=0}^K \left(\frac{\lambda}{K\mu}\right)^n$$

Y haciendo uso del resultado mostrado en la nota, se tiene:

$$\sum_{n=k+1}^N \left( \frac{1}{K^{n-k} K!} \right) \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 = \frac{K^k}{K!} \frac{\left( \frac{\lambda}{K\mu} \right)^{k+1} - \left( \frac{\lambda}{K\mu} \right)^{N+1}}{\left( 1 - \frac{\lambda}{K\mu} \right)} P_0$$

Lo cual modificaría a  $Q_0$ , de la siguiente manera:

$$Q_0 = 1 - \frac{K^k}{K!} \frac{\left( \frac{\lambda}{K\mu} \right)^{k+1} - \left( \frac{\lambda}{K\mu} \right)^{N+1}}{\left( 1 - \frac{\lambda}{K\mu} \right)} P_0$$

Para determinar el número esperado de unidades en la cola, siempre bajo el supuesto que se tienen  $K$  canales de servicio en paralelo y que la distribución del tiempo de servicio por canal es exponencial, con un índice medio  $\mu$ ; se tendría:

$E(m) = 0 \cdot Q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} m Q_m$ , que no es más que una generalización del caso de canal simple.

$$E(m) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{K^m K!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{k+m} P_0$$

$$E(m) = \frac{\left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{K!} \sum_{m=1}^{\infty} m \left( \frac{\lambda}{K\mu} \right)^m P_0 \quad (5)$$

Pero como 
$$\sum_{n=1}^N n a^n = a \frac{d}{da} \left( \sum_{n=1}^N a^n \right) = a \frac{d}{da} \left[ \frac{a(1 - a^N)}{1 - a} \right]$$

$$\sum_{n=1}^N n a^n = a \left[ \frac{1 - (N + 1)a^N + N a^{N+1}}{(1 - a)^2} \right]$$

Si se toma el límite cuando  $N$  tiende a  $\infty$  se tendría:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a^n = a \left[ \frac{1}{(1 - a)^2} \right]$$

Por lo que la ecuación (5) queda:

$$E(m) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{K!} \cdot \frac{\lambda}{K\mu} \cdot \frac{P_0}{\left[1 - \frac{\lambda}{K\mu}\right]^2}$$

$$E(m) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{K!} \cdot \frac{\lambda k \mu}{(k\mu - \lambda)^2} \cdot P_0 \Rightarrow E(m) = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} P_0$$

Para determinar la distribución del tiempo de espera en la cola,  $W$ , es evidente que, siempre que el número de unidades en el sistema sea menor que  $K$  (número de canales en el sistema) una unidad que llegue no tendrá que esperar.

Se ha estudiado distribuciones discretas y continuas, y la distribución del tiempo de espera es, a la vez, discreta y continua. Esto es así, porque pueden haber unidades cuyo tiempo de espera en la cola sea cero ( $W = 0$ ), y otras tendrán  $W > 0$ .

En efecto, para  $W = 0$ ,  $f_W(w) = P(n < K)$

Puesto que si el número de unidades en el sistema es menor que el número de canales de servicio, éstas recibirán atención inmediatamente. Así,

$$\begin{aligned} f_W(w) &= 1 - P(n \geq K) \\ &= 1 - \frac{1}{K!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K P_0 - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{K^{n-k} K!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \end{aligned}$$

Donde el segundo término del lado izquierdo, que se obtuvo de  $P(n = k)$ , se puede introducir en la sumatoria, así:

$$\begin{aligned} f_W(w) &= 1 - \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{K^{n-k} K!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \\ &= 1 - \frac{K^k}{K!} P_0 \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^n \end{aligned}$$

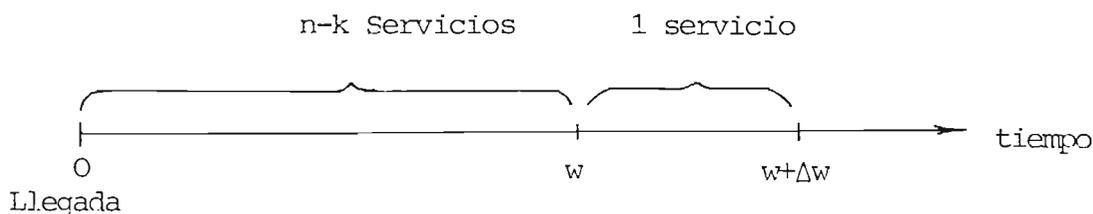
$$\begin{aligned}
 \text{Donde } \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^n - \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^n \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{k\mu}} - \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^k}{1 - \frac{\lambda}{k\mu}} \\
 &= \frac{\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^k}{1 - \frac{\lambda}{k\mu}}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$f_W(w) = 1 - \frac{K^k}{k!} \frac{\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^k}{\left(1 - \frac{\lambda}{k\mu}\right)} P_0 = 1 - \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{K! \left(1 - \frac{\lambda}{k\mu}\right)} P_0, \quad w = 0.$$

Para el caso en que  $W > 0$ .

Supóngase que la llegada se produce en el tiempo cero, en cuyo momento hay  $n \geq K$  unidades en el sistema. Si se tienen  $n - K$  servicios en  $w$  y un servicio en un pequeño intervalo de tiempo  $\Delta w$  entonces el tiempo de espera de la unidad que llegue está entre  $w$  y  $w + \Delta w$ .



Y probabilísticamente se tendría:

$$\begin{aligned}
 & P(w < \text{tiempo de espera} < w + \Delta w) \\
 & = F_W(w + \Delta w) - F_W(w) \qquad (6)
 \end{aligned}$$

Donde cada uno de los  $K$  canales da servicio continuamente, durante el intervalo de tiempo  $w$ .

Puesto que la distribución del tiempo de servicio es exponencial con parámetro  $\mu$  para cada canal, la distribución del número de unidades servidas en  $w$  es de Poisson con parámetro  $\mu$ .

Si  $X_i$  es el número de unidades servidas por el  $i$ -ésimo canal en el tiempo  $w$ , entonces:

$$P_{X_i}(x_i) = \frac{(\mu w)^{x_i}}{x_i!} e^{-\mu w}, \quad x_i = 0, 1, 2, \dots$$

Sea  $Y$  el número total de servicios en los  $K$  canales,

es decir,

$$Y = \sum_{i=1}^k X_i$$

Y siendo cada una de las variables  $X_i$  de Poisson con parámetro  $\mu$  se tiene que  $Y$  es también una variable aleatoria de Poisson pero con parámetro  $K\mu$ .

Así,  $P(w < \text{tiempo de espera} < w + \Delta w)$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} P_n \quad P(n - k \text{ servicios en } w) \cdot P(1 \text{ servicio en } \Delta w).$$

Y desarrollando:

$P(w < \text{tiempo de espera} < w + \Delta w)$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{K^{n-k}} \frac{(\lambda)^n}{K!} P_0 \cdot \frac{(K\mu w)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-K\mu w} \cdot \mu K \Delta w e^{-K\mu \Delta w}$$

Y usando el resultado mostrado en (6) se tiene:

$$F_W(w + \Delta w) - F_W(w) = \frac{K^k P_0 K \mu \Delta w e^{-K\mu \Delta w}}{K! (K\mu w)^k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (K\mu w)^n}{K^n (n-k)!} e^{-K\mu w}$$

$$\Rightarrow \frac{F_W(w + \Delta w) - F_W(w)}{\Delta w} = \frac{\mu e^{-K\mu \Delta w}}{(\mu w)^k (k-1)!} P_0 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda w)^n}{(n-k)!} e^{-K\mu w}$$

y al tomar el límite cuando  $\Delta w \rightarrow 0$ , se tiene la función de densidad de probabilidad de  $W$ :

$$f_W(w) = \frac{\mu}{(\mu w)^k (k-1)!} P_0 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda w)^n}{(n-k)!} e^{-k\mu w}, \quad w > 0$$

Haciendo  $m = n - k$  se tiene:

$$f_W(w) = \frac{\mu}{(\mu w)^k (k-1)!} P_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda w)^{m+k}}{m!} e^{-k\mu w}$$

$$= \frac{\mu (\lambda w)^k}{(\mu w)^k (k-1)!} P_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda w)^m}{m!} e^{-k\mu w}$$

$$= \frac{\mu (\lambda w)^k}{(\mu w)^k (k-1)!} P_0 e^{-k\mu w} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda w)^m}{m!}$$

$$= \frac{\mu (\lambda w)^k}{(\mu w)^k (k-1)!} P_0 e^{-k\mu w} \cdot e^{\lambda w}$$

$$f_W(w) = \frac{\mu}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 e^{-(k\mu-\lambda)w}, \quad w > 0.$$

Así, la función de densidad de probabilidad de  $W$  está determinada por:

$$f_W(w) = \begin{cases} 1 - \frac{(\lambda/\mu)^k}{k! (1 - \lambda/k\mu)} P_0, & w = 0 \\ \frac{\mu}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 e^{-(k\mu-\lambda)w}, & w > 0 \end{cases}$$

El tiempo total de espera en el sistema es el tiempo esperado en la cola más el tiempo esperado de servicio, es decir,

$$E(t) = \left[ \int_0^{\infty} \frac{w \mu}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 e^{-(k\mu - \lambda)w} dw \right] + \frac{1}{\mu}$$

$$E(t) = \frac{\mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)! (k\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{1}{\mu} .$$

Sin demostrar, se afirma que el número de unidades en servicio es:  $\frac{\lambda}{\mu}$ , es decir si  $h$  es el número de unidades en servicio,

$$E(h) = \frac{\lambda}{\mu} .$$



cio que se da por orden de llegada. La distribución del tiempo entre llegadas sucesivas al sistema se supone exponencial, al igual que la distribución de tiempo para dar servicio a una unidad. Recuérdese que, si el tiempo entre eventos sucesivos se distribuye exponencialmente, entonces la distribución del número de eventos que tiene lugar en cualquier intervalo de tiempo sigue una distribución de Poisson.

El sistema de colas de canal simple suele presentarse mucho en la vida cotidiana, por ejemplo en los cines, se entra en un sistema de canal simple para adquirir los boletos de entrada.

A continuación se establecerá cómo construir un modelo de simulación en computadora para un sistema de Poisson de canal simple. En primer lugar debe establecerse el objetivo que se persigue al estudiar este tipo de sistema. Supóngase que se desea investigar los siguientes aspectos del sistema de colas de canal simple:

1. El tiempo promedio que pasa una unidad en el sistema y la distribución de frecuencias de ese tiempo.
2. La utilización promedio del canal de servicio.

3. El número promedio de unidades en el sistema y su distribución de frecuencias.
4. El tiempo promedio que pasa una unidad en la cola y su distribución de frecuencias.

A este respecto, se puede decir que el objetivo del programa de simulación es proporcionar información respecto al funcionamiento de un sistema de colas de Poisson. Se supondrá que esto es suficiente para dar el siguiente paso, - que es la construcción del modelo de computadora.

Se está tratando con un sistema en el que las unidades llegan aleatoriamente a la instalación de servicio. El modelo de computadora que se construirá debe ser capaz de reproducir este comportamiento. Además, el sistema debe servir a las unidades sobre la base del orden de llegada. Por tanto, es probable que algunas unidades se vean obligadas a esperar en la cola hasta que les llegue su turno para recibir el servicio.

Se examinará el sistema desde el punto de vista del análisis del "evento siguiente". Así, se puede comenzar a observar el sistema en cualquier punto arbitrario del tiempo y tratar de descubrir lo que va a suceder. Entonces la pregunta a la que debe buscarse respuesta es: ¿Qué va a suceder?

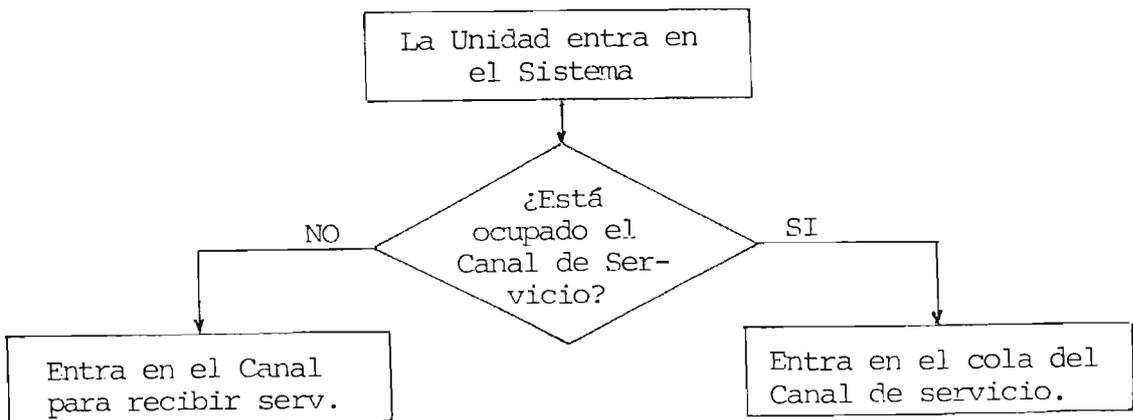
En este sistema sólo hay dos posibilidades:

- i) Una unidad entra al sistema, o
- ii) El canal de servicio pone fin a la atención prestada a una unidad.

Esto simplifica aún más el análisis, porque lo único que se hará a continuación es tomar una decisión respecto a lo que se debe hacer en caso de que ocurra alguno de esos eventos.

Examínese el esquema de la Figura 2, para ver qué debe realizar el simulador cuando se produce el primer evento.

FIGURA 2. Diagrama de operaciones de una unidad que entra en el Sistema.

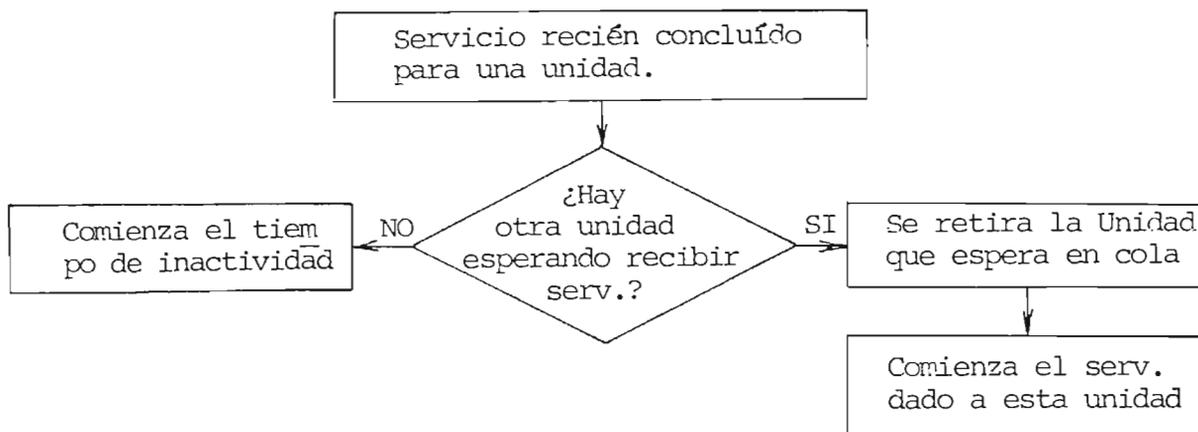


Se observa que los "estados" posibles de una unidad que entra al sistema son:

- 1) Se encuentra en la línea de espera, o
- 2) Recibe servicio.

Examínese ahora el esquema de la Figura 3, recuérdese que interesa la situación de las instalaciones de servicio - al completarse el servicio.

FIGURA 3. Diagrama de operaciones de la instalación de servicio al completar el servicio dado.



Se observa que las instalaciones de servicio tienen sólo dos estados:

- i) Están ocupadas (el servicio a la siguiente unidad comienza inmediatamente), o

- ii) Están inactivas (ninguna unidad espera para recibir servicio).

Siguiendo con esta idea de análisis del evento siguiente, se investigará posteriormente, cómo se puede modelar todo el sistema, que incluye las unidades en la cola, la unidad que está recibiendo servicio y las instalaciones de servicio propiamente dichas. Se verá que es posible incluir en el modelo la idea de los "estados" de una unidad dada o las instalaciones de servicio.

Mientras tanto, la siguiente pregunta que interesa contestar es la de cómo hacer que ocurran los eventos mencionados en un tiempo simulado.

Para este análisis, se adoptará la idea de "relojes" - para "vigilar" lo que debe ocurrir a continuación en el modelo.

En general, lo que hace el modelo de computadora es - transformar el tiempo real. A veces la - - - - transformación es de naturaleza comprimida, como cuando se simulan meses de funcionamiento en la fábrica en minutos de tiempo de computadora; a veces, la transformación es de naturaleza expansiva, como cuando se simulan las reacciones - atómicas de unos cuantos nanosegundos (mil millonésimas de

segundo) en minutos u horas.

En la mayoría de los sistemas de colas, el tiempo es considerado como una variable aleatoria. Sin embargo, se está interesado en los eventos que ocurren aleatoriamente en el tiempo. En la realidad no se sabe el tiempo exacto en el que ocurrirán los eventos, por ejemplo, el empleado que vende boletos de entrada en la taquilla de un cine, no sabe cuándo llegará la persona siguiente para adquirir una entrada.

No obstante, en un modelo de computadora se sabe cuándo se producirá la siguiente llegada, puesto que se conoce la distribución de probabilidad del tiempo entre llegadas sucesivas, al igual que de la duración de un servicio dado; y porque es posible generar los valores de esas distribuciones en el computador usando las subrutinas que se mostraron en 3.2.4.

Sean  $t_1$  y  $t_2$  relojes que caminan hacia atrás desde cualquier momento dado hasta cero, donde

$t_1$  : Marca el tiempo hasta que se produce la siguiente llegada al sistema.

$t_2$  : Marca el tiempo hasta que se termina el servicio dado a la unidad que se encuentra en el canal.

Los valores reales de tiempo ajustados inicialmente en esos relojes se generarán por el hecho de que se conocen tanto la distribución del tiempo entre llegadas como la del tiempo de servicio. Así, cuando llega una unidad al sistema, lo único que se hace es generar un tiempo entre llegadas para la llegada siguiente y colocar ese valor en el reloj apropiado.

Finalmente, se instalará en el modelo un "reloj maestro" (control maestro del tiempo), para mantener un registro general del tiempo total transcurrido en la simulación.

Se supone que todos los relojes funcionarán con la misma unidad básica de tiempo (minutos, horas, días, etc.).

