UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

ANILLOS Y MODULOS DE FRACCIONES

TRABAJO DE GRADUACION

PRESENTADO POR:

René Rodolfo Monge Quintanilla

PREVIO A LA OPCION DEL TITULO DE

Licenciado en Matemática

FEBRERO DE 1985

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR : DR. MIGUEL ANGEL PARADA

SECRETARIO: DRA. ANA GLORIA CASTANEDA DE MONTOYA

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO : ING. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

SECRETARIO: ING. RENE MAURICIO MEJIA MENDEZ

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO: LIC. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

COORDINADOR: LIC. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

ASESOR : ING. JOSE FRANCISCO MARROQUIN

D E D I C A T O R I A

A MI MADRE	LIDIA QUINTANILLA DE MONGE
A MI ESPOSA	SILVIA T. CORDOVA DE MONGE
A MIS HIJOS	RODOLFO ENRIQUE
	RENE OSWALDO.
	RAFAEL ERNESTO.

P R O L O G O

Uno de los objetivos fundamentales del presente trabajo es, realizar un estudio introductorio de dos de los más importantes - instrumentos técnicos del Algebra Conmutativa, como son la formación de Anillos de Fracciones y el proceso asociado de Localización; teniendo como soporte el desarrollo de dos cursos: "Teoría de Anillos" y "Teoría de Módulos", dictados por el Lic. José Javier Rivera Lazo.

Otro de los objetivos propuestos es lograr que el presente trabajo se constituya como texto de consulta de algún curso introductorio al Algebra Conmutativa.

El presente trabajo se desarrolla en cuatro capítulos, de los - cuales, a continuación se hace una breve descripción.

En el capítulo I se desarrolla todo lo referente a Anillos e -- Ideales. En su mayoría, los teoremas aquí presentados solamente se enuncián, ya que en un trabajo de graduación previo denominado "Anillos e Ideales", fueron demostrados. Se ha agregado únicamente lo referente a Radical de ideales y Contracción y Extención de Ideales.

En el Capítulo II se aborda el desarrollo de la Teoría de Módulos, sin pretender que su estudio sea exhaustivo. Solamente se desarrollan los elementos necesarios a utilizar en el tercer capítulo.

En el Capítulo III se procede a la construcción de los Anillos y Módulos de Fracciones y a estudiar el proceso de Localización, finalizando con el estudio de la Extensión y Contracción de Ideales en Anillos de Fracciones.

El Capítulo IV está dedicado exclusivamente a las aplicaciones de la teoría desarrollada en el capítulo anterior, en la resolución de problemas específicos.

La elaboración de este trabajo está fundamentada en los tres primeros capítulos de la obra "Introducción al Algebra Conmutativa" de M.F. Atiyah e I.G. Macdonald.

He intentado, de manera especial, reescribir de una forma más legible y comprensible el capítulo III de esta obra, denominado "Anillos y Módulos de Fracciones", de donde toma su título el presente trabajo.

Finalmente, deseo expresar mi especial agradecimiento al Ingeniero José Francisco Marroquín por su valiosa asesoría en la preparación del trabajo y a la señora Mirian de Yánez por la paciencia y gentileza de mecanografiar el documento.

INDICE

CAPITULO I

ANILLOS E IDEALES

1.1 Anillos y Homomorfismos de anillos.................... 1

1.2 Divisores de cero. Elementos Nilpotentes. Unidades. Ideales.................................. 2

1.3 Anillo cociente.................................. 5

1.4 Ideales primos e Ideales Maximales.................... 5

1.5 Operaciones con ideales............................ 6

1.6 Extención y contracción de ideales.................... 8

CAPITULO II

MODULOS

2.1 Módulos y Homomorfismos de módulos.................... 16

2.2 Submódulos y módulo cociente......................... 19

2.3 Operaciones con submódulos.......................... 23

2.4 Módulos finitamente generados......................... 26

2.5 Funciones exactas................................ 27

2.6 Producto tensorial................................ 30

2.7 Propiedades de exactitud del producto tensorial........ 39

CAPITULO III

ANILLOS Y MODULOS DE FRACCIONES

3.1 Anillos de fracciones.............................. 42

3.2 Módulos de fracciones.............................. 60

3.3 Propiedades locales............................... 77

3.4 Extención y contracción de ideales en anillos de fracciones.. 81

CAPITULO IV

APLICACIONES.. 92

BIBLIOGRAFIA..119

CAPITULO I

ANILLOS E IDEALES

1.1 ANILLOS Y HOMOMORFISMOS DE ANILLOS

DEFINICION 1.1.1

La terna (A, +, $\cdot$) formada por el conjunto A no vacio y las dos operaciones binarias + y $\cdot$ definidas en A, se dice que es un -- anillo conmutativo con identidad si satisface las siguientes -- condiciones.

i) El par (A, +) es un grupo abeliano

ii) El par (A, $\cdot$) es un semigrupo conmutativo con identidad

iii) La ley distribuitiva de la Operación "$\cdot$" sobre la operación "+"

NOTA 1.1.2

A lo largo de este trabajo anillo significará anillo conmutativo con elemento de identidad, y en este capítulo se repre-- sentará por A, aunque no se especifique.

PROPOSICION 1.1.3

En un anillo A si 1 = 0, es decir que si para $x \in A$ se tiene - - $x = x \cdot 1 = x \cdot 0$, entonces $A = \{0\}$

La proposición anterior establece que A es el ANILLO CERO que - denotaremos por $\{0\}$.

DEFINICION 1.1.4

Un Homomorfismo de anillos es una aplicación f de un anillo A - en un Anillo B tal que:

i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

ii) $f(x\,y) = f(x)\,f(y)$

iii) $f(1) = 1$

PROPOSICION 1.1.5

Sea $f: A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos entonces se cumplen las siguientes propiedades

a) $f(0) = 0$

b) $f(-x) = - f(x)$

c) $f(x-y) = f(x) - f(y)$

DEFINICION 1.1.6

Sea $f: A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos, llamaremos núcleo de f, llamado también Ker f, al conjunto

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in A / f(x) = 0\}$$

DEFINICION 1.1.7

Sea $f: A \longrightarrow B$ un homomosfismo de anillos, llamaremos imagen de A, que representaremos por f(A), al conjunto

$$f(A) = \{y \in B / f(x) = y, \text{ para algún } x \in A\}$$

1.2 DIVISORES DE CERO, ELEMENTOS NILPOTENTES, UNIDADES, IDEALES

DEFINICION 1.2.1

Un divisor de cero en un anillo A es un elemento x que "divide cero", es decir para el cual existe un $y \neq 0$ en A tal que $xy = 0$.

DEFINICION 1.2.2

Un anillo A sin divisores de cero, diferentes de cero (y en -

el cual $1 \neq 0$) se denomina "DOMINIO DE INTEGRIDAD"

DEFINICION 1.2.3

Sea A un anillo, un elemento $x \varepsilon A$ es nilpotente si $x^n = 0$, para algún $n > 0$.

DEFINICION 1.2.4

Una unidad en un anillo A es un elemento x que "divide 1", es decir para el cual existe un elemento $y \neq 1$ en A tal que

$x\,y = 1$

PROPOSICION 1.2.5

Si $x \varepsilon A$, es una unidad, el elemento $y \varepsilon A$ está univocamente determinado por x; y se escribe x^{-1} ó $\frac{1}{x}$

DEFINICION 1.2.6

Un anillo A en el que $1 \neq 0$ y cada elemento no nulo es una - unidad es llamado CUERPO.

DEFINICION 1.2.7

Un ideal I de un anillo A es un subconjunto de A que es un - subgrupo aditivo y tal que $A\,I \subset I$ (es decir $x \varepsilon A$ y $z \varepsilon I$ implica $x\,z \varepsilon I$)

OBSERVACION 1.2.8

Sea $x \varepsilon A$, denotaremos por $[x]$, al ideal de A que consiste de todos los múltiplos de x, lo llamaremos el ideal generado por x.

En particular $[1] = A$

y $[0] = 0$

PROPOSICION 1.2.9

Sea A un anillo, $X \subset A$, sea $J = \bigcap_i B_i$, B_i ideales que contienen a X, J es ideal.

DEMOSTRACION

i) a) $J \neq 0$ ya que $0 \in J$

b) Sean $x, y \in J \Rightarrow x, y \in B_i$, $\forall i$

$\Rightarrow -y \in B_i$, $\forall i$

$\Rightarrow x - y \in B_i$, $\forall i$

ii) Sea $x \in A$, $y \in J \Rightarrow xy \in B_i$, $\forall i$

$\Rightarrow xy \in J$

luego

J es un ideal

OBSERVACION 1.2.10

Denotaremos a J de la definición anterior por $[X]$ y le llamaremos el ideal generado por el subconjunto X.

PROPOSICION 1.2.11

Sea A un anillo $\neq \{0\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) A es un cuerpo

ii) Los únicos ideales de A son 0 y $[1]$

iii) Cada homomorfismo de A en un anillo no nulo B es inyectivo.

1.3 ANILLO COCIENTE

DEFINICION 1.3.1

Sea I un ideal de A, sea $\frac{A}{I}$ definido de la siguiente manera

$$\frac{A}{I} = \{x + I \ / \ x \varepsilon A\}$$

PROPOSICION 1.3.2

El cociente $\frac{A}{I}$, es dotado de una estructura de anillo con - las operaciones siguientes:

a) $(x + I) + (y + I) = (x + y) + I.$

b) $(x + I) \quad (y + I) = xy + I.$

DEFINICION 1.3.3

$\frac{A}{I}$ es llamado Anillo cociente

PROPOSICION 1.3.4

En el anillo cociente $\frac{A}{I}$ se cumplen las siguientes propiedades

1) El elemento neutro es el conjunto I.

2) $1 + I$ es la identidad de $\frac{A}{I}$.

3) Si $x \varepsilon A$ entonces $x + I = I \iff x \varepsilon I$.

1.4 IDEALES PRIMOS E IDEALES MAXIMALES

DEFINICION 1.4.1

Un ideal P en A es primo si $P \neq [1]$ y si

$$xy \varepsilon P \implies x \varepsilon P \text{ ó } y \varepsilon P$$

PROPOSICION 1.4.2

P es primo si y solo si $\frac{A}{P}$ es dominio de integridad.

PROPOSICION 1.4.3

Si f: A —> B es un homomorgismo de anillos y P es un ideal - primo en B, entonces $f^{-1}(P)$ es un ideal primo en A,

$$f^{-1}(P) = \{x \varepsilon A \ / \ f(x) \varepsilon P\}$$

DEFINICION 1.4.4

Un ideal M en A es maximal si $M \neq [1]$ y no existe ningûn ideal I tal que $M \subset I \subset [1]$ (las inclusiones en sentido estricto).

PROPOSICION 1.4.5

M es maximal <—> $\frac{A}{M}$ es un cuerpo.

PROPOSICION 1.4.6

Si M es maximal en A entonces M es primo.

PROPOSICION 1.4.7

Cada anillo $A = \{0\}$ tiene por lo menos un ideal maximal

COROLARIO 1.4.8

Si $I \neq [1]$ es un ideal en A, existe un ideal maximal de A que contiene a I.

1.5 OPERACIONES CON IDEALES

DEFINICION 1.5.1

Sean I, J ideales en un anillo A, su suma I + J se define así

$$I + J = \{x + y \ / \ x \varepsilon I, \ y \varepsilon J\}$$

PROPOSICION 1.5.2

I + J es el menor ideal de A que contiene a I y a J

DEFINICION 1.5.3

Sean I, J dos ideales en un anillo A, el producto I J se define así

$$I\,J = \{\sum_i x_i y_i \,/\, x_i \in I,\ y_i \in J\}$$

PROPOSICION 1.5.4

El producto de ideales de A, es un ideal de A.

DEFINICION 1.5.5

Sean I, J dos ideales de un Anillo A, el conjunto

$(I: J) = \{x \in A \,/\, xJ \subseteq I\}$ es llamado "IDEAL COCIENTE DE I y J".

como un caso particular de la definición anterior tenemos

DEFINICION 1.5.6

Al conjunto (0, J) se le denomina anulador de J y se denota por Ann (J) y se define de la siguiente manera

$$\mathrm{Ann}(J) = \{x \in A \,/\, xJ = 0\}$$

DEFINICION 1.5.7

Sea I un ideal de un Anillo A, se llama "RADICAL DE I" al conjunto

$$r(I) = \{x \in A \,/\, x^n \in I, \text{ para algún } n > 0\}$$

PROPOSICION 1.5.8

Sea I un ideal de un Anillo A, entonces $I \subset r(I)$

DEMOSTRACION:

Sea $x \in I \longrightarrow x^1 \in I$

$\longrightarrow x \in r(I)$

luego

$I \subset r(I)$

1.6 EXTENCION Y CONTRACCION DE IDEALES

PROPOSICION 1.6.1

Sea f: A $\longrightarrow$ B un homomorfismo de anillos. Si I es un ideal - de A, entonces f(I) no es necesariamente un ideal en B.

DEMOSTRACION

Sea $\mathbb{Z}$ el anillo de los enteros, $\mathbb{Q}$ el cuerpo de los racionales.

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}, \text{ una inyección}$$

Sea $[2]$ un ideal $\mathbb{Z}$, $f([2]) = [2]$

probaremos que $\mathbb{Q}\, f([2]) \not\subset f([2])$

como $[2] \subset \mathbb{Z}$, si $\frac{1}{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{1}{5}[2] \not\subset [2]$

ya que si $x \in \frac{1}{5}[2] \Rightarrow x = \frac{1}{5}y,\ y \in \underline{\underline{[2]}}$

$\Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$

DEFINICION 1.6.2

Sea f: A $\longrightarrow$ B un homomorfismo de anillos.

Si I es un ideal de A, se define la extención I^e de I como el ideal $Bf(I)$ generado por $f(I)$ en B, es decir

$$I^e = \{\sum_i y_i f(x_i) \;/\; x_i \in I,\; y_i \in B\}$$

PROPOSICION 1.6.3

Sea $f: A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos, si I es ideal de - B, entonces $f^{-1}(J)$ es siempre un ideal de A, donde

$$f^{-1}(J) = \{x \in A \mid f(x) \in J\}$$

DEMOSTRACION:

i) a) $f^{-1}(J) \neq \emptyset$ ya que $0 \in f^{-1}(J)$

b) sean $x,\ y \in f^{-1}(J)$ $\Rightarrow f(x) \in J,\ f(y) \in J$

$\Rightarrow f(x) \in J,\ -f(y) \in J$

$\Rightarrow f(x) - f(y) \in J$

$\Rightarrow f(x - y) \in J$

$\Rightarrow x - y \in f^{-1}(J)$

ii) sean $x \in A,\ y \in f^{-1}(J)$ $\Rightarrow f(x) \in B,\ f(y) \in J$

$\Rightarrow f(x)\ f(y) \in J$

$\Rightarrow f(x\,y) \in J$

$\Rightarrow x\,y \in f^{-1}(J)$

DEFINICION 1.6.4

Sea $f: A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos, si J es un ideal - de B, entonces la contracción de J se define como $f^{-1}(J)$ y se denota

$$J^c = f^{-1}(J)$$

PROPOSICION 1.6.5

Sea f: A $\longrightarrow$ B un homomorfismo de anillos, si J es un ideal primo de B entonces J^c es necesariamente primo en A.

DEMOSTRACION

$$J^c = f^{-1}(I) = \{x \in A \;/\; f(x) \in J\}$$

sea $x\,y \in f^{-1}(J) \Rightarrow f(x\,y) \in J$

$\Rightarrow f(x)\, f(y) \in J$

$\Rightarrow f(x) \in J$ ó $f(y) \in J$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(J)$ ó $y \in f^{-1}(J)$

luego

J^c es primo.

PROPOSICION 1.6.6

Sea f: A $\longrightarrow$ B un homomorfismo de anillos, I un ideal de A, J un ideal de B entonces

i) $I \subseteq I^{ec}$

ii) $J^{ce} \subseteq J$

iii) $J^c = J^{cec}$

iv) $I^e = I^{ece}$

v) Si C es el conjunto de los ideales contraidos en A y si E es el conjunto de los ideales extendidos en B.

entonces

$$C = \{I \;/\; I^{ec} = I\}$$

$$E = \{J \;/\; J^{ce} = J\}$$

y $I \longrightarrow I^e$ es una aplicación biyectiva de C sobre E, cuya -

inversa es $J \longrightarrow J^c$

DEMOSTRACION

i) $I \subseteq I^{ec}$

Sea $x \in I \Rightarrow f(x) \in f(I)$

$\Rightarrow f(x) \in I^e$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(I^e)$

$\Rightarrow x \in I^{ec}$

luego

$$I \subseteq I^{ec}$$

ii) $J^{ce} \subset J$

Sea $J^c = \{x \in A \mid f(x) \in J,\ J \text{ ideal de } B\}$

$(J^c)^e = [f(J^c)] = [\{f(x) \in B \mid x \in J^c\}]$

PROBEMOS

$$f(J^c) \subset J$$

Sea $y \in f(J^c) \Rightarrow y = f(x) \in B,\ x \in J^c$

$\Rightarrow f(x) \in J$

$\Rightarrow y \in J$

tenemos que

$$f(J^c) \subset J$$

como J es un ideal $\Rightarrow [f(J^c)] \subset J$

$\Rightarrow (J^c)^e \subset J$

luego

$$J^{ce} \subset J$$

iii) a) $J^{c} \subset J^{cec}$

como J^{c} es siempre un ideal de A (1.6.3) la inclución se cumple por (i)

b) $J^{cec} \subset J^{c}$

por (ii) tenemos que $J^{ce} \subset J$

$J^{ce} \subset J \Rightarrow f^{-1}(J^{ce}) \subset f^{-1}(J)$

$\Rightarrow J^{cec} \subset J^{c}$

por a y b tenemos

$$J^{c} = J^{cec}$$

iv) a) $I^{e} \subset I^{ece}$

por i) $I \subset I^{ec} \Rightarrow f(I) \subset f(I^{ec})$

$\Rightarrow [f(I)] \subset [f(I^{ec})]$

$\Rightarrow I^{e} \subset I^{ece}$

b) $I^{ece} \subset I^{e}$

$I^{e} = J$, J ideal de B

$J^{ce} \subset J$ por ii

como $J = I^{e} \Rightarrow I^{ece} \subset I^{e}$

por a y b

$$I^{e} = I^{ece}$$

v) $C = \{I \,/\, I^{ec} = I\}$

$a_1)$ "$\subset$"

sea $I \in C \Rightarrow I = J^c$

$J^c = J^{cec}$ por iii

$\Rightarrow J^{cec} = I^{ec}$

$\Rightarrow I = I^{ec}$

luego

$$C \subseteq \{I \;/\; I^{ec} = I\}$$

$a_2)$ "$\supset$"

Sea $J \in \{I \;/\; I^{ec} = I\} \Rightarrow J = J^{ec}$

$\Rightarrow J \in C$

por a_1 y a_2 tenemos

$$C = \{I \;/\; I^{ec} = I\}$$

b) $E = \{J \;/\; J^{ce} = J\}$

$b_1)$ "$\subset$"

Sea $J \in E \Rightarrow J = I^e \Rightarrow J^{ce} = I^{ece}$

como $I^e = I^{ece}$ por iii

$\Rightarrow J = J^{ce}$

luego

$$E \subseteq \{J \;/\; J^{ce} = J\}$$

$b_2)$ "$\supset$"

Sea $I \in \{J \;/\; J^{ce} = J\} \Rightarrow I = I^{ce}$

$\Rightarrow I \in E$

por b_1 y b_2

$$E = \{J \ / \ J^{ce} = J\}$$

PROPOSICION 1.6.7

Sea $f: A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos, sen I_1, I_2 idea-- les de A entonces

$$\text{i)} \ (I_1 + I_2)^e = I_1^e + I_2^e$$

$$\text{ii)} \ (I_1 \cdot I_2)^e = I_1^e \cdot I_2^e$$

$$\text{iii)} \ r(I)^e \subseteq r(I^e)$$

PRUEBA

i) a) "$\subset$"

$$\text{Sea } x \in (I_1 + I_2)^e \Rightarrow x \in [f(I_1 + I_2)]$$

$$\Rightarrow x \in [f(I_1) + f(I_2)]$$

$$\Rightarrow x \in [f(I_1)] + [f(I_2)]$$

$$\Rightarrow x \in I_1^e + I_2^e$$

b) "$\supset$"

$$\text{Sea } x \in (I_1^e + I_2^e) \Rightarrow x \in ([f(I_1)] + [f(I_2)])$$

$$\text{como } f(I_1) \subset f(I_1 + I_2)$$

$$f(I_2) \subset f(I_1 + I_2)$$

$$\Rightarrow x \in [f(I_1 + I_2)]$$

$$\Rightarrow x \in (I_1 + I_2)^e$$

luego por a y b

$$(I_1 + I_2)^e = I_1^e + I_2^e$$

ii) similar a (i)

iii) Sea $x \in r(I)^e \Rightarrow x \in [r(I)]$

$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} b_i f(y_i), \quad b_i \in B, \quad y_i \in r(I)$$

es decir existe n_i, para cada i tq $y_i^{n_i} \in I$

o sea que

$$f(y_i^{n_i}) \in f(I) \subset I^e \subseteq r(I^e) \quad \text{Por } 1.5.8$$

$$\Rightarrow \quad x = \sum_{i=1}^{n} b_i f(y_i) \in r(I^e)$$

C A P I T U L O I I

M O D U L O S

2.1 MODULOS Y HOMOMORFISMOS DE MODULOS

DEFINICION 2.1.1

Sea A un anillo (como en 1.1.2). Un módulo sobre A, o un A-módulo, es un grupo abeliano aditivo M junto con una función.

$$\mu : A \times M \longrightarrow M$$

que satisface las propiedades siguientes

(M_1) La función μ es biaditiva, es decir

$$\mu(a+b,x) = \mu(a,x) + \mu(b,x)$$

$$\mu(a,x+y) = \mu(a,x) + \mu(a,y)$$

son ciertas para todo $a,b \in A$ y para todo $x,y \in M$

(M_2) Para cualquier $a,b \in A$ y $x \in M$ se tiene

$$\mu(a, \mu(b,x)) = \mu(ab,x)$$

(M_3) Para todo elemento $x \in M$

$$\mu(1,x) = x$$

La función μ recibe el nombre de multiplicación escalar del módulo M. Para cada $a \in A$ y cada $x \in M$, el elemento $\mu(a,x)$ de M se llamará producto escalar de x por a, y se designará por ax.

