UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

CONCEPTOS SOBRE COMPUTACIONES GRAFICAS y MECANICAS

TESIS
DE
GRADO
PRESENTADA

Juan Francisco Cáceres Saldaña

PREVIA
A
LA
OPCION
DEL
TITULO
DE
INGENIERO CIVIL

SAN SALVADOR,
EL SALVADOR,
CENTROAMERICA
1967

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR
Dr. Angel Góchez Marín

SECRETARIO GENERAL
Dr. Gustavo Adolfo Noyola

Facultad de Ingeniería y Arquitectura

DECANO
Ing. Guillermo Imery

SECRETARIO
Ing. Rodolfo Jenkins

DIRECTOR DE LA ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL
Ing. Ricardo Martínez G.

ASESOR ACADEMICO

Ing. Edgar Ganuza Zamora

CONSULTORES DEL PROYECTO

Ing. Luis López Cerón

Ing. Félix Roberto Mancía B.

EXAMEN GENERAL DE GRADO

Ing. Edgar Ganuza Zamora

Ing. Luis López Cerón

Ing. Félix Roberto Mancía B.

Dedicatoria

A mis abnegados padres:

Francisco Octavio

y

Clara Luz

Con infinito reconocimiento.

A mi querida esposa:

Berta Liduvina

Con todo mi cariño.

A mis hermanitos.

A mi familia.

I N D I C E

CAPITULO I - APROXIMACIONES Y ERRORES

CAPITULO II - ESCALAS

[illegible]) Representación [illegible] relación entre tres Va- riables Utilizando [illegible] perpendiculares.

[illegible]) [illegible] [illegible]. Ejemplo Ilustrativo.

7) Diagramas [illegible], [illegible] variables.

[illegible]) Solución gráfica de ecuaciones Algebraicas de Segundo Grado y [illegible].

CAPITULO [illegible] - NOMOGRAMAS

1) Generalidades.

[illegible]) Nomogramas [illegible] funciones: $f(a) + f(b) = \emptyset(c)$ ó $f(a).f(b) = \emptyset(v)$.

[illegible]) Ejemplos Ilustrativos de [illegible] Generales.

[illegible]) [illegible] funciones $f(a) + f(b) + \emptyset(c) + \ldots\ldots = \sigma(1)$ ó $f(a).f(b).\emptyset(c)\ldots\ldots = \sigma(1)$.

[illegible]) [illegible] funciones $f(b)\ \emptyset(\ ) = f(\ )$ ó $f(\ ) = f(b)^{\emptyset(\ )}$.

[illegible]) La Clave [illegible].

[illegible]) [illegible] Intersección [illegible] Líneas [illegible] [illegible] $\frac{f(a)}{f(b)} = \frac{\emptyset(c)}{\sigma(1)}$.

[illegible]) Nomogramas con Intersección [illegible] [illegible] $f(\ ) = f(b).\emptyset(c).\ (\ )\ldots$

[illegible]) Nomogramas [illegible] [illegible] Función: $\frac{1}{f(\ )} + \frac{1}{f(b)} = \frac{1}{\emptyset(\ )}$ ó

$\frac{1}{f(\ )} + \frac{1}{f(\ )} + \frac{1}{\emptyset(\ )} + \ldots\ldots = \frac{1}{\sigma(1)}$.

PROLOGO.

El presente trabajo, tiene por objeto, [illegible] en forma sencilla, los principios [illegible] del Cálculo Gráfico y Mecánico.

La importancia [illegible], radica en el valor que tiene [illegible] contribución.

El tipo de Cálculo [illegible], [illegible] tratamiento matemático sencillo, [illegible] un gran número de fórmulas y leyes bien conocidas [illegible] ingeniería; cuyo objetivo es economizar esfuerzo y tiempo [illegible] solución [illegible].

Las construcciones gráficas [illegible] métodos mecánicos son muy utilizados, [illegible] estudiant[illegible] en ingeniería [illegible].

El campo de aplicación de la representación gráfica [illegible]

[illegible], por [illegible]

[illegible] (o nomogramas) [illegible] cálculo [illegible] Cálculo [illegible].

[illegible], [illegible] gráficos son utilizados [illegible] científicos y profesionales [illegible] Cálculo.

Finalmente, se incluye un Capítulo dedicado a los métodos de construcción de nomogramas, gráficos escalares de puntos alineados, tan valiosos, sencillos y prácticos.-

CAPITULO 1

APROXIMACIONES Y ERRORES

1) GENERALIDADES

En el desarrollo del presente capítulo se trabajará solamente con cantidades que puedan representarse por números reales.-

El objeto que se persigue es el de dar a conocer los errores cometidos al aproximar cantidades en el desarrollo de algún cálculo; como usualmente le sucede al calculista, cuando trabaja con cantidades irracionales o con cantidades susceptibles de medición.-

En Ingeniería, Estadística, Técnica, Agrimensura, etc., es imperioso conocer los errores cometidos, es decir apreciar la exactitud posible en los resultados.-

Un ejemplo sencillo de lo anteriormente expuesto, se puede ver en la fórmula que determina la superficie de la esfera.

$$A = 4\pi r^2 \qquad (1)$$

En el miembro de la derecha de la igualdad (1) encontramos tres clases de números, según la teoría de las aproximaciones numéricas a saber:

El número cuatro (4): número entero, exacto.-

El valor pi (π): número irracional, se considerará exacto con un número infinito de cifras decimales.-

El valor erre (r): número racional, que proviene de -

una medición, por tanto es inexacto pues usamos un valor aproximado, tan bueno cuanto más cuidadosa haya sido tomada la lectura al efectuar la medición.-

Es lógico que al sustituir los valores en la expresión (1) no se tomará para π, más que unas cuantas cifras decimales, puesto que, tomando muchas de ellas, la variación en el resultado tendría un valor insignificante; en otras palabras, de π sólo intervienen significativamente en el resultado las tres o cuatro primeras cifras decimales.-

De lo anteriormente expuesto, se ve que continuamente estamos trabajando con resultados aproximados, es decir, cantidades sujetas a error.

2) CONCEPTO DEL ERROR ABSOLUTO, RELATIVO Y PORCENTUAL-COTA.

Error Absoluto:

Se llama error absoluto de una magnitud, a la diferencia que se obtiene al restar el valor exacto de una cantidad (x) de su valor aproximado (x_1), y se escribe:

$$\Delta = x_1 - x \qquad (2)$$

Algunos autores, se expresan de la siguiente manera:

Si $\Delta > 0$ la magnitud de (x) tiene un valor aproximado por exceso.-

Si $\Delta < 0$ la magnitud de (x) tiene un valor aproximado por defecto.-

Error Relativo:

Se llama error relativo (δ) de una -

cantidad (x), cuyo valor aproximado es (x_1), a la razón del error absoluto a la cantidad (x); su valor aproximado muy próximo es la razón del error absoluto a la cantidad aproximada (x_1) y se escribe:

$$\delta = \frac{|\Delta|}{x} \approx \frac{|\Delta|}{x_1} \qquad (3)$$

Se puede observar que es el error relativo, el que nos forma la idea de la magnitud del error cometido, puesto que compara la razón de aproximación con la cantidad con la cual se ha cometido el error.

Error Porcentual:

El error porcentual es el valor del error relativo, expresado como un porcentaje y se escribe.-

$$\delta' = 100\,\delta \qquad (4)$$

La Cota:

Entenderemos por cota, al hecho de aproximar el error a una unidad tal que nos permita visualizar facilmente la cuantía de él.-

Un ejemplo sencillo permitirá aclarar los conceptos vertidos anteriormente:

Ejemplo:

Si el valor de la superficie de una esfera, esta determinado por la fórmula $A = \pi D^2$, un valor aproximado de ella puede ser: $A_1 = \frac{25}{8} D^2$.-

Determinar el error absoluto, relativo y porcentual que se comete al usar el valor aproximado de la fórmula.-

...

Solución:

Es evidente que el error que se cometerá al desarrollar la fórmula, depende del coeficiente que se tome para D^2.-

Tomaremos a $\pi = 3.1416 = x$ (como valor exacto)

la fracción $\frac{25}{8} = 3.1250 = x_1$

Para determinar el error absoluto, hacemos uso de la fórmula (2) y sustituimos valores:

$$\Delta = x_1 - x \qquad (2)$$

Sustituyendo: $\Delta = 3.1250 - 3.1416 = -0.0166$

Entonces $\Delta < 0$ y decimos que el error absoluto incurrido es de 0.0166 aproximado por defecto y se escribe:

$|\Delta| = 0.0166$

Ahora se procede a determinar el error relativo usando la fórmula (3):

$$\delta = \frac{|\Delta|}{x} \qquad (3)$$

Sustituyendo: $\delta = \frac{0.0166}{3.1416} = 0.00528$

Tomando una aproximación del error (cota) que nos permita identificarlo rapidamente, podemos decir que:

El error relativo $\delta < 0.006$

Y calculando el error porcentual, tenemos

$$\delta \% \approx 0.6 \%$$

que es la forma usual, más utilizada, de expresar el error.

3) EXPRESION DE LA COTA COMO FRACCION DEL TIPO 10^{-n}

Con objeto de trabajar más facilmente con cantidades aproximadas, suele darse como cota de error, aproximaciones al décimo, al centésimo etc., es decir se expresa la cota como una fracción del tipo 10^{-n} (siendo (n) un entero positivo).-

En general se dice: "que un número aproximado tiene todas sus cifras exactas si el error con que está afectado es inferior a una unidad del último orden de las que constituyen el número".-

Así por ejemplo, si el valor de π con siete cifras decimales es 3.1415926 el error que se cometerá al considerar sólo seis cifras decimales sera de $6 \times 10^{-7} < 10^{-6}$ y decimos que el valor de (π) con seis cifras decimales es de 3.141592 con todas sus cifras exactas.-

4) DEFINICIONES DEL PROBLEMA DIRECTO Y DEL PROBLEMA INVERSO DEL CALCULO DE ERRORES.

Problema Directo:

Constituye el problema directo del cálculo de errores, la determinación del error del número que se obtiene como resultado al efectuar operaciones con aproximaciones numéricas de errores conocidos; en una función que depende de varias variables A (x,y,z).-

Problema Inverso:

Constituye el problema inverso del calculo de errores, el hecho de prefijar el error del resultado en una función que depende de varias variables sujetas a error A (x,y,z), determinando la aproximación con que deben ser medidos los valores x,y,z.-

5) ANALISIS DEL ERROR ABSOLUTO EN LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES.

Sean x e y dos valores exactos cuyas aproximaciones son respectivamente x_1 e y_1, los errores absolutos de cada valor serán:

$$\Delta_1 = x_1 - x \qquad\qquad x_1 = \Delta_1 + x$$
$$\text{o bien} \qquad\qquad (5)$$
$$\Delta_2 = y_1 - y \qquad\qquad y_1 = \Delta_2 + y$$

Y efectuando las correspondientes operaciones, se tiene:

a) Suma Aproximada

$x_1 + y_1 = (\Delta_1 + x) + (\Delta_2 + y)$ sustituyendo de (5)

$(x_1 + y_1) - (x + y) = (\Delta_1 + \Delta_2)$ ordenando términos y diciendo:

El error absoluto que se comete en la suma aproximada, es igual a la suma de los errores absolutos de cada uno de los términos que intervienen en ella.-

b) Resta Aproximada

$x_1 - y_1 = (\Delta_1 + x) - (\Delta_2 + y)$ sustituyendo de (5)

$(x_1 + y_1) - (x + y) = (\Delta_1 - \Delta_2)$ ordenando términos y diciendo:

El error absoluto que se comete en la resta aproximada, es igual a la diferencia de los errores absolutos de cada uno de los términos que intervienen en ella. -

Deberá observarse que si se tiene $\Delta_1 = \Delta_2$ el valor del error absoluto de la resta aproximada, sería igual a cero, lo que naturalmente es imposible. Atendiendo la nota que a continuación se da, este problema planteado queda satisfactoriamente resuelto.-

Nota: En general no se conoce si los errores lo son por exceso o por defecto y por tanto para la suma y resta aproximadas deberá tomarse como "cota superior del error a la suma de los errores de los números que se han sumado o restado".-

Por tanto para la resta se expresa el resultado como:

$$|\Delta| \leq |\Delta|_1 + |\Delta|_2$$

c) Producto Aproximado

$x_1 \; y_1 = (\Delta_1 + x)\,(\Delta_2 + y)$ sustituyendo de (5)

$(x_1 \; y_1) - (xy) = x\Delta_2 + y\Delta_1 + \Delta_1 \Delta_2$ multiplicando y ordenando términos.