Para ilustrar el uso de esos tres relojes, véase el ejemplo que continua, el cual se resume en la siguiente tabla:

TABLA 1: Relojes en un ejemplo de sistema de colas.

Reloj Maestro (CMT)	Reloj de llegada ( $t_1$ )	Reloj de servicio ( $t_2$ )	Unidades en servicio	Unidades en la cola (X)
0	<u>2</u>	0	0	0
2	<u>3</u>	<u>5</u>	1	0
5	<u>1</u>	2	1	1
6	<u>4</u>	1	1	2
7	3	<u>2</u>	1	1
9	1		1	0

La simulación comienza en el instante cero, cuando el sistema está vacío. Puesto que no hay ninguna unidad en el canal, no se puede producir ningún servicio, hasta la llegada de la primera unidad que entre en el canal. Por ende, la simulación tiene como primer evento la llegada de una unidad y, se tiene que generar el momento en que se produce esa llegada.

Supóngase que el valor generado fué 2 unidades de tiempo del reloj. Se coloca un "2" en el reloj de llegada, lo que significa que la llegada se producirá en dos unidades de tiempo del tiempo del reloj maestro (CMT).

Cada vez que se ajusta uno de los relojes, es preciso hacerse la pregunta ¿Se sabe cuál será el evento siguiente en la simulación y cuándo se producirá?.

En este instante, se mira hacia el futuro a partir - del tiempo cero del reloj maestro, y se observa que el siguiente evento es una llegada, en el tiempo "2" del reloj maestro. Por tanto, se avanza el reloj maestro y, se hace que la unidad entre al servicio.

Después de ajustar el reloj, debe preguntarse cuándo - se producirá el evento siguiente y cuál será ese evento.

En el momento "2" del reloj maestro, no se sabe si el servicio dado a la unidad que se encuentra en el canal concluirá o no antes de que se produzca la siguiente llegada.

Para determinar cuál será el evento siguiente en la - simulación, es preciso generar el tiempo que debe transcurrir hasta la llegada siguiente y el tiempo de servicio a la unidad que acaba de entrar al canal. Supóngase que ese tiempo es "5" y el tiempo de llegada es "3". Se incluyen esos valores en el reloj de servicio y de llegada en el - tiempo "2" del reloj maestro. El evento que se produce a continuación en la simulación es una llegada que tendrá - lugar en el tiempo "5" del reloj maestro. Por consiguiente

te se ajustan todos los relojes en tres unidades. El reloj maestro avanza a "5" y el de servicio disminuye a "2", puesto que se completarán tres unidades de tiempo de servicio al producirse la llegada en el tiempo "5" del reloj maestro.

Puesto que el canal de servicio está ocupado, la llegada deberá formarse en la cola. Nuevamente, ¿Cuál es el evento siguiente y cuándo se producirá?. No se puede determinar hasta que se conozca cuál es el tiempo que falta hasta la llegada siguiente. Supóngase que ese tiempo es de una unidad. Incluir ese tiempo en el reloj de llegadas en el tiempo "5" del reloj maestro. Obsérvese que esa llegada es el siguiente evento simulado que se produce. Así, se avanza el reloj maestro en "1" unidad, se reduce el reloj de servicio en "1" unidad y, se hace entrar en la cola a la unidad que llega, haciendo que su longitud sea dos.

Supóngase que el tiempo hasta la siguiente llegada sea "4" unidades de tiempo, lo que indica que el siguiente evento es la conclusión del servicio dado a la unidad que se encuentra en el canal, en el momento "7" del reloj maestro.

Se avanza el reloj maestro a "7" y se reduce el reloj de llegadas a tres unidades de tiempo, se retira la unidad del canal de servicio, disminuyendo la longitud de la cola

a uno. Para determinar el evento siguiente, se genera un tiempo de servicio para la unidad que acaba de entrar en el canal, supóngase que este tiempo es "2" unidades. Se incluye ese valor en el reloj de servicio en el tiempo "7" del reloj maestro.

El siguiente evento que se produce es la conclusión del servicio dado, lo que tiene lugar en el tiempo "9" del reloj maestro. Se avanza el reloj maestro en "2" unidades, reduciendo en la misma cantidad el reloj de llegadas, se retira la unidad que se encuentra en el canal, se hace entrar a la unidad que espera al canal y se reduce la longitud de la cola a "0". Nuevamente, para determinar el evento siguiente, es preciso generar el tiempo de servicio para la unidad que acaba de entrar en el canal. Se prosigue la manipulación de los tres relojes hasta que se haya simulado el sistema durante un período de tiempo necesario para el análisis

Un método para construir un modelo de computadora para este sistema de colas consiste en diseñar dos matrices básicas:

- i) La matriz unitaria (MU), que contiene la información pertinente sobre cada una de las unidades del sistema.



Las filas de esta matriz se definen como sigue: Cada vector horizontal  $MU_{i,j}$  ( $j = 1, \dots, M$ ) se denomina vector unitario. Existe un vector por cada unidad que se tiene en el sistema. Las  $j$  columnas contienen toda la información pertinente sobre la  $i$ -ésima unidad ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Para el caso sencillo de colas que se estudia, bastará con las primeras cuatro columnas de las cuales se describen como sigue:

1. Número de Unidad: Se trata de un número secuencial asignado con fines de identificación a una unidad generada por el simulador e incluida en el sistema de colas.
2. CMT de la entrada inicial al sistema: Contiene el tiempo del reloj maestro de la simulación, registrado cuando la unidad entró al sistema.

Obsérvese que una unidad entra al sistema cuando llega a la cola. Evidentemente, si la longitud de la cola es cero y el canal está vacío, pasa directamente al canal de servicio.

3. Estado Actual: Sólo hay dos posibles estados para la unidad que entra al sistema (estado 1: entra en la cola; estado 2: entra al canal).

Cuando  $MU_{i-3} = 1$ ,  $MU_{i,4} = MU_{i,2}$ . Esto se debe a que la

unidad entró en la cola al mismo tiempo que ingresó al sistema. Sin embargo, cuando  $MU_{i,3} = 2$  la  $MU_{i,4}$  y la  $MU_{i,2}$  no serán necesariamente iguales; pero  $MU_{i,4} =$  "CMT de la entrada al canal de servicio".

En la Figura 4, se observa que se pueden agregar más - columnas a la matriz unitaria, esto es útil cuando se están analizando otros sistemas de colas por ejemplo, de canales en serie; donde se podrían agregar columnas con información referente al tiempo de servicio para cada uno de los canales existentes en el sistema.

Para ilustrar el uso de la matriz unitaria, se construirá para el ejemplo descrito en la Tabla 1. La información resumida es para las unidades que se encuentran en el sistema de colas en las seis unidades de tiempo del reloj maestro de la simulación. La matriz unitaria para estas unidades se presenta en la Tabla 2.

TABLA 2: Ejemplo de MU en CMT = 6.

Número de Unidad	CMT de la entrada inicial al sistema	Estado Actual	CMT de la entrada al estado actual
1	2	2	2
2	5	1	5
3	6	1	6

En el punto del tiempo que se tiene en consideración, las tres primeras llegadas se encuentran todavía en el sistema. La primera llegada entró en el sistema en  $CMT = 2$ . En este instante está en estado 2 (en el canal de servicio) y entró en su estado actual en  $CMT = 2$ . La segunda llegada entró en el sistema en  $CMT = 5$  y está actualmente en estado 1 (en la cola), habiendo entrado en su estado actual en  $CMT = 5$ . La tercera unidad ingresó al sistema en  $CMT = 6$ , está en estado 1 y entró en él en  $CMT = 6$ .

Si se examina la matriz unitaria en  $CMT = 7$ , se observa que sólo han ingresado la segunda y la tercera unidad, porque la primera ha recibido su servicio y ha abandonado el sistema. La MU en  $CMT = 7$  se da en la Tabla 3.

TABLA 3: Ejemplo de MU en  $CMT = 7$ .

Número de Unidad	CMT de la entrada inicial al sistema	Estado Actual	CMT de la entrada al estado actual
2	5	2	7
3	6	1	6

En  $CMT = 8$  la MU queda igual que en  $CMT = 7$ ; en  $CMT = 9$  y la MU es como sigue:

TABLA 4: Ejemplo de MU en CMT = 9.

Número de Unidad	CMT de la entrada inicial al sistema	Estado Actual	CMT de la entrada al estado actual
3	6	2	9

Se observa que la MU cambia con respecto al tiempo - simulado pues toda unidad que concluye su servicio abandona el sistema.

En la Figura 5, se muestra en forma conceptual, la matriz de eventos siguientes (MES).

FIGURA 5. Matriz de eventos siguientes (MES).

		j	
		1	2
		Condición de entrada al sistema	Reloj de la instalación
i	1	Tiempo hasta que ocurre el evento	
	2	Número de la unidad en cuestión	

Las inscripciones de las columnas  $j$  indican las condiciones en lo que respecta a los relojes  $t_1$  y  $t_2$ . La primera posición de la columna "condición de entrada al sistema"

tema", se denomina tiempo hasta que ocurre el evento siguiente, es decir,  $t_1$ : tiempo que pasa hasta que la unidad siguiente entra en el sistema. La siguiente posición se denomina "número de la unidad en cuestión" y contiene el número de la unidad al incluirse en  $MU_{i,1}$  para la unidad que entrará al sistema en  $t_1$ . La primera posición de la columna "reloj de la instalación" contiene la cantidad de tiempo que estará ocupado el canal, dando servicio a la unidad que contiene en ese momento. La segunda posición designa el número con el que se registra en  $MU_{i,1}$  a la unidad que está recibiendo el servicio.

Para ilustrar el empleo de la matriz de eventos siguientes (MES) considérese el ejemplo descrito en la tabla 1. La MES para  $CMT = 2$  se da en la Tabla 5.

TABLA 5: Ejemplo de MES en  $CMT = 2$ .

	Condición de entrada al sistema	Reloj de la instalación
Tiempo hasta que se produce el evento	3	5
Número de la unidad en cuestión	2	1

En  $CMT = 2$ , se producirá la llegada siguiente al cabo de tres unidades de tiempo, y esa llegada será la segunda - unidad que entra al sistema. El servicio presente se completará dentro de cinco unidades de tiempo, servicio que está siendo dado a la primera unidad que entró al sistema.

La MES para  $CMT = 6$  se da en la Tabla 6.

TABLA 6: Ejemplo de MES en  $CMT = 6$ .

	Condición de entrada al sistema	Reloj de la instalación
Tiempo hasta que ocurre el evento	4	1
Número de la unidad en cuestión	4	1

La siguiente unidad que llega es la número 4 y lo hará dentro de 4 unidades de tiempo. La unidad que está recibiendo servicio es la 1 y permanecerá en el canal durante una - unidad más de tiempo.

A continuación se definen otras variables que serán útiles para reunir información sobre el sistema de colas en estudio.

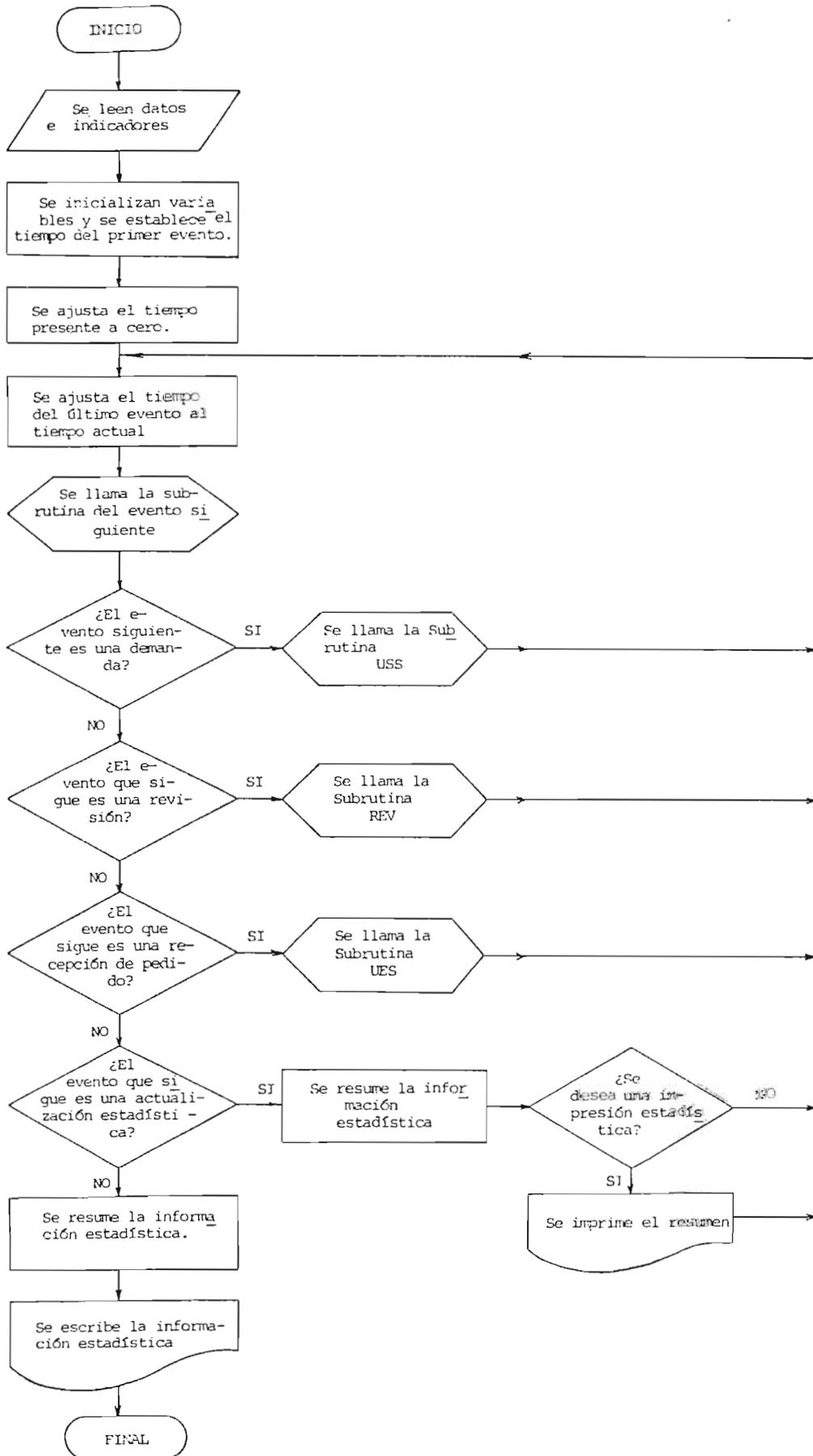
U : Contador para registrar el número de unidades que hay actualmente en el sistema.

- TS : Variable ocupada para acumular la cantidad total de tiempo que el canal permanece ocupado.
- T(I) : Vector para reunir la distribución de frecuencias - del tiempo total que pasa una unidad en el sistema.
- TT : Variable utilizada para acumular el total de tiempos que permanecen las unidades en el sistema. Se utilizará para calcular un tiempo promedio al concluir la simulación.
- N(J) : Vector para reunir la distribución de frecuencias - del número de unidades que hay en el sistema.
- TEC : Variable utilizada para acumular el tiempo total de espera de una unidad en la cola.
- TC(I) : Vector utilizado para reunir la distribución de frecuencias de los tiempos de espera en la cola.
- IO : "Interruptor de ocupación" para el canal. IO = 0 implica que el canal está inactivo. IO = 1, indica que está ocupado.

Por ahora, basta con las anteriores para comenzar a reunir las piezas. Se establecerá en primer lugar un Macrodiagrama de flujo de las operaciones del modelo de simulación,

tal y como funcionará en un momento de tiempo. En la Figura 6, se presenta este macrodiagrama de flujo, en el cual se muestran las diversas funciones del simulador que, en el programa real, se segmentarán en subrutinas. En este modelo, se ha escogido como criterio de terminación del experimento un límite superior para el valor de CMT. Es decir, que se permite que el programa se ejecute durante cierta cantidad especificada de tiempo simulado. Aunque bien pudo haberse utilizado otro criterio, por ejemplo, "analizar el sistema hasta que hayan pasado por el X unidades". La elección se basa primordialmente en los objetivos del experimento.

Se presenta un programa FORTRAN para simular el sistema de colas de Poisson de canal simple al final del libro, junto con un programa FORTRAN para simular los sistemas de inventarios.



## CAPITULO V

### TEORIA DEL INVENTARIO. (CONCEPTOS BASICOS) Y SIMULACION DE SISTEMAS DE INVENTARIO.

#### INTRODUCCION:

Cuando se menciona la palabra inventario, se puede imaginar el levantamiento de un censo de los bienes y haberes de una persona o empresa; sin embargo, la acepción que se le da a esta palabra en esta teoría es mucho más rica, pues pone de manifiesto una serie de actividades y, permite tomar decisiones que pueden afectar sustancialmente el comportamiento o las políticas de trabajo de la empresa u organización que la utilice.

Mantener un inventario para ventas o usos futuros es muy común en los negocios, así como también en organizaciones de servicio, pues éstas deben conservar un inventario de los artículos necesarios para prestar sus servicios. Al analizar problemas de inventario, la pregunta a la que se debe responder no se refiere a si es preciso o no llevar un inventario, sino de qué tamaño deberá ser y cómo se podrá mantener.

### 5.1 TEORIA DEL INVENTARIO. (CONCEPTOS BASICOS).

Puede decirse, que el problema de Inventario se presenta bajo la forma fenómeno de espera de una naturaleza muy particular. Pues en lugar de admitir que las unidades llegan o se les atiende una por una, se supone que las llegadas y el servicio se refieren a conjuntos de unidades.

En general, cualquier problema de inventarios incluye:

1. Una demanda de ciertos artículos que, en general, es aleatoria siendo una función del tiempo, pero estadísticamente estable.
2. La existencia de artículos para satisfacer la demanda, esta existencia se agota y debe haber reaprovisionamiento. El reprovisionamiento puede ser continuo, periódico o realizarse a cualquier intervalo de tiempo.
3. Costos asociados a las operaciones: inversiones, depreciaciones, seguros, almacenamiento, etc.

Estos costos permiten establecer una función económica, la cual se debe optimizar.

4. Objetivos por alcanzar o restricciones que intervienen

de acuerdo con la naturaleza misma del problema.

La demanda de un producto influye con seguridad en el tamaño del inventario. Se presenta una demanda cada vez que se hace el intento de comprar un artículo, en cambio, una venta se produce sólo cuando el cliente concluye la compra de un artículo. Por ejemplo, si un cliente pide un artículo que no se tiene en existencias, se produce una demanda, pero no una venta. El cliente puede ir a hacer su compra a otro lado, en cuyo caso se perderá la venta y por ende los beneficios de la misma; o bien, puede estar dispuesto a esperar hasta que se completen las existencias para adquirir el producto, en cuyo caso la demanda se registra como pedido retrasado.