Con esta notación simplificada las condiciones (M_1) - (M_3) se espresan mediante las cuatro siguientes igualdades

$$a(x+y) = ax + ay$$

$$(a+b)x = ax + bx$$

$$(a\,b)x = a(bx)$$

$$1x = x$$

que se cumplen para cualquier $a,b \in A$, $x,y \in M$.

PROPOSICION 2.1.2

Sea M un A-módulo entonces se cumple

a) $0 \cdot x = 0 \qquad \forall x \in M$

b) $a \cdot 0 = 0 \qquad \forall a \in A$

c) $a(-x) = -(ax)$

d) $(-a)x = -(ax)$

DEMOSTRACION:

a partir de la definición

DEFINICION 2.1.3

Sean M,N, A-módulos una aplicación $f: M \longrightarrow N$ es un HOMOMORFISMO de A-módulos (o es A-LINEAL) si

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(ax) = af(x)$$

para todo $a \in A$ y todo $x,y \in M$.

PROPOSICION 2.1.4

Sea $f: M \longrightarrow N$ un homomorfismo de A-módulos entonces

1) $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x), \forall x \in M$

2) el conjunto $\ker f = \{x \in M / f(x) = 0\}$ llamado múcleo de f es un submódulo de M; el conjunto $f(M) = \{f(x) / x \in M\}$ llamado la imagen de f; denotados por $\operatorname{Im} f$ es un s bmódulo de N

3) f es un morfismo inyectivo ssi $\ker f = \{0$

DEMOSTRACION

i) $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

$f(x) + f(-x) = f(x - x) = f(0) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

ii) como f es un morfismo de grupos

$\ker f$ y $f(M)$ son subgrupos de M y N respectivamente

si $\alpha \in A$, $x \in \operatorname{Ker} f$, $y \in M$.

$f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$

$\Rightarrow \alpha x \in \ker f$

$\alpha f(y) = f(\alpha y) \in f(M) \Rightarrow af(y) \in f(M)$

iii) "$\Rightarrow$"

f es inyectivo, $x \in \ker f \Rightarrow x = 0$ ya que $f(x) = f(0)$

"$\Leftarrow$"

$\ker f = \{0\}$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, ya que $f(x - y) = 0$

PROPOSICION 2.1.5

Sean M, N, P, A-módulos. Sean $f: M \longrightarrow N$

$g: N \longrightarrow P$ dos homomorfismos de A-módulos entonces

$$g \circ f: M \longrightarrow P$$

es un homorfismo de A-módulos

PROPOSICION 2.1.6

Sean $f: M \longrightarrow N$, $g: N \longrightarrow P$ homomorfismos de A-módulos y -

$h = g \circ f$ entonces si h es sobreyectivo también lo es g.

2.2 SUBMODULOS Y MODULO COCIENTE

DEFINICION 2.2.1

Sea A un anillo, M un A-módulo arbitrario, S un suconjunto de M, diremos que S es un submódulo de M si

a) S es un subgrupo del grupo (M, +)

b) $A S \subset S$

Es decir que $S \subset M$ es un submódulo si es también un A-módulo - en las mismas operaciones que lo es M.

PROPOSICION 2.2.2

Sea M un A-módulo, M' un submódulo de M entonces para todo -- $a \in A$ y $x \in M$

$$\{a(x + m)/m \in M'\} \subset ax + M'$$

PROPOSICION 2.2.3

Sea M un A-módulo, M' un submódulo de M al grupo abeliano M/M' hereda una estructura de A-módulo de M, definido por

$$a(x + M') = ax + M'$$

DEMOSTRACION

$$M/M' = \{x + M'/x \in M\}$$

sea μ: $A \times M/M' \longrightarrow M/M'$

$$(a, x+M') \rightsquigarrow ax + M'$$

probemos que μ está bien definida

$$
\begin{aligned}
\text{sea } (a, x + M') = (b, y + M') &\Leftrightarrow a = b \\
& x + M' = y + M' \\
&\Leftrightarrow x - y \quad M' \\
&\Rightarrow a(x - y) \quad M' \\
&\Rightarrow ax - ay \quad M' \\
&\Rightarrow ax + M' = ay + M' = by + M'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{i) } a((x + y) + M') &= a(x + y) + M' \\
&= ax + ay + M' \\
&= ax + M' + ay + M' \\
&= a(x + M') + a(y + M')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{ii) } (a + b)(x + M') &= (a + b)\, x + M' \\
&= ax + bx + M' \\
&= ax + M' + bx + M' \\
&= a(x + M') + b(x + M')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{iii) } (ab)(x + M') &= a\, b\, x + M' \\
&= a(bx) + M' \\
&= a(bx + M')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{iv) } 1(x + M') &= 1x + M' \\
&= x + M'
\end{aligned}
$$

luego

M/M' es un A-módulo.

DEFINICION 2.2.4

El A-módulo M/M' se le llama MODULO COCIENTE de M por M'.

PROPOSICION 2.2.5

Sean M, N, dos submódulos de un A-módulo P entonces

$$\frac{M + N}{M} = \{n + M / n \varepsilon M\}$$

DEMOSTRACION

a) "c"

$$\text{Sea } z \varepsilon \frac{M + N}{M} \Rightarrow z = x + M,\ x \varepsilon M + N$$

$$\Rightarrow z = m + n + M,\ m \varepsilon M,\ n \varepsilon N$$

$$\Rightarrow z = m + M + n + M$$

$$\Rightarrow z = M + n + M$$

$$\Rightarrow z = n + M,\ n \varepsilon N$$

$$\Rightarrow z \varepsilon \{n + M / n \varepsilon N\}$$

b) "ↄ"

Sea $n + M \varepsilon \{n + M/n \varepsilon N\}$

$$\Rightarrow n + M = n + m + M, \quad \forall m \varepsilon M$$

$$\Rightarrow n + M \varepsilon \frac{M + N}{M}$$

PROPOSICION 2.2.6

Sea $f: M \longrightarrow N$, un homomorfismo de A-módulos, M' un submódulo de M tq $M' \subseteq \ker f$, entonces f da lugar a un homomorfismo

$$\bar{f}: M/M' \longrightarrow N$$

$$x+M' \rightsquigarrow f(x)$$

DEMOSTRACION

. $\bar{f}$ está bien definido

$$x + M' = y + M' \Rightarrow (x - y) + M' = 0$$

$$\Rightarrow (x - y) \varepsilon M'$$

$$\Rightarrow x - y = 0$$

$$\Rightarrow f(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(y) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = f(y)$$

. $\overline{f}$ es un homomorfismo

$$\overline{f}((x + y) + M') = f(x + y)$$

$$= f(x) + f(y)$$

$$= \overline{f}(x + M') + \overline{f}(y + M')$$

$$\overline{f}(ax + M') = f(ax)$$

$$= af(x)$$

$$= a\,\overline{f}(x + M')$$

El homomorfismo $\overline{f}$ se dice que es inducido por f. Como un caso particular de la proposición anterior tenemos:

PROPOSICION 2.2.7

Sea f: M $\longrightarrow$ N un homomorfismo de A-módulos entonces

$$\overline{f}: M/_{\ker f} \longrightarrow N$$

$$x+\ker f \rightsquigarrow f(x)$$

es un isomorfismo de A-módulos.

DEMOSTRACION

- $\overline{f}$ es un homomorfismo por 2.2.6
- $\overline{f}$ evidentemente es inyectivo
- $\overline{f}$ es sobreyectivo por la forma en que está definido.

2.3 OPERACIONES CON SUBMODULOS

DEFINICION 2.3.1

Sea M un A-módulo y sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia de submódulos de M. Su suma ΣM_i es el conjunto de todas las sumas (finitas) - Σx_i donde $x_i \in M_i$ para todo $i \in I$ y donde casi todas las x_i -- (Es decir, todas salvo un número finito) son cero.

PROPOSICION 2.3.2

ΣM_i es el menor submódulo de M que contiene a los M_i

DEMOSTRACION

- $\sum_i M_i \neq \phi$ ya que $0 \in \sum_i M_i$
- sea $m \in \sum_i M_i \longrightarrow m = \sum_i x_i \quad , x_i \in M_i$

sea $n \in \sum_i m_i \longrightarrow n = \sum_i y_i \quad , y_i \in M_i$

$$\longrightarrow -n = -\sum_i y_i \quad , y_i \in M_i$$

$$\longrightarrow m - n = \sum_i x_i - \sum_i y_i$$

$$= \sum_i (x_i - y_i) \quad , \quad x_i - y_i \in M_i$$

$$\longrightarrow m - n \in \sum_i M_i$$

. $A \sum_i M_i \subset \sum_i M_i$

sea $a m \in A \sum_i M_i \Longrightarrow am = a \sum_i x_i, \quad x_i \in M_i$

$\Longrightarrow am = \sum_i a x_i, \; a x_i \in M_i$

$\Longrightarrow a m \in \sum_i M_i$

luego:

$$A \sum_i M_i \subset \sum_i M_i$$

PROPOSICION 2.3.3

La intersección de cualquier familia de submódulos de un A-módulo M es un submódulo de M.

DEMOSTRACION

Sea $(X_i)_{i \in I}$ una familia de submódulos de M.

Probemos que $\bigcap_{i \in I} X_i$ es un submódulo de M.

a) $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \phi$ ya que $0 \in \bigcap_{i \in I} X_i$

b) sean $x, y \in \bigcap_{i \in I} X_i \Longrightarrow x, y \in X_i \quad \forall i, \; i \in I$

$\Longrightarrow - y \in X_i \quad \forall i, \; i \in I$

$\Longrightarrow x - y \in X_i \; \forall i, \; i \in I$

$\Longrightarrow x - y \in \bigcap_{i \in I} X_i$

. $A \; (\bigcap X_i) \subset \bigcap_{i \in I} X_i$

$$\text{Sea } m \in A(\bigcap_{i \in I} X_i) \Longrightarrow m = ay,\ a \in A,\ y \in X_i,\ (\forall i)(i \in I)$$

$$\Longrightarrow ay \in X_i\ ,\ (\forall i)(i \in I)$$

$$\Longrightarrow m \in \bigcap X_i$$

PROPOSICION 2.3.4

Si N,P son dos submódulos de M, se define el conjunto (N:P) - de la siguiente manera

$$(N:P) = \{a \in A / aP \subset N\}$$

PROPOSICION 2.3.5

El conjunto (N:P) de la definición anterior es un ideal de A.

DEFINICION 2.3.6

Sea $(0:M) = \{a \in A/aM = 0\}$ este ideal se denomina el ANULADOR DE M y se indica por Ann (M).

PROPOSICION 2.3.7

i) $\text{Ann}\ (M + N) = \text{Ann}\ (M) \cap \text{Ann}\ (N)$

ii) $(N:P) = \text{Ann}\ (\frac{N + P}{N})$

DEMOSTRACION

i) Sea $x \in \text{Ann}(M + N) \iff x(M + N) = 0$

como $M \subset (M + N)$, $N \subset (M + N)$

$\iff xM = 0$ y $xN = 0$

$\iff x \in \text{Ann}(M)$ y $x \in \text{Ann}(N)$

$\iff x \in (\text{Ann}(M) \cap \text{Ann}(N))$

ii) Como $\frac{N + P}{N} = \{p + N/p \varepsilon P\}$ por 2.2.3

$$\mathrm{Ann}\left(\frac{N + P}{N}\right) = \{m \varepsilon A/m\left(\frac{N + P}{N}\right) = N\}$$

$$= \{m \varepsilon A/m(p + N) = N, \text{ para todo } p \varepsilon P\}$$

sea $x \varepsilon (N:P) \iff x P \subset N$

$$\iff xp + N = N, \quad \forall p \varepsilon P$$

$$\iff x(P + N) = N, \quad \forall p \varepsilon P$$

$$\iff x \varepsilon \mathrm{Ann}\left(\frac{N + P}{N}\right)$$

2.4 MODULOS FINITAMENTE GENERADOS

DEFINICION 2.4.1

Sea M un A-módulo, se dice que M es de tipo finito o también que M es finitamente generado, si existen elementos llamados generadores.

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

pertenecientes a M, tales que para todo $x \varepsilon M$ existen:

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \text{ en } A$$

tales que:

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

o en otros términos, "todo" elemento de M es una combinación lineal de $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ en A

OBSERVACION 2.4.2

En virtud de las condiciones de la definición 2.4.1 escribi--

mos:

$$M = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$$

que leeremos el A-Módulo M generado por $x_1, \ldots x_n$.

PROPOSICION 2.4.3

M es un A-módulo con generación finita ssi M es isomorfo a - un cociente A^n para algún entero $n > 0$.

DEMOSTRACION

"=>"

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un sistema de generadores de M, definamos:

$$\Psi : A^n \longrightarrow M$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \rightsquigarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

es claro que ψ es un homomorfismo de A-módulos, y por 2.2.7 tenemos que:

$$M \approx A^n/_{\ker(\psi)}$$

"<="

Se tiene un homomorfismo ψ de A^n sobre M por 2.2.6.

si $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$ (el 1 ocupa el i-ésimo lugar), entonces e_i, $(1 \leq i \leq n)$ genera a A^n por tanto $\psi(e_i)$ genera a M.

2.5 SUCESIONES EXACTAS

DEFINICION 2.5.1

Una sucesión de A-módulos y A-homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

se dice que es exacta en M_i si

$$\operatorname{Im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$$

La sucesión es exacta si es exacta en cada M_i

DEFINICION 2.5.2

Una sucesión exacta de la forma:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

se llama sucesión exacta corta

PROPOSICION 2.5.3

a) $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ es exacta ssi f es inyectiva

b) $M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow 0$ es exacta ssi f es sobreyectiva

c) $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ es exacta ssi f es inyectiva, g sobreyectiva y g induce un isomorfismo de $M_{/f(M')}$ sobre M".

DEMOSTRACION

a) "=>"

Denotaremos por 0_* al homomorfismo $0 \longrightarrow M'$.

Como la sucesión es exacta $\ker f = \{0\} = \operatorname{Im} 0_* \Longrightarrow$ f es inyectiva.

"<="

f es inyectiva => $\ker f = \{0\}$

=> $\operatorname{Im} 0_* = \ker f$

luego

la sucesión es exacta

b) "=>"

denotaremos por 0^* el homomorfismo nulo.

Como la sucesión exacta $\ker 0^* = \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow$ f es sobreyectiva

"<="

Como f es sobreyectiva $\Rightarrow \operatorname{Im} f = M''$ y además $\ker 0^* = M''$

$\Rightarrow \ker f = \operatorname{Im} 0^*$

c) "=>"

Como $f(M') = \ker g$

por la proposición 2.2.7, g induce un isomorfismo de A-módulo que representaremos por $\bar{g}$.

"<="

Como f es inyectiva tenemos que $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ es exacta.

Como g es sobreyectiva tenemos que $M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ es exacta.

Demostremos que $\ker g = f(M')$

Sea $x \in \ker g \iff g(x) = 0$

$\iff \bar{g}(x + f(M')) = 0$

$\iff x + f(M') = 0$

$\iff x \in f(M')$

luego:

$$\ker g = f(M') = \operatorname{Im} f$$

2.6 PRODUCTO TENSORIAL DE MODULOS

DEFINICION 2.6.1

Sean M,N,P tres A-módulos. Una aplicación

$$f: M \times N \longrightarrow P$$

es llamada A-bilineal si y solo si

$$f(a_1x_1 + a_2x_2, y) = a_1f(x_1, y) + a_2f(x_2, y)$$

$$f(x, b_1y_1 + b_2y_2) = b_1f(x, y_1) + b_2f(x, y_2)$$

Para todo $x_1, x_2, x \in M$, $y_1, y_2, y \in N$ y $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$

PROPOSICION 2.6.2

Sean M,N A-módulos. Entonces existe un par (T,g) formado por un A-módulo T y una aplicación A-bilineal $g: M \times N \longrightarrow T$, con la siguiente propiedad:

Por cada A-módulo P y cualquier aplicación A-bilineal $f: M \times N \longrightarrow P$ existe una aplicación A- lineal única $f': T \longrightarrow P$ tal que $f = f' \circ g$.

(Es decir, cada función bilineal sobre $M \times N$ se factoriza a - través de T).

Además, si (T,g) y (T',g') son dos pares con esta propiedad, entonces existe un isomorfismo único

$$j: T \longrightarrow T' \quad \text{tal que } j \circ g = g'$$

OBSERVACION 2.6.3

El módulo T de la proposición anterior se denomina PRODUCTO

TENSORIAL DE M y N, y se indica por $M \otimes_A N$, o solo por $M \otimes N$ si no hay ambiguedad sobre el anillo A.

Está generado como A-módulo por los <<productos>> $x \otimes y$. Si $(x_i)_{i\varepsilon I}$, $(y_i)_{i\varepsilon I}$ son familias de generadores de M y N respectivamente entonces los elementos $x_i \otimes y_i$ generan a $M \otimes N$, por consiguiente todo elemento $t \varepsilon M \otimes N$ puede escribirse de la forma:

$$t = \sum_{i=1}^{n} (x_i \otimes y_i)$$

donde $x_i \varepsilon M$ y $y_i \varepsilon N$, $(\forall i)(i = 1,\ldots, n)$

OBSERVACION 2.6.4

La notación $x \otimes y$ es intrinsicamente ambígua si no se especifica el producto tensorial al que pertenece.

Existen varios de los llamados <<isomorfismos canónicos>> algunos de los cuales se establecen a continuación.

