

86-005208

UES BIBLIOTECA CENTRAL



(INVENTARIO: 10117968)

Universidad de El Salvador

Facultad de Ingeniería y Arquitectura

Departamento de Matemática

REDES DE TRANSPORTE

Trabajo de graduación

presentado por

AMADEO ARTEMIO CERNA CORTEZ

previo a la opción del título de

LICENCIADO EN MATEMÁTICA



— ENERO 1984 —

San Salvador

El Salvador

Centro América

T
519.72
C415r

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

R E C T O R

DR. MIGUEL ANGEL PARADA

SECRETARIO GENERAL

DRA. ANA GLORIA CASTANEDA DE MONTOYA

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

D E C A N O

ING. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

SECRETARIO INTERINO

ING. MAURICIO ARTURO ORELLANA

JEFE DE DEPARTAMENTO

LIC. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

TRABAJO DE GRADUACIÓN

ASESOR : ING. CARLOS MAURICIO CANJURA

DEDICATORIA

- A mis Padres : Amadeo Artemio Cerna Arriola
Marta Cortez de Cerna.
- A mi Esposa : Gloria.
- A mis Hijos : Wendy y Temitó.
- A mi Asesor : Quien me incentivó y
orientó apropiadamente en
este trabajo.
- A mis Profesores : Quienes ayudaron en mi for
mación profesional.

I N T R O D U C C I O N

La teoría de las redes de transporte es reciente y aunque se han obtenido importantes resultados, con toda seguridad se harán numerosos progresos en este campo. Con el presente trabajo espero incentivar a futuros graduandos a orientar sus investigaciones en esta rama de la programación lineal y sus múltiples aplicaciones en la vida productiva de la nación.

En el Capítulo I, por considerarlo de vital importancia, aparecen Elementos de Teoría de grafos, que constituyen la base que soporta a la Teoría de las Redes de Transporte.

El Capítulo II está dedicado al Problema del Transporte, usando el Método del Simplex; para que en el Capítulo III se adapte este Método para resolver dicho problema.

Los Capítulos IV y V constituyen la médula del presente trabajo; ya que en ellos estudiaremos las Redes de Transporte y dos problemas relacionados con ellas: el problema del camino de longitud minimal y el del flujo de valor maximal.

Deseo expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas cuyo constante estímulo, inestimable ayuda y paciente colaboración hicieron posible la realización de este trabajo.

II

I N D I C E

Página

CAPITULO I

ELEMENTOS DE TEORIA DE GRAFOS

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Definiciones Generales | 1 |
| 1.2 | Caminos y Circuitos - Cadenas y Ciclos | 6 |
| 1.3 | Matriz de Incidencia en las Aristas, Arboles..... | 10 |

CAPITULO II

EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE (METODO DEL SIMPLEX)

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Definiciones y Propiedades Fundamentales | 18 |
| 2.2 | Grafo G asociado al Problema | 22 |
| 2.3 | Matriz de los coeficientes del Sistema | 23 |
| 2.4 | Propiedades Algebraicas de las Bases | 31 |
| 2.5 | Tabla de Transporte y Grafo Γ Asociado | 33 |
| 2.6 | Propiedades Gráficas de las Bases | 40 |

CAPITULO III

EL METODO DEL SIMPLEX ADAPTADO

| | | |
|-----|---|----|
| 3.1 | Notaciones | 46 |
| 3.2 | Aplicación de los Resultados del Método Simplex.. | 49 |
| 3.3 | Algoritmo de Transporte | 52 |
| 3.4 | Programa Inicial de Base | 57 |
| 3.5 | Degeneración. Convergencia | 77 |
| 3.6 | Ejemplo | 84 |
| 3.7 | Balance del Problema de Transporte | 87 |

CAPITULO IV

REDES DE TRANSPORTE, I

| | | |
|-----|---|-----|
| 4.1 | Definición General de las Redes de Transporte... | 93 |
| 4.2 | Notaciones | 96 |
| 4.3 | Redes Particulares | 97 |
| 4.4 | Representación Matricial de una Red de Transporte | 99 |
| 4.5 | Definición | 101 |
| 4.6 | Conjuntos Disjuntos . Cortes | 107 |
| 4.7 | Redes Planas | 113 |
| 4.8 | Camino de Longitud Minimal | 115 |

CAPITULO V

REDES DE TRANSPORTE, II. FLUJO DE VALOR MAXIMAL

| | | |
|-----|---|-----|
| 5.1 | Formulación del problema | 124 |
| 5.2 | Caso de Redes Planas. Primer Algoritmo de Ford - Fulkerson | 125 |
| 5.3 | Caso General | 130 |
| | Bibliografía | 147 |

C A P I T U L O I

ELEMENTOS DE TEORIA DE GRAFOS

1.1 Definiciones Generales.

Definición 1.1.1

Llamamos GRAFO al par (P,U) ; donde P es el conjunto de elementos p_i , llamados vértices (o puntos del grafo); y U es un conjunto de pares ordenados (p_i, p_j) , llamados arcos del grafo.

Un grafo estará representado generalmente por un conjunto de puntos del plano, representando a los vértices, y un conjunto de trazos continuos orientados, enlazando ciertos pares de vértices, representando los arcos (fig. 1.1).

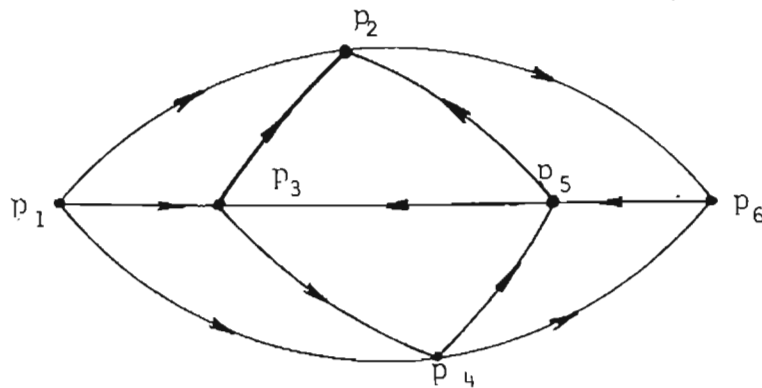


Figura 1.1 Grafo.

Definición 1.1.2

Un SUBGRAFO de un grafo (P,U) , es un grafo (P_S,U_S) , tal que cumple las siguientes condiciones:

i) $P_S \subset P$

ii) $(p_i, p_j) \in U_S$ si y sólo si $\begin{cases} p_i \in P_S, \\ p_j \in P_S \text{ y} \\ (p_i, p_j) \in U \end{cases}$

es decir, es un grafo formado por un subconjunto P_S de vértices del grafo inicial y por todos los arcos que enlazan los vértices de P_S y que pertenecen al conjunto de arcos inicial U . En la figura 1.2 mostramos dos subgrafos del grafo de la figura 1.1; observe que cada uno se obtiene al eliminar algunos vértices y en consecuencia arcos.

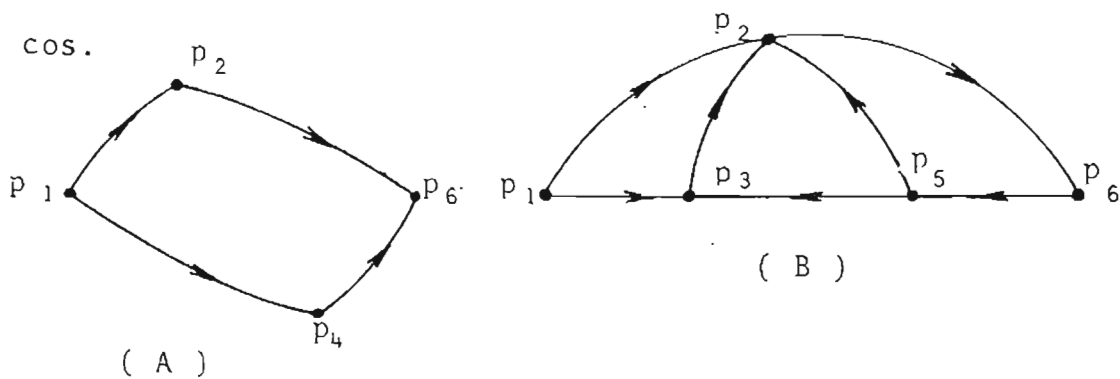


Figura 1.2 Subgrafos

Definición 1.1.3

Un GRAFO PARCIAL de un grafo (P,U) es un grafo (P, U_p) tal que $U_p \subset U$; es entonces un grafo formado por todos los vértices P del grafo inicial y una parte solamente de sus arcos. En la figura 1.3 mostramos dos grafos parciales del grafo de la figura 1.1.

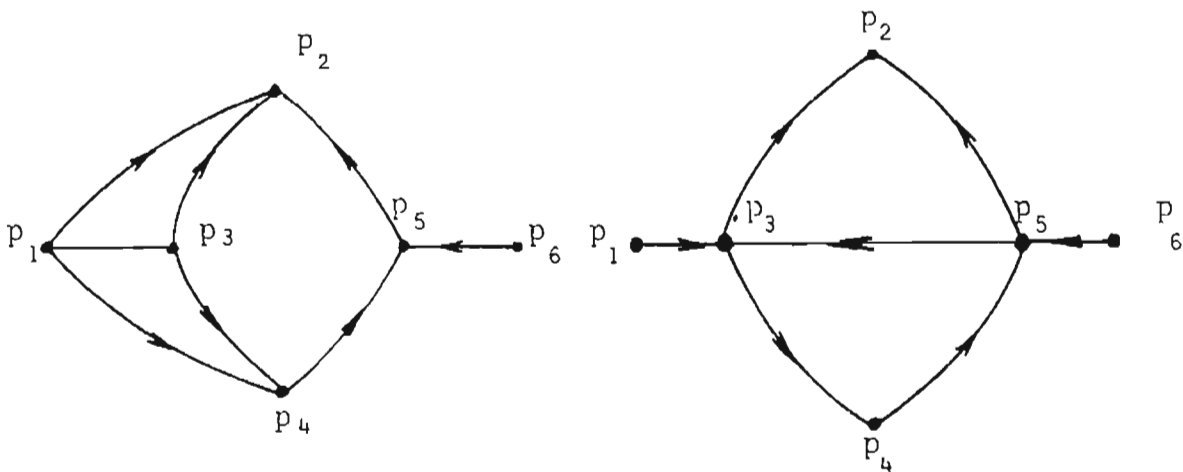


Figura 1.3 Grafos Parciales.

Definición 1.1.4

Un SUBGRAFO PARCIAL de (P,U) es un grafo parcial de un subgrafo de (P,U) . En la figura 1.4 mostramos un subgrafo parcial del grafo de la figura 1.1.

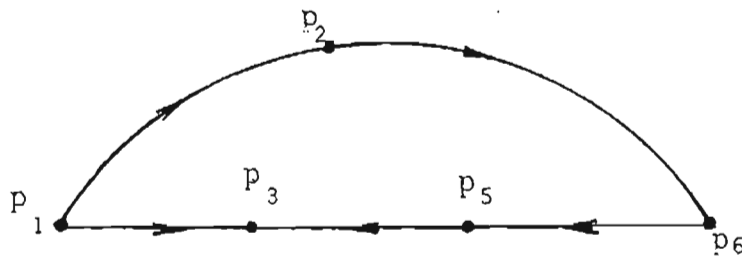


Figura 1.4 Subgrafo Parcial.

El subgrafo parcial de la figura anterior corresponde al subgrafo (B) de la figura 1.2.

Definición 1.1.5

Dado un arco (p,q) , llamamos a "p" ORIGEN o EXTREMO INICIAL del arco y a "q" EXTREMO TERMINAL, o simplemente EXTREMO.

Definición 1.1.6

Dado un conjunto $A \subset P$ de vértices, pudiendo ser unitario, decimos que un arco u es INCIDENTE HACIA EL INTERIOR DE A (figura 1.5.a) si existe un vértice $a \in A$ y un punto $p \notin A$ tal que $u = (p, a)$; e INCIDENTE HACIA EL EXTERIOR DE A (figura 1.5.b) si $u = (a, p)$, con $a \in A$ y $p \notin A$.

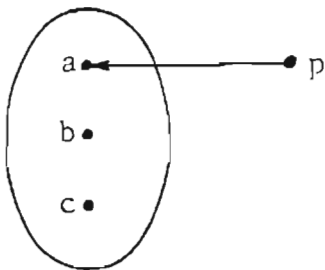


Figura 1.5.a

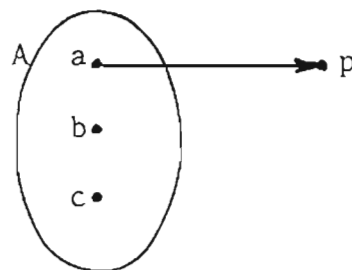


Figura 1.5.b

Definición 1.1.7

Un grafo se dice PLANO cuando se puede representar sobre un plano de manera que los vértices sean todos distintos y que los arcos no se corten fuera de sus extremos.

Definición 1.1.8

Llamamos GRAFO SIMPLE a la terna (P_0, P_e, U) , donde P_0 y P_e son subconjuntos disjuntos de P tales que

$$(p_i, p_j) \in U \Rightarrow p_i \in P_0 \text{ y } p_j \in P_e$$

Lo anterior significa que los vértices en P_0 serán solamente orígenes y los de P_e , extremos (figura 1.6)

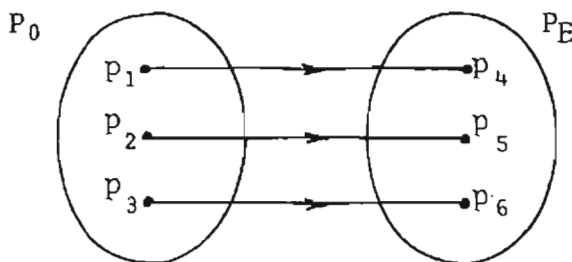


Figura 1.6.

Definición 1.1.9

Llamamos ARISTA $[p_i, p_j]$ del grafo (P, U) al par de vértices que se encuentran en los extremos de un mismo arco; $[p_i, p_j]$ es una arista si y solamente si $(p_i, p_j) \in U$ ó $(p_j, p_i) \in U$.

De lo anterior se deduce que en la arista, a diferencia del arco, no importa el sentido.

Definición 1.1.10

Decimos que un vértice "p" es AISLADO si no es origen ni extremo de ninguna arista (figura 1.7.a); y se dice que es pendiente si existe sólo una arista incidente a este vértice (figura 1.7.b)

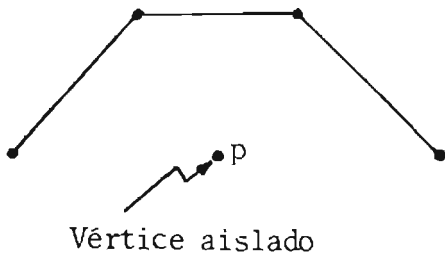


Figura 1.7.a

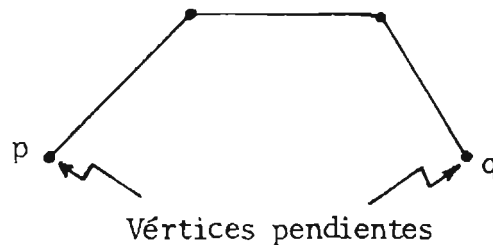


Figura 1.7.b

De otra manera, podemos decir que el vértice es pendiente si hay un solo arco que llega (o sale) de él.

Definición 1.1.11

Dos vértices distintos se dice que son ADYACENTES si existe un arco o una arista uniéndolos.

Definición 1.1.12

Dos arcos o aristas distintas se dice que son adyacentes si tienen un extremo común.

1.2 Caminos y Circuitos - Cadenas y Ciclos.

Definición 1.2.1

Llamamos CAMINO de un grafo (P,U) a una sucesión de arcos (u_1, u_2, \dots, u_p) de forma tal que el extremo de uno de ellos es el origen del siguiente. También podemos definir un camino mediante una sucesión de vértices (p_1, p_2, \dots, p_n) siempre que $(p_1, p_2), (p_2, p_3), \dots, (p_{n-1}, p_n)$ sean arcos del grafo (figura 1.8).

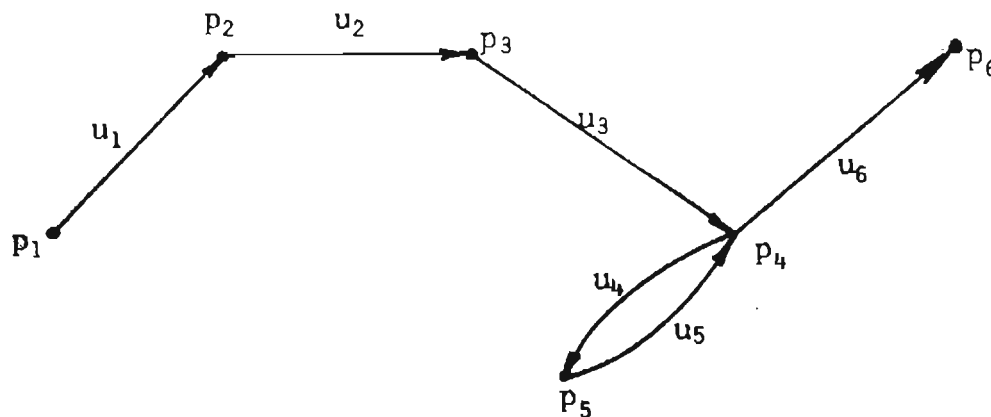


Figura 1.8 Camino

Definición 1.2.2

Un camino se dice que es SIMPLE si cualquier arista se recorre una sola vez (figura 1.9.a) y COMPUESTO si usa más de una vez la misma arista (figura 1.9.b)

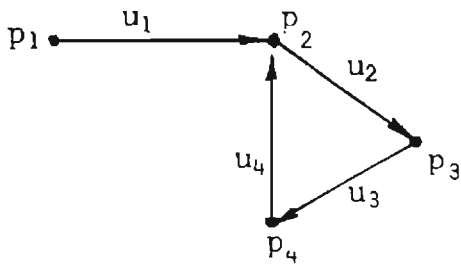


Figura 1.9.a

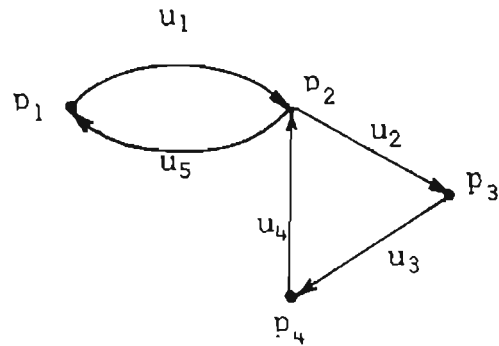


Figura 1.9.b

Definición 1.2.3

Un camino es ELEMENTAL si cada vértice es usado una sola vez (figura 1.10.a) y es NO ELEMENTAL si un vértice es usado dos veces o mas (figura 1.10.b)

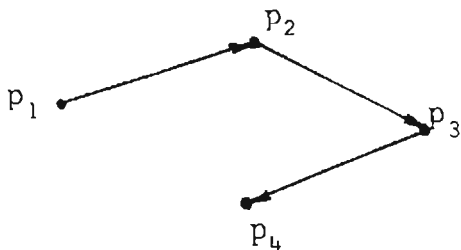


Figura 1.10.a

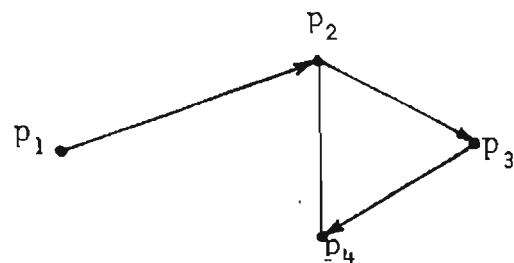


Figura 1.10.b

Definición 1.2.4

Llamamos CIRCUITO a todo camino en donde el origen del primer arco coincide con el extremo del último (figura 1.11)

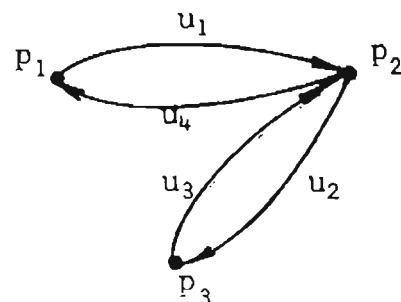
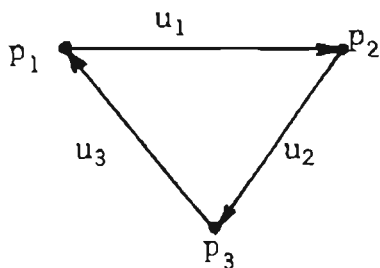


Figura 1.11 Circuitos

En forma similar que los caminos, se definen circuitos simples, compuestos y elementales.

Definición 1.2.5

Decimos que un grafo es SIMETRICO si $\forall p_i \in P$ y $\forall p_j \in P$:

$$(p_i, p_j) \in U \Rightarrow (p_j, p_i) \in U$$

Definición 1.2.6

Un grafo (P, U) es COMPLETO si todo par de vértices define al menos un arco, es decir:

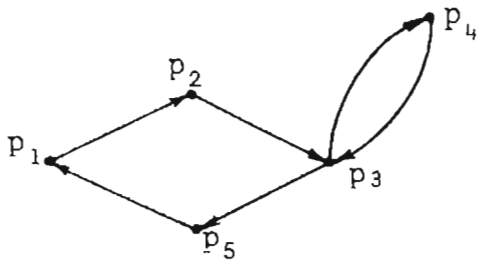
$$\forall p_i \in P \text{ y } \forall p_j \in P, \quad i \neq j$$

$$(p_i, p_j) \notin U \Rightarrow (p_j, p_i) \in U$$

Lo anterior significa que entre todo par de vértices existe al menos un arco.

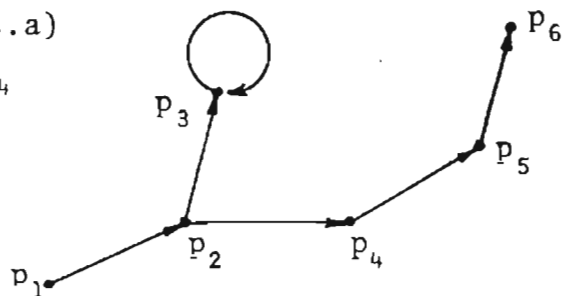
Definición 1.2.7

Decimos que un grafo es FUERTEMENTE CONEXO si para cualesquier par de vértices distintos "p" y "q" existe un camino que los une (figura 1.12.a)



Fuertemente conexo

Figura 1.12.a



No fuertemente conexo

Figura 1.12.b

Puede observarse en el grafo fuertemente conexo que a partir de todo vértice p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) resulta posible alcanzar cualquier otro vértice siguiendo un camino del grafo. En el grafo de la figura 1.12.b lo anterior no se puede lograr, ya que de p_5 a p_4 no existe un camino tal como en la figura 1.12.a.

Definición 1.2.8

En un grafo llamamos BUCLE a todo arco cuyo origen coincide con su extremo.

En la figura 1.12.b encontramos un bucle en el vértice p_3 .

Definición 1.2.9

Llamamos CADENA a una sucesión de aristas (v_1, v_2, \dots) tales que uno de los extremos de cada arista v_n pertenece a la arista anterior v_{n-1} , de la sucesión, (si existe) y el otro extremo a la arista siguiente v_{n+1} (si existe).

La longitud de una cadena es igual al número de aristas que contiene. Una cadena puede ser finita o no.

Definición 1.2.10

Un CICLO es una cadena que empieza y termina en el mismo punto "p".

Nota: De igual manera que los caminos y los circuitos, podemos definir cadenas y ciclos: simples (todas las

aristas son distintas), compuestos (se repiten aristas) y elementales (todos los vértices son distintos).

Definición 1.2.11

Un grafo es CONEXO si entre dos vértices distintos cualesquiera "p" y "q" existe siempre una cadena, es decir, que cualquier vértice del grafo es alcanzable desde cualquier otro vértice a través de cadenas.

Nota: A las nociones de camino, circuito y fuerte conexidad, donde interviene la orientación de los arcos, se pueden asociar las nociones de cadena, ciclo y conexidad que no implican ninguna orientación.

1.3 Matriz de Incidencia en las Aristas. Arboles.

Definición 1.3.1

Una matriz $A = (a_{ij})$ es llamada MATRIZ DE INCIDENCIA EN LAS ARISTAS del grafo, si cada fila i está asociada a un vértice p_i y cada columna j está asociada a una arista u_j .

En esta matriz A:

$a_{ij} = 1$ si p_i es un extremo de u_j , y $a_{ij} = 0$ en caso contrario. Ver figura 1.13

$$A = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ p_1 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ p_2 & \\ p_3 & \\ p_4 & \\ p_5 & \end{matrix}$$

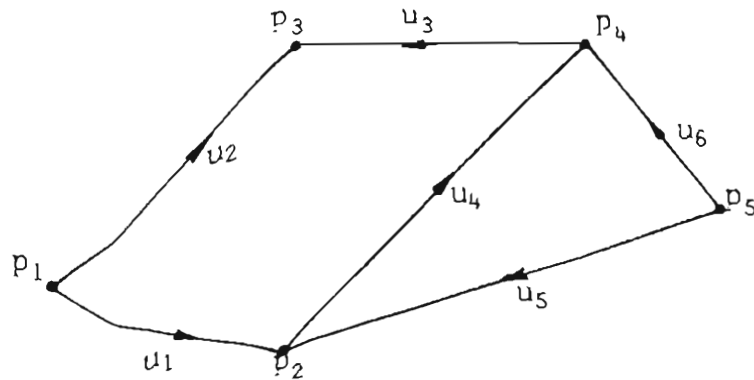


Figura 1.13

Definición 1.3.2

Llamamos ARBOL a todo grafo no orientado (es decir, definido por sus vértices y sus aristas), conexo y sin ciclos (figura 1.14).

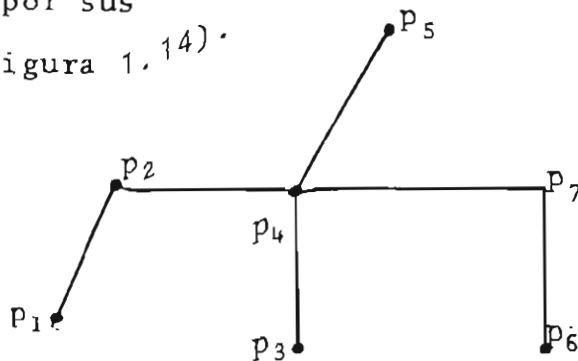


Figura 1.14

Un árbol es TRIVIAL si está formado por sólo un vértice, es decir, no tiene aristas.

Definición 1.3.3

Un ARBOL PARCIAL de un grafo G es un grafo parcial de G que cumple las condiciones necesarias para ser un árbol.

TEOREMA 1.1

Las siguientes propiedades son características de los árboles (es decir, que cada una es una condición necesaria y suficiente para que un grafo G sea un árbol):

- a) G posee p vértices, $(p-1)$ aristas y ningún ciclo;
- b) G posee p vértices, $(p-1)$ aristas y es conexo;
- c) G no tiene ciclos y se crea un ciclo y sólo uno añadiendo una arista entre dos vértices cualesquiera no adyacentes;
- d) G es conexo pero deja de serlo cuando se suprime una arista cualquiera;
- e) dos vértices cualesquiera de G se unen mediante una cadena y sólo una.

Demostración:

Lo haremos probando que $a \Rightarrow b$, $b \Rightarrow c$, $c \Rightarrow d$, $d \Rightarrow e$ y $e \Rightarrow a$, con lo que tendremos la equivalencia entre todos los literales.

Al final sólo faltará probar que cualquiera de estas características es condición necesaria y suficiente para que el grafo G sea un árbol.

" a => b "

Supongamos que G posee p vértices, $(p-1)$ aristas y ningún ciclo y probemos que es conexo.

Supongamos que G no es conexo, entonces existen en G , k árboles (con $k \geq 2$).

Sean G_1, G_2, \dots, G_k dichos árboles y supongamos que cada G_i tiene p_i vértices y q_i aristas. En tal caso se tiene que $p_i - 1 = q_i$, $1 \leq i \leq k$.

$$\text{además } \sum_{i=1}^k p_i = P \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k q_i = p - 1$$

$$\begin{aligned} \text{pero por otro lado} \quad \sum_{i=1}^k q_i &= \sum_{i=1}^k (p_i - 1) \\ &= \sum_{i=1}^k p_i - \sum_{i=1}^k 1 \\ &= p - k \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

De donde G es conexo.

" b => c "

Supongamos que G tiene p vértices, $(p-1)$ aristas y es conexo y probemos que G no tiene ciclos y se crea un ciclo y sólo uno añadiendo una arista entre dos vértices cualesquiera no adyacentes.

Supongamos que G tiene ciclos, es decir, tiene al menos un ciclo en el cual al eliminar una arista cualquiera podemos observar que siempre existe una cadena, de donde el grafo siempre es conexo. Suprimamos t aristas ($t \geq 1$) de manera que eliminemos todos los ciclos que existen en G y obtengamos un subgrafo sin ciclos y conexo. Este subgrafo tendrá p vértices y $[p - (t+1)]$ aristas, lo cual contradice el hecho de que un grafo conexo con p vértices tiene $(p-1)$ aristas.

Luego G no tiene ciclos.

Ahora, sean p_i, p_j dos vértices cualesquiera no adyacentes. Por ser G conexo se tiene que desde cualquier vértice p_k existen las cadenas (p_k, \dots, p_i) y (p_k, \dots, p_j) , de manera que al unir mediante una arista los vértices p_i y p_j obtenemos el ciclo $(p_k, \dots, p_i, p_j, \dots, p_k)$; este ciclo es único, ya que una arista sólo puede unir dos vértices:

" c \Rightarrow d "

A partir de c) probemos que G es conexo pero deja de serlo cuando se suprime una arista cualquiera.

Supongamos que G no es conexo, entonces existen dos vértices p_i y p_j que no están unidos por una cadena; pero por literal c) tenemos que al añadir una arista entre estos dos vértices aparece un ciclo en el grafo ampliado, lo que implicaría que ya existía una cadena entre ellos, que es una contradicción.

Como G es conexo y por c) no tiene ciclos, es evidente que al suprimir una arista deja de ser conexo.

" d \Rightarrow e "

A partir del literal d probemos que dos vértices cualesquiera de G se unen mediante una cadena y sólo una.

Por ser G conexo, todo par de vértices está conectado al menos por una cadena. Si existiera un par de vértices conectado por dos cadenas distintas, al eliminar una arista de una de las cadenas, el grafo sigue siendo conexo, porque se mantiene una cadena y esto contradice a d).

" e \Rightarrow a "

Como G cumple la condición de conexión única entre p_i y p_j vértices, obviamente es conexo y se tiene que G no tiene ciclos, ya que de existir un ciclo, estos vértices estarían conectados por dos cadenas distintas.

Si G tiene p vértices, es conexo y no tiene ciclos, al eliminar una arista obtenemos dos grafos con las características anteriores; al omitir una segunda arista, se obtienen 3 grafos similares a los anteriores; verificando la operación anterior (p-1) veces, obtendremos p grafos triviales, que serán los vértices aislados. Como en cada paso del proceso se suprime una arista, el total de aristas es (p-1).

Sólo faltará probar que cualquiera de estas características es condición necesaria y suficiente para que G sea un árbol, así:

"G es un árbol \Leftrightarrow dos vértices cualesquiera de G se unen mediante

te una cadena y sólo una".

Demostración:

i) " \Rightarrow "

Supongamos que G es un árbol. Por ser conexo, todo par de vértices está conectado al menos por una cadena. Si existiera un par de vértices conectado por dos cadenas distintas, la unión de estas cadenas contendría un ciclo, en contradicción con la definición de árbol, que no tiene ciclos.

ii) " \Leftarrow "

Supongamos que G cumple la condición de conexión única. Obviamente G es conexo, pero además no tiene ciclos, ya que, de existir un ciclo, dos vértices distintos de dicho ciclo estarían conectados por dos cadenas distintas, lo cual no puede ser por la conexión única.

Por lo tanto G es un árbol.

Teorema 1.2

En un árbol no trivial hay por lo menos dos **vértices pendientes**.

Demostración:

La haremos usando inducción matemática.

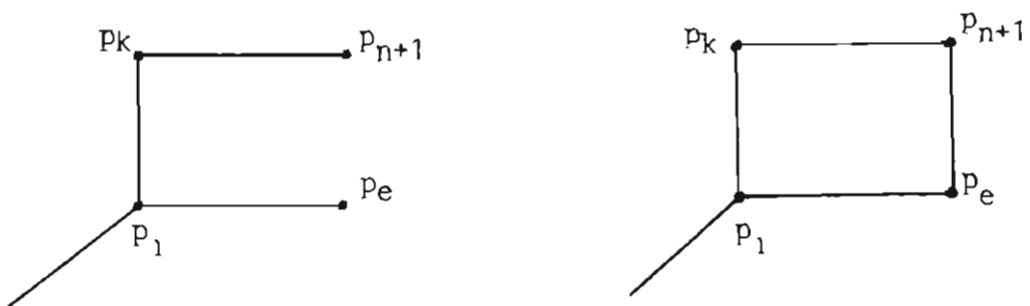
- . Si el árbol sólo tiene dos vértices, éstos son **pendientes**.
- . Supongamos que el árbol tiene n vértices y al menos dos **vértices pendientes**, y probemos para $(n+1)$ vértices.

i) Si el vértice $(n+1)$ se conecta con uno o más vértices no

pendientes, entonces los vértices anteriores que eran pendientes siguen siéndolo, y siempre se tendrían al menos dos vértices pendientes.

- ii) Si el vértice $(n+1)$ se conecta con un pendiente, él debe ser pendiente. Si $(n+1)$ no fuera pendiente, se conectaría con el pendiente anterior p_k y con otro cualquiera p_e , formando así un ciclo. (figura 1.15).

Lo anterior no puede suceder en un árbol, por lo tanto siempre se tienen al menos dos vértices pendientes.



Se conecta con un pendiente

Se conecta con dos pendientes

Figura 1.15

C A P I T U L O I I

EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

(METODO DEL SIMPLEX)

2.1 Definiciones y Propiedades Fundamentales.

Definición 2.1.1

El PROBLEMA DEL TRANSPORTE recibe su nombre del significado económico que se le atribuye con mayor frecuencia: existen m orígenes i que producen un bien que hay que transportar a $(n-1)$ destinos j que lo demandan.

Llamaremos:

- a_i a la cantidad de bienes producidos por el origen i ;
- b_j a la cantidad de bienes demandados por el destino j ;
- c_{ij} al coste del transporte por unidad del origen i al destino j ;
- x_{ij} a la cantidad de bienes transportados del origen i al destino j .

El propósito es que el coste total de transporte sea mínimo.

La formulación matemática de este problema es la siguiente:

$$i) \quad \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} \leq a_i \quad ; \quad i = 1, \dots, m$$

$$ii) \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad ; \quad j = 1, \dots, (n-1)$$

$$iii) \quad x_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad ; \quad j = 1, \dots, (n-1)$$

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} x_{ij}$$

con las hipótesis

$$\sum a_i \geq \sum b_j, \quad a_i \geq 0, \quad b_j \geq 0, \quad c_{ij} \geq 0.$$

Las dos primeras hipótesis son condiciones necesarias para la existencia de un PROGRAMA o SOLUCION REALIZABLE, es decir, un conjunto de valores de las variables que satisfacen todas las condiciones del problema, comprendidas las de no negatividad ($x_{ij} \geq 0$).