Conforme se van retirando unidades del inventario, su nivel descenderá y llegará a un punto en el que será necesario renovar las existencias, es decir, habrá necesidad de realizar un reaprovisionamiento.

Este punto se conoce como punto de repedido (o renovación de pedido, o bien, nivel de reaprovisionamiento). Cuando el nivel de inventario llega al punto de repedido o cae por debajo de él, se hace un pedido de cierta cantidad de unidades que, cuando lleguen, harán que aumente el

nivel de inventario. El número de unidades solicitadas ca da vez se conoce como cantidad de pedido y se denota por  $Q$ .

El tiempo de espera de obtención o, simplemente, tiem po de espera es la demora entre la decisión de hacer un pe dido y la recepción de los artículos o unidades. El tiem po de espera, ejerce una influencia significativa en el mo mento en que debe hacerse un pedido. Por ejemplo, si se - debe recibir un pedido el viernes y el tiempo de espera es de cuatro días, se deberá hacer el pedido el lunes. El - tiempo de espera puede ser constante o una variable aleato ria.

Se dice que un inventario se rompe o sufre déficit, si el nivel del mismo es cero y todavía se tienen pedidos por satisfacer, es decir, si se agotan las existencias de algún artículo y se tienen pedidos retrasados.

Se presenta a continuación un breve panorama de los - costos que pueden tomar parte en un sistema de inventario. Aunque en los modelos que se estudiarán no se incluirán to dos por razones de simplicidad.

Considérense los siguientes ejemplos, en los que se - involucran algunos costos, que luego se estudiarán con más detalle:

Ejemplo 1: Una compañía fabricante de televisores produce sus propios altoparlantes, los cuales se usan en la producción de sus aparatos. Los televisores se montan en una línea de producción continua a una tasa de 8000 por mes. - Los altoparlantes se producen en lotes porque no vale la pena mantener una línea de producción continua y pueden producirse cantidades relativamente grandes en un tiempo corto.

La compañía se interesa en determinar cuánto y cuándo producir.

Se deben considerar varios costos:

1. Cada vez que se produce un lote, se incurre en un costo de preparación de  $\text{¢ } 12,000$ . Este costo incluye otros costos, tales como: costos administrativos, costo de llevar registros, de uso de las herramientas, de mano de obra calificada, etc.

Es de notar, que la existencia de este costo aboga por producir grandes lotes de altoparlantes.

2. La producción de altoparlantes en grandes lotes conduce a un inventario grande. Se estima que el costo de mantener un alto parlante de inventario es de  $\text{¢ } 0.30$  por mes. Este costo incluye el costo del capital paralizado, el espacio de almacenamiento, seguro, impuestos,

protección, etc.

La existencia de un costo de almacenamiento aboga por producir lotes pequeños.

3. El costo de producción de un solo altoparlante (excluyendo el costo de preparación) es de ¢ 10.00 y se puede suponer que es un costo unitario independiente del tamaño del lote producido (sin embargo, en general, el costo unitario de producción puede no ser constante y es posible que decrezca dependiendo del tamaño del lote).
4. La política de la compañía prohíbe planear deliberadamente algún déficit (falta, escasez, carestía) de cualquiera de sus componentes. Sin embargo, en ocasiones se descubre un déficit de altoparlantes y se ha estimado que cada altoparlante del que no se disponga cuando se le requiera cuesta ¢ 1.10 por mes. Este costo incluye el costo de instalar altoparlantes después de que el televisor está completamente armado, el espacio de almacenamiento, el ingreso retrasado, llevar registros, etc.

Ejemplo 2: Un distribuidor de bicicletas al por mayor está teniendo dificultades con el déficit repetido del modelo

más popular de 10 velocidades y, actualmente está revisando la política de inventario para este modelo. El distribuidor compra este modelo mensualmente y, a continuación, se lo suministra a diversas tiendas en el occidente del país. A solicitud de éstas, el distribuidor vende al por mayor las bicicletas a cada una de las tiendas en su región. El distribuidor ha analizado sus costos y ha determinado que los siguientes son importantes:

1. El costo del déficit, es decir, el costo de no tener una bicicleta a la mano cuando se necesita. En general, las tiendas aceptan un retraso en la entrega. - pero el distribuidor siente que incurre en una pérdida estimada de ¢ 15.00 por bicicleta, aún cuando pueda permitirse algún déficit. Este costo representa una - evaluación del costo de la pérdida de la buena disposición, costos administrativos adicionales en que se incurre y el costo del retraso en el ingreso recibido.

En otros modelos, que compiten (en precio), las tiendas no aceptan retrasos, lo que conduce a ventas perdidas. En este caso, se debe incluir el costo de la venta perdida en el costo del déficit.

2. El costo de almacenamiento, es decir, el costo de mantener un inventario es de ¢ 1.00 por bicicleta que que

da al finalizar el mes. Este costo representa el costo del capital paralizado, el espacio del almacén, seguro, impuesto, etc.

3. El costo de hacer el pedido, es decir, el costo de situar un pedido más el costo de la bicicleta; el papeleo de situar o un pedido se estima en ¢ 200.00 y el costo real de una bicicleta es de ¢ 35.00

En estos ejemplos se han mencionado los siguientes - costos:

- a) Costo de hacer un pedido o de fabricar;
- b) Costos de almacenamiento o de conservación;
- c) Costos de Penalización por demanda no satisfecha o por déficit.

Otros costos que intervienen y que no se han considerado son:

- d) El costo total del ingreso;
- e) El costo de rescate o salvamento;
- f) La tasa de descuento.

El costo de hacer un pedido o de fabricar una cantidad  $Q$ , puede representarse por una función,  $C(Q)$ . La forma más simple de esta función es una que sea directamente

proporcional a la cantidad pedida, es decir,  $C(Q) = p \cdot Q$ . Donde  $p$  representa el precio pagado por unidad. Otra forma es, que  $C(Q)$  se componga de dos partes: un término que es directamente proporcional a la cantidad pedida y otro que es una constante  $K$  para  $Q > 0$ . Y cero para  $Q = 0$ . Para este caso, si  $Q > 0$ , el costo de hacer el pedido, o de producción, está dado por  $C(Q) = K + p \cdot Q$ . La constante,  $K$ , suele llamarse costo de preparación y generalmente incluye el costo administrativo de hacer el pedido, el trabajo preliminar y otros gastos para iniciar una serie de producción.

En el ejemplo 1, el costo de preparación para la serie de producción es de  $\$ 12,000$ . Cada altoparlante cuesta  $\$ 10.00$ . Entonces el costo de producción viene dado por:  $C(Q) = 12,000 + 10 \cdot Q$ ,  $Q > 0$ . Y en el ejemplo 2, el costo de hacer el pedido está dado por:

$$C(Q) = 200 + 35 \cdot Q, \quad Q > 0.$$

Los costos de almacenamiento o conservación representan los costos asociados con el almacenamiento del inventario hasta que se vende o se usa, pueden incluir: el costo del capital paralizado, del espacio, del seguro, de la protección y los impuestos atribuidos al almacenamiento. Este costo puede ser una función de la cantidad máxima con-

servada durante un período, de la cantidad promedio almacenada o del exceso acumulado de abastecimientos por encima de la cantidad requerida. Esta última es la más usual.

En el ejemplo 2, se utilizó este último punto de vista, el costo de almacenamiento fué de  $\text{¢ } 1.00$  por bicicleta que se tuviera al final del mes. Esto puede interpretarse como la pérdida de intereses al mantener el capital paralizado en una bicicleta "innecesaria" por un mes, el costo del espacio extra de almacenamiento, el seguro, etc.

Se incurre en el costo de penalización por demanda no satisfecha o por déficit, cuando la cantidad del artículo requerido (demanda) es mayor que la existencia disponible. Este costo depende de la estructura del modelo, pues puede ser que el modelo acepte o no déficit, como se verá posteriormente.

Este costo puede interpretarse como sigue:

- 1) Si la demanda es mayor que el inventario disponible y se satisface por un pedido de prioridad; o bien,
- 2) No se satisface en lo absoluto.

En (1) puede suponerse el costo de penalización como el costo completo del pedido de prioridad que se utiliza para satisfacer la demanda en exceso. En (2), situación -

en la que se pierde la demanda no satisfecha, puede suponerse el costo de penalización como la pérdida de ingresos.

Se suele hablar de acumulación y no acumulación de la demanda no satisfecha; se dice que la demanda se acumula, si el cliente está decidido a esperar un reabastecimiento para satisfacer su pedido. Y, no se acumula si el cliente decide hacer su compra en otro establecimiento o si las existencias son mayores que la demanda. Lo que verdaderamente interesa son los costos de penalización asociados con la acumulación de la demanda no satisfecha. Los de la no acumulación fueron considerados en las dos situaciones anteriores. En cambio, entre los costos de penalización asociados con la acumulación de la demanda están: La pérdida de la buena disposición del cliente, su renuencia posterior a llevar a cabo negocios con la empresa, el costo del ingreso retrasado, el tener que llevar registro extra, etc.

En general, el costo de la demanda no satisfecha es una función del exceso de la demanda por encima del nivel de inventario.

El costo total del ingreso puede incluirse o no en el modelo. Si se supone que tanto el precio como la demanu

da del producto no están bajo el control de la compañía, - entonces el ingreso por las ventas es independiente de la política de inventario de la empresa y puede despreciarse. Sin embargo, si se desprecia el ingreso en el modelo, entonces debe incluirse la pérdida de ingreso en el costo de penalización por demanda no satisfecha, siempre que la empresa no pueda satisfacer la demanda y se pierda la venta, esto es en el caso de que la demanda no se acumule, y si se acumula entonces debe incluirse el costo del retraso en el ingreso, en el costo de la demanda no satisfecha.

El valor de rescate de un artículo es el valor de un artículo rezagado a la terminación del período de inventario. Si se desarrolla una política de inventario para un número indefinido de períodos, y no existe obsolescencia, no se tienen artículos rezagados. Ya que lo que queda al final de un período es la cantidad disponible al principio del período siguiente. Por otra parte, si se va a desarrollar la política únicamente para un período, el valor del rescate representa el valor de enajenación del artículo para la empresa (es decir, lo que el artículo le está negando a la empresa), por ejemplo, el precio de venta. Al negativo del valor de rescate se le llama "costo de rescate" (o costo de Salvamento).

La tasa de descuento, toma en consideración el valor

del dinero con el tiempo. Esto es importante, ya que cuando una empresa paraliza capital en inventario, no puede utilizar ese dinero para otros fines. Por ejemplo, pudo invertirse el dinero en inversiones seguras, imagínese, bonos del gobierno, y tener una ganancia sobre la inversión, por decir algo, del 7% de aquí a un año. Por tanto, un colón invertido ahora valdría  $\text{C} 1.07$  de aquí a un año, o bien, la utilidad de un colón de aquí a un año es equivalente a  $\alpha = \frac{1}{1.07}$  la cantidad  $\alpha$  se conoce como "factor de descuento". Así, al considerar la "rentabilidad" de una política de inventario, la utilidad o los costos de aquí a un año deben multiplicarse por  $\alpha$ ; de aquí a dos años, por  $\alpha^2$ ; y así sucesivamente.

La convención de elegir un factor de descuento  $\alpha$  que se basa en el valor actual de un colón liberado de aquí a un año es arbitraria y pudo haberse usado cualquier período, por ejemplo, 1 mes.

En problemas que tienen "horizontes limitados de tiempo" (tiempos cortos), puede suponerse que  $\alpha = 1$  y despreciarse, porque el valor actual de un colón liberado durante este horizonte limitado de tiempo no cambia mucho. Sin embargo, en los problemas que tienen horizontes de tiempo largos, debe incluirse el factor de descuento.

## 5.2 CLASIFICACION DE LOS MODELOS DE INVENTARIO.

Existen varias clasificaciones de los modelos de inventarios, generalmente se clasifican según se conozca la demanda para un período, en cuyo caso se dice que la demanda es determinística; o bien, puede ser que la demanda para un período sea una variable aleatoria con distribución de probabilidad conocida, en este caso se dice que la demanda es aleatoria.

Otra clasificación resulta de acuerdo a la forma en que se revisa el inventario: continua o periódicamente.

En la revisión continua, se hace un pedido tan pronto como el nivel de existencias cae por debajo (o llega) al punto de repedido. En cambio, en el caso de revisión periódica, el nivel de inventario se comprueba a intervalos discretos, por ejemplo, al final de cada semana, y se toma la decisión de hacer un pedido en este instante, aún cuando el nivel de inventario haya caído por debajo del punto de repedido en el período que finaliza.

Con frecuencia se hace la consideración de que no existen retrasos en la entrega de los artículos pedidos o producidos; de hecho esta consideración no es válida, ya que en general, siempre existen retrasos en la entrega, por lo que puede haber necesidad de incorporarlos en el mo

delo de inventario. En este estudio, por razones de simplicidad, se supondrá que la entrega es instantánea.

### 5.3 MODELOS DETERMINISTICOS DE INVENTARIO.

Esta sección se refiere a los problemas de inventario en los que se supone conocida la demanda real. Se estudiará el caso en el que no se permite ningún déficit y, el caso en el que si se permite déficit, además el caso en el que hay descuentos dependiendo de las cantidades (producidas o pedidas) y no se permiten déficit.

#### REVISION CONTINUA - DEMANDA UNIFORME.

El problema más común de inventario se refiere al caso en el que los niveles de existencia se agotan con el tiempo y, entonces, se surten de nuevo por medio de la llegada de artículos nuevos. Un modelo sencillo que representa esta situación es el llamado "tamaño económico del lote" o, "cantidad económica", o simplemente "lote"; en el cual se supone que los artículos se extraen continuamente a una tasa conocida constante, denotada por  $r$ ; es decir, se requieren  $r$  artículos por unidad de tiempo. Además, los artículos se producen (o se piden) en números iguales,  $Q$  a la vez, y todos los  $Q$  artículos llegan simultáneamente cuando se desean. Los únicos costos que se consideran son: El costo de preparación  $K$  (cargado en el instante

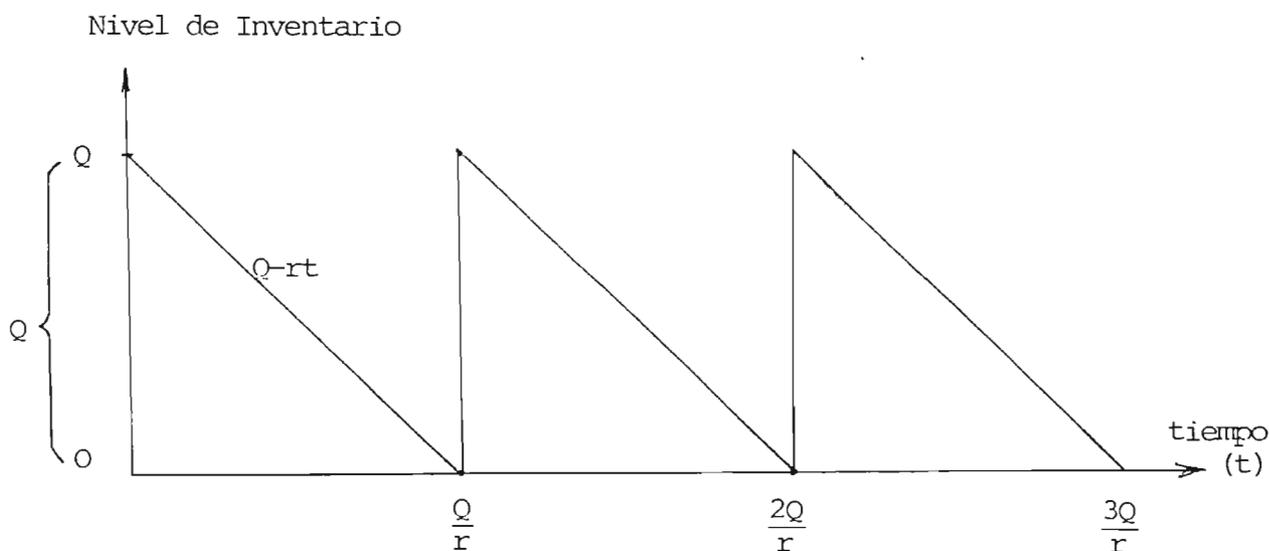
de la producción, o de hacer el pedido). El costo de producción (o costo de compra) de  $C$  colones por artículo. Y un costo de almacenamiento (o de mantener el inventario) de  $h$  colones por artículo por unidad de tiempo. El problema del inventario es determinar la frecuencia con la que debe hacerse una serie de producción (o un pedido) y cuál - debe ser el tamaño del lote, de manera tal que el costo por unidad de tiempo sea mínimo; usando como política del inventario la de revisión continua. El ejemplo de la producción de altoparlantes coincide con este modelo.

CASO 1: NO SE PERMITE NINGÚN DÉFICIT.

Se define un ciclo como el tiempo entre las series de producción (o como el tiempo entre pedidos). En lo que sigue, se hablará únicamente de serie de producción; sin embargo, debe tenerse presente que también se puede hablar de pedidos:

Se tiene que la longitud del ciclo viene dada por:  $\frac{Q}{r}$ .

Así, si se producen 24,000 altoparlantes en cada serie de producción y se usan a la tasa de 8,000 por mes, - entonces la longitud del ciclo es de  $\frac{24,000}{8,000} = 3$  meses. En la siguiente figura se ilustra cómo varía el nivel de inventario con el tiempo.



La figura muestra el nivel de inventario como función del tiempo; no se permite déficit, los segmentos sobre  $\frac{Q}{r}$ ,  $\frac{2Q}{r}$ , etc., son verticales puesto que no existe retraso. Como la demanda es uniforme, la diagonal que representa gráficamente a la demanda tiene por ecuación  $Q - rt$ , puesto que la pendiente es  $-r$  y el intercepto es  $Q$ , y debe ser así, pues el nivel de existencias disminuye uniformemente por ser uniforme la demanda.