Tomando cotas superiores de los errores, el último término $\Delta_1 \Delta_2$ es muy pequeño frente a los dos primeros y por tanto puede despreciarse, quedando la expresión:

$$|\Delta| \leq x\Delta_2 + y\Delta_1 + \Delta_1\Delta_2 \approx x_1\Delta_2 + y_1\Delta_1$$

y diciendo.

El error absoluto que se comete en una multiplicación aproximada es aproximadamente igual a la suma del producto del primer factor por el error del segundo y del segundo factor por el error del primero.-

d) Cociente Aproximado

Para determinar el error de un cociente conviene representar la diferencia (que representa el error) entre el cociente aproximado y el cociente exacto, de la siguiente manera.

$$\Delta = \frac{x_1}{y_1} - \frac{x}{y} = \frac{\Delta_1 + x}{\Delta_2 + y} - \frac{x}{y} \qquad \text{sustituyendo de (5)}$$

$$= \frac{y\,(\Delta_1 + x) - x\,(\Delta_2 + y)}{y\,(\Delta_2 + y)} = \frac{y\Delta_1 - x\Delta_2}{y\Delta_2 + y^2}$$

Tomando cotas superiores de los valores absolutos de Δ_1 y Δ_2 (de los cuales no se conocen los signos) y despreciando el término $y|\Delta|_2$ poco significativo en el resultado) se tiene:

$$|\Delta| \leq \frac{y|\Delta_1| + x|\Delta_2|}{y|\Delta_2| + y^2} < \frac{y|\Delta_1| + x|\Delta_2|}{y^2} \simeq \frac{y_1|\Delta_1| + x_1|\Delta_2|}{y_1^2}$$

y diciendo

El error absoluto que se comete en una división aproximada es aproximadamente igual a la suma del producto del divisor por el error del por el error del dividendo y del dividendo por el error del divisor, dividido todo por el divisor elevado al cuadrado.-

Nota: Debe observarse que son aproximaciones del error absoluto, las deducciones que se han hecho para la multiplicación y la división. Con objeto de facilitar la aplicación de las reglas al calculista, las fórmulas se han simplificado al máximo; métodos basados en conceptos de Cálculo Infinitesimal permitirán generalizar la deducción del error en cualquier función, A (x,y,z).

El análisis seguido en el cálculo de errores, para tomar valores absolutos de los errores cometidos en las -

diferentes magnitudes que intervienen en una operación; cuando no se conoce si estos lo son por exceso o por defecto, se muestra claramente en la suma y resta aproximadas.-

Sea:

S_1 = Operación aproximada

S = Operación exacta.

Para la aproximación de la cual se desconoce si es por defecto o exceso, se usa:

$$|\Delta| = \pm |x_1 - x|$$

Y efectuando las operaciones:

$$|\Delta s| = |S_1 - S| = |(x_1 \pm y_1) - (x \pm y)|$$

$$= |(x_1 - x) \pm (y_1 - y)| \leq |x_1 - x| + |y_1 - y|$$

$$|\Delta s| \leq |\Delta_1| + |\Delta_2|$$

Este resultado nos indica que al tomar los valores absolutos de los errores de los factores, estamos tomando (dentro de la seguridad) una cota superior del error.

Como se observa facilmente de lo anterior.

6) <u>CONSIDERACION DEL ERROR RELATIVO EN LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES.</u>

De las consideraciones del artículo 2 y del artículo anterior obtenemos los siguientes errores relativos.-

a) Suma Aproximada:

$$\delta a = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{x + y} \simeq \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{x_1 + y_1}$$ artículo 5, inciso a

b) Resta Aproximada:

$$\delta_b = \frac{|\Delta_1| + |\Delta_2|}{x - y} \simeq \frac{|\Delta_1| + |\Delta_2|}{x_1 - y_1}$$ artículo 5, inciso b.

c) Producto Aproximado:

$$\delta_c = \frac{x\Delta_2 + y\Delta_1 + \Delta_1\Delta_2}{xy} = \frac{x\Delta_2}{xy} + \frac{y\Delta_1}{xy} + \frac{\Delta_1}{x} \; \frac{\Delta_2}{y}$$

artículo 5, inciso c.

Y si los errores relativos de los factores son:

$$\frac{\Delta_1}{x} = \delta_{c1}$$ y

$$\frac{\Delta_2}{y} = \delta_{c_2}$$ sustituyendo, obtenemos:

$$\delta_c = \delta_{c_1} + \delta_{c2} + \delta_{c1} \; \delta_{c2}$$

despreciando el último término $\delta_{c_1} \; \delta_{c2}$ por ser muy pequeño comparado con los otros dos, obtenemos.-

$$\delta_c \simeq \delta_{c_1} + \delta_{c2}$$ y se dice que:

El error relativo de un producto aproximado es aproximadamente igual a la suma de los errores relativos de los factores.-

d) División Aproximada.

$$\delta_d = \frac{y\Delta_1 - x\Delta_2}{y\,(y + \Delta_2)} \div \frac{x}{y}$$ artículo 5, inciso d, y efectuando.

$$= \frac{y\Delta_1 - x\Delta_2}{y\,(y + \Delta_2)} \; \frac{y}{x} = \frac{y^2\Delta_1}{xy(y+\Delta_2)} - \frac{x\,y\Delta_2}{x\,y\,(y + \Delta_2)}$$

$$\frac{y\Delta_1}{x\,(y + \Delta_2)} - \frac{\Delta_2}{(y + \Delta_2)} = \frac{1}{y + \Delta_2}\left[\frac{\Delta_1\, y}{x} - \Delta_2\right]$$

multiplicando y dividiendo por y tenemos:

$$= \frac{y}{y + \Delta_2}\left[\frac{\Delta_1\, y}{xy} - \frac{\Delta_2}{y}\right] = \frac{y}{y\left(1 + \frac{\Delta_2}{y}\right)}\left[\frac{\Delta_1}{x} - \frac{\Delta_2}{y}\right]$$

ahora bien si:

$$\left.\begin{aligned} \delta d &= \frac{\Delta_1}{y} \\ \delta d2 &= \frac{\Delta_2}{y} \end{aligned}\right\} \quad \text{ambos factores.}$$

se obtiene:

$$\frac{\delta d1}{1} \frac{- \delta d2}{+ \delta d2}$$

Ahora bien generalmente de los errores relativos tampoco se conoce el signo, por lo que convendrá considerar valores absolutos para δd_1 y $\delta d2$ en el numerador y si $\delta d2$ en el denominador es muy pequeño con respecto a 1. tenemos:

$$|\delta d| \leqq |\delta d_1| + |\delta d_2| \qquad \text{y se dice que:}$$

El error relativo de un cociente aproximado es aproximadamente igual a la suma de los valores absolutos de los errores relativos del dividendo y el divisor.

7) <u>INTERVENCION DEL CALCULO DIFERENCIAL EN LA ESTIMACION DE ERRORES.</u>

El cálculo Infinitesimal es un arma valiosa en la estimación de errores. Se estudiará primero, la aproximación del error en una función continua del tipo y = f(x), para luego, generalizar en una función A (x,y,z) deduciendo una fórmula fundamental que permita resolver el problema directo e inverso del cálculo de errores, en una forma sencilla y útil.

8) ERROR ABSOLUTO Y RELATIVO EN LA FUNCION $y = f(x)$ USANDO CALCULO DIFERENCIAL.

En el estudio de diferenciales en el Cálculo Infinitesimal el símbolo dy/dx representa la primera derivada de una función $y = f(x)$ y se anota: $dy/dx = f'(x)$.

Este valor representa al límite del cociente $\Delta y/\Delta x$ cuando $\Delta x \longrightarrow 0$ (Δx tiende a cero).

El estudio de diferenciales interpreta separadamente a dx y dy y si $f'(x) = y'$ es la derivada de $f(x) = y$, siendo Δx un incremento arbitrariamente elegido, la diferencial de f (x) representada por el símbolo df(x) quedará definido por la igualdad: $df(x)=f'(x)\,\Delta x=\frac{dy}{dx}\,\Delta x = dy$

Ahora bien, a una variación Δx de la variable independiente, corresponde una variación Δy de valor muy próximo o aproximadamente igual a dy. Y siendo x la variable independiente, se puede aproximar y tener:

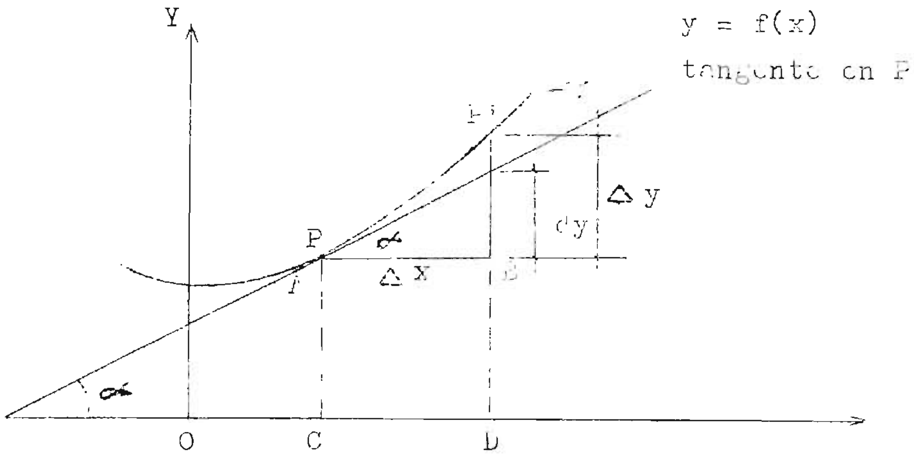
$\Delta y \doteq df(x) = f'(x)\,\Delta x$

Pudiendo entonces decir, que el error absoluto cometido al determinar la función es

$\Delta y \doteq dy = y'\Delta x$ (ERROR ABSOLUTO)

Con objeto de hacer más claro lo anterior, se puede interpretar geométricamente la aproximación de el incremento Δy a la diferencial dy. -

Construyendo la curva $y = f(x)$, siendo P y P' puntos proximos de la curva.



$\Delta x = dx$ Figura A

$f'(x)$ = valor de la derivada en x

$dx = PB = \Delta x$ entonces

$\therefore \; dy = f'(x)\, dx = \operatorname{tg} \alpha \, . \, PB = \frac{AB}{PB} \, . \, PB = AB$

$\Delta y = BP' \cong AB \cong dy$ Cuando Δx es pequeño.-

Esto es que si se desea "El valor aproximado del incremento y de una función es más fácil calcular el valor de la diferencial dy correspondiente y emplear este valor.-

Para el cálculo del error relativo, bastará recordar que viene dado por $\delta = \frac{|\Delta|}{x}$ (artículo 2), luego por diferenciales será $\frac{\Delta y}{y} \cong \frac{dy}{y}$ equivalente a derivar logarítmicamente la función $y = f(x)$ y se escribirá.

$\frac{dy}{y} = d \ln y$ (ERROR RELATIVO)

Lo que se puede expresar como: "El error relativo de una magnitud $y = f(x)$, que depende de una variable x afectada por un error Δx, es igual a la derivada del logaritmo natural de la función $\ln f(x)$ multiplicada por $\Delta x = dx$.

Es conveniente aclarar estos conceptos con la resolución de un ejemplo sencillo.

Ejemplo

Determínese el error absoluto y relativo, cometido en el cálculo del área de un cuadrado que tiene por lado 5.5 cm. medido con un error menor que medio milímetro. Determínese el área aproximada.