La expresión analítica anterior, supone que es posible llevar este producto desde todo origen i a todo destino j ; evidentemente podemos eliminar esta hipótesis imponiendo la condición $x_{ij} = 0$ para algunos pares (i,j) .

Siempre podemos poner el problema en forma canónica de tal manera que reemplacemos las inecuaciones por ecuaciones. Obviamente, si tomamos las inecuaciones

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, \dots, (n-1) \text{ éstas se verifican con el}$$

signo de igualdad, además si el valor de una variable a_i decrece, las inecuaciones $\sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} \leq a_i, i=1, \dots, m$ se verificarán con mayor razón y el costo de transporte decrecerá.

Por otro lado, podemos agregar variables que llamaremos de separación o de holgura $x_{in}(i=1, \dots, m)$ a cada una de las m primeras inecuaciones, de manera que las transformemos en ecuaciones. Estas variables de holgura estarán determinadas por la ecuación:

$$\sum_{i=1}^m x_{in} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^{n-1} b_j = b_n ,$$

que se puede interpretar como la creación de un n-ésimo destino ficticio b_n , al que serán transportados, sin costo, el excedente de producción que tenemos en cada origen.

Ahora tenemos m orígenes y n destinos, luego si

$M = \{1, \dots, m\}$ y $N = \{1, \dots, n\}$, el PROBLEMA DEL TRANSPORTE se escribe así:

$$i) \quad \sum_{j \in N} x_{ij} = a_i , \quad i \in M$$

$$ii) \quad \sum_{i \in M} x_{ij} = b_j , \quad j \in N$$

$$iii) \quad x_{ij} \geq 0 , \quad (i, j) \in M \times N$$

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{(i,j) \in M \times N} c_{ij} x_{ij} = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{con } a_i \geq 0, b_j \geq 0, c_{ij} \geq 0, c_{in} = 0, \sum_{i \in M} a_i = \sum_{j \in N} b_j$$

Obsérvese que consideramos que la cantidad de bienes producidos es igual a la cantidad demandada.

Nota: para nuestro trabajo, de aquí en adelante, supondremos que x_{ij} puede tomar cualquier valor no negativo, para todo par (i, j) .

TEOREMA 2.1

Un problema de transporte tiene siempre una solución; y toda solución está acotada si los a_i y b_j lo están.

Demostración:

Los valores $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum_{i \in M} a_i}$ constituyen una solución, ya que

cumplen las restricciones o condiciones del problema:

$$\begin{aligned} \text{i) } \sum_{j \in N} x_{ij} &= \sum_{j \in N} \frac{a_i b_j}{\sum_{i \in M} a_i} \\ &= a_i \frac{\sum_{j \in N} b_j}{\sum_{i \in M} a_i} \\ &= a_i, \text{ por } \sum_{i \in M} a_i = \sum_{j \in N} b_j \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{j \in N} x_{ij} = a_i$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \sum_{i \in M} x_{ij} &= \sum_{i \in M} \frac{a_i b_j}{\sum_{i \in M} a_i} \\ &= b_j \frac{\sum_{i \in M} a_i}{\sum_{i \in M} a_i} \\ &= b_j \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{i \in M} x_{ij} = b_j$$

iii) $x_{ij} \geq 0$ porque $a_i \geq 0$ y $b_j \geq 0$

Por otro lado, para toda solución, tenemos que si la producción a_i y la demanda b_j están acotadas, necesariamente deberá cumplirse que

$$x_{ij} \leq \min [a_i , b_j]$$

es decir, no se transportará un número mayor de bienes x_{ij} que los producidos por a_i , ni que los demandados por b_j .

2.2 Grafo G Asociado al Problema.

Podemos asociar al problema del transporte un grafo G , en donde cada origen estará representado por un vértice 0_i , cada destino por un vértice d_j y cada ruta desde el origen i al destino j por un arco orientado de 0_i a d_j ; G es un grafo simple (Def. 1.1.8). Ver figura 2.1

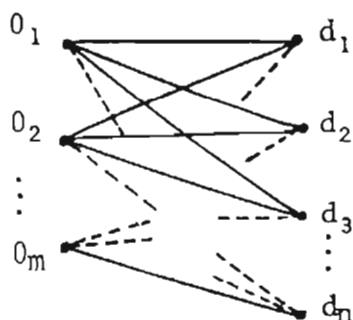


Figura 2.1.

2.3 Matriz de los Coeficientes del Sistema.

Al escribir las condiciones del problema del transporte, $\sum_{j \in N} x_{ij} = a_i$ ($i \in M$) y $\sum_{i \in M} x_{ij} = b_j$ ($j \in N$), expandiendo las sumatorias tenemos:

| | | | | | | |
|--|------------------------------------|------------------------------------|-----|------------|------------------------------------|---------|
| $\left. \begin{array}{c} m \\ \text{e} \\ \text{c} \\ \text{u} \\ \text{a} \\ \text{c} \\ \text{i} \\ \text{o} \\ \text{n} \\ \text{e} \\ \text{s} \end{array} \right\}$ | $x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n}$ | $x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n}$ | : | : | $x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn}$ | = a_1 |
| | | | | | | = a_2 |
| | | | | | | = a_m |
| | | | | | | |
| $\left. \begin{array}{c} n \\ \text{e} \\ \text{c} \\ \text{u} \\ \text{a} \\ \text{c} \\ \text{i} \\ \text{o} \\ \text{n} \end{array} \right\}$ | x_{11} | $+ x_{21} +$ | | x_{m1} | | = b_1 |
| | x_{12} | $+ x_{22} +$ | | $+ x_{m2}$ | | = b_2 |
| | : | : | ... | : | | : |
| | x_{1n} | $+ x_{2n}$ | | $+ x_{mn}$ | | = b_n |

Luego la matriz A de los coeficientes de las condiciones lineales son:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\
 \hline
 1 & & & 0 & 1 & & & & & 1 & & & 0 \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & \cdot & & & \cdot & & & & & & \cdot & \\
 0 & & & & 0 & \cdot & & \dots & & 0 & & \cdot & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 \\
 & & & 1 & & & & & & & & & &
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{matrix}} \right\} m \text{ filas} \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{matrix}} \right\} n \text{ filas} \end{array}$$

Es evidente que la matriz es de orden $(m+n) \times (m \cdot n)$.

Simplificando la forma de representar la matriz A, tenemos:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbb{1} & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \mathbb{1} & \dots & 0 & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{1} & \\ I_n & I_n & \dots & I_n & \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \text{ filas} \\ \\ \\ \\ n \text{ filas} \end{array}$$

donde : $\mathbb{1} = (1, 1, \dots, 1) =$ vector fila con n componentes.

$I_n =$ matriz identidad de orden $n \times n$.

La matriz A podemos escribirla también así:

$$A = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, a_{m1}, \dots, a_{mn}]$$

Tomaremos a_{ij} , el vector correspondiente a la variable x_{ij} , así:

$$a_{ij} = e_i + e_{m+j}$$

donde $e_i =$ vector unitario con $(m+n)$ componentes, cuya i -ésima componente es $+ 1$.

En lo sucesivo, al hablar de vector, nos estaremos refiriendo a un vector columna a_{ij} de A.

Nótese que esta matriz A es también la matriz de incidencia en las aristas del grafo de transporte G.

TEOREMA 2.2

La matriz A tiene rango $(m+n-1)$.

Demostración:

La suma de las m primeras filas de A dan como resultado el vector $(1,1,\dots,1,1,\dots,1)$ de orden $1 \times (m+n)$; de igual manera la suma de las n filas restantes dan como resultado el mismo vector.

Luego, las $(m+n)$ filas de A son linealmente dependientes, ya que una fila se puede escribir como una combinación lineal de las demás, de donde el rango de A es menor que $(m+n)$.

Probaremos que el rango de A es $(m+n-1)$, para tal objeto formaremos una submatriz cuadrada así: eliminamos la fila $m+1$ y tomamos los n primeros vectores (columnas) que son linealmente independientes.

$$a_{11} = e_1 + e_{m+1}$$

$$a_{12} = e_1 + e_{m+2}$$

$$\vdots$$

$$a_{1n} = e_1 + e_{m+n}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc|ccc} & a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & & & \\ & 1 & 1 & \dots & 1 & & & \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & & \dots & \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ & 0 & 0 & & 0 & & & \\ \hline & 1 & 0 & \dots & 0 & & & \\ & 0 & 1 & \dots & 0 & & \dots & \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ & 0 & 0 & & 1 & & & \end{array} \right]$$

Luego agregaremos a éstos los últimos vectores de cada bloque (última columna), que también son linealmente independientes, tomando así los siguientes $(m-1)$ vectores:

$$a_{2n} = e_2 + e_{m+n}$$

$$a_{3n} = e_3 + e_{m+n}$$

⋮

$$a_{mn} = e_m + e_{m+n}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & a_{2n} & a_{3n} & a_{mn} \\ & \downarrow & \downarrow & \\ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & & 1 \end{array} \end{array} \end{array}$$

Con los $(n+m-1)$ vectores formaremos una combinación lineal y probaremos que éstos son linealmente independientes, es decir, que los escalares son nulos.

Sea $\sum_{\substack{i \in M \\ j \in N}} \alpha_{ij} a_{ij} = 0$, $\alpha_{ij} \in R$ al agrupar los índices

$i = 1$ y $j = n$ tenemos:

$$\sum_{\substack{i \in M \\ j \in N}} \alpha_{ij} a_{ij} = \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} a_{1j} + \sum_{i=2}^m \alpha_{in} a_{in}$$

que no son nada más que los n primeros vectores que tomamos más los otros $(m-1)$ vectores que tomamos de la matriz A .

Luego

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} a_{1j} + \sum_{i=2}^m \alpha_{in} a_{in} \\ = & \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} (e_1 + e_{m+j}) + \sum_{i=2}^m \alpha_{in} (e_i + e_{m+n}) \\ = & \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} e_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} e_{m+j} + \sum_{i=2}^m \alpha_{in} e_i + \sum_{i=2}^m \alpha_{in} e_{m+n} \\ = & \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} e_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{1j} e_{m+j} + \sum_{i=2}^m \alpha_{in} e_i + \sum_{i=1}^m \alpha_{in} e_{m+n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & (\alpha_{11} + \alpha_{12} + \dots + \alpha_{1n}) e_1 + \alpha_{11} e_{m+1} + \alpha_{12} e_{m+2} + \dots + \alpha_{1n-1} e_{m+n-1} + \alpha_{2n} e_2 + \alpha_{3n} e_3 + \dots \\ & + \alpha_{mn} e_m + (\alpha_{1n} + \alpha_{2n} + \dots + \alpha_{mn}) e_{m+n} = 0 \end{aligned}$$

Como los e_{ij} ($i \in M$, $j \in N$) son vectores de la base canóni-

ca de \mathbb{R}^{m+n} , ellos deben ser linealmente independientes y por lo tanto sus coeficientes deben ser ceros.

Así:

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \dots, \quad \alpha_{1n-1} = 0$$

y entonces $(\alpha_{11} + \alpha_{12} + \dots + \alpha_{1n}) = 0$ nos lleva a que $\alpha_{1n} = 0$;
además $\alpha_{2n} = 0, \quad \alpha_{3n} = 0, \dots, \quad \alpha_{mn} = 0$

Luego todos los coeficientes son ceros y, los $(m+n-1)$ vectores son linealmente independientes, de donde el rango de la matriz A es $(m + n - 1)$.

A continuación encontraremos algunos conceptos importantes para continuar nuestro estudio.

Definición 2.3.1

Llamaremos Base B del sistema lineal o, con mayor generalidad BASE DEL PROBLEMA a toda base del conjunto de los vectores columna, es decir a todo conjunto de vectores linealmente independientes. Los vectores de una base constituyen entonces una submatriz cuadrada regular (si tiene k vectores, su orden es k) de A y viceversa.

Las k variables asociadas a las columnas de una base B serán llamadas VARIABLES DE BASE y son un subvector X^B del vector solución x. Las demás variables serán llamadas VARIABLES SECUNDARIAS y constituyen el subvector X^R complemento de X^B en X.

Definición 2.3.2

Llamaremos SOLUCION DE BASE asociada a B, al conjunto de valores de las variables de base y secundarias, respectivamente, siguiente:

$x^B = B^{-1}d$, donde d es el vector que contiene las constantes del sistema de ecuaciones.

$x^R = 0$ (vector cero).

Se hablará a menudo, de forma más sencilla, de la solución de base x^B , entendiendo que, en la solución de base completa, están comprendidas las variables secundarias nulas que no se han mencionado explícitamente.

Ejemplo:

Al sistema

$$x_1 + 0x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 6$$

$$0x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 2$$

está asociada la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

en donde la Base está formada por la primera y segunda columna.

Luego la solución de base del sistema será $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ en donde las variables básicas son x_1 y x_2 y las secundarias las restantes.

Una solución de base se llamará DEGENERADA si algunas componentes de x^B tienen un valor nulo.

Definición 2.3.3

Un PROGRAMA DE BASE (o solución realizable de base) es una solución de base que satisface todas las condiciones del problema, comprendidas las de no negatividad.

Definición 2.3.4

Llamaremos PROGRAMA OPTIMAL a un programa finito, es decir, con todas sus componentes finitas, que hace optimal (minimal o maximal) la forma lineal a optimizar.

Definición 2.3.5

Llamaremos PROGRAMA OPTIMAL DE BASE al programa de base que hace optimal (en nuestro caso minimal) la función objetivo.

TEOREMA 2.3

La matriz A es totalmente unimodular, es decir, toda submatriz cuadrada de A tiene su determinante igual a cero, $+1$ o -1 .

Demostración-:

Sea D_k una matriz cuadrada de orden k extraída de A ($1 < k < (m+n)$).

Llamemos U y V respectivamente al conjunto de las m primeras filas y al conjunto de las n últimas filas de A (estos conjuntos corresponden, respectivamente, en el grafo G , a los conjuntos de los orígenes y de los destinos).

i) Si en cada columna de D_k existen dos elementos no nulos, uno está en una fila de U y el otro en una fila de V ; la

suma de las filas de D_k que pertenecen a U menos la suma de las filas de D_k que pertenecen a V , es una fila formada enteramente por ceros y el determinante $|D_k| = 0$

- ii) Si existe por lo menos una columna de D_k que contiene menos de dos elementos no nulos, el desarrollo del determinante $|D_k|$ por expansión de cofactores de los elementos de esta columna nos lleva a:

$$|D_k| = 0 \quad \text{ó} \quad |D_k| = \pm |D_{k-1}| \quad (1)$$

donde el signo $+$ ó $-$ es el signo del cofactor.

Como además tenemos que $|D_1| = 0$ ó $|D_1| = +1$, y de (1) se obtiene que:

$$|D_2| = \pm |D_1|, \quad |D_3| = \pm |D_2|, \dots, \quad |D_k| = \pm |D_{k-1}|$$

es decir, $|D_k| = 0$, $+1$ ó -1 .

Corolario.

Si los a_i y b_j son enteros, los valores de las variables son enteros en todo programa de base y existe entonces por lo menos un programa optimal "entero" (en números enteros).

2.4 Propiedades Algebraicas de las Bases.

En el lenguaje del método Simplex, resulta que obtendremos una solución del problema del transporte eligiendo un sistema de $(m + n - 1)$ ecuaciones que tenga ese rango, es decir, en el cual la matriz de coeficientes de las incógnitas tenga rango $(m + n - 1)$, y resolviendo este sistema con re

lación a las variables asociadas a una matriz regular. Consideremos una matriz B' formada por $(m+n)$ filas y $(m+n-1)$ vectores columnas de A . Toda fila de B' es igual a una combinación lineal, con coeficientes no todos nulos, de las restantes $(m+n-1)$ filas, puesto que la suma de las m primeras ecuaciones es idéntica a la suma de las n últimas; toda relación lineal (con coeficientes no todos nulos) entre columnas de una matriz cuadrada de orden $(m+n-1)$ tomada de B' se verifica, igualmente, por las columnas completas considerando las $m+n$ filas.

Por lo tanto, se pueden dar los dos casos siguientes que son exhaustivos y mutuamente exclusivos:

1. Todos los determinantes de orden $(m+n-1)$ tomados de B' son nulos, de donde los vectores columna de la matriz son linealmente dependientes y por lo tanto la matriz tiene rango inferior a $(m+n-1)$.
2. Todos los determinantes de orden $(m+n-1)$ de B' son distintos de cero, de donde los vectores columna de la matriz son linealmente independientes y por lo tanto esta matriz tiene rango $(m+n-1)$.

Hemos visto anteriormente que las variables de una solución de base están asociadas con $(m+n-1)$ vectores columna de A linealmente independientes. Ahora podemos decir que, inversamente, a todo conjunto de $(m+n-1)$ vectores linealmente independientes corresponde una y sólo una solución de base, obtenida resolviendo cualquier sistema de $(m+n-1)$ ecuaciones tomadas entre las $(m+n)$ ecuaciones del problema.

2.5 Tabla de Transporte y Grafo Γ Asociado.

Definición 2.5.1

Llamaremos TABLA DEL TRANSPORTE T a una tabla rectangular con m filas ($i=1, \dots, m$) que corresponden a los orígenes 0_i , y n columnas ($j = 1, \dots, n$) que corresponden a los destinos d_j .

Convendremos que cada casilla (i,j) de T , en la intersección de la fila i y la columna j , contiene:

- el coste unitario c_{ij} del transporte de 0_i a d_j ;
- el valor de la variable x_{ij} ;
- el vector a_{ij} de la matriz A (estos vectores no se escribirán explícitamente en la tabla T).

A la tabla T se le ha agregado una columna marginal que contiene las disponibilidades a_i y una fila marginal que contiene las demandas b_j (figura 2.2)

| | d_1 | d_2 | d_3 | ... | d_n | |
|-------|----------------------|----------------------|----------------------|------|----------------------|----------|
| 0_1 | c_{11} x_{11} | c_{12} x_{12} | c_{13} x_{13} | | c_{1n} x_{1n} | a_1 |
| 0_2 | c_{21} x_{21} | c_{22} x_{22} | c_{23} x_{23} | | c_{2n} x_{2n} | a_2 |
| | \vdots | \vdots | \vdots | | \vdots | \vdots |
| 0_m | c_{m1} x_{m1} | c_{m2} x_{m2} | c_{m3} x_{m3} | | c_{mn} x_{mn} | a_m |
| | b_1 | b_2 | b_3 | | b_n | |

Figura 2.2

Ejemplo:

| $0_i \backslash d_j$ | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | d_5 | a_i |
|----------------------|---------|---------|---------|---------|----------|-------|
| 0_1 | 1 75 | 1 25 | | | | 100 |
| 0_2 | | 2 50 | 3 25 | 1 90 | 5 35 | 200 |
| 0_3 | | | | | 2 150 | 150 |
| b_j | 75 | 75 | 25 | 90 | 185 | |

Figura 2.3 . Tabla T

Definición 2.5.2

Llamaremos GRAFO Γ a un grafo asociado a la tabla T de la siguiente manera: cada centro de la casilla (i,j) es un vértice de Γ , cada segmento que une dos vértices situados en la misma fila o en la misma columna es una arista de Γ . En la figura 2.4 presentamos el Grafo Γ asociado a la tabla T del ejemplo de la figura 2.3

| $0_i \backslash d_j$ | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | d_5 | a_i |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0_1 | | | | | | 100 |
| 0_2 | | | | | | 200 |
| 0_3 | | | | | | 150 |
| b_j | 75 | 75 | 25 | 90 | 185 | |

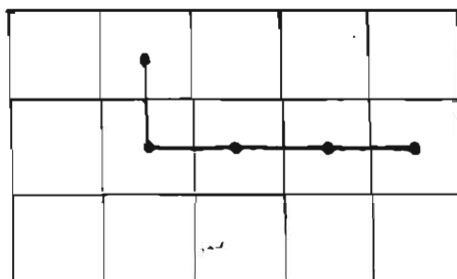
Figura 2.4 . Grafo r

Definición 2.5.3

Un Π -GRAFO (figura 2.5) es un subgrafo parcial de r definido por un subconjunto cualquiera del conjunto de vértices de r y por todas las aristas que unen elementos vecinos de este subconjunto (llamamos elementos vecinos a aquellos que no tienen entre ellos, en la fila o columna en la que se encuentran, ningún vértice adicional, del subconjunto considerado).

En lo sucesivo únicamente tomaremos en cuenta la clase Π de subgrafos parciales de r .

En la figura 2.5 encontramos un Π - grafo del grafo r de la figura 2.4.

Figura 2.5 Π - Grafo

A continuación definiremos una correspondencia Biunívoca entre los Π - Grafos y los Grafos Parciales de G de la siguiente manera:

- a) A toda arista de un grafo parcial de G que une 0_i con d_j , le hacemos corresponder el vértice (i,j) situado en la intersección de la fila i con la columna j de T . Inversamente, a todo vértice (i,j) del Π - grafo le hacemos corresponder la arista $[0_i, d_j]$ de G (ver figura 2.5).
- b) A todo vértice de un grafo parcial de G que tenga p aristas incidentes ($p \geq 1$) le hacemos corresponder $(p - 1)$ aristas de Γ (figura 2.5)

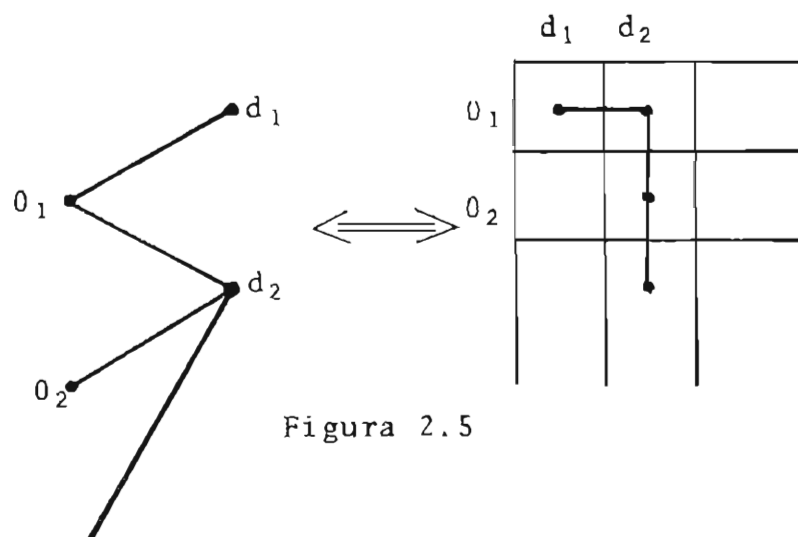
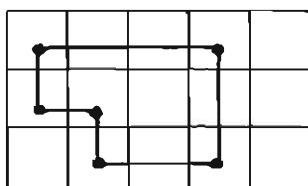


Figura 2.5

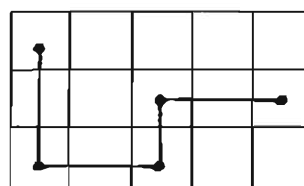
Estas $(p-1)$ aristas unen los elementos de igual número de pares de vértices vecinos, formados por los vértices de r obtenidos por la transformación de las p aristas de G incidentes en el vértice considerado de este grafo. Luego a todo vértice pendiente de un grafo parcial de G le corresponde una fila o columna de T que no contiene más que un solo vértice del Π - grafo correspondiente. Inversamente, a toda arista del Π - grafo le hacemos corresponder el vértice 0_i de G si dicha arista está en la fila i de T , y el vértice d_j de G si está en la columna j de T . Nótese que en esta correspondencia, los vértices aislados de un grafo parcial de G no están asociados con ninguna arista de Γ .

Definición 2.5.4

Llamaremos μ - Ciclos (o μ - Cadenas) a los Π - grafos que sean ciclos (o cadenas) elementales y que tengan como máximo una arista en cada fila y en cada columna de T (figura 2.7).



μ - Ciclo

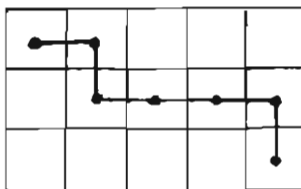


μ - Cadena

Figura 2.7

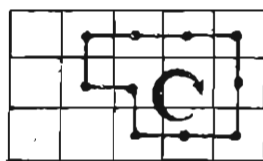
Definición 2.5.5

Llamaremos ARBOLES B_T a los Π - grafos que sean árboles y que tengan al menos un vértice en cada fila y en cada columna de T (figura 2.8)

Figura 2.8 Arbol B_T

Puede notarse que:

- a) Si consideramos un ciclo cualquiera (o una cadena) C que sea un Π - grafo, existe un subconjunto del conjunto de los vértices de este ciclo (o cadena) que define un μ - ciclo (o una μ - cadena). Para obtener este μ - ciclo (o μ - cadena), basta con orientar C en un sentido cualesquiera y, en toda fila o columna de T donde exista más de un arco de C , unir con una arista el origen del primer arco encontrado y el extremo del último arco encontrado cuando se recorre C en el sentido de orientación elegido, suprimiendo el camino que unía originalmente estos dos vértices (figura 2.9)



Ciclo

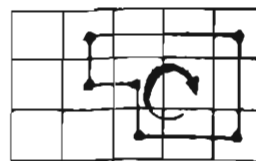
 μ -ciclo

Figura 2.9

b) Por otro lado, la forma en que hemos definido la correspondencia biunívoca muestra que a todo ciclo (o cadena) elemental de G está asociado un μ - ciclo (o una μ - cadena) en Γ y viceversa. Con todo rigor, la cadena asociada a una μ - cadena tiene aristas terminales con un único vértice extremo, las cuales conoceremos como ARISTAS PENDIENTES.

De lo anterior tenemos que, si existe un ciclo en un Π -grafo o una cadena entre dos vértices p_1 y p_2 de éste, existe en el grafo parcial de G un ciclo asociado a éste o una cadena que une las dos aristas asociadas con p_1 y p_2 ; y que, recíprocamente, si existe un ciclo o una cadena elemental en un grafo parcial de G , existen un μ - ciclo o una μ - cadena en el Π - grafo asociado. Luego, basándonos en la definición de árbol, los árboles de G y de Γ están asociados en la correspondencia definida anteriormente, es decir, existe una correspondencia entre los grafos parciales de G que son árboles (B_G) y los árboles B_Γ definidos anteriormente; del hecho de que exista al menos un vértice de B_Γ en cada fila y cada columna de T , se deduce que no hay ningún vértice aislado en el grafo parcial de G asociado a B_Γ .

Haciendo algunas transformaciones en las propiedades de un árbol B_G (Teoremas 1.1 y 1.2), obtenemos, en la tabla T , las siguientes propiedades:

Propiedad 1. Un Π - grafo es un árbol B_T si y sólo si no contiene ningún ciclo y tiene $(m+n-1)$ vértices, ya que un árbol B_G tiene $(m+n-1)$ aristas y ningún ciclo.

Propiedad 2. En T existen al menos dos filas o columnas que no contienen más que un vértice de B_T , ya que B_G tiene al menos dos vértices pendientes.

Propiedad 3. Si a los $(m+n-1)$ vértices de un árbol B_T agregamos un $(m+n)$ -ésimo vértice cualesquiera de r , podemos extraer de este conjunto de vértices de r un subconjunto, y uno solo, para el cual el Π - grafo asociado es un μ - ciclo. En efecto, añadiendo una arista entre dos vértices no adyacentes de B_G creamos un ciclo y uno solo, un ciclo elemental; asociado a este ciclo se encuentra el μ - ciclo buscado.

Propiedad 4. Si de un μ - ciclo cualesquiera de T suprimimos un vértice cualesquiera y las dos aristas que inciden en él, obtenemos un Π - grafo sin ciclo y que tiene $(m+n-1)$ vértices, es decir, un árbol B_T .

2.6 Propiedades Gráficas de las Bases.

Con todo vector columna de la matriz A $a_{ij} = e_i + e_{m+j}$ están asociados: la arista $[0_i, d_j]$ de G y el vértice de r situado en la casilla (i, j) , intersección de la fila i y la columna j de T .

Luego, a todo conjunto de vectores corresponden dos grafos, uno en G y otro en Γ . Analizaremos las propiedades de los grafos asociados de esta manera con un conjunto de vectores de base.

LEMA 2.1

Un conjunto de vectores columna a_{ij} de la matriz de incidencia A son linealmente dependientes, si corresponden a un ciclo elemental en G o, equivalentemente, si los puntos (i, j) asociados con estos vectores en T se encuentran en los vértices de un μ - ciclo. En este caso, cuando se recorre el ciclo en un sentido cualesquiera los coeficientes de la relación lineal son alternativamente $+1$ ó -1 .

Demostración:

Un ciclo elemental en G , tiene por vértices una secuencia de puntos tal como :

$$[0_i , d_1 , 0_k , d_p , \dots , 0_r , d_s , 0_i]$$

Luego, los vectores asociados con las aristas son:

$$a_{i1} , a_{k1} , a_{kp} , \dots , a_{rs} , a_{is}.$$

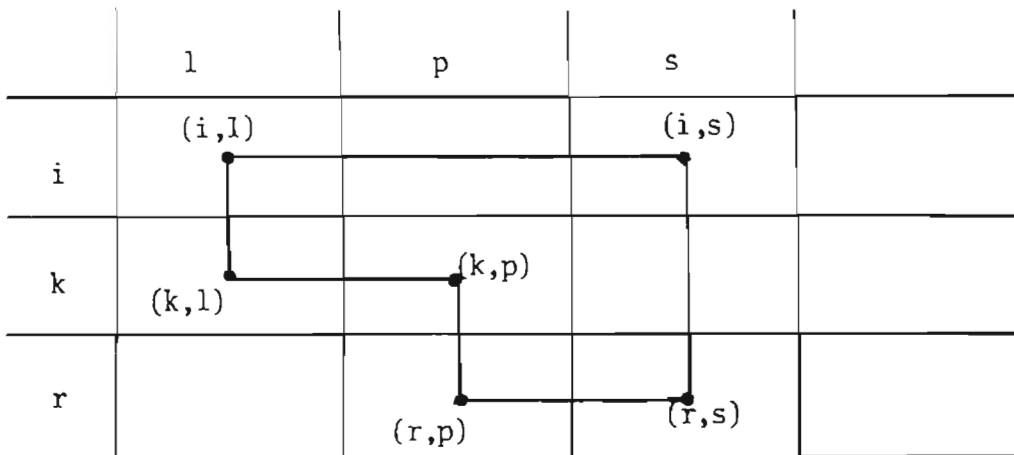
La suma alternada de estos vectores, recordando que

$$a_{ij} = e_i + e_{m+j} , \text{ es:}$$

$$\begin{aligned} (e_i + e_{m+1}) - (e_k + e_{m+1}) + (e_k + e_{m+p}) + \dots + (e_r + e_{m+s}) - (e_i + e_{m+s}) = \\ e_i + e_{m+1} - e_k - e_{m+1} + e_k + e_{m+p} + \dots + e_r + e_{m+s} - e_i - e_{m+s} = 0 \end{aligned}$$

De donde se tiene que estos vectores son linealmente dependientes, ya que sus coeficientes son no nulos.

Si en T , se tiene el siguiente μ - ciclo



alternando los coeficientes en un sentido cualesquiera, asignando el valor de +1 y -1 a los vectores asociados se tiene:

$$a_{il} - a_{is} + a_{rs} - a_{rp} + a_{kp} - a_{kl} = 0$$

o también

$$a_{il} - a_{kl} + a_{kp} - a_{rp} + a_{rs} - a_{is} = 0$$

TEOREMA 2.4

Un grafo parcial de G con $(m+n-1)$ aristas es un árbol si, y sólo si, las columnas de una matriz de incidencia con las aristas A' son vectores linealmente independientes.

Demostración:

i) Probaremos primero que si las columnas de A' son vectores linealmente independientes entonces G con $(m+n-1)$ aristas es un árbol.

Por el lema 2.1 tenemos que por ser los vectores linealmente independientes, el grafo parcial G no contiene ningún ciclo, y puesto que tiene $(m+n)$ vértices y

$(m+n-1)$ aristas, luego es un árbol.

ii) Probaremos ahora la otra implicación. Si el grafo parcial de G considerado es un árbol, existe al menos un vértice pendiente. Hagamos permutaciones entre las filas y las columnas de A' hasta lograr asociar la primera fila y la primera columna de la matriz, respectivamente, con un vértice pendiente de G y con su arista incidente. El subgrafo parcial G_1 de G obtenido suprimiendo el vértice y la arista considerados es todavía un árbol. Permutemos nuevamente las filas y las columnas de A' , sin tocar la primera fila ni la primera columna, de manera que asociemos la segunda fila y la segunda columna respectivamente con un vértice pendiente de G_1 y con su arista incidente. Repetimos el proceso hasta obtener una matriz de la forma:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ S_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ S_{31} & S_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ S_{m+n-1,1} & & & \dots & 1 \\ S_{m+n,1} & & & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

en A' todos los s_{ij} son iguales a 0 ó a 1, y para un j fijo, sólo un s_{ij} (distinto del 1 de la diagonal) es igual a 1. Una matriz de este tipo es llamada TRIANGULAR.

La submatriz formada por las $(m+n-1)$ primeras filas de A' tiene un determinante igual a 1, luego los $(m+n-1)$ vectores columna de A' son linealmente independientes.

Hemos visto anteriormente que existe una correspondencia biunívoca entre las soluciones de base y las matrices B' formadas por $(m+n-1)$ vectores columna de A linealmente independientes, matriz que tiene además sus determinantes de orden $(m+n-1)$ no nulos.

Usando los resultados del teorema anterior obtenemos los siguientes corolarios:

Corolario 1.

Existe una correspondencia biunívoca entre las bases del problema del transporte y los grafos parciales de G que son árboles: un árbol constituye un conjunto de "rutas de base" del grafo de transporte G .

Corolario 2.

La matriz B' formada por $(m+n-1)$ columnas de A es triangular si, y sólo si, los $(m+n-1)$ vectores columnas forman una base.

La demostración del teorema 2.4 prueba este corolario y da el procedimiento a seguir para reorganizar la matriz B' de manera que pase a ser triangular.

Estas propiedades podemos transcribirlas a la tabla T , usando la correspondencia definida anteriormente entre los grafos G y Γ , así:

Corolario 3.

Existe en la tabla T, una correspondencia biunívoca entre las bases del problema de transporte y los árboles B_T .

Lo anterior significa que en la tabla T, las bases cumplen las propiedades enunciadas en la sección 2.5.5 para los árboles A_T .

C A P I T U L O I I I

EL METODO DEL SIMPLEX ADAPTADO

3.1 Notaciones.

Para evitar índices triples, en adelante, supondremos que las variables del problema y los vectores correspondientes de la matriz A, de los coeficientes de las condiciones lineales, - están numerados del 1 al (mxn).

$$\text{Sea } (A,d) = (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_{(mxn)}, d)$$

la matriz completa del sistema, en donde a_j es un vector columna ($1 \leq j \leq mxn$) y

$d = (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$ es el vector que contiene las constantes del sistema.

Llamaremos

$$(A^1, d^1) = (a_1^1, a_2^1, \dots, a_{(mxn)}^1, d^1) \text{ a la matriz}$$

obtenida de (A,d) suprimiendo una fila (cualquiera, pero fija) de ésta.

$$\text{Sea } B' = (a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{m+n-1}})$$

una submatriz de A formada por (m+n-1) vectores columna linealmente independientes.