El costo por unidad de tiempo,  $T$ , se obtiene como sigue:

i) El costo de producción por ciclo está dado por:

$$\begin{cases} 0, & \text{si } Q = 0 \\ K + cQ, & \text{si } Q > 0. \end{cases}$$

ii) El costo de almacenamiento por ciclo, se razona como sigue:

El nivel promedio de inventario durante un ciclo es  $\frac{(Q + 0)}{2} = \frac{Q}{2}$  artículos por unidad de tiempo y el costo correspondiente es:  $\frac{hQ}{2}$  por unidad de tiempo. Como la longitud del ciclo es  $\frac{Q}{r}$  el costo de almacenamiento por ciclo está dado por:  $\frac{hQ^2}{2r}$ .

iii) Por todo lo anterior el costo total por ciclo es:

$$K + cQ + \frac{hQ^2}{2r}.$$

iv) Entonces el costo por unidad de tiempo,  $T$ , viene dado por:

$$T = \frac{K + cQ + \frac{hQ^2}{2r}}{\frac{Q}{r}} = \frac{rK}{Q} + rc + \frac{hQ}{2}$$

Usando el criterio de la primera y segunda derivada, se encuentra el valor,  $Q^*$ , que minimiza  $T$ .

En efecto, al hacer  $\frac{dT}{dQ} = 0$  se obtiene:  $\frac{-rK}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$   
 entonces  $Q^* = \sqrt{\frac{2rK}{h}}$  y es un mínimo ya que  $\frac{d^2T}{dQ^2} > 0$ .

El tiempo,  $t^*$ , que se requiere para producir este valor óptimo de  $Q^*$  está dado por:

$$t^* = \frac{Q^*}{r} = \sqrt{\frac{2K}{rh}} .$$

Aplicando estos resultados al ejemplo de los altoparlantes, se tiene:

Costo de preparación:  $K = 12,000$

Costo de almacenamiento:  $h = 0.30$

Tasa mensual de montaje:  $r = 8,000$

De ahí que:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(8,000)(12000)}{0.30}} = 25,298.22 \approx 25,298$$

$$y \quad t^* = \frac{25,298}{8,000} = 3,162 \approx 3.2 \text{ meses.}$$

De donde, la línea de producción es iniciar cada 3.2 meses y producir 25,298 altoparlantes.

Para dar una ilustración gráfica, se puede obtener una tabla de valores para  $T$  en función de  $Q$ , (recuérdese que  $C = 10$ ), como

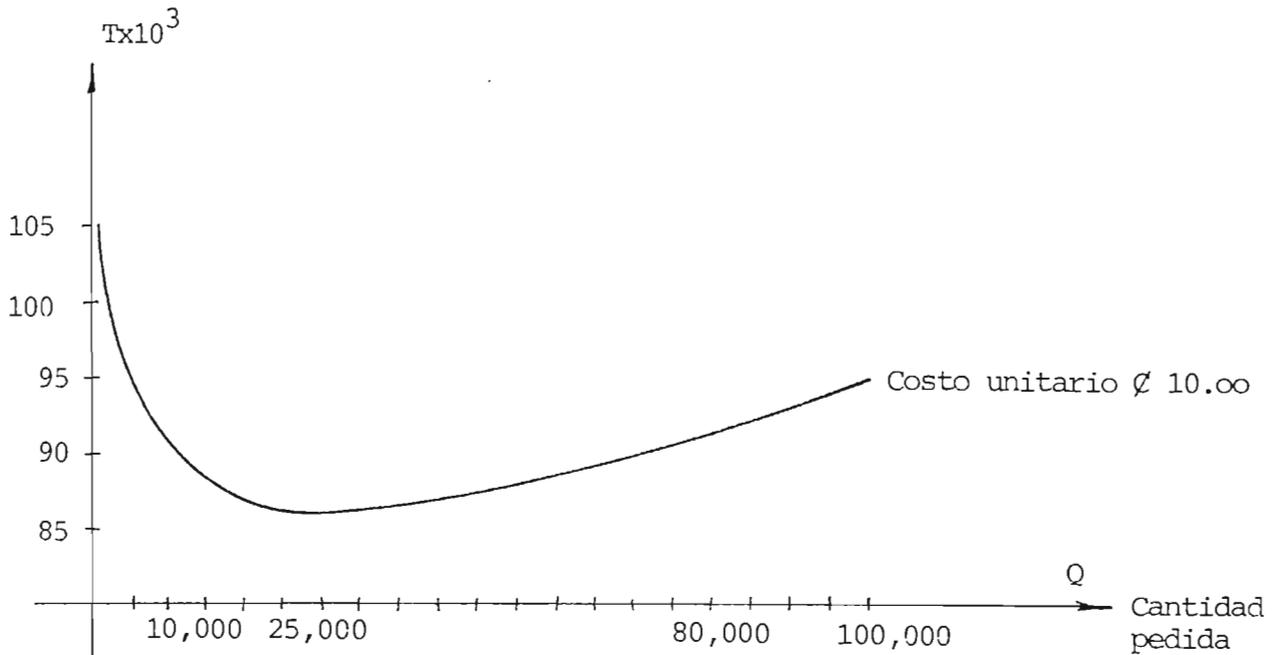
$$T = \frac{rK}{q} + rc + \frac{hQ}{2}$$

$$T = \frac{96000}{Q} + 80000 + (0.15) Q.$$

Así:

Q	T
5,000	99,950
10,000	91,100
15,000	88,650
20,000	87,800
25,000	87,590
25,298	87,589
30,000	87,700
35,000	87,993
40,000	88,400
50,000	89,420
60,000	90,600
70,000	91,874
80,000	93,200
90,000	94,567
100,000	95,960

Costo total por unidad de tiempo.

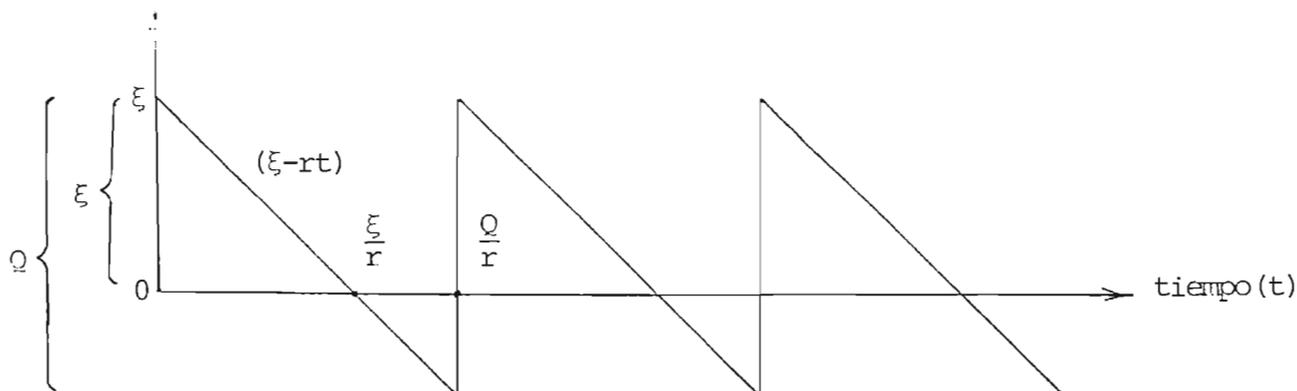


CASO 2: DÉFICIT PERMITIDOS. (DEMANDA UNIFORME).

Supóngase que se permite algún déficit y, que el costo por cada unidad de demanda no satisfecha por unidad de tiempo es de  $P$  colones.

Sea  $\xi$  la existencia con la que se cuenta al principio del ciclo, se utilizarán las variables del caso 1, y se obtendrán resultados semejantes. El problema se ilustra en la siguiente figura:

Nivel de Inventario



Durante el lapso  $\frac{\xi}{r}$  el nivel de la existencia es suficiente para satisfacer la demanda; después, durante el lapso  $\frac{Q - \xi}{r}$  hay déficit.

Al final de cada período  $\frac{Q}{r}$ , se emite un lote (o llega un pedido)  $Q$  destinado por una parte a satisfacer la demanda  $Q - \xi$  que no pudo ser satisfecha durante  $\frac{Q - \xi}{r}$ , y por otra parte, a reconstruir el inventario  $\xi$ .

El costo total por unidad de tiempo,  $T$ , se obtiene como sigue:

$$i) \text{ El costo de producción por ciclo está dado por: } \begin{cases} 0, & \text{si } Q = 0 \\ K + CQ, & \text{si } Q > 0. \end{cases}$$

ii) El costo de almacenamiento por ciclo, se razona como sigue:

Obsérvese que el nivel de inventario es positivo

para un tiempo  $\frac{Q}{r}$ .

El nivel promedio de inventario durante este tiempo es:  $\frac{\xi + 0}{2} = \frac{\xi}{2}$  artículos por unidad de tiempo y el costo correspondiente es:  $\frac{h\xi}{2}$  por unidad de tiempo. Por consiguiente, el costo total de almacenamiento en el que se incurre durante el tiempo en el que el nivel de inventario es positivo es el costo de almacenamiento por ciclo, el cual está dado por:  $\frac{h\xi}{2} \cdot \frac{\xi}{r} = \frac{h\xi^2}{2r}$ .

iii) Del mismo modo, los déficit se presentan para un tiempo  $\frac{Q - \xi}{r}$ .

El monto promedio de los déficit durante este tiempo es:

$\frac{0 + (Q - \xi)}{2} = \frac{Q - \xi}{2}$  artículos por unidad de tiempo y el costo correspondiente es  $p \frac{(Q - \xi)}{2}$  por unidad de tiempo.

Por consiguiente, el costo total del déficit en el que se incurre durante el tiempo en el que existe déficit es el costo del déficit por ciclo, el cual está dado por:

$$\frac{P(Q - \xi)}{2} \cdot \frac{(Q - \xi)}{r} = \frac{P(Q - \xi)^2}{2r}$$

iv) El costo total por ciclo es la suma de los tres costos anteriores, así:

$$K + CQ + \frac{h\xi^2}{2r} + \frac{P(Q - \xi)^2}{2r}$$

v) El costo total por unidad de tiempo, T, viene dado por:

$$T = \frac{K + CQ + \frac{h\xi^2}{2r} + \frac{P(Q - \xi)^2}{2r}}{\frac{Q}{r}}$$

$$T = \frac{rK}{Q} + rc + \frac{h\xi^2}{2Q} + \frac{P(Q - \xi)^2}{2Q}$$

Este modelo tiene dos variables de decisión Q y  $\xi$ , entonces los valores óptimos  $Q^*$  y  $\xi^*$  se obtienen aplicando el criterio de las derivadas, en este caso parciales. Así, al hacer:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial T}{\partial Q} = 0 \quad \text{se tiene:}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{h\xi}{Q} - \frac{P(Q - \xi)}{Q} = 0 \Rightarrow \xi = \frac{PQ}{h+p} \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial Q} = -\frac{rK}{Q^2} - \frac{h\xi^2}{2Q^2} + \frac{P(Q - \xi)}{Q} - \frac{P(Q - \xi)^2}{2Q^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-rK}{Q^2} - \frac{h\xi^2}{2Q^2} + P - \frac{P\xi}{Q} - \frac{P}{2} + \frac{P\xi}{Q} - \frac{P\xi^2}{2Q^2} = 0$$

$$\Rightarrow -2rK - h\xi^2 + 2Q^2P - 2QP\xi - Q^2P + 2QP\xi - P\xi^2 = 0$$

$$\Rightarrow -2rK - \xi^2(h + p) + Q^2P = 0 \quad \text{y sustituyendo } \xi = \frac{PQ}{(h+p)}$$

se tiene:

$$\Rightarrow -2rK - \frac{P^2Q^2}{(h+p)^2} (h + p) + Q^2P = 0$$

$$Q^2 \left( P - \frac{P^2}{h+p} \right) = 2rK$$

$$\Rightarrow Q^2 = \frac{2rk}{\frac{hp}{h+p}} \Rightarrow Q^2 = \frac{2rK}{h} \cdot \frac{h+P}{P} \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2rK}{h}} \cdot \sqrt{\frac{h+P}{P}}$$

Luego substituyendo  $Q^*$  en el valor encontrado para  $\xi$  se obtiene:

$$E^* = \sqrt{\frac{2rK}{h}} \cdot \sqrt{\frac{P}{h+P}}$$

La longitud óptima del período está dada por

$$t^* = \frac{Q^*}{r} = \sqrt{\frac{2K}{rh}} \sqrt{\frac{h+P}{P}}$$

El déficit máximo se expresa por:

$$\begin{aligned} Q^* - \xi^* &= \sqrt{\frac{2rk}{h}} \left[ \sqrt{\frac{h+p}{p}} - \sqrt{\frac{p}{h+p}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2rk}{h}} \left[ \frac{h}{\sqrt{p} \sqrt{h+p}} \right] \end{aligned}$$

$$Q^* - \xi^* = \sqrt{\frac{2rk}{P}} \cdot \sqrt{\frac{h}{h+P}}$$

De la figura, se observa que la fracción de tiempo en la que no existe déficit está dada por:

$$\frac{\frac{\xi^*}{r}}{\frac{Q^*}{r}} = \frac{\sqrt{\frac{2K}{rh}} \sqrt{\frac{P}{h+P}}}{\sqrt{\frac{2K}{rh}} \sqrt{\frac{h+P}{P}}} = \frac{P}{h+P}$$

Lo cual es independiente de  $K$ .

En el ejemplo de los altoparlantes, cuando existía déficit, su costo se estimó en ¢ 1.10 por altoparlante, además

$$K = 12,000$$

$$h = 0.30$$

$$r = 8,000$$

de modo que:

$$\xi^* = \sqrt{\frac{(2)(8000)(12000)}{0.30}} \cdot \sqrt{\frac{1.1}{1.1 + 0.3}}$$

$$\Rightarrow \xi^* \approx 22,424$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{(2)(8000)(12000)}{0.30}} \cdot \sqrt{\frac{1.1 + 0.3}{1.1}} \approx 28,540$$

$$t^* = \frac{28540}{8000} = 3.6 \text{ meses.}$$

Así, cuando se permite déficit, debe iniciarse la línea de producción cada 3.6 meses y producir 28540 altoparlantes. Se permite un déficit de 6,116 altoparlantes  $(Q^* - \xi^*)$ .

### CASO 3: DESCUENTO DE CANTIDADES, NO SE PERMITE DEFICIT.

En los modelos considerados, se ha supuesto que el costo unitario de cada artículo es el mismo, independientemente de la cantidad producida. Esta suposición condujo a las soluciones óptimas que resultaron ser independientes de este costo unitario. Supóngase ahora que existen rupturas

del costo; es decir, que el costo unitario varía con la can  
tidad pedida o producida.

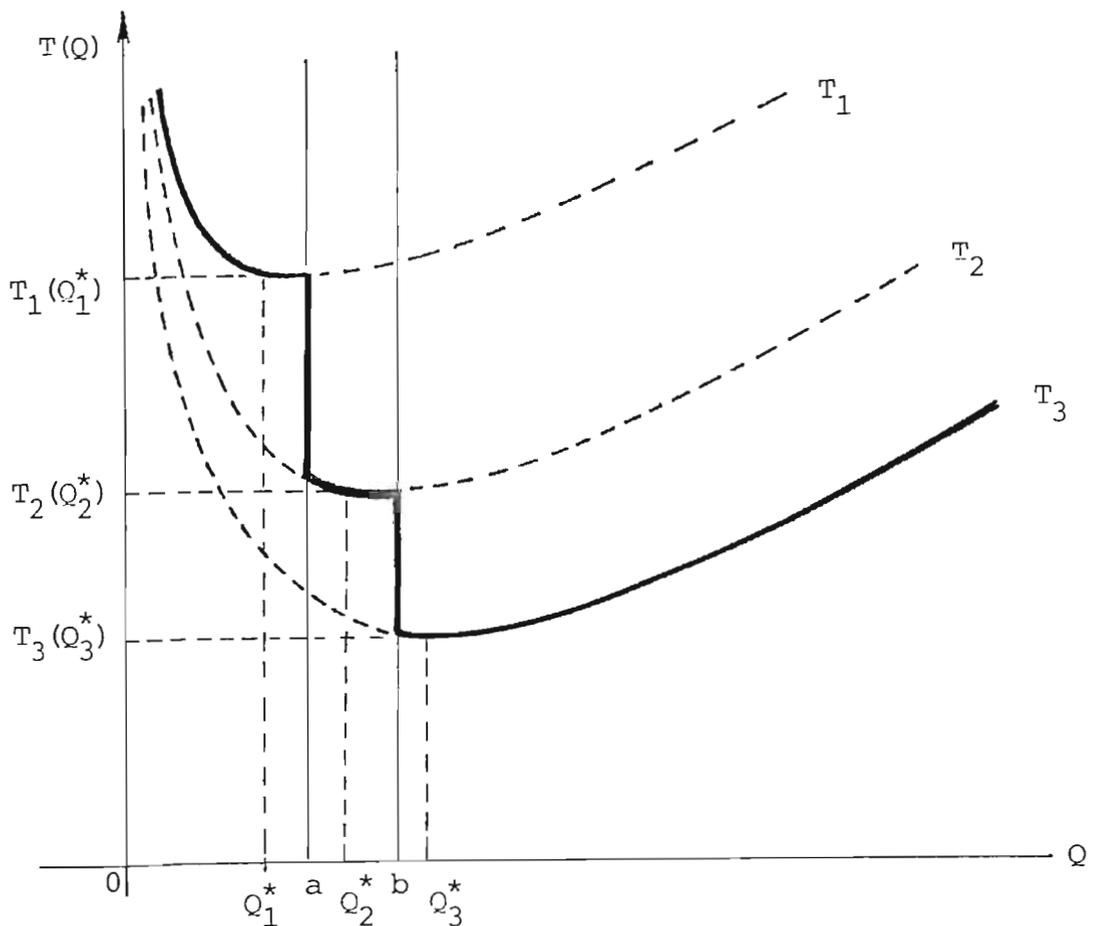
Sean:  $C_1$  si  $0 < Q < a$

$C_2$  si  $a \leq Q < b$

$C_3$  si  $b \leq Q$  los precios de producción -

donde  $C_1 > C_2 > C_3$ .

La función  $T(Q)$  tiene la siguiente forma:



El cálculo se hará de la siguiente manera:

- 1°) Calcular  $Q_3^*$ , si  $Q_3^* > b$  entonces la cantidad económica es  $Q_3^*$ .
- 2°) Si  $Q_3^* < b$ , calcular  $Q_2^*$ , donde necesariamente  $Q_2^* < b$ .

En consecuencia se tiene que  $Q_2^* < a$  ó  $Q_2^* > a$

- i) Si  $Q_3^* < b$  y  $a \leq Q_2^* < b$  entonces comparar  $T_2(Q_2^*)$  y  $T_3(b)$ .

