UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Propiedades del Espectro Primo

TRABAJO DE GRADUACION PRESENTADO POR

Alma Azucena Medrano Jiménez

PREVIO A LA OPCION DEL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICA

OCTUBRE DE 1984.

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

R E C T O R

Dr. MIGUEL ANGEL PARADA

SECRETARIO GENERAL

Dra. ANA GLORIA CASTANEDA DE MONTOYA

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

D E C A N O

Ing. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

S E C R E T A R I O

Ing. RENE MAURICIO MEJIA MENDEZ

DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Lic. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

COORDINADOR Y ASESOR: Lic. JOSE JAVIER RIVERA LAZO.

PROLOGO

El presente trabajo se fundamenta en el estudio de Anillos e Ideales; conceptos que sirven de base para el estudio de Espectros Primos siendo ésto, un poco de más profundidad a dicho tema; el objetivo primordial de éste, es que pueda ser utilizado como texto de consultas en el Curso de Seminario de Algebra, Curso que es de importancia para los estudiantes de Licenciatura en la rama de Matemática pura.

A continuación describo el siguiente resumen de lo tratado en dicha investigación.

En el Capítulo 0; está formado de conceptos preliminares donde se recuerdan definiciones elementales y básicas para los demás Capítulos.

El Capítulo I; es un estudio sobre Definiciones de - Espectro Primo, incluyendo sus Demostraciones.

Capítulo II; se trata del desarrollo de conjuntos de Abiertos Básicos para la Topología de Zariski.

En el Capítulo III se estudian particularmente, las propiedades de los Espectros Primos. Demostrando cada uno de ellos.

Capítulo IV. En éste se trata de probar cada uno de los ejercicios mostrado en el texto llamándole así: Propiedades Funtoriales.

Capítulo V, que es la finalización de las Demostraciones de dicho tema.

He de hacer constar que la investigación realizada ha tomado fundamentalmente el Capítulo de Ejercicios, denominado "Espectros Primos" del texto M. F. ATIYAH "Introduction to Commutative Algebra"; por ser transcrito y demostrado en un lenguaje más fácil de comprender.

Debido a que el tema es un poco desconocido en nuestro medio, en la realización de este trabajo tuve dificultad por la falta de bibliografía. Pero gracias a la valiosa y esmerada colaboración del Lic. José Javier Rivera Lazo, fué posible llevarlo a feliz término, a quien le expreso mis agradecimientos. Así como a todos los docentes que me brindaron la preparación para el presente logro y a la señora Nohemy de Rovelo por su ayuda dactilográfica.

DEDICATORIA

A mis Padres: Julio César Medrano y
Francisca Gabriela de Medrano
por el apoyo moral que siempre
me brindaron.

A mi Esposo: Salvador Sandoval
por su ayuda y comprensión,
con todo mi amor.

A mi Hija : Amelia Azucena,
para que ésto sea un incentivo
en su vida.

Azucena.

SIMBOLOGIA UTILIZADA

A	:	Anillo
I,J	:	Ideales
$[1]$	:	Ideal Generado por uno
$\cup$ $\cap$	:	Unión e Intersección
$\Rightarrow$	:	Implicación
$\Leftrightarrow$	:	Doble implicación
ϕ	:	Conjunto vacío
Spec(A)	:	Espectro de A
C, o^c	:	Complemento
Ker(f)	:	Núcleo de f
η	:	Intersección de los ideales primos de A (Nilradical)
$\subset$	:	Inclusión
$\exists$	:	Existencia
$<$; $\geq$	:	Menor que ; mayor o igual que
o	:	Conjunto abierto
ε	:	Pertenencia
inf	:	Infimo
V(E)	:	Conjunto de todos los ideales Primos que contienen E.
X_I	:	Conjunto de abiertos básicos.

ÍNDICE

Capítulo 0

CONCEPTOS PRELIMINARES.

Definiciones, corolarios y propiedades fundamentales para el presente trabajo que ha sido elaborado en base a conceptos estudiados en el desarrollo de las clases de la asignatura "Seminario de Algebra"; profundizando así un poco más en el estudio de: ESPECTROS PRIMOS DE ANILLOS E IDEALES.

0.1 DEFINICION DE ANILLO:

La terna $(A, +, \cdot)$ formada por el conjunto A no vacío y las dos operaciones binarias + y $\cdot$ definidas en A, se dice que es un anillo conmutativo con identidad si satisface las siguientes condiciones:

a) El par $(A, +)$ es un Grupo Abeliano;

b) El par $(A, \cdot)$ es un Semigrupo Conmutativo con identidad.

c) La Ley Distributiva de la Operación "$\cdot$" sobre la operación "+".

0.2 DEFINICION DE ANILLO DE BOOLE:

Un anillo A es de Boole si satisface lo siguiente:

$$x^2 = x \text{ para cada } x \in A.$$

0.3 DEFINICION DE IDEAL:

Sea A un anillo e I un subconjunto no vacío de A ($I \subset A$); se dice que I es un ideal en A si se satisfacen las siguientes condiciones:

a) I es un subgrupo aditivo, es decir que $-x + y \in I$, para cualesquiera x e y de I.

b) $IA \subseteq I$, es decir que para $x \in A$ e $y \in I$ se tiene que $xy \in I$.

0.4 DEFINICION DE IDEAL PRIMO:

Sea P un ideal de A (anillo), se dice que P posee la propiedad de ser primo si:

a) $P \neq A$

b) Si $xy \in P$ entonces $x \in P$ ó $y \in P$.

Es de hacer notar que en lo sucesivo la letra A identifica siempre un anillo; I, J y P ideales de A.

0.5 DEFINICION DE IDEAL GENERADO:

Sea $E \subset A$, se dice que un ideal I en A es generado por E ($I = [E]$) si se satisfacen las condiciones siguientes:

a) E es un ideal;

b) $E \subset I$;

c) Si J es un ideal y $E \subset J$ entonces $I \subset J$.

Observación: $[1] = A$

0.6 DEFINICION DE IDEAL MAXIMAL:

Sea M un ideal en A; se dice que M en A es maximal si se satisfacen las condiciones siguientes:

a) $M \neq [1]$ $(A = [1])$;

b) No existe ningún ideal I tal que $M \subset I \subset [1]$

0.7 DEFINICION DE IDEALES PRIMOS ENTRE SI:

Dos ideales I, J se dice que son primos entre si (o co-maximales) si $I + J = [1]$.

0.8 PROPIEDAD:

Todo ideal maximal es primo.

0.9 DEFINICION DE ELEMENTO NILPOTENTE:

Un elemento x en A se dice que es nilpotente si $x^n = 0$, para algún $n > 0$ (n es un número natural).

0.10 DEFINICION DE ELEMENTO UNIDAD:

Sea $x \varepsilon A$; se dice que x es un elemento unidad si: Es un elemento que divide a 1, es decir, un elemento tal que $xy = 1$ para algún $y \varepsilon A$.

0.11 PROPIEDAD:

Si $I \neq [1]$ es un ideal en A, existe un ideal maximal de A que contiene I.

0.12 PROPIEDAD DE IDEALES PRIMOS ENTRE SI:

Para ideales primos entre sí (I, J) se tiene que $I \cap J = IJ$.

Demostración:

"$\subset$"

Sea $x \varepsilon I \cap J$ entonces $x \varepsilon I$ y $x \varepsilon J$; por hipótesis, existen $a \varepsilon I$ y $b \varepsilon J$ tales que $a+b = 1$ (Definición 0.7); por otra parte como $x = x.1$ entonces $x = x\,(a+b)$ luego $x = xa + xb$, además como $x \varepsilon J$ y $a \varepsilon I$ entonces $xa \varepsilon IJ$ y $x \varepsilon I$ y $b \varepsilon I$ y $b \varepsilon J$ entonces $xb \varepsilon IJ$ finalmente $xa + xb = x \varepsilon IJ$.

"$\supset$"

Por definición de ideales se tiene $IJ \subset I$ y $IJ \subset J$

finalmente $IJ \subset I \cap J$ (porque $J \subset A$ y $IA \subset I$ además $I \subset A$ y $JA \subset J$).

0.13 PROPIEDADES DE NILRADICAL:

a) El conjunto formado por los elementos nilpotentes de un anillo se llama: nilradical (identificado por la letra η).

b) El conjunto η de todos los elementos nilpotentes en un anillo A es un ideal.

c) El ideal η se denomina el nilradical de A y además se prueba que es la intersección de todos los ideales primos de A.