No olvidemos que todo determinante de orden $(m+n-1)$ tomado en B' es distinto de cero, de donde las $(m+n-1)$ variables asociadas a las columnas B' forman un sistema de variables de base.

$$\text{Llamaremos } B = (a_{j_1}^1, \dots, a_{j_{m+n-1}}^1)$$

a la submatriz obtenida de B' al suprimir la fila que tenga el mismo índice que se eliminó en (A, d) para formar (A^1, d^1) . Obsérvese que B es una matriz regular, es decir, cuadrada y de orden $(m+n-1)$. Esto podemos afirmarlo categóricamente ya que B' se obtiene eliminando una columna de las $(m+n)$ que posee la matriz A , quedando $(m+n-1)$ vectores columna linealmente independientes; y luego eliminamos una fila de B' , obteniendo $(m+n-1)$ filas.

Puede notarse también que B' es la matriz formada por las columnas $j_1, j_2, \dots, j_{m+n-1}$ de (A^1, d^1) .

Un vector columna a_j cualesquiera puede escribirse en función de las columnas de B .

Primero definiremos formalmente el vector columna Y_j así:

$$Y_j = B^{-1} a_j^1$$

que no es nada más que la solución del sistema

$$BY_j = a_j^1,$$

puede decirse entonces que Y_j es el vector columna que contiene los coeficientes que expresan linealmente a_j^1 en función de los vectores de la base.

Como B^{-1} es de orden $(m+n-1) \times (m+n-1)$ y a_j^1 es de orden $(m+n-1) \times 1$, tenemos que Y_j es de orden $(m+n-1) \times 1$; ahora definiremos

$$a_j = B' Y_j = \sum_{s=j_1}^{jm+n-1} Y_{s_j} a_s, \quad j = 1, 2, \dots, (mxn) \quad (3.1)$$

Como B' es de orden $(m+n) \times (m+n-1)$ y Y_j es de orden $(m+n-1) \times 1$, se tiene entonces que a_j es de orden $(m+n) \times 1$, - que corresponde al orden de un vector columna de A cualesquiera.

La solución de base asociada con B es:

$$\bar{X}^B = B^{-1} d^1, \text{ de orden } (m+n-1) \times 1.$$

Nota: Para considerar un valor numérico de X , C ó Z lo denotaremos por \bar{X}, \bar{C} ó \bar{Z} .

Obsérvese que en este caso \bar{X}^B juega respecto a d^1 , el mismo papel que juega Y_j respecto al vector a_j , en la definición de Y_j dada anteriormente.

Luego podemos decir que \bar{X}^B posee los coeficientes que expresan linealmente d^1 en función de los vectores de la base, así:

$$B \bar{X}^B = d^1 .$$

Los coeficientes de las variables de base, en la forma a optimizar, constituyen el vector

$$C^B = (C_{j_1}, C_{j_2}, \dots, C_{j_{m+n-1}})$$

El valor de Z , la función a optimizar, es

$$\bar{Z} = C^B \bar{X}^B$$

de donde

$$Z_j = C^B Y_j = \sum_{s=j_1}^{j_{m+n-1}} Y_{s_j} C_s \quad (3.2)$$

como $Y_j = B^{-1} a_j^1$; equivale a usar en \bar{X}^B , a_j^1 el vector columna de la base B correspondiente al j -ésimo lugar, en vez de utilizar d^1 .

3.2 Aplicación de los Resultados del método del Simplex.

3.2.1 Cálculo de $(Z_j - C_j)$.

Hemos estudiado en los apartados 2.5 y 2.6 que, dado un vector a_j que no pertenece a la base, existe un subconjunto de los vértices de Γ asociados con los vectores de la base que forman un μ -ciclo en T , con el vértice asociado con a_j .

Por otro lado, en el Lema 2.1, hemos demostrado que existe una relación lineal entre los vectores asociados con los vértices de este μ -ciclo, siendo los coeficientes $+1$ y -1 cuando

recorremos el ciclo en un sentido determinado.

Así tendríamos que

$$a_j - a_{s_1} + a_{s_2} - a_{s_3} + \dots + (-1)^{p+1} a_{s_p} + \dots - a_{s_{2q-1}} = 0$$

de donde

$$a_j = a_{s_1} - a_{s_2} + a_{s_3} - \dots + (-1)^{p+1} a_{s_p} + \dots + a_{s_{2q-1}} \quad (3.3)$$

De las fórmulas (3.1) , (3.2) y (3.3) obtenemos que:

$$Z_j - C_j = \bar{c}_{s_1} - \bar{c}_{s_2} + \dots + (-1)^{p+1} \bar{c}_{s_p} + \dots + \bar{c}_{s_{2q-1}} - C_j \quad (3.4)$$

Así, obtenemos fácilmente la expresión de $Z_j - C_j$ y podemos determinar el índice K del vector a_k que debe entrar en la base por la relación

$$Z_k - C_k = \text{Max} [Z_j - C_j]$$

Es decir, debemos calcular para todos los vértices del μ -ciclo asociado en T , el valor $Z_j - C_j$ y escoger entre ellos a aquel vértice que nos proporcione la mayor diferencia, lo que implicará que estaremos seleccionando la variable que dará la mejora óptima a la solución de base.

3.2.2 Cálculo de \bar{X}_s / Y_{s_k} para todo S tal que $Y_{s_k} > 0$.

Si ya obtuvimos el vector que entrará en la base, debemos determinar cual deberá abandonarla. Hemos visto que cuando Y_{s_k}

es positivo su valor es +1, lo cual puede observarse en la expresión a_j dada en la ecuación (3.3), donde los vectores de base de orden impar van afectados por este coeficiente +1.

Nota: En adelante el subíndice "1" representará a la letra e y no al número uno.

Así, el vector a_1 que abandonará la base estará dada por:

$$\bar{X}_1 = \min_p [\bar{X}_{s_{2p-1}}] , \quad p = 1, 2, \dots, q$$

es decir, el más pequeño de los valores que esté ubicado en un vértice de orden impar en el μ -ciclo.

3.2.3 Cálculo de los nuevos valores de las variables de base.

Denotaremos los nuevos valores de las variables de base por \bar{X}'_s y los determinaremos así:

$$\bar{X}'_s = \bar{X}_s - \bar{X}_1 \frac{Y_{sk}}{Y_{1k}} , \quad \text{con } Y_{ik} = +1.$$

En este caso, únicamente cambian los valores de las variables asociadas con los vértices del ciclo, puesto que, para las demás $Y_{sk} = 0$; luego, como para los vértices impares $Y_{sk} = 1$ y para los pares $Y_{sk} = -1$, tenemos que:

$$\bar{X}'_{s_{2p}} = \bar{X}_{s_{2p}} + \bar{X}_1$$

$$\bar{X}'_{s_{2p-1}} = \bar{X}_{s_{2p-1}} - \bar{X}_1$$

es decir, que a los valores ubicados en vértices de orden par,

le sumaremos el valor de la variable que abandona la base y a los valores que se encuentran en vértices de orden impar en el μ -ciclo se les restará \bar{X}_1 .

3.2.4 Cálculo de los nuevos valores de los Y_j .

Cuando encontramos el μ -ciclo para todo vector a_j , obtenemos inmediatamente el valor correspondiente de Y_j , efectuando el producto de los vértices del μ -ciclo encontrado por a_j .

3.3 Algoritmo de Transporte.

a) Considerar la tabla de transporte T.

Determinar un programa inicial de base y escribir los valores de este programa en T.

Un ejemplo se considera en la figura 3.1.

| | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | |
|-------|---------|---------|---------|---------|----------------|
| o_1 | 2 70 | 1 20 | 3 10 | 2 0 | 100 |
| o_2 | 1 0 | 1 0 | 2 5 | 1 25 | 30 |
| o_3 | 1 0 | 1 0 | 2 0 | 2 60 | 60 |
| o_4 | 70 | 20 | 15 | 85 | a_i b_j |

Fig. 3.1

b) Considerar sucesivamente todas las casillas de la ta-

bla que no contengan variables de base, donde haya un cero; para cada una de estas casillas determinar, por tanteos sucesivos, el μ -ciclo formado por esta casilla y algunas de las casillas ocupadas por las variables de base y calcular $Z_j - C_j$ usando la fórmula (3.4) estudiada anteriormente. Si $Z_j - C_j \leq 0$ (para todo j) - el programa actual es minimal. Si, para al menos un valor de j , $Z_j - C_j > 0$ llamemos K al índice de la casilla tal que

$$Z_k - C_k = \text{Max } [Z_j - C_j]$$

y $\bar{\mu}$ al μ -ciclo correspondiente.

Por ejemplo, si en la tabla anterior formamos un μ -ciclo agregando la casilla (3,1), marcada con asterisco en la figura 3.2, tendremos:

| | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | |
|-------|---------|---------|---------|---------|-------|
| o_1 | 2 70 | 1 20 | 3 10 | | 100 |
| o_2 | | | 2 5 | 1 25 | 30 |
| o_3 | 1 * | | | 2 60 | 60 |
| | 70 | 20 | 15 | 85 | a_i |
| | | | | | b_j |

Fig. 3.2

para la casilla (3,1)

$$Z_{31} = 2 - 1 + 2 - 3 + 2 = 2$$

$$C_{31} = 1$$

Luego $Z_{31} - C_{31} = 1 > 0$, lo que significa que introducir este vértice mejorará el programa inicial.

Para encontrar el índice k tal que $Z_k - C_k = \text{Máx } [Z_j - C_j]$ calculemos $Z_j - C_j$ para las otras casillas.

Nótese que la casilla (1,2) no participa en el μ -ciclo.

Para (3,4).

$$\left. \begin{array}{l} Z_{34} = 1 - 2 + 3 - 2 + 1 = 1 \\ C_{34} = 2 \end{array} \right\} Z_{34} - C_{34} = -1$$

Para (2,4).

$$\left. \begin{array}{l} Z_{24} = 2 - 3 + 2 - 1 + 2 = 2 \\ C_{24} = 1 \end{array} \right\} Z_{24} - C_{24} = 1$$

Para (2,3).

$$\left. \begin{array}{l} Z_{23} = 3 - 2 + 1 - 2 + 1 = 1 \\ C_{23} = 2 \end{array} \right\} Z_{23} - C_{23} = -1$$

Para $(1,5)$.

$$\begin{array}{l} \bar{C}_{15} = 2-1 + 2-1 + 2 = 4 \\ C_{15} = 5 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \bar{C}_{15} - C_{15} = -1$$

Para $(1,1)$.

$$\begin{array}{l} \bar{C}_{11} = 1-2 + 1-2 + 5 = 1 \\ C_{11} = 2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \bar{C}_{11} - C_{11} = -1$$

Observemos que las casillas $(5,1)$, $(2,4)$ y $(1,5)$ tienen igual valor para $\bar{C}_j - C_j$, por conveniencia tomaremos como K la casilla $(5,1)$.

- c) Señalar, de alguna manera, las casillas que ocupan un lugar de $\bar{\mu}$, cuando se recorre este ciclo en un sentido cualesquiera, empezando en la casilla $K(3,1)$ a la que se asignará el número uno.

Buscar, en las casillas señaladas, la variable que tenga el valor minimal (en nuestro caso el valor 5 ubicado en la casilla $(2,3)$); sea X_1 esta variable (o una de ellas si hay varias) y \bar{X}_1 su valor.

- d) Disminuir en \bar{X}_1 los valores de las variables situadas en las casillas señaladas (pares) y aumentar en \bar{X}_1 los

valores de las casillas restantes de \bar{u} (lugares impares), incluyendo x_k , que tomará el valor \bar{x}_1 .

Ver figura 3.3

| | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|----------------|
| 0_1 | 65 | 20 | 15 | | 100 |
| 0_2 | | | 0 | 50 | 50 |
| 0_3 | 5 | | | 55 | 60 |
| 0_4 | 70 | 20 | 15 | 85 | a_j b_j |

Fig. 3.3

Obsérvese que el valor mínimo 5 se va restando y sumando alternadamente en los vértices del μ -ciclo

$$[(3,4), (2,4), (2,3), (1,3), (1,1), (3,1)]$$

El conjunto formado por x_k y las variables de la base anterior, excepto x_1 , constituye la nueva base, y con los nuevos valores de las variables de base la forma a minimizar toma un valor inferior o igual al anterior.

En nuestro caso, la forma original era:

$$Z = 2 \times 70 + 1 \times 20 + 3 \times 10 + 2 \times 5 + 1 \times 25 + 2 \times 60 = 345$$

y la forma modificada es

$$Z' = 2 \times 65 + 1 \times 20 + 3 \times 15 + 1 \times 30 + 2 \times 55 + 1 \times 5 = 340$$

Puede observarse que el valor es inferior al anterior.

La operación de restar y sumar el valor de X_1 puede dar un valor nulo a algunas variables que no sean X_1 ; no obstante estas variables nulas deben ser consideradas como parte integrante de la base, que en este caso es DEGENERADA (por contener variables nulas).

- e) Repetir las operaciones b), c), d) a partir de la nueva base hasta que todos los $Z_j - C_j$ sean negativos o nulos (programa minimal).

Nota: A continuación usaremos de nuevo el índice doble.

3.4 Programa Inicial de Base.

Para que el algoritmo anterior sea válido, es necesario que la solución inicial sea un programa de base. Veremos un método general que permita obtener este tipo de programas y después algunos casos particulares de este método, de empleo frecuente.

3.4.1 Método General de Obtención.

- a) Dar a una variable cualquiera X_{ij} el valor:

$$\bar{X}_{ij} = \min [a_i, b_j]$$

Es decir, escogemos un vértice X_{ij} cualesquiera de la

tabla T, y le asignamos a éste el valor que corresponda al menor entre a_i (cantidad de producto en el origen i) y b_j (cantidad demandada en el destino j).

- b) Reemplazar respectivamente a_i y b_j por $a_i - \bar{X}_{ij}$ y $b_j - \bar{X}_{ij}$. Obsérvese que estamos disminuyendo las cantidades a_i y b_j en el valor asignado a X_{ij} .

Suprimiremos la fila i si $\bar{X}_{ij} = a_i$ o la columna j si $\bar{X}_{ij} = b_j$, con lo que obtendremos una tabla reducida.

Lo anterior nos indicará respectivamente que la oferta en a_i o la demanda en b_j ha sido agotada, y que la fila o la columna correspondiente ya no deberá participar.

- c) Repetir las dos operaciones anteriores en las sucesivas tablas reducidas hasta que se satisfagan todas las demandas, es decir que únicamente haya una fila o una columna sin agotar. En el caso en que, al efectuar los cálculos, encontremos dos cantidades iguales entre ellas hay que encontrar un mínimo, el algoritmo siempre es válido si suprimimos al azar la fila o la columna correspondiente; una variable de base calculada en una etapa posterior tendrá entonces el valor cero; pero es útil considerar que forma parte del programa inicial. La tabla de la figura 3.6 ilustra este caso.

3.4.2 Casos Particulares de este Método:

Usaremos la tabla de la figura 3.4 como medio para analizar estos métodos.

El costo de transporte unitario C_{ij} está dado en unidades monetarias. La oferta a_i y la demanda b_j están dadas en número de unidades.

| | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 0_1 | 10 x_{11} | 0 x_{12} | 20 x_{13} | 11 x_{14} | 15 |
| 0_2 | 12 x_{21} | 7 x_{22} | 9 x_{23} | 20 x_{24} | 25 |
| 0_3 | 0 x_{31} | 14 x_{32} | 16 x_{33} | 18 x_{34} | 5 |
| | 5 | 15 | 15 | 10 | a_i b_j |

Fig. 3.4

3.4.2.1 Método de la "Esquina Noroeste".

Este procedimiento es de gran interés para los cálculos en computadora por ser sistemático. Comienza asignando la cantidad máxima permitida por la oferta y la demanda a la variable x_{11} (la que está en la esquina noroeste de la tabla). La fila o columna satisfecha se elimina, indicando que las variables restantes en esa fila o columna tachada son ceros.

A continuación se efectúa exactamente la misma operación -

eligiendo, en cada etapa del método general expuesto anteriormente, la variable ubicada en la primera fila y primera columna de la tabla reducida.

El procedimiento anterior termina cuando queda exactamente una fila o una columna sin tachar.

Apliquemos este método al ejemplo en la tabla de la figura 3.4.

- a) $X_{11} = 5$, lo cual elimina la columna 1. Por lo tanto ninguna asignación adicional puede hacerse en la columna 1. La cantidad que todavía hay en oferta en la fila 1 es de 10 unidades.
- b) $X_{12} = 10$, con esta asignación se tacha la fila 1 y deja 5 unidades demandadas pendientes en la columna 2.
- c) $X_{22} = 5$, con lo cual eliminamos la columna 2 y quedan 20 unidades en oferta en la fila 2.
- d) $X_{23} = 15$, tachamos la columna 3 y quedan 5 unidades en oferta en la fila 2.
- e) $X_{24} = 5$, tachamos la fila 2 y quedan 5 unidades demandadas en la columna 4.
- f) $X_{34} = 5$, con lo cual se elimina la fila 3 o la columna 4.

Ya que únicamente una fila o una columna permanece sin tachar, termina así el procedimiento.

La solución básica inicial se da en la tabla de la figura 3.5. Las variables básicas son $X_{11} = 5$, $X_{12} = 10$, $X_{22} = 5$, $X_{23} = 15$, $X_{24} = 5$ y $X_{34} = 5$. Las variables restantes son no básicas y tienen valor cero.

El coste del transporte asociado a esta solución básica es:

$$5 \times 10 + 10 \times 0 + 5 \times 7 + 15 \times 9 + 5 \times 20 + 5 \times 18 = 410$$

| | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|----------------|
| o_1 | 5 | 10 | | | 15 |
| o_2 | | 5 | 15 | 5 | 25 |
| o_3 | | | | 5 | 5 |
| | 5 | 15 | 15 | 10 | a_i b_j |

Fig. 3.5

Puede notarse que las casillas de las variables utilizadas forman una "escalera", o si consideramos los vértices, un árbol.

Quando tanto una columna como una fila se satisfacen simultáneamente, la variable siguiente que debe agregarse a la solu -

ción básica necesariamente será cero. La tabla de la figura 3.6 nos muestra este caso.

La columna 2 y la fila 2 se satisfacen simultáneamente. Si la columna 2 se tacha, X_{23} se hará básica con un valor de cero en el siguiente paso, ya que la oferta restante para la fila 2 es cero. Ahora si en lugar de la columna 2 se tachara la fila 2, X_{32} sería la variable básica cero.

| | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|----------------|
| 0_1 | 5 | 5 | | | 10 |
| 0_2 | | 5 | 0 | | 5 |
| 0_3 | | | 8 | 7 | 15 |
| | 5 | 10 | 8 | 7 | a_i b_j |

Fig. 3.6

Observemos que las soluciones básicas en las tablas de las figuras 3.5 y 3.6 tienen el número de variables básicas adecuadas $m+n - 1 = 6$. El método de la esquina noroeste proporciona siempre el número apropiado de variables básicas.

3.4.2.2 Método del Coste Minimal.

Este procedimiento da, en general un programa inicial que se acerca más al programa optimal que el del método de la esquina noroeste.

Consiste en elegir, en cada etapa, la variable X_{kl} correspondiente a:

$$C_{kl} = \min_{(i,j)} [C_{ij}]$$

Este método se fundamenta en asignar tanto como sea posible a la variable con el coste unitario más pequeño en la tabla completa.

Cuando hayan dos costes iguales, se escoge arbitrariamente uno de ellos. El siguiente paso es tachar la fila o columna satisfecha. Como en el caso anterior, si la fila y la columna se satisfacen simultáneamente sólo una puede ser tachada.

Se repite el proceso asignando tanto como sea posible a la variable no tachada con el coste unitario más pequeño. El procedimiento está completo cuando únicamente queda una fila o columna sin tachar.

El problema de transporte en la tabla de la figura 3.4 será usado para ilustrar la aplicación de este método. La tabla de la figura 3.7 muestra la solución básica inicial resultante.

Los pasos siguientes son:

X_{12} y X_{31} son las variables asociadas a los costes unitarios más pequeños ($C_{12} = C_{31} = 0$).

Rompiendo arbitrariamente la igualdad, seleccionemos X_{12} . Las unidades asociadas de oferta y demanda dan $X_{12} = 15$, lo cual satisface tanto la fila 1 como la columna 2. Tachando la columna 2, la oferta que se deja en la fila 1 es cero.

Ahora X_{31} tiene el coste unitario más pequeño sin tachar. Por consiguiente $X_{31} = 5$ satisface tanto la fila 3 como la columna 1. Tachando la fila 3, la demanda en la columna 1 es cero.

El elemento más pequeño sin tachar es $C_{23} = 9$. Las unidades de oferta y demanda nos llevan a $X_{23} = 15$, con lo cual tachamos la columna 3 y nos quedan 10 unidades de oferta en la fila 2.

El coste más pequeño sin tachar es $C_{11} = 10$, como la oferta restante en la fila 1 y la demanda que hay en la columna 1 son ambas cero, $X_{11} = 0$.

Tachando la columna 1, la oferta que se deja en la fila 1 es cero.

Las variables básicas restantes se obtienen, respectivamente, así: $X_{14} = 0$ y $X_{24} = 10$.

El coste total asociado con esta solución es:

$0 \times 10 + 15 \times 0 + 0 \times 11 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 0 = 335$, que es mejor, -
 más pequeño, que el proporcionado por el método de la esquina
 noroeste.

| | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | |
|-------|---------|---------|---------|----------|----------------|
| 0_1 | 10 0 | 0 15 | 20 | 11 0 | 15 |
| 0_2 | 12 | 7 | 9 15 | 20 10 | 25 |
| 0_3 | 0 5 | 14 | 16 | 18 | 5 |
| | 5 | 15 | 15 | 10 | a_i b_j |

Fig. 3.7

Observemos que esta solución básica incluye 4 variables po-
 sitivas y 2 variables cero; esto significa que la solución bás_i-
 ca inicial es DEGENERADA, es decir, al menos una variable bás_i-
 ca es igual a cero. Más adelante veremos que la degeneración
 no presenta problemas especiales al resolver el problema ya que
 las variables básicas "cero" pueden tratarse como cualquiera de
 las variables básicas positivas.

3.4.2.3 Método de Aproximación de Vogel.

Usualmente, este método proporciona una mejor solución bá-

sica inicial que los dos métodos anteriores, el mayor número de veces produce una solución de inicio óptima o cercana a la óptima.

Los pasos del procedimiento son los siguientes:

Paso 1: Se calcula una penalización para cada fila (columna), encontrando la diferencia de los dos costes menores en la misma fila (columna).

Paso 2: Se identifica la fila o la columna con la penalización mayor, escogiendo arbitrariamente cuando se encuentren dos penas o pagos de igual valor.

Se asigna tanto como sea posible a la variable con el coste mínimo en la fila o columna seleccionada. A continuación tachamos la fila o la columna satisfecha.

Si una fila y una columna se satisfacen simultáneamente, sólo una de ellas se tacha y a la fila o columna no tachada se le asigna una oferta o demanda cero.

Nota: Cualquier fila o columna con oferta o demanda cero no deberá ser utilizada al calcular penalizaciones futuras (en el paso 3).

Paso 3:

a) Si exactamente una fila o columna permanece sin estar tachada, paramos.

- b) Si sólo una fila o columna con oferta o demanda POSITIVA permanece sin estar tachada, determinamos las variables básicas en la fila o columna por el método del coste mínimo.
- c) Si todas las filas o columnas no tachadas tienen oferta y demanda cero, determinamos las variables básicas cero por el método del coste mínimo y paramos los cálculos.
- d) En cualquier otro caso, se calculan las penalizaciones para las filas y columnas no tachadas y se regresa al paso 2.

Recuerde que las filas y columnas con oferta y demanda cero no se usarán al calcular estas penalizaciones.

Aplicaremos el Método de Vogel al problema de la tabla en la figura 3.4. En la figura 3.8 tenemos el primer conjunto de penalizaciones de fila y columna.

Como la fila 3 tiene la pena mayor, que es 14, y como $C_{31}=0$ es el coste unitario mínimo en la misma fila, la cantidad 5 se asigna a X_{31} . La fila 3 y la columna 1 se satisfacen simultáneamente, supondremos que la columna 1 se tacha, lo que hace que la oferta restante para la fila 3 es cero.

| | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | Penalización de Filas. | |
|-------|-------|-------|-------|-------|---------------------------|-------|
| 0_1 | 10 | 0 | 20 | 11 | 15 | 10 |
| 0_2 | 12 | 7 | 9 | 20 | 25 | 2 |
| 0_3 | 0 | 14 | 16 | 18 | 5 | 14 |
| | 5 | 15 | 15 | 10 | a_i | b_j |
| | 10 | 7 | 7 | 7 | Penalización de Columnas. | |

Fig. 3.8

En la figura 3.9 se muestra el nuevo conjunto de penalizaciones después de tachar la columna 1 en la tabla de la figura 3.8. Nótese que la fila 3 con oferta cero no se toma en cuenta al calcular las penalizaciones.

Puede observarse que la fila 1 y la columna 3 tienen igual pena, que es igual a 11.

Seleccionando arbitrariamente la columna 3, la cantidad 15 se asigna a X_{23} , tachamos la columna 3 y la oferta en la fila 2 queda disminuida a 10.

| | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| 0_1 | 10 | 0 | 20 | 11 | 15 | 11 |
| 0_2 | 12 | 7 | 9 | 20 | 25 | 2 |
| 0_3 | 0 | 5 | 15 | | 5 | - |
| | 5 | 15 | 15 | 10 | a_i | |
| | - | 7 | 11 | 9 | b_j | |

Fig. 3.9

El nuevo conjunto de penalizaciones después de tachar la columna 3 está dado en la figura 3.10. Observe que en este caso no se toman en cuenta para los cálculos las columnas 1 y 3 tachadas y la fila 3 que ya saturó su oferta.

La mayor penalización es la de la fila 2, que es igual a 13 y como $C_{22} = 7$ es el menor coste, $X_{22} = 10$, por lo tanto se tacha la fila 2 cuya oferta ahora es cero.

| | | | | |
|----|----|----|-------|-------|
| 10 | 0 | 11 | 15 | 11 |
| 12 | 7 | 9 | 25 | 13 |
| 0 | 10 | 15 | 5 | - |
| 5 | | | a_i | |
| 5 | 15 | 15 | 10 | b_j |
| - | 7 | - | 9 | |

Fig. 3.10

Aplicaciones sucesivas del Método de Vogel producen:

$X_{12} = 5$ y se tacha la columna 2;

$X_{14} = 10$ y se tacha la fila 1, y

$X_{34} = 0$.

En este caso el coste del programa es 315, con las variables básicas: $X_{31} = 5$, $X_{23} = 15$, $X_{22} = 10$, $X_{12} = 5$, $X_{14} = 10$, $X_{34} = 0$.

La versión anterior del Método de Vogel, rompe igualdades arbitrariamente entre penalizaciones; sin embargo esta ruptura puede ser crucial para dar una buena solución inicial.

Por ejemplo, en la tabla de la figura 3.9, si la fila 1 se escoge en lugar de la columna 3, resulta una solución básica -

inicial no tan buena como la anterior, con variables básicas $X_{12} = 15$, $X_{23} = 15$, $X_{24} = 10$, $X_{31} = 5$, $X_{32} = 0$, $X_{34} = 0$ y un coste total de 335.

Teorema 3.1

El método general expuesto anteriormente proporciona un programa de base del problema de transporte.

Demostración.

Por lo visto anteriormente (sección 2.5 y Teorema 2.4) basta con demostrar que este programa está formado por $(m+n-1)$ variables y que los puntos asociados con estas variables en la tabla de transporte T son los vértices de un Π -grafo sin ciclo.

Consideraremos primero el caso particular del Método de la esquina noroeste: si consideramos la suma de los dos índices de las distintas variables del programa, ordenadas como han sido elegidas, esta suma aumenta en una unidad en cada etapa del procedimiento.

Puede observarse la tabla de la figura 3.5.

Siendo X_{11} la primera variable y X_{mn} la última, a partir de X_{11} efectuamos $(m+n-2)$ elecciones de variables, entonces tenemos en el programa

$$(m+n-2) + 1 = (m+n-1) \text{ variables.}$$

Por otro lado, existe en T una cadena única que une los puntos asociados con las variables del programa, ordenadas como se han obtenido; recorriendo la cadena de X_{11} a X_{mn} todos los índices son no decrecientes, luego no puede existir ciclo.

Lo anterior puede comprobarse en la figura 3.11 que muestra el Π -grafo asociado a la solución básica de la tabla en la figura 3.5.

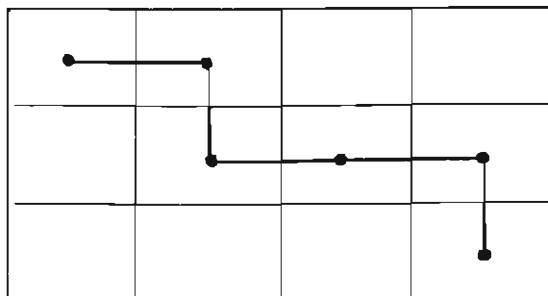


Fig. 3,11

Si consideramos ahora el método general, podemos por permutaciones de las filas y las columnas de T , colocar las variables en la posición que ocuparían en el procedimiento de la esquina noroeste, luego tendríamos $(m+n-1)$ variables. Al efectuar las permutaciones se conservarán los ciclos existentes; pero si hemos ordenado las variables de acuerdo al método de la esquina noroeste, tenemos que no existe ciclo en el programa obtenido por el método general.

3.4.3 Mejora del Programa Inicial.

Es posible mejorar un programa inicial de base, sin importar el método usado para obtenerlo.

El procedimiento es el siguiente:

Consideremos, en los vértices de un rectángulo, cuatro casillas de T , de tal manera que:

$$C_{il} + C_{kj} > C_{ij} + C_{kl}$$

siendo X_{il} y X_{kj} dos variables no nulas pertenecientes al programa inicial.

Puede notarse que se exige que las dos variables no nulas cuyos costos sumados son mayores que los de las otras dos deben estar ubicadas en los extremos de una misma diagonal del rectángulo, como se ilustra en la figura 3.12.

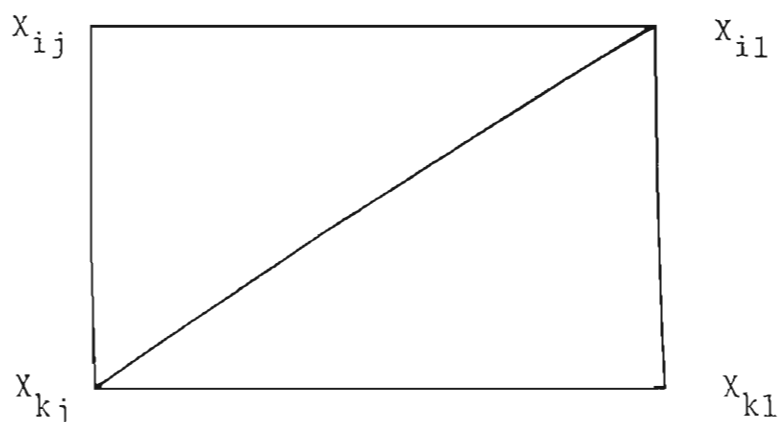


Fig. 3.12

A continuación encontramos nuevos valores para estas cuatro variables, así:

$$\bar{X}'_{ij} = \bar{X}_{ij} + \lambda \qquad \bar{X}'_{i1} = \bar{X}_{i1} - \lambda$$

$$\bar{X}'_{kj} = \bar{X}_{kj} - \lambda \qquad \bar{X}'_{k1} = \bar{X}_{k1} + \lambda$$

en donde $\lambda = \text{Mín}[\bar{X}_{i1}, \bar{X}_{kj}]$, es decir, el menor valor de las variables no nulas X_{i1} y X_{kj} .

El valor de la función económica disminuye en

$$\lambda (C_{i1}) + \lambda (C_{kj}) = \lambda (C_{i1} + C_{kj})$$

que corresponde al producto de λ por los costos en los vértices que sufrieron la disminución de λ .

Además el valor de la función económica aumenta en

$$\lambda (C_{ij}) + \lambda (C_{k1}) = \lambda (C_{ij} + C_{k1})$$

que corresponde al producto de λ por los costos en los vértices que sufrieron el aumento de λ .

Lo anterior nos lleva a una disminución neta en el valor de la función económica expresado así:

$$\lambda (C_{i1} + C_{kj} - C_{ij} - C_{k1}).$$

De donde el nuevo programa es mejor que el anterior.

En este nuevo programa pueden darse dos casos:

- a) Si X_{ij} o X_{kl} pertenecen al programa inicial, el nuevo programa tiene todavía $(m+n-1)$ variables, con la condición de que si X_{il} y X_{kj} tienen el mismo valor en el antiguo programa, consideremos que una de ellas pertenece con cero al nuevo programa. Según la propiedad 4 de la sección 2.5 el Π -grafo asociado no tiene ciclo y por lo tanto tenemos un programa de base.

Ejemplificaremos lo anterior usando el resultado obtenido a través del método de la esquina noroeste en la figura 3.5 y que presentamos junto con los costes respectivos en la figura 3.13.

| | | | |
|---------|----------|----------|---------|
| 10 5 | 0 10 | 20 5 | 11 5 |
| 12 7 | 7 5 | 9 15 | 20 5 |
| 0 14 | 14 16 | 16 18 | 18 5 |

Fig. 3.13

El procedimiento puede aplicarse, en la tabla de la Figura 3.10, a las casillas (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), ya que $C_{11} + C_{22} > C_{12} + C_{21}$.

Luego disminuirémos X_{11} y X_{22} y aumentaremos X_{12} y X_{21} en la cantidad $\lambda = \text{Mín} [X_{11}, X_{22}] = 5$.

Obteniendo la tabla de la figura 3.14, en donde hemos eliminado la variable no básica cero de la casilla (1,1) y conservamos la de la casilla (2,2).

| | | | |
|----|----|----|----|
| 10 | 0 | 20 | 11 |
| | 15 | | |
| 12 | 7 | 9 | 20 |
| 5 | 0 | 15 | 5 |
| 0 | 14 | 16 | 18 |
| | | | 5 |

Fig. 3.14

Puede notarse que en la figura 3.11 no existe ciclo y existen $(m+n-1)$ variables.

Además para este nuevo programa el coste del transporte asociado es de 385, que es menor que 410 el coste del programa inicial. Desde luego este procedimiento se continúa hasta ago-

tar todas las posibilidades existentes de formar rectángulos con las condiciones dadas, el programa obtenido será el programa optimal buscado.

b) Cuando ni X_{ij} ni X_{kl} pertenecen al programa inicial y

$\bar{X}_{il} \neq \bar{X}_{kj}$, el nuevo programa tiene $(m+n)$ variables; entonces

para obtener un programa de base es necesario destruir el o los ciclos que existen en el Π -grafo asociado con el nuevo programa, aplicando el procedimiento del algoritmo del transporte, en su etapa d).

Este caso se ejemplificará en la sección 3.6.

3.5 Degeneración. Convergencia.

3.5.1 Condición Necesaria.

Como en todo problema de programación lineal, una de las variables del programa de base inicial o de un programa posterior del problema de transporte puede tomar el valor cero; el problema es entonces degenerado. En el caso particular de los problemas de transporte, podemos demostrar el teorema siguiente:

Teorema 3,2

Puede haber degeneración de un programa de base de un problema de transporte si, y sólo si, existen conjuntos

$M' \subset M$ y $N' \subset N$ tales que:

$$\sum_{i \in M} a_i = \sum_{j \in N} b_j \quad (3.5)$$

Demostración

La Condición es necesaria.

Supongamos que existe un programa de base en el que una variable tenga valor cero.

Este programa corresponde a un árbol B_G al que está asociada una matriz triangular $A' = (S_{ij})$, por Teorema 2.4.