Area del cuadrado $A = x^2$

Error absoluto: $dA = 2\,x\,d\,x =$

$= 2 \times 5.5 \times 0.05 = 0.55 \text{ cm}^2$

Por tanto el área será:

$A = 5.5^2 \pm 0.55 = (30.25 \pm 0.55)\text{cm}^2$

Error relativo:

$\frac{dA}{A} = \frac{2x}{x} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{2\,dx}{x} = \frac{2 \times 0.05}{5.5} \text{ cm.}^2$

Y se observa que el error relativo cometido en el cálculo del área del cuadrado es el doble del error relativo cometido al medir el lado x.-

9) EL CONCEPTO DE DIFERENCIAL TOTAL COMO FORMULA FUNDAMENTAL EN EL CALCULO DE ERRORES.

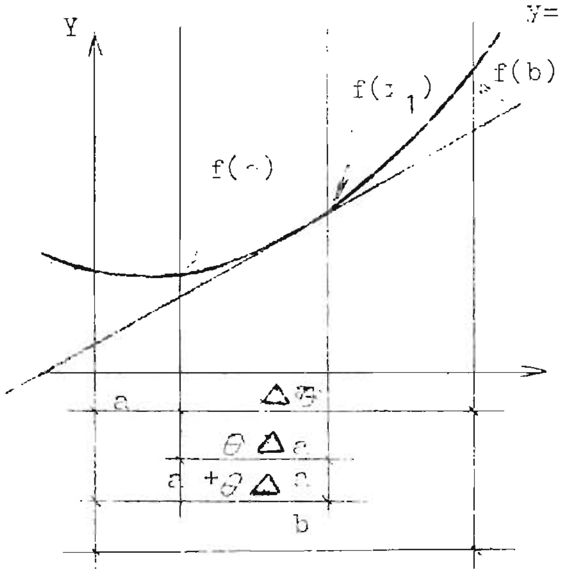
Combinando el Teorema del "Valor medio" y el concepto de "Diferencial Total" para funciones de dos o más variables del cálculo diferencial, se obtiene una expresión que debe considerarse como fundamental para el cálculo de errores, no importando cual sea el número de variables que intervengan.-

El Teorema del valor medio se expresa así:

$$f(b) = f(a) + (b - a)\, f'(x_1) \quad \text{o bien}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1) \qquad (6)$$

En donde a y b son valores correspondientes a dos puntos en una curva contínua $y = f(x)$ medidos sobre el eje de las x, tal como se muestra en el gráfico.



Del gráfico comprobamos que:

$b = a + \Delta a \;\therefore\; \Delta a = b - a$

y x_1 es un número entre a y b, entonces.

$x_1 = a + \theta\, \Delta a$

en donde θ es una fracción propia positiva.

Sustituyendo en (6), podemos expresar el Teorema del valor medio, como:

$$f(a + \Delta a) - f(a) = f'(a + \theta\, \Delta a)\, \Delta a \qquad (7)$$

<u>El Concepto de Diferencial Total.</u>

Se consideran funciones de dos o más variables

Sea la función de dos variables $u = f(x, y)$

Y los incrementos de u, x, y ________ $\Delta u, \Delta x, \Delta y$

entonces: $u + \Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) \;\therefore$

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Sumando y restando al segundo miembro de la ecuacion $f(x, y + \Delta y)$.

$$\Delta u = \left[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \right] + \left[f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \right]$$

Como se puede ver en la expresión anterior hay dos diferencias, a las cuales podemos aplicarles el Teorema del Valor Medio, como se expresa en (7).-

Tomando para la primera diferencia:

$$a = x \qquad \Delta_a = \Delta x \qquad y + \Delta y = cte.$$

Y para la segunda diferencia

$$a = y \qquad \Delta_a = \Delta y \qquad x = cte.$$

Obtenemos, sustituyendo de (7)

$$\Delta u = f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\Delta x + f_y(x, y + \theta_2 \Delta y)\Delta y \quad (8)$$

Con lo que se ha obtenido sucesivamente las derivadas parciales con respecto a "x" e "y", que son continuas para "x" e "y" y que hemos llamado, f_x y f_y respectivamente.

Ademas si Δx y Δy son muy pequeños (tienden a cero); como límite común, los coeficientes de Δx y Δy tenderán a $f_x (x,y)$ y $fy (x,y)$, como se puede comprobar en la ecuación (8).-

Y podemos escribir para cada una de las derivadas parciales obtenidas anteriormente.

$$\left.\begin{aligned} f_x (x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) &= f_x (x,y) + \varepsilon \\ f_y (x, y + \theta_2 \Delta y) &= f_y (x,y) + \varepsilon. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

en donde ε y ε_1 son infinitésimos tales que:

lím. ε y lím. $\varepsilon_1 = o$ cuando $\Delta x \longrightarrow o$ y $\Delta y \longrightarrow o$

entonces sustituyendo (9) en (8) tenemos.

$$\Delta u = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon \Delta x + \varepsilon_1 \Delta y$$

y despreciando en el segundo miembro los términos tercero y cuarto, la diferencial total de "u", quedará definida por el valor aproximado:

$$du = f_x\ (x,y)\ \Delta x + f_y\ (x,y)\ \Delta y$$

Y tomando valores absolutos lo que nos da cotas superiores de las derivadas parciales, se obtiene la siguiente fórmula fundamental del Cálculo de errores.-

$$|\Delta U| \leqslant |f_x(x,y)|\ |\Delta x| + |f_y(x,y)|\ |\Delta y|$$

que podemos presentar en una forma más facil de visualizar, si representamos:

$f_x(x,y)$ por U_x (derivada parcial con respecto a x)

$f_y(x,y)$ por U_y (derivada parcial con respecto a y)

$$|\Delta U| \leqslant |U_x|\ |\Delta x| + |U_y|\ |\Delta y| + \ldots\ldots \quad (10).-$$

(Deberá recordarse que ésta fórmula es válida para cualquier número de variables).

Las fórmulas del artículo 5, se obtienen facilmente con la aplicación de la expresión anterior:

Suma Aproximada:

Si $\quad u = x + y$

$U_x = 1 \qquad U_y = 1$

Sustituyendo en (10) $|\Delta U| \leqslant |\Delta x| + |\Delta y|$

Resta Aproximada:

Si $\quad U = x - y$

$U_x = 1 \qquad U_y = -1$

Sustituyendo en (10) $|\Delta U| \leqslant |\Delta x| + |\Delta y|$

Producto Aproximado:

$$\text{Si} \quad U = x\,y$$

$$U_x = y \qquad\qquad U_y = x$$

Sustituyendo en (10) $|\Delta u| \leqslant |y|\,|\Delta x| + |x|\,|\Delta y|$

Cociente Aproximado:

$$\text{Si} \quad U = \frac{x}{y}$$

$$U_x = \frac{1}{y} \qquad\qquad U_y = -\frac{x}{y^2}$$

Sustituyendo en (10) $|\Delta u| \leqslant \left|\frac{1}{y}\right| \, |\Delta x| + \left|-\frac{x}{y^2}\right| \, |\Delta y|$

$$= \frac{|y|\,|\Delta x| + |x|\,|\Delta y|}{y^2}$$

10) PROCEDIMIENTO DE ACOTACION - COMPARACION CON EL METODO DE DIFERENCIAL TOTAL.

Un método para resolver el problema directo del Cálculo de errores, en una función A (x,y,z), consiste en acotar las diferentes magnitudes que intervienen en ella, estableciendo una desigualdad de tres miembros, cuyo valor central será el deseado.

Este método es bastante generalizado; es además, seguro; aunque exige el doble del trabajo.

Comparando el método de acotación con el de diferencial total podrá notarse la seguridad que presenta en el cálculo y apreciar que su desarrollo es más laborioso.

Para mayor comprensión del método y para afirmar lo dicho anteriormente, se propone el siguiente ejemplo:

La expresión deducida de la fórmula de Bernouilli, para la velocidad de un fluido afectada de un factor de corrección por la pérdida de velocidad Cv (coeficiente de velocidad) es, $v=Cv\sqrt{2gh}$. Smith y Walker determinaron el valor de Cv para un orificio de 19 mm. en Cv=0.955, si "h" y "g", se miden experimentalmente con un error para "h" menor que 0.05 m. y para g menor que 0.02 m/seg^2, determínese el valor de la velocidad y el error absoluto, si el valor de h es de 20.00 m y el de g 9.81 m/seg^2.-

Resolver el problema planteado aplicando el procedimiento de acotación y el Concepto de Diferencial Total. Compárense los resultados.

Solución por el método de Acotación:

<u>1er paso</u>.- Se plantean las siguientes desigualdades.

$0.95 < Cv < 0.96$

$9.79 < g < 9.83$

$19.95 < h < 20.05$

Nota: Como en este caso, debe recordarse, que en general no se especifica si el error lo es por exceso o por defecto. Este hecho es lo que da validez al método.

<u>2o paso</u>.-Planteamiento de la desigualdad de tres miembros.

$$0.95\sqrt{2x9.79x19.95} < V < 0.96\sqrt{2x9.83x20.05}$$

Cuya solución es $18.77 < V < 19.05$

Resultado: Para la velocidad se tomará el valor medio de las acotaciones igual a 18.91 m/seg.-

El error absoluto está determinado con un error menor que:

$\frac{19.05 - 18.77}{2} = 0.14$ m/seg. < 0.2 m/seg.

Solución por el método de Diferencial Total:

1er Paso.- Obtención de las derivadas parciales de la función velocidad.-

$V_{cv} = \sqrt{2gh}$ ———— $|\Delta cv| \leq 0.01$

$Vg = \frac{Cv}{2}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ ———— $|\Delta g| \leq 0.02$

$Vh \quad \frac{Cv}{2}\sqrt{\frac{2g}{h}}$ ———— $|\Delta h| \leq 0.05$

El número 2 es entero, exacto ———— $\Delta_2 = 0$

2o Paso.- Aplicación de la fórmula fundamental

$|\Delta v| < |Vcv| \; |\Delta cv| + |Vg| \; |\Delta g| + |Vh| \; |\Delta h|$

Sustituyendo los valores del primer paso, en la fórmula:

$|\Delta v| < 19.80x0.01+0.97x0.02+0.47x0.05$

$|\Delta v| < 0.1980+0.0194+0.0235=0.2409 < 0.25$ m/seg.(error absoluto).-

3er Paso.- Determinación del valor de "V".-

$V = Cv \sqrt{2gh}$

Sustituyendo valores...v=0.955 $\sqrt{2x9.81x20.00}$ = 18.91 m/seg.

Como se ve el resultado obtenido por el método de acotación es muy bueno, aunque exige el Cálculo de cada miembro de la desigualdad.-

Deberá tenerse en consideración la siguiente recomendación, para el método de acotación:

Cuando la función A(x,y,z) esté representada por una fracción, el orden de las cotas que aparece en el numerador deberá invertirse con respecto a las que aparecen en el denominador. Por esto, al aplicar el método, se deberá tener el cuidado de sustituir correctamente los valores.-

11) RESOLUCION DEL PROBLEMA INVERSO DEL CALCULO DE ERRORES.