Demostración:

Para la prueba del literal c) primeramente supongamos el conjunto Z formado por la intersección de todos los ideales primos y probemos que $\eta = Z$ siendo η el nilradical.

Sea x un elemento de η entonces $x^n = 0$ para algún $n > 0$.

Además $x^n \in P$ siendo P un ideal primo. Luego $x \in P$ por tanto x pertenece a la intersección de todos los ideales primos es decir $x \in Z$. Por tanto $\eta \subset Z$.

Demostremos ahora que $Z \subset \eta$.

Sea $x \notin \eta$ y definimos el conjunto "$\sum$" cuyos elementos son los ideales I tales que para todo $n > 0$ $x^n \notin I$ es decir que $x^n \notin \eta$; además sabemos que el conjunto - "$\sum$" es diferente de vacío ya que el ideal cero pertenece; es decir $0 \in \sum$. Además el conjunto "$\sum$" es bien ordenado por inclusión y como el lema de Zorn es aplicable a este conjunto, podemos decir que posee un elemento maximal; por tanto "$\sum$" tiene un elemento maximal.

Sea P un elemento maximal del conjunto "$\sum$". Se probará que P es un ideal primo.

Solución:

Sean $x,y \notin P$ entonces los ideales $P + (x)$ y $P + (y)$ contienen estrictamente a P; por tanto el ideal $P + (x) \notin \sum$ y $P + (y) \notin \sum$.

Además como $P + (x) \notin \sum$ entonces $x^n \in P + (x)$ para algún $n > 0$. Y

como $P + (y) \notin \sum$ entonces $x^m \in P + (y)$ para algún $m > 0$.

Por tanto $x^n x^m \in P + (xy)$ entonces $x^{n+m} \in P + (xy)$ es decir que el ideal $P + (xy) \notin \sum$.

Por tanto $xy \notin P$. Por lo que se tiene un ideal primo P tal que $x \notin P$.

Por tanto $x \notin Z$.

Luego $Z \subset \eta$ de donde $\underline{\underline{Z = \eta}}$.

0.14 DEFINICION DE ESPECTRO PRIMO DE UN ANILLO:

El espectro primo de un anillo A es el conjunto de todos los ideales primos del anillo y se denota por:

Spec (A) = {P/P es un ideal primo de A}.

0.15 DEFINICION DE ESPACIO TOPOLOGICO:

Sea X un conjunto no vacío. Una clase T de subconjuntos de X es una topología de X si cumplen:

a) X y ϕ pertenecen a T.

b) La unión de cualquier colección de conjuntos de T pertenece a T.

c) La intersección finita de conjuntos cualesquiera de T pertenecen a T.
(Los elementos de T se llaman Conjuntos Abiertos).

0.16 DEFINICION DE TOPOLOGIA INDUCIDA:

Sea X un espacio Topológico y E un subconjunto de X -

llamaremos "abierto de E" a todo $B \subset E$ que es de la - forma $B = E \cap o$ en donde o es un abierto de X.

A la Topología así definida en E se le llama Topología Inducida.

0.17 DEFINICION DE ENTORNO:

Sea p un punto de un espacio topológico X. Un subconjunto W de X es un entorno de P si y solo si W es un superconjunto de un conjunto abierto G que contiene a P.

0.18 DEFINICION DE CONJUNTO CERRADO:

Sea X un espacio Topológico. Un subconjunto F de X es un conjunto cerrado si y solo si su complemento - (F^c) es un conjunto abierto.

0.19 DEFINICION DE PUNTO DE ACUMULACION:

Sea X un espacio topológico; un punto $P \in X$ es un punto de acumulación o punto límite de un subconjunto - A de X si todo conjunto abierto "o" que contiene a P contiene algún punto de A diferente de P.

0.20 DEFINICION DE ADHERENCIA:

Un punto $P \in X$ es un punto de adherencia de $A \subset X$ si y sólo si $P \in A$ o P es un punto de acumulación de A.

Para el conjunto A su adherencia se denota por $\overline{A}$ - (llamada también clausura de A).

0.21 DEFINICION DE CONJUNTO DENSO:

Un subconjunto A de un espacio topológico X es denso en $B \subset X$ si B está contenido en la adherencia de A es decir $B \subset \overline{A}$.

En particular A es denso en X si y solo si $\overline{A} = X$.

0.22 DEFINICION DE CONTINUIDAD:

Sean X , Y espacios topológicos; una función f de X en Y es continua si y solo si la imagen recíproca - $(f^{-1}(H))$ de todo subconjunto abierto H de Y es un - subconjunto abierto de X.

0.23 TEOREMA:

Sean X , Y espacios topológicos y sea la función - $f : X \to Y$. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

a) f es continua en X.

b) Si $o \subset Y$ es abierto, entonces $f^{-1}(o)$ es abierto en X.

c) Si $F \subset Y$ es cerrado entonces $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

0.24 DEFINICION DE ESPACIO NORMAL:

Un espacio Topológico X es normal si y solo si F_1 y F_2 son subconjuntos cerrados y disjuntos de X; entonces existen conjuntos abiertos y disjuntos G y H tales - que:

$F_1 \subset G$ y $F_2 \subset H$.

0.25 DEFINICION DE ESPACIO SEPARABLE:

Un espacio topológico X es separable si: X contiene un subconjunto denso contable.

0.26 DEFINICION DE FUNCIONES HOMEOMORFAS:

Dos espacios topológicos X , Y son homeomorfos o topológicamente equivalentes si existe una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que la función y su inversa es continua.

0.27 DEFINICION DE CASI COMPACTO:

X es casi compacto, es decir, cada recubrimiento abierto de X tiene un subrrecubrimiento finito.

0.28 DEFINICION DE COMPACTO:

Un subconjunto Z de un espacio topológico X es compacto si todo recubrimiento abierto de Z es reducible a un recubrimiento finito.

0.29 ESPACIO LOCALMENTE COMPACTO:

Un espacio topológico X es localmente compacto si y sólo si todo punto de X posee un entorno compacto.

0.30 DEFINICION DE RECUBRIMIENTO:

Un subconjunto finito de Y será un subconjunto finito de Z, digamos $Z' = \{G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots. G_{i_m}\}$ tal que

$Y \in \{G_{i_1} \cup G_{i_2} \ldots\ldots \cup G_{i_n}\}$

0.31 PROPOSICION:

Sean X, Y, Z espacios topológicos si las funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son continuas y $f(X) \subset Y$ -

entonces $g \circ f$ es continua en X.

0.32 DEFINICION DE HOMEOMORFISMO:

Sean X , Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se llama homeomorfismo si sumple las condiciones si - guientes:

a) f es biyectiva.

b) f y f^{-1} son funciones continuas.

0.33 TEOREMA:

Una función $f : X \to Y$ es continua si y solo si la i- magen recíproca de cada uno de los elementos de una Ba se B de Y es un subconjunto abierto de X.

0.34 DEFINICION DE ESPACIO DE HAUSDORFF:

Un espacio topológico X es un espacio de Hausdorff o espacio separado, si cumple la condición siguiente - (llamado Axioma de Hausdorff).

Cualquiera que sean dos puntos distintos x,y de X existe una vecindad V de x y una vecindad W de y ($V, W \subset X$) tal que $V \cap W = \phi$.

0.35 PROPIEDAD:

Todo espacio de Hausdorff compacto es normal.

0.36 PROPIEDAD:

Sea E un subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff localmente compacto X y sea E un subconjunto - de un conjunto abierto o $\neq$ X.

Entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que:

a) $f(E) = \{0\}$

b) $f(o^c) = \{1\}$

0.37 PROPIEDAD:

Sea D el conjunto de las fracciones cuyos denominadores son potencias de dos y que pertenecen al intervalo unidad $[0,1]$; se tiene que D es denso en $[0,1]$ es decir $\overline{D} = [0,1]$.

0.38 LEMA DE URYSOHN:

Sean F_1 y F_2 subconjuntos cerrados y disjuntos de un espacio normal X. Entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f[F_1] = \{0\}$ y $f[F_2] = \{1\}$.

SUB-ESPACIO DE UN ESPACIO DE HAUSDORFF:

Todo sub-espacio de Hausdorff es a su vez un espacio de Hausdorff.