Siempre es posible cambiar de notación, de tal manera que las ecuaciones asociadas con las filas, y las incógnitas asociadas con las columnas de esta matriz estén numeradas de 1 a $(m+n)$ y de 1 a $(m+n-1)$ respectivamente, en el orden de las filas y columnas de la matriz. En este caso, podemos resolver literalmente el sistema en forma secuencial partiendo de la primera ecuación.

Sean U y V los subconjuntos de ecuaciones del sistema relativos respectivamente a los orígenes y los destinos. Diremos que una ecuación está en U o en V si, y sólo si, la constante del segundo miembro es un a_i o b_j respectivamente.

Probaremos esta doble implicación por recurrencia.

a) Se cumple para X_1 , ya que:

$$X_1 = a_{i_1}, \text{ si la primera ecuación pertenece a U, y}$$

$$X_1 = b_{j_1}, \text{ si la primera ecuación pertenece a V.}$$

Ya que en cada caso agotaría respectivamente la oferta o la demanda.

b) Supongamos que se cumple para $k-1$, es decir, supongamos que en la etapa $k-1$ de la resolución, todas las variables X_l , - con $1 \leq k-1$, calculadas anteriormente sean de la forma:

$$X_l = \sum_{i \in M} a_i - \sum_{j \in N} b_j \quad (3.6)$$

Si la l -ésima ecuación pertenece a U; o

$$X_l = \sum_{j \in N} b_j - \sum_{i \in M} a_i \quad (3.7)$$

si la l -ésima ecuación pertenece a V.

c) Probaremos ahora que se cumple para K .

Para la variable K nos encontramos en uno de los dos casos siguientes:

i) La K -ésima ecuación está en U.

En este caso, puesto que una variable no aparece más

que dos veces como máximo en el sistema de transporte, en una ecuación de U y en una de V, entonces

S_{k1} ($1 \leq k - 1$) no puede ser distinto de cero más que si X_1 es de la forma (3.7), es decir, que la 1-ésima ecuación debe pertenecer a V.

De donde, llamando A a un subconjunto de $\{1, \dots, K-1\}$, tenemos que:

$$X_k = a_{i_k} - \sum_{l \in A} X_l = \sum_{i \in M} a_i - \sum_{j \in N} b_j$$

Lo que significa que el valor de X_k será igual a la oferta total en esa fila menos la cantidad demandada hasta el momento en esa misma fila, por los destinos menores que K.

ii) La K-ésima ecuación está en V.

Por la misma razón anterior, S_{k1} ($1 \leq K-1$) no puede ser distinto de cero más que si X_1 es de la forma (3.6), con la 1-ésima ecuación perteneciendo a U.

De donde

$$X_k = b_{j_k} - \sum_{l \in A} X_l = \sum_{j \in N} b_j - \sum_{i \in M} a_i$$

Lo que significa que el valor de X_k será igual a la cantidad total demandada en esa columna menos la cantidad entregada en esa misma columna por los orígenes anteriores a K .

Luego, como la propiedad se cumple para las $(K-1)$ primeras variables, se cumple también para la K -ésima. Así, es cierta para las $(m+n-1)$ incógnitas.

La condición es suficiente, es decir, puede haber degeneración si se cumple una relación (3.5):

$$\sum_{i \in M'} a_i = \sum_{j \in N'} b_j$$

En efecto, volvamos a ordenar las filas y las columnas de la tabla de transporte, de manera que, en la nueva tabla, las K primeras filas y las l primeras columnas sean aquellas cuyos índices pertenecen a M' y N' respectivamente.

En la nueva tabla tendremos:

$$\sum_{i=1}^K a_i = \sum_{j=1}^l b_j$$

de donde:

$$\sum_{i=k+1}^m a_i = \sum_{j=l+1}^n b_j$$

y, por consiguiente, la solución de base obtenida por el método de la esquina noroeste, en total, tiene como máximo

$$(K + 1 - 1) + (m - k + n - 1 - 1) = (m + n - 2)$$

variables no nulas, de donde la solución es degenerada.

3.5.2 Solución en casos de Degeneración.

La degeneración en un programa básico puede darse bajo dos formas principales:

a) Variables básicas con valor cero.

Esta es propia de los problemas de transporte. Si excluimos de un programa de base todas las variables con valor cero, dicho programa tiene, en caso de degeneración, menos de $(m + n - 1)$ variables y generalmente es imposible aplicar el algoritmo expuesto anteriormente.

Nos liberamos fácilmente de este problema conviniendo, como lo hemos venido haciendo, que una variable con valor cero puede pertenecer a un programa de base.

b) Existencia de Ciclos.

Esta degeneración es común a todos los problemas de programación lineal; pero podemos afirmar que no se conoce ningún ejemplo práctico de problema de transporte en el que se haya dado ciclo.

3.5.3 Una interpretación gráfica.

Existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos de vectores de base del problema de transporte y los grafos parciales del grafo G , que son árboles (Corolario 1 del Teorema 2.4).

A todo conjunto de vectores de base, luego a todo árbol, corresponde una solución, y una sola, llamada programa de base, que está formada por $(m + n - 1)$ variables generalmente no nulas. Cuando algunas de estas variables son nulas, se ha tomado el convenio, para asegurar que el algoritmo sea válido, que forman parte del programa considerado; este tipo de programa recibe el nombre de programa de base degenerado.

El anterior convenio nos permite siempre asociar con el programa considerado un árbol G ; pero en este caso, se pueden formar generalmente varios programas de base a partir de las $(m + n - 1)$ variables no nulas del programa, es decir, existen varios conjuntos de $(m + n - 1)$ vectores linealmente independientes que tienen, como subconjunto, el conjunto de los vectores asociados a estas variables no nulas. Es por esta multiplicidad de los árboles asociados con una solución degenerada por lo que puede darse el ciclo.

3.6 Ejemplo:

Sea a resolver el problema de transporte

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^5 X_{ij} = a_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \\ \sum_{i=1}^3 X_{ij} = b_j \quad , \quad j = 1, \dots, 5 \\ X_{ij} \geq 0 \\ \text{Minimizar } Z = \sum_{(i,j)} C_{ij} X_{ij} \end{array} \right.$$

en donde los valores de las constantes a_i , b_j y C_{ij} vienen dados en la figura 3.15 y en la figura 3.16 tenemos un programa inicial de base, determinado por el método de la esquina noroeste. Por tener las variables básicas X_{22} y X_{34} valores cero, el programa es doblemente degenerado.

| | | | | | |
|----|---|----|----|---|-------|
| 10 | 4 | 9 | 1 | 5 | 4 |
| 4 | 7 | 8 | 11 | 2 | 7 |
| 3 | 6 | 12 | 8 | 6 | 6 |
| 1 | 3 | 5 | 2 | 6 | a_i |
| | | | | | b_j |

Fig. 3.15

| | | | | | |
|----|---|----|----|---|-------|
| 10 | 4 | 9 | 1 | 5 | 4 |
| 1 | 3 | 8 | 11 | 2 | - |
| 4 | 7 | 0 | 5 | 2 | |
| 3 | 6 | 12 | 8 | 6 | 6 |
| | | | 0 | | a_i |
| 1 | 3 | 5 | 2 | 6 | b_j |

Fig. 3.16

Mejora del Programa Inicial.

El procedimiento de la sección 3.4.3 puede aplicarse a las cuatro casillas (1,1), (1,4), (2,1) y (2,4), ya que $C_{11} + C_{24} > C_{14} + C_{21}$. Luego disminuiremos X_{11} y X_{24} y aumentaremos X_{14} y X_{21} en la cantidad $\lambda = \min [X_{11}, X_{24}] = 1$; así tenemos que X_{11} sale de la base y X_{14} y X_{21} entran en la base con valores positivos.

El nuevo programa, por tener $(m + n) = 8$ variables no nulas, no es ya programa de base.

Podemos destruir el ciclo formado por las casillas (1,2), (2,2), (2,4) y (1,4) disminuyendo X_{12} y X_{24} en 1 y aumentando igual cantidad a X_{22} y X_{14} , lo cual es posible porque $C_{12} + C_{24} > C_{22} + C_{14}$. Como en este caso X_{24} queda eliminada del nuevo programa, éste se convierte en programa de base (fig. 3.17)

| | | | | | |
|----|---|----|----|---|-------|
| 10 | 4 | 9 | 1 | 5 | 4 |
| | 2 | | 2 | | |
| 4 | 7 | 8 | 11 | 2 | 7 |
| 1 | 1 | 5 | | | |
| 3 | 6 | 12 | 8 | 6 | 6 |
| | | | 0 | 6 | |
| 1 | 3 | 5 | 2 | 6 | a_i |
| | | | | | b_j |

Fig. 3.17

Podemos aplicar nuevamente el procedimiento anterior a las cuatro casillas (2,1), (3,1), (2,5) y (3,5) de la tabla de la figura 3.17, ya que $C_{21} + C_{35} > C_{31} + C_{25}$. Luego, disminuimos X_{21} y X_{35} en $\lambda = [X_{21}, X_{35}] = 1$ y aumentamos este mismo valor a X_{25} y X_{31} .

En este caso eliminamos X_{21} . Como ahora tenemos $(m+n) = 8$ variables, resolvemos el problema eliminando la variable X_{34} que tiene valor cero. El nuevo programa se encuentra en la tabla de la figura 3.18.

| | | | | | |
|----|---|----|----|---|-------|
| 10 | 4 | 9 | 1 | 5 | 4 |
| | 2 | | 2 | | |
| 4 | 7 | 8 | 11 | 2 | 7 |
| | 1 | 5 | | 1 | |
| 3 | 6 | 12 | 8 | 6 | 6 |
| | 1 | | | 5 | |
| 1 | 3 | 5 | 2 | 6 | a_i |
| | | | | | b_j |

Fig. 3.18

Si ahora aplicamos el procedimiento a las cuatro casillas (2,2), (2,5), (3,2) y (3,5), llegamos a disminuir X_{22} y X_{35} en 1 y aumentar X_{25} y X_{32} en 1, así como a eliminar X_{22} .

El resultado de estas operaciones es el programa no dege-

nerado escrito en la figura 3.19.

| | | | | | |
|----|---|----|----|---|-------|
| 10 | 4 | 9 | 1 | 5 | 4 |
| 4 | 7 | 8 | 11 | 2 | 7 |
| 3 | 6 | 12 | 8 | 6 | 6 |
| 1 | 3 | 5 | 2 | 6 | a_i |
| | | | | | b_j |

Fig. 3.19

Al evaluar la función económica del programa inicial de base, de la figura 3.16, tenemos que $Z = 120$, mientras que al evaluar el programa obtenido en la figura 3.19, tenemos que $Z = 87$. Es evidente que se ha mejorado el programa inicial.

3.7 Balace del Problema de Transporte.

La definición general del problema de transporte implica que

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Esto significa que la oferta en todos los orígenes debe ser igual a la demanda de todos los destinos. En problemas -

reales esta restricción no necesita satisfacerse siempre, en otras palabras, la oferta disponible puede ser menor que la demanda o puede excederla.

En este caso diremos que el problema de transporte NO ESTÁ BALANCEADO.

La restricción

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

se impone únicamente porque es fundamental al desarrollar el algoritmo del problema de transporte. Sin embargo, cualquier problema real puede balancearse artificialmente convirtiéndolo a un problema con igual oferta y demanda.

Si la demanda excede a la oferta, se aumenta un origen ficticio que suministrará la cantidad

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

Que es la cantidad necesaria para que la oferta iguale a la demanda.

Si existe exceso de oferta, se utiliza un destino ficticio para absorber la cantidad

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

Que es la cantidad que permitirá que los destinos absorban toda la oferta.

Los costes de "transporte" por unidad desde el origen ficticio a todos los destinos son cero, ya que esto es equivalente a no transportar desde el origen ficticio.

En forma semejante los costes de "transporte" por unidad desde todas las fuentes a todos los destinos ficticios son cero.

Físicamente, las cantidades enviadas desde un origen ficticio pueden interpretarse como escasez de la demanda, mientras que los asignados a un destino ficticio pueden interpretarse como capacidades no utilizadas en el origen.

Ejemplo:

Resolver el problema de transporte donde tres fábricas con capacidades de 40, 60 y 90 unidades disponibles respectivamente, están abasteciendo a cinco almacenes que tienen demandas de 30, 40, 70, 40 y 60 unidades respectivamente.

Por razones físicas la fábrica número 3 no puede abastecer al almacén número 5.

Los costos unitarios de transporte en colones están dados en la siguiente tabla:

| | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | d_5 | |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| o_1 | 20 x_{11} | 19 x_{12} | 14 x_{13} | 21 x_{14} | 16 x_{15} | 40 |
| o_2 | 15 x_{21} | 20 x_{22} | 13 x_{23} | 19 x_{24} | 16 x_{25} | 60 |
| o_3 | 18 x_{31} | 15 x_{32} | 18 x_{33} | 20 x_{34} | M x_{35} | 90 |
| | 30 | 40 | 70 | 40 | 60 | a_i b_j |

Puede notarse que hemos asignado a C_{35} el valor M , en donde M es un número positivo muy grande, es decir $M \gg 0$. Esto se ha hecho ya que el origen 3 no puede abastecer al destino 5 y de hacerlo tendría un costo unitario elevadísimo.

Este problema está desbalanceado, puesto que

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 190 < \sum_{j=1}^5 b_j = 240$$

En efecto, la oferta total es menor a la demanda total en 50 unidades.

Para balancear el problema agregamos un origen artificial o_4 con una oferta igual a $240 - 190 = 50$ unidades, y con costos $C_{4j} = 0$, $j = 1, \dots, 5$.

El problema ya balanceado presenta la siguiente tabla de transporte:

| | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | d_5 | |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| o_1 | 20 x_{11} | 19 x_{12} | 14 x_{13} | 21 x_{14} | 16 x_{15} | 40 |
| o_2 | 15 x_{21} | 20 x_{22} | 13 x_{23} | 19 x_{24} | 16 x_{25} | 60 |
| o_3 | 18 x_{31} | 15 x_{32} | 18 x_{33} | 20 x_{34} | M x_{35} | 90 |
| o_4 | 0 x_{41} | 0 x_{42} | 0 x_{43} | 0 x_{44} | 0 x_{45} | 50 |
| | 30 | 40 | 70 | 40 | 60 | a_i b_j |

Utilizando el método de Vogel se obtiene la solución básica inicial que aparece en la tabla siguiente:

| | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | d_5 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------------|
| o_1 | 20 | 19 | 14 | 21 | 16 | 40 |
| o_2 | 15 | 20 | 13 | 19 | 16 | 60 |
| o_3 | 18 | 15 | 18 | 20 | M | 90 |
| o_4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| | 30 | 40 | 70 | 40 | 60 | a_i b_j |

Las variables básicas iniciales son:

$$X_{15} = 40, X_{21} = 30, X_{23} = 20, X_{25} = 10, X_{32} = 40, X_{33} = 50, \\ X_{44} = 40 \text{ y } X_{45} = 10.$$

Las demás variables tienen valor cero.

Esta solución básica inicial nos da un coste total de -
Ø 3,010.00. Desde luego, es posible mejorar este programa i-
nicial aplicando el procedimiento estudiado anteriormente.

C A P I T U L O IV

REDES DE TRANSPORTE, I

DEFINICIONES Y GENERALIDADES

4.1 Definición General de las Redes de Transporte.

Llamaremos RED DE TRANSPORTE (P, U) a un grafo orientado, sin bucles, (fig. 4.4) en el que:

- i) Asociamos con cada arco $(p_i, p_j) \in U$, en donde p_i y p_j son vértices que pertenecen a P ,
 - a) Una capacidad $K(p_i, p_j) = K_{ij} \geq 0$ que nos indica el valor maximal del caudal que va de P_i hacia P_j en este arco;
 - b) Una "penalización" $l(p_i, p_j) = l_{ij} \geq 0$ que nos indica, según el caso, el coste del caudal unitario en el arco (p_i, p_j) , el tiempo invertido en recorrer la distancia desde p_i hasta p_j , la longitud del arco en mención, etc.
- ii) Con cada vértice $p_i \in P$ asociamos una demanda $d(p_i)$, con la cual pueden darse los siguientes casos:
 - a) Si $d(p_i) < 0$, p_i es un origen (o entrada) y $-d(p_i)$ es la disponibilidad en P_i ;
 - b) Si $d(p_i) > 0$, p_i es un destino (o salida) y $d(p_i)$ es la demanda en p_i ;

c) Si $d(p_i) = 0$, p_i es un punto de paso.

En lo sucesivo representaremos con frecuencia una red de transporte mediante el conjunto P de sus vértices y el conjunto V de sus RUTAS; diremos que existe una ruta $[p_i, p_j]$ y una sola entre dos vértices de P si, y sólo si, existe al menos un arco que une p_i con p_j .

NOTA: No obstante que en lo sucesivo usaremos la notación habitual de las aristas, $[p_i, p_j]$ estudiada en el capítulo I, para representar las rutas; puede observarse que la noción de ruta es distinta de la noción de arista.

Con toda ruta $[p_i, p_j]$ están asociadas dos capacidades:

- i) γ_{ij} , de p_i hacia p_j .
- ii) γ_{ji} , de p_j hacia p_i .

Estas capacidades están definidas de la siguiente manera:

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} K_{ij}, & \text{si el arco } (p_i, p_j) \text{ pertenece a } [p_i, p_j]. \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

$$\gamma_{ji} = \begin{cases} K_{ij}, & \text{si el arco } (p_j, p_i) \text{ pertenece a } [p_i, p_j]. \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Por estas definiciones puede observarse que no ocasiona ninguna ambigüedad eliminar la notación γ_{ij} y representar las capacidades de las rutas con la misma notación K_{ij} usada para representar las capacidades de los arcos, conviniendo que con todo arco (p_i, p_j) están asociadas dos capacidades:

$K_{ij} \geq 0$, de p_i hacia p_j , y

$K_{ij} = 0$, de p_j hacia p_i .

Para una ruta $[p_i, p_j]$, generalmente, se tiene que $K_{ij} \neq K_{ji}$. Si $K_{ij} = K_{ji}$ (para todos los i, j) diremos que la red es SIMETRICA.

En el caso en que una parte o todo el grafo que corresponde a la red no esté orientado, es decir, que en el grafo hayan aristas, volvemos a la definición general sustituyendo cada arista $[p_i, p_j]$ de capacidad $K[p_i, p_j]$ por dos arcos (p_i, p_j) y (p_j, p_i) que tengan la misma capacidad

$$K_{ij} = K_{ji} = K [p_i, p_j] \quad (\text{Fig. 4.1})$$

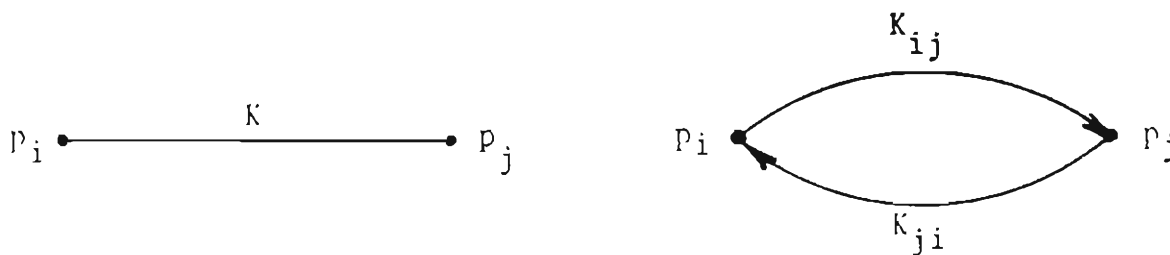


Fig. 4.1

Cuando las capacidades K_i estén referidas a algunos vértices p_i , volvemos a la definición general reemplazando cada uno de dichos vértices por dos vértices ordinarios (de capacidad infinita) unidos por un arco de capacidad K_i (Fig. 4.2)

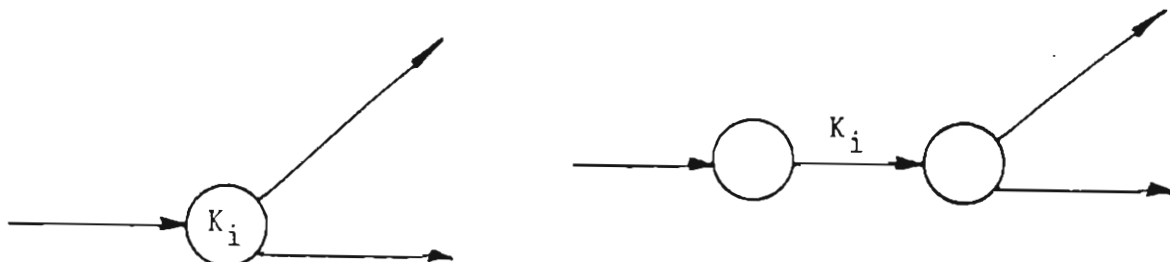


Fig. 4.2

4.2 Notaciones.

Llamaremos siempre P al conjunto de vértices (en este caso de la red), U al conjunto de sus arcos y V al conjunto de sus rutas.

Designaremos E al conjunto de entradas y S al de salidas, generalmente escribiremos P_e para una entrada y P_s para una salida.

Sean:

g , una función definida en P ;

h , una función definida en U ;

A, B, C , subconjuntos de P que pueden ser reducidos a un único vértice;

W, Y , subconjuntos de U que pueden ser reducidos a un único arco.

Llamaremos (A, B) al conjunto de arcos (a, b) tales que $a \in A, b \in B$ y $(a, b) \in U$.

Haciendo:

$$g(A) = \sum_{a \in A} g(a) ; h(W) = \sum_{w \in W} h(w)$$

$$y \quad h(A,B) = \sum_{(a,b) \in (A,B)} h(a,b)$$

Si $A \cap B = \phi$ y además $Y \cap W = \phi$, se cumplen las relaciones:

- i) $g(A \cup B) = g(A) + g(B)$
- ii) $h(Y \cup W) = h(Y) + h(W)$
- iii) $h(A \cup B, C) = h(A, C) + h(B, C)$
- iv) $h(C, A \cup B) = h(C, A) + h(C, B)$

Al complemento de A, $P-A$, lo designaremos así: \bar{A} .

Finalmente, para simplificar la escritura, sustituiremos las notaciones de arco y ruta (p_i, p_j) y $[p_i, p_j]$ respectivamente, por (i, j) e $[i, j]$. Por ejemplo, escribiremos que el arco (i, j) es un arco de la red.

4.3 Redes Particulares.

Definición 4.3.1.

Llamaremos RED SIMPLE a una red en la que pueden repartirse los vértices en dos conjuntos disjuntos P_1 y P_2 tales que:

- i) $(p_i, q_j) \in U \Rightarrow p_i \in P_1 \text{ y } q_j \in P_2$
- ii) $d(q_j) > 0 \Leftrightarrow q_j \in P_2$
- iii) $d(p_i) < 0 \Leftrightarrow p_i \in P_1$

El grafo que corresponde a este tipo de red es un grafo simple, y los dos conjuntos disjuntos P_1 y P_2 de vértices de

este grafo son respectivamente los conjuntos E y S de entradas y salidas de la red (fig. 4.3).

Definición 4.3.2.

Llamaremos RED REDUCIDA a una red que no tenga más que una entrada p_0 y una salida p_n , y en la que ningún arco incida interiormente con p_0 ni exteriormente con p_n (Fig. 4.4).

Aplicando los conceptos de incidencia estudiados en el Capítulo I, debe cumplirse que sobre p_0 no debe incidir ningún arco que venga de un vértice exterior al conjunto de vértices que constituyen la red, así como tampoco debe existir ningún arco que saliendo de p_n incida en un vértice que no pertenezca a la red.

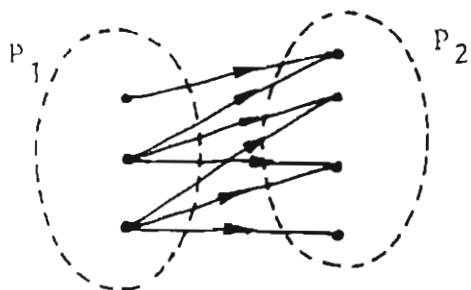


Fig. 4.3

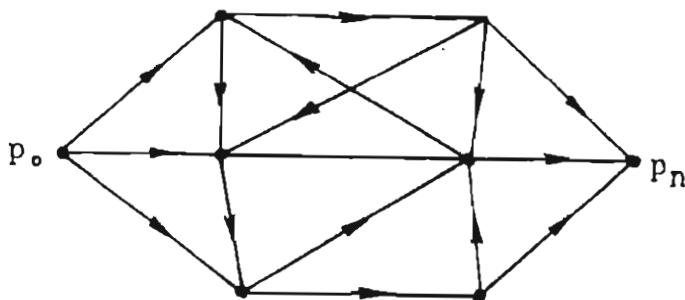


Fig. 4.4

Considerar redes reducidas es muy útil. En la mayoría de los problemas podemos definir una red reducida equivalente a la red primitiva del problema considerado de la siguiente manera:

añadimos dos vértices p_o y p_n al conjunto P de vértices de la red, y creamos los arcos

(p_o, p_e) , para todo $p_e \in E$, y

(p_s, p_n) , para todo $p_s \in S$;

Todos los vértices de E y de S se convertirán en puntos de paso, es decir, vértices con demanda igual a cero. En cada caso particular debemos elegir los valores de las demandas $d(p_o)$ y $d(p_n)$, las capacidades de los arcos incidentes en p_o y p_n , y las longitudes de estos últimos de tal manera que podamos garantizar la equivalencia entre la red reducida y la red primitiva del problema en estudio.

Definición 4.3.3.

Llamaremos RED SIMPLE REDUCIDA a una red reducida que se transforma en red simple cuando suprimimos la entrada p_o , la salida p_n , y los arcos incidentes en estos dos vértices.

4.4 Representación Matricial de una red de transporte.

Nota: el término matriz que usaremos en adelante no corresponde a los operadores sometidos a reglas bien definidas, sino, por convención, utilizaremos este término como sinónimo de cuadro o tabla.

Representaremos una red de transporte cualesquiera por una matriz cuadrada donde:

- i) cada fila y cada columna corresponde a un vértice de la red,

- ii) cada elemento a_{ij} representa una magnitud relativa al arco (i,j) ; por convenio dejaremos vacío el lugar de a_{ij} cuando $(i,j) \notin U$,
- iii) agregamos una fila marginal, o una columna marginal, que da los valores de la demanda en cada vértice (fig. 4.5)

Como hemos supuesto el grafo de la red sin bucles, no existe ningún arco que saliendo de un vértice incida en él mismo; la diagonal principal de la matriz deberá estar enteramente vacía. Así también, en una red reducida la primera columna (correspondiente a p_0) y la última fila (correspondiente a p_n) deberán estar completamente vacías, ya que no existen arcos que lleguen a p_0 ni arcos que salgan de p_n .

| | p_0 | p_1 | ... | p_n | d |
|----------|----------|----------|-----|----------|----------|
| p_0 | | a_{01} | ... | a_{0n} | $d(p_0)$ |
| p_1 | a_{10} | | ... | a_{1n} | $d(p_1)$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | | \vdots | \vdots |
| p_n | a_{n0} | a_{n1} | ... | | $d(p_n)$ |

Fig. 4.5

En los problemas de longitud de caminos, a_{ij} puede representar la longitud l_{ij} . En los problemas de flujo, a_{ij} será la capacidad K_{ij} del arco (i,j) ; en este caso llamaremos **MATRIZ DE CAPACIDADES** a la matriz correspondiente. Si la red en su totali -

dad no está orientada, la matriz de capacidades es simétrica.

Generalmente, para una red simple se usa una representación matricial distinta, más condensada, así: se define una matriz rectangular $m \times n$, en la que cada fila está asociada con un vértice de P_1 y cada columna con un vértice de P_2 ; el elemento a_{ij} representa la capacidad del arco (p_i, q_j) , con $i=1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$.

4.5 Flujo.

4.5.1 Definición.

La capacidad, la longitud y la demanda son funciones definidas sobre los arcos y los vértices de la red. Vamos ahora a introducir una función definida sobre los arcos o rutas de una red y cuyos valores son incógnitas de numerosos problemas.

Llamaremos flujo estacionario aritmético, o más simplemente FLUJO (ARITMETICO), en la red, a una función x con valores reales, positivos, que hace corresponder a todo arco $(i, j) \in U$ un valor $x(p_i, p_j) = x_{ij}$ que satisface las relaciones:

- i) $0 \leq x(p_i, p_j) \leq K_{ij}$, $(i, j) \in U$
- ii) $x(p_i, P) - x(P, p_i) = 0$, $p_i \in (P-E-S)$
- iii) $x(p_e, P) - x(P, p_e) \geq 0$, $p_e \in E$
- iv) $x(p_s, P) - x(P, p_s) \leq 0$, $p_s \in S$

La relación i) expresa que el flujo en todo arco es a lo sumo igual a la capacidad del arco.

Nota: Diremos que un arco $u \in U$ está saturado, cuando el flujo que pasa por él es igual a su capacidad.

La relación i) expresa que en todo punto de paso, que no es de entrada ni de salida, el flujo que sale de él debe ser igual al que recibe.

La relación iii) expresa que en todo vértice de entrada, el flujo que sale es mayor o igual que el que entra en él.

La relación iv) expresa que en todo vértice de salida el flujo que sale de él debe ser menor o igual al que recibe de los otros vértices.

$x(p_i, p_j) = x_{ij}$ puede considerarse como el valor de una circulación real en el arco (i,j) con el sentido de p_i hacia p_j ; designaremos x_{ij} al flujo aritmético en el arco (i,j) o más simplemente al flujo en el arco (i,j) .

Un conjunto de flujos en los arcos de una red define un FLUJO ARITMETICO EN LA RED únicamente cuando se verifican las cuatro relaciones anteriores.

Llamaremos flujo estacionario algebraico, o más simplemente FLUJO ALGEBRAICO en la red de transporte, a una función f de valores reales (positivos, negativos o nulos) que hace corresponder a toda ruta $[i,j] \in V$ dos valores $f(p_i, p_j)$ y $f(p_j, p_i)$, llamados respectivamente: flujo algebraico en $[i,j]$ de p_i hacia p_j y flujo algebraico en $[i,j]$ de p_j hacia p_i . Esta función satisface las siguientes relaciones:

- i) $f(p_i, p_j) = - f(p_j, p_i)$
- ii) $-K_{ji} \leq f(p_i, p_j) \leq K_{ij}$
- iii) $f(p_i, P) = 0$, $p_i \in (P-E-S)$
- iv) $f(p_e, P) \geq 0$, $p_e \in E$
- v) $f(p_s, P) \leq 0$, $p_s \in S$.

La primera relación expresa que el flujo algebraico de p_i hacia p_j se define como el opuesto del flujo algebraico de p_j hacia p_i . Según que $f(p_i, p_j)$ sea positivo o negativo, la circulación real en la ruta $[i, j]$ se dirige hacia p_j o hacia p_i .

Aumentar un flujo negativo $f(p_i, p_j)$ en K unidades es lo mismo que disminuir la circulación real hacia p_i en K unidades.

La segunda relación nos indica que el flujo algebraico de p_i a p_j deberá ser mayor o igual que el opuesto de la capacidad del arco que va de p_j a p_i y menor o a lo sumo igual que la capacidad del arco que va de p_i a p_j .

La tercera relación expresa que el flujo algebraico que va desde todo punto de paso hacia el conjunto de vértices que no son ni de entrada ni de salida es igual a cero.

La cuarta relación expresa que el flujo algebraico que va desde toda entrada hacia el conjunto de vértices P de la red debe ser mayor o igual que cero; mientras que la quinta relación expresa que el flujo algebraico que se origina desde todo punto de salida hacia el conjunto de vértices de la red debe ser menor o igual que cero.

Cuando existe una correspondencia biunívoca entre las rutas y los arcos, las cuatro últimas relaciones no son sino una prolongación de las cuatro relaciones de flujo aritmético para el caso de una red definida por el conjunto de sus rutas.

Asociaremos con un flujo aritmético x el flujo algebraico f definido por la relación:

$$f(p_i, p_j) = x_{ij} - x_{ji}$$

Mientras que siempre podremos asociar con un flujo algebraico, el flujo aritmético definido así:

$$x_{ij} = \text{máx} [f(p_i, p_j), 0]$$

$$x_{ji} = \text{máx} [f(p_j, p_i), 0]$$

4.5.2 Valor de un Flujo.

Supongamos que existe al menos una entrada en donde el flujo algebraico saliente es estrictamente positivo. Llamaremos $f(E,P) = \psi_e$, al flujo algebraico en el conjunto de entradas de la red; $f(S,P) = -\psi_s$, al flujo algebraico en el conjunto de salidas; y por otra parte tenemos que $f(p_i,P) = 0$ ($p_i \in P-E-S$), el flujo algebraico en un punto de paso es cero.

Sumando estas tres últimas relaciones tenemos

$$f(E,P) + f(S,P) + f(p_i, P) = \psi_e - \psi_s$$

de donde obtenemos

$$0 = f(P,P) = \psi_e - \psi_s$$

Llamaremos VALOR DEL FLUJO en la red, al valor común de ψ_e y ψ_s . ψ representa el flujo aritmético neto que sale del conjunto de las entradas (diferencia entre el flujo aritmético saliente y el flujo aritmético entrante) y que entra en el conjunto de las salidas.

En el caso particular de una red reducida, por definición, tenemos:

$$K_{i0} = K_{ni} = 0 \quad , \quad i \neq 0, n$$

es decir, que tanto la capacidad de los arcos que van hacia la única entrada p_0 como la de los que salen de la única salida p_n es igual a cero, de donde:

$$-f(p_0, p_i) \leq 0 \quad ,$$

$$-f(p_i, p_n) \leq 0 \quad ,$$

y, por consiguiente, asociando con f el flujo x definido al final de la sección 4.5.1 tenemos:

$$f(p_0, P) = x(p_0, P) = \psi \quad ,$$

$$f(P, p_n) = x(P, p_n) = \psi \quad .$$

Luego, el valor del flujo de una red reducida es igual a la suma de los flujos aritméticos que salen de p_0 , o que entran a p_n .

Por otra parte, todo flujo en una red reducida puede ser descompuesto en una suma de flujos que recorren cada uno un camino de p_0 a p_n . (fig. 4.6)

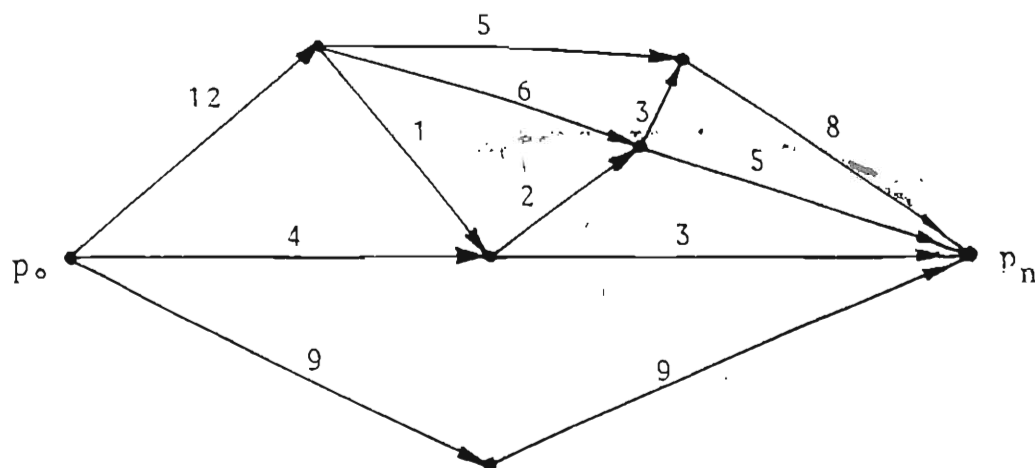


Fig. 4.6

4.5.3 Capacidades residuales en una red recorrida por un flujo.

Asignamos a toda ruta $[i,j]$ dos capacidades residuales r_{ij} de p_i hacia p_j y r_{ji} de p_j hacia p_i , definidas de la siguiente manera:

$$r_{ij} = K_{ij} - f(p_i, p_j) \quad ,$$

$$r_{ji} = K_{ij} - f(p_j, p_i) \quad ,$$

que no es nada más que la diferencia entre la capacidad del arco y el flujo algebraico que hay sobre éste.