La que proporcione el valor más pequeño de  $T$  es la cantidad económica.

- ii) Si  $Q_3^* < b$  y  $Q_2^* < a$ , calcular  $Q_1^*$  el cual satisface necesariamente la desigualdad  $Q_1^* < a$ . En este caso, comparar:  $T_1(Q_1^*)$ ,  $T_2(a)$  y  $T_3(b)$  para determinar la cantidad económica, que será la que proporcione el menor valor para  $T$ .

En el caso de los altoparlantes, supóngase que el costo de producir un altoparlante es  $C_1 = \text{¢ } 11.00$  si se producen menos de 10,000 altoparlantes;  $C_2 = \text{¢ } 10.00$  si la producción cae entre 10,000 y 80,000 y,  $C_3 = \text{¢ } 9.50$  si la producción es mayor que 80000. Investigar cuál es la política óptima de producción.

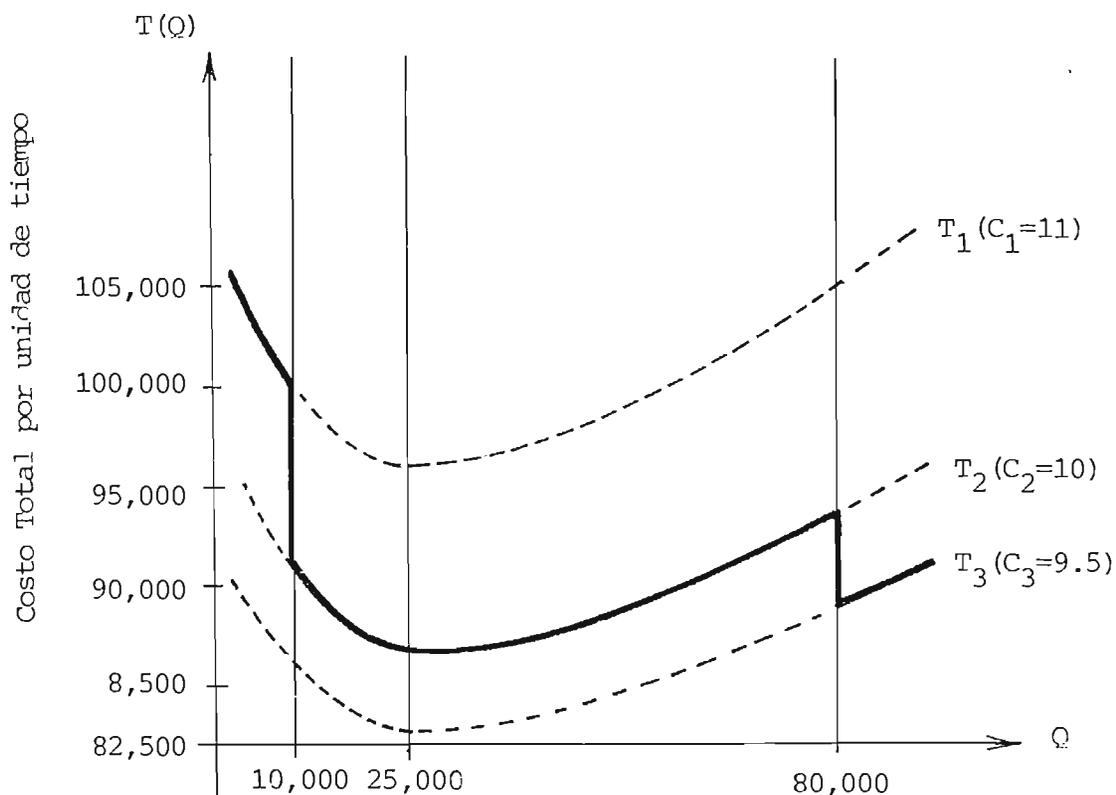
---

1/ Ver Demostración, después del ejemplo.

Para hacer las gráficas respectivas, aunque no es necesario, bastará hacer una tabla de valores, tomando los resultados del modelo de tamaño económico de lote (sin déficit) visto anteriormente, se tiene: el costo total por unidad de tiempo, si el costo de producción es  $C_j$  como:

$$T_j = \frac{rK}{Q} + rC_j + \frac{hQ}{2} \quad \text{donde } j = 1, 2, 3.$$

La figura muestra la gráfica de la función de  $Q$ .



Sin calcular  $Q_3^*$  ya que según la gráfica es menor que 80,000 pásese al paso 2, ya que  $Q_2^*$  se ha calculado en el caso 1 basta entonces comparar  $T_2(Q_2^*)$  con  $T_3(80,000)$

$$Q_2^* = 25,298 \quad T_2(Q_2^*) = 87,589$$

$$\text{y } T_3(80000) = 89,200.$$

Es mejor entonces, producir en cantidades de 25,298 y, por lo tanto, éste es el valor óptimo para este conjunto de descuentos de cantidades.

Se demostrará a continuación, por qué necesariamente  $Q_2^* < b$  si es que  $Q_3^* < b$  (dado que  $C_3 < C_2$ ), bajo el siguiente razonamiento:

Ampliando el modelo de revisión continua y demanda uniforme en el que no se permite déficit se demostrará que si la sucesión de costos unitarios de compra es decreciente - entonces la sucesión de valores óptimos de pedido será creciente. Para lo cual habrá que mostrar que el costo unitario de compra es inversamente proporcional a la cantidad de pedido, y tener así el resultado deseado.

Se ha obtenido en el modelo mencionado que el costo total por ciclo es:

$$K + CQ + \frac{hQ^2}{2r} \quad \text{donde } C : \text{Costo unitario de compra}$$

$Q : \text{Cantidad pedida}$

$K$  : Costo de preparación

$h$  : Costo unitario de almacenamiento

$r$  : Tasa media de demanda.

Considérese ahora que el costo unitario de almacenamiento es proporcional al costo de producción.

Además, sea  $N$  la demanda total para un intervalo de tiempo  $\theta$ , es decir  $N =$  número de artículos requeridos para el período  $\theta$ .

La duración del ciclo es  $t = \frac{Q}{r}$  y, el costo total de almacenamiento durante  $t$  es:  $\frac{Qht}{2}$ . Sea  $m$  el número de ciclos en el período  $\theta$ .

Sea  $\alpha$  el coeficiente de proporcionalidad entre el costo unitario de almacenamiento,  $h$ , y el valor  $\frac{CQ + K}{Q}$ , es decir,

$$\alpha = \frac{h}{\frac{CQ + K}{Q}} \Rightarrow \alpha = \frac{hQ}{CQ + K} \Rightarrow hQ = \alpha(CQ + K)$$

Entonces el costo total durante el período  $\theta$  es:

$$T(Q) = \left[ K + CQ + \frac{hQt}{2} \right] m$$

$$\Rightarrow T(Q) = \left[ K + CQ + \frac{\alpha(CQ + K)t}{2} \right] m$$

$$T(Q) = Km + CQm + \frac{\alpha tm}{2} CQ + \frac{\alpha ktm}{2}$$

Considérense las relaciones:

$$\frac{t}{\theta} = \frac{Q}{N} \quad \text{y} \quad m = \frac{N}{Q} \quad (=> Qm = N)$$

$$\Rightarrow \frac{t}{\theta} = \frac{1}{m} \quad (=> tm = \theta)$$

$$\text{Luego, } T(Q) = \frac{KN}{Q} + CN + \frac{\alpha C Q \theta}{2} + \frac{\alpha K \theta}{2}$$

$$\Rightarrow T(Q) = \frac{KN}{Q} + \frac{\alpha C Q \theta}{2} + CN + \frac{\alpha K \theta}{2}$$

Derivando con respecto a  $Q$  e igualando a cero, se tiene:

$$-\frac{NK}{Q^2} + \frac{\alpha C \theta}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha C \theta}{2} = \frac{NK}{Q^2}$$

$$\Rightarrow C Q^2 = \frac{2KN}{\alpha \theta}$$

Resulta entonces evidente que si se escoge una sucesión decreciente de costos unitarios de compra entonces se obtendrá una sucesión creciente de valores óptimos de pedido como se deseaba demostrar.

Resulta ahora claro, que si  $Q_3^* < b$  entonces  $Q_2^* < b$  ya que  $Q_2^* < Q_3^*$  siempre que  $C_3 < C_2$ .

#### 5.4 MODELOS ESTOCASTICOS DE INVENTARIO.

Se estudiará ahora los problemas de inventario en los que la demanda para un período es una variable aleatoria - que tiene una distribución de probabilidad conocida. Se analizan tanto modelos de un solo período como con varios períodos.

##### 5.4.1 MODELO CON UN SOLO PERIODO SIN COSTO DE PREPARACION.

Sea  $D$  la variable aleatoria demanda y denótese por  $P_D(d)$  la probabilidad de que la demanda sea igual a  $d$ ; es decir,

$$P_D(d) = P \{D = d\} .$$

Se supondrá que se conoce  $P_D(d)$  para todos los valores  $d$ ; es decir, se especifica la distribución de probabilidad.

El modelo de un solo período que se estudiará puede - representar el sistema de inventario de un artículo que:

1. Se vuelve obsoleto rápidamente, como un diario.
2. Se hecha a perder (o se arruina) con rapidez, como los vegetales.
3. Se tienen en existencia una sola vez, como las partes de repuesto para una sola serie de producción de un nuevo modelo de avión.

4. Tiene un futuro incierto más allá de un solo período.

En general, el modelo de inventario a considerarse es el siguiente:

Los artículos se producen para un solo período a un costo unitario de "c" colones, sin costo de preparación ( $K = 0$ ).

El costo de almacenamiento, el costo unitario neto de almacenar artículos rezagados menos su valor de rescate (o salvamento), está dado por "h" colones por artículo, es decir, h es el costo unitario de almacenamiento, y se carga como una función de la existencia en exceso por encima de la cantidad requerida.

El costo unitario de la demanda no satisfecha es de "p" colones, donde  $p > c$ . Se supone que no se tiene inventario inicial a la mano, es decir, la existencia,  $\xi$ , es de cero artículos ( $\xi = 0$ ).

Sea  $Q$  la cantidad pedida (o producida) al principio del período y, sea  $D$  la variable aleatoria que denota la demanda durante el período.

El problema consiste en determinar cuál es la cantidad óptima a pedir; probablemente resulta deseable tener más que la demanda esperada pero, es obvio que se requiere me-

nos que la demanda máxima. Se necesita una combinación entre:

1. El riesgo de quedar corto y, en consecuencia, incurrir en costos por déficit, y
2. El riesgo de tener un exceso y, en consecuencia, incurrir en costos desperdiciados por hacer pedidos y mantener unidades en exceso.

El criterio que usa el modelo es elegir el nivel de inventario que minimice el valor esperado de la suma de estos costos.

La cantidad vendida está dada por el mínimo de:

$$\begin{cases} D, & \text{si } D < Q \\ Q, & \text{si } D \geq Q \end{cases}$$

así, la cantidad vendida es  $+ \text{mín}(D, Q)$ .

De donde, el costo en el que se incurre si la demanda es  $D$  y se tiene en existencia  $Q$ , está dado por

$$C(D, Q) = cQ + p \text{máx}(0, D - Q) + h \text{máx}(0, Q - D)$$

El modelo, por generalidad debe incluir ambos costos, aunque realmente sólo uno de ellos participa, según sea el caso.

Dado que la demanda es una variable aleatoria [Con distribución de probabilidad  $P_D(d)$ ], el costo  $C(D,Q)$  también lo es. Entonces el costo esperado está dado por  $C(Q)$ , donde:

$$\begin{aligned}
 C(Q) = E C(D,Q) &= \sum_{d=0}^{\infty} [cQ + p \max(0, d-Q) + h \max(0, Q-d)] P_D(d) \\
 &= \sum_{d=0}^{\infty} cQ P_D(d) + \sum_{d=0}^{\infty} p \max(0, d-Q) P_D(d) + \\
 &\quad \sum_{d=0}^{\infty} h \max(0, Q-d) P_D(d) \\
 C(Q) &= cQ + \sum_{d=0}^{\infty} p(d-Q) P_D(d) + \sum_{d=0}^{Q-1} h(Q-d) P_D(d) .
 \end{aligned}$$

Es evidente que  $C(Q)$  depende de  $P_D(d)$ .

En la práctica la demanda varía sobre un número grande de valores posibles, por lo que se hace una aproximación a esta variable aleatoria discreta de demanda por medio de una variable aleatoria continua. Además, cuando la demanda varía sobre un número grande de valores posibles, esta aproximación generalmente conducirá a pequeñas diferencias, en los valores numéricos, de las cantidades óptimas del inventario que debe tenerse en existencia. Por lo que, en lo que sigue, se supondrá una demanda continua, y la función de densidad de probabilidad de esta variable aleatoria se deno

tará por:  $f_D(x)$ . Entonces el costo esperado se denota - por:

$$\begin{aligned}
 CQ = E [C(D,Q)] &= \int_0^{\infty} [cQ + P \max(O, X-Q) + h \max(O, Q-X)] f_D(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} cQ f_D(x) dx + \int_0^{\infty} P \max(O, X-Q) f_D(x) dx + \\
 &\quad \int_0^{\infty} h \max(O, Q-X) f_D(x) dx \\
 &= cQ + \int_Q^{\infty} P(X-Q) f_D(x) dx + \int_0^Q h(Q-X) f_D(x) dx.
 \end{aligned}$$

$C(Q) = cQ + L(Q)$  , donde  $L(Q)$  recibe el nombre de déficit esperado más el costo de almacenamiento.

Entonces, se hace necesario hallar el valor de  $Q$ , supóngase  $Q^*$ , que minimice a  $C(Q)$ .

A continuación, se dará una demostración de que la - cantidad óptima que debe pedirse,  $Q^*$ , es aquel valor que satisfaga:

$$F(Q^*) = \frac{p - c}{p + h}$$

donde la función  $F(a)$  es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria de demanda; es decir,

$$F(a) = \int_0^a f_D(x) dx.$$

Demostración: Se tiene que  $D$  es una variable aleatoria con fdp dada

$$\text{por: } \begin{cases} f_D(x) , & \text{si } x \geq 0 \\ 0 , & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

y con fda,  $F$ , dada por:  $F(a) = \int_0^a f_D(x) dx.$

Defínanse  $g(X, Q)$  como:

$$g(X, Q) = \begin{cases} h(Q - X) , & \text{si } Q > X \text{ y } h > 0. \\ P(X - Q) , & \text{si } Q \leq X \text{ y } P > 0. \end{cases}$$

y  $G(Q) = \int_0^{\infty} g(X, Q) f_D(x) dx + CQ$ , donde  $C > 0$ .

$$\text{Entonces } G(Q) = \int_0^Q h(Q-X) f_D(x) dx + \int_Q^{\infty} P(X-Q) f_D(x) dx + CQ$$

Se aplicará el criterio de la 1a. y 2a. derivada para encontrar un valor mínimo para  $Q$ . Obsérvese que  $G(Q)$  tiene

la misma forma de  $C(Q)$

$$\begin{aligned} \frac{dG(Q)}{dQ} &= h \frac{d}{dQ} \int_0^Q (Q-x) f_D(x) dx + P \frac{d}{dQ} \int_Q^\infty (x-Q) f_D(x) dx + C \frac{dQ}{dQ} \\ &= h \int_0^Q \frac{\partial [(Q-f_D(x))] }{\partial Q} dx + p \int_Q^\infty \frac{\partial [(x-f_D(x))] }{\partial Q} dx + C \\ &= h \int_0^Q f_D(x) dx + p \int_Q^\infty -f_D(x) dx + C \\ \frac{dG(Q)}{dQ} &= h \int_0^Q f_D(x) dx - p \int_Q^\infty f_D(x) dx + C \end{aligned}$$

Pero  $\int_0^\infty f_D(x) dx = 1$ , entonces  $\int_0^Q f_D(x) dx + \int_Q^\infty f_D(x) dx = 1$

$$\Rightarrow \int_Q^\infty f_D(x) dx = 1 - \int_0^Q f_D(x) dx$$

Es así como:  $\frac{dG(Q)}{dQ} = h \int_0^Q f_D(x) dx - p + p \int_0^Q f_D(x) dx + C$

Se prueba en efecto que el valor óptimo de  $Q$  es aquel que satisface la condición  $F(Q^*) = \frac{P - C}{p + h}$ .

$$\text{Sea } h \int_0^{Q^*} f_D(x) dx - p + p \int_0^{Q^*} f_D(x) dx + C = 0$$

$$\Rightarrow h F(Q^*) - p + P F(Q^*) + C = 0, \text{ por definici3n de } F.$$

Luego  $F(Q^*) (h + p) = P - C$ , as3:

$$F(Q^*) = \frac{p - C}{p + h}$$

el valor 3ptimo se encuentra al resolver  $\int_0^{Q^*} f_D(x) dx = \frac{P - C}{p + h}$ .

En efecto el valor 3ptimo de  $Q$  es un m3nimo, ya que la segunda derivada es positiva:

$$\frac{d^2G(Q)}{dQ} = h \frac{d}{dQ} \int_0^Q f_D(x) dx - \frac{dp}{dQ} + p \frac{d}{dQ} \int_0^Q f_D(x) dx + \frac{dC}{dQ} .$$

$$= h f_D(Q) + P f_D(Q)$$

$$= (h + p) f_D(Q) > 0 \text{ ya que } h > 0, p > 0 \text{ y } f_D(Q) > 0.$$

Todos estos conceptos pueden ser ejemplarizados haciendo algunas consideraciones al ejemplo 2 de la secci3n 5.1 - (referido a un distribuidor al por mayor de bicicletas de 10 velocidades). Sup3ngase que a este distribuidor se le ofrecen condiciones muy favorables en la compra de un mode-

lo de bicicleta de marca famosa cuya producción se va a -  
discontinuar, por lo cual se ha avisado a todas las tiendas  
que no es posible hacer nuevos pedidos.

El costo de cada bicicleta es de ¢ 20.00 y no se incu-  
rre en costo de preparación, así:  $C = 20$  y  $K = 0$ .

El costo de mantener un inventario es de -9 colones  
por bicicleta. Este costo incluye: 1 colón, que represent  
ta el costo del capital paralizado y -10 colones que es el  
valor de rescate de cada bicicleta. Así,  $h = -9$ .

Cada bicicleta se vende por ¢ 45.00, con una utilidad  
de ¢ 25.00. Si la demanda es mayor que el abastecimiento  
disponible entonces el costo unitario de la demanda no sa-  
tisfecha es de ¢ 45.00 (y no sólo la utilidad perdida). -  
Así:  $p = 45$ .