SOLUCION:

Sea (X, T) un espacio de Hausdorff y sea (Y, T) un sub-espacio de (X, T) donde $x, y \varepsilon Y \subset T$ tal que $x \neq y$.

Como (X, T) es un espacio de Hausdorff entonces podemos afirmar que existe $G, H \varepsilon T$ (conjuntos abiertos) tales que $x \varepsilon G$, $y \varepsilon H$ entonces $G \cap H = \phi$.

Además por definición de sub-espacio se tiene que $Y \cap G$ y $Y \cap H$ son conjuntos Ty-abiertos tales que satisfacen lo siguiente:

$x \varepsilon G$, $x \varepsilon Y \Rightarrow x \varepsilon Y \cap G$

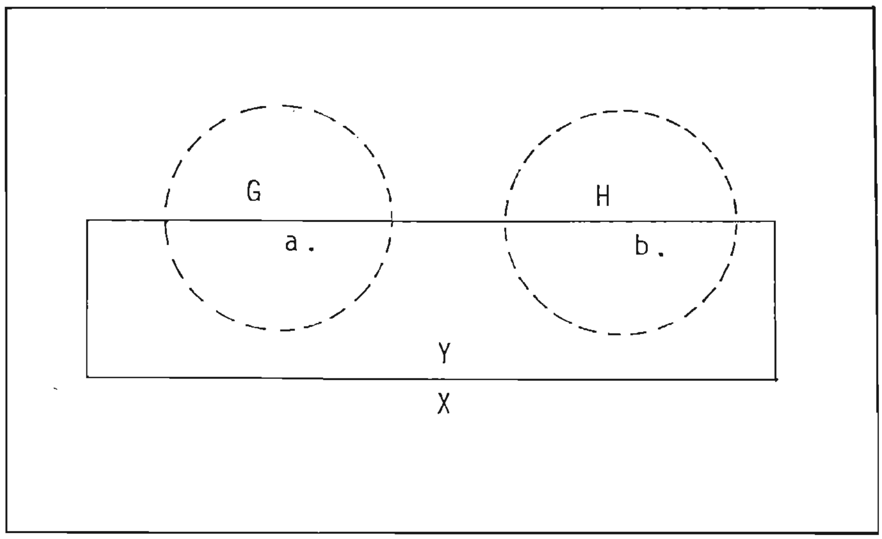
$y \varepsilon G$, $y \varepsilon Y \Rightarrow y \varepsilon Y \cap H$

$$G \cap H = \phi \Rightarrow (Y \cap G) \cap (Y \cap H) = Y \cap (G \cap H)$$

$$= Y \cap \phi$$

$$= \phi$$

DIAGRAMA DE HAUSDORFF



$$G \cap H = \phi$$

Sea $C(X, \mathbb{R})$ la clase de todas las funciones continuas de codominio real, definida en un espacio topológico X. Demostrar que si $C(X, \mathbb{R})$ separa puntos entonces X es un espacio de Hausdorff.

SOLUCION:

Sean x, y puntos distintos que pertenecen a X pero por hipótesis existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq f(y)$; y como $\mathbb{R}$ es un espacio de Hausdorff; entonces existen subconjuntos abiertos G y H disjuntos de $\mathbb{R}$ que contienen a $f(x)$ y $f(y)$ respectivamente. Entonces por definición los respectivos recíprocos $f^{-1}(G)$ y $f^{-1}(H)$ son disjuntos, abiertos y contienen a x e y, respectivamente. Por tanto X es un espacio de Hausdorff.

LEMA DE URYSOHN.

SOLUCION:

Por hipótesis tenemos que $F_1 \cap F_2 = \phi$; luego, $F_1 \subset F_2^c$. En particular, como F_2 es un conjunto cerrado, F_2^c es un superconjunto abierto del conjunto cerrado F_1. Y por teorema ya demostrado que dice: * (Si X es un espacio de Hausdorff, entonces toda sucesión convergente de X tiene un límite único) entonces existe un conjunto abierto $G_{1/2}$ tal que $F_1 \subset G_{1/2} \subset \overline{G}_{1/2} \subset F_2^c$.

Nótese que $G_{1/2}$ es un superconjunto abierto del conjunto cerrado F_1, y que F_2^c es un superconjunto abierto del conjunto cerrado $\overline{G}_{1/2}$. Luego por el mismo teorema (*) existen conjuntos abiertos $G_{1/4}$ y $G_{3/4}$ tales que $F_1 \subset G_{1/4} \subset G_{1/2} \subset \overline{G}_{1/2} \subset G_{3/4} \subset \overline{G}_{3/4} \subset F_2^c$ se repite este proceso y se obtiene, para cada $t \in D$, donde D es el conjunto de las fracciones cuyos denominadores son potencias de 2 y que pertenecen al intervalo unidad

$[0,1]$, un conjunto G_t tal que si t_1 , $t_2 \varepsilon D$ y $t_1 < t_2$ entonces $\overline{G}_{t_1} \subset G_{t_2}$.

Definiendo la función f en X de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \inf \{t : x \varepsilon G_t\} & \text{si } x \notin F_2 \\ 1 & \text{si } x \varepsilon F_2 \end{cases}$$

Nótese que, para todo $x \varepsilon X$, $0 < f(x) \leq 1$, es decir f aplica el conjunto X en $[0,1]$.

Obsérvese, además, que, $F_1 \subset G_t$ para todo $t \varepsilon D$; luego, $f[F_1] = \{0\}$. Más aún, por definición $f[F_2] = \{1\}$.

En consecuencia, lo único que falta por demostrar es que f es continua y por un ejercicio ya demostrado - que dice: (f es una función de un espacio topológico X en el intervalo unidad $[0,1]$. Entonces $f^{-1}[(a,1]]$ y $f^{-1}[[0,b)]$ son subconjuntos abiertos de X para todos $0 < a,b < 1$ entonces f es continua).

Aseguramos que:

i) $f^{-1}[[0,a)] = \cup \{G_t : t < a\}$.

ii) $f^{-1}[(b,1]] = \cup \{\overline{G}_t^c : t > b\}$.

Entonces, cada una de ellas es la unión de conjuntos abiertos y, por consiguiente, es abierta.

Demostrar cada uno de los literales anteriores:

i) Sea $x \varepsilon f^{-1}[[0,a)]$. Luego, $f(x) \varepsilon [0,a)$, es decir $0 \leq f(x) < a$.

como D es denso en $[0,1]$, existe $t_x \varepsilon D$ tal que $f(x) < t_x < a$. Esto es,

$f(x) = \inf \{t : x \varepsilon G_t\} < t_x < a$

Por consiguiente, $x \varepsilon G_{t_x}$ donde $t_x < a$.

Luego, $x \varepsilon \cup \{G_t : t < a\}$. Hemos demostrado que todo elemento de $f^{-1}[[0,a)]$ también pertenece a $\cup \{G_t : t < a\}$, es decir,

$f^{-1}[[0,a)] \subset \cup\{G_t : t < a\}$.

Por otra parte, supóngamos que $y \varepsilon \cup \{G_t : t < a\}$.

Entonces $\exists\ t_y \varepsilon D$ tal que $t_y < a$ y $y \varepsilon G_{t_y}$.

En consecuencia, $f(y) = \inf \{t : y \varepsilon G_t\} \leq t_y < a$ por tanto $y \varepsilon f^{-1}[[0,a)]$. Es decir

$\cup \{G_t : t < a\} \subset f^{-1}[[0,a)]$.

Por tanto $f^{-1}[[0,a)] = \cup \{G_t : t < a\}$.

ii) Sea $x \varepsilon f^{-1} [(b,1]]$. Entonces, $f(x) \varepsilon (b,1]$, es decir $b < f(x) \leq 1$. Puesto que D es denso en $[0,1]$, existen t_1, $t_2 \in D$ tales que $b < t_1 < t_2 < f(x)$. Es decir, $f(x) = \inf \{t : x \in G_t\} > t_2$ por tanto, $x \notin G_{t_2}$. Nótese que $t_1 < t_2$ implica que $\overline{G}_{t_1} \subset G_{t_2}$. Entonces, x tampoco pertenece a $\overline{G}_{t_1}$. En consecuencia, $x \in \overline{G^c_{t_1}}$ donde $t_1 > b$; con lo que $x \in \cup \{\overline{G^c_t} : t > b\}$. Por otra parte, sea $y \in \cup\ \overline{G^c_t} : t > b\}$. Entonces, existe un $t_y \in D$ tal que $t_y > b$ y $y \in \overline{G^c_{t_y}}$; por tanto, y no pertenece a $\overline{G}_{t_y}$. Ahora bien, $t < t_y$ implica que $G_t \subset G_{t_y} \subset \overline{G}_{t_y}$; de modo que $y \notin G_t$, para todo t menor que t_y por consiguiente,

$f(y) = \inf \{t : y \in G_t\} \geq t_y > b$ de donde,

$y \in f^{-1}(b,1]$. Esto es,

$$\cup \{\overline{G^c_t} : t > b\} \subset f^{-1}[(b,1]]$$

Por tanto f es continua y queda demostrado el lema de Urysohn.