Por otra parte, si $(i,j) \notin U$, tenemos:

$$f(p_i, p_j) \leq K_{ij} = 0 \quad ,$$

de donde

$$r_{ij} = f(p_j, p_i) = x_{ji}$$

es decir, cuando no existe un arco (i,j) , la capacidad residual de p_i hacia p_j es igual al valor del flujo aritmético de p_j hacia p_i .

4.6 Conjuntos Disjuntos. Cortes.

Nota: en toda esta parte, únicamente consideraremos redes reducidas.

Definición 4.6.1

Si A es un subconjunto de los vértices de la red tal que $p_o \notin A$ y $p_n \notin A$ llamaremos CONJUNTO DISJUNTO al conjunto (\bar{A}, A) de arcos incidentes en A anteriormente.

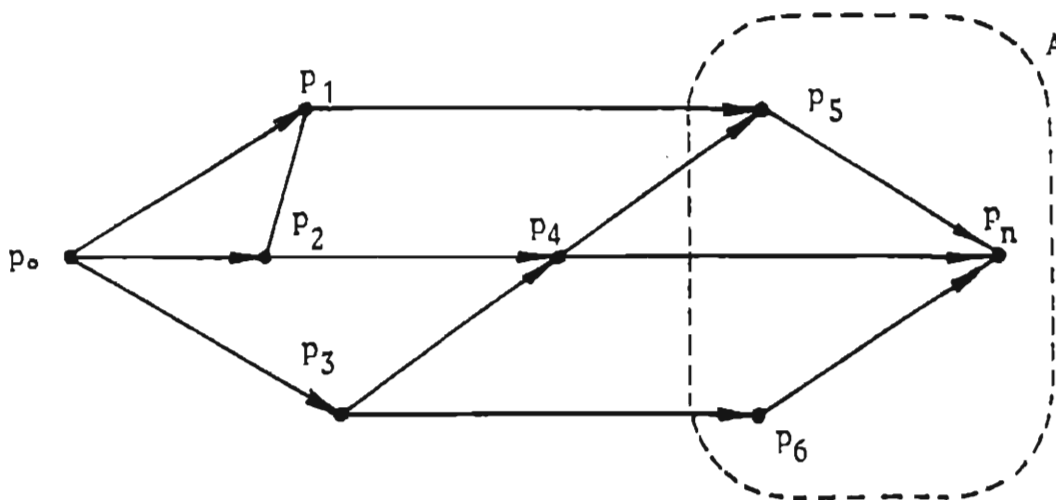


Fig. 4.7

La figura 4.7 ilustra la anterior definición, donde A está formado por los vértices p_5 , p_6 y p_n , y el conjunto disjunto está formado por los arcos

(p_1, p_5) , (p_4, p_5) , (p_4, p_n) y (p_3, p_6) .

Llamaremos CAPACIDAD DEL CONJUNTO DISJUNTO a la cantidad $K(\bar{A}, A)$.

Es evidente que todo camino que va de p_0 a p_n tiene al menos un arco de (\bar{A}, A) , (fig. 4.7).

Definición 4.6.2.

Llamaremos CÔRTE a un subconjunto W de U tal que todo camino que va de p_0 a p_n se encuentra con W y que no existe ningún subconjunto de W que tenga esta propiedad.

Una condición necesaria para que podamos hablar de corte es que exista al menos un camino de p_0 a p_n . Se puede demostrar la propiedad siguiente:

Teorema 4.1.

Todo corte es un conjunto disjunto.

Demostración.

Vamos a demostrar que existe un subconjunto $A \subset P$, con $p_0 \notin A$ y $p_n \in A$, tal que el corte W sea igual al conjunto (\bar{A}, A) de los arcos incidentes interiormente en A .

Haremos la demostración en dos partes:

- i) Primero demostraremos, por reducción al absurdo, que existe un conjunto A tal que $(\bar{A}, A) \subset W$.

Puesto que suponemos que existe al menos un camino de p_0 a p_n , todo conjunto que contenga a p_n tiene al menos un arco incidente hacia su interior. Supongamos que para todo conjunto que contenga a p_n , pero no a p_0 , existe al menos un arco incidente hacia su interior y que este arco no pertenece a W .

Consideremos ahora la secuencia de conjuntos

A_0, A_1, \dots, A_l definidos de la siguiente manera:

$$A_0 = \{p_n\}$$

$$A_1 = A_0 \cup \{p_k / (p_k, A_0) \cap (U-W) \neq \emptyset\}$$

$$A_2 = A_1 \cup \{p_k / (p_k, A_1) \cap (U-W) \neq \emptyset\}$$

.

.

.

$$A_{i+1} = A_i \cup \{p_k / (p_k, A_i) \cap (U-W) \neq \emptyset\}$$

es decir, que A_{i+1} está formado añadiendo al conjunto A_i todos los vértices orígenes de los arcos incidentes interiormente en este conjunto A_i y que no pertenezcan al corte W .

Luego, se tiene que por hipótesis $A_{i+1} \neq A_i$ y por construcción se tiene que

$$A_{i+1} \supset A_i \supset \dots \supset \{p_n\}$$

Como la red es finita, la secuencia de conjuntos es finita y p_n pertenece al último conjunto de la secuencia, de no ser así no sería éste el último conjunto por la forma en que se definieron.

Por consiguiente, ya que para todo $p_i \in A_i$ ($p_i \neq p_n$) existe, por construcción de A_i , un elemento

$p_{i-1} \in A_{i-1}$ tal que $(p_i, p_{i-1}) \in (U-W)$,

existe un camino de p_0 a p_n que no encuentra a W , lo que contradice la definición de W , luego existe un conjunto A de vértices tal que $(\bar{A}, A) \subseteq W$

ii) Supongamos ahora que $W \neq (\bar{A}, A)$.

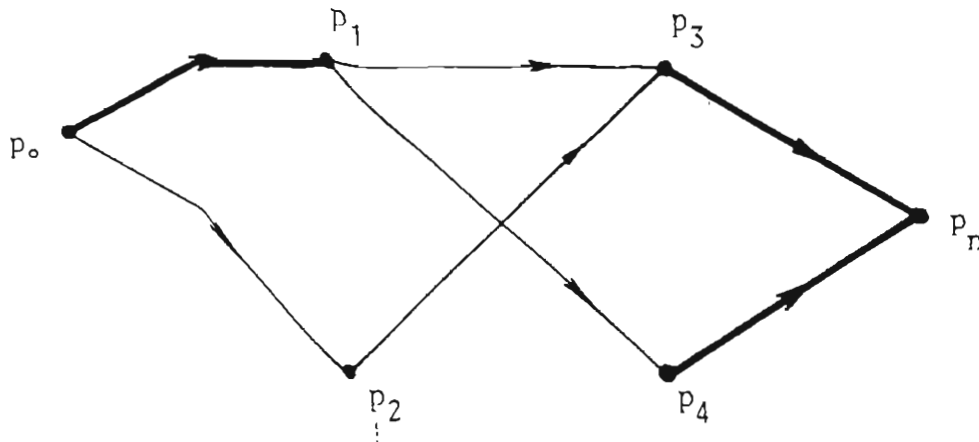
Según lo anterior (\bar{A}, A) sería entonces un subconjunto de W tal que todo camino de p_0 a p_n debe encontrarlo, lo que contradice la definición de corte. Por lo tanto

$$W = (\bar{A}, A).$$

El conjunto A así encontrado no es necesariamente único ya que se le puede añadir o quitar todo vértice de P que no tenga arco incidente interiormente.

El recíproco de la propiedad anterior, todo conjunto disjunto es un corte, es falso. En la figura 4.8 los arcos gruesos constituyen un conjunto disjunto pero no un corte, en este caso A está formado por los vértices p_1 y p_n .

En la misma figura al eliminar el vértice p_2 de A , desaparece el arco (p_0, p_2) y obtenemos el corte formado por los arcos (p_3, p_n) y (p_4, p_n)



Teorema 4.2.

Fig. 4.8

Dado un corte W y un arco u cualesquiera del corte, existe al menos un camino de p_0 a p_n que "encuentra" al corte en el arco u solamente.

Demostración:

Si no hubiera ningún camino de p_0 a p_n que comprendiera al arco u , o si todos los caminos que comprenden a u encontrasen también a W en otro arco, todo camino encontraría a $W - \{u\}$ y, por consiguiente, W no sería un corte.

Teorema 4.3.

Si existe un flujo algebraico f y un conjunto disjunto $\Delta = (\bar{A}, A)$ tales que el valor del flujo sea igual a la capacidad de Δ , el flujo es maximal y el conjunto disjunto es un corte de capacidad minimal (o un conjunto disjunto minimal igual a la reunión de un corte minimal y de arcos de capacidad nula).

Demostración:

Toda unidad de flujo que vaya de p_0 a p_n ocupa al menos - un arco de un conjunto disjunto cualesquiera. Luego, cualesquiera que sea el valor ψ de un flujo f y la capacidad $K(\Delta)$ de un conjunto disjunto Δ , tenemos que

$$\psi \leq K(\Delta) \quad (4.1)$$

es decir, que el flujo nunca podrá rebasar la capacidad del conjunto disjunto en mención.

De manera formal, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \psi &= f(p_0, P) \\ &= f(p_0, P) + f(\bar{A} - \{p_0\}, P) \end{aligned}$$

ya que $f(p_i, P) = 0$ si $i \neq 0, n$.

Entonces

$$\psi = f(\bar{A}, P) = f(\bar{A}, A) \leq K(\bar{A}, A) \quad (4.2)$$

ya que $f(p_i, p_j) \leq K_{ij}$

Luego $\psi \leq K(\bar{A}, A)$

Resulta que si existe un par (f_0, Δ_0) tal que $\psi_0 = K(\Delta_0)$, f_0 es un flujo de valor maximal ψ_0 y Δ_0 es un conjunto disjunto de capacidad minimal.

Entonces no pueden existir subconjuntos Δ_1 de Δ_0 que difieran de Δ_0 en arcos de capacidad no nula de tal manera que todo camino que vaya de p_0 a p_n encuentre a Δ_1 ; si existiera Δ_1 , el flujo no podría exceder del valor $K(\Delta_1) < K(\Delta_0)$. Por consiguiente, Δ_0 sólo difiere de un corte en arcos de capacidad nula.

4.7 Redes Planas.

Un grafo plano, es por definición, un grafo que se puede representar en un plano, de manera que los vértices sean puntos distintos; las aristas, curvas simples y que dos aristas se encuentren únicamente en sus extremos.

Diremos que una red es PLANA, si el grafo obtenido al añadir el arco (p_0, p_n) al grafo de la red es un grafo plano.

Teorema 4.4.

Es una red plana, existe un camino de p_0 a p_n que encuentra a cada corte en un solo arco.

Demostración.

Si no existe, añadamos al grafo el arco (p_0, p_n) . Como la red es plana, se puede dibujar esta red en forma total entre dos rectas verticales que pasen por p_0 y p_n , y por encima del arco (p_0, p_n) supuesto rectilíneo y horizontal.

Determinemos ahora el camino "superior" γ_s y p_0 a p_n tomando siempre el arco más a la izquierda a partir de p_0 .

Vamos a demostrar que γ_s cumple el teorema.

En efecto, supongamos que existe un corte W que γ_s encuentra en más de un arco.

Sean u_1 y u_2 dos arcos de W que γ_s encuentra en su recorrido de p_0 a p_n , de tal manera que encuentra primero a u_1 y luego a u_2 .

Como W es un corte, debe cumplirse que existe un camino

γ_1 de p_0 a p_n que encuentra a W únicamente en u_1 ; además, existe un camino γ_2 de p_0 a p_n que encuentra a W solamente en u_2 - (Teorema 4.2).

Sean:

γ_1' , la parte de γ_1 comprendida entre el extremo terminal de u_1 y p_n ; y

γ_2' , la parte de γ_2 comprendida entre p_0 y el extremo inicial de u_2 .

Tal como hemos definido γ_s , se tiene que γ_1' y γ_2' se cortan y, como el grafo es plano, su intersección comprende uno o varios vértices y eventualmente uno o varios arcos.

Sea p_k uno de los vértices comunes a γ_1' y γ_2' .

El camino compuesto de los arcos de γ_2 entre p_0 y p_k , junto con los arcos de γ_1 entre p_k y p_n no encuentra a W , lo que contradice la hipótesis de que W es un corte. La figura 4.9 ilustra este teorema

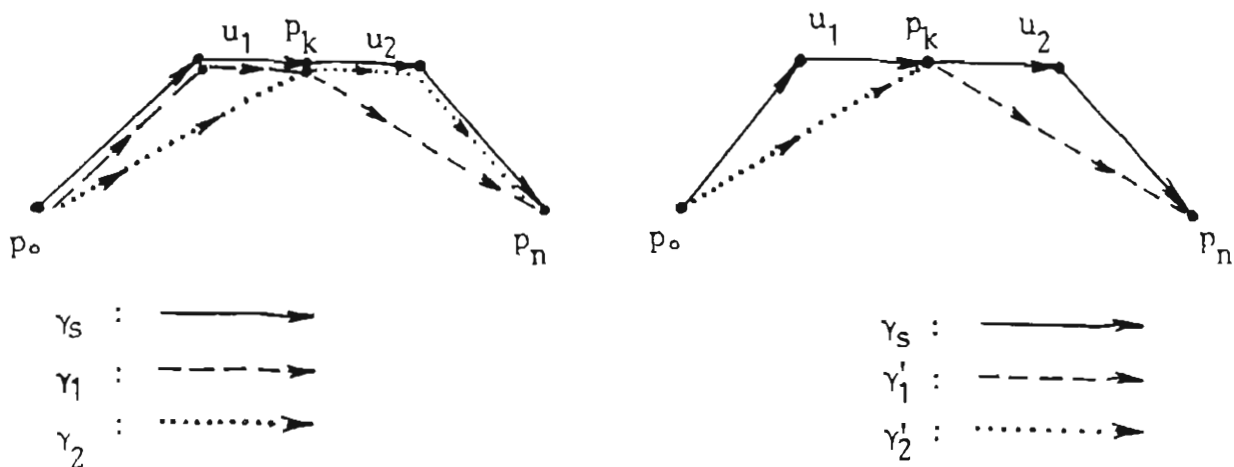


Fig. 4.9

Nota:

Se puede comprobar que este teorema es falso para las redes que no son planas, y con mayor razón para las redes cuyo grafo no es plano.

4.8 Camino de Longitud Minimal.4.8.1 Formulación del Problema.

Dados una red de transporte (P, U) con $(n+1)$ vértices, y dos puntos cualesquiera, p_0 y p_n , de la red, se trata de encontrar un camino de longitud minimal entre p_0 y p_n .

Por definición, la longitud de un camino es la suma de las longitudes, $l(p_i, p_j) = l_{ij} \geq 0$, de los arcos de dicho camino. Supondremos que la capacidad que tienen todos los arcos es infinita.

La solución de este problema proporciona evidentemente un camino de p_0 a p_n , si existe alguno, o prueba que no existe ninguno.

Este problema es similar a la búsqueda de un programa lineal. Para ello, asociamos una variable X_{ij} a todo arco $(i,j) \in U$.

En realidad, para simplificar la estructura, asociaremos una variable X_{ij} a todo par

$$(i,j) \quad i = 0, \dots, n ; \quad j = 0, \dots, n.$$

Haciendo el convenio suplementario de que X_{ij} tendrá valor cero si el arco no pertenece al conjunto U de arcos de la red, es decir

$$X_{ij} \equiv 0 \quad \text{si} \quad (i,j) \notin U.$$

Supongamos que existe un flujo aritmético de una unidad que sale de X_0 y un flujo aritmético nulo que entra en X_0 . Además convengamos que el valor de X_{ij} representará el valor del flujo aritmético en el arco (i,j) .

El problema de programación lineal expresado analíticamente por el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned}
 X_{ij} &\geq 0 && , (i,j) \in U \\
 \sum_{j=0}^n (X_{0j} - X_{j0}) &= +1 \\
 \sum_{j=0}^n (X_{ij} - X_{ji}) &= 0 && , i=1, \dots, (n-1) \\
 \sum_{j=0}^n (X_{nj} - X_{jn}) &= -1 \\
 \text{minimizar } \sum_{i,j} l_{ij} X_{ij} &= 1
 \end{aligned} \right\} (4.3)$$

es equivalente al problema planteado, en donde la primera relación nos indica que el valor del flujo aritmético en todo arco de la red deberá ser mayor o igual que cero.

La segunda expresión indica que la sumatoria de los valores de todas las diferencias de flujos aritméticos que salen y llegan al vértice de entrada es +1.

La tercera relación expresa que la suma de las diferencias de los valores de los flujos aritméticos en un vértice de paso

deberá ser cero; mientras que en la cuarta relación tenemos que la sumatoria de las diferencias de los valores de los flujos aritméticos que salen y llegan al vértice de salida es igual a -1. Para al final minimizar la sumatoria de productos de la longitud de cada arco por su respectivo flujo aritmético.

De modo equivalente, este problema se puede escribir de la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned}
 X_{ij} &\geq 0 \\
 \sum_{j=0}^n X_{0j} &= + 1 \\
 \sum_{j=0}^n (X_{ij} - X_{ij}) &= 0, \quad i=1, \dots, (n-1) \\
 \text{minimizar} \quad &\sum_{i,j} l_{ij} X_{ij}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Supondremos que en la red no existen circuitos de longitud nula.

El programa optimal corresponde a un flujo aritmético de una unidad que sale de p_0 y entra en p_n . Encontramos dos posibles casos:

- i) El flujo total se reparte entre varios caminos de p_0 a p_n , cada uno de estos caminos tiene la misma longitud que los demás y esta longitud es minimal.
- ii) El flujo solamente recorre un camino, este camino es el -

de longitud minimal.

Podemos afirmar que en un programa optimal sus variables no nulas están asociadas a los arcos (i,j) de un camino, o de varios caminos, de longitud minimal. Recíprocamente, si se da el valor +1 a las variables X_{ij} asociadas a los arcos del camino de longitud minimal, se obtiene el programa optimal del problema - (4.3).

Para la búsqueda de un camino minimal, sin usar los métodos generales de la programación lineal para resolver el problema - (4.3) o (4.4), usaremos el algoritmo que trataremos a continuación.

4.8.2 Algoritmo.

G. Dantzig nos proporciona un método que, partiendo de p_0 , permite asociar sucesivamente a todo vértice p_i una marca que represente desde el primer marcado de dicho vértice, la distancia más corta de p_0 a p_i .

Para hacer más clara la exposición, supondremos que los vértices están señalados al principio por q_j ($j=0, \dots, n$) y que se busca el camino más corto entre q_0 y q_n . Los vértices pasarán a ser nominados p_i ($i = 0, \dots, n$) a medida que se les marque.

El algoritmo tiene los siguientes pasos:

- i) q_0 se marca 0 y se le nombra p_0 .
- ii) Se nombra p_1 al vértice q_{j_1} tal que

$$l(p_0, q_{j_1}) = \min_j \{l(p_0, q_j)\}$$

en donde j debe cumplir que $(p_0, q_j) \in U$; es decir, que buscamos entre todos los vértices que estén conectados con p_0 , a través de arcos, aquél que esté ubicado a la menor distancia de éste.

A este vértice así encontrado se le asigna la marca

$$[p_0, u_1], \text{ donde } u_1 = l(p_0, p_1), \text{ es decir que } u_1$$

es la longitud del arco (p_0, p_1) .

iii) Supongamos que se han marcado ya $(K-1)$ vértices así:

$$p_1, \dots, p_{K-1}.$$

Para todo p_i ($i = 0, \dots, K-1$) se busca el vértice q_{ji} aún no marcado, tal que

$$l(p_i, q_{ji}) = \min_j \{l(p_i, q_j)\} \quad (4.5)$$

en donde j debe cumplir que $(p_i, q_j) \in U$.

Debe tenerse en cuenta que esta operación deberá hacerse para todo vértice ya marcado.

Cuando ya han sido marcados todos los vértices adyacentes a p_i , no queda ya ningún q_{ji} .

Sea K el conjunto de los índices i tales que exista q_{ji} , en este caso se tiene que

$$K \subseteq \{0, \dots, K-1\}$$

Nombraremos p_k al vértice q_{jr} tal que

$$u_r + l(p_r, q_{jr}) = \min_{i \in K} \{u_i + l(p_i, p_{ji})\} \quad (4.6)$$

donde u_r es la longitud del camino desde p_0 hasta

P_r y $l(P_r, q_{j_r})$ es la longitud del arco que va desde el vértice P_r hasta el nuevo vértice P_k .

Puede notarse que debemos escoger como r al índice i de K que cumpla con la condición de que la longitud del camino desde P_0 hasta P_i más la longitud de P_i hasta el nuevo vértice sea la menor de todas.

A este nuevo vértice P_k se le atribuye la marca $[P_r, u_k]$, donde $u_k = u_r + l(P_r, P_k)$.

iv) Se para el procedimiento cuando q_n ha sido nombrado de nuevo y marcado.

Sean P_m el nuevo nombre de q_n ($m \leq n$) y $[P_{i_1}, u_m]$ su marca.

Donde P_{i_1} es el vértice anterior a P_m y u_m es la longitud del camino más corto de P_0 a P_m y este camino más corto está representado por la secuencia de vértices

$(P_0, P_{i_1}, \dots, P_{i_1}, P_m)$ con $1 \leq m-1$, en la que cada vértice es la marca del vértice siguiente.

4.8.3 Ejemplo:

Consideremos el siguiente diagrama (Fig. 4.10) donde están dadas las longitudes de cada arco y cada vértice está nombrado al principio por q_j ($j = 0, \dots, n$).

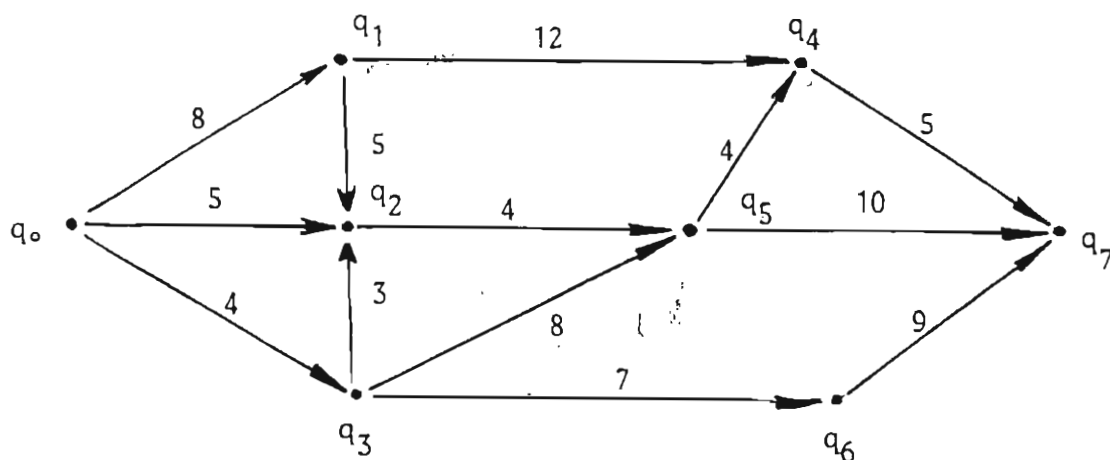


Fig. 4.10

Aplicando el algoritmo, q_0 se marca 0, indicando que la longitud en este vértice es nula, y se le nombra p_0 .

Para nombrar el p_1 correspondiente, se hace necesario encontrar las longitudes de los arcos que salen de p_0 a sus vértices adyacentes, que son:

$$l(p_0, q_1) = 8 ; l(p_0, q_2) = 5 ; l(p_0, q_3) = 4.$$

Como el algoritmo exige que se escoja la menor longitud, el vértice elegido es q_3 , al que llamamos p_1 y le asignamos la marca

$$[p_0, u_1] = [p_0, 4] , \text{ ya que } u_1 = l(p_0, p_1)$$

Ahora, para los vértices ya marcados, p_0 y p_1 , buscamos el vértice, adyacente a éstos, no marcado y que esté ubicado a la menor longitud de ellos.

Observando la figura 4.10 puede notarse que para p_0 los

vértices adyacentes no marcados son q_1 y q_2 ; además, que la longitud mínima es $l(p_0, q_2) = 5$.

En la misma figura observamos que para p_1 los vértices adyacentes no marcados son q_2 , q_5 y q_6 y sus respectivas longitudes son: $l(p_1, q_2) = 3$, $l(p_1, q_5) = 8$ y $l(p_1, q_6) = 7$

Observemos que en este caso el vértice candidato tanto para suceder a p_0 como a p_1 es q_2 , ya que en ambos casos la longitud desde ellos hacia q_2 es la menor.

Para nombrar y marcar a q_2 , usaremos la condición de mínimo (4.6).

Como el camino más corto para llegar a q_2 partiendo de p_0 es el arco (p_0, q_2) , y no el camino que pasa por p_1 , nombraremos a q_2 con p_2 y lo marcaremos con

$$[p_0, u_2] = [p_0, 5], \text{ ya que } u_2 = l(p_0, p_2).$$

Ahora para los vértices marcados, p_0 , p_1 y p_2 , debemos encontrar las longitudes que hay entre ellos y sus vértices adyacentes no marcados y escoger la menor, así:

para p_0 , sólo tenemos $l(p_0, q_1) = 8$;

para p_1 , tenemos $l(p_1, q_5) = 8$ y $l(p_1, q_6) = 7$;

para p_2 , sólo tenemos $l(p_2, q_5) = 4$.

Desde luego, el vértice candidato es q_5 y por (4.6) lo nombramos p_3 y lo marcamos

$$[p_2, u_3] = [p_2, 9], \text{ ya que } u_3 = u_2 + l(p_2, p_3)$$

Puede observarse que al aumentar el número de vértices mar

cados el número de comparaciones que debe hacerse aumenta. Así, si el conjunto K contiene todos los índices de 0 a $(K-1)$, la búsqueda del mínimo (4.6) necesitará $(K-1)$ comparaciones para determinar el p_k que deseamos.

En nuestro caso el camino de longitud minimal está determinado por la sucesión de vértices $(p_0, p_2, p_3, p_4, p_5)$, con una longitud igual a 19 unidades. El diagrama final correspondiente se encuentra en la figura 4.11, en ella puede notarse que el vértice p_1 no participa en la solución.

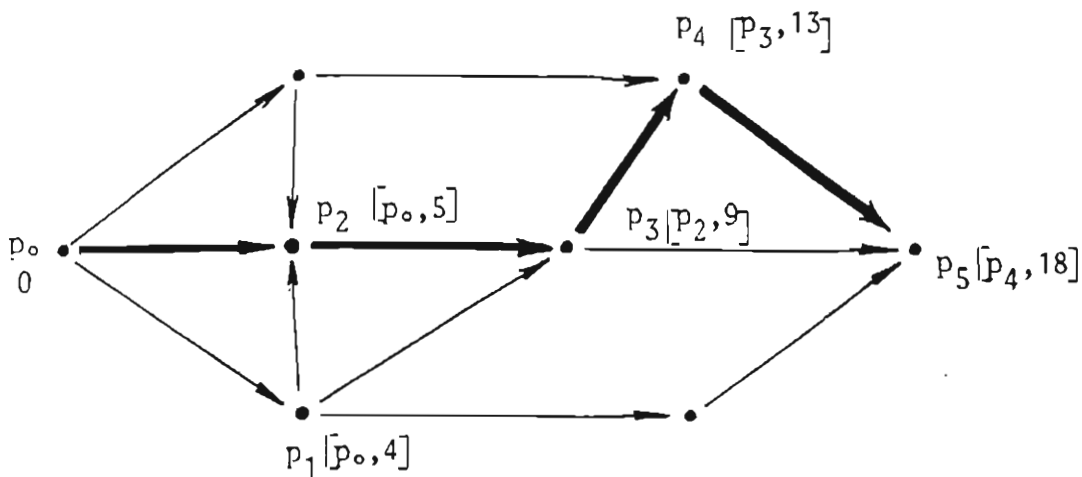


Fig. 4.11

C A P I T U L O V
 REDES DE TRANSPORTE, II
 FLUJO DE VALOR MAXIMAL

5.1 Formulación del Problema.

El problema de la existencia de un flujo en una red no se plantea. En una red cualesquiera, siempre existe al menos un flujo, el flujo nulo; de no existir otro distinto, este flujo aparecerá como resultado de la aplicación del algoritmo que estudiaremos.

Como veremos, la búsqueda del flujo maximal en una red general equivale a la búsqueda del flujo maximal en la red reducida que se obtiene creando los arcos:

(p_0, p_e) de capacidad $k(p_0, p_e) \geq k(p_e, P)$, $p_e \in E$

(p_s, p_n) de capacidad $k(p_s, p_n) \geq k(P, p_s)$, $p_s \in S$

donde E es el conjunto de entradas de la red, S es el conjunto de salidas y P el conjunto de vértices de dicha red.

Con estos arcos, lo que hemos creado es una red reducida (P, U) con una entrada p_0 y una salida p_n . Luego, se trata de encontrar un flujo maximal en esta red reducida, donde son infinitas la disponibilidad en p_0 y la demanda en p_n .

Supondremos que no existe ningún camino de p_0 a p_n en donde todos sus arcos tengan capacidad infinita. Como en el

problema de longitud minimal, y con el único fin de simplificar la escritura, asociaremos una variable x_{ij} a todo par (i, j) , con $i = 0, \dots, n$ y $j = 0, \dots, n$.

Haremos el convenio de que

$$x_{ij} \equiv 0, \quad \text{si } (i, j) \notin U$$

Si también convenimos que x_{ij} representará el valor del flujo aritmético en el arco (i, j) , entonces el problema se escribe así:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_{ij} \leq k_{ij} \quad , \quad (i, j) \in U \quad (5.1) \\ \sum_{j=0}^n (x_{ij} - x_{ji}) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (5.2) \\ \text{maximizar} \quad \sum_{j=0}^n x_{0j} \equiv \sum_{j=0}^n x_{jn} = \psi \end{array} \right.$$

Puede observarse que se trata de un problema de programación lineal, en donde debemos maximizar el flujo aritmético que puede darse en una red cualesquiera.

Los algoritmos que estudiaremos nos permitirán determinar fácilmente un flujo maximal, sin emplear los métodos generales de la programación lineal.

5.2 Caso de Redes Planas.

Primer Algoritmo de Ford - Fulkerson.

En el caso de las redes planas, existe un algoritmo especial más sencillo que el algoritmo general que estudiaremos en la sección 5.3

5.2.1 Algoritmo.

i) Dibujamos el grafo de la red por encima del segmento $p_0 p_n$ supuesto horizontal, y entre las dos semirrectas verticales trazadas por p_0 y p_n .

ii) Determinamos el camino superior γ_{s_1} de p_0 a p_n ; este camino se obtiene, por definición, tomando siempre el arco a la izquierda cuando se recorre la red de p_0 a p_n ; en el caso de las redes planas este procedimiento permite determinar un camino y uno solo.

Hacemos pasar por este camino el flujo maximal, que sature el o los arcos de capacidad minimal $k(u_1)$. Disminuimos las capacidades de todos los arcos de γ_{s_1} en $k(u_1)$ y suprimimos los arcos saturados en este camino, es decir, que tienen ahora una capacidad nula.

iii) Repetimos las operaciones ii) sobre la red modificada, determinando en cada estado un camino γ_{s_i} y una capacidad $k(u_i)$.

Nos detendremos en el estado p , cuando no exista de p_0 a p_n ningún camino más que el arco (p_0, p_n) , que se supone no pertenece a la red inicial.

iv) Hacemos pasar, en la red primitiva, por todo camino γ_{s_i} ($i = 1, \dots, p$) un flujo de valor $k(u_i)$ correspondiente. El flujo total así obtenido es el flujo maximal buscado.

5.2.2 Ejemplo.

Encontrar el flujo maximal en la red que se encuentra en la figura 5.1. En el diagrama se encuentran las respectivas capacidades de sus arcos.

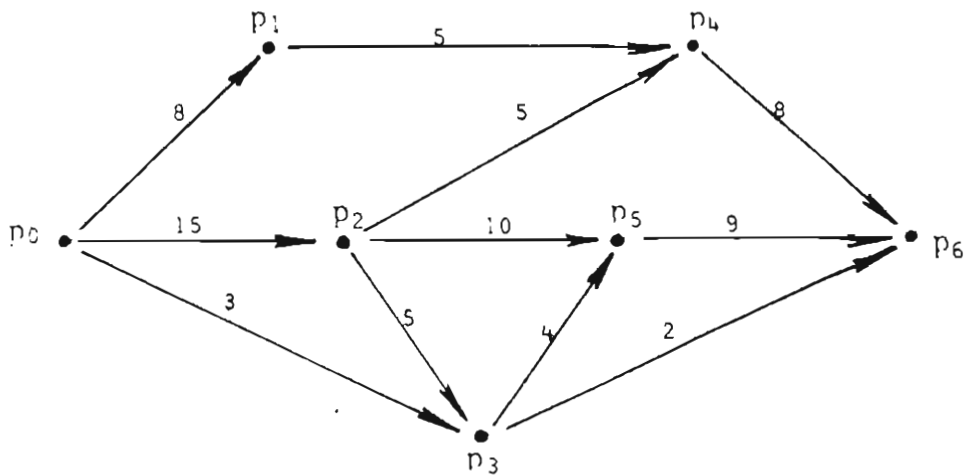


Figura 5.1

Siguiendo el algoritmo, dibujamos el grafo de la red entre las dos semirrectas verticales trazadas por p_0 y p_n y por encima del segmento $\overline{p_0 p_6}$, tal como se muestra en la figura 5.2.

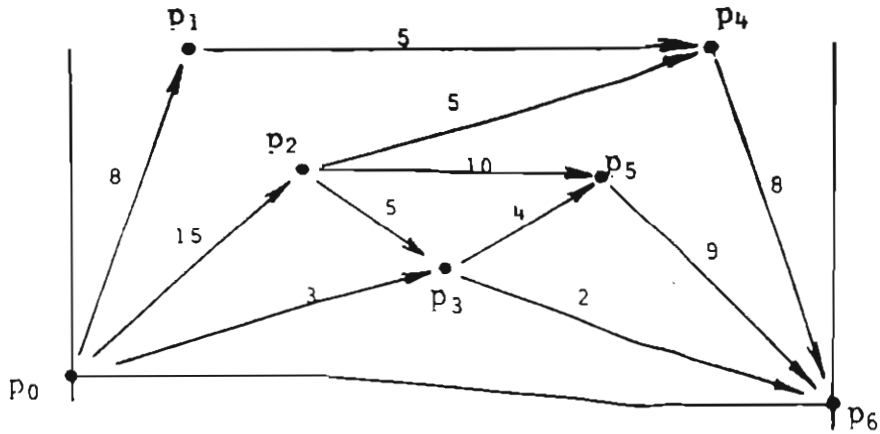


Figura 5.2

Para el primer camino $\gamma_{s_1} = (p_0, p_1, p_4, p_6)$, hacemos un flujo de valor $k(u_1) = 5$ que satura el arco (p_1, p_4) , ya que $k(p_1, p_4) = 5$.