Supóngase que la demanda tiene una distribución expo-  
nencial con esperanza  $\lambda$  (parámetro) dada por:

$$f_D(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0. \end{cases}$$

entonces:

$$F(a) = \int_0^a \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = -e^{-\frac{x}{\lambda}} \Big|_0^a = 1 - e^{-\frac{a}{\lambda}}$$

Luego, la cantidad óptima que debe pedirse,  $Q^*$ , es -  
aquel valor que satisfaga:

$$F(Q^*) = 1 - e^{-\frac{Q^*}{\lambda}} = \frac{p - c}{p + h}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{Q^*}{\lambda}} = 1 - \frac{p - c}{p + h}$$

$$\Rightarrow \ln e^{-\frac{Q^*}{\lambda}} = \ln \left( \frac{h + c}{h + p} \right)$$

$$\Rightarrow -\frac{Q^*}{\lambda} = \ln \left( \frac{h + c}{h + p} \right)$$

$$\Rightarrow Q^* = -\lambda \ln \left( \frac{h + c}{h + p} \right)$$

En particular si  $\lambda = 10000$ , se tendría:  $Q^* = -10000 \ln \left( \frac{20 - 9}{45 - 9} \right)$

$$\Rightarrow Q^* = -10^4 \cdot (-1.185805500) \cong 11858$$

#### 5.4.2 MODELO DE UN SOLO PERIODO CON UN COSTO DE PREPARACION.

El costo de preparación es constante y se denota por  $K$ .  
Se supondrá que los costos por déficit y almacenamiento son  
cada uno lineales. Su efecto resultante entonces está dado  
por  $L(Q)$ , donde:

$$L(Q) = p \int_Q^\infty (x - Q) f_D(x) dx + h \int_0^Q (Q - x) f_D(x) dx.$$

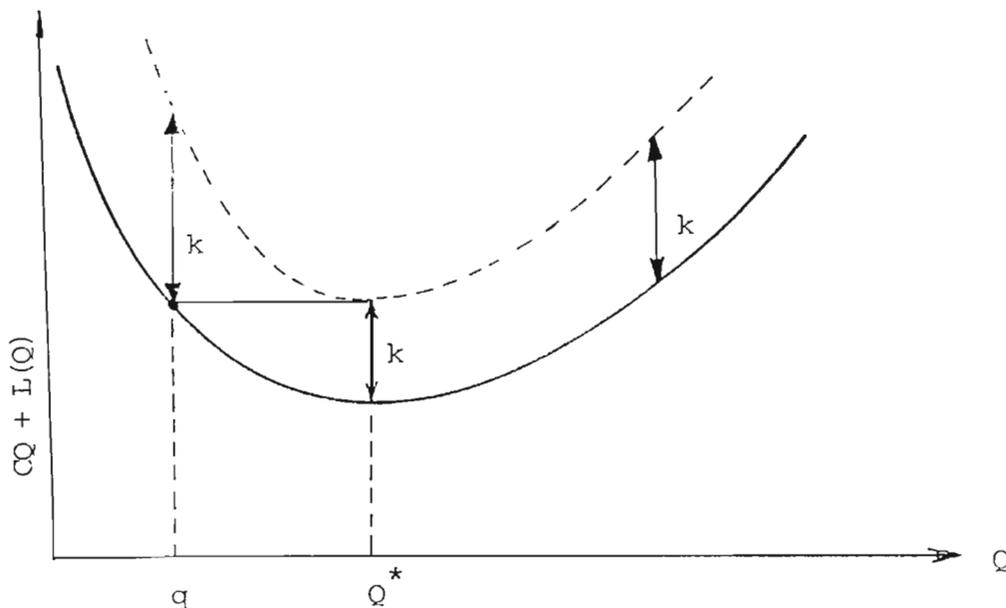
Por tanto, el costo total esperado en el que se incurre si se hace un pedido hasta completar  $Q$  bajo el supuesto de que existe un nivel inicial dado por  $x$  es:

$$K + c(Q - x) + L(Q) \quad , \quad \text{si } Q > x$$

$$L(x) \quad , \quad \text{si } Q = x.$$

Nótese que  $cQ + L(Q)$  es el mismo costo esperado que se consideró en el modelo anterior, cuando se omitió el costo de preparación.

Si se grafica  $C(Q) = cQ + L(Q)$ , su gráfico es cóncavo hacia arriba con mínimo en  $Q^*$ , así:



donde  $q$  es el menor valor de  $Q$  para el cual

$$cq + L(q) = K + cQ^* + L(Q^*).$$

A partir de la figura, se concluye que si  $x > Q^*$  y  $Q > x$  entonces  $K + cQ + L(Q) > cx + L(x) \Rightarrow K + c(Q - x) + L(Q) > L(x)$ , donde el primer miembro de la desigualdad representa el costo total esperado si se hace un pedido hasta completar  $Q$  y el segundo miembro de la desigualdad representa el costo total esperado si no se hace pedido alguno. Luego, la política óptima es no hacer pedidos si  $x > Q^*$ .

De la figura también resulta que, si  $q \leq x \leq Q^*$  entonces, para  $Q > x$  se cumple:

$$K + cQ + L(Q) \geq cx + L(x)$$

$$\Rightarrow K + c(Q - x) + L(Q) \geq L(x).$$

y, nuevamente no hacer pedido es menos caro que hacerlo.

Finalmente, siempre de la figura se concluye que si  $x < q$  entonces:

$$\min_{Q \geq x} [K + cQ + L(Q)] = K + cQ^* + L(Q^*) < cx + L(x)$$

$$\Rightarrow K + c(Q^* - x) + L(Q^*) < L(x)$$

$$\text{Así, } \min_{Q \geq x} [K + c(Q - x) + L(Q)] < L(x).$$

De modo que se obtiene beneficio al hacer un pedido, y el costo mínimo se logra al hacer un pedido hasta completar  $Q^*$ .

En consecuencia, la política óptima de hacer pedidos puede resumirse como:

- i) si  $x < q$ , hágase un pedido hasta completar  $Q^*$
- ii) si  $x \geq q$ , no se haga ningún pedido.

El valor de  $Q^*$  se obtiene siempre a partir de:

$$F(Q^*) = \frac{p - c}{p + h} ,$$

y  $q$  es el menor valor que satisface:  $cq + L(q) = K + cQ^* + L(Q^*)$ .

Con referencia al ejemplo de las bicicletas,  $Q^* = 11858$  y  $\lambda = 10000$ .

Si  $k = 800$ ,  $c = 20$ ,  $p = 45$  y  $h = -9$  se obtiene  $q$  a partir de:

$$20q + 45 \int_q^{\infty} (w - q) \frac{1}{10000} e^{-\frac{w}{10000}} dw - 9 \int_0^q (q - w) \frac{1}{10000} e^{-\frac{w}{10000}} dw =$$

$$800 + 20(11858) + 45 \int_{11858}^{\infty} (w - 11858) \frac{1}{10000} e^{-\frac{w}{10000}}$$

$$- 9 \int_0^{11858} (11858 - w) \frac{1}{10^4} e^{-w10^{-4}} dw.$$

#### 5.4.3 MODELO DE INVENTARIO CON DOS PERIODOS SIN COSTO DE PREPARACION.

En muchas situaciones se presenta periódicamente una oportunidad de hacer un pedido, por ejemplo, mensualmente, y el gerente de inventarios debe tomar una decisión acerca de si debe tener existencias y cuántas deben ser estas existencias. Es posible que se tenga interés en estas decisiones para un horizonte de los próximos 2 meses, 6 meses, 12 meses o, incluso, por tiempo indefinido.

En general, la política de revisión periódica de usar la solución óptima para un período tantas veces como períodos se tengan no es la política óptima.

Para el problema de dos períodos, comúnmente se pueden lograr costos menores aplicando los métodos de la "programación dinámica". Por lo que se presenta a continuación los elementos básicos que caracterizan a los problemas de programación dinámica:

1. El problema puede dividirse en etapas, con una decisión de la política requerida en cada etapa.
2. Cada etapa tiene un cierto número de estados asociados a ella. En general, los estados son las diversas condiciones posibles en las que el sistema podría estar en esa etapa del problema.

3. El efecto de la decisión de una política en cada etapa es transformar el estado actual en un estado asociado con la etapa siguiente (posiblemente de acuerdo con una distribución de probabilidad).
4. Dado el estado actual, una política óptima para las etapas restantes es independiente de la política adoptada en las etapas previas.
5. El procedimiento de solución empieza por hallar la política óptima para cada estado de la última etapa.
6. Se dispone de una relación recursiva que identifica la política para cada estado en la etapa  $n$ , dada la política óptima para cada estado en la etapa  $(n + 1)$ .
7. Usando la relación recursiva, el procedimiento de solución se mueve hacia atrás, etapa por etapa (hallando en cada ocasión la política óptima para cada estado de la etapa) hasta que se encuentra la política óptima cuando se parte de la etapa inicial.

Para efectos de generar el modelo de inventario con dos períodos, teniendo en consideración los elementos presentados, supóngase que se permite al distribuidor de bicicletas hacer únicamente dos pedidos, uno el 15 de octubre y otro el 15 de noviembre. Las hipótesis respecto a los -

costos son semejantes a las presentadas en los modelos anteriores.

Supóngase que la compra conduce a la entrega inmediata. Se reúnen los déficit al final del primer período, - si existen (es posible la acumulación de pedidos al final del primer período, pero no al final del segundo); no se permite enajenación de las existencias, es decir, que el valor de rescate es despreciable.

Además, las demandas  $D_1, D_2$  para los dos períodos - son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, que tienen la densidad  $f_D(w)$ . El costo de compra es lineal, es decir,  $cQ$ , donde  $Q$  es la cantidad pedida (no se tiene costo de preparación), y los costos por déficit y almacenamiento también son lineales, con costos unitarios respectivos denotados por  $p$  y  $h$ .

Como se indicó, la solución a este problema no es usar la cantidad óptima para un período dos veces. Pueden lograrse costos inferiores imaginando el problema desde un punto de vista de programación dinámica para dos períodos. Ordénense los períodos de manera tal, que el inicio del período 1 implique que quedan dos períodos en el horizonte. De manera análoga, el principio del período 2 implica que queda un período en el horizonte (el último período está empezando).

El problema es hallar los números críticos que describen la política óptima para hacer los pedidos. Se demostrará que estos números críticos son únicos para cada período. Sean  $Q_1^*$  y  $Q_2^*$  estos números y, sean  $Q_1$  y  $Q_2$  la cantidad de existencias hasta las cuales se haya llegado después de hacer el pedido, al principio del período respectivo.

Denótese por  $C_1(X_1)$  el costo esperado de seguir una política óptima (costo mínimo) desde el principio del período 1 hasta el final del período 2, dado que se tienen  $x_1$  unidades a la mano. Y denótese por  $C_2(x_2)$  el costo esperado de seguir una política óptima (costo mínimo) desde el principio del período 2, dado que se tienen  $x_2$  unidades a la mano.  $C_1(X_1)$  es la expresión que se busca, porque ésta se obtiene siguiendo la política óptima para el horizonte completo (de dos períodos). A fin de obtener  $C_1(X_1)$  es necesario hallar primero  $C_2(X_2)$ . De los resultados para el modelo de un solo período, la política óptima está dada por un solo número crítico hallado a partir de:

$$F(Q_2^*) = \frac{p - c}{p + h}$$

es decir, si  $x_2$  es la cantidad disponible al principio del último período, entonces:

1. Pídase  $(Q_2^* - x_2)$ , si  $x_2 < Q_2^*$ .
2. No se haga pedido alguno, si  $x_2 \geq Q_2^*$ .

Se puede expresar el costo de esta política óptima como:

$$C_2(x_2) = \begin{cases} L(x_2) , & \text{si } x_2 \geq Q_2^* \\ c(Q_2^* - x_2) + L(Q_2^*) , & \text{si } x_2 < Q_2^* \end{cases}$$

en donde  $Q_2^*$  es el número crítico único determinado con anterioridad y  $L(Q)$ , es el costo esperado por déficit más almacenamiento, para un solo período cuando se tienen  $Q$  unidades disponibles.

$L(Q)$  puede expresarse como:

$$L(Q) = \int_Q^\infty p(w - Q) f_D(w) dw + \int_0^Q h(Q - w) f_D(w) dw.$$

Al principio del período 1, los costos en que se incurre constan del costo de compra  $c(Q_1 - X_1)$ , el costo esperado por déficit más almacenamiento  $L(Q_1)$  y los costos asociados con seguir una política óptima durante el segundo período. Por tanto, el costo esperado de seguir la política óptima durante los dos períodos está dado por:

$$C_1(x_1) = \underset{Q_1 \geq x_1}{\text{mínimo}} \{c(Q_1 - X_1) + L(Q_1) + E[\bar{C}_2(X_2)]\}$$

en donde  $E[\bar{C}_2(x_2)]$  se obtiene de la siguiente manera:

Nótese que  $x_2$  es una variable aleatoria que depende de la cantidad de existencias a la mano al principio del período 2; es decir,  $x_2 = Q_1 - D_1$ . Así, sustituyendo en  $C_2(x_2)$  se tiene:

$$C_2(x_2) = C_2(Q_1 - D_1) = \begin{cases} L(Q_1 - D_1) , & \text{si } Q_1 - D_1 \geq Q_2^* . \\ c(Q_2^* - Q_1 + D_1) + L(Q_2^*) , & \text{si } Q_1 - D_1 < Q_2^* . \end{cases}$$

de donde  $C_2(x_2)$  es una variable aleatoria y su valor esperado, por definición, está dado por:

$$\begin{aligned} E(C_2(x_2)) &= \int_0^{\infty} C_2(Q_1 - w) f_D(w) dw \\ &= \int_0^{Q_1 - Q_2^*} L(Q_1 - w) f_D(w) dw + \int_{Q_1 - Q_2^*}^{\infty} [c(Q_2^* - Q_1 + w) + L(Q_2^*)] f_D(w) dw. \end{aligned}$$

Nótese que en virtud de que se admiten los déficit  $(Q_1 - w)$  puede ser negativo; nótese además que  $E[C_2(x_2)]$  es simplemente una función de  $Q_1$  y  $Q_2^*$ , con  $Q_2^*$  obtenida a partir de la solución para el problema de un solo período.

Por lo tanto,  $C_1(x_1)$  se puede expresar como:

$$C_1(x_1) = \underset{Q_1 \geq x_1}{\text{mínimo}} \left\{ c(Q_1 - x_1) + L(Q_1) + \int_0^{Q_1 - Q_2^*} L(Q_1 - w) f_D(w) dw \right. \\ \left. + \int_{Q_1 - Q_2^*}^{\infty} [c(Q_2^* - Q_1 + w) + L(Q_2^*)] f_D(w) dw \right\} .$$

Se demostrará a continuación que  $C_1(x_1)$  tiene un mínimo único,  $Q_1^*$ , que satisface la ecuación:

$$-p + (p + h) F(Q_1^*) + (c - p) F(Q_1^* - Q_2^*) + (p+h) \int_0^{Q_1^* - Q_2^*} F(Q_1^* - w) f_D(w) dw = 0$$

Para encontrar el mínimo, se usará el criterio de la 1a. y 2a. derivada, así como los siguientes teoremas:

1.  $\frac{d}{dy} \int_a^b f(x,y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$
2.  $\frac{d}{dy} \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y) dx = \int_{g(y)}^{h(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx + f(h(y), y) \frac{dh(y)}{dy} - f(g(y), y) \frac{dg(y)}{dy} .$
3.  $\frac{d}{dy} \int_0^y f(x) dx = f(y)$

Donde las funciones a considerar (de una o varias variaia

bles) poseen primera y segunda derivadas continuas, y derivadas parciales en todas partes.