PROPOSICION 2.6.5

Sean M, N, P A-módulos, entonces existen isomorfismos únicos

i) $M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$

ii) $(M \otimes N) \otimes P \longrightarrow M \otimes (N \otimes P) \longrightarrow M \otimes N \otimes P$

iii) $A \otimes M \longrightarrow M$

tales que:

a) $x \otimes y \rightsquigarrow y \otimes x$

b) $(x \otimes y) \otimes z \rightsquigarrow x \otimes (y \otimes z) \rightsquigarrow x \otimes y \otimes z$

c) $a \otimes x \leadsto a\,x$

DEMOSTRACION

i) La función $h: M \times N \longrightarrow N \otimes M$

$$(m,n) \leadsto n \otimes m$$

es bilineal.

efectivamente

Sea $m,m' \in M$, $n,n' \in N$ y $a,b \in A$

$$\begin{aligned} h(am + bm', n) &= n \otimes a\,m + b\,m \\ &= n \otimes a\,m + n \otimes b\,m \\ &= a(n \otimes m) + b(n \otimes m) \\ &= a\,h((m,n)) + b\,h((m,n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(m, an + bn') &= (an + bn') \otimes m \\ &= an \otimes m + bn' \otimes m \\ &= a(n \otimes m) + b(n' \otimes m) \\ &= a\,h((m,n)) + b\,h((m,n')) \end{aligned}$$

Por la propiedad del producto tensorial existe f de $M \otimes N$ en $N \otimes M$ de manera que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
M \otimes N \arrow[rr] & & M \otimes N \\
(m,n) \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, "h"'] \arrow[ddr, squiggly] & & m \otimes n \arrow[dl, "f"] \arrow[ddl, squiggly] \\
& N \otimes M & \\
& n \otimes m &
\end{tikzcd}$$

De manera semejante la función

$$h': N \times M \longrightarrow M \otimes N$$

$$(n,m) \rightsquigarrow m \otimes n$$

es bilineal, luego existe g de $N \otimes M$ en $M \otimes N$ tal que el dia grama siguiente es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
N \times M \arrow[rr] \arrow[dr, "h'"'] & & N \otimes M \arrow[dl, "g"] \\
& M \otimes N &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(n,m) \arrow[rr, squiggly] \arrow[dr, squiggly] & & n \otimes m \arrow[dl, squiggly] \\
& m \otimes n &
\end{tikzcd}$$

ahora bién

$$(f \circ g)(n \otimes m) = f(g(n \otimes m))$$

$$= f(m \otimes n)$$

$$= n \otimes m$$

$$(g \circ f)(m \otimes n) = g(f(m \otimes n))$$

$$= g(n \otimes m)$$

$$= m \otimes n$$

luego, f y g son isomorfismos

$$y \quad M \otimes N \approx N \otimes M$$

ii) De manera semejante que (i)

iii) La función

$$g: A \times M \longrightarrow M$$

$$(a,x) \rightsquigarrow a\,x$$

es bilineal y claramente sobreyectiva.

Luego existe un único homomorfismo

$$h: A \otimes M \longrightarrow M \text{ tal que } h(a \otimes x) = a\,x$$

y que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times M \arrow[rr] \arrow[dr, "g"'] & & A \otimes M \arrow[dl, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

- Probemos que h es inyectiva.

Sea $t \in A \otimes M$, entonces existen elementos

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ en M y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en A tal que

$$t = \sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes x_i) = \sum_{i=1}^{n} (1 \otimes a_i x_i)$$

$$= 1 \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right)$$

entonces:

$$h(t) = h\left(1 \otimes \left(\sum_{i=1} a_i x_i \right)\right)$$

$$= h(f((1, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i))$$

$$= (h \circ f)((1, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i))$$

$$= g((1, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$\Rightarrow h(t) = 0 \Rightarrow t = 1 \otimes 0 = 0$

$\Rightarrow \ker h = \{0\}$

$\Rightarrow$ h es inyectiva

- Probemos que h es sobreyectiva

Como $h \circ f = g$ y g es sobreyectiva

$\Rightarrow$ h es sobreyectiva por 2.1.6

PROPOSICION 2.6.6

Sean A y B anillos, sea M un A-módulos, P un B-módulo y N un (A,B)- bimódulo (Es decir, N es a la vez un A-módulo y un --- B-módulo y las dos estructuras son compatibles en el sentido que $a(x\,b) = (a\,x)b$, para todo $a \in A$, $b \in B$, $x \in N$). Entonces -- $M \otimes_A N$ es naturalmente un B-módulo y $N \otimes_B P$ es un A-módulo y - se tiene:

$$(M \otimes N) \otimes_B P \approx M \otimes_A (N \otimes_B P)$$

DEMOSTRACION

La multiplicación escalar que da a $M \otimes_A N$ la estructura de B-módulo es:

$$B \times M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N$$

$$(b, \sum_i m_i \otimes_A n_i) \longmapsto \sum_i m_i \otimes_A b\,n_i$$

como se demuestra a continuación:

sea $b, b' \in B, m, m' \in M, n, n' \in N$

sea $x, y \in M \underset{A}{\otimes} N \Rightarrow x = \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} n_i, \ y = \sum_i m'_i \underset{A}{\otimes} n'_i$

$$b(x + y) = b(\sum_i m_i \underset{A}{\otimes} n_i + \sum_i m'_i \underset{A}{\otimes} n'_i)$$

$$= \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} bn_i + \sum_i m'_i \underset{A}{\otimes} bn'_i$$

$$= bx + by$$

$$(b+b')x = (b + b')(\sum_i m \underset{A}{\otimes} n)$$

$$= \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} (b + b')n_i$$

$$= \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} (bn_i + b'n_i)$$

$$= \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} bn_i + \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} b'n_i$$

$$= bx + b'y$$

$$(bb')\ x = (bb')(\sum_i m_i \underset{A}{\otimes} n_i)$$

$$= \sum m_i \underset{A}{\otimes} b(b'n_i)$$

$$= b\sum_i m_i \underset{A}{\otimes} b'n_i)$$

$$= b(b'\sum_i m_i \underset{A}{\otimes} n_i)$$

$$= b(b'x)$$

$$1\,x = 1(\sum_i m_i \underset{A}{\otimes} n_i)$$

$$= \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} (1)\, n_i$$

$$= \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} n_i$$

La multiplicación escalar que da a $N \underset{B}{\otimes} P$ la estructura de A-módulo es:

$$A \times N \underset{B}{\otimes} P \longrightarrow N \underset{B}{\otimes} P$$

$$(a, \sum_i n_i \otimes p_i) \rightsquigarrow \sum_i an_i \otimes p_i$$

La comprobación es idéntica a la anterior.

Demostremos que:

$$(M \underset{A}{\otimes} N) \underset{B}{\otimes} P \simeq M \underset{A}{\otimes} (N \underset{B}{\otimes} P)$$

La función

$$h: (M \underset{A}{\otimes} N) \times P \longrightarrow M \underset{A}{\otimes} (M \underset{B}{\otimes} P)$$

$$(\sum_i m_i \underset{A}{\otimes} n_i, p) \rightsquigarrow \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} (n_i \underset{B}{\otimes} p)$$

es B-bilineal

sean $a, b \in B$, $p, q \in P$

$$h(a \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} n_i + b \sum_i m'_i \underset{A}{\otimes} n'_i, p)$$

$$= h(\sum_i m_i \otimes an_i + \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} bn_i, p)$$

$$= \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} (an_i \underset{B}{\otimes} p) + \sum_i m'_i \underset{A}{\otimes} (bn_i \underset{B}{\otimes} p)$$

$$= a \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} (n_i \underset{B}{\otimes} p) + b \sum_i m'_i \underset{A}{\otimes} (n_i \underset{B}{\otimes} p)$$

$$= a\, h(\sum_i m_i \underset{A}{\otimes} n_i, p) + b\, h(\sum_i m'_i \underset{A}{\otimes} n'_i, p)$$

$$h\Big(\sum_i m_i \underset{A}{\otimes} n_i,\ a p + b q\Big)$$

$$= \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} \big(n_i \underset{B}{\otimes} (a p + b q)\big)$$

$$= \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} \big(n_i \underset{B}{\otimes} a p + n_i \underset{B}{\otimes} b q\big)$$

$$= \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} \big(n_i \underset{B}{\otimes} a p + \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} \big(n_i \underset{B}{\otimes} b q\big)$$

$$= a \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} \big(n_i \underset{B}{\otimes} p\big) + b \sum_i m_i \underset{A}{\otimes} \big(n_i \underset{B}{\otimes} q\big)$$

$$= a\, h\Big(\sum_i m_i \underset{A}{\otimes} n_i,\ p\Big) + b\, h\Big(\sum_i m_i \underset{A}{\otimes} n_i,\ q\Big)$$

Luego existe f, de manera que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
(M \underset{A}{\otimes} N) \times P \arrow[r] \arrow[dr, "h"'] & (M \underset{A}{\otimes} N) \underset{B}{\otimes} P \arrow[d, "f"] \\
& M \underset{A}{\otimes} (N \underset{B}{\otimes} P)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(m \underset{A}{\otimes} n,\ p) \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & (m \underset{A}{\otimes} n) \underset{B}{\otimes} p \arrow[d, mapsto] \\
& m \underset{A}{\otimes} (n \underset{B}{\otimes} p)
\end{tikzcd}$$

De manera semejante h' definida por

$$h' : M \times (N \underset{B}{\otimes} P) \longrightarrow (M \underset{A}{\otimes} N) \underset{B}{\otimes} P$$

$$(m, \Sigma n_i \otimes p_i) \longmapsto \Sigma (m \underset{A}{\otimes} n_i) \otimes p_i$$

es bilineal, luego existe g, de manera que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
M \times (N \otimes_B P) \arrow[r] \arrow[dr] & M \otimes_A (N \otimes_B P) \arrow[d] \\
& (M \otimes_A N) \otimes_B P \\
(m, n \otimes_B p) \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & m \otimes_A (n \otimes_B p) \arrow[d, mapsto] \\
& (m \otimes_A n) \otimes_B p
\end{tikzcd}$$

Además:

$$(g \circ f)(m \otimes_A n) \otimes_B p = g(f((m \otimes_A n) \otimes_B p))$$

$$= g(m \otimes_A (n \otimes_B p))$$

$$= (n \otimes_A n) \otimes_B p$$

$$(f \circ g)(m \otimes_A (n \otimes_B p)) = f(g(m \otimes_A (n \otimes_B p)))$$

$$= f((m \otimes_A n) \otimes_B p)$$

$$= m \otimes_A (n \otimes_B p)$$

luego f y g son isomorfismos

y $(M \otimes_A N) \otimes_B P \approx M \otimes_A (N \otimes_B P)$

2.7 PROPIEDADES DE EXACTITUD DEL PRODUCTO TENSORIAL

PROPOSICION 2.7.1

Sea

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de A-módulos y homomorfismos, y sea N un A-módulo cualquiera.

Entonces la suceción

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

(donde 1 designa la aplicación identica en N) es exacta.

OBSERVACION 2.7.2

En general no es cierto que, si

$M' \longrightarrow M \longrightarrow M'$ es una sucesión exacta de A-módulos y homomorfismos, la sucesión $M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N$ obtenida tensorizando con un A-módulo arbitrario N sea exacta.

EJEMPLO 2.7.3

Tómese $A = \mathbb{Z}$ y considere la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \text{ donde } f(x) = 2x$$

para todo $x \in \mathbb{Z}$. Si se tensoriza con $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, la sucesión -- $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} Z \otimes N$ no es exacta, puesto que para cada - $x \otimes y \in \mathbb{Z} \otimes N$ se tiene

$$\begin{aligned}(f \otimes 1)(x \otimes y) &= 2x \otimes y \\ &= x \otimes 2y \\ &= x \otimes 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

de manera que $f \otimes 1$ es la aplicación nula, mientra que

$$\mathbb{Z} \otimes N \neq 0$$

DEFINICION 2.7.2

Un A-módulo N es plano, si dada la sucesión de A-módulos $0 \longrightarrow M \longrightarrow M'$ es exacta entonces $0 \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N$ es exacta.

PROPOSICION 2.7.3

Para un A-módulo N, las siguientes propiedades son equivalentes

i) N es plano

ii) Si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta cualquiera de A-módulos, la sucesión tensorizada
$0 \longrightarrow M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N \longrightarrow 0$ es exacta.

iii) si $f: M' \longrightarrow M$ es inyectiva, entonces
$f \otimes 1: M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N$ es inyectiva

iv) si $f: M' \longrightarrow M$ es inyectiva y N, M' son de generación finita, entonces:

$$f \otimes 1: M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \text{ es inyectiva.}$$

PROPOSICION 2.7.4

Si $f: A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos y M es un A-módulo plano entonces $M_B = B \otimes_A M$ es un B módulo plano.

C A P I T U L O   I I I

ANILLO Y MODULOS DE FRACCIONES

3.1 ANILLOS DE FRACCIONES

DEFINICION 3.1.1

Sea A un anillo, $S \subset A$, S es multiplicativamente cerrado en A si

i) $1 \in S$

ii) S es cerrado con respecto a la multiplicación

DEFINICION 3.1.2

Sea A un conjunto y R una relación en A. Se dice que R es una relación de equivalencia si se verifican las siguientes propiedades:

i) $a R a$, $\forall a \in A$ (Propiedad reflexiva).

ii) $a R b$, implica $b R a$ (Propiedad simétrica).

iii) $a R b$ y $b R c$ (implica $a R c$ Propiedad transitiva).

DEFINICION 3.1.3

Sea A un conjunto y R una relación en A. Para todo $x \in A$, se llama "clase de equivalencia de x módulo R" (o según R) a la imagen por R de $\{x\}$.

En símbolos

$$R(x) = \{y \in A / x R y\}$$

PROPOSICION 3.1.2

Sea A un anillo, $S \subset A$, multiplicativamente cerrado se define una relación $\equiv$ en $A \times S$ de la siguiente manera:

$$(a,s) = (b,t) \Longleftrightarrow (at - bs)\, u = 0,\ u \in S$$

entonces la relación así definida es de equivalencia en A x S.

DEMOSTRACION

- Reflexiva

Sea $(a,s) \in A \times S \Rightarrow (as - as)\, 1 = 0,\ 1 \in S$

$$\Rightarrow (a,s) \equiv (a,s),\ \forall (a,s) \in A \times S$$

- Símetrica

Sea $(a,s) \equiv (b,t) \Rightarrow (at - bs)\, u = 0,\ u \in S$

$$\Rightarrow -(at - bs)u = 0,\ u \in S$$

$$\Rightarrow (bs - at)\, u = 0,\ u \in S$$

luego

$$(b,t) \equiv (a,s)$$

- Transitiva

si $(a_1,s_1) \equiv (a_2,s_2)$ y $(a_2,s_2) \equiv (a_3,s_3)$

$$\Rightarrow \exists\ m_1 \in S \text{ tq } (a_1s_2 - a_2s_1)\, m_1 = 0$$

$$\exists\ m_2 \in S \text{ tq } (a_2s_3 - a_3s_2)\, m_2 = 0$$

tenemos entonces las siguientes ecuaciones

1) $(a_1s_2 - a_2s_1)\, m_1 = 0,\quad m_1 \in S$

2) $(a_2s_3 - a_3s_2)\, m_2 = 0,\quad m_2 \in S$

Multiplicando (1) por s_3m_2 y (2) por s_1m_1 y distribuyendo tenemos:

1) $a_1s_2m_1s_3m_2 - a_2s_1m_1s_3m_2 = 0$

2) $a_2s_3m_2s_1m_1 - a_3s_2m_2s_1m_1 = 0$

Sumando las ecuaciones anteriores tenemos que

$$a_1s_2m_1s_3m_2 - a_3s_2m_2s_1m_1 = 0$$

Aplicando ley distribuitiva tenemos que

$$(a_1s_3 - a_3s_1)s_2m_1m_2 = 0$$

como S es multiplicativamente cerrado

$$s_2m_1m_2 \in S$$

Por tanto

$$(a_1s_1) \equiv (a_3,s_3)$$

OBSERVACION 3.1.3

Indicaremos a/s la clase de equivalencia de (a,s) es decir

$$a/s = \{(m,n) \in A \times S \ / \ (a,s) \equiv (m,n)\}$$

y se indica por $S^{-1}A$ el conjunto de las clases de equivalen-- cia, es decir

$$S^{-1}A = \{a/s \ / \ a \in A \ \text{ y } \ s \in S\}$$

COROLARIO 3.1.4

La terna $(S^{-1}A, +, \cdot)$ forma una estructura de anillo con las operaciones de suma y producto definidas así:

$$(a/s) + (b/t) = (at + bs)/st$$

$$(a/s)(b/t) = ab/st$$

i) Probemos que la suma esta bién definida

sea $a_{1/s_1} = a_{2/s_2} \Rightarrow \exists u_1 \in S \ \text{ tq } \ (a_1s_2 - a_2s_1)u_1 = 0$

$a_{3/s_3} = a_{4/s_4} \Rightarrow \exists u_2 \in S \ \text{ tq } \ (a_3s_4 - a_4s_3)u_2 = 0$

tenemos entonces las siguientes ecuaciones

(1) $a_1s_2u_1 - a_2s_1u_1 = 0$

(2) $a_3s_4u_2 - a_4s_3u_2 = 0$

multiplicando (1) por $u_2s_3s_4$ y (2) por $u_1s_1s_2$

tenemos:

(1') $a_1s_2u_1u_2s_3s_4 - a_2s_1u_1u_2s_3s_4 = 0$

(2') $a_3s_4u_2u_1s_1s_2 - a_4s_3u_2u_1s_1s_2 = 0$

sumando (1') y (2') tenemos

$$a_1s_2u_1u_2s_3s_4 + a_3s_4u_2u_1s_1s_2 - a_2s_1u_1u_2s_3s_4 - a_4s_3u_2u_1s_1s_2 = 0$$

asociando, conmutando y aplicando ley distribuitiva, por ser todos elementos del anillo A tenemos que

$$((a_1s_3 + a_2s_1)s_2s_4 - (a_2s_4 + a_4s_2)s_1s_3)\ u_1u_2 = 0$$

con $u_1u_2 \varepsilon S$, por ser S multiplicativamente cerrado

entonces

$$\frac{a_1s_3 + a_3s_1}{s_1s_3} = \frac{a_2s_4 + a_4s_2}{s_2s_4}$$

luego la suma está bien definida.

ii) Probemos que el producto está bien definido

sean

$$a_1/s_1 = a_2/s_2 \Rightarrow \exists u_1 \varepsilon S \text{ tq } (a_1s_2 - a_2s_1)\ u_1 = 0$$

$$a_3/s_3 = a_4/s_4 \Rightarrow \exists u_2 \varepsilon S \text{ tq } (s_3s_4 - a_4s_3)\ u_2 = 0$$

tenemos entonces las siguientes ecuaciones

(1) $a_1s_2u_1 - a_2s_1u_1 = 0$

(2) $a_3s_4u_2 - a_4s_3u_2 = 0$

multiplicando (1) por $a_3s_4u_2$ y (2) por $a_2s_1u_1$

tenemos

(1') $a_1s_2u_1a_3s_2u_2 - a_2s_1u_1a_3s_4u_2 = 0$

(2') $a_3s_4u_2a_2s_1u_1 - a_4s_3u_2a_2s_1u_2 = 0$

sumando (1') y (2'), asociando y conmutando por ser elementos del anillo A tenemos

$$a_1a_3s_2s_4u_1u_2 - a_2a_4s_1s_3u_1u_2 = 0$$

$$(a_1a_3s_2s_4 = a_2a_4s_1s_3)\ u_1u_2 = 0,\ u_1u_2 \in S$$

luego

$$\frac{a_1a_3}{s_1s_3} = \frac{a_3a_4}{s_2s_4}$$

por tanto el producto está bien definido.