Al disminuir en $k(u_1) = 5$ todas las capacidades de los arcos de γ_{s_1} , desaparece el arco saturado (p_1, p_4) y las capacidades de los otros arcos quedan con valores $k(p_0, p_1) = 3$ y $k(p_4, p_6) = 3$, como se muestra en la

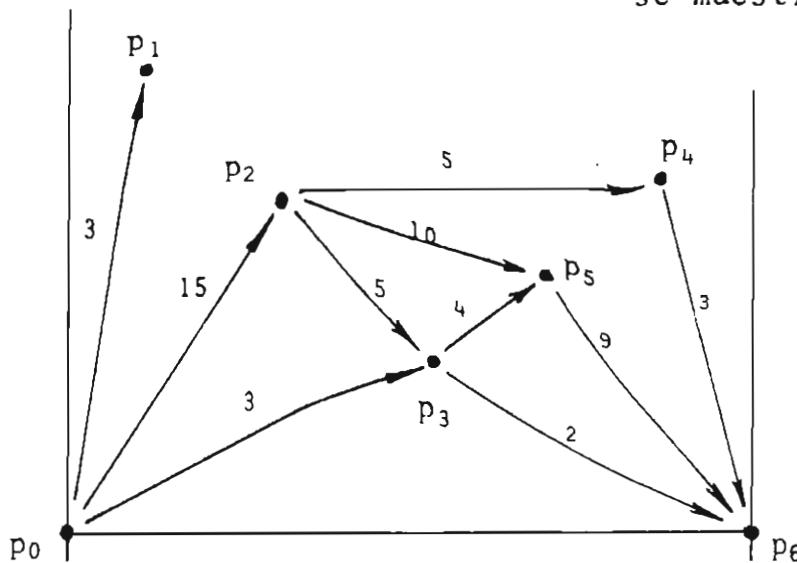


Figura 5.3

Para el camino superior $\gamma_{S_2} = (p_0, p_2, p_4, p_6)$, hacemos pasar un flujo de valor $k(u_2) = 3$ que satura el arco (p_4, p_6) .

Al disminuir todos los arcos de γ_{S_2} en $k(u_2)$, desaparece el arco (p_4, p_6) cuya capacidad ahora es nula, y las nuevas capacidades de los arcos de γ_{S_2} son: $k(p_0, p_2) = 12$ y $k(p_2, p_4) = 2$

Siguiendo el algoritmo, tendríamos: un tercer camino $\gamma_{S_3} = (p_0, p_2, p_5, p_6)$, hacemos pasar el flujo de valor $k(u_3) = 9$; al disminuir este valor en los arcos de γ_{S_3} , desaparece el arco (p_5, p_6) y las nuevas capacidades son $k(p_0, p_2) = 3$ y $k(p_2, p_5) = 1$. El diagrama obtenido hasta el momento se encuentra en la figura 5.4.

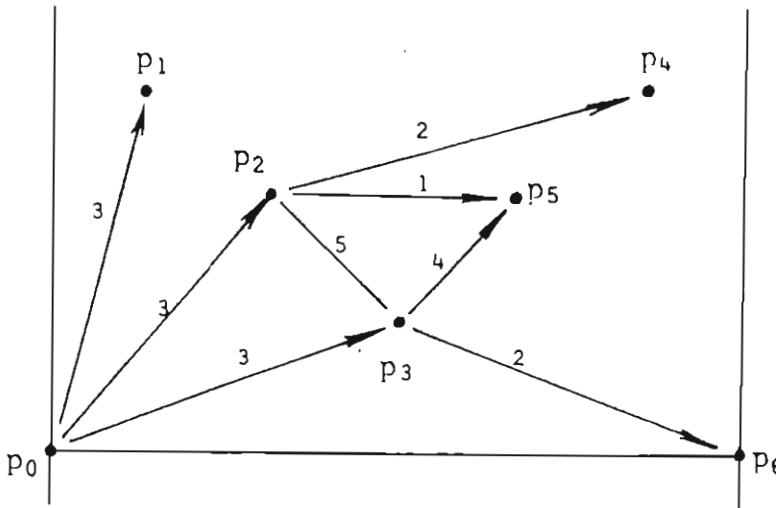


Figura 5.4

El siguiente camino superior es $\gamma_{S_4} = (p_0, p_2, p_3, p_6)$, el flujo que hacemos pasar tiene valor $k(u_4) = 2$ que satura el arco (p_3, p_6) . Al disminuir los arcos de γ_{S_4} en

$k(u_4)$ desaparece el arco (p_3, p_6) , y en este estado ya no existe de p_0 a p_6 ningún camino más que el arco p_0p_6 que no pertenece a la red inicial.

Para encontrar el flujo maximal, regresamos a la red primitiva y hacemos pasar por cada γ_{s_i} ($i = 1, \dots, 4$) su respectivo flujo de valor $k(u_i)$.

El flujo total así obtenido será el flujo maximal buscado. En nuestro caso $\Psi = 19$ como se muestra en la figura 5.5, donde los flujos están encerrados en círculos.

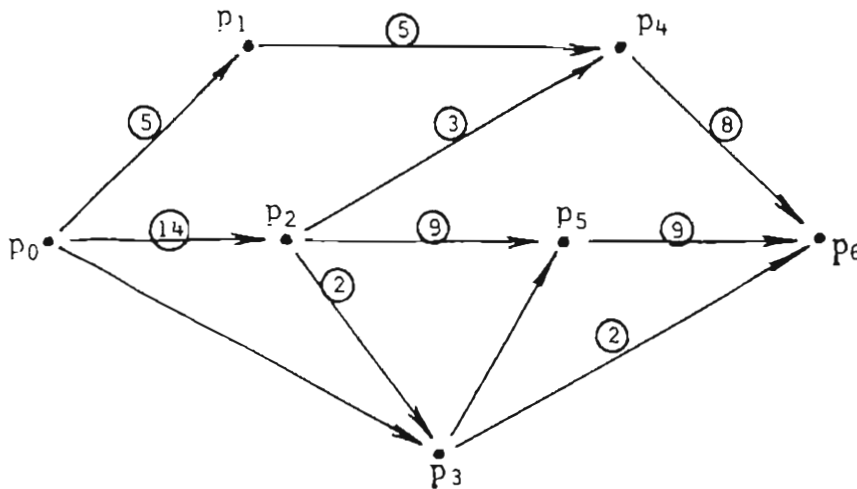


Figura 5.5

5.3 Caso General.

5.3.1 Problema del Flujo Total Máximo.

Trataremos de encontrar el flujo para cada uno de los arcos de la red, de tal manera que el flujo total Ψ sea máximo, es decir, $f(u)$, $\forall u \in U$ tq Ψ sea máximo.

Para resolver este problema enunciaremos antes tres teoremas.

TEOREMA 5.1

Si existe al menos un camino de p_0 a p_n en el que ningún arco está saturado, entonces el flujo no puede ser máximo.

Demostración:

Si consideramos las capacidades residuales (sección 4.5.3) para todo arco $u \in U$, en el camino de p_0 a p_n , de la siguiente manera:

$$r(u) = k(u) - f(u) > 0$$

y designamos con r' la menor de todas las capacidades residuales; podemos aumentar el flujo de cada arco en $r' = \min\{r(u)\}$ y siempre se cumplirá que el flujo en todo arco es menor o a lo sumo igual a la capacidad del mismo, es decir

$$f(u) \leq k(u) , \quad \forall u \in U.$$

De lo anterior se puede concluir que el flujo total ψ se puede incrementar en r' y se convertirá en $\psi + r'$.

Ejemplo.

En la figura 5.6 hemos considerado un camino $\gamma = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_n)$ en una red de transporte que no hemos representado entera. Las capacidades de los arcos están escritas entre paréntesis y los flujos fuera de paréntesis.

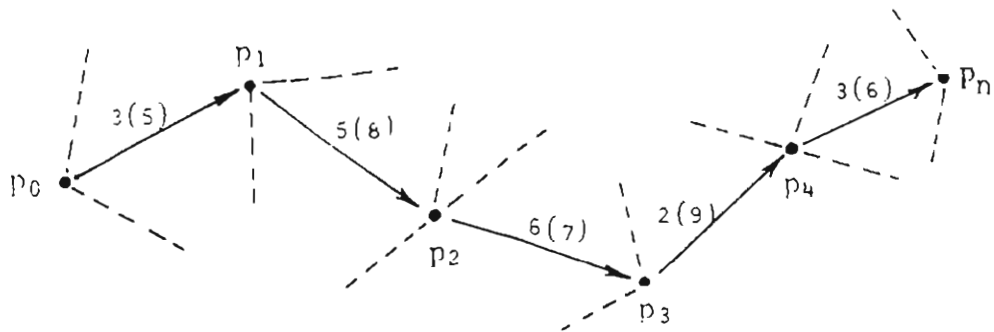


Figura 5.6

Puede notarse que ninguno de los arcos del camino está saturado y tenemos:

$$\begin{aligned} r(p_0, p_1) &= 5 - 3 = 2 & r(p_3, p_4) &= 9 - 2 = 7 \\ r(p_1, p_2) &= 8 - 5 = 3 & r(p_4, p_n) &= 6 - 3 = 3 \\ r(p_2, p_3) &= 7 - 6 = 1 \end{aligned}$$

Luego $r' = r(p_2, p_3) = 1$, de donde se puede aumentar el flujo en 1 unidad en todos los arcos del camino, saturando el arco (p_2, p_3) y aumentando ψ en 1, tal como se muestra en la figura 5.7.

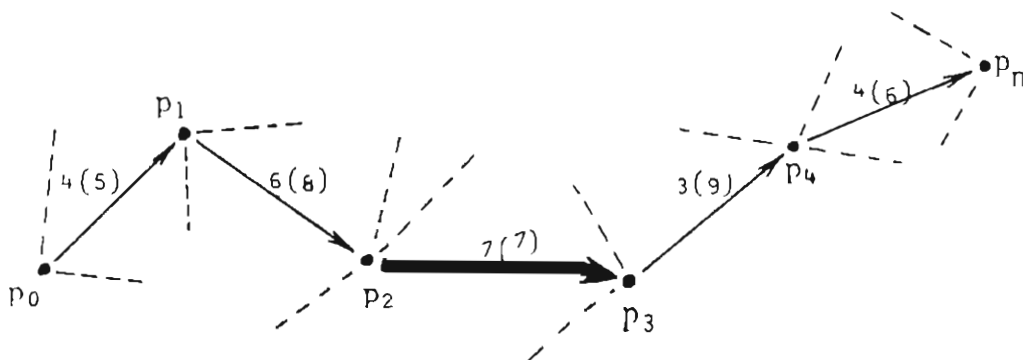


Figura 5.7

TEOREMA 5.2

Sea $v = [p_0, p_1, \dots, p_n]$ una cadena que va de la entrada p_0 a la salida p_n . Supongamos que esta cadena no es un camino y utilicemos la notación siguiente:

u^+ , para los arcos que están en el sentido de p_0 a p_n ,
y u^- , para los arcos que están en sentido contrario.

Entonces, haciendo

$$i) \quad r(u^+) = k(u^+) - f(u^+)$$

$$ii) \quad f' = \min_{u^-} f(u^-)$$

$$iii) \quad r' = \min_{u^+} r(u^+)$$

$$iv) \quad \epsilon = \min [f', r']$$

Si $\epsilon > 0$, aumentando en ϵ el flujo de cada arco u^+ y disminuyendo en ϵ el flujo de cada arco u^- en la cadena considerada, el flujo ψ se transformará en $\psi + \epsilon$. Una cadena tal que $\epsilon=0$ será llamada "saturada".

Demostración:

Primero, observemos que f' será el mínimo de los flujos que van en sentido contrario, r' será la mínima capacidad residual de los arcos que van en sentido directo y que ϵ será el menor de estos dos mínimos.

Luego ϵ tiene dos posibilidades:

- a) Si $\epsilon = r'$, entonces el flujo en cada u^+ puede incrementarse en ϵ y en cada u^- lo podemos disminuir en ϵ , ya que $f' > \epsilon$. En este caso queda agotado un arco u^+ , aunque no sucede lo

mismo con los arcos u^- .

- b) Si $\epsilon = f'$, la situación es análoga, con la excepción de que será un arco u^- el que quedará saturado.

Ejemplo:

Consideremos una cadena $v = [p_0, p_1, p_2, \dots, p_7, p_n]$ en una red de transporte que no hemos representado entera. Las capacidades de los arcos están entre paréntesis y los flujos fuera de ellos, tal como se muestra en la figura 5.8.

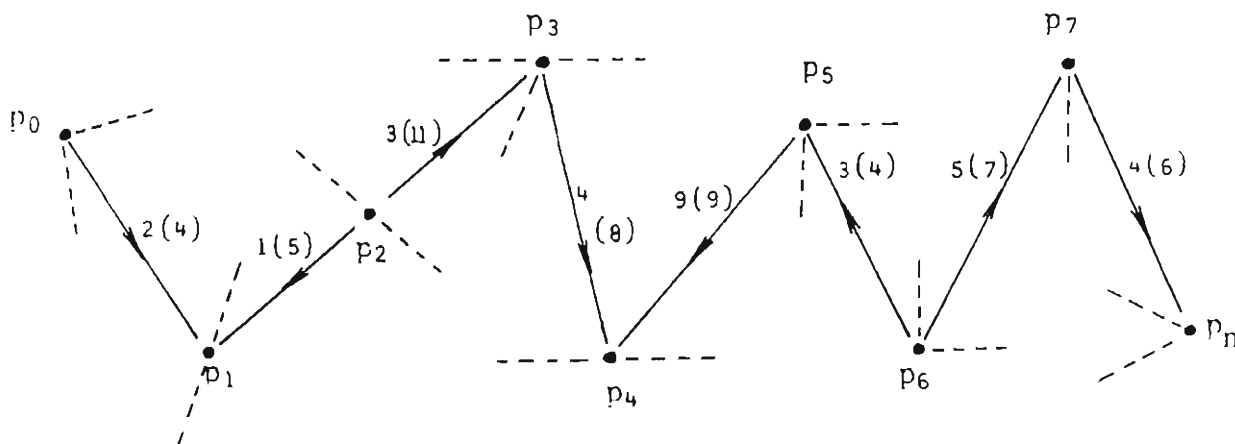


Figura 5.8

En esta cadena tenemos sucesivamente:

$$r(p_0, p_1) = 2 \quad , \quad r(p_2, p_3) = 8 \quad , \quad r(p_3, p_4) = 4, \quad r(p_6, p_7) = 2$$

y $r(p_7, p_n) = 2$.

$$\text{Luego } r' = \min_{u^+} r(u^+) = 2$$

también tenemos:

$$f(p_2, p_1) = 1, \quad f(p_5, p_4) = 9 \quad \text{y} \quad f(p_6, p_5) = 3$$

Luego
$$f' = \min_{u^-} f(u^-) = 1$$

De donde $\epsilon = \min [f', r'] = [1, 2] = 1$. Así, se puede aumentar el flujo Ψ en $\epsilon = 1$ y el flujo en los arcos de v será:

$$\begin{aligned} f_1(p_0, p_1) &= 2 + 1 = 3, & f_1(p_2, p_1) &= 1 - 1 = 0, \\ f_1(p_2, p_3) &= 3 + 1 = 4, & f_1(p_3, p_4) &= 4 + 1 = 5, & f_1(p_5, p_4) &= 9 - 1 = 8, \\ f_1(p_6, p_5) &= 3 - 1 = 2, & f_1(p_6, p_7) &= 5 + 1 = 6 & \text{y} & f_1(p_7, p_n) &= 4 + 1 = 5 \end{aligned}$$

El resultado se muestra en la figura 5.9. En donde no se puede aumentar el flujo a lo largo de la cadena, ya que al encontrar el nuevo ϵ_1 , éste tendrá valor cero.

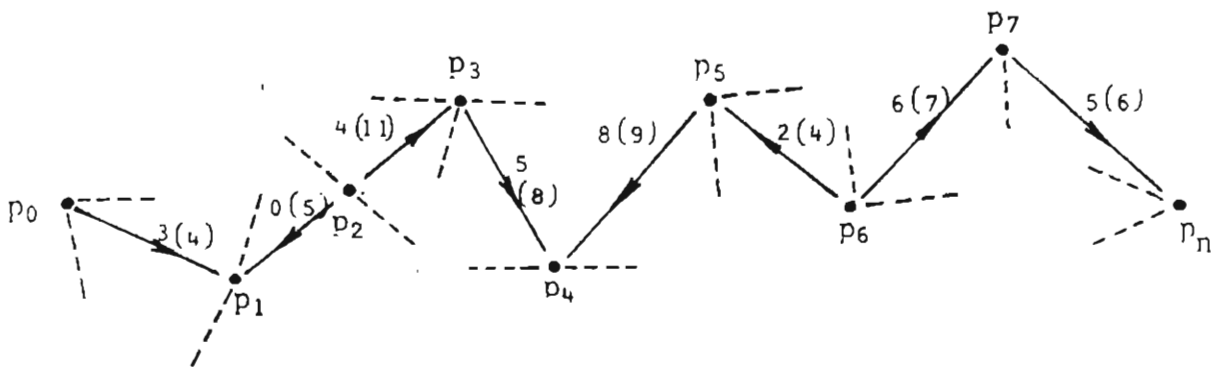


Figura 5.9

5.3.2 Flujo Completo.

Un flujo ψ de una red de transporte es llamado **COMPLETO** si para todo camino que va de la entrada p_0 a la salida p_n existe al menos un arco saturado, es decir, no se puede aumentar el flujo ψ considerando caminos, sino, eventualmente, considerando cadenas de p_0 a p_n .

Nota:

Dado un vértice p_i de un grafo, denominamos por C_{p_i} el conjunto de vértices que se hallan unidos a p_i mediante una cadena aumentada con el vértice p_i , una **COMPONENTE CONEXA** es un subgrafo engendrado por C_{p_i} . Si G_i y G_j son las componentes conexas engendradas por los subconjuntos de vértices C_i y C_j , entre otras condiciones deberá cumplirse que:

$$C_i \neq C_j \Rightarrow C_i \cap C_j = \phi, \quad \forall i, j.$$

TEOREMA 5.3

Si no existe ninguna cadena v de p_0 a p_n tal que $\epsilon > 0$, el flujo ψ no puede aumentarse más, y por lo tanto ψ es máximo.

Demostración:

Consideremos una red de transporte con un flujo máximo ψ y suprimamos aquellos arcos que cumplan que $r(u^+) = 0$ o bien que $f(u^-) = 0$. Determinamos así por lo menos dos componentes conexas, de lo contrario existiría todavía una cadena no saturada entre p_0 y p_n .

Tenemos que una de las componentes conexas está formada por un subconjunto $A \subset P$ de vértices que contiene a p_n , este subconjunto define un corte W tal que

$$\Psi = \sum_{u^+ \in W} f(u^+) - \sum_{u^- \in W} f(u^-)$$

es decir, que el flujo Ψ es igual a la suma de los flujos de los arcos incidentes al interior de A menos la suma de los flujos de los arcos incidentes hacia el exterior de A .

Por la definición de corte, tenemos que:

$$\Psi = \sum_{u^+ \in W} f(u^+) - 0,$$

ya que los arcos incidentes al exterior no forman parte del corte, así:

$$\Psi = k(W),$$

es decir, que el flujo es igual a la capacidad del corte; además ya que todos los arcos que pertenecen al corte están saturados, luego el flujo Ψ es máximo.

TEOREMA 5.4

TEOREMA DE FORD-FULKERSON.

En una red de transporte, el valor máximo del flujo es igual a la capacidad mínima de sus cortes.

Demostración:

Este teorema se deduce de los teoremas anteriores 5.1, 5.2 y 5.3.

Partiendo del resultado del teorema 5.3, de que el flujo máximo en un corte es igual a la capacidad de éste, es decir,

$$\psi = K(W) \quad (5.3)$$

solamente debemos probar que $K(W)$ es mínima.

Tenemos que para todo corte W :

$$K(W) = \sum_{u^+ \in W} K(u^+)$$

Además tenemos que $\sum f(u^+) \leq \sum k(u^+)$ como

$$\psi = \sum f(u^+) \leq \sum k(u^+)$$

Se concluye que $\psi \leq k(W)$, $\forall W$

En todo caso, el flujo máximo coincidirá con la capacidad mínima del corte, es decir:

$$\max \psi = \min k(W)$$

5.3.3 Algoritmo de Ford-Fulkerson.

A partir de los teoremas anteriores puede construirse el algoritmo que se expone a continuación sobre un ejemplo. Este ejemplo se refiere al grafo que se encuentra en la figura 5.10, pero el algoritmo es aplicable a cualquier red de transporte. En la gráfica se encuentran las capacidades de los arcos entre paréntesis y para facilitar la interpretación de la red, designaremos los vértices p_i ($i = 0, 1, \dots, 11$) únicamente por el índice i encerrado en un círculo.

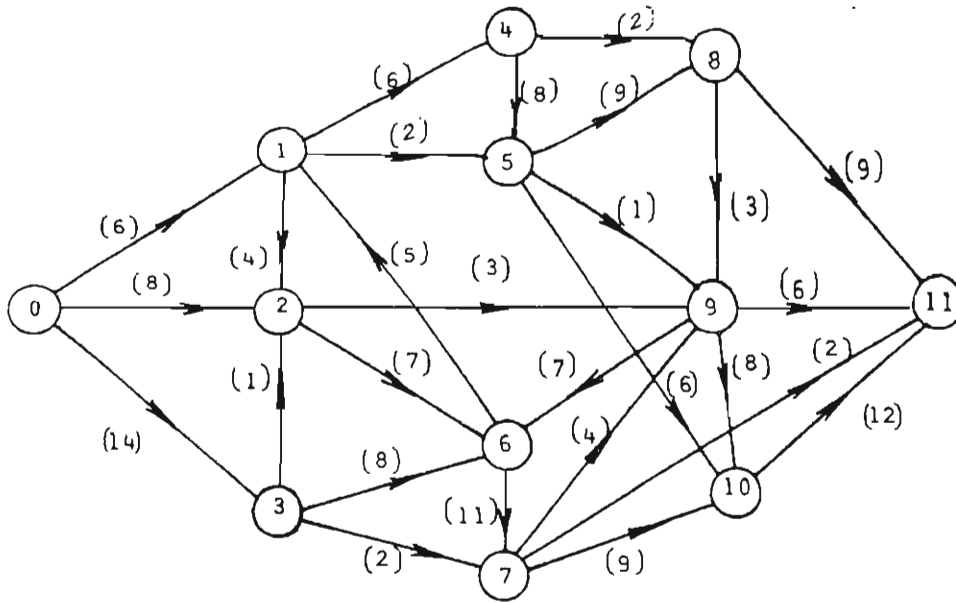


Figura 5.10

Los pasos del algoritmo son los siguientes:

- i) Hacer pasar por la red un flujo ψ factible cualquiera.

Con este objeto se hace entrar por p_0 un flujo ψ tal que se respete la propiedad de conservación del flujo en todos los vértices. Se puede iniciar, desde luego, con flujos nulos en todos los arcos, pero entonces la aplicación de los pasos siguientes del algoritmo será más larga. En la figura 5.11 se ha presentado un flujo que constituye una solución inicial, obtenida al azar.

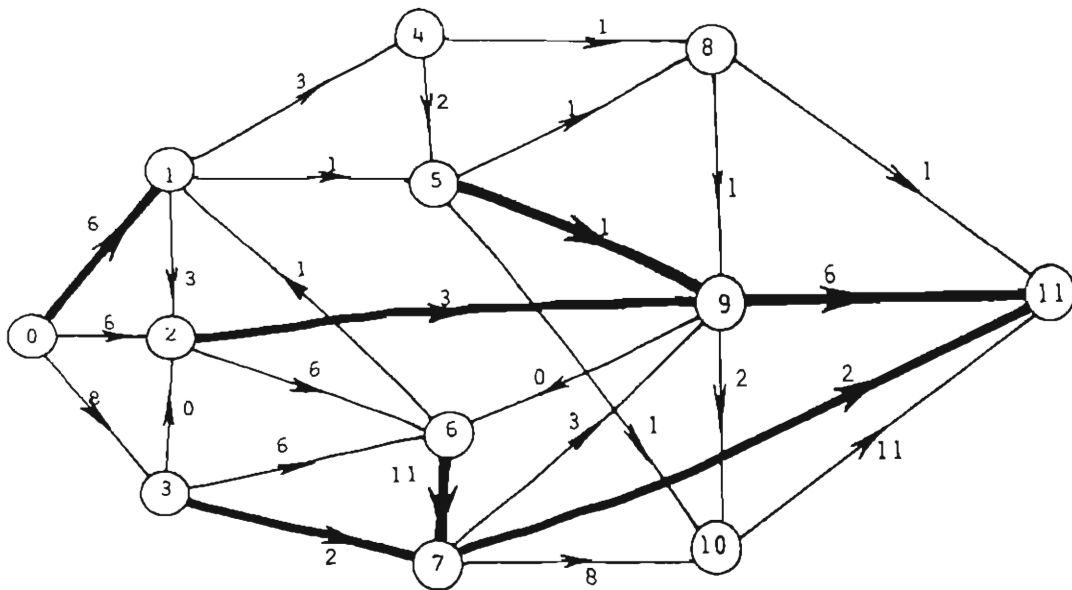


Figura 5.11

ii) Buscar un flujo completo.

Para obtener un flujo completo, basta considerar la red de transporte limitada a los arcos no saturados. Si el flujo no es completo, existe en la red reducida un camino de p_0 a p_n .

Aumentamos el flujo de los arcos de este camino, hasta que conseguimos saturar al menos uno de sus arcos. Se repite la operación hasta que todos los caminos que unen p_0 con p_n tengan al menos un arco saturado.

En la figura 5.11 se indican los arcos saturados. Buscando un camino entre p_0 y p_{11} que no pase por ningún arco saturado, encontramos $\gamma_1 = (p_0, p_2, p_6, p_1, p_4, p_8, p_{11})$. Aumentamos el flujo de los arcos de γ_1 en una unidad

y se saturan los arcos (p_2, p_6) y (p_4, p_8) , obteniendo así la figura 5.12.

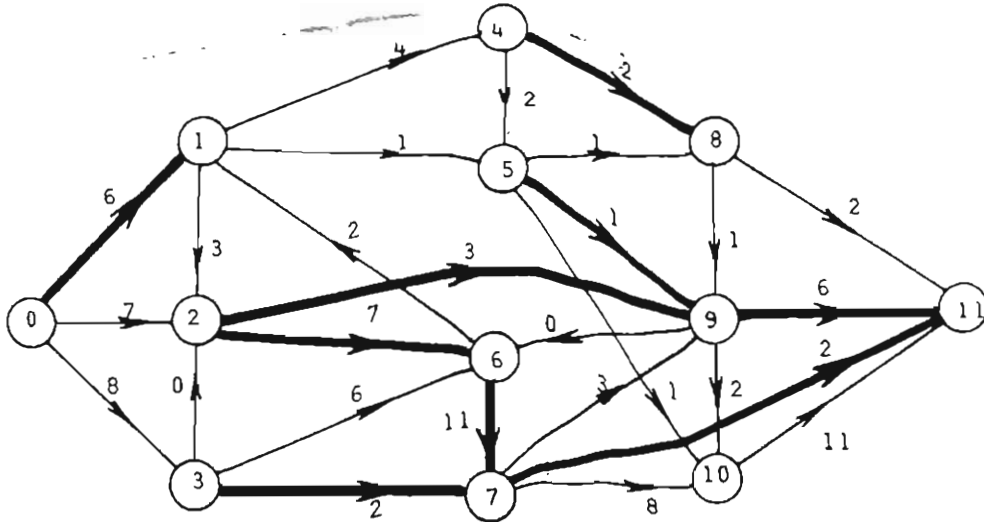


Figura 5.12

En la figura 5.12 encontramos otro camino que no pasa por ningún arco saturado, éste es $\gamma_2 = (p_0, p_3, p_6, p_1, p_5, p_8, p_{11})$. Se aumenta en una unidad el flujo de los arcos de γ_2 , lo que satura el arco (p_1, p_5) y se obtiene la figura 5.13.

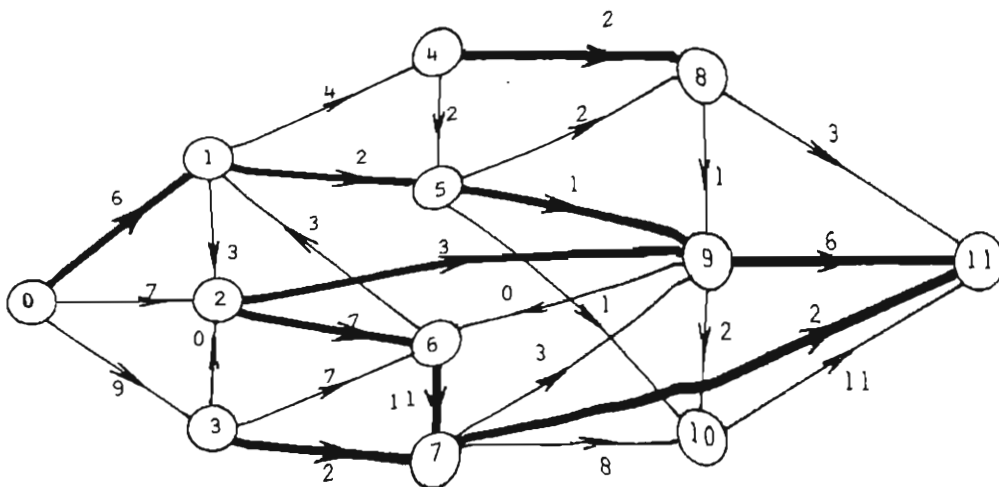


Figura 5.13

Existe todavía un camino a considerar,
 $\gamma_3 = (p_0, p_3, p_6, p_1, p_4, p_5, p_8, p_{11})$. Al aumentar el
 flujo en γ_3 en una unidad, se satura el arco (p_3, p_6) y
 se obtiene la figura 5.14 en la que se ve fácilmente que
 no es posible encontrar ningún camino entre p_0 y p_n que
 no pase por ningún arco saturado. Luego en la figura 5.14
 tenemos un flujo completo.

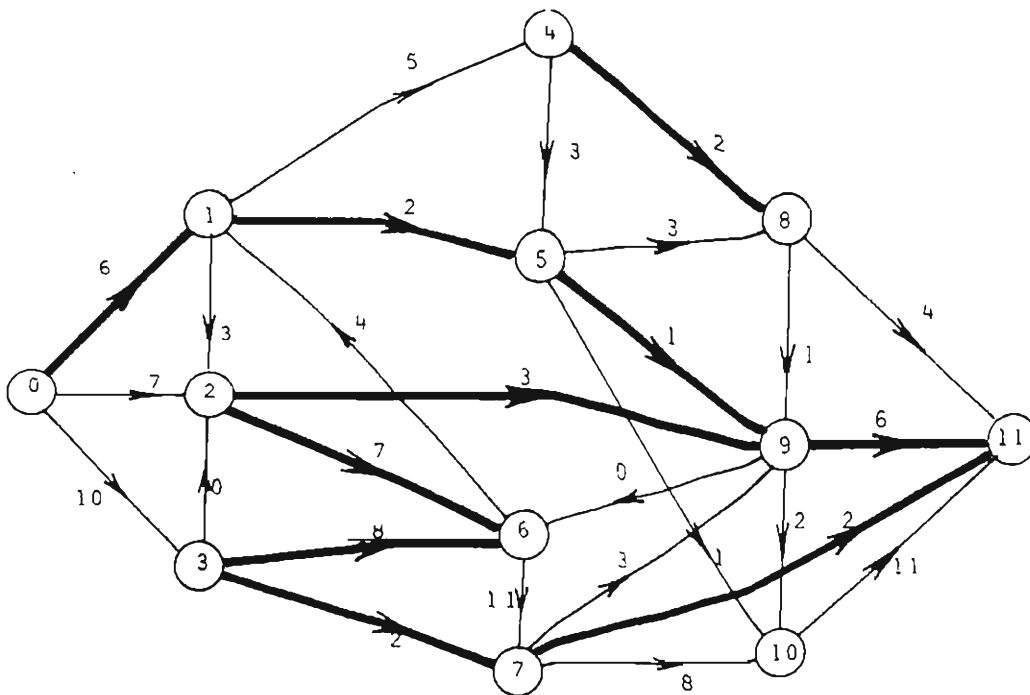


Figura 5.14

iii) Buscar el flujo ψ máximo.

Para determinar este flujo ψ máximo, se buscarán las cadenas a lo largo de las cuales el flujo de p_0 a p_n puede aumentarse. Usaremos el siguiente procedimiento, deducido del teorema 5.2.

- a) Marcar p_0 con un signo +.
- b) Si se ha marcado el vértice p_i :
- Marcar con un $[+p_i]$ todo vértice p_j no marcado tal que exista un arco (p_i, p_j) no saturado.
 - Marcar con un $[-p_i]$ todo vértice p_j no marcado tal que exista un arco (p_j, p_i) atravesado por un flujo no nulo.
- c) Si mediante este procedimiento se logra marcar la salida, el flujo total no es máximo. Se considera entonces una cadena de puntos marcados (+ o -) que vaya de p_0 a p_n y la secuencia de vértices que la componen. En los arcos se darán las siguientes situaciones:

Si el arco está orientado en el orden de la secuencia, se determina la capacidad residual

$$r(u^+) = k(u^+) - f(u^+)$$

Si el arco está orientado en sentido contrario al orden de la secuencia, se considera el flujo $f(u^-)$ del arco.

A continuación calcularemos $\epsilon = [f', r']$, como se ha indicado en ii), iii) y iv) del teorema 5.2

Luego para todo arco u^+ se aumentará su flujo en ϵ y para todo arco u^- se disminuirá su flujo en ϵ , en esta forma el flujo Ψ aumentará en ϵ .

Se repite 3) hasta que no sea posible marcar la salida. En este momento se tendrá el flujo Ψ máximo en la red de transporte.

En el ejemplo presentado, operaremos como sigue (figura 5.15):

Marcamos p_0 con un signo +.

Marcamos p_2 con $[+p_0]$, o para simplificar la escritura con $[+0]$, y haremos lo mismo en los siguientes: p_1 con $[-2]$, p_4 con $[+1]$, p_5 con $[+4]$, p_8 con $[+5]$ y p_{11} con $[+8]$. Como hemos podido marcar la salida, el flujo total no es máximo.