Demostración:

$$\begin{aligned}
 C_1(x_1) &= c(Q_1 - x_1) + L(Q_1) + \int_0^{Q_1 - Q_2^*} L(Q_1 - w) f_D(w) \, dw \\
 &\quad + \int_{Q_1 - Q_2^*}^{\infty} [c(Q_2^* - Q_1 + w) + L(Q_2^*)] f_D(w) \, dw. \\
 \Rightarrow \frac{dC_1(x_1)}{dQ_1} &= c + L'(Q_1) + \frac{d}{dQ_1} \int_0^{Q_1 - Q_2^*} L(Q_1 - w) f_D(w) \, dw \\
 &\quad + \frac{d}{dQ_1} \int_{Q_1 - Q_2^*}^{\infty} [c(Q_2^* - Q_1 + w) + L(Q_2^*)] f_D(w) \, dw. \\
 \text{Pero } L'(Q_1) &= \frac{d}{dQ_1} \left[ \int_{Q_1}^{\infty} p(v - Q_1) f_D(v) \, dv + \int_0^{Q_1} h(Q_1 - v) f_D(v) \, dv \right] \\
 &= \frac{d}{dQ_1} \int_{Q_1}^{\infty} p(v - Q_1) f_D(v) \, dv + \frac{d}{dQ_1} \int_0^{Q_1} h(Q_1 - v) f_D(v) \, dv \\
 &= -p \int_{Q_1}^{\infty} f_D(v) \, dv + h \int_0^{Q_1} f_D(v) \, dv ; \quad \text{de aplicar el teo} \\
 &\quad \text{rema 2, y del hecho} \\
 &\quad \text{que } f_D(\infty) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -p \left[ 1 - \int_0^{Q_1} f_D(v) \, dv \right] + h \int_0^{Q_1} f_D(v) \, dv, \text{ ya que } \int_0^{\infty} f_D(v) \, dv = 1. \\
&= -p + p \int_0^{Q_1} f_D(v) \, dv + h \int_0^{Q_1} f_D(v) \, dv
\end{aligned}$$

$$L'(Q_1) = -p + (p+h) F(Q_1) \text{ ya que } F(a) = \int_0^a f_D(v) \, dv, \text{ es}$$

la f.d.a de  $f_D(v)$ .

$$\text{Tambi\u00e9n, } \frac{d}{dQ_1} \int_0^{Q_1 - Q_2^*} L(Q_1 - w) f_D(w) \, dw = \int_0^{Q_1 - Q_2^*} \frac{\partial L(Q_1 - w) f_D(w)}{\partial Q_1} \, dw$$

$$+ L(Q_1 - Q_1 + Q_1 + Q_2^*) f_D(Q_1 - Q_2^*),$$

por el T. 2.

$$= L(Q_2^*) f_D(Q_1 - Q_2^*) + \int_0^{Q_1 - Q_2^*} \frac{\partial L(Q_1 - w) f_D(w)}{\partial Q_1} \, dw$$

$$\text{Pero } \frac{\partial L(Q_1 - w) f_D(w)}{\partial Q_1} = \frac{\partial}{\partial Q_1} \left[ \int_{Q_1 - w}^{\infty} p(v - Q_1 + w) f_D(v) \, dv + \int_0^{Q_1 - w} h(Q_1 - w - v) f_D(v) \, dv \right] f_D(w)$$

$$= \left[ \frac{\partial}{\partial Q_1} \int_{Q_1 - w}^{\infty} p(v - Q_1 + w) f_D(v) \, dv + \frac{\partial}{\partial Q_1} \int_0^{Q_1 - w} h(Q_1 - w - v) f_D(v) \, dv \right] f_D(w)$$

$$= \left[ -p \int_{Q_1-w}^{\infty} f_D(v) dv + h \int_0^{Q_1-w} f_D(v) dv \right] f_D(w) , \text{ de aplicar el T. 2.}$$

$$= -p f_D(w) + p \int_0^{Q_1-w} f_D(v) dv f_D(w) + h \int_0^{Q_1-w} f_D(v) dv f_D(w)$$

$$= -p f_D(w) + (p+h) \int_0^{Q_1-w} f_D(v) dv f_D(w)$$

$$= -p f_D(w) + (p+h) F(Q_1-w) f_D(w)$$

$$\text{Así, } \frac{d}{dQ_1} \int_0^{Q_1-Q_2^*} L(Q_1-w) f_D(w) dw = L(Q_2^*) f_D(Q_1-Q_2^*) + \int_0^{Q_1-Q_2^*} \left[ -p f_D(w) + (p+h) F(Q_1-w) f_D(w) \right] dw$$

$$= L(Q_2^*) f_D(Q_1-Q_2^*) - p F(Q_1-Q_2^*)$$

$$+ (p+h) \int_0^{Q_1-Q_2^*} F(Q_1-w) f_D(w) dw.$$

$$\text{Y, } \frac{d}{dQ_1} \int_{Q_1-Q_2^*}^{\infty} \left[ c(Q_2^*-Q_1+w) + L(Q_2^*) \right] f_D(w) dw = -L(Q_2^*) f_D(Q_1-Q_2^*) - c \int_{Q_1-Q_2^*}^{\infty} f_D(w) dw$$

$$\begin{aligned}
&= -L(Q_2^*) f_D(Q_1 - Q_2^*) - c \left[ 1 - \int_0^{Q_1 - Q_2^*} f_D(w) \, dw \right] \\
&= -L(Q_2^*) f_D(Q_1 - Q_2^*) - c + c F(Q_1 - Q_2^*) .
\end{aligned}$$

Sustituyendo todos los resultados obtenidos se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dC_1(X_1)}{dQ_1} &= c - p + (p+h) F(Q_1) + L(Q_2^*) f_D(Q_1 - Q_2^*) - p F(Q_1 - Q_2^*) \\
&\quad + (p+h) \int_0^{Q_1 - Q_2^*} F(Q_1 - w) f_D(w) \, dw - L(Q_2^*) f_D(Q_1 - Q_2^*) - c + c F(Q_1 - Q_2^*) \\
&= -p + (p+h) F(Q_1) + (c-p) F(Q_1 - Q_2^*) + (p+h) \int_0^{Q_1 - Q_2^*} F(Q_1 - w) f_D(w) \, dw
\end{aligned}$$

Al igualar a cero esta derivada se encuentra que  $Q_1^*$  es el mínimo si satisface la ecuación:

$$-p + (p+h) F(Q_1^*) + (c-p) F(Q_1^* - Q_2^*) + (p+h) \int_0^{Q_1^* - Q_2^*} F(Q_1^* - w) f_D(w) \, dw = 0.$$

Después de encontrar este resultado, verificar que la

segunda derivada es positiva es trivial, por lo que se deja como ejercicio.

Finalmente, si la función de densidad de probabilidad de la demanda es exponencial, es decir,

$$f_D(w) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{w}{\lambda}} \quad \text{para } w > 0.$$

$$\text{Entonces la fda sería: } F(a) = \int_0^a \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{w}{\lambda}} dw = 1 - e^{-\frac{a}{\lambda}}.$$

Y el valor óptimo,  $Q_1^*$ , es aquel que satisface la relación:

$$-p + (p+h) \left[ 1 - e^{-\frac{Q_1^*}{\lambda}} \right] + (c-p) \left[ 1 - e^{-\frac{Q_1^*-Q_2^*}{\lambda}} \right] + (p+h) \int_0^{Q_1^*-Q_2^*} \left[ 1 - e^{-\frac{Q_1^*-w}{\lambda}} \right] dw = 0$$

$$\Rightarrow h - (p+h) e^{-\frac{Q_1^*}{\lambda}} + c - p + (p-c) e^{-\frac{Q_1^*-Q_2^*}{\lambda}} + (p+h) \int_0^{Q_1^*-Q_2^*} \left[ \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{w}{\lambda}} \right] dw = 0$$

$$- (p+h) \int_0^{Q_1^*-Q_2^*} \left[ \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{w}{\lambda}} \right] dw = 0$$

$$\Rightarrow h - (\bar{z} + h) e^{-\frac{Q_1^*}{\lambda}} + c - p + (p - c) e^{-\frac{Q_1^* - Q_2^*}{\lambda}} + (p + h) - e^{-\frac{Q_1^* - Q_2^*}{\lambda}} + 1 - \frac{(p + h)(Q_1^* - Q_2^*)}{\lambda} e^{-\frac{Q_1^*}{\lambda}} = 0$$

$$\Rightarrow 2h - c - (p + h) e^{-\frac{Q_1^*}{\lambda}} - (c + h) e^{-\frac{Q_1^* - Q_2^*}{\lambda}} - \frac{(p + h)(Q_1^* - Q_2^*)}{\lambda} e^{-\frac{Q_1^*}{\lambda}} = 0.$$

$$\Rightarrow 2h + c = (p + h) e^{-\frac{Q_1^*}{\lambda}} + (c + h) e^{-\frac{Q_1^* - Q_2^*}{\lambda}} + \frac{(p + h)(Q_1^* - Q_2^*)}{\lambda} e^{-\frac{Q_1^*}{\lambda}}.$$

Resulta que en esta expresión, al intentar despejar  $Q_1^*$  por los métodos ortodoxos, el resultado siempre queda en función de  $Q_1^*$ .

Por lo que sólo es posible aproximarse a  $Q_1^*$  tanto como se quiera, con el auxilio de los métodos numéricos y una computadora.

Para evidenciar esto, hágase la siguiente sustitución

$$z_0 = \frac{Q_1^* - Q_2^*}{\lambda},$$

$$\text{en: } 2h + c = (p + h) e^{-\frac{Q_1^*}{\lambda}} + \frac{Q_2^*}{\lambda} - \frac{Q_2^*}{\lambda} + (h + c) e^{-\frac{Q_1^* - Q_2^*}{\lambda}} +$$

$$\frac{(p + h)(Q_1^* - Q_2^*)}{\lambda} e^{-\frac{Q_1^*}{\lambda}} + \frac{Q_2^*}{\lambda} - \frac{Q_2^*}{\lambda}$$

$$\Rightarrow 2h + c = (p + h) e^{-z_0} - \frac{Q_2^*}{\lambda} + (h + c) e^{-z_0} + (p + h) z_0 e^{-z_0} - \frac{Q_2^*}{\lambda}$$

$$\Rightarrow 2h + c = e^{-z_0} \left[ (p + h) e^{-\frac{Q_2^*}{\lambda}} + h + c + (p + h) z_0 e^{-\frac{Q_2^*}{\lambda}} \right]$$

Donde, para valores conocidos de  $h, c, p, \lambda$  y  $Q_2^*$  esto se puede reducir a:  $K_1 e^{-Z_0} + K_2 Z_0 e^{-Z_0} + K_3 = 0$ , donde  $K_1, K_2, K_3$  son constantes.

Es posible encontrar una aproximación al valor de  $Z_0$ , usando métodos numéricos tales como el método de bisección (o intervalo medio), el método de Newton-Raphson, etc. Luego,  $Q_1^* = \lambda Z_0 + Q_2^*$ .

Ejercicio: Pruébese que si la función de densidad de probabilidad de la demanda es uniforme sobre el intervalo de  $0$  a  $t$ , es decir,

$$f_D(w) = \begin{cases} \frac{1}{t} & , \text{ si } 0 \leq w \leq t \\ 0 & , \text{ en caso contrario,} \end{cases}$$

entonces puede obtenerse  $Q_1^*$  a partir de la expresión:

$$Q_1^* = \sqrt{(Q_2^*)^2 + \left[ \frac{2t(c-p)}{p+h} \right] Q_2^* + \frac{t^2[2p(p+h) + (h+c)^2]}{(p+h)^2}} - \frac{t(h+c)}{(p+h)}$$

## 5.5 SIMULACION DE SISTEMAS DE INVENTARIOS.

Se construirá un modelo que se pueda utilizar en el análisis tanto de sistemas de punto repedido como en los sistemas de revisiones periódicas. El concepto del evento siguiente, desarrollado en la simulación de sistemas de colas, se reutilizará en la construcción del modelo de simulación (simulador). Se analizarán los eventos que se pueden producir y se investigarán sus resultados en lo que se refiere a los dos tipos de sistemas. Finalmente, se combinarán los conceptos de los dos sistemas en un modelo de simulación "parametrizado", que pueda simular a cualquiera de esos dos sistemas.

Existen tres características del modelo que se construirá que son claramente distintas a las del modelo de simulación de colas:

- i) Todos los valores del tiempo se mantendrán como variables reales en el programa de simulación.
- ii) Habrá algo equivalente a la matriz de eventos siguientes (MES), pero en este algo se mantendrán los valores del tiempo según el reloj maestro de simulación, en lugar del método del tiempo hasta el evento siguiente, es decir, que las

anotaciones de los relojes menores contendrán valores acumulativos de tiempo, en lugar de valores de tiempo entre eventos.

iii) Se incluye una opción en la matriz de eventos siguientes, que le permitirá al analista actualizar las estadísticas pertinentes, imprimir en la salida información operacional, o ambas cosas, - con valores de incrementos de tiempo.

#### 5.5.1 EVENTOS QUE SE DEBEN CONSIDERAR EN LA SIMULACION DE INVENTARIOS.

Para los fines del análisis, se definen a continuación cinco eventos distintos que pueden ocurrir en el tiempo en una simulación general de inventarios.

$E_1$ . La demanda de artículos del inventario.

$E_2$ . La recepción de un pedido.

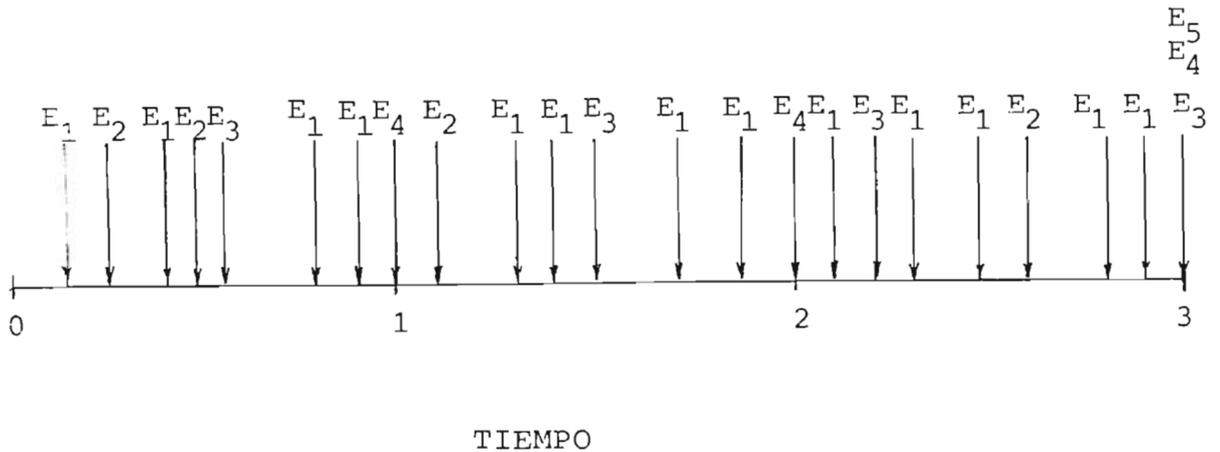
$E_3$ . La revisión de la posición de inventario para determinar si se debe hacer o no un pedido de existencias adicionales.

$E_4$ . El resumen (y/o la salida) de información sobre el - estado del sistema en un momento dado.

$E_5$ . El final de la corrida de simulación.

Obsérvese que  $E_4$  y  $E_5$  están "orientados al modelo" y no tienen una significancia dada en un sistema de inventarios real. La ventaja es, que al definir los eventos de esta manera, se puede construir un programa general de simulación que maneje tanto el modelo de punto de repedido como el de revisiones periódicas. Se define la medida de eficacia de los dos sistemas como el costo total del sistema al año. En el costo total del sistema se incluyen los costos anuales de llevado de inventario, el costo anual de los agotamientos de existencias, y el costo anual de revisión del sistema y la expedición de pedidos para reabastecer el inventario. Las decisiones relativas a cuándo y qué cantidades pedir se basan en la posición del inventario. Las variables de decisión son generalmente "cuándo hacer un pedido y por qué cantidad". El objetivo del modelo de simulación será obtener un valor para la medida de eficacia, basado en valores específicos de las variables de decisión. Se realizará esto, permitiendo que el modelo simule un período deseado de funcionamiento. Se comenzará a describir el proceso general de simulación. En la Figura 1, se ilustra una escala de tiempo sobre la que funcionará la simulación de los sistemas de inventarios.

FIGURA 1. Escala de tiempo para eventos durante la simulación de Inventarios.



Para los fines del análisis, supóngase que  $T = 3$  años. Además, supóngase que se desea obtener un resumen de información estadística al final de las operaciones de cada año. Esto se muestra en la escala por medio de las flechas marcadas  $E_4$ . Obsérvese que el punto  $T = 3$  en la escala se denomina también  $E_5$ , puesto que se produce también el evento  $E_5$ . Todas las flechas marcadas  $E_1$  representan los momentos en que se producen las demandas. En este caso, la distancia entre dos flechas  $E_1$  sucesivas no es constante.

Las flechas  $E_3$ , representan los momentos en que se revisa la posición de inventario con el fin de tomar una decisión sobre si se hace o no un pedido. En la figura, se -

ilustra un sistema de revisiones periódicas, pero en un sistema de punto de repedido cada punto de la escala marcado con una flecha  $E_1$  lo estará también por una flecha  $E_3$  que coincide; es decir, que se revisará la posición de inventario cada vez que se produzca una demanda. Los puntos en la escala marcados con flechas  $E_2$  representan los puntos en el tiempo en que se recibe un pedido.

Los valores de tiempo de los eventos  $E_4$  y  $E_5$ , pueden ser considerados como parámetros de entrada. El simulador debe funcionar de tal forma que siempre que se produzca cierto evento, se registre el punto en el tiempo en que ocurra el siguiente evento similar.

El método para encontrar la "distancia" entre dos momentos de eventos similares dependerá de la naturaleza del modelo simulado. Asimismo, cuando se produzca el evento 3, se podrá determinar en general, tanto cuándo ocurrirá el evento 3 siguiente como cuándo se producirá el evento 2 correspondiente. Si el tiempo de Espera es cero las flechas  $E_2$  coincidirán con las  $E_3$ . Esto quiere decir que, cuando se produce una revisión queda determinada la siguiente (en un modelo de revisión periódica) así como también cuándo se recibirá un pedido, si es que se hizo alguno en ese momento de la revisión.

Al revisar el sistema general de inventarios de la manera anterior, se pueden comenzar a analizar ramificaciones específicas hacia eventos dados. Obsérvese que cuando se hace que el simulador vaya de un punto a otro en la escala de tiempo, se debe actualizar continuamente la información pertinente a los costos que se reúne.

Sobre todo, al recorrer una distancia  $\Delta t$  en la escala de tiempo, en donde  $\Delta t$  es el tiempo entre dos eventos que cambian el estado del sistema de inventario, se deben modificar los valores para las unidades-año de inventario a mano, así como también para las unidades-año de pedidos atrasados (si se tratara de un caso de pedidos atrasados). Esto se realiza multiplicando  $\Delta t$  por el nivel de inventario y por el número de pedidos atrasados, si un agotamiento de las existencias da como resultado un pedido atrasado. Los niveles de inventario y pedidos atrasados por los que se multiplica  $\Delta t$ , son los que existen al iniciarse el período  $\Delta t$ .

A continuación se revisarán algunos de los aspectos que se incluirán en el modelo de simulación, basados en las características de los eventos, dentro de la simulación.

#### CARACTERISTICAS DE UNA DEMANDA.

Se asumirá que una petición al sistema de inventarios,

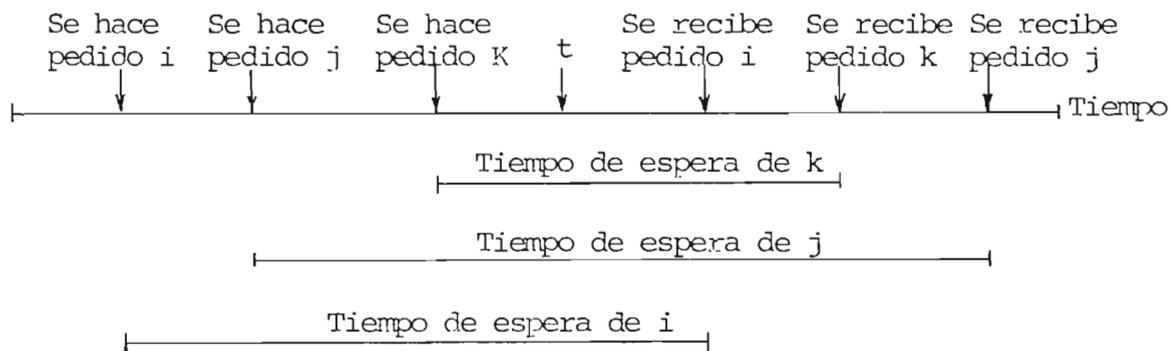
de artículos habidos y por haber en existencia constituye una demanda. Las características del patrón de la demanda se puede analizar por separado, sin tomar en cuenta el tipo de sistema de inventario que se esté simulando. Se supone que el patrón de la demanda es independiente de la manera en que se administre el sistema de inventarios.