El planteamiento del problema inverso del cálculo de errores, fue dada en el artículo cuatro de este Capítulo, corresponde aclarar en este, la manera de resolverlo.-

De los métidos estudiados, el único que permite, en una función de error prefijado, medir la aproximación de las magnitudes que la componen, es la fórmula fundamental (2) del artículo nueve.-

Se propone un ejemplo para aclarar, los conceptos vertidos, en los artículos recién mencionados:

Ejemplo:

La aproximación del área de un triángulo se desea que sea del orden de 5%. Si la base mide 40 cm. y la altura 25 cm.-

Determinar la aproximación con que ellas deberán medirse.-

Solución:

Area del triángulo $= \frac{1}{2}$ bh = A　　　b = base

derivando parcialmente:　　　h = altura

$A_b = \frac{1}{2}h$

$A_h = \frac{1}{2}b$

$\Delta A = |\frac{1}{2}h| \; |\Delta b| + |\frac{1}{2}b| \; |\Delta h|$

Por ser la base y la altura, magnitudes del mismo orden, Δb y Δh se admitirán de igual valor.-

Encontrando el error por millar:

$$\delta A = \frac{\Delta A}{A} = \frac{1000}{5} \frac{\frac{1}{2}h \Delta b}{\frac{1}{2} bh} + \frac{1000}{5} \frac{\frac{1}{2}b \Delta h}{\frac{1}{2} bh} = 1$$

$$1 = 200 \left[\frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta h}{h} \right] \text{ pero } \Delta b = \Delta h \text{ entonces}$$

$$1 = 200 \Delta b \frac{h + b}{bh} \quad .:$$

$$\Delta b \quad \frac{bh}{200 (h + b)}$$

$$\Delta b = \frac{25 \times 40}{200 (25 + 40)} = \frac{1000}{200 \times 65} = \frac{1000}{13.000}$$

$$\Delta b = \frac{1}{13} = 0.077 \simeq 0.05$$

Es decir que se deberá medir la base y altura del triángulo con una aproximación de cinco centésimos de centímetro, es decir aproximación al medio milímetro para obtener la aproximación deseada.-

C A P I T U L O II

E S C A L A

1) REPRESENTACION GRAFICA DE UNA MAGNITUD

Un valioso método auxiliar para representar las variaciones de una magnitud, es el Gráfico.- Este método nos permite dibujar sobre una línea, recta o curva llamada -- sostén, una serie de puntos correspondientes a estas variaciones.-

Estos puntos debidamente ordenados, son números bien - definidos, a los cuales se llamará cotas.-

Al conjunto de cotas sobre la línea se llama "Escala - Gráfica" o simplemente ESCALA.-

El marcador de velocidad de un automóvil o las divisiones sobre la carátula de un cronómetro son ejemplos comunes de escalas sencillas.-

2) LA ECUACION DE UNA ESCALA - MODULO.

En general, una función y = f (x), cuya variable x determina valores de la función, puede ser representada por - una escala.-

La ecuación de la escala será pués:

$$y = f\ (x)$$

En donde "y" (variable dependiente) representa las variaciones de la cota sobre la escala y "x" (variable independiente) las variaciones de la magnitud que se quiere representar.-

Considerese la función f (x) = x3 y un eje o sostén -(O-Y) de 12.8 cm., márquese sobre el eje a partir del origen O, longitudes iguales a y = 0.2 x3 centímetros.- Sobre el --eje se ponen pequeños segmentos perpendiculares a él (marcas) y al final de cada segmento se indican los valores correspondientes de "x" (cotas), de conformidad a la siguiente tabu--lación:

x =	o	1	2	3	4
x^3 =	o	1	8	27	64

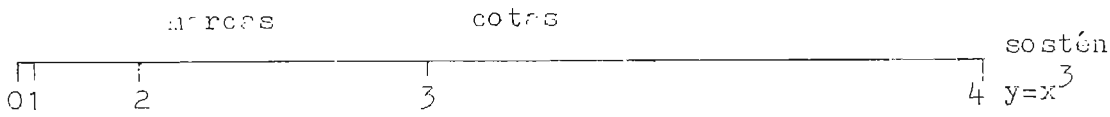


Figura 1

El segmento 0.2 centímetros (ver figura 1) fué tomada arbitrariamente como unidad de longitud para señalar en el --sostén los valores de x3.- Este segmento unitario se llama -"módulo de la escala" y se representará por la letra "m"

El valor de "m" se escoge de tal forma que se tiene la dimensión de la escala.-

Es decir que la construcción gráfica de y = f (x) re--quiere la adopción de una unidad de longitud arbitraria, el -módulo (m); cuyas dimensiones serán el dm, cm, pulg.... etc.-

La construcción de la escala es necesaria, para re---presentar graficamente, la variación de una función cuando su variable independiente va tomando diferentes valores.-

La representación escalar es <u>unidimensional</u> y la ecuación y = f (x) de la escala será llamada "Ley de la Escala".

Lo anterior puede sintetizarse así:

a) Se tiene una función de la cual se requiere la interpretación gráfica

$$y = f\ (x) \qquad (1)$$

b) La función se reduce a una longitud arbitraria, con la intervención del módulo:

$$my = mf\ (x) \qquad (2)$$

c) Expresión simple de la función (haciendo my = u)

$$u = mf\ (x) \qquad (3)$$

que será la ecuación de la escala.-

Merece hacer notar, que la dimensión en que se expresa (3) es la dimensión tomada para "m" y se recalca esto por cuanto "x" tendrá su unidad de medida (m, seg, kg...... etc.) así como también "y".-

Se puede ahora, dar las siguientes definiciones:

MODULO DE UNA ESCALA

Es la unidad de longitud adoptada para representar graficamente la variación de una función.-

Ecuación de una Escala

"Es la ecuación que rige la variación gráfica de una función".- Proporciona el valor de y, a partir de un origen arbitrario, marcado convenientemente, para cualquier valor de la variable independiente "x".-

3) CONSIDERACIONES ACERCA DEL ORIGEN

La ecuación $u = mf(x)$, deberá tener un origen, será - un punto del sostén de posición arbitraria y se conviene que será para $u = o$, de aquí que "u" podrá tomar valores reales positivos y negativos y estos se marcarán a la derecha y a la izquierda del origen, respectivamente.-

Generalmente nos interesa conocer determinados intervalos de la función, en los cuales no este incluido el - orígen, en esos casos, no se dibujará en la escala, pero su posición exacta puede determinarse facilmente si consideramos que le corresponde una cota "x_o", tal que --- $f(x_o) = o$.-

Es decir que para investigar la posición del origen igualaremos la función a cero $u = mf(x) = o$ y determinaremos el valor de "x" correspondiente que será el que se le asignará en la escala.-

Más adelante, en este capítulo, se aclarará este concepto, por medio de un ejemplo.-

4) RECOMENDACIONES PARA LA PRESENTACION DE UNA ESCALA

Las escalas deberán ser conveniente presentadas, para una fácil y rápida visualización, lo que implica que deberán guardarse ciertas consideraciones, a saber:

a) Presentación de la ecuación de la escala y del valor del módulo con su dimensión acompañando al gráfico.-

b) De preferencia, representar los valores de "x" ------- (x_o, x_1, x_2.....) por números enteros.-

c) Considerar las marcas como divisiones principales que deben ser acompañadas por otras (sub-divisiones) de segundo y tercer orden más pequeñas, para una rápida lectura o --

como auxiliares para una fácil interpolación.-

d) Construir una tabla, ya sea vertical u horizontal en la -- que se presente la asignación de valores a "x" y sus correspondientes de f (x) y mf (x).- Se recomienda una tabla vertical como la mostrada a continuación:

x	f (x)	u = mf (x)
x_o	$f\ (x_o)$	u_o
x_1	$f\ (x_1)$	u_1
x_2	$f\ (x_2)$	u_2
.	.	.
.	.	.
x_n	$f\ (x_n)$	u_n

e) Hacer resaltar en dibujo, las marcas principales y las -- cotas.-

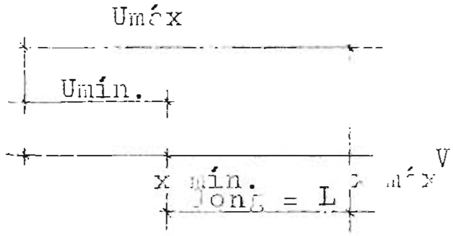
5) CALCULO DEL MODULO

En el artículo 2 de este capítulo se mencionó, que - los valores de f (x) deberán ser multiplicados por un factor constante "m" (módulo), a fin de que resulte posible dibujar toda la escala dentro de los límites del tamaño impuesto.-

Deberá pués considerarse, la longitud del sostén en el que se desea acondicionar la escala.-

Así:

Si "L" es la longitud del segmento sobre el que se desea dibujar la escala rectilínea y el intervalo de "x" -- que se quiere representar varía entre xa y xb, tendremos de acuerdo a la representación siguiente:



Valor mínimo de "x" = $(x)_a$

Valor máximo de "x" = $(x)_b$

Figura 2

Sea $u = mf\ (x)$

$$L \geq U_{mx} - U_{mn}$$

$$\geq mf\ (x\ máx) - mf\ (x\ mín)$$

$$\geq m\left[f\ (x)_b - f\ (x)_a\right]$$

$$m \leq \frac{L}{f\ (x)_b - f\ (x)_a}$$

Sucede a menudo que al cálcular el módulo con la - longitud impuesta, se obtenga un número fraccionario, -- conviene entonces, aproximar esa cantidad al valor entero más próximo; como ilustración supongamos que:

$$L = 20\ cm = m\left[f\ (x)_b - f\ (x)_a\right]$$

$$m = \frac{20}{f\ (\ )_b - f\ (x)_a} = 3.1\ cm$$

Tómese entonces

$m_n = 3$ cm se tendrá:

$L_n = m_n(f(x) - f(x))$ tal que

$\frac{L_n}{L} = \frac{m_n}{m}$ con lo que podrá obtenderse:

$$L_n = L \frac{m_n}{m} \qquad (5)$$

Ecuación que nos permite calcular la nueva longitud en que se alojará la escala.-

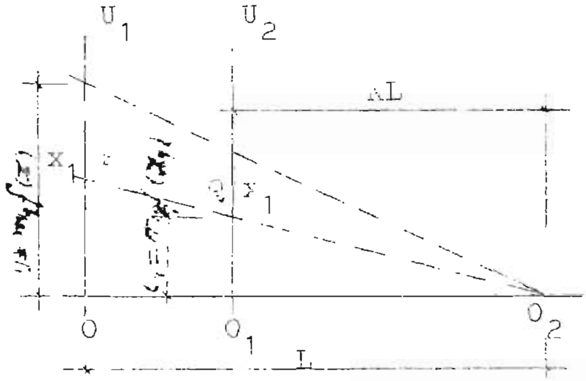
6) REDUCCION DEL MODULO - EL ABANICO REDUCTOR

Por conveniencia práctica se presenta a menudo, el caso de construir varias escalas cuyas ecuaciones difieren unicamente en el módulo, es decir:

$$\begin{aligned} u_1 &= m_1 \quad f(x) \\ u_2 &= m_2 \quad f(x) \\ u_3 &= m_3 \quad f(x) \\ &\vdots \\ u_n &= m_n \quad f(x) \end{aligned}$$

Cuando esto sucede, solamente se necesita construir una escala por medio de una tabla de valores de "x" y las restantes podrán ser facilmente construidas mediante un proceso gráfico.-

Supóngase que se tiene dos escalas $u_1 = m_1\ f(x)$ y $u_2 = m_2\ f(x)$ que difieren en el módulo y de las cuales solamente se calculará la primera de ellas.