0.39 DEFINICION DE RADICAL:

Si I es un ideal cualquiera de A, el radical de I es: $r(I) = \{x \in A : x^n \in I \text{ para algún } n>0\}$.

0.40 PROPOSICION.

El radical de un ideal I es la intersección de los ideales primos que contienen I.

Capítulo I

DEFINICION DE ESPECTROS PRIMOS.

1.1 DEFINICION:

Sea A un anillo, X el conjunto de todos los ideales primos de A.

Para cada subconjunto E de A, se define por V(E) el conjunto de todos los ideales primos que contienen E. (Es decir, si $I \in V(E)$ entonces $E \subset I$).

1.2 PROPOSICION:

a) Si I es un ideal generado por E, entonces $V(E) = V(I) = V(r(I))$.

b) $V(0) = X$; $V(1) = \phi$

c) Si $(E_i)_{i\varepsilon I}$ es una familia cualquiera de subconjuntos de A, entonces $V(\bigcup_{i\varepsilon I} E_i) = \bigcap_{i\varepsilon I} V(E_i)$

d) $V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J)$ para cualesquiera ideales I,J de A.

DEMOSTRACION:

a) Si I es un ideal generado por E, entonces $V(E) = V(I) = V(r(I))$.

$V(E) = V(I)$

$J \in V(E) \Rightarrow E \subset J$

$\Rightarrow I \subset J$ (Definición 0.5)

$\Rightarrow J \in V(I)$

$\Rightarrow V(E) \subset V(I)$

$J \in V(I) \Rightarrow I \subset J$

$\Rightarrow E \subset I$

$\Rightarrow E \subset J$

$\Rightarrow J \in V(E)$

$\Rightarrow V(I) \subset V(E)$

$\therefore\ V(E) = V(I).$

$V(I) = V(r(I)).$

$r(I) = \{x \in A \ / \ x^n \in I$ para algún $n > 0\}$

para $J \in V(I)$ se tiene que $I \subset J$ y si $x \in r(I)$ entonces $x^n \in I$ para algún $n > 0$ y como $I \subset J$ enton- $x^n \in J$ para algún $n > 0$ entonces $r(I) \subset J$ luego $J \in V(r(I))$ por tanto $V(I) \subset V(r(I))$.

$J \in V(r(I)) \Rightarrow r(I) \subset J$

si $y \in I$ entonces $y \in r(I)$

Además $r(I) \subset J \Rightarrow y \in J$

$\Rightarrow I \subset J$

$\Rightarrow J \in V(I)$

$\Rightarrow V(r(I)) \subset V(I)$

$\therefore V(r(I)) = V(I)$

b) $V(0) = X$; $V(1) = \phi$

$V(0) = X$

$V(0) = \{I \in X / 0 \in I\} = X$

Esta demostración es inmediata ya que $V(0)$ es el conjunto de todos los ideales primos; y X es el conjunto de ideales primos por tanto $V(0) = X$.

$V(1) = \phi$

$V(1) = \{I \in X / 1 \in I\}$

Esta igualdad también se da ya que $V(1)$ es el conjunto de todos los ideales primos que contienen al uno; pero ningún ideal está en uno; ni mucho menos el ideal primo.

Por tanto $V(1) = \phi$.

c) Si $(E_i)_{i\varepsilon I}$ es una familia cualquiera de subconjuntos de A entonces $V(\bigcup_{i\varepsilon I} E_i) = \bigcap_{i\varepsilon I} V(E_i)$

$$I \varepsilon V(\bigcup_{i\varepsilon I} E_i) \iff \bigcup_{i\varepsilon I} E_i \subset I$$

$$\iff E_i \subset I \ \forall i\varepsilon I$$

$$\iff I \varepsilon V(E_i) \ \forall i\varepsilon I$$

$$\iff I \varepsilon \bigcap_{i\varepsilon I} V(E_i)$$

$$\therefore V(\bigcup_{i\varepsilon I} E_i) = \bigcap_{i\varepsilon I} V(E_i)$$

d) $V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J)$ para cualesquiera ideales I,J de A.

$$V(I \cap J) = V(IJ)$$

$$K \varepsilon V(I \cap J) \Rightarrow I \cap J \subset K$$

$$\Rightarrow I J \subset I \cap J \quad \text{(Corolario 0.12)}$$

$$\Rightarrow I J \subset K$$

$$\Rightarrow K \varepsilon V(IJ)$$

$$\therefore V(I \cap J) \subset V(IJ)$$

$$J \varepsilon V(IJ) \Rightarrow IJ \subset J$$

$$x \varepsilon I \cap J \Rightarrow x \varepsilon I \ \text{y} \ x \varepsilon J$$

$$\Rightarrow x.x \varepsilon IJ$$

$\Rightarrow x^2 \in IJ$

$\Rightarrow x \in IJ$

$\Rightarrow x \in J$

$\Rightarrow I \cap J \subset J$

$\Rightarrow J \in V(I \cap J)$

$\therefore V(I \cap J) = V(IJ)$

$V(IJ) = V(I) \cup V(J)$

$K \in V(IJ) \Rightarrow IJ \subset K$

Probar que $K \in V(I)$ o $K \in V(J)$

Supongamos $K \notin V(I)$

$K \notin V(I) \Rightarrow I \not\subset K$

$\Rightarrow \exists\, y \in I$ tal que $\dot{Y} \notin K$

$\Rightarrow xy \in IJ\ (x \in J)$

$\Rightarrow xy \in K\ (IJ \subset K)$

$\Rightarrow x \in K$

$\Rightarrow J \subset K$

$\Rightarrow K \in V(J)$

$\Rightarrow K \in V(I) \cup V(J)$

$\therefore V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$

$K \in V(I) \cup V(J) \Rightarrow K \in V(I)$ o $K \in V(J)$

$K \in V(I) \Rightarrow I \subset K$

$IJ \subset I \Rightarrow IJ \subset K$

$\Rightarrow K \in V(IJ)$

$K \in V(J) \Rightarrow J \subset K$

$IJ \subset J \Rightarrow IJ \subset K$

$\Rightarrow K \in V(IJ)$

$\Rightarrow V(I) \cup V(J) \subset V(IJ)$

$\therefore V(IJ) = V(I) \cup V(J)$

Estos resultados muestran que los conjuntos V(E) satisfacen los axiomas de los conjuntos cerrados en un espacio topológico.

La topología resultante se denomina Topología de Zariski.

El espacio topológico X se denomina el Espectro Primo de A y se denota así: Spec (A).

Capítulo II

ABIERTOS BASICOS.

2.1 DEFINICION:

$X_y = \{I \in X / y \notin I\}$; siendo X_y el conjunto de abiertos básicos de X = Spec (A).

Para cada $y \in A$, se define X_y el complemento de $V(y)$ en X = Spec (A).

2.2 PROPOSICION:

a) Probar que la familia de abiertos básicos (X_y) forma una base de conjuntos abiertos para la topología de Zariski.

b) $X_s \cap X_z = X_{sz}$

c) $X_s = \phi \iff s$ es nilpotente.

d) $X_s = X \iff s$ es Unidad.

e) $X_s = X_z \iff r([s]) = r([z])$

DEMOSTRACION:

a) Probaremos primeramente que los conjuntos X_y forman una base de conjuntos abiertos para la topología de Zariski, es decir, el conjunto formado por: $\{X_s / s \in A\}$ forman una base .

o el conjunto abierto en X entonces $o = CF$, con F cerrado en X.

$F = V(I)$ con I un ideal de A entonces

$o = C_X V(I)$.

Como $C\ V(I) = \{J\ /\ J$ es primo e $I \not\subset J\}$

$= \{J\ /\ J$ es primo y $\exists\ y \in I$ el cual $y \not\in J\}$

$= \{J$ es primo $/\ J \in X_y$ para algún $y \in I\}$

Demostrando concretamente el literal a); es decir

$\bigcup_{y \in I} X_y = \{J$ primo $/\ J \in X_y$ para algún $y \in I\}$.