3) Probemos $(S^{-1}A,+)$ es un grupo abeliano

i) Asociatividad

Sean a/b, e/d, e/f, $\varepsilon\ S^{-1}A$

$$((a/b) + (c/d)) + (e/f) = \left(\frac{ad + cb}{bd}\right) + (e/f)$$

$$= \frac{(ad + cb)f + ebd}{bdf}$$

$$= \frac{adf + cbf + ebd}{bdf}$$

$$= \frac{adf + (cbf + ebd)}{bdf}$$

$$= \frac{a(df) + (cf + ed)b}{b(df)}$$

$$= (a/b) + \left(\frac{cf + ed}{d\,f}\right)$$

$$= (a/b) + ((c/d) + (e/f))$$

ii) Existencia del elemento de identidad para la suma

$\frac{0}{1} \varepsilon S^{-1}A$ ya que $0 \varepsilon A$ y $1 \varepsilon S$

probemos que $\frac{0}{1}$ es el elemento de identidad para la suma

sea $\frac{a}{b} \varepsilon S^{-1}A$

$$(a/b) + (0/1) = \frac{a(1) + 0(b)}{b(1)}$$

$$= \frac{a + 0}{b}$$

$$= \frac{a}{b}$$

iii) Para cada $a/s \varepsilon S^{-1}A$ existe elemento inverso.

sea $a/s \varepsilon S^{-1}A$ entonces $\exists$ $-a/s \varepsilon S^{-1}A$ ya que $-a \varepsilon A$, $s \varepsilon S$

Probemos que

$$(a/s) + (-a/s) = 0/1$$

$$(a/s) + (-a/s) = \frac{as - as}{s^2}$$

$$= 0$$

$$= \frac{0}{1}$$

iv) Probemos que $(S^{-1}A,+)$ es abeliano

$$(a/b) + (c/d) = \frac{ad + cb}{bd}$$

$$= \frac{cb + ad}{db}$$

$$= (c/d) + (a/b)$$

4) Probemos que $(S^{-1}A, \cdot)$ es un semigrupo conmutativo con identidad

i) Asociatividad

Sean a/s, m/n, $p/1 \in S^{-1}A$

$$(a/s)((m/n) \cdot (p/1)) = (a/s)\left(\frac{mp}{nq}\right)$$

$$= \frac{amp}{snq}$$

$$= \frac{(am)p}{(sn)q}$$

$$= \left(\frac{am}{sn}\right)(p/q)$$

$$= ((a/s)(m/n))(p/q)$$

ii) Conmutividad

Sean (a/s), $(m/n) \in S^{-1}A$

$$(a/s)(m/n) = \frac{am}{sn}$$

$$= \frac{ma}{ns}$$

$$= (m/n)(a/s)$$

iii) Existencia del elemento de identidad para el producto

$1/1 \in S^{-1}A$ ya que $1 \in A$ y $1 \in S$

Probemos que $1/1$ es el elemento de identidad para el producto.

Sea $a/b \in S^{-1}A$

$$(a/b)(1/1) = \frac{a\ 1}{b\ 1}$$

$$= \frac{1\,a}{1\,b}$$

$$= \frac{a}{b}$$

5) Distribuitibidad del producto sobre la suma

Sean $a/b,\ m/n,\ p/1 \in S^{-1}A$

i) $$(a/b)((m/n) + (p/q)) = (a/b)\left(\frac{mq + pq}{n\,q}\right)$$

$$= \frac{a(mq + pn)}{b\,n\,q}$$

$$= \frac{amq + apn}{bnq}$$

$$= \frac{amq}{bnq} + \frac{apn}{bnq}$$

$$= \frac{am}{bn} + \frac{ap}{bq}$$

$$= (a/b)(m/n) + (a/b)(p/q)$$

ii) $$((a/b) + (m/n)) + (p/q) = \left(\frac{an + mb)}{bn}\right)(p/q)$$

$$= \frac{(an + mb)p}{bnq}$$

$$= \frac{(anp + mbp)}{bnq}$$

$$= \frac{anp}{bnq} + \frac{mbp}{bnq}$$

$$= \frac{ap}{bq} + \frac{mp}{nq}$$

$$= (a/b)(p/q) + (m/n)(p/q)$$

Por tanto

$$(S^{-1}A,+,\cdot) \text{ es un anillo.}$$

COROLARIO 3.1.5

Sea $f: A \longrightarrow S^{-1}A$ tq $f(x) = x/1$

entonces f es un homomorfismo de anillos

DEMOSTRACION

i) f está bien definida

sea $a = b \Longrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{1}$

$\Longrightarrow f(a) = f(b)$

luego

f está bien definida.

ii) $\cdot$ $f(x+y) = \frac{x+y}{1}$

$= \frac{x}{1} + \frac{y}{1}$

$= f(x) + f(y)$

$\cdot$ $f(x\,y) = \frac{x\,y}{1}$

$= \frac{x}{1}\;\frac{y}{1}$

$= f(x)\;f(y)$

$\cdot$ $f(1) = \frac{1}{1}$

$- 1$

luego

f es un homomorfismo de anillos

COROLARIO 3.1.6

f definido como en el corolario 3.1.5 no es en general inyectivo.

DEMOSTRACION

Demostremos que

si $f(x_1) = f(x_2) \not\Longrightarrow x_1 = x_2$

sean x_1, $x_2 \in A$, no ambos ceros

$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{1} \Longrightarrow \exists\ u \in S$ tq $(x_1 - x_2)u = 0$

entonces $x_1 = x_2$ si $u = 1$

pero si $u \neq 1$, $x_1 \neq x_2$

luego f no es inyectivo

DEFINICION 3.1.7

Si A es un DOMINIO DE INTEGRIDAD y $S = A - \{0\}$ entonces $S^{-1}A$, es llamado CUERPO DE FRACCIONES DE A.

DEFINICION 3.1.8

El anillo $S^{-1}A$ se denomina el anillo de fracciones de A con - respecto a S.

$S^{-1}A$ tiene una propiedad universal que es

TEOREMA 3.1.9

Sea $g: A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos tal que $g(s)$ es una unidad en B para todo $s \in S$.

Entonces existe un único homomorfismo de anillos

$$h: S^{-1}A \longrightarrow B$$

tal que

$$g = h \circ f$$

DEMOSTRACION

i) Probemos unicidad

Si satisface las condiciones, entonces

$$h(a/1) = h(f(a)) = (h \circ f)(a) = g(a) \quad \forall a \in A$$

por tanto si $s \in S$, $1/s \in S^{-1}A$

$$\begin{aligned} h(1/s) &= h((s/1)^{-1}) \\ &= h(f(s)^{-1}) \\ &= h(h(s^{-1})) \\ &= ((h \circ f)(s))^{-1} \\ &= g(s)^{-1} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} h(a/s) &= h((a/1)(1/s)) \\ &= h((a/1)(s/1)^{-1}) \\ &= h(a/1)\ h(s/1)^{-1} \\ &= (h \circ f)(a)(h \circ f)(s)^{-1} \\ &= g(a)\ g(s)^{-1} \end{aligned}$$

de manera que h esta univocamente determinado por g.

ii) Existencia

Sea $h(a/s) = g(a)\ g(s)^{-1}$, entonces h será evidentemente un homomorfismo de anillos siempre que esté bien definido.

Supongamos entonces que

$$a/s = a'/s' \text{ entonces } \exists t \in S \text{ tq } (as' - a's)t = 0$$

$$g((as' - a's)t) = g(0)$$

$$g((as' - a's))g(t) = 0, \text{ g homomorfismo}$$

$$(g(as') - g(a's))g(t) = 0$$

$$(g(a)g(s') - g(a')g(s))g(t) = 0$$

$$g(a)g(s') - g(a')g(s) = 0 \text{ , } g(t) \text{ unidad en B}$$

$$g(a)g(s') = g(a')g(s)$$

$$g(a)g(s)^{-1} = g(a')g(s')^{-1} \text{ , } g(s), g(s') \text{ unidades en B.}$$

$$h(a/s) = h(a'/s')$$

PROPOSICION 3.1.10

El anillo $S^{-1}A$ y el homomorfismo $f: A \longrightarrow S^{-1}A$ tienen las siguientes propiedades.

i) $s \in S \Longrightarrow f(s)$ es una unidad en $S^{-1}A$

ii) $f(a) = 0 \Longrightarrow as = 0$ para algún $s \in S$

iii) cada elemento de $s^{-1}A$ es de la forma

$f(a)f(s)^{-1}$ para algún $a \in A$ y algún $s \in S$

DEMOSTRACION

$$f: A \longrightarrow S^{-1}A$$

$$x \leadsto \frac{x}{1}$$

i) Demostremos que $\forall\ f(s) \in S^{-1}A$

$\exists\ f(s)^{-1}$ tq $f(s)f(s)^{-1} = f(s)^{-1}f(s) = 1$.

Sea $f(s) \in S^{-1}A$ entonces $f(s)^{-1} = \frac{1}{s} \in S^{-1}A$ ya que $S^{-1}A$ es un anillo.

ii) $f(a) = 0 \Longrightarrow \frac{a}{1} = \frac{0}{1}$

$\Longrightarrow \exists s \in S$ tq $s(a - 0) = 0$

$\Longrightarrow sa = 0$

iii) sea $a/s \in S^{-1}A \Longrightarrow (a/s) = (a/1)(1/a)$

$= (a/1)(s/1)^{-1}$ por 3.1.9

$= f(a)f(s)^{-1}$

Reciprocamente, estas tres condiciones determinan el anillo $S^{-1}A$ salvo isomorfismo.

De forma más precisa

COROLARIO 3.1.11

Si $g: A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos tal que

i) $s \in S \Longrightarrow g(s)$ es una unidad en B

ii) $g(a) = 0 \Longrightarrow as = 0$, para algún $s \in S$

iii) cada elemento de B es de la forma

$$g(a)\ g(s)^{-1}$$

entonces

Existe un isomorfismo único

$$h: S^{-1}A \longrightarrow B \quad \text{tq} \quad g = h \circ f$$

DEMOSTRACION

h existe, es único y es homomorfismo de anillos por 3.1.9

Probemos entonces que h es inyectivo y sobreyectiva.

a) h es sobreyectivo por (iii)

b) Para demostrar que h es inyectivo demostraremos que

$\ker h = \{0\}$, es decir:

$$h(a/s) = 0 \Longrightarrow a/s = 0/1$$

$$\begin{aligned} h(a/s) &= (h(a/1)\ h(1/s)) \\ &= g(a)\ g(s)^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $g(s)^{-1}$ es una unidad en B tenemos que $g(a) = 0$

Como $g(a) = 0 \Longrightarrow at = 0$ para algún $t \in S$ por (ii)

$$\Longrightarrow t(a(1) - 0(s)) = 0$$

$$\Longrightarrow a/s = \frac{0}{1} = 0$$

luego

h es inyectiva

EJEMPLO 3.1.12

Sea A un anillo, P un ideal de A.

A - P es multiplicativamente cerrado <--> P es primo.

DEMOSTRACION

"==>"

$$\begin{aligned} 1 \in A - P &\Longleftrightarrow 1 \notin P \\ &\Longleftrightarrow P \neq [1] \end{aligned}$$

Sea $xy \varepsilon P \Leftrightarrow xy \notin A - P$,

$\Leftrightarrow x \notin A - P$ ó $y \notin A - P$, ya que $A - P$ es multiplicativamente cerrado

$\Leftrightarrow x \varepsilon P$ ó $y \varepsilon P$

luego

P es primo

"<="

Como P es primo $P \neq [1] \Rightarrow 1 \notin P$

$\Rightarrow 1 \varepsilon A - P$

si $x, y \varepsilon A - P \Rightarrow x \notin P$ y $y \notin P$

$\Rightarrow xy \notin P$, por ser P primo

$\Rightarrow xy \varepsilon A - P$

NOTACION:

En este caso se escribe A_P en vez de $S^{-1}A$, es decir

$$A_P = \{a/s \ / \ a \varepsilon A, \ s \notin P\}$$

COROLARIO 3.1.13

Sea A un anillo, P un ideal primo de A.

Sea $M = \{b/s \ / \ b \varepsilon P$ y $s \notin P\}$ entonces M es un ideal de A_P

DEMOSTRACION

i) $M \subseteq A_P$, por la forma en que está definido.

ii) Probemos que $(M,+)$ es un subgrupo aditivo de A_P

1) $M \neq \phi$ ya que $b/1 \varepsilon M$

2) sea b/s y m/n en M.

$$b/s + n/m = \frac{bm + ns}{s\,m} \in M$$

ya que $bm + ns \in P$ por ser P un ideal

y $sm \not\in P$ ya que $s \not\in P$ y $m \not\in P$ y

P es primo.

Luego

(M,+) es subgrupo aditivo.

3) $A_P M \subset M$

Sea $a/s \in A_P$ y $m/n \in M \Rightarrow (a/s)(m/n) = \frac{am}{sn} \in M$

ya que $am \in P$, por ser P primo

y $sn \not\in P$ por ser P primo

luego

M es un ideal de A_P

PROPOSICION 3.1.14

Sea M el ideal del corolario anterior, P un ideal primo del anillo A si $b/t \in M$ entonces b/t es una unidad en A_P

DEMOSTRACION

Si $b/t \in M \Longrightarrow b \in P$

$\Longrightarrow b \in A - P$

$\Longrightarrow$ b/t es una unidad en A_p por 3.1.10

DEFINICION 3.1.15

Un anillo A que tiene exactamente un ideal maximal J se denomina ANILLO LOCAL.

PROPOSICION 3.1.16

Sea M el ideal definido en 3.1.13, entonces M es el único -- ideal maximal en A_P

DEMOSTRACION

Sea B un ideal en A_P y $B \not\subseteq M$, entonces B contiene una unidad - por 3.1.14, y por tanto $B = A_P$, luego M es el único ideal maximal en A_P.

En otras palabras A_P es un ANILLO LOCAL

OBSERVACION 3.1.17

El proceso de pasar de A un A_P se denomina LOCALIZACION EN P.

EJEMPLO 3.1.18

$S^{-1}A$ es el anillo cero ssi $0 \varepsilon S$

DEMOSTRACION

"=>"

$a/s = \frac{0}{1} \Rightarrow \exists\, t \,\varepsilon\, S$ tq $(a(1) - s(0))t = 0$

$\Rightarrow at = 0$

si tomamos $a = 1$

$\Rightarrow t = 0$

luego

$0 \varepsilon S$

"<="

$0 \varepsilon S \Rightarrow \frac{a}{s} = \frac{0}{1}, \quad \forall (a/s) \,\varepsilon\, S^{-1}A$

$\Rightarrow (a(1) - s(0))0 = 0$

luego

$S^{-1}A$ es anillo cero.

OBSERVACION 2.1.19

El ejemplo 3.1.18 justifica el hecho de que se pida que $0 \notin S$

EJEMPLO 3.1.20

Sea A un anillo, $a \varepsilon A$ y sea $S = \{a^n\}_{n \geq 0}$. En este caso A_a re-- presenta $S^{-1}A$.

EJEMPLO 3.1.21

Sea A un anillo, B un ideal cualesquiera de A y sea $S = 1 + B$, el conjunto de todos los $1 + x$, donde $x \varepsilon B$, entonces S es multiplicativamente cerrado.

DEMOSTRACION

a) $1 = 1 + 0, \quad 0 \varepsilon B \Rightarrow 1 \varepsilon B$

b) sea $m = 1 + x \quad \varepsilon 1 + B$

$n = 1 + x' \quad \varepsilon 1 + B$

a probar que $mn \varepsilon 1 + B$

$$mn = (1 + x)(1 + x')$$
$$= 1 + x + x' + xx'$$
$$= 1 + k, \; k \varepsilon B, \; k = x + x' + xx'$$

luego

$1 + B$ es multiplicativamente cerrado.

EJEMPLO 3.1.22

Este ejemplo es específico del ejemplo 3.1.12

$A = \mathbb{Z}$, $P = [p]$, p primo.

$A_P = \{m/n$ / n es primo con p$\}$

EJEMPLO 3.1.23

Este ejemplo es específico del ejemplo 3.1.20.

Si $a \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$

$A_a \{p/q$ / $q = a^n\}$

hemos construido $S^{-1}A$ a partir de un anillo A, veremos que la construcción de $S^{-1}A$ puede efectuarse también con un A-módulo M en vez del anillo A, veremos esta construcción en detalle - en el siguiente numeral que llamaremos.

3.2 MODULOS DE FRACCIONES

DEFINICION 3.2.1

Sea M un A-módulo, $S \subset A$, definido como en 3.1.1 se define una relación $\equiv$ en M x S de la siguiente manera:

$$(a,s) \equiv (a',s') \iff \exists t \in S \quad tq \quad t(sa' - s'a) = 0$$

entonces la relación así definida es de equivalencia en M x S.

DEMOSTRACION

- Reflexiva

  Sea $(m,s) \in M \times S \Rightarrow 1(sm - sm) = 0, \quad 1 \in S.$

  $$\Rightarrow (m,s) \equiv (m,s) \quad \forall (m,s) \in M \times S$$

- Simétrico

  $$(m_1,s_1) \equiv (m_2,s_2) \Rightarrow \exists t \in S' \quad tq \quad t(s_1m_2 - s_2m_1) = 0$$

  $$\Rightarrow -(t(s_1m_2 - s_2m_1)) = 0$$

$$\Rightarrow t(s_2m_1 - s_1m_2) = 0$$

$$\Rightarrow (m_2,s_2) \equiv (m_1,s_1)$$

· Transitiva

Si $(m_1,s_1) \equiv (m_2,s_2)$ y $(m_2,s_2) \equiv (m_3,s_3)$

$$\Rightarrow \exists t_1,t_2 \in S \quad tq \quad t_1(s_1m_2 - s_2m_1) = 0$$

$$t_2(s_2m_3 - s_3m_2) = 0$$

Tenemos entonces las siguientes ecuaciones

$$(1) \quad t_1s_1m_2 - t_1s_2m_1 = 0$$

$$t_2s_2m_3 - t_2s_3m_2 = 0$$

multiplicando (1) por s_3t_2 y (2) por s_1t_1

$$(1') \quad s_3t_2t_1s_1m_2 - s_3t_2t_1s_2m_1 = 0$$

$$(2') \quad s_1t_1t_2s_2m_3 - s_1t_1t_2s_3m_2 = 0$$

sumando tenemos

$$s_1t_1t_2s_2m_3 - s_3t_2t_1s_2m_1 = 0$$

como M es un A-módulo

$$t_1t_2s_2(s_1m_3 - s_3m_1) = 0, \quad t_1t_2s_2 \in S$$

luego

$$(m_1,s_1) \equiv (m_3,s_3)$$

OBSERVACION 3.2.2

Indicaremos por m/s la clase de equivalencia de (m,s) es de--

cir

$$m/s = \{(m',t) \in M \times S/(m,s) \equiv (m',t)\}$$

e indicaremos por $S^{-1}M$ el conjunto de las clases de equivalencia, es decir

$$S^{-1}M = \{m/s \ / \ m \in M \quad y \quad s \in S\}$$

COROLACIO 3.2.3

$S^{-1}M$ forma una estructura de $S^{-1}A$-módulo junto con las operaciones de suma y producto escalar definidas así:

$$(m/s) + (m'/s') = \frac{s'm + sm'}{s\,s'}$$

$$(a/s)(m/s') = \frac{am}{ss'}$$

DEMOSTRACION

i) Demostremos que la suma está bien definida.

sean

$$m_{1/s_1} = m_{3/s_3} \Rightarrow \exists t_1 \in S \quad tq \quad (s_1m_3 - s_3m_2) = 0$$

$$m_{2/s_2} = m_{4/s_4} \Rightarrow \exists t_2 \in S \quad tq \quad t_2(s_2m_4 - s_4m_2) = 0$$

tenemos las siguientes ecuaciones

$$(1) \quad t_1s_1m_3 - t_1s_3m_1 = 0$$

$$(2) \quad t_2s_2m_4 - t_2s_4m_2 = 0$$

multiplicando (1) por $(-t_2s_2s_4)$ y (2) por $(-t_1s_1s_3)$

tenemos

$$(1')\quad -t_2s_2s_4t_1s_1m_3 + t_2s_2s_4t_1s_3m_1 = 0$$

$$(2')\quad -t_1s_1s_3t_2s_2m_4 + t_1s_1s_3t_2s_4m_2 = 0$$

sumando (1') y (2') tenemos

$$t_1t_2s_3s_4s_2m_1 + t_1t_2s_3s_4s_1m_2 - t_1t_2s_1s_2s_4m_3$$
$$- t_1t_2s_1s_2s_3m_4 = 0$$

Todos los sumandos son elementos del A-módulo M

entonces

$$t_1t_2s_3s_4(s_2m_1 + s_1m_2) - t_1t_2s_1s_2(s_4m_3 + s_3m_4) = 0$$

$$t_1t_2(s_3s_4(s_2m_1 + s_1m_2) - t_1t_2s_1s_2(s_4m_3 + s_3m_4) = 0$$

como

$$t_1t_2 \varepsilon S$$

luego

$$\frac{s_2m_1 + s_1m_2}{s_1\, s_2} = \frac{s_4m_3 + s_3m_4}{s_3\, s_4}$$

ii) $(S^{-1}M, +)$ es grupo abeliano

- Asociatividad

$$m_1/s_1 + (m_2/s_2 + m_3/s_3) = m_1/s_1 \quad \left(\frac{s_3m_2 + s_2m_3}{s_1\, s_3}\right)$$

$$= \frac{s_2s_3m_1 + s_1(s_3m_2 + s_2m_3)}{s_1s_2s_3}$$

$$= \frac{s_3(s_2m_1 + s_1m_2) + s_1s_2m_3}{s_1s_2s_3}$$

$$= \left(\frac{s_2m_1 + s_1m_2}{s_1\, s_2}\right) + \left(m_3/s_3\right)$$

$$= \left(m_1/s_1 + m_2/s_2\right) + \left(m_3/s_3\right)$$

- Elemento de identidad

$0/1 \varepsilon S^{-1}M$ ya que $0 \varepsilon M$, $1 \varepsilon S$

Probemos que 0/1 es el elemento de identidad de $S^{-1}M$

$$(m/s) + (0/1) = \frac{(1)m + s(0)}{s(1)}$$
$$= \frac{m+0}{s}$$
$$= \frac{m}{s}$$