O_2 = Polo

O_1 = Orígen de la Escala u_2

O = Orígen de la Escala u_1

Figura 3

En la figura 3, se ha dibujado en el sentido -- vertical, la escala $u_1 = m_1\ f(x)$ mediante el sostén OU_1 - perpendicular a ésta línea por el punto O se ha pasado -- un eje sobre el cual se ha señalado un punto conveniente - O_2; en el segmento $O - O_2$ se señaló un punto O_1 tal que

$\dfrac{O_2\ O_1}{O_2\ O} = \dfrac{m_2}{m_1}$ por el punto O se trazó $O_1\ U_2$ paralela a OU_1.- Si P es un punto sobre OU_1 que corresponde a un valor x_1, entonces $OP = m_1\ f(x_1)$ y O_2P cortará a - $O_1\ U_2$ en un punto Q, tal que:

$$\frac{O_1\ Q}{OP} = \frac{O_2\ O_1}{O_2 O} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$ó \quad O_1\ Q = \frac{m_2}{m_1}\ m_1\ f(x_1) = m_2\ f(x_1)$$

Ahora bien si unimos O_2 con todos los puntos - P de la escala OU_1, estaremos también señalando los puntos Q sobre la escala $O_1\ U_2$, que corresponden a los mismos valores de "x",por tanto la escala el eje $O_1\ O_2$ tendrá la ecuación $u_2 = m_2 f(x)$.-

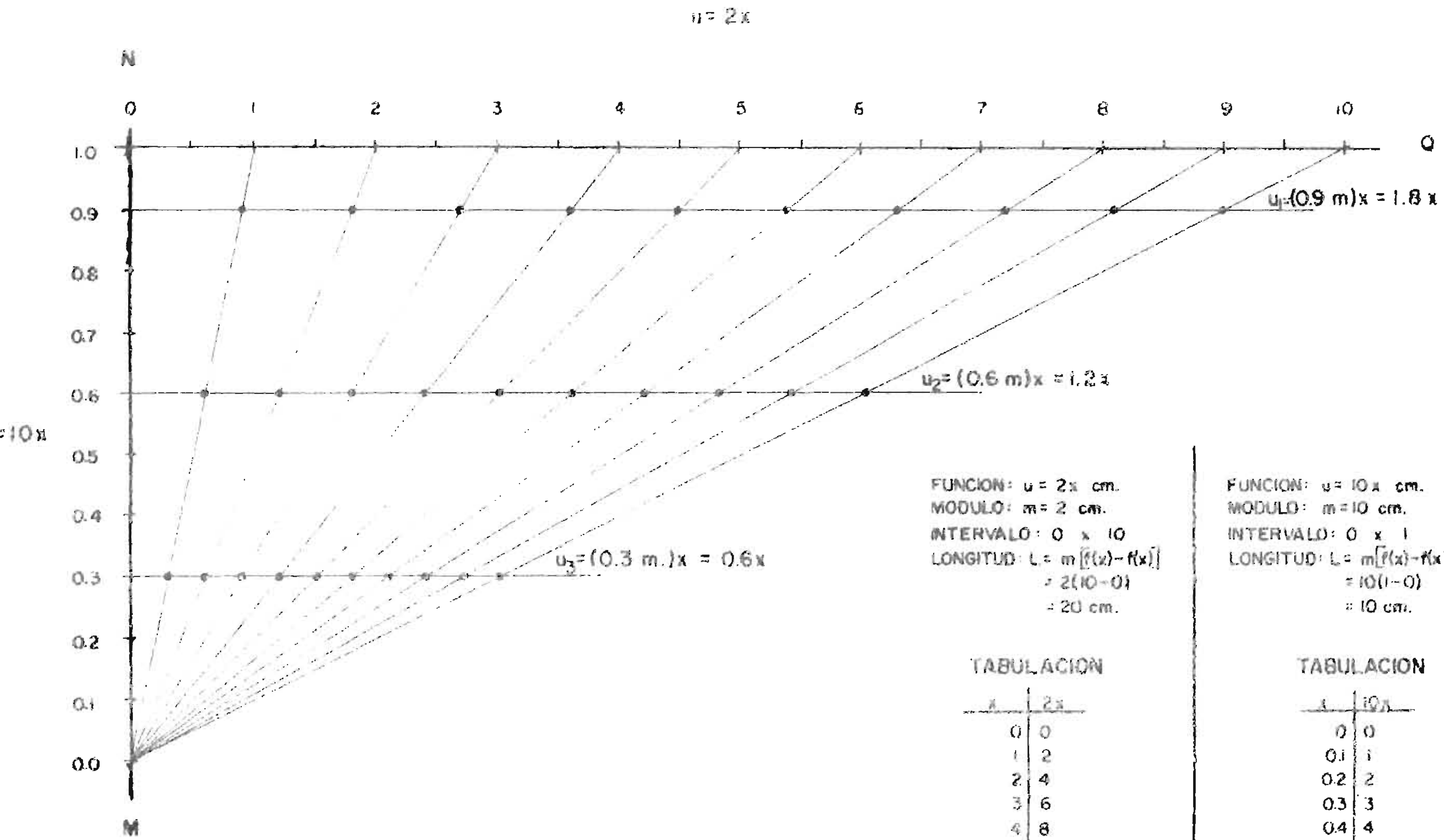
Las rectas transversales que parten de O_2 no se necesitan dibujar, basta simplemente marcar los puntos de intersección con $O_1 U_2$.-

Si queremos trazar una escala de un módulo dado, cortaremos el eje OO_2 en la razón requerida con una paralela a OU_1, por esto, si hacemos un corte por el punto medio estaremos formando una escala con un módulo de valor $m = 1/2$ m. El gráfico formado por este sistema, que nos permite dibujar escalas que solamente varían en el módulo, se llama "Abanico Reductor", cuya utilidad es obvia por la economía en tiempo y trabajo que representa.-

En el gráfico No. 1, se ilustra este principio, al resolver el siguiente ejemplo.-

Se desea conocer las escalas $u = 2x$, $u_1 = 1.8x$, $u_2 = 1.2x$, $u_3 = 0.6x$ centímetros, las cuales solamente difieren en el módulo y su rango varía entre $x = o$ y $x = 10$.-

La solución a este problema se vuelve sumamente sencilla con el uso del Abanico Reductor.- Efectivamente los módulos de las ecuaciones son (2), (1.8),(1.2) y (0.6) respectivamente; conforme se indica en el gráfico No. 1, se procede a construir en sentido horizontal la escala correspondiente al módulo de valor 2.- Por medio de la fórmula (4) del artículo 5 de este Capítulo, se determina la longitud L = 20 cm., a continuación se procede a la tabulación asignándole valores a la variable independiente "x" entre 0 - 10 y se escribe sobre el segmento NQ de 20 cm, acotando los valores dispuestos para "x".- Por el punto N se baja una recta perpendicular a NQ y a conveniencia se mide un segmento de longitud L = 10 cm., y en el se aloja una escala cuyo rango de variación oscila entre 0 y 1, el módulo de esta escala será m = 10 cm. y se acotarán los valores o.1, o.2, o.3.... 1.0.-



FUNCION: $u = 2x$ cm.
MODULO: $m = 2$ cm.
INTERVALO: 0 x 10
LONGITUD: $L = m[f(x) - f(x)]$
$= 2(10-0)$
$= 20$ cm.

TABULACION

x	2x
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
10	20

FUNCION: $u = 10x$ cm.
MODULO: $m = 10$ cm.
INTERVALO: 0 x 1
LONGITUD: $L = m[f(x) - f(x)]$
$= 10(1-0)$
$= 10$ cm.

TABULACION

x	10x
0	0
0.1	1
0.2	2
0.3	3
0.4	4
0.5	5
0.6	6
0.7	7
0.8	8
0.9	9
1.0	10

GRAFICO Nº 1

Desde M se pasan transversales que intersecten a los valores señalados de la escala $u = 2x$, con lo que se obtiene el Abanico Reductor.- Para conocer las escala u_1, u_2 y u_3 - se sabe en este artículo que $\frac{m_2}{m_1}\, m_1\, f(x_1) = m_2\, f(x_1) = \frac{1.8}{2}$ $m_1\, f(x_1) =$ es decir que $0.9 m_1\, f(x_1) = m_2\, f(x_1)$ siendo que - $m_1 = 2$ y $m_2 = 1.8$; por lo que sobre la escala NM se escoge - el valor 0.9 y se traza una recta paralela a la escala NQ; - esta paralela corta las rectas transversales, con lo que --- quedan señalado sobre ella, los puntos correspondientes a la ecuación $u_1 = 0.9\, m_1\, f(x_1) = 0.9 \times 2x = 1.8$ que es la ecuación correspondiente a la escala que se deseaba determinar.- En igual forma se procede para encontrar las escalas u_2 y u_3, trazando por los valores 0.6 y 0.3 de NM las respectivas paralelas a la escala $u = 2x$, que determinan:

$$u_2 = 0.6 m_1\; f(x_1) = 1.2x$$

$$u_3 = 0.3 m_1\; f(x_1) = 0.6x$$

Teniendo calculada la escala $u_1\, f(x)$ y se desea -- construir $u_2 = m_2\, f(x)$ con ayuda del Abanico Reductor, cinco sencillas reglas indicarán el procedimiento a seguir (Referencias a la figura 3).-

a) Trazar la escala $u_1 = m_1\, f(x)$ en sentido vertical u horizontal.-

b) Por su orígen levantar una normal de longitud arbitraria "L" (preferiblemente múltiplo o submúltiplo de m_1).-

c) Trazar el Abanico Reductor.-

d) Poner sobre "L" un punto O_1 a una distancia KL del polo O_2, siendo $K = \dfrac{m_2}{m_1}$

e) Por O_1 levantar una normal a "L".- Las intersecciones de los rayos y de la línea normal O_1 U_2 formarán la escala $u_2 = m_2 \; f(x)$

7) DIVISION DE LAS ESCALAS

Las escalas pueden ser uniformes y no uniformes:

$$u = f(x)$$

Son escalas uniformes aquellas en las que a valores equidistantes de x, corresponden valores equidistantes de u.

Si $f(x) = kx$, la escala es uniforme.- Son ejemplos de ella: $u = (2x,\ 3x,\ 0.5x, \ldots, mx)$ centímetros, pulg., etc.-

En la figura 4, $u = mx$, donde $m = 2$ cm, $-2 < x < 4$ (variación)

$$L = 12 \text{ cm}$$

Figura 4

Son escalas no uniformes aquellas cuyos valores no equidistan, esto quiere decir que no hay igual separación entre valores consecutivos de "x".-

La escala más importante de las no uniformes y -

que será objeto de estudio del presente trabajo.- Es la Logarítmica.-

Si $f(x) = \log x$, la escala es logarítmica, son ejemplos de ella.

$u = (2 \log x,\ 3 \log x,\ \frac{1}{2} \log x \ldots,\ m \log x)$ centímetros, pulg. etc.-

En la figura 5, $u = m \log u$, donde $m = 12.5$ cm., $1 < x < 10$

$L = 12.5$ cms.-

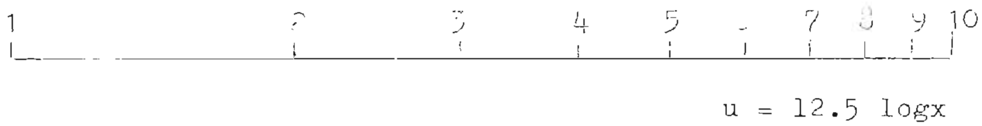


Figura 5

Después de haber construido una escala para - $f(x)$, a menudo se tiene la necesidad de leer valores intermedios entre dos cotas de la escala; cuando se trata de escalas uniformes este proceso no presenta ninguna dificultad, pero en las escalas no uniformes y en especial las - logarítmicas se tiene que seguir un proceso de interpolación visual, que naturalmente, no ofrece exactitud en el - resultado y la aproximación obtenida dependerá, evidentemente, del intervalo entre dos valores sucesivos; en vista de las circunstancias se aconseja escoger un módulo conveniente.-

8) ESCALAS ADYACENTES.-

La relación de dos variables "y" y "x" de la - forma $y = f(x)$ puede ser representada graficamente por la construcción de las escalas correspondientes a ambos miem bros de la ecuación $u = my$ y $u = mf(x)$.-

La utilización de escalas diferentes para medir la --variación de una misma magnitud, es muy frecuente, bien porque se desee cambiar la unidad de medida o el orígen o ambos.-

Se acostumbra dibujar éstas escalas en lados opuestos de un mismo sostén o en ejes adyacentes o paralelos, con el mismo módulo y con el mismo orígen o con orígen en una línea perpendicular a los ejes.-

Dos escalas diferentes pueden ser también usadas como escalas adyacentes, para obtener una tabla que nos indique la correspondencia de valores entre ambas.-

Ejemplo:

Si se tiene las escalas $u = 10 \log x$ y $u = 5 \log z$, usadas como escalas adyacentes nos darán una tabla de cuadrados y raices cuadradas puesto que:

$$5 \log z = 5 \times 2 \quad \log z = 10 \log \sqrt{z}$$

e igualando las 2 ecuaciones de la escala: $x = \sqrt{z}$

o bien:

$$x^2 = z$$

Con objeto de acotar números redondos, es decir, -mantener los intervalos, los extremos finales de las escalas, podrán desplazarse uno con respecto al otro.-

Lo anteriormente dicho se ilustra con el siguiente ejem lo:

Construir 2 escalas adyacentes para A y R, según -la relación $A = \pi R^2$ para variaciones de R entre 0 y 5 cm. ($\pi = 3.14$)?