Se desea poder simular sistemas con todos los tipos de patrones variables de demanda. El patrón de la demanda se especifica por el tiempo entre demandas sucesivas, así como también por el número de unidades solicitadas por demanda. Sería útil que se tomara en consideración la inclusión de parámetros en el modelo de simulación, que permitan especificar esas dos características. También es conveniente dejar margen para los tiempos constantes o distribuidos aleatoriamente entre demandas sucesivas. Al tomar disposiciones para los tiempos constantes entre demandas, se pueden modelar sistemas en los que se registra la demanda como, por ejemplo, la demanda diaria o mensual. Entonces, se podrá simular el funcionamiento del sistema sobre una base de día en día o de mes en mes. También se desea dejar margen para un número de unidades constante o distribuido aleatoriamente, como objeto de cada demanda. Todo esto es posible mediante el empleo de subprogramas.

### CARACTERISTICAS DE UN PEDIDO.

Uno de los aspectos relevantes relativos a los pedidos, que interesará incluir en el modelo es el siguiente: El tiempo de espera, es decir, el tiempo entre la expedición de un pedido y su recepción. En general, se desea - permitir un margen para valores de tiempo de espera constantes y distribuidos aleatoriamente. En cierto momento puede haber pendientes varios pedidos. Además, los pedidos se pueden cruzar. En la Figura 2, se da un ejemplo - de pedidos cruzados.

FIGURA 2. Cruce de Pedidos.



Obsérvese que, aunque el pedido k se hizo después - del j, se recibió antes. Obsérvese también que en tiempo t hay tres pedidos pendientes. Resulta evidente que, si - los valores de tiempo de espera son constantes, los pedidos

no se cruzarán. Recuérdese que la norma que establece el momento de hacer un pedido se basa en la posición de inventario; por tanto, el cruce de pedidos no debe afectar la decisión de hacer un pedido.

También tiene gran importancia el número de unidades pedidas, es decir, la cantidad de pedido, la cual es considerada como una variable de decisión. Finalmente, se debe tomar en consideración el costo de hacer un pedido, se considerará que este costo es independiente del número de unidades pedidas.

#### CARACTERISTICAS DE UNA REVISION.

En el modelo de revisiones periódicas se examina a intervalos fijos el estado del inventario. Cuando se emplea un modelo de punto de repedido, el estado del inventario se revisa muy a menudo.

En realidad, sólo se requiere una revisión, cuando ocurre un evento, que pueda hacer que la posición de inventario caiga al punto de repedido o por debajo de él. Puesto que una demanda representa el único evento que puede provocar ese ajuste de la posición de inventario, se puede decir que una revisión al sistema coincide con una demanda, cuando se utiliza el modelo de punto de repedido. En un mo

delo de revisiones periódicas, el tiempo entre revisiones es una variable de decisión y se leerá como entrada en el programa.

Generalmente, no se toma en consideración el costo de la revisión en un modelo de punto de repedido, puesto que ese costo no influirá en las normas operacionales óptimas de este tipo de modelo. Sin embargo, si se va a comparar la norma de punto de repedido con otra de revisiones periódicas, será necesario incluir en ambos modelos el costo de una revisión.

#### 5.5.2 DESCRIPCION DEL PROGRAMA.

El programa simula ya sea al sistema de inventario de punto de repedido o al de revisiones periódicas, con ventas perdidas o pedidos atrasados. Además, la cantidad del pedido puede ser constante o variar de un pedido a otro.

El programa se construye en torno al concepto del evento siguiente y emplea los cinco eventos mencionados. El modelo se compone de un programa principal y diez subprogramas. El programa principal tiene la responsabilidad de introducir datos de entrada, impulsar la simulación e imprimir información operacional intermedia. A continuación se dan los subprogramas con una breve descripción de sus funciones.

1. SUBROUTINE SIG : Determina qué evento será el siguiente en la simulación. Es similar a la SUBROUTINE BAR en el simulador de dolas.
2. SUBROUTINE ADU : Acumula tanto las unidades-año de inventario como las unidades-año de pedidos atrasados (en el caso de que se acumulen pedidos atrasados).
3. SUBROUTINE REV : Revisa la posición de inventario para determinar si se debe hacer un pedido o no. Si es preciso hacerlo, se calcula la cantidad y se programa la recepción del pedido como evento posterior. Aumentando posteriormente la posición de inventario en la cantidad pedida.
4. SUBROUTINE USS : Actualizar el sistema después que se produce una demanda, determinando si se satisface la demanda, se pone en pedidos atrasados o se pierde.
5. SUBROUTINE UES : Maneja el sistema después de recibirse un pedido.

6. SUBROUTINE TES : Genera los valores del tiempo de -  
espera.
7. SUBROUTINE DEM : Genera el tiempo hasta la demanda  
siguiente.
8. SUBROUTINE UNI : Genera el número de unidades soli-  
citadas en cierta demanda.
9. SUBROUTINE STD : Calcula la media y la desviación es-  
tándar de la media de las 6 cantidada  
des siguientes, por separado:
  1. Unidades-año de inventario.
  2. Unidades-año de agotamiento de  
existencias.
  3. Número de agotamientos de exis-  
tencias.
  4. Número de pedidos.
  5. Número de revisiones.
  6. Costo total del sistema.
10. SUBROUTINE RAND : Genera números aleatorios uniformem  
ente distribuidos.

Aunque el programa utiliza el concepto del evento siguiente para realizar las operaciones, no se crea una matriz de eventos siguientes, sino que se utilizan variables separadas para almacenar los valores de tiempo para los cinco eventos definidos en la simulación. Esas cinco variables se dan a continuación:

1. TD : Tiempo del reloj maestro para la demanda siguiente.
2. PP(I): Vector que contiene tiempos del reloj maestro para la recepción de pedidos pendientes.
3. TR : El tiempo del reloj maestro al que se producirá la siguiente revisión de la posición de inventario.
4. TA : Tiempo del reloj maestro al que se producirá la siguiente actualización estadística y/o impresión de salida.
5. TL : El tiempo del reloj maestro para el final de la corrida de simulación.

A continuación se presenta un Macrodiagrama de flujo del simulador general de inventarios. Luego se ilustrará el modo en que se manejan los tiempos de espera en el programa.

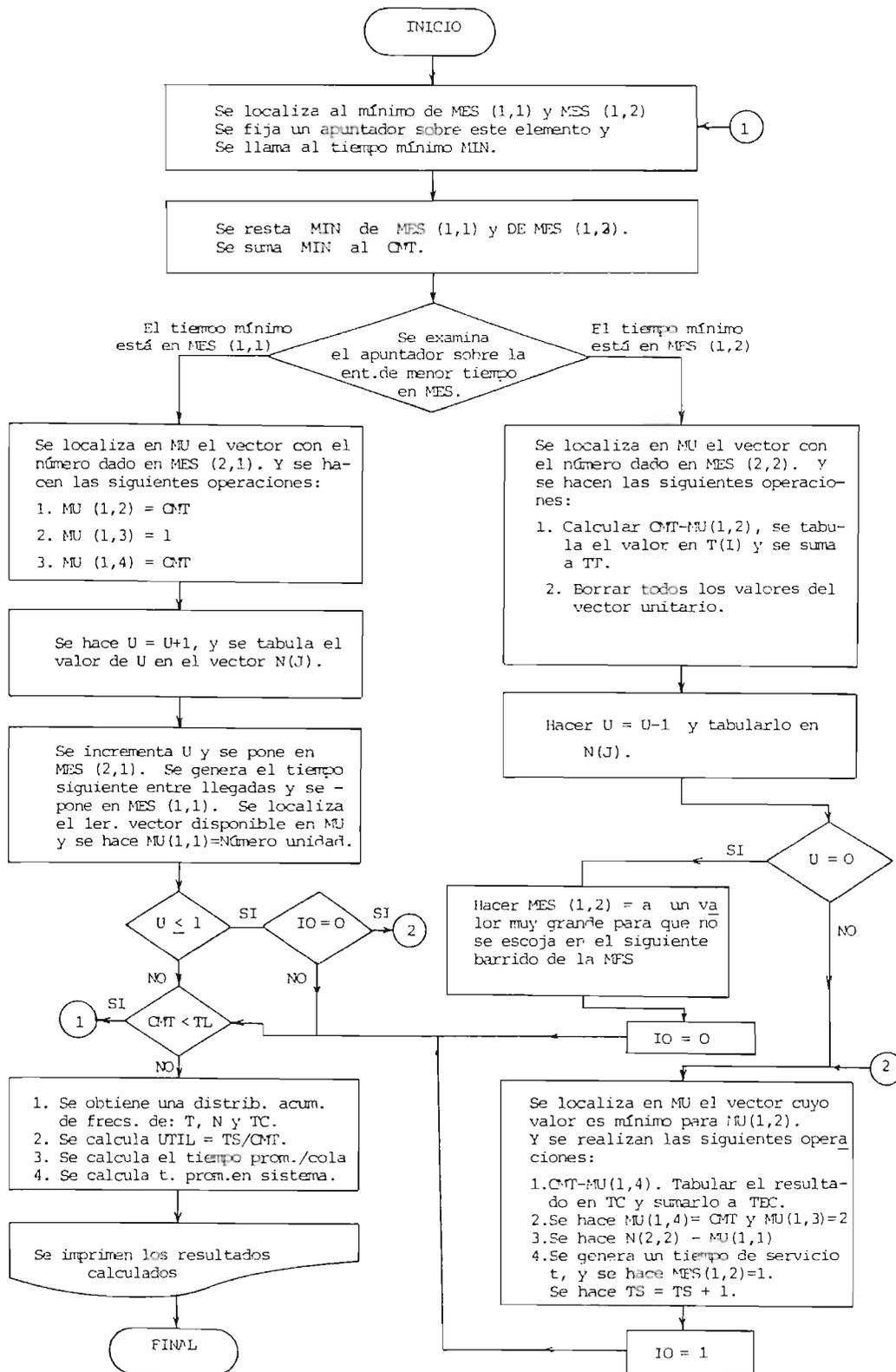


FIGURA 3. MACRODIAGRAMA DEL FLUJO DE OPERACIONES DEL SIMULADOR DE INVENTARIOS.

El vector  $PP(I)$  se utiliza para almacenar los valores del tiempo para la recepción de todos los pedidos pendientes. Cada vez que se hace un pedido, se calcula el tiempo para la recepción y se almacena en el vector  $PP$ . Luego, se investiga el vector para determinar el valor mínimo de  $PP(I)$ . Se fija en este elemento un indicador denominado  $MIN$ . Así, en cualquier momento dado,  $PP(MIN)$  indica la posición dentro del vector en la que se encuentra el tiempo de la recepción del pedido siguiente. En la Figura 4.A se ilustra este vector. La variable  $NPP$  cuenta el número de pedidos pendientes en cualquier momento.

FIGURA 4. A - El vector  $PP$  antes del tiempo 11.

( $NPP = 5$  ,  $MIN = 3$ ).

B - El vector  $PP$  después del tiempo 11.

( $NPP = 4$  ,  $MIN = 2$ ).

	PP
1	25
2	17
3	11
4	20
5	30
6	⋮

A

	PP
1	25
2	17
3	20
4	30
5	
6	⋮

B

Según la Figura 4.A, hay cinco pedidos pendientes ( $NPP = 5$ ) y el siguiente pedido que se recibirá es el número

ro tres ( $MIN = 3$ ) en el momento 11. Al recibir este pedido se pone en el inventario y luego se destruye, es decir, se elimina o borra de  $PP(I)$ . En ese instante, el vector  $PP(I)$  se redispone como se muestra en la Figura 4.B; quedando cuatro pedidos pendientes ( $NPP = 4$ ) y el pedido que se recibirá a continuación es el número 2 ( $MIN = 2$ ), en el tiempo 17.

La SUBROUTINE REV, desempeña la función de calcular los tiempos de las recepciones, poniéndolos en  $PP$  y determinando el valor de  $MIN$ .

La SUBROUTINE UES, retira el elemento  $PP(MIN)$  y comprime  $PP$ , elevando a la vez, todos los demás valores del tiempo. Luego se investiga el vector para determinar el nuevo valor de  $MIN$ .

En correspondencia con el vector  $PP$ , se encuentra el vector  $Q$ , que contiene el número de unidades que se van a recibir. Por ende, cuando se recibe un pedido  $I$ ,  $Q(I)$  contiene el número de unidades de ese pedido. Así, el evento  $PP(MIN)$  contiene el tiempo de recepción del pedido siguiente y  $Q(MIN)$  el número de unidades que se recibirán.

A diferencia del reloj de colas, este simulador fun-

ciona con valores acumulados de tiempo para todos los eventos. Para ilustrar esto, considérese la Tabla 1. En esa Tabla se encuentran los valores acumulados de tiempo para una corrida de simulación de 20 unidades de tiempo. La columna denominada "T1" indica el "tiempo presente" o la equivalencia del CMT en el simulador de colas. Los generadores de procesos utilizados generan todavía el tiempo entre eventos; sin embargo, el tiempo utilizado para planear los eventos es: ese tiempo generado más el valor de T1. Por ejemplo, supóngase que el tiempo generado por la SUBROUTINE DEM, entre la primera y la segunda demanda fué de 4 unidades de tiempo. Esas cuatro unidades (colocadas en la columna denominada DEM) sumadas al valor de T1 dan el valor siguiente de TD, que es de 7.

TABLA 1. Ejemplo del Paso del Tiempo en un Simulador de Inventario.

EVENTO	T1	TD	PP (MIN)	TR	TA	TL	DEM
1	3	3	****	4	10	20	4
2	4	7	****	4	10	20	-
3	7	7	****	8	10	20	2
4	8	9	****	8	10	20	-
5	9	9	14	12	10	20	4
6	10	13	14	12	10	20	-
7	12	13	14	12	20	20	-
8	13	13	14	16	20	20	2
9	14	15	14	16	20	20	-
10	15	15	****	16	20	20	3
11	16	18	****	16	20	20	-
12	18	18	****	20	20	20	4
13	20	22	****	20	20	20	-
14	20	22	****	24	20	20	-
15	20	22	****	24	30	20	-

\*\*\*\* Representa un valor extremadamente grande.

Al examinar la columna marcada TR, se deduce que se trata de un sistema de revisiones periódicas con un tiempo

entre revisiones de 4 unidades de tiempo. El modelo se ajustó también para actualizar las estadísticas cada 10 unidades de tiempo.

Obsérvese que el tiempo para la recepción de un pedido [  $PF(MIN)$  ] se estableció inicialmente muy alto para evitar ser escogido por la subrutina del evento siguiente. Durante el cuarto evento, que era una revisión, se tomó la decisión de hacer un pedido y se generó el tiempo para su recepción, que se puso en la variable  $PP(MIN)$ . Una vez recibido el pedido (evento 9), volvió a ajustarse esa variable a un valor muy alto.

Se dará el programa principal para el simulador de inventario, en lenguaje FORTRAN.

La lista del programa principal se muestra en la Figura 5. El programa se ajusta para manejar varios conjuntos de problemas. El número de conjuntos de problemas se lee en la variable  $NSIM$ . Además, cada problema se puede simular varias veces, para repetir el experimento. La variable  $ITER$  especifica este valor. La secuencia de proposiciones posteriores a la 70 sólo son válidas para los subprogramas  $DEM$ ,  $TES$  y  $UNI$ , incluidos en el programa. Si se cambian esos subprogramas las instrucciones carecerán de sentido. Los valores iniciales del nivel y la posición

de inventario se ajustan arbitrariamente en la suma del punto de repedido más la cantidad de pedido; aunque se podrían utilizar valores casi de cualquier tipo. Las variables principales se definen al inicio del programa.

El programa se ajusta para acumular información pertinente para toda la corrida de simulación, así como también para el período de tiempo entre impresiones sucesivas de salida. Las variables pertinentes para toda la corrida de simulación se marcan; comenzando con la palabra: "Esperado" = "Esperanza" = "Número Esperado".

## BIBLIOGRAFIA

1. THOMAS H. NAYLOR Y COLABORADORES.  
"Técnicas de Simulación en Computadoras".  
Editorial LIMUSA, México 1977.
2. GEORGE S. FISHMAN.  
"Conceptos y Métodos en la Simulación Digital de Eventos Discretos".  
Editorial LIMUSA, México 1978.
3. J. W. SCHMIDT y R. E. TAYLOR.  
"Análisis y Simulación de Sistemas Industriales".  
Editorial TRILLAS, México 1979.
4. CLAUDE Mc MILLAN y RICHARD F. GONZALEZ.  
"Análisis de Sistemas".  
Editorial TRILLAS, México 1977.
5. A. KAUFMANN.  
"Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones".  
TOMO I. Compañía Editorial Continental, S. A. México  
1979.
6. A. KAUFMANN y R. CRUON.  
"Los Fenómenos de Espera".  
CECSA, México 1964.

7. JAMES E. SHAMBLIN y G. T. STEVENS Jr.  
"Investigación de Operaciones".  
Editorial Mc Graw-Hill, México 1975.
8. THOMAS L. SAATY.  
"Elementos de la Teoría de Colas".  
Editorial Aguilar, España 1967.
9. EMANUEL PARZEN.  
"Procesos Estocásticos".  
Editorial Paraninfo, Madrid 1972.
10. ROBERT J. THIERAUF y RICHARD A. GROSSE.  
"Toma de Decisiones por medio de Investigación de Operaciones".  
Editorial LIMUSA - WILEY, México 1972.
11. FRANCIS SCHEID.  
"Introducción a la Ciencia de las Computadoras".  
Editorial Mc Graw-Hill, México 1972.
12. JHON G. KEMENY y THOMAS E. KURTZ.  
"Basic Programming".  
Editorial WILEY, Canadá. 1971.
13. HOWARD W. SAMS Y CO.  
"Manual de la Commodore 64K"  
1983.

14. "Sistemas Numéricos".  
Editorial LIMUSA, México 1977.
15. IVAN OBREGON SANIN.  
"Teoría de la Probabilidad".  
Editorial LIMUSA, México 1977.
16. PAUL L. MEYER.  
"Introducción a la Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas".  
Addison-Wesley Publishing Company, 1970.
17. FREDERICK HILLIER Y GERARLD J. LIEBERMAN.  
"Introducción a la Investigación de Operaciones".  
Editorial Mc Graw-Hill, 1982.
18. Dr. MARCO A. MURRAY Y DR. ENRIQUE CHURIEL U.  
"Aplicaciones de Computación a la Ingeniería".  
Editorial LIMUSA, 1975.