- Para cada $m/s \varepsilon S^{-1}M$, existe elemento inverso

sea $m/s \varepsilon S^{-1}M$ entonces existe $-m/s \varepsilon M$, $-m \varepsilon M$, $s \varepsilon S$ tal que:

$$(m/s) + (-m/s) = \frac{m-n}{s\,s}$$
$$= \frac{0}{s'}, \quad s' = ss$$
$$= 0$$
$$= \frac{0}{1}$$

- Conmutatividad

$$(m_{1/s_1}) + (m_{2/s_2}) = \frac{s_2m_1 + s_1m_2}{s_1s_2} = \frac{s_1m_2 + s_2m_1}{s_2s_1}$$
$$= (m_{2/s_2}) + (m_{1/s_1})$$

iii) Demostremos que el producto está bien definido

Sean $a_{1/s_1} = a_{2/s_3} \Rightarrow \exists t_1 \varepsilon S$ tq $t_1(s_3a_1 - s_1a_2) = 0$

$m_{1/s_2} = m_{2/s_4} \Rightarrow \exists t_2 \varepsilon S$ tq $t_2(s_2m_2 - s_4m_1) = 0$

tenemos entonces las siguientes ecuaciones

$$(1)\quad t_1 s_3 a_1 - t_1 s_1 a_2 = 0$$

$$(2)\quad t_2 s_2 m_2 - t_2 s_4 m_1 = 0$$

Como M es un A-módulo tenemos que $-t_2s_2m_2 \varepsilon M$ multiplicando (1) por la derecha por $(-t_2s_2m_2)$ y (2) por $t_1s_3a_1$ por la izquierda

tenemos

$$(1')\quad - t_1s_3a_1t_2s_2m_2 + t_1s_1a_2t_2s_2m_2 = 0$$

$$(2')\quad t_1s_3a_1t_2s_2m_2 - t_1s_3a_1t_2s_4m_1 = 0$$

sumando (1') y (2') tenemos

$$t_1t_2s_1s_2a_2m_2 - t_1t_2s_4a_1m_1 = 0$$

como ambos sumandos son elementos de un A-módulo M tenemos

$$t_1t_2(s_1s_2a_2m_2 - s_3s_4a_1m_1) = 0, \quad t_2 \varepsilon S$$

luego

$$\frac{a_1m_1}{s_1s_2} = \frac{a_2m_2}{s_3s_4}$$

m_1) sean $a/s \varepsilon S^{-1}A$, m_{1/s_1}, $m_{2/s_2} \varepsilon S^{-1}M$

$$(a/s)(m_{1/s_1} + m_{2/s_2}) = (a/s)\left(\frac{s_2m_1 + s_1m_2}{s_1s_2}\right)$$

$$= \frac{a(s_2m_1 + s_1m_2)}{s\,s_1s_2}$$

$$= \frac{as_2m_1 + as_1m_2}{s\,s_1s_2}$$

$$= \frac{as_2m_1}{s\,s_1s_2} + \frac{as_1m_2}{s\,s_1s_2}$$

$$= \frac{am_1}{ss_1} + \frac{am_2}{ss_2}$$

$$= (a/s)(m_{1/s_1}) + (a/s)(m_{2/s_2})$$

m_2) sean (s/s_1), $(b/s_2) \varepsilon\, S^{-1}A$, $(m/s_3)\ \varepsilon\ S^{-1}M$

$$(a/s_1 + b/s_2)(m/s_3) = \left(\frac{s_2a + s_1b}{s_1s_2}\right)(m/s_3)$$

$$= \frac{(s_2a + s_1b)m}{s_1s_2s_3}$$

$$= \frac{s_2am + s_1bm}{s_1s_2s_3}$$

$$= \frac{s_2am}{s_1s_2s_3} + \frac{s_1bm}{s_1s_2s_3}$$

$$= \frac{am}{s_1s_3} + \frac{bm}{s_2s_3}$$

$$= (a/s_1)(m/s_3) + (b/s_2)(m/s_3)$$

m_3) sean (a/s_1), $(b/s_2)\ \varepsilon\ S^{-1}A$, $(m/s_3)\ \varepsilon\ S^{-1}M$

$$((a/s_1)(b/s_2))(m/s_3) = \left(\frac{ab}{s_1s_2}\right)(m/s_3)$$

$$= \frac{abm}{s_1s_2s_3}$$

$$= \frac{a}{s_1}\left(\frac{b\,m}{s_2s_3}\right)$$

$$= a/s_1((b/s_2)(m/s_3))$$

m_4) Sea $1\ \varepsilon\ S^{-1}A$, $m/s\ \varepsilon\ S^{-1}M$

$$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{1(m)}{(1)s}$$

$$= \frac{m}{s}, \quad M \text{ es un A-módulo}$$

luego

por i,ii,ii, $S^{-1}M$ es un $S^{-1}A$-módulo.

COROLARIO 3.2.4

Sea U: M ⟶ N un homomorfismo de A-módulos este da lugar a un homomorfismo de $S^{-1}A$-módulo

$$S^{-1}U\colon S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$$

$$m/s \rightsquigarrow U(m)/s$$

DEMOSTRACION

- $$S^{-1}U\left(\frac{s_2m_1 + s_1m_2}{s_1s_2}\right) = \frac{U(s_2m_1 + s_1m_2)}{s_1s_2}$$

$$= \frac{U(s_2m_1) + U(s_1m_2)}{s_1s_2}$$

$$= \frac{s_2U(m_1) + s_1U(m_2)}{s_1s_2}$$

$$= \frac{U(m_1)}{s_1} + \frac{U(m_2)}{s_2}$$

$$= S^{-1}U(m_1/s_1) + S^{-1}U(m_2/s_2)$$

- $$S^{-1}U\left(\frac{am}{s_1s_2}\right) = \frac{U(am)}{s_1s_2}$$

$$= \frac{aU(m)}{s_1s_2}$$

$$= (a/s_1)\left(\frac{U(m)}{s_2}\right)$$

$$= (a/s_1)S^{-1}U(m/s_2)$$

COROLARIO 3.2.5

Sean

$$S^{-1}U: S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$$
$$m/s \leadsto U(m)/s$$

$$S^{-1}V: S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$$
$$m/s \leadsto V(m)/s$$

homomorfismos de $S^{-1}A$-módulos entonces

$$S^{-1}(V \circ U) = (S^{-1}V) \circ (S^{-1}U)$$

DEMOSTRACION

Sea $m/s \in S^{-1}M$

$$\begin{aligned} S^{-1}(V \circ U)(m/s) &= \frac{(V \circ U)(m)}{s} \\ &= \frac{V(U(m))}{s} \\ &= S^{-1}V\left(\frac{U(m)}{s}\right) \\ &= S^{-1}V(S^{-1}U(m/s)) \\ &= (S^{-1}V \circ S^{-1}U)(m/s) \end{aligned}$$

luego

$$S^{-1}(V \circ U) = (S^{-1}V) \circ (S^{-1}U)$$

PROPOSICION 3.2.6

La operación S^{-1} es exacta, es decir si

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \quad \text{es exacta en } M,$$

entonces

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$$

es exacta en $S^{-1}M$.

DEMOSTRACION

Probemos que $Im(S^{-1}f) = ker(S^{-1}g)$

$Im(S^{-1}f) = \{m/s \in S^{-1}M / \ m/s = S^{-1}f(m'/s')$, para algún $m'/s' \in S^{-1}M\}$

$ker(S^{-1}g) = \{m/s \in S^{-1}M / \ S^{-1}g(m/s) = 0\}$

"c"

Como $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ es exacta

$\Rightarrow Im(f) = ker(g)$

luego

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
$$= 0, \quad \forall x \in M'$$

entonces

$$g \circ f = 0$$

sea $m/s \ Im(S^{-1}f) \Rightarrow m/s = S^{-1}f(m'/s')$, para algún $m'/s' \in S^{-1}M$

$$\Rightarrow S^{-1}g(m/s) = S^{-1}g(S^{-1}f(m'/s'))$$
$$= (S^{-1}g \circ S^{-1}f)(m'/s')$$
$$= S^{-1}(g \circ f)(m'/s')$$
$$= S^{-1}(0)(m'/s')$$
$$= 0(m'/s')$$
$$= 0$$

Luego

$$m/s \in ker(S^{-1}g)$$

por tanto

$$\mathrm{Im}(S^{-1}f) \subset \ker(S^{-1}g)$$

"$\supset$"

Sea $m/s \in \ker(S^{-1}g)$, entonces $g(m)/s = 0$ en $S^{-1}M''$,

por tanto existe $t \in S$ tal que $tg(m) = 0$, en M''

Pero $tg(m) = g(tm) = 0$, ya que g es un homomorfismo de - A-módulo, por tanto $tm \in \ker(g) = \mathrm{Im}(f)$

y por tanto $tm = f(m')$, para algún $m' \in M'$.

Pero en $S^{-1}M$ se tiene

$$m/s = \frac{f(m')}{st} = (S^{-1}f)\left(\frac{m'}{st}\right) \text{ con } \frac{m'}{st} \in S^{-1}M'$$

por tanto $m/s \in \mathrm{Im}(S^{-1}f)$

Luego

$$\ker(S^{-1}g) \subseteq \mathrm{Im}(S^{-1}f)$$

de donde

$$\mathrm{Im}(S^{-1}f) = \ker(S^{-1}g)$$

COROLARIO 3.2.7

En particular se deduce de 3.2.6 que si M' es un submódulo de M, la aplicación $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M$ es inyectiva.

DEMOSTRACION

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \text{ es exacta, } M' \text{ submódulo de } M$$

$$0 \longrightarrow S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}i} S^{-1}M \text{ es exacta por proposición 3.2.6}$$

luego la aplicación

$$S^{-1}M' \longrightarrow S^{-1}M \text{ es inyectiva}$$

y por tanto $S^{-1}M'$ puede considerarse como un submódulo de $S^{-1}M$, con este convenio.

COROLARIO 3.2.8

La formación de fracciones conmuta en la formación de sumas - finitas y cocientes.

De manera más precisa, si N y P son submódulos de un A-módulo, entonces

i) $S^{-1}(N + P) = S^{-1}(N) + S^{-1}(P)$

ii) $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}(N) \cap S^{-1}(P)$

iii) los $S^{-1}A$-módulos $S^{-1}(M/N)$ y $(S^{-1}M/S^{-1}N)$ son -- isomorfos.

DEMOSTRACION

"$\subset$"

i) Sea $m \in S^{-1}(N + P) \Rightarrow m = \frac{n+p}{s}$, $n \in N$, $p \in \underline{P}$

$$\Rightarrow m = \frac{n}{s} + \frac{p}{s}$$

$$\Rightarrow m \in S^{-1}(N) + S^{-1}(P)$$

luego

$$S^{-1}(N + P) \subset S^{-1}(N) + S^{-1}(P)$$

"$\supset$"

Sea $k \in S^{-1}(N) + S^{-1}(P) \Rightarrow k = \frac{n}{s_1} + \frac{p}{s_2}$, $n \in N$, $p \in \underline{P}$

$$\Rightarrow k = \frac{s_2 n + s_1 p}{s_1 s_2}$$

$\Rightarrow k \in S^{-1}(N+P)$, por ser N y P, A-módulos

luego

$$S^{-1}(N) + S^{-1}(P) \subset S^{-1}(N + P)$$

ii) $m/s \in S^{-1}(N) \cap S^{-1}(P) \iff m/s \in S^{-1}(N)$ y $m/s \in S^{-1}(P)$

$\iff m \in N$ y $m \in P$

$\iff m \in N \cap P$

$\iff m/s \in S^{-1}(N \cap P)$

iii) $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$ es exacto

entonces

$$0 \longrightarrow S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}i} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}(M/N) \longrightarrow 0 \text{ es exacta}$$

por 3.2.6

Luego $S^{-1}g$ induce un isomorfismo de

$\dfrac{S^{-1}M}{S^{-1}i(S^{-1}N)}$ sobre $S^{-1}(M/N)$ pero como

$S^{-1}i(S^{-1}N) = S^{-1}N$

tenemos que

$\dfrac{S^{-1}M}{S^{-1}N}$ es isomorfo a $S^{-1}(M/N)$

PROPOSICION 3.2.9

Sea M un A-módulo. Entonces los $S^{-1}A$-módulos $S^{-1}M$ y $S^{-1}A \otimes_A M$ son isomorfos; de manera más precisa existe un único isomorfismo.

$$f: S^{-1}A \otimes_A M \longrightarrow S^{-1}M \text{ para el cual}$$

$$f((a/s) \otimes m) = am/s, \quad \forall a \in A,\ m \in M,\ s \in S \quad (1)$$

DEMOSTRACION

Sea $g: S^{-1}A \times M \longrightarrow S^{-1}M$

$$(a/s, m) \rightsquigarrow am/s$$

i) Demostremos que g está bien definida

Sean $(a_{1/s_1}, m_1) = (a_{2/s_2}, m_2) \Rightarrow a_{1/s_2} = a_{2/s_2}$

$$m_1 = m_2$$

$$\Rightarrow a_1 m_{1/s_1} = a_2 m_{2/s_2}$$

$$\Rightarrow g(a_{1/s_1}, m_1) = g(a_{1/s_2}, m_2)$$

ii) Probemos que g es A-bilineal

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \varepsilon A, m \varepsilon M$

$$\cdot\ g(\alpha_1(a_{1/s_1}) + \alpha_2(a_{2/s_2}), m) = g\left(\frac{\alpha_1 a_1}{s_1} + \frac{\alpha_2 a_2}{s_2}, m\right)$$

$$= \frac{(s_2\alpha_1 a_1 + s_1\alpha_2 a_2)m}{s_1 s_2}$$

$$= \frac{s_2\alpha_1 a_1 m + s_1\alpha_2 a_2 m}{s_1 s_2}$$

$$= \frac{\alpha_1 a_1 m}{s_1} + \frac{\alpha_2 a_2 m}{s_2}$$

$$= \frac{\alpha_1}{1}\,\frac{a_1 m}{s_1} + \frac{\alpha_2}{1}\,\frac{a_2 m}{s_2}$$

$$= \alpha_1\, g(a_{1/s_1}, m) + \alpha_2 g(a_{2/s_2}, m)$$

$$\therefore\ g(a/s,\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2) = \frac{a(\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2)}{s_1}$$

$$= \frac{a\alpha_1 m_1 + a\alpha_2 m_2}{s_1}$$

$$= \frac{\alpha_1 a m_1}{s_1} + \frac{\alpha_2 a m_2}{s_1}$$

$$= \alpha_1 \left(\frac{am_1}{s_1}\right) + \alpha_2 \left(\frac{am_2}{s_2}\right)$$

$$= \alpha_1\ g(a/s_1,m_1) + \alpha_2\ g\left(\frac{a}{s_2}\ ,\ m_2\right)$$

por i y ii g es bilineal

y por tanto, por la propiedad universal del producto tenso--- rial induce un A-homorfismo

$$f\colon S^{-1}A \otimes M \longrightarrow S^{-1}M \quad \text{que satisface (1)}$$

evidentemente es sobreyectiva y univocamente definida por (1).

Demostremos que f es inyectiva.

Sea $\sum_i (a_i/s_i) \otimes m_i$ un elemento cualquiera de

$S^{-1}A \otimes M$. Si $s = \prod_i s_i \in S$ y $t_i = \prod_{i \neq j} Sj$

se tiene que por propiedades del producto tensorial

$$\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \sum_i \frac{a_i t_i}{s} \otimes m_i$$

$$= \sum_i \frac{1}{s} \otimes a_i t_i m_i$$

$$= \frac{1}{s} \otimes \sum_i a_i t_i m_i, \quad \text{con } \frac{1}{s} \in S^{-1}A$$

$$\sum_i a_i t_i m_i \in M$$

de manera que cada elemento de $S^{-1}A \otimes M$ es de la forma

$$(1/s) \otimes m$$

Demostremos que $\ker f = \{0\}$

supongamos que $f((1/s) \otimes m) = 0$

$$f(1/s \otimes m) = m/s = 0$$
$$\Rightarrow \exists\, t \in S \text{ tq } tm = 0$$

por tanto

$$\frac{1}{s} \otimes m = \frac{t}{st} \otimes m$$
$$= \frac{1}{st} \otimes tm$$
$$= \frac{1}{st} \otimes 0$$
$$= 0$$

luego

$$\frac{1}{s} \otimes m = 0$$

por tanto f es inyectiva y f es un isomorfismo.

COROLARIO 3.2.10

$S^{-1}A$ es un A-módulo plano

DEMOSTRACION

Sea $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} M'' \longrightarrow 0$

una sucesión exacta

como $S^{-1}A \otimes M' \approx S^{-1}M'$

$S^{-1}A \otimes M \approx S^{-1}M$

$S^{-1}A \otimes M'' \approx S^{-1}M''$

tenemos que

$$0 \longrightarrow S^{-1}A \otimes M' \longrightarrow S^{-1}A \otimes M \longrightarrow S^{-1}A \otimes M'' \longrightarrow 0$$

es exacta por lo tanto $S^{-1}A$ es un módulo plano.

PROPOSICION 3.2.11

Si M y N son A-módulos, entonces existe un isomorfismo único de $S^{-1}A$ módulos.

$$f: S^{-1}M \underset{S^{-1}A}{\otimes} S^{-1}N \longrightarrow S^{-1}(M \underset{A}{\otimes} N)$$

$$((m/s) \otimes (n(t)) \rightsquigarrow \frac{m \otimes n}{st}$$

DEMOSTRACION

$$\begin{array}{lll}
(m/s) \underset{S^{-1}A}{\otimes} (n/t) & S^{-1}M \underset{S^{-1}A}{\otimes} S^{-1}N & \\
\big\downarrow\wr & \quad\wr & \text{por } 3.2.9 \\
(1/s \underset{A}{\otimes} m) \underset{S^{-1}A}{\otimes} n & (S^{-1}A \underset{A}{\otimes} M) \underset{S^{-1}A}{\otimes} N & \\
\big\downarrow\wr & \quad\wr & \text{por } 2.6.5 \text{ y por ser } S^{-1}A \text{ un A-módulo y un } S^{-1}A \text{ módulo.} \\
m \underset{A}{\otimes} (1/s \underset{S^{-1}A}{\otimes} n/t & M \underset{A}{\otimes} (S^{-1}A \underset{S^{-1}A}{\otimes} S^{-1}N) & \\
\big\downarrow\wr & \quad\wr & \text{por } 3.2.9 \\
m \underset{A}{\otimes} n/st & M \underset{A}{\otimes} S^{-1}N & \\
\big\downarrow\wr & \quad\wr & \text{por } 3.2.9 \\
m \underset{A}{\otimes} (a/st \underset{A}{\otimes} n) & M \underset{A}{\otimes} (S^{-1}A \underset{A}{\otimes} N) & \\
\big\downarrow\wr & \quad\wr & \text{por } 2.6.5 \\
1/st \otimes (m \otimes n) & S^{-1}A \underset{A}{\otimes} (M \underset{A}{\otimes} N) & \\
\big\downarrow\wr & \quad\wr & \text{por } 3.2.9 \\
\dfrac{m \otimes n}{st} & S^{-1}(M \underset{A}{\otimes} N) &
\end{array}$$

cada uno de los insomorfismos anteriores es único.

Como cada uno de los isomorfismos anteriores es único, existe - un único isomorifismo.

$$f: S^{-1}M \otimes S^{-1}N \longrightarrow S^{-1}(M \underset{A}{\otimes} N)$$

$$(m/s) \otimes (n/t) \leadsto \frac{m \otimes n}{s\,t}$$

En particular si P es un ideal primo

$$N_P \underset{A_P}{\otimes} N_P \simeq (M \underset{A}{\otimes} N)_P$$

como A_P módulos.