Solución:

Como primer paso se procede a determinar los valores límites de A evidentemente:

$A_{min} = 0$ y

$A_{máx} = 3.14 \times 5^2 = 78.50 \text{ cm} \approx 80 \text{ cm}^2$ (valor aproximado a un número entero)

$\therefore \quad 0 \leq A \leq 80 \quad \text{cm}^2$

Luego escogemos una longitud adecuada para escribir las escalas.

$L = 10$ cm.

A continuación se determina el módulo:

$$m_1 = \frac{L}{f(x)_b - f(x)_a} \qquad \text{(4) art. 5.}$$

$$= \frac{10}{3.14 \times 5^2 - 3.14 \times 0} = \frac{10}{78.50} = 0.1273$$

En el paso anterior puede observarse que cualquier aproximación que se haga al valor tope de una de las -- funciones, no deberá tomarse en consideración para cálcular el módulo.-

Ahora se plantean las ecuaciones de las escalas y - se escogen los intervalos apropiados para la tabulación.-

1 - $u_A = 0.1273 \ A$ cm.

2 - $u_R = 0.1273 \times 3.14 \ R^2 = 0.3997 \ R^2$ cm.

} Ecuaciones

3 - $i_A = 10 \text{ cm}^2$

4 - $i_R = 1$ cm.

Con estas condiciones podemos asignar valores a las variables dentro de los límites impuestos conforme a las siguientes tablas:

Para R.

R	R^2	$u_R = 0.3997\ R^2$ (cm)
0	0	0
1	1	0.3997
2	4	1.5988
3	9	3.5973
4	16	6.3952
5	25	9.9925

Para A.

A	[illegible] = u_A = 0.1273 A (cm.)
0	0
10	1.2730
20	2.5460
30	3.8190
40	5.0920
50	6.3650
60	7.6380
70	8.9110
80	10.1840

Con estos datos es posible dibujar las escalas como a continuación se detalla (mediante los dos tipos de presentación recomendados).-

Sobre un sostén:

Figura 6A

Sobre sostenes paralelos.

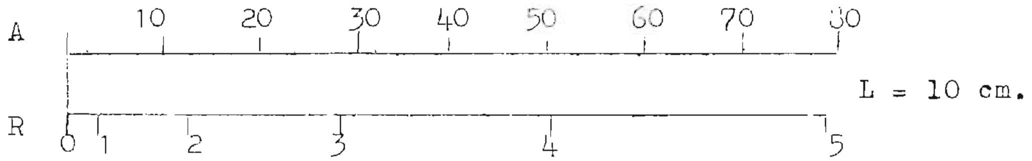


Figura 6B

En ambos casos estas escalas son llamadas también, estacionarias adyacentes.-

Las propiedades de los logarítmos, en una forma - muy interesante, nos permiten dibujar las escalas para dos variables que esten relacionadas por una ecuación de la forma $y = x^p$. Tomando logarítmos en ambos miembros de la ecuación tenemos:

$$\log y = \log x^p = p \log x$$

cuya "ley de escala" viene dada respectivamente por:

$$u_1 = m \log y \qquad (6)$$

$$u_2 = m\, p \log x$$

Se adjunta el gráfico No. 2 que representa un abanico reductor de longitud 15 cm. para las escalas logarítmicas y uniformes y que nos permite dibujar con extrema facilidad la escala para $y = x^{0.8}$ según lo explicado anteriormente (cuando $1 < x < 100$)

$$\log y = 0.8 \log x$$

Variaciones de "y"

__Máx__: $\log y = 0.8 \log 100 = 0.8 \times 2 = 1.6$

$y = \text{antilog } 1.6 \approx 39.99 \quad 40$

__Mín__: $\log y = 0.8 \log 1 = 0$

$y = \text{antilog } 0 = 1$

Luego $1 < y < 40$

Cálculo del módulo:

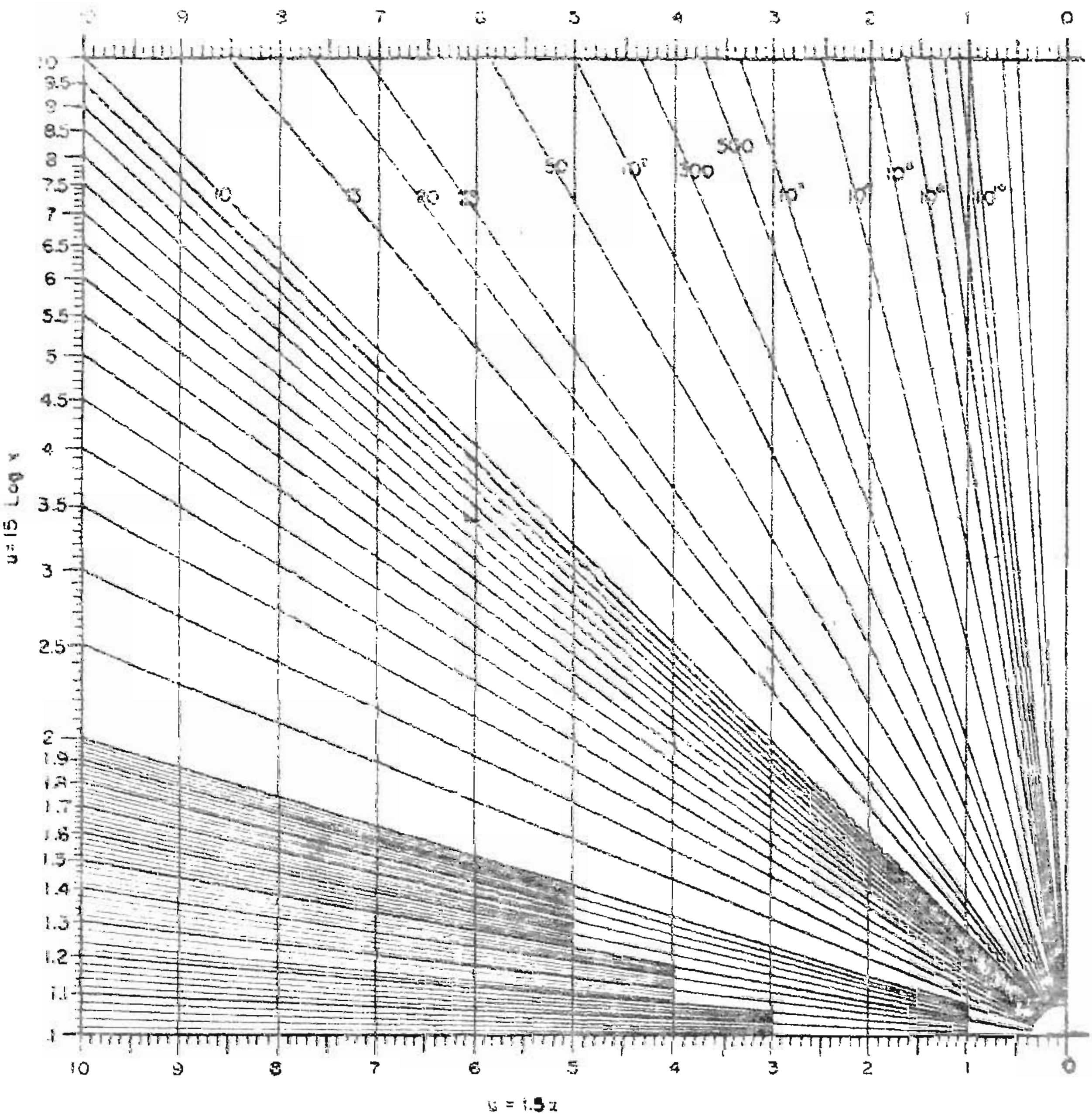
$$m = \frac{L}{f(x)_b - f(x)_a} = \frac{15}{1.6-0} = \frac{15}{1.6} = 9.375$$

Ley de escala:

$$u_1 = 9.375 \log y$$

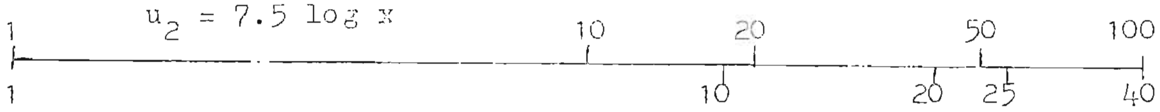
$$u_2 = 7.5 \quad \log x$$

Usando el gráfico 2 se dibujan las correspondientes escalas, como se muestra a continuación:



ESCALA LOGARITMICA

GRAFICO Nº 2



L = 15 cm.

Figura 7

La ecuación de forma $y = x^p$, implicaba que "p" fuera un número positivo.-

La construcción de escala para ecuaciones que relacionan las variables en la forma $y = x^{-p}$, deben elaborarse con más cuidado, puesto que cuando los valores de una variable crecen en una dirección, los de la otra decrecen en la misma dirección; así si tenemos la ecuación.-

$$y = x^{-\frac{1}{2}}$$

con $$1 < x < 100$$

se pueden proceder:

$\log y = -\frac{1}{2} \log x$ tomando logarítmos - en ambos miembros para encontrar valores límites de "y":

$$\log y \text{ mín} = -\frac{1}{2} \log 100 = -1 \quad .:$$

$$y_{mín} = 0.1$$

$$\log y_{máx} = -\frac{1}{2} \log 1 = 0$$

$$y_{máx} = 1$$

lo que se expresa $0.1 < y < 1$

El resultado parcial anterior nos indica que "y" valdrá 0.1 y 1 cuando "x" vale 100 y 1 respectivamente, lo que nos muestra la concordancia con lo afirmado antes.-

9) <u>EJEMPLO ILUSTRATIVO - ESCALA DE INVERSOS- SOLUCION LOGARITMICA.-</u>

<u>Ejemplo</u>:

Sí de cualquier rectángulo, su base es designada por la letra "b"; su altura, por "h" y su área por - A^e igual a 100 cm^2.-

Deseamos conocer los valores que tendrá "b" -- cuando "h" varía para que la magnitud de "A" permanezca constante, si sabemos que $10 \leq h \leq 50$.-(Construyase las - escalas apropiadas.-

Se presentará esta solución mediante la construcción de escalas adyacentes, uniformes y logarítmicas.-

<u>Primera Solución</u>:

$$A = bh = 100 \quad cm^2 \qquad \text{(Area del rectángulo)}$$

$$\therefore b = \frac{100}{h}$$

<u>Valores límites de b.</u>

$$b\ mín = \frac{100}{50} = 2 \text{ cm}$$

$$b\ máx = \frac{100}{10} = 10 \text{ cm}$$

$$2 < b < 10 \quad cm.$$

Longitud del sostén:

$$L = 15 \text{ cm}$$

Módulo.

$$m = \frac{L}{f(x_b) - f(x_a)} \qquad (4) \text{ art } 5.$$

$$= \frac{15}{\frac{100}{10} - \frac{100}{50}} = 1.875$$

Aproximando a un número entero "m" .- $m_n = 2$ $\quad m_n = 2$

$$L_n = m_n \left(f(x)_b - f(x)_a \right)$$

$$L_n = 2 \quad (10 - 2) = 16 \text{ cm.}$$

Ecuaciones e intervalos:

1 -	$u_b = 2b$ cm		Ecuaciones
2 -	$u_h = \dfrac{200}{h}$ cm		
3 -	$i_b = 1$ cm.		
4 -	$i_h = 5$ cm.		