$k \in \bigcup_{y \in I} X_y \Rightarrow \exists\ y_o$ tal que $K \in X_{y_o}$.

$\Rightarrow K \in \{J$ primo $/\ J \in X_y$ para algún $y\}$.

Por tanto

$\bigcup_{y \in I} X_y \subset \{J$ primo $/\ J \in X_y$ para algún $y\}$.

$K \in \{J$ primo $/\ J \in X_y$ para algún $y \in I\} \Rightarrow K \in {}_{y_o}$

para algún $y_o \in I$ $\Rightarrow K \in \bigcup_{y \in I} X_y$

Como X_y es una intersección finita de los conjuntos abiertos X_s y o es la unión de intersecciones finitas de X_s; por tanto el conjunto $\{X_s \ / \ s \in A\}$ es - una base de X.

b) $X_s \cap X_z = X_{sz}$

$$I \in X_s \cap X_z \iff I \in X_s \text{ e } I \in X_z$$

$$\iff I \in C_X V(s) \text{ e } I \in C_X V(z)$$

$$\iff I \notin V(s) \text{ e } I \notin V(z)$$

$$\iff s \notin I \text{ y } z \notin I$$

$$\iff s z \notin I$$

$$\iff I \notin V(sz)$$

$$\iff I \in C V(sz)$$

$$\iff I \in X_{sz}$$

$$\therefore X_s \cap X_z = X_{sz}.$$

c) $X_s = \phi \iff$ s es nilpotente.

$$X_s = \phi \iff C_X V(s) = \phi$$

$$\iff V(s) = X$$

$\iff s \in P_i$ para todo P_i, ideal primo.

$\Longleftrightarrow s \in \bigcap_{i \in I} P_i$ con P_i ideal primo.

$\Longleftrightarrow s \in$ Nilradical (Propiedad 0.13 b)

$\Longleftrightarrow s$ es Nilpotente (Propiedad 0.13 a)

d) $X_s = X \Longleftrightarrow s$ es unidad.

$X_s = X \Longrightarrow Cx\ V(s) = X$

$\Longrightarrow V(s) = \phi$

$\Longrightarrow s \notin P_i \quad \forall$ Pi ideal primo.

$\Longrightarrow s \notin M \quad \forall M$ idel maximal.

$\Longrightarrow s$ es una unidad (Definición 0.10)

s Unidad $\Longrightarrow s \notin P_i \ \forall\ P_i$ ideal primo

$\Longrightarrow V(s) = \phi$

$\Longrightarrow C_X\ V(s) = X$

$\Longrightarrow X_s = X$

$\therefore\ X_s = X$ si y solo si s es Unidad.

e) $X_s = X_z \Longleftrightarrow r([s]) = r([z])$

$X_s = X_z \Longrightarrow C_X\ V(s) = C_X\ V(z)$

$\Rightarrow \quad V(s) = V(z)$

$x \varepsilon r\,[s] \Rightarrow \quad x \varepsilon I$ para todo $I \varepsilon X$ tal que $[s] c\, I$

$\Rightarrow \quad x \varepsilon I$ para todo $I \varepsilon X$ tal que $s \varepsilon I$

$\Rightarrow \quad x \varepsilon I$ para todo $I \varepsilon X$ tal que $I \varepsilon V(s)$

$\Rightarrow \quad x \varepsilon I$ para todo $I \varepsilon X$ tal que $I \varepsilon V(z)$

$\Rightarrow \quad x \varepsilon I$ para todo $I \varepsilon X$ tal que $Z \varepsilon I$

$\Rightarrow \quad x \varepsilon I$ para todo $I \varepsilon X$ tal que $[z]\ c\ I$

$\Rightarrow \quad x \varepsilon r\,[z]$

Luego $r\,[s]\ c\ r\,[z]$

$x \varepsilon r\,[z] \Rightarrow \quad x \varepsilon I$ para todo $I \varepsilon X$ tal que $[z] c\, I$

$\Rightarrow \quad x \varepsilon I$ para todo $I \varepsilon X$ tal que $z \varepsilon I$

$\Rightarrow \quad x \varepsilon I$ para todo $I \varepsilon X$ tal que $I \varepsilon V(z)$

$\Rightarrow \quad x \varepsilon I$ para todo $I \varepsilon X$ tal que $I \varepsilon V(s)$.

$\Rightarrow \quad x \varepsilon I$ para todo $I \varepsilon X$ tal que $s \varepsilon I$

$\Rightarrow \quad x \varepsilon I$ para todo $I \varepsilon X$ tal que $[s]\ c\ I$

$\Rightarrow \quad x \varepsilon r[s]$

Luego $r\,[z]\ c\ r\,[s]$ por tanto $r\,[s] = r[z]$

Sea $I \varepsilon X_s$, $s \not\varepsilon I \Rightarrow [s] \not c\ I$

$\Rightarrow r[s] \not c\ I$

$\Rightarrow r[z] \not c\ I$

$\Rightarrow [z] \not c\ I$

$\Rightarrow z \not\varepsilon I$

$\Rightarrow I \varepsilon X_z$

$$\text{Sea } I \in X_z \ ; \ z \notin I \Rightarrow [z] \not\subset I$$

$$\Rightarrow r[z] \not\subset I$$

$$\Rightarrow r[s] \not\subset I$$

$$\Rightarrow [s] \not\subset I$$

$$\Rightarrow s \notin I \Rightarrow I \in X_s \quad \text{por tanto}$$

$$X_s = X_z \iff r([s]) = r([z])$$

Capítulo III

PROPIEDADES DEL ESPECTRO PRIMO

3.1 DEFINICION:

~~X~~ es un espacio T_0 si para dos puntos distintos x, y de X, existe un entorno de y que no contiene x ó existe un entorno de x que no contiene y.

3.2 PROPOSICION:

a) El conjunto $\{I\}$ es cerrado (se dice que I es un punto cerrado) en Spec (A) $\Longleftrightarrow$ I es maximal.

b) $\overline{\{I\}} = V(I)$

c) $J \in \overline{\{I\}} \Longleftrightarrow I \subseteq J$.

d) X es casi compacto (es decir, cada recubrimiento abierto de X tiene un subrrecubrimiento finito).

e) X es un espacio T_0.

DEMOSTRACION:

a) $\{I\}$ es cerrado en Spec(A) $\Longleftrightarrow$ I es maximal

" $\Longrightarrow$ "

Supongamos $\{I\}$ es cerrado en Spec(A) y Probaremos que I es maximal.

Que I sea maximal significa que para un Ideal

J tal que $I \subset J$ se debe tener que $J = A$ o $J = I$.

Por hipótesis $\{I\}$ es cerrado entonces es de la forma $V(H) = \{I\}$ siendo H un ideal.

Es decir $\{I\} = V(H) = \{K \in X / H \subset K\}$

pero $V(E) = \{I / E \subset I\}$ y por definición de ideal se tiene que $I \subset J$; entonces por proposición 1.1 - se afirma que si $I \in V(J)$ entonces $J \subset I$; además - si $J \neq A$ entonces $J \subset M$ siendo M maximal y si M es maximal entonces M es primo (por definición).

Y como $V(H) = \{I\}$ entonces por definición de ideal primo $H \subset I$, pero $I \subset J \subset M$ luego $H \subset M$ lo que se - afirma por definición de ideal primo $M \in V(H)$ por tanto $M = I$.

" $\Leftarrow$ "

Supongamos que I es maximal y Demostrar que $\{I\}$es cerrado en Spec(A). Es decir que $\{I\} = V(I)$.

Sea $J \in V(I)$ entonces $I \subset J$ (definición de ideal - primo), y como I es maximal se tiene $I = J$ de donde $V(I) \subset \{I\}$.

Y como $I \subset I$ (definición de ideal) entonces $I \in V(I)$ por tanto $\{I\} \subset V(I)$; luego $\{I\} = V(I)$

b) $\{\overline{I}\} = V(I)$

$V(I) = \{H \ / \ I \subset H\}$

Para demostrar esta igualdad es necesario demostrar las condiciones siguientes:

i) $V(I)$ es cerrado.

ii) $\{I\} \subset V(I)$

iii) Si T es cerrado, $\{I\} \subset T$ entonces $V(I) \subset T$.