3.3 PROPIEDADES LOCALES

DEFINICION 3.3.1

Una propiedad "k" de un anillo (o de un A-módulo M), se dice que es una propiedad local si lo siguiente es cierto.

$$A(\circ M) \text{ tiene } k \longleftrightarrow A_P(\circ M_P) \text{ tiene } k$$

para cada ideal primo P de A.

Las siguientes proposiciones dan ejemplos de propiedades loca les

PROPOSICION 3.3.2

Sea M un A-módulo, entonces las propiedades siguientes son equivalentes.

i) $M = 0$

ii) $M_P = 0$, para todo ideal primo P de A.

iii) $M_T = 0$, para todo ideal maximal T de A.

DEMOSTRACION

i) $\longrightarrow$ ii)

$M = 0 \Rightarrow M_P = \{\frac{0}{s}/0 \quad M,\ s \notin p\} = 0$

$\Rightarrow M_P = 0$

ii) $\Rightarrow$ iii)

$M_P = 0$, para todo ideal primo de A.

Como todo ideal maximal es primo tenemos que $M_T = 0$, para todo T ideal maximal de a.

iii) $\Rightarrow$ i)

Haremos la prueba por contradicción

Supongamos que se cumple iii y que $M \neq 0$.

Como $M \neq 0$, sea $x \in M$, $x \neq 0$ y sea $\alpha = \mathrm{Ann}(x)$, α es un ideal diferente de $[1]$

Por tanto está contenido en un ideal maximal T por 1.4.8.

Sea $x/1 \in M_T$, como $M_T = 0$ por hipótesis se tiene que

$$x/1 = 0;$$

Por tanto x es anulado por algún elemento de A - T lo que es imposible puesto que

$$\mathrm{Ann}(x) \subseteq T$$

PROPOSICION 3.3.3

Sea $\phi : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de A-módulos entonces las siguientes proposiciones son equivalentes

i) ϕ es inyectiva

ii) $\phi_P: M_P \longrightarrow N_P$, es inyectiva para todo ideal primo P

iii) ϕ_T: $M_T \longrightarrow N_T$ es inyectiva para cada ideal maximal T.

Analogamente sustituyendo en todas partes <<inyectiva>> por <<sobreyectiva>>

DEMOSTRACION

i) $\Longrightarrow$ ii)

Como ϕ: $M \longrightarrow N$ es inyectiva

$0 \longrightarrow M \longrightarrow N$ es exacta

por lo tanto

$0 \longrightarrow M_P \longrightarrow N_P$ es exacta por 3.2.6

es decir:

ϕ_P es inyectiva.

ii) $\Longrightarrow$ iii)

Puesto que todo ideal maximal es primo

iii) $\Longrightarrow$ i)

Sea $M' = \ker(\phi)$ entonces la sucesión

$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow N$ es exacta

Por tanto, para cualquier ideal maximal T

$0 \longrightarrow M'_T \longrightarrow M_T \longrightarrow N_T$ es exacta por 3.2.3

luego

ϕ es inyectiva

Para la otra parte de la proposición basta cambiar el sentido de las flechas.

PROPOSICION 3.3.4

Para cada A-módulo M, las siguientes aplicaciones son equivalentes.

i) M es un A-módulo plano

ii) M_P es un A-módulo plano para cada ideal primo P

iii) M_T es un A-módulo plano para cada ideal maximal T.

DEMOSTRACION

i) $\Longrightarrow$ ii)

Sean N, N', N" A-módulos

Sea $0 \longrightarrow N \longrightarrow N' \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$

una sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow N \otimes_A M \longrightarrow N' \otimes_A M \longrightarrow N'' \otimes_A M \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta ya que M es un A-módulo plano.

$$0 \longrightarrow (N \otimes M) \otimes A_P \longrightarrow (N' \otimes M) \otimes A_P \longrightarrow N'' \otimes (M \otimes A_P) \longrightarrow 0$$

es exacta por 3.2.10

$$0 \longrightarrow N \otimes (M \otimes A_P) \longrightarrow N' \otimes (M \otimes A_P) \longrightarrow N'' \otimes (M \otimes A_P) \longrightarrow 0$$

como $M \otimes A_P \approx M_P$ por 3.2.9

$$0 \longrightarrow N \otimes M_P \longrightarrow N' \otimes M_P \longrightarrow N'' \otimes M_P \longrightarrow 0$$

es exacta.

Por lo tanto

M_P es un A-módulo plano

ii) $\Longrightarrow$ iii)

Puesto que todo ideal maximal es primo

iii) $\Longrightarrow$ i)

Si N $\longrightarrow$ P es un homomorfismo de A-módulos y T es cual-- quier ideal maximal de A, entonces

N $\longrightarrow$ P es inyectiva entonces $N_T \longrightarrow M_T$ es inyectiva por 3.3.3.

Entonces $N_T \otimes_{A_T} M_T \longrightarrow P_T \otimes_{A_T} M_T$ es inyectiva por 2.7.3

entonces

$$(N \otimes_A M)_T \longrightarrow (P \otimes M)_T \quad \text{es inyectiva por 3.2.11}$$

entonces

$$N \otimes_A M \longrightarrow P \otimes_A M \text{ es inyectiva por 3.3.3}$$

por tanto

M es plano en virtud de 2.7.3

3.4 EXTENCION Y CONTRACCION DE IDEALES EN ANILLO DE FRACCIONES

DEFINICION 3.4.1

Sea A un anillo, S un subconjunto multiplicativamente cerrado de A y

$$f: A \longrightarrow S^{-1}A$$
$$a \rightsquigarrow a/1$$

el homomomorfismo natural.

Sea C el conjunto de todos los ideales contraidos en A, es de cir:

$$C = \{\alpha / \alpha^{ec} = \alpha, \ \alpha \text{ ideal en } A\}$$

y sea E el conjunto de todos los ideales extendidos en $S^{-1}A$ - es decir

$$E = \{\beta / \beta^{ce} = \beta, \ \beta \text{ ideal en } S^{-1}A\}$$

PROPOSICION 3.4.2

Si α es ideal en A, su extención α^e en $S^{-1}A$ es $S^{-1}\alpha$

DEMOSTRACION

$S^{-1}\alpha = \{\frac{a}{s} \ / \ a \in \alpha, \ s \in S\}$

$\alpha^e = \{m \in S^{-1}A \ / \ m = \Sigma \frac{y_i}{s_i}(\frac{x_i}{1}), \ x_i \in \alpha, \ y_i/s_i \in S^{-1}A\}$

Probemos que

$$\alpha^e = S^{-1}\alpha$$

"$\subset$"

Sea $a \in \alpha^e \Rightarrow a = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{s_i} \left(\frac{x_i}{1}\right)$

$$a = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i x_i}{s_i}, \quad y_i x_i \in \alpha$$

$$a = \frac{X}{s_i}$$

donde

$$X = \sum_{i=1}^{n} s'_i \, y_i \, x_i$$

$$s'_i = s_1 \ldots s_{i-1}, \ s_{i+1}, \ldots, s_n$$

"$\supset$"

Sea $m \in S^{-1}\alpha \Rightarrow m = \frac{a}{s}, \ a \in \alpha, \ s \in S$

$$\Rightarrow m = \Sigma \frac{d_i}{s_i}, \text{ con } d_i \in \alpha,\ s_i \in S$$

$$\Rightarrow m \in \alpha^e$$

luego

$$\alpha^e = S^{-1}\alpha$$

PROPOSICION 3.4.3

i) Cada ideal en $S^{-1}A$ es un ideal extendido.

ii) Si α es un ideal en A, entonces $\alpha^{ec} = \bigcup_{s\in S} (\alpha:S)$

por lo tanto $\alpha^e = [1]$ ssi α corta S.

iii) $\alpha \in C \Longleftrightarrow$ ningun elemento de S es divisor de cero en A/α.

iv) Los ideales primos de $S^{-1}A$ estan en correspondencia bi-- yectiva ($P \Longleftrightarrow P^{-1}$) con los ideales primos de A que no - cortan a S.

v) La operación S^{-1} conmuta con la formación de sumas finitas, productos intersecciones y radicales.

DEMOSTRACION

i) Sea β un ideal en $S^{-1}A$, demostremos que $\beta = \beta^{ce}$

"$\subset$"

Sea $x/s \in \beta \Rightarrow x/1 \in \beta$

$\Rightarrow x \in \beta^c$

$\Rightarrow x/s \in \beta^{ce}$

"$\supset$"

$\beta \supseteq \beta^{ce}$ por 1.6.6

ii) a) Sea $x \in \alpha^{ec} = (S^{-1}\alpha)^c$ por 3.4.2

$\Longleftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{a}{s}$, para algun $a \in \alpha,\ s \in S$

$\Longleftrightarrow \exists t \in S$ tq $(xs - a)t = 0$

$\Longleftrightarrow x(st) \in \alpha$

$\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{s \in S} (\alpha : S)$

b) $\alpha^e = [1]$ ssi α corta S

$\alpha^e = [1] \Longleftrightarrow \alpha^{ec} = [1] = \bigcup_{s \in S} (\alpha : S)$

$\Longleftrightarrow \exists s \in S$ tq $1 \in (\alpha : A)$

$\Longleftrightarrow \exists s \in S$ tq $s \in \alpha$

iii) $\alpha \in c \Longleftrightarrow \alpha^{ec} \subseteq \alpha \Longleftrightarrow (sx \in \alpha$, para algun $s \in S \Rightarrow x \in \alpha)$

$\Longleftrightarrow$ ningun $s \in S$ es divisor de cero en - A/α

iv) Si β es un ideal primo en $S^{-1}A$, entonces β^c es un ideal primo en A. Reciprocamente si α es un ideal primo de A, entonces A/α es un dominio de integridad por 1.4.2; si - $\overline{S}$ es la imagen de S en (A/α)

se tiene:

$$S^{-1}A/S^{-1}\alpha \approx \overline{S}^{-1}(A/\alpha)$$

Demostremos que

$$S^{-1}(A/\alpha) \approx \overline{S}^{-1}(A/\alpha)$$

$$h: S^{-1}(A/\alpha) \longrightarrow \overline{S}^{-1}(A/\alpha)$$

$$\frac{a+\alpha}{s} \leadsto \frac{a+\alpha}{s+\alpha}$$

a) Sea $\dfrac{a_1+\alpha}{s_1} = \dfrac{a_2+\alpha}{s_2} \Longleftrightarrow \exists s_3 \in S$ tq $s_3(s_2a_1 + \alpha - s_2a_2 + \alpha) = \alpha$

$\Longleftrightarrow s_3(s_2a_1 - s_1a_2 + \alpha) = \alpha$

$$\Longleftrightarrow (s_3+\alpha)(s_2a_1-s_1s_2+\alpha) = \alpha, s_3+\alpha \in \bar{S}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a_1+\alpha}{a_1+\alpha} = \frac{a_2+\alpha}{s_2+\alpha}$$

luego

h está bien definida y es inyectiva.

b) Es sobreyectiva por la forma en que está definida.

Por tanto se tiene $S^{-1}(A/\alpha) = \bar{S}^{-1}(A/\alpha)$ que o es cero o esta contenido en el cuerpo de fracciones de A/α y por - tanto es un dominio de integridad y por tanto $S^{-1}\alpha$ o es primo o es el ideal unidad; en virtud de (ii) la ultima posibilidad se presenta si y solo si α corta S.

v) Para sumas y productos se da por 1.6.7

- Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de submódulos de un A-módulo M - entonces

$$\bigcap_{i\in I} S^{-1}X_i = S^{-1}(\bigcap_{i\in I} X_i)$$

sea $\frac{m}{s} \in \bigcap_{i\in I} S^{-1}X_i \Longleftrightarrow \frac{m}{s} \in S^{-1}X_i,\ \forall i$

$$\Longleftrightarrow m \in X_i,\quad \forall i$$

$$\Longleftrightarrow m \in \bigcap_{i\in I} X_i$$

$$\Longleftrightarrow \frac{m}{s}\ S^{-1}(\bigcap_{i\in I} X_i)$$

- Para los radicales tenemos que

$S^{-1}r(\alpha) = \{\frac{x}{s}/x^n \in \alpha$, para algún $n > 0$, $s \in S\}$

$r(S^{-1}\alpha) = \{\frac{x}{s} \in A/(x/s)^n \in S^{-1}\alpha$, para algún $n > 0\}$

Por 1.6.7 se tiene que

$$r(S^{-1}\alpha) \subseteq S^{-1}r(\alpha)$$

Probemos que

$$S^{-1}r(\alpha) \subset r(S^{-1}\alpha)$$

sea $\frac{x}{s} \in S^{-1}r(\alpha)$ $\Rightarrow$ $x^n \in \alpha$, para algún $n > 0$, $s \in S$

$\Rightarrow$ $x^n \in \alpha$, $s^n \in S$

$\Rightarrow$ $\dfrac{x^n}{s^n} \in S^{-1}\alpha$

$\Rightarrow$ $(\frac{x}{s})^n \in S^{-1}\alpha$

$\Rightarrow$ $\frac{x}{s} \in r(S^{-1}\alpha)$

DEFINICION 3.4.4

Sea A un anillo, el NILRADICAL DE A es la intersección de todos los ideales primos de A.

Y lo representamos por

$$N$$

COROLARIO 3.4.5

Si N es el nilradical de A, el nilradical de $S^{-1}A$ es $S^{-1}N$

DEMOSTRACION

Sea $\chi = \{P/\ P$ es un ideal primo de A, $P \cap S = \phi\}$

$= \{M/\ M$ es un ideal primo de A y $M \cap S \neq \phi\}$

$$N = (\bigcap_{P\in\chi} P) \cap (\bigcap_{M\in\lambda} M)$$

$$\Rightarrow \quad S^{-1}N = S^{-1}((\bigcap_{P\in\chi} P) \cap (\bigcap_{M\in A} M)$$

$$= S^{-1}(\bigcap_{P\in\chi} P) \cap S^{-1}(\bigcap_{M\in\lambda} M)$$

$$= (\bigcap_{P\in\chi} S^{-1}P) \cap (\bigcap_{M\in\lambda} S^{-1}M) \quad \text{por 3.4.3 (v)}$$

$$= \bigcap_{P \varepsilon \chi} S^{-1}P$$

luego

$$S^{-1}N \text{ es el nilradical de } S^{-1}A.$$

PROPOSICION 3.4.5

Si P es un ideal primo de A, los ideales primos del anillo local A_P estan en correspondencia biyectiva con los ideales primos de A contenidos en P.

DEMOSTRACION

Sea $s = A - P$

$S^{-1}T$ es primo en $S^{-1}A = A_P$

$\iff T \cap (A - P) = \phi$

$\iff T \subset P.$ y por 3.4.3 (iv)

se completa la prueba.

PROPOSICION 3.4.6

Sea M un A-módulo de generación finita, S un subconjunto de A multiplicativamente cerrado, entonces

$$S^{-1}(\text{Ann }(M)) = \text{Ann }(S^{-1}M)$$

DEMOSTRACION

Si es cierto para dos A-módulos M, N es cierto para M + N.

$$\begin{aligned} S^{-1}(\text{Ann}(M + N)) &= S^{-1}(\text{Ann}(M) \cap \text{Ann}(N) \text{ por } 2.3.7 \\ &= S^{-1}(\text{Ann}(M) \cap S^{-1}(\text{Ann}(N) \text{ por } 3.2.8 \\ &= \text{Ann}(S^{-1}M) \cap \text{Ann }(S^{-1}(N)) \end{aligned}$$

$$= Ann(S^{-1}(M) + S^{-1}(N) \text{ por } 2.3.7$$

$$= Ann(S^{-1}(M + N)) \text{ por } 3.2.8$$

Por tanto basta probar 3.4.5 para M generado por un sólo elemento.

Como M es de generación finita tenemos que

$$M \approx A/\alpha \text{ (como A-módulo) donde } \alpha = Ann(M)$$

$$S^{-1}(M) \approx S^{-1}(A/\alpha) \approx \frac{S^{-1}A}{S^{-1}\alpha} \text{ por } 3.2.8$$

Demostremos que

$$Ann\left(\frac{S^{-1}A}{S^{-1}\alpha}\right) = S^{-1}\alpha$$

$$Ann\left(\frac{S^{-1}A}{S^{-1}\alpha}\right) = \{\bar{a} \in \frac{S^{-1}A}{S^{-1}\alpha} \; / \; \bar{a}\,\frac{S^{-1}A}{S^{-1}\alpha} = S^{-1}\alpha\}$$

"$\subset$"

Sea $\bar{a} \in Ann\left(\frac{S^{-1}A}{S^{-1}\alpha}\right) \Rightarrow \bar{a}(\frac{a}{s} + S^{-1}\alpha) = S^{-1}\alpha, \; \forall \frac{a}{s} + S^{-1}\alpha \in \frac{S^{-1}A}{S^{-1}\alpha}$

$$\Rightarrow \bar{a}(\tfrac{1}{1} + S^{-1}\alpha) = S^{-1}\alpha$$

$$\Rightarrow \bar{a} + S^{-1}\alpha = S^{-1}\alpha$$

$$\Rightarrow \bar{a} \in S^{-1}\alpha$$

"$\supset$"

Sea $\frac{a}{s} \in S^{-1}\alpha$ y $\frac{a_1}{s_1} \in S^{-1}\alpha$

$$\frac{a}{s}\left(\frac{a_1}{s_1} + S^{-1}\alpha\right) = \frac{aa_1}{ss_1} + S^{-1}\alpha, \; aa_1 \in \alpha$$

$$= S^{-1}\alpha \quad , \quad \frac{aa_1}{ss_1} \varepsilon\, S^{-1}\alpha$$

luego

$$\frac{a}{s} \varepsilon \operatorname{Ann}\left(\frac{S^{-1}A}{S^{-1}\alpha}\right)$$

por lo tanto

$$\operatorname{Ann}\left(\frac{S^{-1}A}{S^{-1}\alpha}\right) = S^{-1}\alpha$$

de manera que

$$\operatorname{Ann}(S^{-1}M) = S^{-1}\alpha = S^{-1}(\operatorname{Ann}(M))$$

COROLARIO 3.4.7

Si N, P son submódulos de un A-módulo M y si P es de generación finita entonces

$$S^{-1}(N\colon P) = (S^{-1}N\colon S^{-1}P)$$

DEMOSTRACION

Como P es de generación finita, sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ el conjunto de generadores de P, es decir para todo $p \varepsilon P$

$$p = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i, \text{ con } a_i \varepsilon A,\ x_i \varepsilon P$$

Demostremos que $\frac{N + P}{N}$ es de generación finita

Sea $\bar{b} \varepsilon \frac{N + P}{N} \Rightarrow \bar{b} = (n + p) + N$, con $n \varepsilon N$

$\Rightarrow \bar{b} = p + N$

$\Rightarrow \bar{b} = (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) + N$

$\Rightarrow \bar{b} = (a_1x_1 + N) + (a_2x_2 + N) + \ldots + (a_nx_n + N)$

$\Rightarrow \bar{b} = a_1(x_1 + N) + a_2(x_2 + N) + \ldots + a_n(x_n + N)$

$$\Rightarrow \bar{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i + N) \text{ con } a_i \in A, x_i + N \in \frac{N + P}{N}$$

$\Rightarrow \{x_1 + N, x_2 + N, \ldots, x_n + N\}$ es un conjunto de generadores de $\frac{N + P}{N}$

luego

$\frac{N + P}{N}$ es de generación finita.

$$(N: P) = \operatorname{Ann}\left(\frac{N + P}{N}\right) \quad \text{por } 2.3.7$$

$$S^{-1}(N: P) = S^{-1}\left(\operatorname{Ann}\left(\frac{N + P}{N}\right)\right)$$

$$= \operatorname{Ann}\left(S^{-1}\left(\frac{N + P}{N}\right)\right) \quad \text{por } 3.4.6$$

$$= \operatorname{Ann}\left(\frac{S^{-1}(N + P)}{S^{-1}N}\right) \quad \text{por } 3.2.8$$

$$= \operatorname{Ann}\left(\frac{S^{-1}N + S^{-1}P}{S^{-1}N}\right) \text{por } 3.2.8$$

$$= (S^{-1}N: S^{-1}P) \quad \text{por } 2.3.7$$

PROPOSICION 3.4.8

Sea $A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos y α un ideal primo de A. Entonces α es la contracción de un ideal primo de B ssi $\alpha^{ec} = \alpha$

DEMOSTRACION

"$\Longrightarrow$"

Sea $\alpha = \beta^c = \beta^{cec}$ por 1.6.6

$$= (\beta^c)^{ec}$$

$$= \alpha^{ec}$$

"<=="

Sea $\alpha^{ec} = \alpha$, sea S la imagen de A-α en B.