Debe observarse que la ecuación 2 de la escala, presenta a la variable "h" en el denominador, una ley -de este tipo se denomina "escala de inversos"; además, -los valores máximos y mínimos de "h" son inversamente -proporcionales a los de la variable dependiente "b"; --esto nos indica que las escalas adyacentes, crecerán en sentido opuesto sobre el sostén.-

Tabulación:

b	$u_b = 2b$ (cm)	$(2b - 4)$ cm
2	4	0
3	6	2
4	8	4
5	10	6
6	12	8
7	14	10
8	16	12
9	18	14
10	20	16

h	$u_h = \frac{200}{h}$ (cm)	$(\frac{200}{h} - 4)$ cm.
10	20	16
15	13.33	9.33
20	10	6
25	8	4
30	6.66	2.66
35	5.71	1.71
40	5	1
45	4.44	0.44
50	4	0

Las terceras columnas de las tablas indican que se han sustraido cuatro centímetros a las funciones u_b y u_h con objeto de dibujar las escalas a partir de cero centrímetros sobre el sostén.-

Dibujos de las Escalas:

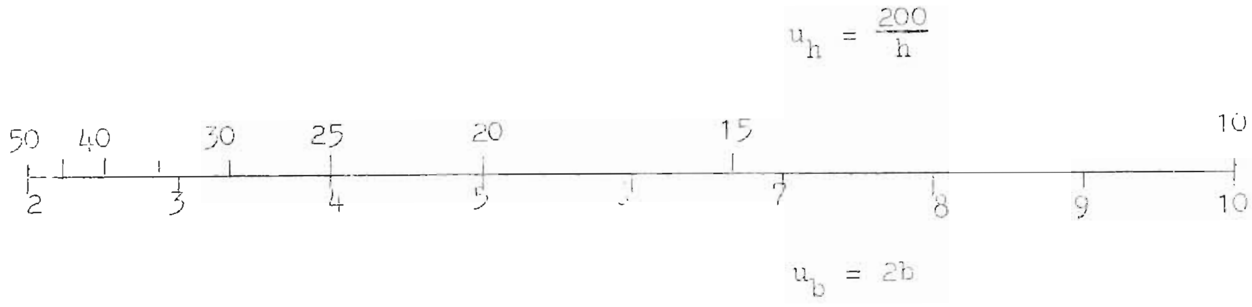


Figura 8

Segunda Solución:

Aplicando logarítmos a la fórmula bh = 100

$$\log b + \log h = \log 100 \quad .:$$

$$\log h = \log 100 - \log b$$

$$\log h = 2 - \log b$$

Longitud del sostén:

$$L = 15$$

Módulo:

$$m = \frac{15}{\log 50 - \log 10} = \frac{15}{\log 5}$$

$$= \frac{15}{0.69897} = 21.42$$

Aproximando a un número entero $m_n = 20$

$$L_n = \frac{m_n}{m} L$$

$$= \frac{20 \times 15}{21.42} = 14 \text{ cm.}$$

Ecuaciones:

$$1 - u_b = m (2 - \log b)$$
$$= 40 - 20 \log b$$
$$2 - u_b = 20 \log h$$

Los valores límites de "b" y los intervalos, son - los ocupados en la primera solución, por tanto se puede asignar valores a ambas variables.-

h	log h	$u_h = 20 \log h$ (cm)	$u_h - 20$
10	1.000	20	0
15	1.176	23.52	3.52
20	1.301	26.02	6.02
25	1.398	27.96	7.96
30	1.477	29.54	9.54
35	1.544	30.88	10.88
40	1.602	32.04	12.04
45	1.653	33.06	13.06
50	1.699	33.98	13.98

b	log b	$u_b = 40 - 20 \log b$ (cm)	$u_b - 20$ (cm)
2	0.300	34.00	14.00
3	0.477	30.46	10.46
4	0.602	27.96	7.96
5	0.698	26.04	6.04
6	0.778	24.44	4.44
7	0.845	23.10	3.10
8	0.903	21.94	1.94
9	0.954	20.92	0.92
10	1.000	20.00	0.00

Dibujo de las escalas

Figura 9

Situación del Orígen:

Por el artículo 3 de este capítulo, el orígen se - encuentra igualando uf (x) a cero o sea por ejemplo que:

$u_b = 2b = 0$ de la primera solución

$b = 0$ (valor de b en el orígen)

es decir que el parámetro "h" tomará un valor tan grande que sale de todo límite razonable cuando "b" vale como - cero.- Al comenzar a crecer "b", "h" irá adquiriendo - valores reales finitos.-

C A P I T U L O III

LA REGLA DE CALCULO

1) Escalas Deslizantes.

Para dos funciones f(y) y F(x), se construyen sus escalas adyacentes u = mf (y) y u = mF (x). En el Capítulo anterior se discutieron las escalas adyacentes estacionarias con el origen coincidiendo en el eje o sobre la misma perpendicular y se asentó que mf (y) = mF (x).-

Si por algún procedimiento mecánico; podemos deslizar una escala con respecto a la otra, tendremos entonces las llamadas "Escalas Deslizantes".-

Con ayuda de los siguientes diagramas, se establecieron las ecuaciones que relacionan sus valores.-

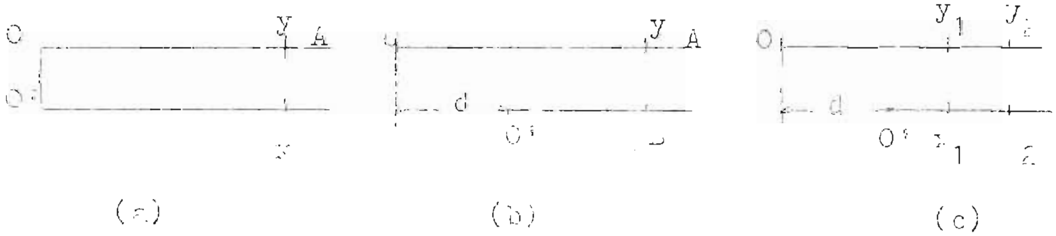


Figura 10

El diagrama (a) Fig 10, nos muestra un par de escalas con sus orígenes sobre la perpendicular OO_1, coincidiendo en la posición estacionaria y un par de valores "y" y "x" sobre ellas, directamente opuestos. El valor "y" se encuentra a una distancia OA de su origen y el valor "x" a una distancia O'B. Por construcción tenemos que

OA = O B. Si OA = mf(y) y O B = mF(x), tenemos en la posición estacionaria mf (y) = mF (x) ó f (y) = F (x) (1)

Deslizamos, ahora una de las escalas a lo largo de su eje, hasta tomar una posición como la dibujada en (b) Fig. 10, y considerense sobre ellas un par de valores "y" y "x". La construcción de la figura nos da OA - O'B = c ó mf(y) - mF(x) = c ó f(y) - F(x) = $\frac{c}{m}$ = constante, establecemos, después del deslizamiento.

f (y) - F (x) = constante (2)

Las cantidades "c" y "m" son independientes del par de valores "y" y "x" escogidos.-

Tomemos ahora, dos pares de valores correspondientemente opuestos de "y" y "x" (y_1,x_1) y (y_2,x_2), entonces cumpliendo la relación (2)

$$f(y_1) - F(x_1) = \text{constante}$$

$$f(y_2) - F(x_2) = \text{constante}$$

e igualando el par de ecuaciones.

$$f(y_1) - F(x_1) = f(y_2) - F(x_2) \qquad (3)$$

Considerese ahora, como ejemplo, las escalas u = m log y y u = m log x.

En la posición estacionaria, por la ecuación (1), log y = log x o bien y = x.-

En la posición después del deslizamiento, por la ecuación (2), log y - log x = const; por las propiedades de los logaritmos $\frac{y}{x}$ = const., para cualquier par de valores.-

Si se disponen, en la posición desplazada, dos pares -

de valores de "y" y "x" aplicando la ecuación (3).

$$\log y_1 - \log x_1 = \log y_2 - \log x_2$$

$$ó \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \qquad (4)$$

Ahora se construyen, las dos escalas, sobre sostenes de 12.5 cm. y se desplaza una de ellas como se muestra en la Fig. 11.-

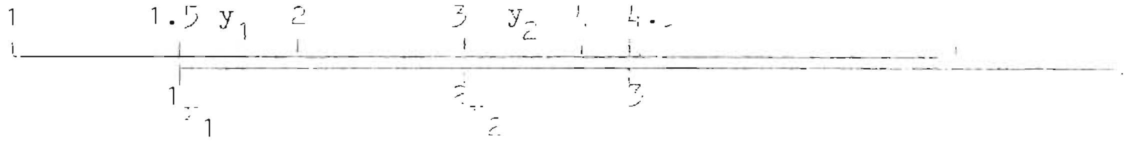


Figura 11

En la proporción (4), intervienen cuatro valores, si de ellos conocemos solamente tres, el cuarto podrá ser fácilmente determinado por medio de las escalas adyacentes, aplicando los principios anteriores. Supongamos que se conocen $y_1 = 1.5$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

La figura (11) se ha dibujado convenientemente para estos datos.

La escala de las "x" se ha llevado a una posición tal que $x_1 = 1$, quede directamente abajo de la escala de las "y" en el valor $y_1 = 1.5$. Por la condición (3), si leemos inmediatamente encima del valor sobre la escala de las "x" en el punto marcado $x_2 = 2$, encontraremos sobre ella el valor $y_2 = 3$ que es el número que se deseaba determinar. A manera de comprobación tenemos de (4).-

$$y_2 = \frac{y_1\ x_2}{x_1} = \frac{1.5 \times 2}{1} = 3$$

Se ha ejecutado, con lo anterior, una sencilla operación con el auxilio de las escalas deslizantes.-

2) <u>LA REGLA DE CALCULO</u>.

La capacidad de efectuar operaciones por medio de escalas deslizantes y la necesidad de calcular fórmulas de variables, han propiciado la construcción de dispositivos movibles que pueden colocarse en diferentes posiciones relativas. Uno de estos, es la regla de cálculo cuyo manejo es tan cómodo, que es universalmente aceptado en muchas ramas del campo técnico,-

Esencialmente la regla de cálculo consiste en una regla graduada, con una escala logarítmica. Sobre la que puede deslizarse una reglilla con otra escala idéntica a la anterior.

Las reglas de cálculo se obtienen fácilmente en el mercado y se fabrican de cartón, madera o material plástico, se usan generalmente en su hechura materiales con bajo coeficiente de dilatación, que eviten expansiones o contracciones que perjudiquen el grado de aproximación de las lecturas.- Las reglas graduadas que se requieren, vienen hechas con fines comerciales. Aunque se obtienen sin escalas para fines particulares, en cartón.-

El tamaño de las reglas se ha estandarizado y las más usuales miden 12.5 cm. o 25 cm.-

Toda regla de cálculo comercial, posee más de un par de escalas y un cursor de plástico transparente o vidrio, con trazos especiales incorporados, para facilitar las lecturas.-

A las diferentes escalas que posee la regla, se las denomina con una letra que se sitúa a la izquierda de ella. A la derecha se acostumbra a poner la fórmula de la escala correspondiente.-

3) FUNDAMENTO DE LA REGLA DE CALCULO.

Sabemos que:

$$\log (a.b) = \log a + \log b$$

$$\log \left(\frac{a}{b} \right) = \log a - \log b$$

que es la representación del logaritmo de un producto y un cociente, expresado como la suma y la resta de los logaritmos de los factores. Esta propiedad de reducir productos a sumas y cocientes a diferencias, es la que aprovechamos en la construcción de las reglas de cálculo.-

En las escalas de la regla, se efectuan los productos y cocientes sumando o restando los segmentos correspondientes a los números con que se quiera operar.-

4) ESCALAS BASICAS DE LA REGLA DE CALCULO-PRODUCTO Y COCIENTE.

En toda regla de cálculo hay 2 escalas convencionales básicas, la C y D, a cuyos valores numéricos son referidas las fórmulas matemáticas de las demás escalas.

Se ha dibujado en la Fig.12 una regla de cálculo de - L = 12.5 cm. con dos escalas u = 12.5 log x. Una de ellas sobre la regilla móvil que se llamará C y la otra inmediatamente abajo que será D, sobre la porción fija. Los extremos de estas escalas llevan marcados el índice 1 y el índice 10 respectivamente.