DEMOSTRACION:

i) $V(I)$ es cerrado.

Esta Demostración es inmediata; se da por definición de cerrado.

ii) $\{I\} \subset V(I)$.

Es inmediata, porque $I \subset I$.

iii) Dado T cerrado, $\{I\} \subset T$ probar que $V(I) \subset T$.

Sea $J \in V(I)$ entonces $I \subset J$

y como $\{I\} \subset V(W)$ siendo W un ideal entonces

$W \subset I$.

Como $W \subset I \subset J$ entonces $W \subset J$

entonces $J \in V(W)$, W ideal.

c) $J \in \{\overline{I}\} \Longleftrightarrow I \subseteq J$

" $\Rightarrow$ "

$J \in \{\overline{I}\} \Rightarrow J \in V(I)$

$\Rightarrow I \subset J$

" $\Leftarrow$ "

$I \subseteq J \Rightarrow J \in V(I)$

$\Rightarrow J \in \{\overline{I}\}$

d) X es casi compacto (es decir cada recubrimiento abierto de X tiene un subrrecubrimiento finito).

Para demostrar dicho literal es suficiente considerar un recubrimiento de X por subconjuntos abiertos básicos de X = Spec (A) supongamos $X = \bigcup_{i \in S} X_{y_i}$;

con $y_i \in A$.

$J_i = [Y_i]$ entonces $A = \sum_{i \in S} [Y_i]$

Supongamos que $\sum_{i \in S} J_i \subsetneq A$.

Sea M un ideal maximal tal que $\sum_{i \in S} J_i \subset M$

$J_i \subset \sum_{i \varepsilon S} J_i \subset M \Rightarrow J_i \subset M \quad \forall\, i \varepsilon S.$

$Y_i \varepsilon J_i,\ J_i \subset M \quad \Rightarrow Y_i \varepsilon M \quad \forall\, i \varepsilon S$

$M \varepsilon V(Y_i) \Rightarrow M \notin X_{y_i} \quad \forall\, i \varepsilon S$

$\Rightarrow M \notin \bigcup_{i \varepsilon S} X_{y_i}$

$\Rightarrow M \notin X$ lo que contradice, ya que M es primo. Por tanto $\sum_{i \varepsilon S} J_i = A.$

Demostrar ahora que los J_i generan el ideal unidad y por tanto se tiene una ecuación de la forma.

$1 = \sum_{i \varepsilon W} Z_i J_j \quad (Z_i \varepsilon A)$ donde (W es un subconjunto finito de I ; entonces $\{X_{j_i}\}_{i \varepsilon I}$ recubre X.

$1 \varepsilon A$ entonces $1 \varepsilon \sum_{i \varepsilon W} J_i$, $\exists$ $J \subset I$, J finito.

entonces $1 = \sum_{i \varepsilon W} X_i$; los elementos de $\sum_{i \varepsilon W} J_i$ son sumas finitos.

Luego $1 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ con

$x_1 \varepsilon J_{i_1}$, $x_2 \varepsilon J_{i_2}$, ... , $x_n \varepsilon J_{i_n}$

Demostrar que $X = \bigcup_{r=1}^{n} X_{y_{i_r}}$

Sea $J \varepsilon X$, supongamos que $J \notin \bigcup_{r=1}^{n} X_{y_{i_r}}$

$J \notin X_{y_{i_r}} \quad \forall r \Rightarrow J \notin X_{y_i}$, $J \notin X_{y_{i_y}}$, ... , $J \notin X_{y_{i_n}}$.

$\Rightarrow Y_{i_1} \varepsilon J_1$, $Y_{i_2} \varepsilon J_2$, ... , $J_{i_r} \varepsilon J_r$

$\Rightarrow J_{i_1} \varepsilon J_1$, $J_{i_2} \varepsilon J_2$, ..., $J_{i_r} \varepsilon J_r$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} J_i \subset J$ pero $\sum_{i=1}^{n} J_i = A.$

$\Rightarrow A \subset J$

$\Rightarrow J = A$ lo que contradice ya que J es primo.

por tanto $J \varepsilon \bigcup_{r=1}^{n} X_{y_{i_r}}$.

e) X es un espacio T_o.

Que X sea un espacio T-sub cero significa que para dos puntos cualesquiera I, J de X se tiene que: existe un entorno X_I de I que no contiene a J ó que existe un entorno X_J de J tal que no contiene a I.

La notación de entornos para X_I ó X_J se puede asegurar porque V(I) es el conjunto de ideales pri mos que contienen a I.

Además V(I) son cerrados y X_I es el complemento de estos V(I). (Lo mismo se puede asegurar para los V(J)).

PRUEBA:

Sean I,J puntos distintos de X (ideales primos). Para I se puede obtener V(I) y también X_I posee la forma siguiente:

$$X_I = \{K \in X \ / \ K \in C_X \ V(I)\} = C_X \ V(I)$$

Por definición de la topología de X (Topología de Zariski) y el conjunto X_I son abiertos.

Es decir que pertenecen a la topología y no contiene a I.

$$X_I = C_X \ V(I) = C_X \ \{W \in X \ / \ W \text{ es ideal que contiene a } I\}$$

Necesariamente $J \in X_I$ por ser $I \neq J$ y además si $J \notin X_I$ entonces $J \in V(I)$ por lo que se afirma que $J \in X_I$ que es el entorno de abiertos buscados.

Resumiendo lo anterior se tiene:

$X_I = \{K \in X \ / \ K \in C_X \ V(I)\}$

$= \{K \in X \ / \ K \in V(I)\}$

$= \{K \in X \ / \ I \not\subset K\}$

Por tanto $J \in X_I$.

Además $V(I) = \{K \in X \ / \ I \in K\}$ entonces $I \notin X_I$ que es el entorno de abiertos que no contienen a I.

3.3 DEFINICION:

Un espacio topológico X se dice que es irreducible si $X \neq \phi$ y si cada par de conjuntos no vacíos en X se - cortan, o lo que es equivalente, si cada conjunto a- bierto no vacío es denso en X.

3.4 PROPOSICION:

Spec(A) es irreducible si y sólo si el nilradical de - A es un ideal primo.

DEMOSTRACION:

Por propiedad sabemos que el nilradical de A es la intersección de todos los ideales primos de A; y lo representaremos por "η".

Supongamos que Spec(A) es irreducible y demostremos que el nilradical de A es un ideal primo.

Como el nilradical es la intersección de los ideales primos de A (η) y por propiedad esta intersección es un ideal.

Solamente resta probar que η es un ideal primo. Es decir; si $x \notin \eta$ y $y \notin \eta$ entonces $xy \notin \eta$.

Para demostrar esta implicación nos daremos dos conjuntos abiertos es decir X_x , X_y definidos de la siguiente forma:

$$X_x = \{I \varepsilon X \ / \ x \notin I\}$$

$$X_y = \{I \varepsilon X \ / \ y \notin I\}$$

Además $x \notin \eta$ y por la forma en que está definido los conjuntos abiertos; $X_y \neq \phi$, y si $y \notin I$ siendo I un ideal primo entonces $y \notin \eta$.

Luego por ser los conjuntos abiertos irreducible se afirma que $X_x \cap X_y \neq \phi$.

Existe I tal que $I \varepsilon X_x$ e $I \varepsilon X_y$ entonces $x \notin I$ e $y \notin I$ (por definición de abierto básico).

Entonces $xy \notin I$; y si el producto no está en el ideal primo, mucho menos en la intersección.

Por tanto $xy \notin \eta$.

3.5 PROPOSICION:

Sea X un espacio topológico. Si Y es un subespacio irreducible de X entonces la clausura $\overline{Y}$ de Y en X es irreducible.

DEMOSTRACION:

Sean o_1 y o_2 dos conjuntos abiertos tales que $o_1 \subset \overline{y}$ y $o_2 \subset \overline{y}$ y sean w_1 y w_2 subconjuntos abiertos de X tales que $o_1 = \overline{y} \cap w_1$ y

$o_2 = \overline{y} \cap w_2$ entonces

$y \cap w_1$ es un abierto de Y y además

$y \cap w_2$ es también un abierto de Y.