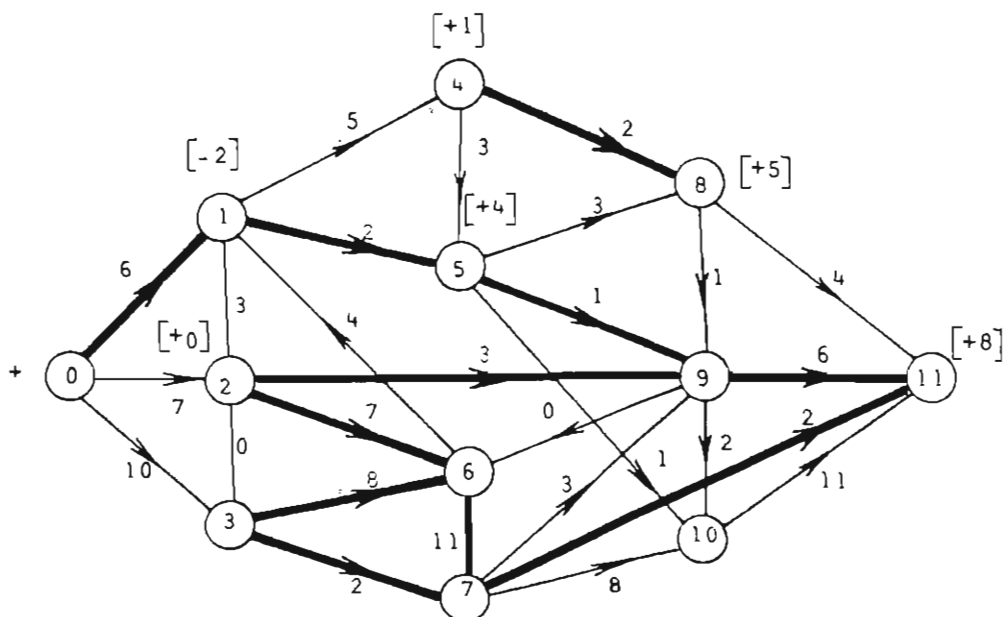


Figura 5.15

Para llegar de p_0 a p_{11} siguiendo los vértices marcados seguiremos la cadena

$$v_1 = [p_0, p_2, p_1, p_4, p_5, p_8, p_{11}]$$

Tenemos sucesivamente:

$$r(p_0, p_2) = 1, \quad f(p_1, p_2) = 3, \quad r(p_1, p_4) = 1, \quad r(p_4, p_5) = 5, \\ r(p_5, p_8) = 6 \quad \text{y} \quad r(p_8, p_{11}) = 5$$

De donde

$$f' = 3, \quad r' = 1 \quad \text{y} \quad \epsilon = 1$$

Lucgo, se aumentará en una unidad el flujo de los arcos de esta cadena, a excepción de (p_1, p_2) que se disminuirá en una unidad.

Obtenemos así la figura 5.16, en la que se han saturado además los arcos (p_0, p_2) y (p_1, p_4) .

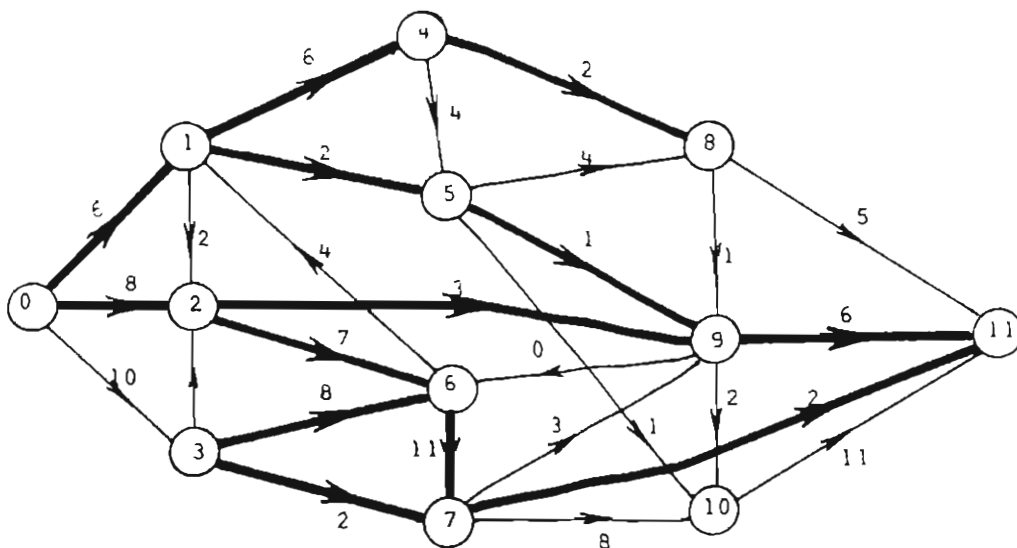


Figura 5.16

Volvemos a iniciar el proceso:

Marcamos p_0 con un signo +, p_0 se marcará con $[+ 0]$,

p_2 con $[+ 3]$, p_1 con $[- 2]$, p_6 con $[- 1]$.

Como no podemos marcar ningún otro vértice, hemos obtenido entonces el flujo Ψ máximo (figura 5.17)

El subconjunto A de los vértices no marcados es:

$$A = \{ p_4, p_5, p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{11} \}$$

El corte correspondiente al subconjunto A es:

$$W = \{ (p_1, p_4), (p_1, p_5), (p_2, p_9), (p_6, p_7), (p_3, p_7) \},$$

con una capacidad $K(W) = 6 + 2 + 3 + 11 + 2 = 24$, que es el valor del flujo Ψ máximo

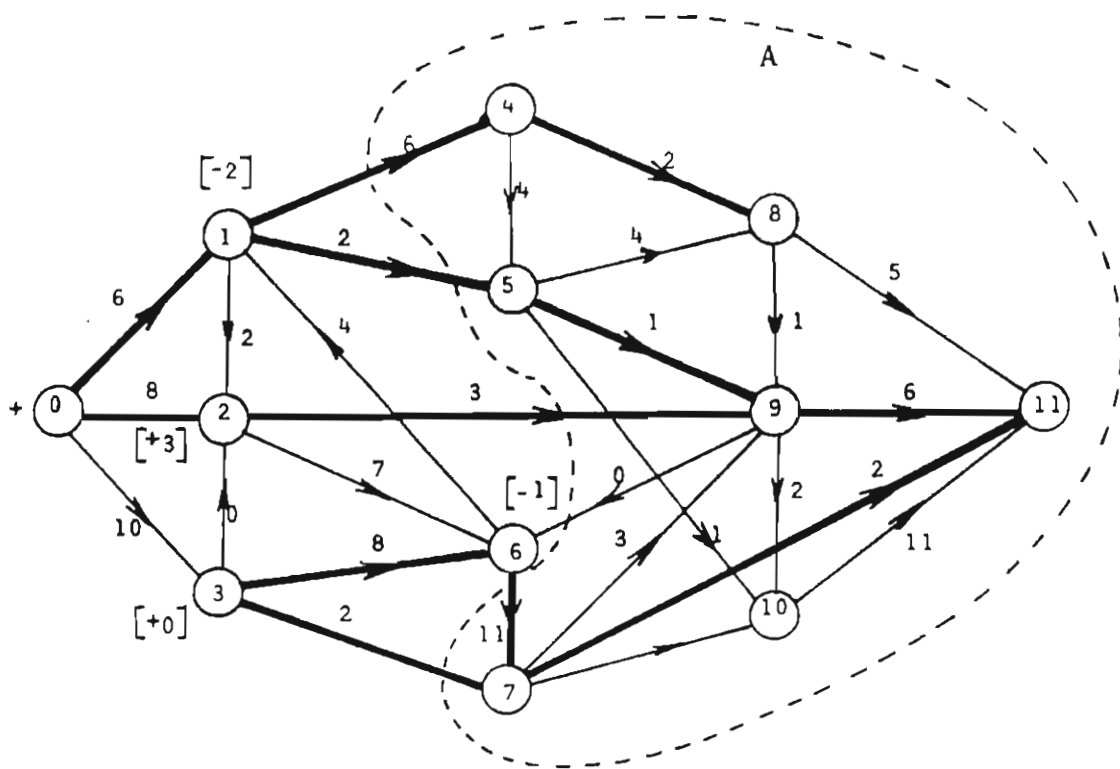


Figura 5.17

B I B L I O G R A F I A

1. M. Simonnard, Programación Lineal, Paraninfo Madrid 1972.
2. Nicos Christofides, Graph Theory. An Algorithmic Approach, Academic Press Inc. (London) Ltd.
3. Fausto A. Toranzos, Introducción a la Teoría de Grafos, Monografía No. 15. Serie de Matemática Organización de los Estados Americanos. Washington, D.C. - 1976.
4. Jean Acher, Algebra Lineal y Programación Lineal, Montaner y Simon S.A. Barcelona.
5. Juan Prawda Witenberg, Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones. Volumen I. Editorial Limusa.
6. A. Kaufmann. Introducción a la Combinatoria y sus Aplicaciones. CECSA. 1971.
7. A. Kaufmann. D. Coster. Ejercicios de Combinatoria con Soluciones. Tomo 3. CECSA. 1973.
8. Hamdy A. Taha, Investigación de Operaciones, una introducción.

DATOS ESPECÍFICOS PARA EL METODO GRAFICO
PARA EL CALCULO DE AREAS.

| PERFIL ó ESTACION | AREAS | | A ₁ + A ₂ | | SEMI- DISTANCIA | VOLUMEN | |
|----------------------|------------------|------------------|---------------------------------|------------------|--------------------|------------------|-------------------|
| | CORTE | RELLENO | CORTE | RELLENO | | CORTE | RELLENO |
| 8+700 | 375.0 | 30.0 | | | 10.00 | | |
| 8+720 | 580.0 | | 955.0 | 30.0 | " | 9550.0 | 300.0 |
| 8+740 | 593.0 | | 1173.0 | | " | 11730.0 | - |
| 8+760 | 440.0 | | 1033.0 | | " | 10330.0 | - |
| 8+780 | 486.0 | | 926.0 | | " | 9260.0 | - |
| 8+800 | 360.0 | | 846.0 | | " | 8460.0 | - |
| 8+820 | 218.0 | 34.0 | 578.0 | 34.0 | " | 5780.0 | 340.0 |
| 8+840 | 131.0 | 4.0 | 349.0 | 38.0 | " | 3490.0 | 380.0 |
| 8+860 | 183.0 | 26.0 | 314.0 | 30.0 | " | 3140.0 | 300.0 |
| 8+880 | 298.0 | | 481.0 | 26.0 | " | 4810.0 | 260.0 |
| 8+900 | 289.0 | 2.0 | 587.0 | 2.0 | " | 5870.0 | 20.0 |
| 8+920 | 223.0 | 34.0 | 512.0 | 36.0 | " | 5120.0 | 360.0 |
| 8+940 | 315.0 | | 538.0 | 84.0 | " | 5380.0 | 340.0 |
| 8+960 | 204.0 | | 519.0 | | " | 5190.0 | - |
| 8+980 | 135.0 | 43.89 | 339.0 | 43.89 | " | 3390.0 | 438.9 |
| 9+000 | 43.0 | 71.0 | 178.0 | 114.89 | " | 1780.0 | 1148.9 |
| 9+020 | 31.0 | 168.0 | 74.0 | 239.00 | " | 740.0 | 2390.0 |
| 9+040 | 415.0 | 415.0 | 310.0 | 583.0 | " | 310.0 | 5830.0 |

CALCULO DE AREAS POR EL METODO GRAFICO

DAJOS OBTENIDOS POR EL METODO GRAFICO
PARA EL CALCULO DE AREAS.

| PERFIL ó ESTACION | AREAS | | A ₁ + A ₂ | | SEMI- DISTANCIA | VOLUMEN | |
|----------------------|--------|---------|---------------------------------|-----------------------------|--------------------|---------------------------|-----------------------------|
| | CORTE | RELLENO | CORTE | RELLENO | | CORTE | RELLENO |
| 9+000 | 76.00 | 146.00 | 76.00 76.00 | 561.00 561.00 | 10.00 | 760.0 760.0 | 5610.0 5610.0 |
| 9+080 | 123.00 | 188.00 | 199.00 | 334.00 | " | 1990.0 | 3340.0 |
| 9+100 | 120.00 | 153.00 | 243.00 | 341.00 | " | 2430.0 | 3410.0 |
| 9+120 | 80.00 | 171.00 | 200.00 | 324.00 | " | 2000.0 | 3240.0 |
| 9+140 | 88.00 | 279.00 | 168.00 | 450.00 | " | 1680.0 | 4500.0 |
| 9+160 | 73.00 | 356.00 | 161.00 | 435.00 | " | 1610.0 | 4350.0 |
| 9+180 | 35.00 | 279.00 | 108.00 | 435.00 | " | 1080.0 | 4350.0 |
| 9+200 | 21.00 | 379.00 | 56.00 | 658.00 | " | 560.0 | 6580.0 |
| 9+220 | | 764.00 | 21.00 | 1143.00 | " | 210.0 | 11430.0 |
| 9+240 | | 1041.00 | | 1805.00 | " | | 18050.0 |
| 9+260 | | 1205.00 | | 2246.00 | " | | 22460.0 |
| 9+280 | | 1499.00 | | 2704.00 | " | | 27040.0 |
| 9+300 | | 1708.00 | | 3207.00 | " | | 32070.0 |
| 9+320 | | 1954.00 | | 3662.00 | " | | 36620.0 |
| 9+340 | | 2370.00 | | 4324.00 | " | | 43240.0 |
| 9+360 | | 2000.00 | | 4370.00 | " | | 43700.0 |
| 9+380 | | 1608.00 | | 3608.00 | " | | 36080.0 |
| 9+400 | | 1720.00 | | 3328.00 | " | | 33280.0 |

CALCULO DE AREAS POR EL METODO GRAFICO

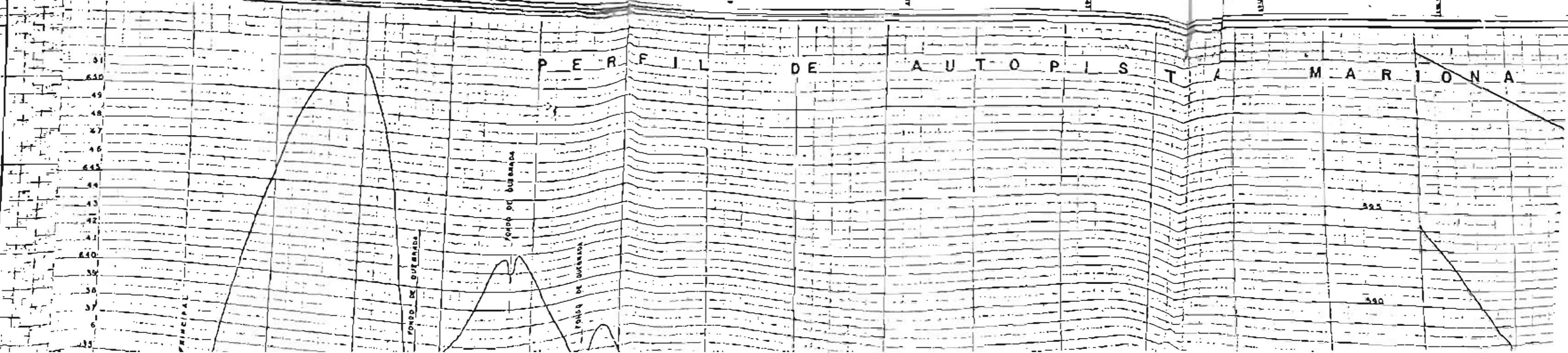
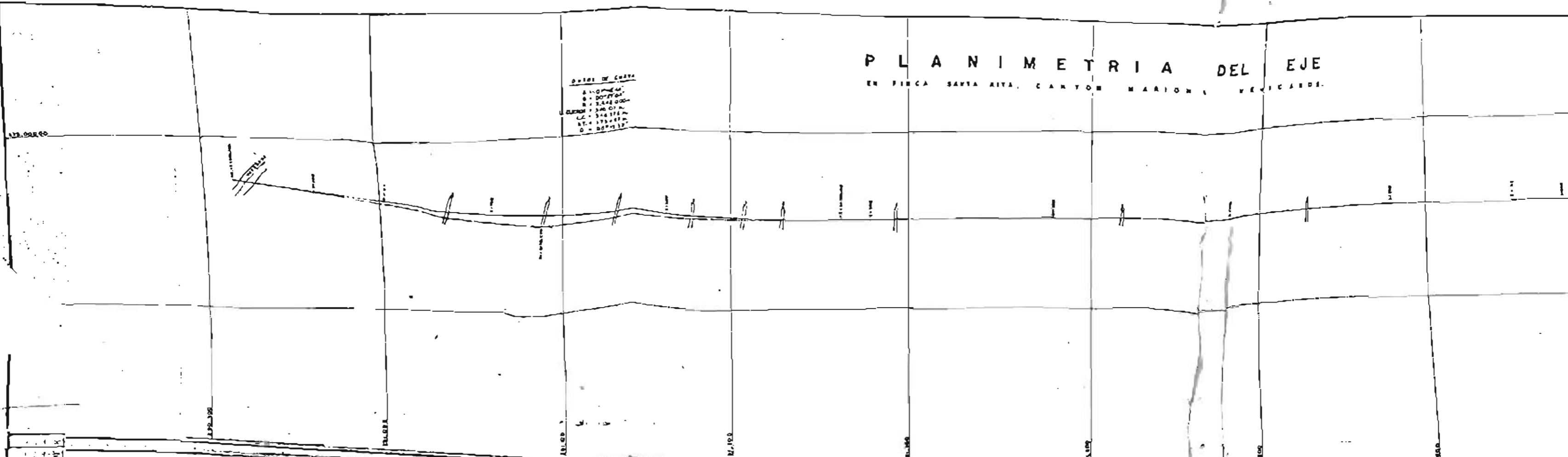
DAJOS OBTENIDOS POR EL METODO GRAFICO
PARA EL CALCULO DE AREAS.

| PERFIL ó ESTACION | AREAS | | A ₁ + A ₂ | | SEMI- DISTANCIA | VOLUMEN | |
|----------------------|--------|---------|---------------------------------|-----------------------------|--------------------|---------------------------|-----------------------------|
| | CORTE | RELLENO | CORTE | RELLENO | | CORTE | RELLENO |
| 9+000 | 76.00 | 146.00 | 76.00 76.00 | 561.00 561.00 | 10.00 | 760.0 760.0 | 5610.0 5610.0 |
| 9+080 | 123.00 | 188.00 | 199.00 | 334.00 | " | 1990.0 | 3340.0 |
| 9+100 | 120.00 | 153.00 | 243.00 | 341.00 | " | 2430.0 | 3410.0 |
| 9+120 | 80.00 | 171.00 | 200.00 | 324.00 | " | 2000.0 | 3240.0 |
| 9+140 | 88.00 | 279.00 | 168.00 | 450.00 | " | 1680.0 | 4500.0 |
| 9+160 | 73.00 | 256.00 | 161.00 | 435.00 | " | 1610.0 | 4350.0 |
| 9+180 | 35.00 | 279.00 | 108.00 | 435.00 | " | 1080.0 | 4350.0 |
| 9+200 | 21.00 | 379.00 | 56.00 | 658.00 | " | 560.0 | 6580.0 |
| 9+220 | | 764.00 | 21.00 | 1143.00 | " | 210.0 | 11430.0 |
| 9+240 | | 1041.00 | | 1805.00 | " | | 18050.0 |
| 9+260 | | 1205.00 | | 2246.00 | " | | 22460.0 |
| 9+280 | | 1499.00 | | 2704.00 | " | | 27040.0 |
| 9+300 | | 1708.00 | | 3207.00 | " | | 32070.0 |
| 9+320 | | 1954.00 | | 3662.00 | " | | 36620.0 |
| 9+340 | | 2370.00 | | 4324.00 | " | | 43240.0 |
| 9+360 | | 2000.00 | | 4370.00 | " | | 43700.0 |
| 9+380 | | 1608.00 | | 3608.00 | " | | 36080.0 |
| 9+400 | | 1720.00 | | 3328.00 | " | | 33280.0 |

CALCULO DE AREAS POR EL METODO GRAFICO

PLANIMETRIA DEL EJE
 EN FINCA SANTA RITA, CANTON MARION, VERACRUZ.

DATOS DE CURVA
 R = 1000 M.
 Δ = 90° 00' 00"
 L = 314.159 M.
 ΔC = 314.159 M.
 ΔT = 175.435 M.
 O = 80° 45' 12"



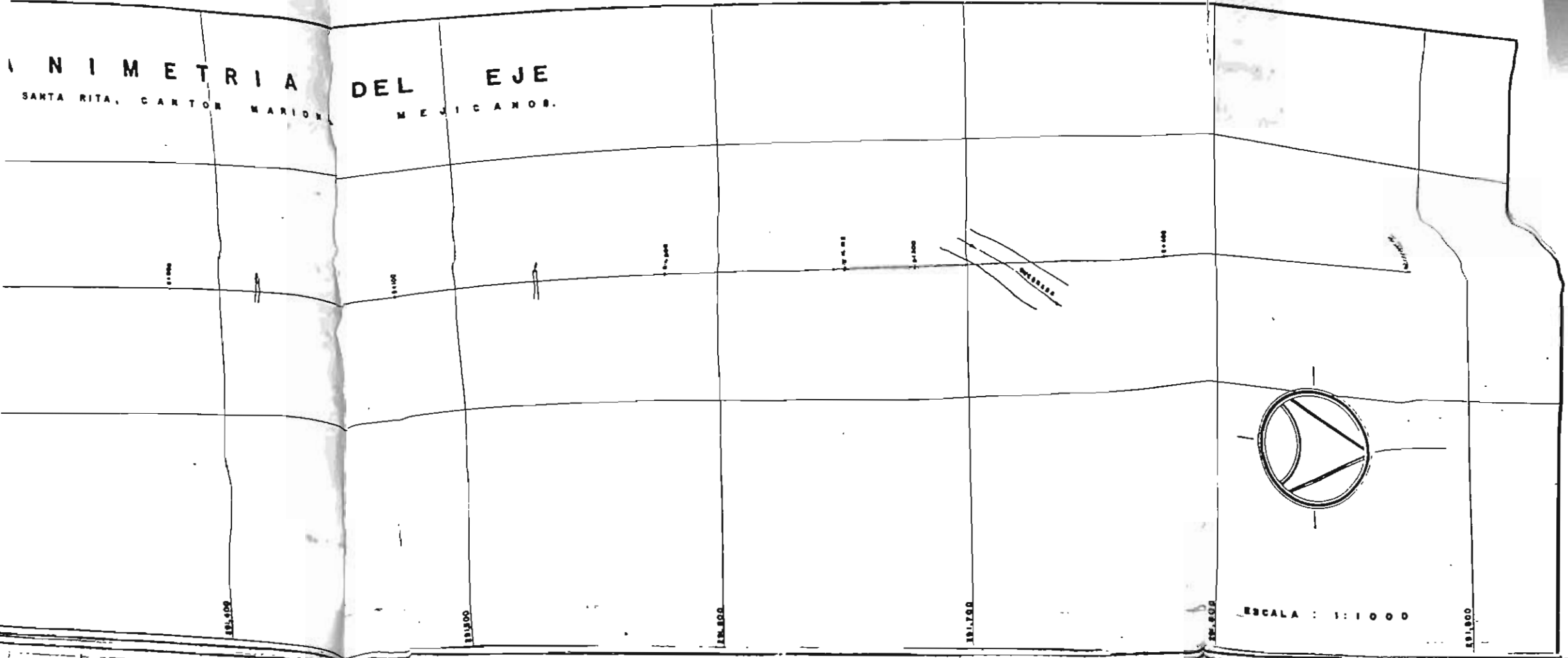
PARA EL CALCULO DE AREAS.

| PERFIL ó ESTACION | AREAS | | A ₁ + A ₂ | | SEMI- DISTANCIA | VOLUMEN | |
|----------------------|-------|----------|---------------------------------|---------|--------------------|-----------|-----------|
| | CORTE | RELLENO | CORTE | RELLENO | | CORTE | RELLENO |
| 9 + 420 | | 1,678.00 | | 3,398.0 | 10.00 | | 33980.0 |
| 9 + 440 | | 1,696.00 | | 3,374.0 | " | | 33740.0 |
| 9 + 460 | | 1,663.00 | | 3,359.0 | " | | 33590.0 |
| 9 + 480 | | 1,455.00 | | 3,118.0 | " | | 31180.0 |
| 9 + 500 | | 1,283.00 | | 2,738.0 | " | | 27380.0 |
| | | | | | | | |
| | | | | | TOTALES: | 106,650.0 | 511,326.9 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

DATOS DEL CALCULO DE AREAS POR EL METODO GRAFICO

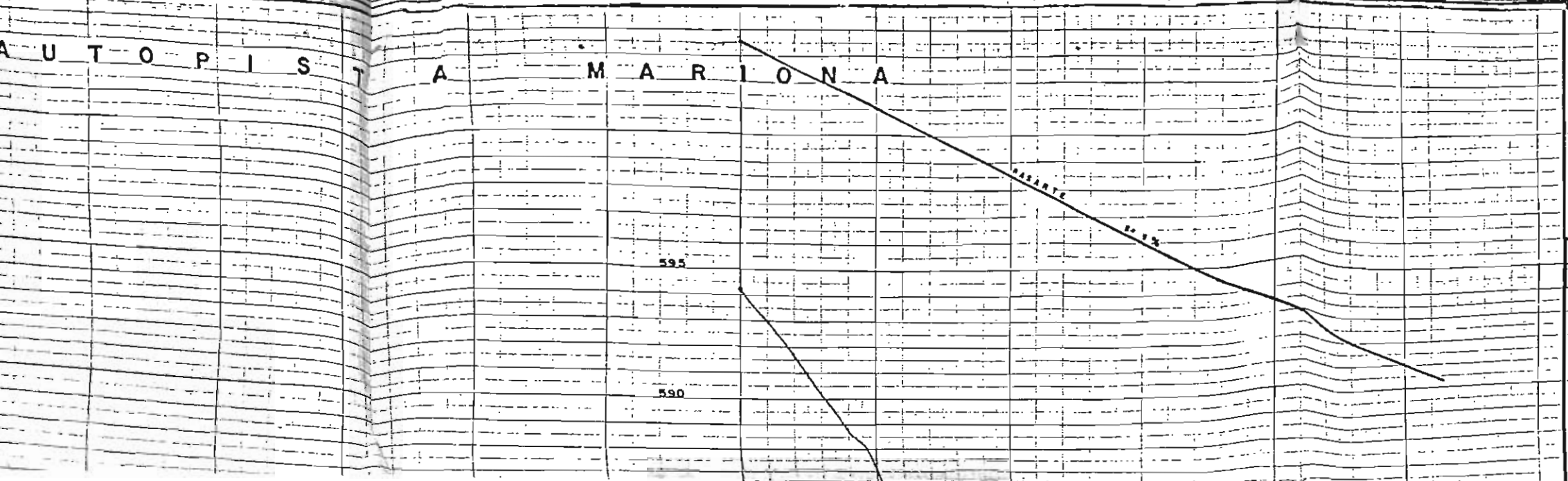
ANIMETRIA
SANTA RITA, CANTON MARIÓN

DEL EJE
MEXICANOS.



ESCALA : 1 : 1 0 0 0

AUTOPISTA AMARILONA



ESCALA S.
HORIZONTAL 1 : 1 0 0 0
VERTICAL 1 : 1 0 0 0

CIÓN PRESENTA:

RO

33
32
31
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
09
08
07
06
05
04
03
02
01
500
99
98
97
96
95

FONDO DE QUEBRADA

FONDO DE QUEBRADA

FONDO DE QUEBRADA

FONDO DE QUEBRADA

FONDO DE QUEBRADA

FONDO DE QUEBRADA

FONDO DE QUEBRADA

580

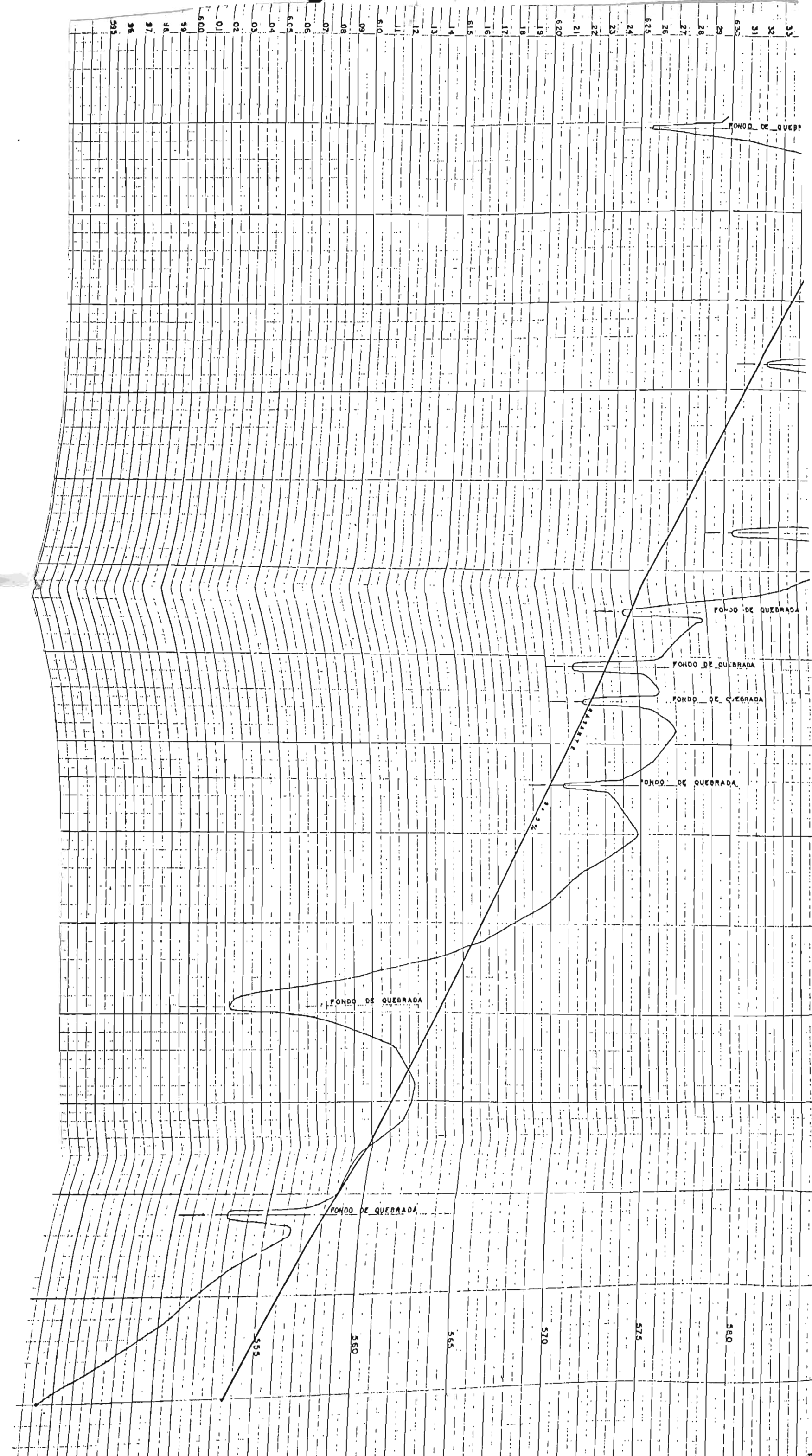
575

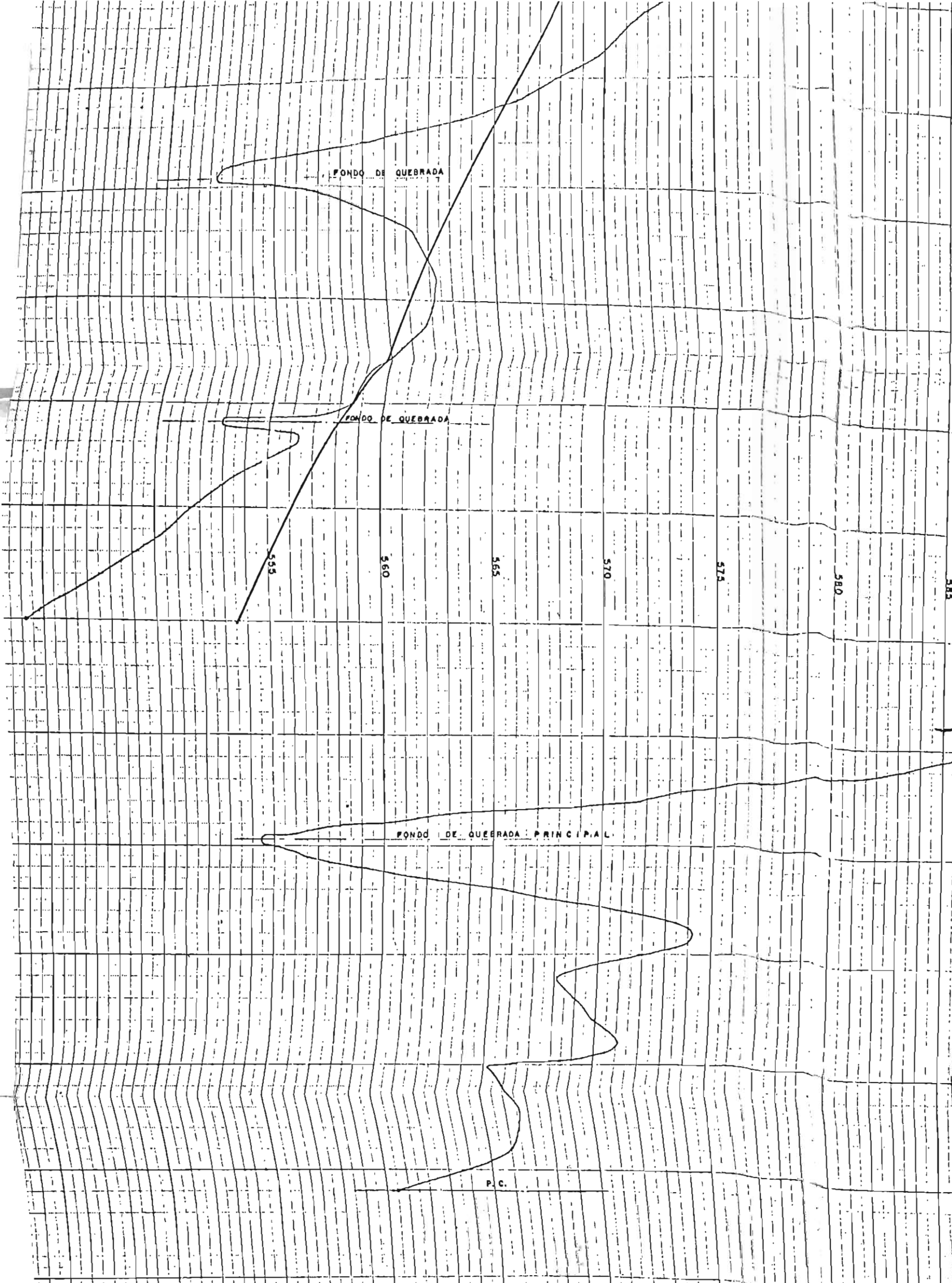
570

565

560

555





DE AUTOPISTA EN MARIONA
 8+536.79 a EST. 9+499.98 = 963.19 mts.