Como $\alpha^e = \{m/\ m = \Sigma y_i f(x_i),\ x_i \varepsilon \alpha,\ y_i \varepsilon B\}$

$$S = \{y/\ y = f(z_i),\quad z_i \varepsilon \alpha\}$$

entonces $\alpha^e \cap S = \phi$

Por tanto por 3.4.3 la extención de α^e en $S^{-1}B$ es diferente - de $[1]$, por lo tanto es un ideal propio y está contenido en - un ideal maximal M de $S^{-1}B$ por 1.4.8.

Si β es la contracción de M en B entonces β es primo por --- 1.4.3

y $\alpha^e c\ \beta$ por 1.6.6

y $\beta \cap S = \phi$ por 3.4.3

$$\alpha = \alpha^{ec},\ \alpha^e c\ \beta \Rightarrow \alpha^{ec} c\ \beta^c$$

$$\Rightarrow \alpha\ c\ \beta^c$$

como $\beta \cap S = \phi$

Sea $q \varepsilon \beta \Rightarrow f^{-1}(q) \not\varepsilon\ A - \alpha$

$$\Rightarrow \beta^c \cap (A - \alpha) = \phi$$

$$\Rightarrow \beta^c\ c\ \alpha$$

luego

$$\alpha = \beta^c$$

C A P I T U L O I V

A P L I C A C I O N E S

PROPOSICION 4.1.1

Sea S un subconjunto multiplicativamente cerrado de un anillo A, y sea M un A-módulo con generación finita. Probar que $S^{-1}M = 0$ si y solo si existe $s \in S$ tq $sM = 0$

DEMOSTRACION

"=>"

Sean $m_1, \ldots, m_n$ generadores de M.

Como $S^{-1}M = 0 \Rightarrow \frac{m_1}{1} = \frac{0}{1}$ entonces $\exists s_1 \in S$ tq $s_1 m_1 = 0$

$$\frac{m_2}{1} = \frac{0}{1} \text{ entonces } \exists s_2 \in S \text{ tq } s_2 m_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{m_n}{1} = \frac{0}{1}$$

tomando $S = s_1 s_2, \ldots s_n$

$$\begin{aligned} s(\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_n m_n) &= s\alpha_1 m_1 + \ldots + s\alpha_n m_n = 0 \\ &= 0 + \ldots + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

luego

$$Sm = 0$$

"<="

Sea $s' \in S$ tq $s'M = 0$, sea $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$

$$\Rightarrow \frac{m}{s} = \frac{s'm}{s's} = \frac{0}{s's} = 0$$

$$\Rightarrow S^{-1}M = 0$$

DEFINICION 4.1.2

Sea A un anillo, llamaremos RADICAL DE JACOBSON DE A a la intersección de todos los ideales maximales de A.

Y lo denotaremos por

$$\mathcal{R}$$

Se puede caracterizar de la siguiente manera

PROPOSICION 4.1.3

$x \in \mathcal{R}$ si y solo si $1 - xy$ es una unidad en A, para todo $y \in A$.

PROPOSICION 4.1.4

Sea I un ideal de un anillo A, y sea $S = 1 + I$.

Probar que $S^{-1}I$ está contenido en el Radical de Jacobson de - A. $S^{-1}A$.

DEMOSTRACION

$S = 1 + I$

es multiplicativamente cerrado por 3.1.21

Sea $\frac{b}{s} \in S^{-1}I$ demostremos que $1 - (\frac{b}{s})(\frac{a1}{s1})$ es una unidad en $S^{-1}A$

$$1 - (\frac{b}{s})(\frac{a}{s_1}) = 1 - \frac{ba}{ss_1}$$
$$= \frac{ss_1 - ba}{ss_1}$$

como S es multiplicativamente cerrado $ss_1 \in S$

entonces $ss_1 = 1 + x$, con $x \in I$

ademas $ba \in I$, por ser I un ideal

entonces

$$\frac{ss_1 - ba}{ss_1} = \frac{1 + x + y}{ss_1} \text{ , } y = ba$$

luego

$$1 + (x+y) \in S, \text{ ya que } x + y \in I$$

y $1 - (\frac{b}{s})(\frac{a}{s_1})$ es una unidad en $S^{-1}A$

por lo tanto $\frac{b}{s} \in R_{S^{-1}A}$

$$y \ S^{-1}I \subset R_{S^{-1}A}$$

donde $R_{S^{-1}A}$ denota al radical de $S^{-1}A$.

PROPOSICION 4.1.5

Sea f: A $\longrightarrow$ $S^{-1}A$ un homomorfismo de anillos y S un conjunto - multiplicativamente cerrado de A, entonces f(S) es multiplicativamente cerrado de $S^{-1}A$.

DEMOSTRACION

$$f(S) = \{\tfrac{a}{1} \ / \ s \in S\}$$

sea $a,b \in f(S)$ $\Rightarrow a = \dfrac{s_1}{1}$, $b = \dfrac{s_2}{1}$

$$\Rightarrow ab = \frac{s_1 s_2}{1} \text{ , } s_1 s_2 \in S$$

$$\Rightarrow ab \in f(S)$$

PROPOSICION 4.1.6

Sea A un anillo, S,T subconjuntos multiplicativamente cerrados de A entonces ST es multiplicativamente cerrado en A.

DEMOSTRACION

$$ST = \{x \ / \ x = st,\ s \in S,\ t \in T\}$$

i) $1 \in ST$ ya que $1 = (1)(1)$, con $1 \in S$ $1 \in T$.

ii) sean $x, y \in ST \Rightarrow x = s_1 t_1$

$$y = s_2 t_2$$

$$\Rightarrow xy = s_1 t_1 \ s_2 t_2$$

$$= s_1 (t_1 s_2) t_2$$

$$= s_1 (s_2 \ t_1) \ t_2$$

$$= s_1 s_2 t_1 t_2$$

$$\Rightarrow xy = s\,t \quad \text{con } s = s_1 s_2$$

$$t = t_1 t_2$$

luego

ST es multiplicativamente cerrado de A.

PROPOSICION 4.1.7

Sea A un anillo, sean S,T dos subconjuntos multiplicativamente cerrados de A y sea U la imagen de T en $S^{-1}A$. Probar que los - anillos $(ST)^{-1}A$ y $U^{-1}(S^{-1}A)$ son isomorfos.

DEMOSTRACION

$$(ST)^{-1}A = \{\tfrac{a}{m} \ / \ a \in A,\ m \in ST\}$$

$$U^{-1}(S^{-1}A) = \{\tfrac{n}{u} \ / \ n \in S^{-1}A,\ u \in U\}$$

$$= \left\{ \frac{\frac{a}{s}}{\frac{t}{1}} \ / \ a \in A,\ s \in S,\ t \in T \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\frac{a}{st}}{1} \;/\; a \in A,\ st \in ST \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\frac{a}{m}}{1} \;/\; a \in A,\ m \in ST \right\}$$

sea

$$h: (ST)^{-1}A \longrightarrow U^{-1}(S^{-1}A)$$

$$\frac{a}{m} \longmapsto \frac{\frac{a}{m}}{1}$$

· h bien definida e inyectiva

Sean $\frac{a_1}{m_1} = \frac{a_2}{m_2} \iff \exists\ k \in ST$ tal que $k(m_2a_1 - m_1a_2) = 0$

$$\iff \frac{st}{s}(m_2a_1 - m_1a_2) = 0$$

$$\iff \frac{t}{1}(m_2a_1 - m_1a_2) = 0$$

$$\iff \frac{t}{1}\left(\frac{a_1}{m_1} - \frac{a_2}{m_2}\right) = 0, \text{ multiplicando por } \frac{1}{m_1m_2}$$

$$\iff \frac{\frac{a_1}{m_1}}{1} = \frac{\frac{a_2}{m_2}}{1}$$

$$\iff h\left(\frac{a_1}{m_1}\right) = h\left(\frac{a_2}{m_2}\right)$$

· h es homomorfismo

$$h\left(\frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2}\right) = h\left(\frac{m_2a_1 + m_1a_2}{m_1m_2}\right)$$

$$= \frac{\frac{m_2a_1 + m_1a_2}{m_1m_2}}{1}$$

$$= \frac{\frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2}}{1}$$

$$= h\left(\frac{a_1}{m_1}\right) + h\left(\frac{a_2}{m_2}\right)$$

$$h\left(\alpha\left(\frac{a_1}{m_1}\right)\right) = h\left(\frac{\alpha a}{m}\right)$$

$$= \frac{\frac{\alpha a}{m}}{1}$$

$$= \frac{\alpha\left(\frac{a}{m}\right)}{1}$$

$$= \alpha\left(\frac{\frac{a}{m}}{1}\right)$$

$$= \alpha\, h\left(\frac{a}{m}\right)$$

PROPOSICION 4.1.8

Sea $f: A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos y sea S un conjunto multiplicativamente cerrado de A.

Sea $T = f(S)$. Probar que $S^{-1}B$ y $T^{-1}B$ son isomorfos como $S^{-1}A$--módulos.

DEMOSTRACION

B es un A-módulo, en el producto definido así:

$$\begin{aligned} \odot:\ & A \times B \longrightarrow B \\ & (a,b) \longmapsto a \odot b = f(a)b \end{aligned}$$

· Demostremos que $\odot$ esta bien definida

$$\left.\begin{aligned} \text{sean } a &= a' \\ b &= b' \end{aligned}\right. \Rightarrow f(a) = f(a')$$

$$\Rightarrow f(a)b = f(a')b'$$

$$\Rightarrow a \odot b = a' \odot b'$$

- $(A,+)$ es un grupo abeliano.
- $a \odot (x + y) = f(a)(x + y)$

$$= f(a)x + f(a)y$$

$$= a \odot x + a \odot y$$

- $(a + b) \odot x = f(a + b)x$

$$= (f(a) + f(b))x$$

$$= f(a)x + f(b)x$$

$$= a \odot x + b \odot x$$

- $(ab) \odot x = f(ab)x$

$$= f(a)f(b)x$$

$$= f(a)(f(b)x)$$

$$= a \odot (b \odot x)$$

- $1 \odot x = f(1)x$

$$= 1x$$

$$= x$$

$S^{-1}B$ es un $S^{-1}A$-módulo con el producto siguiente:

$\odot': \quad S^{-1}A \times S^{-1}B \longrightarrow S^{-1}B$

$$\left(\frac{a}{s_1}, \frac{b}{s_2}\right) \rightsquigarrow \frac{a}{s_1} \odot' \frac{b}{s_2} = \frac{f(a)b}{s_1 s_2}$$

- $(S^{-1}B,+)$ es un grupo abeliano.
- $\odot'$ está bien definido

sean $\dfrac{a}{s_1} = \dfrac{a'}{s_3} \Rightarrow \exists\ t \in S$ tq $t(s_3 a - s_1 a') = 0$

$\dfrac{b}{s_2} = \dfrac{b'}{s_4} \Rightarrow \exists\, t_1 \in S$ tq $t(s_4 b - s_2 b') = 0$

$t(s_3 a - s_1 a') = 0 \Rightarrow f(t)(f(s_3)f(a) - f(s_1)f(a')) = 0$

$$t_1(s_4b - s_2b') = 0 \Rightarrow f(t_1)(f(s_4)b - f(s_2)b') = 0$$

tenemos entonces las siguientes ecuaciones

1) $f(t)f(s_3)f(a) - f(t)f(s_1)f(a') = 0$

2) $f(t_1)f(s_4)b - f(t_1)f(s_2)b' = 0$

multiplicando (1) por $f(t_1)f(s_2)b'$ y (2) por $f(t)f(s_3)f(a)$ tenemos:

1') $f(t_1)f(t)f(s_2s_3)f(a)b' - f(t_1)f(t_2)f(s_1s_2)f(a')b' = 0$

2') $f(t_1)f(t)f(s_3s_4)f(a)b - f(t_1)f(t_2)f(s_2s_3)f(a)b' = 0$

sumando 1') y 2') tenemos

$$f(t_1)f(t)f(s_3s_4)f(a)b - f(t_1)f(t)f(s_1s_2)f(a')b' = 0$$

$$f(t_1)f(t)(f(s_3s_4)f(a)b - f(s_1s_2)f(a')b') = 0$$

$$f(t_1t)(f(s_3s_4)f(a)b - f(s_1s_2)f(a')b') = 0$$

como $t_1t \in S$ tenemos que $f(t_1t) \in T$

entonces $t_1t \odot ((s_3s_4) \odot f(a)b - (s_1s_2) \odot f(a')b') = 0$

tenemos que

$$\frac{f(a)b}{s_1s_2} = \frac{f(a')b'}{s_3s_4}$$

$$\cdot \ \frac{a}{s_1} \odot' \left(\frac{b_1}{s_2} + \frac{b_2}{s_3}\right) = \frac{a}{s_1} \odot' \left(\frac{s_3b_1 + s_2b_2}{s_1s_3}\right)$$

$$= \frac{f(a)(s_3b_1 + s_2b_2)}{s_1s_2s_3}$$

$$= \frac{s_3f(a)b_1 + s_2f(a)b_2}{s_1s_2s_3}$$

$$= \frac{s_3 f(a) b_1}{s_1 s_2 s_3} + \frac{s_2 f(a) b_2}{s_1 s_2 s_3}$$

$$= \frac{f(a) b_1}{s_1 s_2} + \frac{f(a) b_2}{s_1 s_3}$$

$$= \frac{a}{s_1} \odot' \frac{b_1}{s_2} + \frac{a}{s_1} \odot' \frac{b_2}{s_3}$$

- $$\left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}\right) \odot' \frac{b}{s_3} = \left(\frac{a_1 s_3 + a_2 s_1}{s_1 s_2 s_3}\right) \odot' \frac{b}{s_3}$$

$$= \frac{f(a_1 s_2 + a_2 s_1) b}{s_1 s_2 s_3}$$

$$= \frac{s_2 f(a_1) b_1}{s_1 s_2 s_3} + \frac{s_1 f(a_2) b}{s_1 s_2 s_3}$$

$$= \frac{a_1}{s_1} \odot' \frac{b}{s_3} + \frac{a_2}{s_2} \odot' \frac{b}{s_3}$$

- $$\left(\frac{a_1 a_2}{s_1 s_3}\right) \odot' \frac{b}{s_3} = \frac{f(a_1 a_2) b}{s_1 s_2 s_3}$$

$$= \frac{f(a_1) f(a_2) b}{s_1 s_2 s_3}$$

$$= \frac{f(a_1)}{s_1} \left(\frac{f(a_2) b}{s_2 s_3}\right)$$

$$= \frac{f(a_1)}{s_1} \left(\frac{a_2}{s_2} \odot' \frac{b}{s_3}\right)$$

$$= \frac{a_1}{s_1} \odot' \left(\frac{a_2}{s_2} \odot' \frac{b}{s_3}\right)$$

- $$1 \odot' x = f(1) x$$

$$= 1x$$

$$= x$$

$T^{-1}B$ es un $S^{-1}A$-módulo con el producto siguiente

$\odot$": $S^{-1}A \times T^{-1}B \longrightarrow T^{-1}B$

$$\left(\frac{a}{s_1}, \frac{b}{f(s_2)}\right) \leadsto \frac{a}{s_1} \odot'' \frac{b}{f(s_2)} = \frac{f(a)\cdot b}{f(s_1)f(s_2)}$$

· $(T^{-1}B,+)$ es un grupo abeliano

Semejante a como se probó para $\odot'$.

Sea

$$S^{-1}B = \{\frac{b}{s} \ / \ b \in B, \ s \in S\}$$

$$T^{-1}B = \{\frac{b}{t} \ / \ b \in B, \ t \in T\}$$

$$= \{\frac{b}{f(s)} \ / \ b \in B, \ s \in S\}$$

definamos

$$h: S^{-1}B \longrightarrow T^{-1}B$$

$$\frac{b}{s} \leadsto \frac{b}{f(s)}$$

· h bien definida e inyectiva

$$\frac{b_1}{s_1} = \frac{b_2}{s_2} \iff \exists s \in S \text{ tq } s \odot (s_2 \odot b_1 - s_1 \odot b_2) = 0$$

$$\iff s \odot (f(s_2)b_1 - f(s_1)b_2) = 0$$

$$\iff f(s)(f(s_2)b_1 - f(s_1)b_2) = 0$$

$$\iff \frac{b_1}{f(s_1)} = \frac{b_2}{f(s_2)}$$

· h es un homomorfismo de $S^{-1}A$-módulos

$$\therefore h\left(\frac{s_2b_1 + s_1b_2}{s_1s_2}\right) = \frac{f(s_2)b_1 + f(s_1)b_2}{f(s_1s_2)}$$

$$= \frac{f(s_2)b_1 + f(s_1)b_2}{f(s_1)f(s_2)}$$

$$= \frac{f(s_2)b_1}{f(s_1)f(s_2)} + \frac{f(s_1)b_2}{f(s_1)f(s_2)}$$

$$= \frac{b_1}{f(s_1)} + \frac{b}{f(s_2)}$$

$$= h\left(\frac{b_1}{s_1}\right) + h\left(\frac{b_2}{s_2}\right)$$

· sean $\frac{a}{s_1} \varepsilon S^{-1}A$; $\frac{b}{s_2} \varepsilon S^{-1}B$

$$h\left(\frac{a}{s_1} \odot \frac{b}{s_2}\right) = h\left(\frac{f(a)b}{s_1s_2}\right)$$

$$= \frac{f(a)b}{f(s_1s_2)}$$

$$= \frac{f(a)b}{f(s_1)f(s_2)}$$

$$= \frac{a}{s_1} \odot'' \frac{b}{f(s_2)}$$

$$= \frac{a}{s_1} \odot'' h\left(\frac{b}{s_2}\right)$$

. h es sobreyectiva por la forma en que esta definida.

PROPOSICION 4.1.9

Sea A un anillo. Supóngase que para cada ideal primo P el anillo local A_P no tiene elemento milpotentes $\neq 0$. Entonces A no tiene elementos nilpotentes.

DEMOSTRACION

Sea $x \varepsilon A$, $x \neq 0$, tq $x^n = 0$

sea $\alpha = \mathrm{Ann}(x)$, α es ideal $\neq 1$

entonces $\alpha \varepsilon M$, M ideal maximal por 1.4.8

sea $\frac{x}{1} \varepsilon A_M$ entonces $\frac{x^n}{1} = 0$ por tanto

$\frac{x}{1} = 0$, pero eso no es posible ya que

A_M no tiene elementos nilpotentes $\neq 0$.

PROPOSICION 4.1.10

Sea A un anillo $\neq 0$ y sea Σ el conjunto de todos los conjuntos mulplicativamente cerrados S de A tales que $0 \notin S$. Probar que

a) Σ tiene elementos maximales

b) $S \varepsilon \Sigma$ es maximal si y solo si A - S es un ideal primo minimal de A.

DEMOSTRACION

Como la demostración de la parte (a) es una aplicación del lema de Zorn, enunciaremos previamente este lema.

LEMA 4.1.11 (LEMA DE ZORN)

Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si cada cadena (conjunto total o linealmente ordenado) M en A tiene una cota superior en A, entonces A tiene, por lo menos un elemento maximal.

Demostremos ahora la proposición 4.1.11

a) Σ tiene elementos maximales.

Sea $\Sigma = \{S \subset A /\ \ 0 \notin S,$ S multiplicativamente cerrado$\}$

$\Sigma \neq \Phi$ ya que $\{1\} \in \Sigma$ y $\{1\}$ es multiplicativamente cerrado de A.

Ordenemos Σ por la relación "$\subset$"

Sea $M = (P_i)_{i \in I}$ una cadena en Σ de manera que para cada par de indices $i_1 \in I$ o $i_2 \in I$

$$P_{i_1} \subset P_{i_2} \quad \text{o} \quad P_{i_2} \subset P_{i_1}$$

sea $K = \bigcup_{i \in I} P_i$, demostremos que K es multiplicativamente ce-- rrado de A.

a) $1 \in K$ ya que $1 \in P_i\ \forall i$

b) sea $x, y \in K \Rightarrow x \in P_{i_1}$ y $y \in P_{i_2}$, para $i_1, i_2 \in I$

como estamos en una cadena

$$x, y \in P_{i_1} \quad \text{ó} \quad x, y \in P_{i_2}$$

Por ser los P multiplicativamente cerrados

$$xy \in P_{i_1} \quad \text{ó} \quad xy \in P_{i_2}$$

entonces $xy \in \bigcup_{i \in I} P_i$

Por lo que K es multiplicativamente cerrado de A.