Luego por ser Y un subespacio irreducible de X se tiene que $(Y \cap W_1) \cap (Y \cap W_2) \neq \phi$ entonces

$Y \cap (W_1 \cap W_2) \neq \phi$ pero como $Y \subset \overline{Y}$ se tiene que

$Y \cap (W_1 \cap W_2) \subset \overline{Y} \cap (W_1 \cap W_2)$ pero esto es

igual a $(\overline{Y} \cap W_1) \cap (\overline{Y} \cap W_2)$ y esto es igual a

$$o_1 \cap o_2 \neq \phi .$$

Sea X un conjunto no vacío. Una clase T de subconjuntos de X es una topología de X si y solo si se verifica los axiomas siguientes:

i) X y ϕ son abiertos de T.

ii) $\bigcup_{i \varepsilon I} w_i \; \varepsilon \; T$ (Unión de abiertos es abierto).

iii) $\bigcap_{i \varepsilon I}^{n} w_i \; \varepsilon \; T$ (Intersección finita de abiertos es abierto).

(Los elementos de T se llaman Conjuntos Abiertos).

Demostrar que <u>T es una Topología de los Complementos de V(I).</u>

SOLUCION:

i) $V(1) = \phi$ (Proposición 2.b)

$CV(1) = C\,\phi$

$C(V(1)) = X$ y como $\{1\} \subset A$ entonces

X es un abierto en T.

$V(0) = X$ (Proposición 2.b)

$CV(0) = CX$

$CV(0) = \phi$ y como $\{0\} \subset A$ entonces

ϕ es un abierto en T.

ii) Sea $(W_i)_{i\varepsilon I}$ una familia de elementos de T.

Probar que $\bigcup_{i\varepsilon I} (w_i) \varepsilon T$.

SOLUCION:

$$\bigcup_{i\varepsilon I} (W_i) = \bigcup_{i\varepsilon I} C\,(V(y))_i$$

$$= C \bigcap_{i\varepsilon I} V(y)_i \quad \text{haciendo } \bigcup_{i\varepsilon I} y_i = Z$$

$$= C\,V(Z)\ \varepsilon\ T$$

Por tanto $\bigcup_{i\varepsilon I} (W_i) \varepsilon T$

iii) Sea $(W_i)_{1\leq i\leq n}$ una familia de elementos de T (abiertos)

Demostrar que $\bigcap_{i=1}^{n} (W_i) \varepsilon T$.

SOLUCION:

$$\bigcap_{i=1}^{n}(W_i) = \bigcap_{i=1}^{n} CV(Y)_i$$

$$= C \bigcup_{i=1}^{n} V(Y_i)$$

$$= CV \bigcap_{i \varepsilon I} Y_i$$

$$= CV\ (W) \quad \text{haciendo} \bigcap\ (Y_i) = W$$

$$\therefore \bigcap_{i=1}^{n} (W_i)\ \varepsilon\ T$$

$\therefore$ T es una Topología.

Capítulo IV

PROPIEDADES FUNTORIALES.

4.1 DEFINICION:

Sean A y B anillos y sea la función $f : A \to B$ un homomorfismo de anillos, $X = \mathrm{Spec}(A)$ y $Y = \mathrm{Spec}(B)$. Si $I \in Y$, $f^{-1}_{(I)} \in X$ (es un ideal primo de A).

De esta forma f induce una aplicación $f^* : Y \to X$.

Es decir $f^* : Y \longrightarrow X$

$$I \rightsquigarrow F^*(I) = f^{-1}(I)$$

4.2 PROPOSICION:

a) Si $w \in A$ entonces $f^{*-1}(X_w) = Y_{f(w)}$ y por tanto f^* es continua.

b) Si I es un ideal de A, entonces $f^{*-1}(V(I)) = V(I^e)$

c) Si J es un ideal de B, entonces

$$\overline{f^*(V(J))} = V(J^c)$$

d) Si f es inyectiva, entonces $f^*(Y)$ es denso en X. De manera más precisa $f^*(Y)$ es denso en $X \iff \mathrm{Ker}(f) \subseteq \eta$.

e) Sea $h : B \to C$ otro homomorfismo de anillos. Entonces $(h \circ f)^* = f^* \circ h^*$

DEMOSTRACION:

a) Si $w \in A$ entonces $f^{*-1}(X_w) = Y\,f(w)$ y por tanto f^* es continua.

Probar que f^* es continua en Y.

Sea $w \in A$ y X_w un abierto básico; (referencial) siendo $X_w = C\,V(w)$ con $V(w)$ conjunto cerrado de todos los ideales primos que contienen a w.

Probar entonces que $f^{*-1}(X_w)$ es un abierto en Y.

$f^{*-1}(X_w) = Y_{f(w)}$ ($Y_{f(w)}$ es un abierto básico de Y).

$$\begin{aligned}
J \in f^{*-1}(X_w) &\iff f^*(J) \in X_w \\
&\iff f^{-1}(J) \in Xw \\
&\iff w \notin f^{-1}(J) \\
&\iff f(w) \notin J \\
&\iff J \in Y_{f(w)}
\end{aligned}$$

b) Si I es un ideal de A entonces $f^{*-1}(V(I)) = V(I^e)$

$$J \in f^{*-1}(V(I)) \iff f^{*}(J) \in V(I)$$

$$\iff I \subset f^{*}(J)$$

$$\iff I \subset f^{-1}(J)$$

$$\iff f(I) \subset J$$

$$\iff [f(I)] \subset J$$

$$\iff I^{e} \subset J$$

$$\iff J \in V(I^{e})$$

c) Si J es un ideal de B, entonces

$$\overline{f^{*}(V(J))} = V(J^{c})$$

" $\Rightarrow$ " $I \in f^{*}(V(J)) \Rightarrow I = f^{*}(T)$, $T \in V(J)$

$I = f^{-1}(T)$; $J \subset T$

$$J \subset T \Rightarrow f^{-1}(J) \subset f^{-1}(T)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(J) \subset I$$

$$\Rightarrow J^{c} \subset I$$

$$\Rightarrow f^{*}(V(J)) \subset V(J^{c})$$

Por tanto por ser cerrado

$\overline{f^{*}(V(J))} \subset V(J^{c})$

" <= "

$V(J^{c}) \subset \overline{f^{*}(V(J))}$ es decir

$C\,\overline{f(V(J))} \subset C\,V(J^{c})$

Sea $I \in C\,\overline{f^{*}(V(J))}$ entonces existe un abierto - básico W_x, $I \in W_x$ tal que $W_x \subset C\,f^{*}(V(J))$; $x \notin I$

Probar que $I \in C\,V(J^{c})$ es decir $I \in C\,V(f^{-1}(J))$ es decir $f^{-1}(J) \not\subset I$.

Sea L un ideal primo, $J \subset L$ entonces $f^{-1}(J) \subset f^{-1}(L)$ pero $f^{-1}(L) \in f^{*}(V(J))$ entonces $f^{-1}(L) \notin W_x$, $x \in f^{-1}(L)$ entonces $f(x) \in L$ para todo ideal "L" primo tal que $J \subset L$ entonces $f(x) \in r(J)$ (Prop. 0.40) entonces $\exists\ n > 0$ tal que $f(x)^{n} \in J$ (Def. 0.39) pero $f(x)^{n} = f(x^{n})$ por ser f homomorfismo entonces $x^{n} \in f^{-1}(J)$
pero $x \notin I$ de donde $x^{n} \notin I$ (por ser Ideal primo)
Luego $f^{-1}(J) \not\subset I$
por tanto $\underline{\underline{I \in C}}\ V(J^{c})$

d) Si f es inyectiva entonces $f^*(Y)$ es denso en X. De manera más precisa $f^*(Y)$ es denso en

X $\Longleftrightarrow$ Ker (f) $\subseteq \eta$.

Para demostrar la primer igualdad partimos de:

$f^*(Y)$ es denso en X $\Longleftrightarrow$ Ker (f) $\subseteq \eta$.

por definición de densidad afirmamos

$\overline{f^*(Y)} = X \Longleftrightarrow Ker(f) \subseteq \eta$.

Sabiendo por propiedades anteriores que η es la intersección de todos los ideales primos; además $V(0) = Y$. Entonces

$$\overline{f^*(Y)} = \overline{f^*(V(0))}$$

$$= V(0^c)$$

$$= V(f^{-1}(0))$$

$$= V(Ker(f)) \text{ entonces } X = V(Ker(f))$$

Si $I \in X$ entonces $I \in V(Ker(f))$

entonces $Ker(f) \subset I$ siendo I un ideal primo.

Si $x \varepsilon$ Ker (f) entonces $x \varepsilon \eta$ ya que Ker$(f) \subset I$ para todo ideal primo I.