PARA SEMINARIO DE GRAD
 MAR O BARRIOS ALF

CURVA MASA

| ESTACION | ORDENADAS DE LA CURVA MASA I.G.N. | ORDENADAS DE LA CURVA MASA LEVANT. TERRESTRE |
|----------|-----------------------------------|--|
| 8+700 | 400,000 | 400,000.0 |
| 8+720 | 409,448.9 | 409,021.2 |
| 8+740 | 421,094.9 | 420,736.9 |
| 8+760 | 431,312.8 | 430,838.7 |
| 8+780 | 440,138.8 | 439,532.7 |
| 8+800 | 448,180.8 | 447,810.7 |
| 8+820 | 452,954.9 | 452,649.5 |
| 8+840 | 455,584.0 | 455,333.3 |
| 8+860 | 458,500.7 | 458,220.0 |
| 8+880 | 462,921.2 | 462,614.1 |
| 8+885 | 463,753.6 | |
| 8+900 | 468,221.1 | 468,329.7 |
| 8+920 | 472,722.1 | 472,960.5 |
| 8+940 | 477,939.8 | 478,358.2 |
| 8+960 | 483,276.2 | 484,019.6 |
| 8+980 | 488,804.8 | 487,014.0 |
| 9+000 | 488,037.3 | 487,620.1 |
| 9+020 | 486,129.6 | 485,863.3 |
| 9+040 | 480,988.2 | 480,362.0 |
| 9+060 | 476,414.2 | 474,899.1 |
| 9+080 | 475,018.4 | 472,904.5 |
| 9+100 | 475,086.9 | 471,929.5 |
| 9+120 | 475,209.9 | 470,487.3 |
| 9+140 | 474,528.3 | 467,541.2 |
| 9+160 | 473,268.9 | 464,714.1 |
| 9+180 | 470,700.9 | 461,266.8 |
| 9+200 | 468,202.9 | 455,064.2 |
| 9+220 | 464,306.1 | 443,742.8 |
| 9+240 | 454,988.4 | 425,697.2 |
| 9+260 | 410,084.8 | 403,194.0 |
| 9+280 | 382,588.1 | 375,804.5 |
| 9+300 | 350,876.0 | 343,719.5 |
| 9+320 | 318,275.7 | 307,086.7 |
| 9+340 | 280,099.0 | 263,543.0 |
| 9+360 | 243,832.8 | 219,543.8 |
| 9+380 | 209,964.9 | 183,031.6 |
| 9+400 | 178,853.7 | 149,561.8 |
| 9+420 | 148,489.8 | 116,169.2 |
| 9+440 | 119,645.4 | 83,167.4 |
| 9+460 | 89,672.4 | 49,736.6 |
| 9+480 | 59,283.4 | 18,223.0 |
| 9+500 | 32,784.1 | -9,794.4 |

CURVA DEL I.G.N.
CURVA DEL LEV. TERRESTRE

100,000
200,000
300,000
400,000
500,000

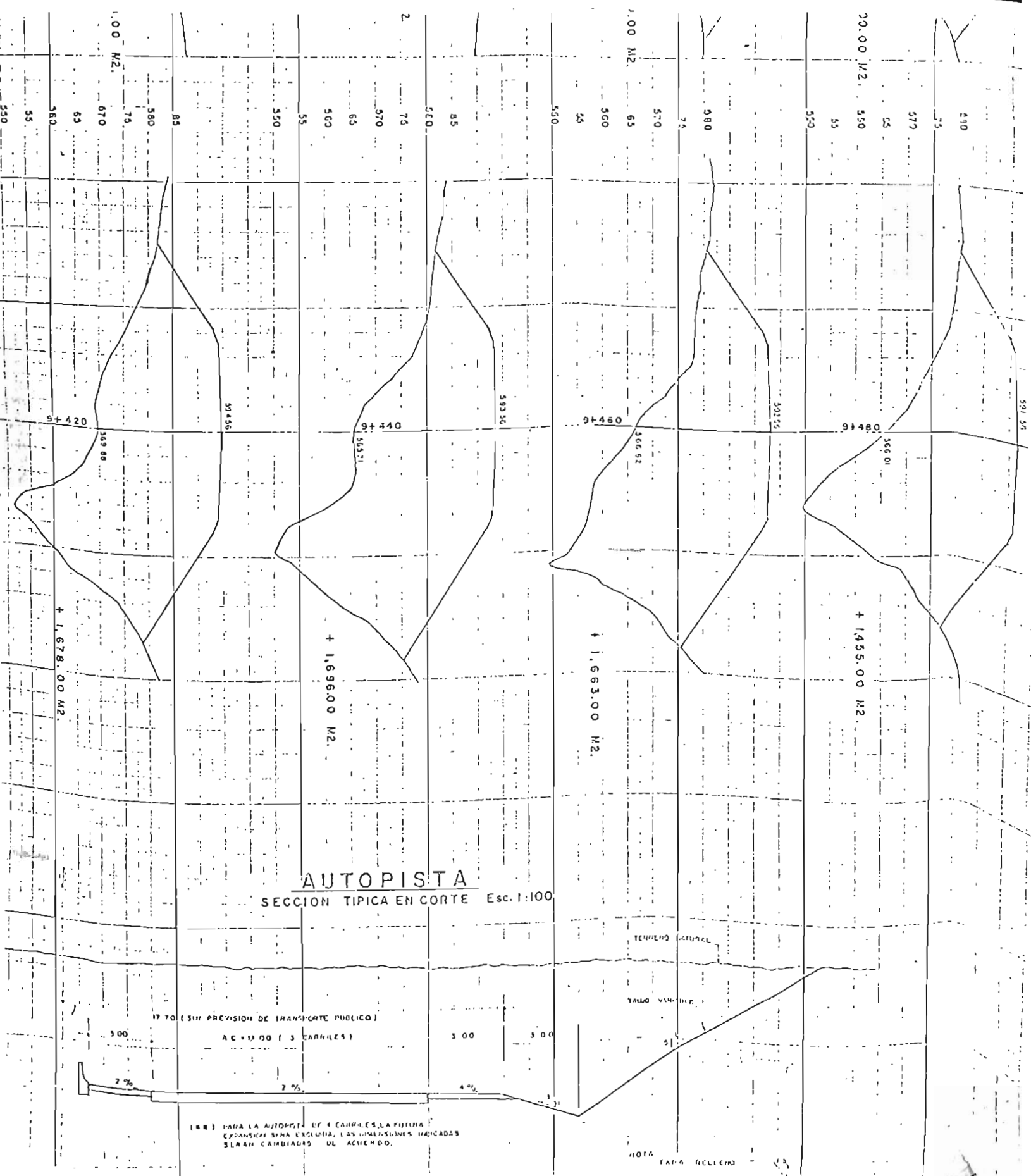
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
TRABAJO DE GRADUACION EN TOPOGRAFIA

TRAMO DE AUTOPISTA ENMARIONA
CALCULO DE CURVA MASA
SAN SALVADOR, MARZO DE 1979

ASESORES:
ING. ROBERTO SUZTAMANT
ING. JOSE A. CASTILLO
ING. JUSTINO A. CASTILLO
PRESENIA:
MARIO BARRIOS ALVARO

LEVANTO:
CALCULO:
I.G.N.
D.T.B.D.

ESCALAS:
HORIZONTAL
1cm = 20 MTS.
VERTICAL
1cm = 30,000 MTS.

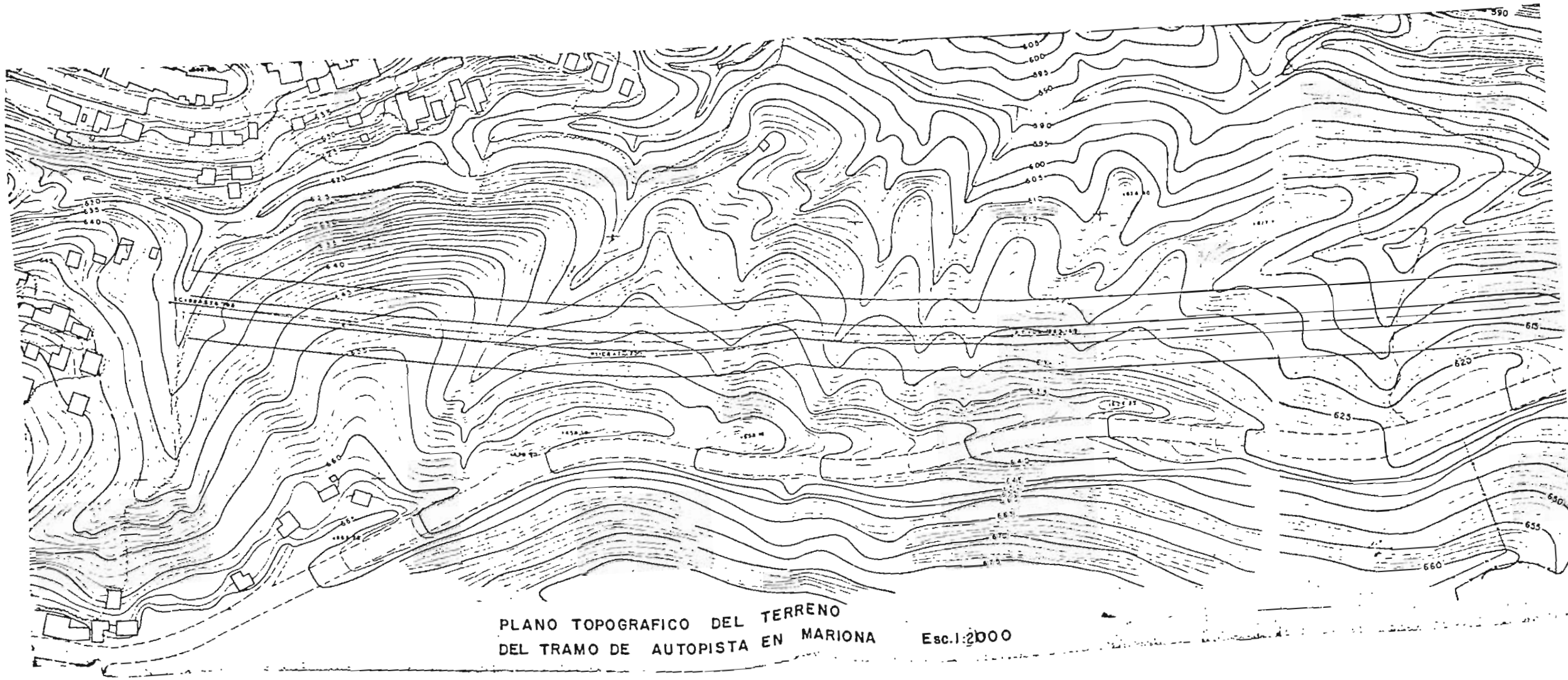


AUTOPISTA
SECCION TIPICA EN CORTE Esc. 1:100

TRAMO DE AUTOPISTA EN MARIONA
SECCIONES TRANSVERSALES DE EST. 8+700 a EST. 9+500

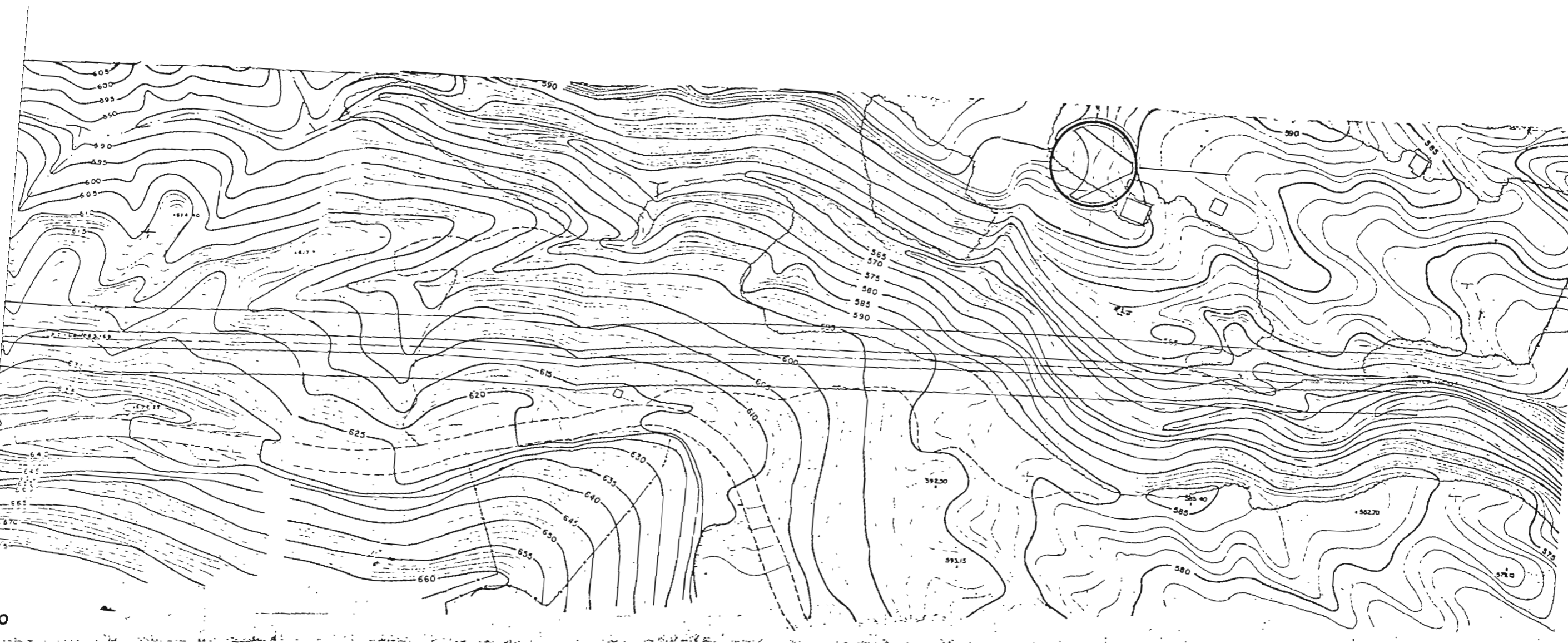
PARA SEMINARIO DE GRADUACION PRESENTA:

MARIO BARRIOS ALFARO



PLANO TOPOGRAFICO DEL TERRENO
DEL TRAMO DE AUTOPISTA EN MARIONA

Esc. 1:2000



SECCIONES TRANSVERSALES

S.S. Feb-70

①

| TRAMO AUTOPISTA | | | | | | | | EN |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|----|
| 619.88 | 618.68 | 622.98 | 626.98 | 630.98 | 624.88 | 631.03 | 637. | |
| -17.40 | -18.60 | -14.30 | -10.30 | -6.30 | -4.50 | -3.25 | -1.25 8+ | |
| 5050 | 4600 | 3700 | 2800 | 1800 | 1200 | 700 | 700 | |
| | | | | | | | | |
| 623.02 | 625.12 | 628.12 | 632.12 | 636.12 | 631.12 | 636. | | |
| -13.60 | -11.50 | -8.50 | -4.50 | -2.50 | | | 8+ | |
| 5000 | 4350 | 2300 | 1200 | 570 | | | | |
| | | | | | | | | |
| 621.07 | 626.17 | 629.37 | 632.37 | 634.37 | 631.12 | 640. | | |
| -13.80 | -12.70 | -11.50 | -8.50 | -6.50 | -3.15 | | 8+ | |
| 5200 | 4800 | 4650 | 2700 | 1600 | 900 | | | |
| | | | | | | | | |
| 617.43 | 621.33 | 623.33 | 627.33 | 629.33 | 633.33 | 637.33 | 641. | |
| -23.90 | -20.00 | -18.00 | -14.00 | -12.00 | -8.00 | -4.00 | 8+ | |
| 50.00 | 4200 | 3700 | 30.00 | 26.00 | 17.00 | 7.00 | | |
| | | | | | | | | |
| 628.79 | 630.09 | 629.09 | 626.09 | 625.59 | 628.09 | 620.09 | 637. | |
| -8.75 | -7.50 | -8.50 | -11.50 | -12.00 | -9.50 | -7.50 | -3.50 8+ | |
| 50.00 | 4200 | 3200 | 2300 | 1700 | 1400 | 11.00 | 6.00 | |

| MARIONA | | | | | | | |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 28 | 610.08 | 617.08 | 619.08 | 617.08 | 620.08 | 624.08 | 632.28 |
| 780 | +3.00 | +4.80 | +6.50 | +10.80 | +12.80 | +15.10 | +15.10 |
| | 750 | 1200 | 1300 | 2200 | 3700 | 4000 | 4200 |
| | | | | | | | |
| 62 | 639.12 | 642.12 | 641.02 | 639.22 | 643.62 | 650.02 | 649.62 |
| 760 | +2.50 | +6.50 | +8.50 | +12.50 | +13.00 | +13.20 | +15.10 |
| | 3.00 | 1500 | 2000 | 2550 | 2700 | 3400 | 4100 |
| | | | | | | | |
| 87 | 642.47 | 647.47 | 649.37 | 651.27 | 654.34 | 659.77 | 659.37 |
| 740 | +1.60 | +5.60 | +8.50 | +10.50 | +13.10 | +12.90 | +13.50 |
| | 4.00 | 12.00 | 17.50 | 2200 | 2800 | 3500 | 3500 |
| | | | | | | | |
| 33 | 645.33 | 649.33 | 649.33 | 650.73 | 654.63 | 655.33 | 656.43 |
| 720 | +2.00 | +3.40 | +8.40 | +9.10 | +13.30 | +14.40 | +15.10 |
| | 4.00 | 6.50 | 16.00 | 17.50 | 26.00 | 28.80 | 33.00 |
| | | | | | | | |
| 54 | 641.54 | 644.54 | 647.24 | 651.14 | 655.14 | 655.14 | 651.24 |
| 700 | +4.50 | +7.00 | +9.70 | +13.60 | +17.60 | +17.60 | +14.30 |
| | 5.50 | 1000 | 1700 | 2600 | 3600 | 4150 | 4500 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

D.E.R.

| NIVELES | | desde | AM-134 Adic. (Elev. 687.536 M.) | | |
|--------------|--|-------|----------------------------------|-------|------|
| a B.M. #1 = | | 8+640 | (Esp. de E. AUTOMÁTICA NACIONAL) | | |
| | | (+) | | | |
| | | 0.383 | | 0.053 | |
| AM-134 Adic. | | 0.330 | 0.3297 ✓ | | |
| | | 0.276 | | .054 | .107 |
| | | 0.287 | | .039 | |
| 1 | | 0.248 | 0.2480 ✓ | | |
| | | 0.209 | | .039 | .078 |
| | | 0.504 | | .029 | |
| 2 | | 0.475 | 0.4750 ✓ | | |
| | | 0.446 | | .029 | .058 |
| | | 0.433 | | .028 | |
| 3 | | 0.405 | 0.4050 ✓ | | |
| | | 0.377 | | .028 | .056 |
| | | 0.297 | | .048 | |
| 4 | | 0.249 | 0.2493 ✓ | | |
| | | 0.202 | | .047 | .095 |
| | | | | | .394 |

| 25/Febr/79 | | 7:35 P.M. | | | |
|------------|--|-----------|----------|-------|------|
| | | Recepción | | | |
| | | (-) | | | |
| | | 3.763 | | .055 | |
| | | 3.708 | 3.7077 ✓ | | |
| | | 3.652 | | 0.056 | .111 |
| | | 3.975 | | .046 | |
| | | 3.729 | 3.729 | | |
| | | 3.883 | | .046 | .092 |
| | | 3.930 | | .047 | |
| | | 3.883 | 3.8833 | | |
| | | 3.837 | | .046 | .093 |
| | | 3.685 | | .038 | |
| | | 3.647 | 3.6470 | | |
| | | 3.609 | | .038 | .076 |
| | | 3.694 | | .061 | |
| | | 3.633 | 3.6327 ✓ | | |
| | | 3.571 | | .062 | .123 |
| | | | | | .125 |

INSTITUTO GEOGRAFICO NACIONAL

CALCULO DE LA CURVA MASA: METODO FOTOGRAFOMETRICO-ELECTRONICO

| EST | CORTE | RELL | CORTE AC | RELL AC | D.MASA / |
|---------|---------|----------|----------|-----------|----------|
| 8700.00 | .0 | .0 | .0 | .0 | 400000.0 |
| | 406.9 | -17.8 | | | |
| 8720.00 | 9627.8 | -178.8 | 9627.8 | -178.8 | 09448.9 |
| | 555.8 | -.0 | | | |
| 8740.00 | 11646.0 | -.0 | 21273.8 | -178.8 | 21094.9 |
| | 608.7 | .0 | | | |
| 8760.00 | 10217.8 | -.0 | 31491.6 | -178.8 | 31312.8 |
| | 413.0 | -.0 | | | |
| 8780.00 | 8826.0 | -.0 | 40317.7 | -178.8 | 40138.8 |
| | 469.5 | -.0 | | | |
| 8800.00 | 8041.9 | -.0 | 48359.6 | -178.8 | 48180.8 |
| | 334.6 | -.0 | | | |
| 8820.00 | 5093.4 | -319.2 | 53453.0 | -498.0 | 52954.9 |
| | 174.6 | -31.9 | | | |
| 8840.00 | 3011.5 | -382.4 | 56464.6 | -880.5 | 55584.0 |
| | 126.4 | -6.3 | | | |
| 8860.00 | 3219.0 | -302.3 | 59683.6 | -1182.9 | 58500.7 |
| | 195.4 | -23.9 | | | |
| 8880.00 | 4659.5 | -239.0 | 64343.2 | -1422.0 | 62921.2 |
| | 270.5 | -.0 | | | |
| 8883.00 | 832.4 | -.0 | 65175.6 | -1422.0 | 63753.6 |
| | 284.4 | -.0 | | | |
| 8900.00 | 4522.5 | -55.0 | 69698.2 | -1477.0 | 68221.1 |
| | 247.6 | -6.4 | | | |
| 8920.00 | 4858.5 | -357.4 | 74556.7 | -1834.5 | 72722.1 |
| | 238.2 | -29.2 | | | |
| 8940.00 | 5510.3 | -292.6 | 80067.1 | -2127.2 | 77939.8 |
| | 312.8 | -.0 | | | |
| 8960.00 | 5336.3 | -.0 | 85403.4 | -2127.2 | 83276.2 |
| | 220.8 | -.0 | | | |
| 8980.00 | 3798.3 | -269.7 | 8201.8 | -2397.0 | 86804.8 |
| | 159.0 | -26.9 | | | |
| 9000.00 | 1966.5 | -734.0 | 91168.3 | -3131.0 | 88037.3 |
| | 37.6 | -46.4 | | | |
| 9020.00 | 440.4 | -2348.1 | 91608.7 | -5479.1 | 86129.6 |
| | 6.4 | -188.3 | | | |
| 9040.00 | 83.7 | -5225.1 | 91692.5 | -10704.3 | 80988.2 |
| | 1.9 | -334.1 | | | |
| 9060.00 | 644.6 | -5218.5 | 92337.1 | -15922.9 | 76414.2 |
| | 62.4 | -187.7 | | | |
| 9080.00 | 1768.5 | -3164.3 | 94105.7 | -19087.2 | 75018.4 |
| | 114.3 | -128.7 | | | |
| 9100.00 | 2388.0 | -2309.5 | 96493.7 | -21396.7 | 75096.9 |
| | 124.4 | -102.2 | | | |
| 9120.00 | 2334.7 | -2221.7 | 98828.5 | -23618.5 | 75209.9 |
| | 109.0 | -119.9 | | | |
| 9140.00 | 2105.9 | -2787.5 | 100934.4 | -26406.1 | 74528.3 |
| | 101.5 | -158.8 | | | |
| 9160.00 | 1738.1 | -2999.5 | 102672.6 | -29405.6 | 73266.9 |
| | 72.2 | -141.1 | | | |
| 9180.00 | 1081.1 | -3647.1 | 103753.8 | -33052.8 | 70700.9 |
| | 35.8 | -223.5 | | | |
| 9200.00 | 417.0 | -5915.0 | 104170.8 | -38967.8 | 65202.9 |
| | 5.8 | -367.9 | | | |
| 9220.00 | 58.3 | -10955.1 | 104229.1 | -49922.9 | 54306.1 |
| | .0 | -727.5 | | | |
| 9240.00 | .0 | -19337.7 | 104229.1 | -69260.7 | 34968.4 |
| | .0 | -1206.1 | | | |
| 9260.00 | .0 | -24873.9 | 104229.1 | -94134.6 | 10094.5 |
| | .0 | -1281.2 | | | |
| 9280.00 | .0 | -27526.4 | 104229.1 | -121661.1 | -17431.9 |
| | .0 | -1471.4 | | | |

5341239.1

| | | | | | |
|---------|----|----------|----------|-----------|------------------------|
| 9300.00 | .0 | -31892.0 | 104229.1 | -153553.1 | -49324.0 350,000.0 |
| 9320.00 | .0 | -1717.7 | 104229.1 | -187953.4 | -83724.3 310,275.4 |
| 9340.00 | .0 | -34400.2 | 104229.1 | -224130.2 | -119901.0 375,000.0 |
| 9360.00 | .0 | -1722.2 | 104229 | -260596.3 | -156367.2 342,100.0 |
| 9380.00 | .0 | -36176.7 | 104229.1 | -294264.3 | -190035.1 207,000.0 |
| 9400.00 | .0 | -1895.4 | 104229.1 | -325395.5 | -221166.3 170,000.0 |
| 9420.00 | .0 | -36466.1 | 104229.1 | -355739.4 | -251510.2 175,000.0 |
| 9440.00 | .0 | -1751.1 | 104229.1 | -384583.8 | -280354.6 114,000.0 |
| 9460.00 | .0 | -30343.8 | 104229.1 | -414656.7 | -310427.5 80,000.0 |
| 9480.00 | .0 | -1536.8 | 104229.1 | -444975.8 | -340746.6 37,000.0 |
| 9500.00 | .0 | -28844.4 | 104229.1 | -471445.1 | -367215.9 32,700.0 |
| | .0 | -1347.5 | | | |
| | .0 | -30072.8 | | | |
| | .0 | -1659.7 | | | |
| | .0 | -30319.1 | | | |
| | .0 | -1372.1 | | | |
| | .0 | -26469.3 | | | |
| | .0 | -1274.7 | | | |



18 MAR 1973



CALCULO DE LA CURVA MASA DEL LEVANTAMIENTO TERRESTRE

| <u>EST</u> | <u>CORTE</u> | <u>RELL</u> | <u>CORTE AC</u> | <u>RELL AC</u> | <u>D. MASA</u> |
|------------|--------------|-------------|-----------------|----------------|----------------|
| 8+700 | .0 | .0 | .0 | .0 | 400000.0 |
| | 366.64 | -34.31 | | | |
| 8+720 | 9364.3 | -343.1 | 9364.3 | -343.1 | 409021.2 |
| | 569.79 | .0 | | | |
| 8+740 | 11715.7 | .0 | 21080.0 | -343.1 | 420736.9 |
| | 601.78 | .0 | | | |
| 8+760 | 9901.8 | .0 | 30981.8 | -343.1 | 430638.7 |
| | 388.4 | .0 | | | |
| 8+780 | 8892.0 | .0 | 39873.8 | -343.1 | 439532.7 |
| | 500.8 | .0 | | | |
| 8+800 | 8280.0 | .0 | 48153.8 | -343.1 | 447810.7 |
| | 327.2 | .0 | | | |
| 8+820 | 5152.0 | -313.2 | 53305.8 | -656.3 | 452649.5 |
| | 188.0 | -31.32 | | | |
| 8+840 | 3032.0 | -348.2 | 56337.8 | -1004.5 | 455333.3 |
| | 144.2 | -3.5 | | | |
| 8+860 | 3239.6 | -352.9 | 59577.4 | -1357.4 | 458220.0 |
| | 179.76 | -31.79 | | | |
| 8+880 | 4712.0 | -317.9 | 64289.4 | -1675.3 | 462614.1 |
| | 291.44 | .0 | | | |
| 8+900 | 5746.3 | -30.7 | 70035.7 | -1706.0 | 468329.7 |
| | 283.19 | -3.07 | | | |
| 8+920 | 5051.1 | -420.3 | 75086.8 | -2126.3 | 472960.5 |
| | 221.92 | -38.96 | | | |
| 8+940 | 5787.3 | -389.6 | 80874.1 | -2515.9 | 478358.2 |
| | 356.81 | .0 | | | |
| 8+960 | 5661.4 | .0 | 86535.5 | -2515.9 | 484019.6 |
| | 209.33 | .0 | | | |
| 8+980 | 3433.3 | -438.9 | 89968.8 | -2954.8 | 487014.0 |
| | 134.0 | -43.89 | | | |
| 9+000 | 1800.5 | -1194.4 | 91769.3 | -4149.2 | 487620.1 |
| | 46.05 | -75.55 | | | |
| 9+020 | 726.7 | -2483.5 | 92496.0 | -6632.7 | 485863.3 |
| | 26.62 | -172.8 | | | |
| 9+040 | 266.2 | -5767.5 | 92762.2 | -12400.2 | 480362.0 |
| | .0 | -403.95 | | | |
| 9+060 | 597.3 | -6060.2 | 93359.5 | -18460.4 | 474899.1 |
| | 59.73 | -202.07 | | | |
| 9+080 | 1806.1 | -3800.7 | 95165.6 | -22261.1 | 472904.5 |
| | 120.88 | -178.0 | | | |
| 9+100 | 2394.1 | -3369.1 | 97559.7 | -25630.2 | 471929.5 |
| | 118.53 | -158.91 | | | |
| 9+120 | 1962.9 | -3405.1 | 99522.6 | -29035.3 | 470487.3 |
| | 77.76 | -181.6 | | | |
| 9+140 | 1644.4 | -4590.5 | 101167.0 | -33625.8 | 467541.2 |
| | 86.68 | -277.45 | | | |
| 9+160 | 1592.5 | -4419.6 | 102759.5 | -38045.4 | 464714.1 |
| | 72.57 | -164.51 | | | |
| 9+180 | 1041.6 | -4488.9 | 103801.1 | -42534.3 | 461266.8 |
| | 31.59 | -284.38 | | | |
| 9+200 | 494.7 | -6697.3 | 104295.8 | -49231.6 | 455064.2 |
| | 17.88 | -385.35 | | | |
| 9+220 | 178.8 | -11500.2 | 104474.6 | -60731.8 | 443742.8 |
| | .0 | -764.67 | | | |

| EST | CORTE | RELL | CORTE AC | RELL AC | D. MASA |
|-------|-------|----------|----------|-----------|----------|
| 9+240 | .0 | -18045.6 | 104474.6 | -78777.4 | 425697.2 |
| | .0 | -1039.89 | | | |
| 9+260 | .0 | -22503.2 | 104474.6 | -101280.6 | 403194.0 |
| | .0 | -1210.43 | | | |
| 9+280 | .0 | -27389.5 | 104474.6 | -128670.1 | 375804.5 |
| | .0 | -1528.52 | | | |
| 9+300 | .0 | -32035.0 | 104474.6 | -160755.1 | 343719.5 |
| | .0 | -1679.98 | | | |
| 9+320 | .0 | -36632.8 | 104474.6 | -197387.9 | 307086.7 |
| | .0 | -1983.3 | | | |
| 9+340 | .0 | -43543.7 | 104474.6 | -240931.6 | 263543.0 |
| | .0 | -2371.07 | | | |
| 9+360 | .0 | -43999.2 | 104474.6 | -284930.8 | 219543.8 |
| | .0 | -2028.85 | | | |
| 9+380 | .0 | -36512.2 | 104474.6 | -321443.0 | 183031.6 |
| | .0 | -1622.37 | | | |
| 9+400 | .0 | -33469.8 | 104474.6 | -354912.8 | 149561.8 |
| | .0 | -1724.61 | | | |
| 9+420 | .0 | -33392.6 | 104474.6 | -388305.4 | 116169.2 |
| | .0 | -1614.65 | | | |
| 9+440 | .0 | -33001.8 | 104474.6 | -421307.2 | 83167.4 |
| | .0 | -1685.53 | | | |
| 9+460 | .0 | -33430.2 | 104474.6 | -454733.0 | 49736.6 |
| | .0 | -1657.55 | | | |
| 9+480 | .0 | -31513.6 | 104474.6 | -486251.6 | 18223.0 |
| | .0 | -1493.81 | | | |
| 9+500 | .0 | -28017.4 | 104474.6 | -514269.0 | -9794.4 |
| | .0 | -1307.93 | | | |

DATOS DE CÁLCULOS DE AREA POR METODO ANALITICO

| PERFIL o' ESTACION | AREAS | | A ₁ + A ₂ | | SEMI-DISTANCIA | VOLUMEN | |
|-----------------------|--------|---------|---------------------------------|---------|----------------|---------|---------|
| | CORTE | RELLENO | CORTE | RELLENO | | CORTE | RELLENO |
| 8+700 | 366.64 | 34.31 | | | 10.00 | | |
| 8+720 | 569.79 | | 936.43 | 34.31 | " | 9364.3 | 343.1 |
| 8+740 | 601.78 | | 1171.57 | | " | 11715.7 | |
| 8+760 | 388.40 | | 990.18 | | " | 9901.8 | |
| 8+780 | 560.80 | | 889.20 | | " | 8892.0 | |
| 8+800 | 327.20 | | 828.00 | | " | 8280.0 | |
| 8+820 | 188.00 | 31.32 | 515.20 | 31.32 | " | 5152.0 | 313.2 |
| 8+840 | 144.20 | 3.50 | 303.20 | 34.82 | " | 3032.0 | 348.2 |
| 8+860 | 179.76 | 31.79 | 323.96 | 32.29 | " | 3239.6 | 352.9 |
| 8+880 | 291.44 | | 471.20 | 31.79 | " | 4712.0 | 317.9 |
| 8+900 | 283.19 | 3.07 | 574.63 | 3.07 | " | 5746.3 | 30.7 |
| 8+920 | 221.92 | 38.96 | 505.11 | 42.03 | " | 5051.1 | 420.3 |
| 8+940 | 356.81 | | 578.73 | 38.96 | " | 5787.3 | 389.6 |
| 8+960 | 209.33 | | 566.14 | | " | 5661.4 | |
| 8+980 | 134.00 | 43.89 | 343.33 | 43.89 | " | 3433.3 | 438.9 |
| 9+000 | 46.05 | 75.55 | 180.05 | 119.44 | " | 1800.5 | 119.44 |
| 9+020 | 26.62 | 172.80 | 72.67 | 248.35 | " | 726.7 | 248.35 |
| 9+040 | 1- | 403.95 | 26.62 | 576.75 | " | 266.2 | 576.75 |

DATOS DE CALCULOS DE AREA POR METODO ANALITICO

| PERFIL o' ESTACION | AREAS | | A ₁ + A ₂ | | SEMI-DISTANCIA | VO LUMEN | |
|-----------------------|--------|---------|---------------------------------|---------|----------------|----------|----------|
| | CORTE | RELLENO | CORTE | RELLENO | | CORTE | RELLENO |
| 9+060 | 59.73 | 202.07 | 89.73 | 606.02 | 10.00 | 597.30 | 6060.20 |
| 9+080 | 120.88 | 178.00 | 120.61 | 380.07 | 10.00 | 1806.10 | 3800.70 |
| 9+100 | 118.53 | 158.91 | 239.41 | 336.91 | " | 2394.10 | 3369.10 |
| 9+120 | 77.76 | 181.60 | 76.29 | 340.51 | " | 1962.90 | 3405.10 |
| 9+140 | 86.68 | 277.45 | 164.44 | 459.05 | " | 1644.40 | 4590.50 |
| 9+160 | 72.57 | 164.51 | 159.25 | 441.96 | 10.00 | 1592.50 | 4419.60 |
| 9+180 | 31.39 | 284.38 | 104.16 | 448.89 | " | 1041.60 | 4488.90 |
| 9+200 | 17.88 | 385.35 | 49.47 | 669.73 | " | 494.7 | 6697.30 |
| 9+220 | | 764.67 | 17.88 | 1150.02 | " | 178.88 | 11500.20 |
| 9+240 | | 1039.89 | | 1804.56 | 10.00 | | 18045.56 |
| 9+260 | | 1210.43 | | 2250.32 | " | | 2250.32 |
| 9+280 | | 1528.52 | | 2738.95 | " | | 27389.30 |
| 9+300 | | 1679.98 | | 3208.50 | " | | 32085.00 |
| 9+320 | | 1983.30 | | 3663.28 | 10.00 | | 36632.80 |
| 9+340 | | 2371.07 | | 4354.57 | " | | 43545.70 |
| 9+360 | | 2028.85 | | 4399.92 | " | | 43999.20 |
| 9+380 | | 1622.37 | | 3651.22 | " | | 36512.20 |
| 9+400 | | 1724.61 | | 3346.98 | 10.00 | | 33469.8 |