$0 \notin K$ ya que $0 \notin P_i \quad \forall_{i \in I}$

S es una cota superior en Σ, ya que para un ideal $P_i \in M$, $P_i \subset \bigcup_{i \in I} P_i$, entonces por el lema de Zorn Σ tiene -- elemtos maximales.

b) $S \varepsilon \Sigma$ es maximal si y solo si $A - S$ es un ideal primo mini-- mal de A.

"=>"

Sea P ideal primo de A tq $P \subset A - S$

=> $S \subset A - P$, $A - P$ es multiplicativamente cerrado de A.

=> $S = A - P$ por hipotesis

como $S = A - P$ => $A - S = A - (A - P)$

$= P$

luego

$A - S$ es minimal

"<="

Sea $S' \varepsilon \Sigma$ tal que $S \subset S'$.

a) como $S \subset S'$ => $A - S' \subset A - S$

b) S' multiplicativamente cerrado => $A - S'$ es primo por 3.1.12

=> $A - S \subset A - S'$ por ser $A - S$ primo minimal de A.

por a y b tenemos $A - S = A - S'$

de donde $S = A'$

DEFINICION 4.1.12

Un conjunto multiplicativamente cerrado S de un anillo A, se - dice que es saturado si

$$ab \varepsilon S \iff a \varepsilon S \text{ y } b \varepsilon S$$

PROPOSICION 4.1.13

S es saturado ssi $A - S$ es una unión de ideales primos.

DEMOSTRACION

Sea $x \varepsilon A - S$ se tiene que $[x] \subseteq A - S$

ya que $kx \varepsilon A - S \quad \forall k \varepsilon A$.

sea $\delta = \{I \subseteq A - S \;/\; I \text{ es ideal y } [x] \subseteq I\}$

demostremos que δ tiene elementos maximales

$$\delta \neq \Phi \quad \text{ya que } [x] \varepsilon \delta$$

ordenemos δ por la relación de "c"

Sea $M = (P_i)_{i \varepsilon I}$ una cadena en δ de manera que para cada par de índices $i_1 \varepsilon I$ e $i_2 \varepsilon I$

tenemos que $P_{i_1} \subset P_{i_2}$ ó $P_{i_2} \subset P_{i_1}$

sea $K = \bigcup_{i \varepsilon I} P_i$ demostremos que K es un ideal de A.

- $K \neq 0$, ya que como al menos $[x] \varepsilon \delta$

  entonces

$$x \varepsilon \bigcup_{i \varepsilon I} P_i$$

- sea $x, y \varepsilon K \Rightarrow x \varepsilon P_{i_1}$ y $y \varepsilon P_{i_2}$

  como estamos en una cadena

  $x, y \varepsilon P_{i_1}$ o $x, y \varepsilon P_{i_2}$

  como los P_i son ideales tenemos que

$$x - y \varepsilon P_i \quad \text{ó} \quad x - y \varepsilon P_{i_2}$$

  entonces

$$x - y \varepsilon \bigcup_{i \varepsilon I} P_i$$

• $AK \subset K$

Sea $a \in A$, $y \in K \Rightarrow y \in P_j$, $j \in I$

$\Rightarrow ay \in P_j$, P_j ideal

$\Rightarrow ay \in K$

• como $[x] \subset P_i \quad \forall i \in I$

tenemos que $[x] \subset \bigcup_{i \in I} P_i$

K es cota superior en δ ya que $P_i \in M$, $P_i \subset \bigcup$ entonces por

el lema de Zorn δ tiene elementos maximales.

Sea I_x maximal en δ. Probemos que I_x es primo

Sea $ab \in I_x$ y supongamos que $a,b \notin I_x$.

En este caso $I'_x = I_x + [a] \supsetneq I_x$

y también $I''_x = I_x + [b] \supsetneq I_x$

luego $I'_x \cap S \neq \Phi$ y $I''_x \cap S \neq \Phi$

sean $\alpha_1 + \beta_1 a \in I'_x \cap S$, $\alpha_2 + \beta_2 b \in I''_x \cap S$

$\Rightarrow (\alpha_1 + \beta_1 a)(\alpha_2 + \beta_2 b) \in S$

$\Rightarrow \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 b + \alpha_2\beta_1 a + \beta_2 ab \in I_x$

$\Rightarrow I_x \cap S \neq \Phi$, lo cual no puede ser

luego

I_x es primo; ademas $\bigcup I_x \subseteq A - S$

por lo tanto

$$A - S = \bigcup_{x \in A-S} I_x$$

"<=="

Sea $\mathcal{F} = \{P \subseteq A \ / \ P \text{ primo}\}$ y sea $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ tq

$$A - S = \bigcup_{P \varepsilon \mathcal{F}'} P$$

Sea $xy \varepsilon S \Rightarrow xy \not\varepsilon P, \quad \forall P \varepsilon \mathcal{F}'$

$\Rightarrow x \not\varepsilon P, \quad y \varepsilon P, \quad \forall P \varepsilon \mathcal{F}'$ porque son ideales primos

$\Rightarrow x \varepsilon S, \quad y \varepsilon S$

PROPOSICION 4.1.14

Sea S un subconjunto multiplicativamente cerrado de un anillo A, existe un único subconjunto multiplicativamente cerrado saturado minimo $\bar{S}$ que contine a S, y tal que $\bar{S}$ es el complemento en A de la unión de los ideales primos que no cortan a S.

DEMOSTRACION

Sea $\mathcal{F} = \{P \subseteq A \ / \ P \text{ es primo}\}$ y sea $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ tq

$$A - S = \bigcup_{P \varepsilon S'} P$$

Como la intersección de saturados es saturado.

entonces

$$\bar{S} = \bigcap_{\substack{K \supseteq S \\ K \text{ saturado}}} K$$

Ahora bien, si $S' = A - \bigcup_{P \cap S = \Phi} P \iff A - S' = \bigcup_{P \cap S = \Phi} P \Rightarrow S'$ es saturado por 3.1.16

Como además $(\bigcup_{P \cap S = \Phi} P) \cap S = \Phi$ entonces $S \subseteq S' \Rightarrow \bar{S} \subset S'$

Por otro lado como $\bar{S}$ es saturado

$$A - \bar{S} = \bigcup_{P \varepsilon F'} P \Rightarrow S \cap P = \phi \ \forall P \varepsilon f'$$

de aquí que

$$A - \bar{S} \subseteq A - S' \Rightarrow S' \subset \bar{S}$$

luego

$$S' = \bar{S}$$

OBSERVACION 4.1.15

Al conjunto $\bar{S}$ de la proposición 4.1. se le denomina SATURACION DE S.

PROPOSICION 4.1.16

Sean S,T subconjuntos multiplicativamente cerrados de A, tales que $S \subset T$ sea Φ: $S^{-1}A \to T^{-1}A$ el homomorfismo que aplica cada $a/s \varepsilon S^{-1}A$ a a/s considerado como un elemento de $T^{-1}A$.

Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

i) Φ es biyectiva

ii) Para cada $t \varepsilon T$, $t/1$ es una unidad en $S^{-1}A$

iii) Para cada $t \varepsilon T$, existe $x \varepsilon A$ tal que $xt \varepsilon S$

iv) T está contenido en la saturación de S

v) Cada ideal primo que corta T corta también S.

DEMOSTRACION

Probemos

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[d, Rightarrow] & & v \arrow[dll, Rightarrow] \\
ii \arrow[r, Rightarrow] & iii \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ul, Rightarrow] & iv \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

i) => ii)

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \Phi^{-1}\left(\frac{t}{1}\,\frac{1}{t}\right)$$

$$= \Phi^{-1}\left(\frac{t}{1}\right)\,\Phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{t}{1}\,\Phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)$$

ii) => iii)

Como $\frac{t}{1}$ es una unidad en $S^{-1}A$

$$\Rightarrow \frac{t}{1}\,\frac{a}{s} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{t\,a}{s} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \exists s' \in S \quad tq \quad (t\,a - s)\,s' = 0$$

$$\Rightarrow t\,a\,s' - s\,s' = 0$$

$$\Rightarrow t\,as' = s.s'$$

iii) => iv)

Sea $m \in T \Rightarrow \exists x \in A \quad tq \quad x\,m \in S$

$$\Rightarrow x\,m \in \bar{S}$$

$$\Rightarrow x \in \bar{S} \quad y \quad m \in \bar{S}$$

iv) => v)

$T \subset \bar{S} \iff T \subset A - \bigcup_{P \cap S = \Phi} P$, P ideal primo

$\iff \forall P$, primo, $P \cap S = \Phi \Rightarrow P \cap T = \Phi$

$\iff \forall P$, primo, $P \cap S \neq \Phi \Rightarrow P \cap S \neq 0$

v) $\Rightarrow$ ii)

Sea $t \in T$ y supongamos que $t/1$ no es una unidad entonces existe un maximal en $S^{-1}A$ que contiene **a** $t/1$, obtenemos así un primo P que no corta S y sin embargo $t \in P$, lo que es una contradicción.

iii) $\Rightarrow$ i)

Φ es inyectiva por la forma en que está definida.

Si $\Phi(a/s) = \Phi(a'/s')$ entonces $a/s = a'/s'$ en $T^{-1}A$

luego existe $t \in T$ tal que $t(s'a - sa') = 0$.

Sea $x \in A$ tal que $xt \in S$

$\Rightarrow xt(s'a - sa') = 0$ en $xt \in S$

$\Rightarrow a/s = \frac{a'}{s'}$ con $S^{-1}A$

PROPOSICION 4.1.17

El conjunto S_o de todos los no divisores de cero en A es un conjunto multiplicativamente cerrado saturado de A.

DEMOSTRACION

i) $S_o \neq \Phi$ ya que $1 \in S_o$

ii) Sean $x, y \in S_o \iff xz \neq 0,\ \forall z \in A,\ z \neq 0$

$$yz \neq 0,\ \forall z \in A,\ z \neq 0$$

$$\iff xzyz \neq 0,\ \forall z \in A,\ z \neq 0$$

$$\iff xyzz \neq 0,\ \forall z \in A,\ z \neq 0$$

$$\iff xyz \neq 0,\ \forall z \in A,\ z \neq 0$$

$$\iff xy \in S_o$$

luego

S_o es multiplicativamente cerrado saturado.

PROPOSICION 4.1.18

Sea D el conjunto de los divisores de cero en A entonces D es una unión de ideales primos

DEMOSTRACION

Como $D = A - S_o$ y S_o es saturado entonces D es una unión de ideales primos por 4.1.13

PROPOSICION 4.1.19

El anillo $S_o^{-1}A$ se denomina ANILLO TOTAL DE FRACCIONES DE A. - Probar que

i) S_o es el mayor subconjunto multiplicativamente cerrado de A para el cual el homomorfismo $A \longrightarrow S_o^{-1}A$ es inyectivo.

ii) Cada elemento en $S_o^{-1}A$ es divisor de cero o una unidad.

iii) Cada anillo en el que cada unidad es un divisor de cero - es igual a su anillo total de fracciones (es decir $A \longrightarrow S_o^{-1}A$ es biyectiva)

DEMOSTRACION

i) Veamos que $A \longrightarrow S_o^{-1}A$ es inyectiva

$a/1 = a'/1 \Rightarrow \exists s \in S_o$ tq $s(a - a') = 0$

como s no es un divisor de cero

$a - a' = 0 \Rightarrow a = a'$

Sea S multiplicativamente cerrado tq $A \longrightarrow S^{-1}$.. es inyectivo, a demostrar que todo elemento de S es no divisor de - cero.

Dado $s \varepsilon S$, si $\exists a \varepsilon A$ tal que $s a = 0$, entonces

$\frac{a}{1} = \frac{0}{1}$, pero como $A \longrightarrow S^{-1}A$ es inyectivo $a = 0$

Sea $a/s \varepsilon S_o^{-1}A$ no divisor de cero, entonces afirmamos que $a \varepsilon S_o$, ya que de lo contrario $\exists b \varepsilon A$, $b \neq 0$ tal que $a b = 0$, luego

$$\frac{a}{s}\frac{b}{1} = 0 \text{ y } \frac{b}{1} \neq 0, \text{ porque de lo contrario}$$

$\exists s \varepsilon S_o$, $s b = 0$, y contradecimos el hecho de que S_o no tiene divisores de cero .

luego $\frac{a}{s} \varepsilon S^{-1}A \Rightarrow \frac{a}{s}$ es una unidad.

iii) A demostrar que en este caso $A \longrightarrow S_o^{-1}A$ es biyectiva.

Por i) es inyectivo y como cada elemento $s \varepsilon S_o$ es unidad, entonces dado $\frac{a}{s} \varepsilon S_o^{-1}A$ el elemento $as^{-1} \varepsilon A$ y ademas

$$f(a s^{-1}) = \frac{a}{s}$$

DEFINICION 4.1.20

Sea A un dominio de integridad y M un A-módulo un elemento - $s \varepsilon M$ es un elemento de torsión de M si $Ann(x) \neq 0$, es decir si x es anulado por algún elemento no nulo de A.

PROPOSICION 4.1.21

Sea A un dominio de integridad y M un A-módulo probar que los elementos de torsión de M forman un submódulo de M.

DEMOSTRACION

Sea $F = \{x \in M \ / \ x$ es un elemento de torsión de $M\}$

i) $F \neq \Phi$ ya que $0 \in F$

ii) Sea $x, y \in F \Rightarrow \exists a_1, a_2 \in A,\ a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$ tq

$$a_1 x = 0$$

$$a_2 y = 0$$

$$\Rightarrow \ - a_2 y = 0$$

$$\Rightarrow \ a_2 a_1 x = 0$$

$$-a_1 a_2 y = 0$$

$$\Rightarrow \ a_2 a_1 x - a_1 a_2 y = 0$$

$$\Rightarrow \ a_1 a_2 x - a_1 a_2 y = 0$$

$$\Rightarrow \ a_1 a_2 (x - y) = 0 \ ,\ a_1 a_2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \ x - y \in F$$

$AF \subset F$

Sea $x \in A,\ m \in F \Rightarrow \exists a \in A,\ a \neq 0$ tq $m a = 0$

$$\Rightarrow \ x m a = 0$$

$$\Rightarrow \ x m \in F$$

DEFINICION 4.1.22

El submódulo formado por los elementos de torsión de M se denomina el SUBMODULO DE TORSION DE M y lo denotaremos por $T(M)$.

OBSERVACION 4.1.23

Si $T(M) = 0$ se dice que el módulo M es sin torsión.

PROPOSICION 4.1.24

Sea A un dominio de integridad, demostrar que

i) Si M es un A-módulo cualquiera entonces $M/T(M)$ es sin torsión.

ii) Si $f: M \longrightarrow N$ es un homomorfismo de módulos, entonces $f(T(M)) \subseteq T(N)$

iii) Si $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ es una sucesión exacta entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow T(M') \xrightarrow{f'} T(M) \xrightarrow{g'} T(M'') \text{ es exacta.}$$

DEMOSTRACION

i) Sea $a \in T(\frac{M}{T(M)}) \Rightarrow a = m + T(M),\ \exists \alpha \neq 0$

$$\text{tq } \alpha m + T(M) = T(M)$$

$$\Rightarrow \exists \beta \neq 0 \quad \text{tq} \quad (\beta\alpha)m \neq 0$$

$$\beta\alpha \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad m \in T(M)$$

ii) Sea $m \in f(T(M)) \Rightarrow m = f(x)$, para algún $x \in T(M)$

como $x \in T(M)$, $\exists a \in A,\ a \neq 0$

tq $a x = 0$

$$\Rightarrow 0 = f(a x)$$

$$\Rightarrow 0 = a f(x)$$

$$\Rightarrow 0 = a m$$

$$\Rightarrow m \in T(N)$$

iii) Como $g' \circ f' = g \circ f = 0$ tenemos que $\operatorname{Im} f' \subset \ker g'$.

Probemos que ker $g' \subset T(M)$

$x \in \ker g' \subseteq T(M)$, $g(x) = 0$

$\Rightarrow \exists y \in M'$ tq $f(y) = x$, pero como

$x \in T(M) \Rightarrow \exists \alpha \neq 0$ tq $\alpha x = 0$

$\Rightarrow \alpha f(y) = \alpha x = 0$

$\Rightarrow f(\alpha y) = 0$

$\Rightarrow \alpha y = 0$, por ser f inyectivo

$\Rightarrow y \in T(M)$

PROPOSICION 4.1.25

Sea S un subconjunto multiplicativamente cerrado en un dominio de integridad. Probar que

$$T(S^{-1}M) = S^{-1}(TM)$$

DEMOSTRACION

"$\subset$"

Sea $m/s \in T(S^{-1}M) \Rightarrow \exists \dfrac{a}{s_1} \neq \dfrac{0}{1}$ tq $\dfrac{a}{s_1}\dfrac{m}{1} = \dfrac{0}{1}$

$\Rightarrow \exists s_2 \in S$ tq $s_2(a\,m) = 0$

$\Rightarrow (s_2 a)m = 0$

pero $s_2 a \neq 0 \Rightarrow m \in T(M)$

$\Rightarrow m/s \in S^{-1}T(M)$

"$\supset$"

$m/s \in S^{-1}T(M) \Rightarrow m \in T(M)$

$\Rightarrow \exists a \in M,\ a \neq 0$ tq $am = 0$

$\Rightarrow \dfrac{a}{1} \neq 0,\ \dfrac{a}{1} \in S^{-1}A$ y ademas

$$\frac{a}{1}\frac{m}{s} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m/s \in T(S^{-1}M)$$

PROPOSICION 4.1.26

Sea A un dominio de integridad, M un A-módulo entonces las siguientes proposiciones son equivalentes

i) M es sin torsión

ii) M_P es sin torsión para todo ideal primo P

iii) $M_{\mathcal{M}}$ es sin torsión para todo ideal maximal $\mathcal{M}$

DEMOSTRACION

i) $\Rightarrow$ ii)

$$T(M) = 0 \Rightarrow (TM)_P = 0 \text{ por } 3.3.2$$

$$\Rightarrow T(M_P) = 0$$

$$\Rightarrow M_P \text{ es sin torsión}$$

ii) $\Rightarrow$ iii) Ya que todo ideal maximal es primo

iii) $\Rightarrow$ i)

Sea $x \in T(M)$, $x \neq 0 \Rightarrow \exists\, \mathcal{M}$ maximal tal que

$\mathrm{Ann}(x) \subseteq \mathcal{M}$ por 1.4.8

Consideremos $S = A - \mathcal{M}$ y sea $(T(M))_{\mathcal{M}}$

$\Rightarrow \frac{x}{1} \in (T(M))_{\mathcal{M}} = T(M_{\mathcal{M}})$

$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{0}{1}$

$\Rightarrow \exists\, \alpha \in A - \mathcal{M}$ tq $\alpha x = 0$

y esto contradice el hecho que ann(x) $\subseteq$ $\mathcal{M}$

PROPOSICION 4.1.27

Sean M un A-módulo, I un ideal de A.

Se supone que $M_{\mathcal{M}} = 0$ para todos los ideales maximales $\mathcal{M} \supseteq$ I.

Entonces M = IM

DEMOSTRACION

Para el $\frac{A}{I}$ -Módulo $\frac{M}{IM}$ se cumple que

$$(M/IM)_{\mathcal{M}} \cong \frac{M_{\mathcal{M}}}{(IM)_{\mathcal{M}}} = 0 \ , \quad \text{por } 3.2.8$$

Para todo maximal $\mathcal{M}$ de A/I.

$$\frac{M}{IM} = 0 \quad \text{por } 3.3.2$$

$$\Rightarrow \quad M = IM$$

B I B L I O G R A R I A

M.F. ATIYAH, I.G. MAC DONALD / REVERTE

"Introducción al Algebra Conmutativa"

N. BOURBAKI / HERNANN

"Algebre Conmutative"

SERGE LANG / AGUILAR

"Algebra"

SZE - TSEN HU / VICENS VIVES

"Introducción al Algebra Homologica"

ENZO R. GENTILE / MONOGRAFIA O.E.A

" Estructuras Algebraicas, II"