Si $x \varepsilon$ Ker (f) y si $x \neq 0$ entonces $x \varepsilon I$, siendo I un ideal primo entonces.

Ker $(f) \subset I$ por tanto

Ker $(f) \subset \eta$.

de donde concluimos que si:

$I \varepsilon X$ entonces Ker $(f) \subseteq \eta$.

Para la otra igualdad se deduce de manera inmediata ya que si f es inyectiva entonces

Ker $(f) = \{0\}$; pero $\{0\} \subset \eta$ por tanto

Ker $(f) \subseteq \eta$.

e) Sea $h : B \to C$ otro homomorfismo de anillos. Entonces $(h \circ f)^{*} = f^{*} o\ h^{*}$.

$$(h \circ f)^{*}_{(I)} = (h \circ f)^{-1}_{(I)}$$

$$= f^{-1}\,(h^{-1}_{(I)})$$

$$= (f^{*} \circ h^{*})I\ .$$

Sea A un anillo de Boole y sea $X = \mathrm{Spec}(A)$.

Para cada $z \in A$, el conjunto X_z es a la vez abierto y cerrado en X.

DEMOSTRACION:

Sabemos por definición que un anillo es de Boole si $x^2 = x$ para $x \in A$; además los X_y son los conjuntos de abiertos básicos y los $V(y)$ es el complemento de ellos; es decir que podemos demostrar $X_y = V(1 - y)$

$$I \in X_y \Rightarrow y \notin I$$

$$\overset{\circ}{\Rightarrow} 1 - y \in I \quad \text{porque} \quad \left\{ \begin{array}{l} y(1-y) = y - y^2 \\ \qquad\quad\; = y - y \\ \qquad\quad\; = 0 \\ \underline{y(1-y)} \in I \end{array} \right.$$

$$J \in V(1-y) \Rightarrow 1-y \in J$$

$$\Rightarrow y \notin J \text{ porque } (1-y) + y = 1 ,$$

$$\text{si } \underline{\underline{y \in J}} \qquad 1 \in J$$

Capítulo V

ESPECTROS MAXIMALES.

5.1 DEFINICION:

Sea A un anillo, el subespacio del espacio de Spec(A) formado por todos los ideales maximales de A, con la topología inducida, se denomina el Espectro Maximal - de A y se designa por Max (A).

Para Anillos Conmutativos arbitrarios no tiene las - mismas propiedades functoriales de Spec (A). (Propiedades 5).

Ya que la imagen inversa de un ideal maximal en un homomorfismo de anillos no es necesariamente maximal.

5.2 DEFINICION:

Sea X un espacio de Hausdorff compacto y sea C(X) el - anillo de todas las funciones continuas reales sobre X.

Se define las operaciones suma y multiplicación de funciones; de la siguiente manera:

Sean f y g funciones pertenecientes a C(X) tales que:

$$+ : C(X) \times C(X) \longrightarrow C(X)$$

$$(f, g) \rightsquigarrow f + g$$

donde $(f + g)_{(x)} = f(x) + g(x)$ para todo $x \varepsilon X$.

$\cdot : C(X) \times C(X) \longrightarrow C(X)$

$(f , g) \rightsquigarrow f.g$

donde $(f.g)_{(x)} = f(x) . g(x)$ para todo $x \varepsilon X$.

5.3 DEFINICION:

Para cada $x \varepsilon X$; M_x es el conjunto de todas las $f \varepsilon C(X)$ tales que $f(x) = 0$.

El conjunto M_x es un ideal maximal en $C(X)$. Se puede observar que el ideal M_x es maximal por ser el núcleo del homomorfismo (Suproyectivo).

$C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ que aplica una función f y nos lleva a $f(x)$.

Si $\tilde{X}$ denota Max $(C(X))$ se obtiene la definición de una aplicación $\mu : X \to \tilde{X}$, tal que $x \rightsquigarrow M_x$.

5.4 PROPOSICION:

Demostrar que μ es un homeomorfismo de X sobre $\tilde{X}$. Es decir:

i) μ es biyectiva.

ii) μ es continua.

DEMOSTRACION:

i) Primeramente se probará que μ sea Inyectiva.

Para esta demostración nos auxiliaremos del lema de Urysohn. (0.38)

Es decir:

Si X es compacto de Hausdorff y si $x \neq y$ entonces demostrar que $M_x \neq M_y$.

Además sabemos que si X es de Hausdorff y compacto entonces es Normal. Luego un espacio de Hausdorff compacto vale el Lema de Urysohn.

SOLUCION:

Si $x \neq y$. Además como X es separado $\{x\}$ y $\{y\}$ son cerrados disjuntos; entonces existe $f : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(\{x\}) = \{0\}$ y $f(\{y\} = \{1\}$.

Es decir $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$, además

$f \in M_x$, entonces $f \notin M_y$

por tanto $M_x \neq M_y$

Luego μ es inyectiva.

Demostrar que μ es Sobreyectiva:

SOLUCION:

Sea M un ideal maximal cualquiera de $C(X)$, y sea $V = V(M)$ el conjunto de los ceros comunes de las - funciones en M, es decir, $V = \{x \in X : f(x) = 0$ para todo $f \in M\}$.

Supongamos que V es vacío:

Entonces para cada $x \in X$ existe $f_x \in M$ tal que $f_x(X) \neq 0$. Puesto que f_x es continua, existe un entorno abierto U_x de x en X en el que f_x no se anula es decir que en ese entorno f_x no es cero.

En virtud de la compocidad un número finito de en tornos U_{x_1}, ... , U_{x_n} recubren X es decir que - si $z \in X$ entonces $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ (por definición de recubrimiento).

Entonces $z \in \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$; existe un j tal que

$z \in U_{x_j}$ entonces $f_{x_j}(z) \neq 0$

además $f_{x_j}^2(z) > 0$; sea $f(z) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^2(z)$

ya que $f(x) \neq 0$ por tanto es una Unidad en C(X) ya que existe el multiplicativo inverso por ser distinto de cero.

Sea x un punto de V. Entonces $M \subseteq M_x$; y como M es maximal se tiene que $M = M_x$.

Por tanto μ es sobreyectiva.

ii) μ es continua y μ^{-1} es continua. Es decir que μ es homeomorfismo.

Sea la función f que pertenece al anillo de todas las funciones continuas reales sobre X; es decir $f \in C(X)$.

Y sean los conjuntos abiertos.

$W_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ y

$\tilde{W}_f = \{M \in \tilde{X} : f \notin M\}$.

Los abiertos de esta forma W_f forman una base de la Topología de X.

Los abiertos de la forma $\tilde{W}_f$ forman una base de la Topo logía de $\tilde{X}$.

Mostremos que $\mu(W_f) = \tilde{W}_f$

" $\mu(W_f) \subset \tilde{W}_f$"

Sea $I \in \mu(W_f)$ entonces $I = \mu_x$, $f(x) \neq 0$

entonces $I = M_x$, y como M_x es el conjunto de todos los

$f \in C(X)$ tal q. $f(x)=0$ entonces $f \notin M_x$ (Por que $f(x) \neq 0$)

entonces $I \in \tilde{W}_f$ (Por hipótesis)

"$\tilde{W}_f \subset \mu(W_f)$"

Sea $M \in \tilde{W}_f$ entonces $f \notin M$; como μ es biyectiva

existe x tal que $M = \mu_x = M_x$ pero

$M_x = \{g \,/\, g(x) = 0\}$ y como $f(x) \neq 0$ entonces

$x \in \mathcal{M}_f$; entonces $M \in \mu(W_f)$.

<u>Probar que μ y μ^{-1} es continua.</u>

Sea $H \subset \tilde{X}$, siendo H un abierto básico.

Entonces $H = \tilde{W}_f$

entonces $\mu^{-1}(H) = \mu^{-1}(\tilde{W}_f) = W_F$

$\therefore$ μ es continua.

Sea $o \subset X$ un elemento de la base de X

entonces $o = W_f$

entonces $(\mu^{-1})^{-1}(W_f) = \mu(W_f)$

$$= \tilde{W}_f$$

$\therefore \mu^{-1}$ es continua.

BIBLIOGRAFIA

1. M. F. ATLYAH, I. J. MAC DONALD.
"Introduction to Conmutative Algebra".

2. SEYMOUR LIPSCHUTZ.
"Topología General".

nvdr.