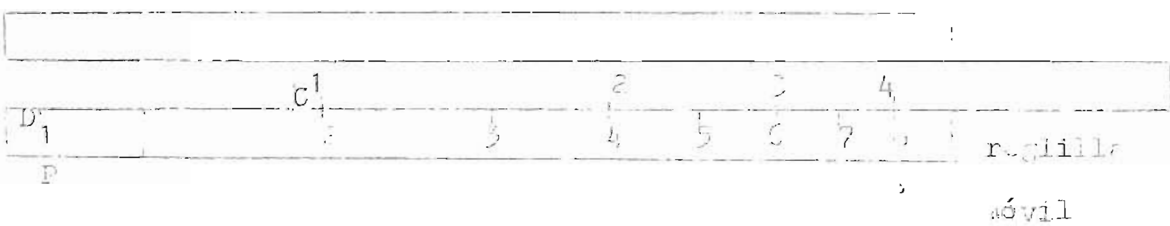
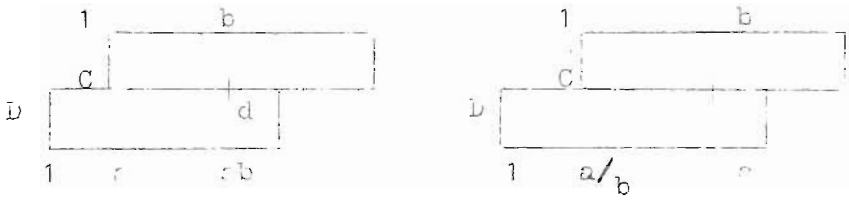


Figura 13

En la escala D, se ha marcado el segmento de extremos 1 y 2 (entre círculos) al cual se le ha sumado el segmento 1 y 4 de la escala C (también entre círculos), dando por resultado el segmento F; con una longitud igual a la suma de los logarítmos de 2 y 4 que sabemos es igual al logarítmo del producto de ambos números. Ahora bien, por medirse en las escalas logarítmicas el valor de los logarítmos de los números y anotar los números correspondientes, el valor que se lee es ocho (8), siendo este el producto buscado.-

Generalizando:

"Para multiplicar dos números "a" y "b" se lleva el índice 1 de la escala móvil C a coincidir con "a" sobre la escala fija D, y el valor de la escala D correspondiente a "b" de C da el producto buscado "ab".- Fig. 13 - (a).-



(a) (b)

Figura 13

La división, es el proceso inverso de la multiplicación, para dividir "a" por "b": "Se llevan a coincidir estos dos números tomados respectivamente sobre las escalas D y C, y el cociente se obtiene leyendo el valor de la escala D que coincide con el 1 de C". Fig. 13- (b).-

Utilizando estos procedimientos el primer problema con que se tropieza es que si los productos sobrepasan a 10; por ejemplo, para el producto 3 x 7, si se dispone el 7 en la escala móvil C cae fuera de D. Lo que se hace en este caso es poner el 10 de C frente al 3 de D y se busca el 7 sobre la escala C para leer inmediatamente abajo en la escala D el resultado 2.1, que será 21 en este caso. La validez de esto se comprueba recurriendo a la figura 14:

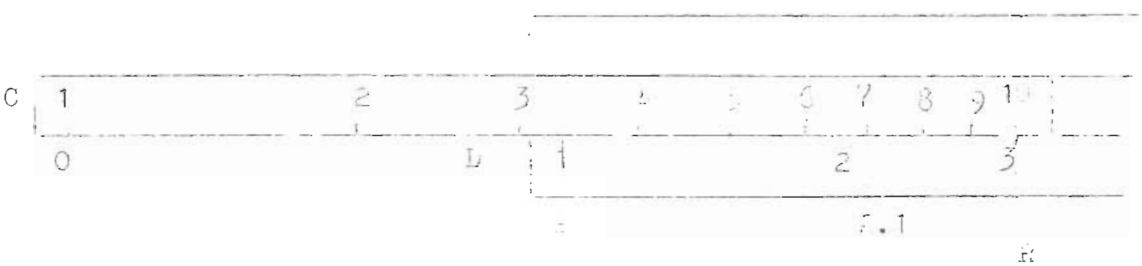


Figura 14

$$PQ = PR - RQ = PR - (OR - OQ)$$

Sustituyendo los segmentos por logaritmos:

$$PQ = \log 3 - (\log 10 - \log 7)$$
$$= \log 3 + \log 7 - \log 10$$
$$= \log (3 \times 7) - \log 10$$
$$= \log \frac{21}{10} = \log 2.1$$

El valor obtenido es el mismo que se lee en la regla. .. El producto es en realidad 10 veces mayor. La regla de cálculo no da el orden de magnitud del resultado, con cierta experiencia los decimales se determinan directamente por el orden de magnitud de los factores.-

Problema análogo al anterior, se presenta cuando se trata de la división, por ejemplo, para efectuar la división de 4 ÷ 5, según lo explicado, se pone en la escala C el número 5 y en la D el 4, entonces el 1 de C cae fuera de D, en igual forma que el procedimiento anterior el cociente buscado se obtendrá al leer el valor de D inmediatamente abajo del 10 de C. Hacemos uso de la figura 15, para su comprobación:

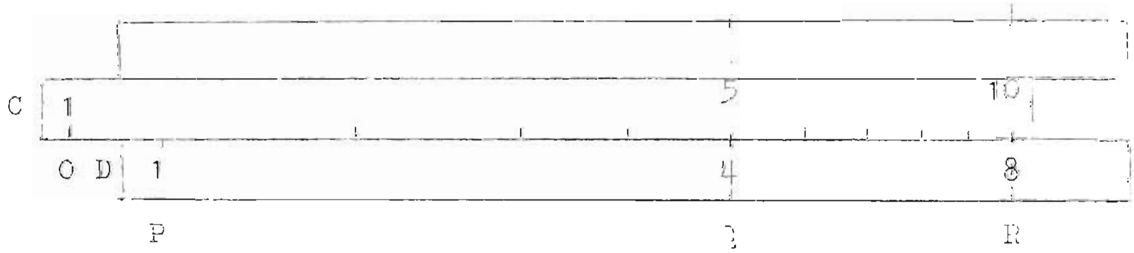


Figura 15

$$PR = RQ + PQ = OR - OQ + PQ$$

Sustituyendo los segmentos por logaritmos:

$$PR = \log 10 - \log 5 + \log 4$$
$$= \log 40 - \log 5$$
$$= \log \frac{40}{5} = \log 8$$

Luego la división a ÷ b, "se obtiene siempre enfrentando los números "a" y "b" y leyendo el resultado en el punto de la escala D que coincide con el comienzo 1 o con el final 10 de la escala móvil. C."

5) ESCALAS DE LA REGLA DE CALCULO.

Como se explicó anteriormente, las reglas de cálculo comercial difieren en el número de escalas que poseen, sin embargo la mayoría traen las siguientes: escala básica fija, básica movible, cúbica, de tangentes, desplazada en π, básica recíproca, arcos de ángulos pequeños, de senos, pitagórica, exponenciales para exponentes negativos, exponenciales para exponentes positivos, de raíces y la de mantisas logarítmicas. Estas escalas se distiguen por las letras mayúsculas A, B, C,.......que las definen.

A continuación se presentan algunas de las relaciones de las escalas más utilizadas, aplicando los principios de escalas estacionarias y de escalas móviles; con este objeto se distinguirá por (1.-) la ecuación para la posición estacionaria y por (2.-), la de la móvil. Además los números se designarán por las letras minúsculas correspondientes a las mayúsculas que se han utilizado para reconocer la escala. A la longitud se le ha asignado la letra -

Nota: Números opuestos se han denominado por el mismo subíndice.-

a) Relación de las escalas básicas C y D.

(1.-) $\log c = \log d \quad .: \quad c = d$

(2.-) $\log c - \log d = \text{const.} \quad .: \quad \frac{c}{d} = \text{const.}$ ó

$$\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2} \quad .-$$

Estas escalas se utilizan para multiplicar y dividir, como se explicó, lo que se puede representar esquemáticamente por:

Multiplicación: $a \times b = r$ ó $\frac{1}{a} = \frac{b}{r}$.:

División: $\frac{a}{b} = r$ ó $\frac{b}{a} = \frac{1}{r}$

C	1 ó 10	otro fac.
D	un factor	producto
C	divisor	1 ó 10
D	dividendo	cociente

b) Relación de D y la escala de mantisas logarítmicas L

(1.-) $l = \log d$ y $d = \text{antilog } l$

c) Relación de D y la escala básica recíproca CI

(1.-) $\log d = \log \frac{10}{ci} \quad .: \quad d = \frac{10}{ci}$ y $ci = \frac{10}{d}$

Dividir ó multiplicar d por c es equivalente a multiplicar o dividir d por ci. En otras palabras, la escala CI podría sustituirse por la escala C invertida.-

(2.-) $\log d - \log \frac{10}{ci} = \text{const.} \quad .: \quad d \times ci = \text{const.}$ ó

$$d_1 \times ci_1 = d_2 \times ci_2 \quad .$$

d) Relación de D y la escala de raíces A.

(1.-) $\log d = \frac{1}{2} \log a \quad .: \quad d = \sqrt{a}$ ó $a = d^2$

Se ve que la escala A posee un módulo igual a la mitad del módulo de las escalas básicas, es decir que se desarrolla dos veces en la longitud de la regla. Conviene advertir entonces que la elevación al cuadrado de un número "b" se efectúa leyendo en la escala A el valor correspondiente al número "b" señalado en la escala D.

Así, es indistinto calcular 5^2, $\overline{0.5}^2$, $\overline{0.005}^2$,.... En cambio, para extraer la raíz cuadrada, deberá tenerse en consideración que la raíz de 5 se buscará en la primera parte de la escala A y las raíces de 0.5 y 0.005 en la segunda parte, leyéndose siempre, los resultados en la escala D. Para no incurrir en errores, se dirá:

"Para un número $b.10^{\pm n}$ (siendo b de una sola cifra entera), la raíz cuadrada se busca en la primera parte de A si n es par y en la segunda si n es impar".

Se acostumbra a poner en las reglas de cálculo, en la parte móvil, una escala igual a "A" que se denomina B, muy valiosa en las operaciones, como se muestra:

(2.-) $\log d - \frac{1}{2} \log b = \text{const.}, \therefore \frac{d}{\sqrt{b}} = \text{const.}, \therefore$

$$\frac{d_1}{\sqrt{b_1}} = \frac{d_2}{\sqrt{b_2}} \qquad \text{y} \qquad \frac{d_1^2}{b_1} = \frac{d_2^2}{b_2}$$

Actualmente se está generalizando en las reglas de cálculo el uso de las escalas para elevación de cuadrados y extracción de raíces, estas escalas están subdivididas de acuerdo con una longitud de escala de 50 cm. o sea que en una regla normal de 25 cm. se tiene sólo la mitad de la escala, lo cual proporciona cálculos más exactos.

e) Relación de D y C y la Escala Cúbica K

(1.-) $\log d = \frac{1}{3} \log k \quad .: \quad d = \sqrt[3]{k} \quad$ y $k = d^3$

El módulo de K es un tercio del de las escalas básicas y se desarrollará tres veces en la longitud de la regla.

.-Como en la relación anterior, para elevar un número al cubo se señala éste en la escala D y se lee la potencia del número en la escala K. Con objeto de facilitar la extracción de raíces cúbicas, a la primera sección de la escala se le numera de 1 a 10, la segunda de 10 a 100 y la tercera de 100 a 1000 y bastará multiplicar o dividir por mil cada una de estas secciones según sea el número del cual se quiere conocer su raíz. Así por ejemplo: se buscará en la primera parte la raíz cúbica de 3; 3000; 0.003;.... En la segunda parte, la raíz de 30; 30000; --- 0.03;.... En la tercera, la de 300; 300000; 0.3;....

(2.-) $\log c - \frac{1}{3} \log k = \text{const.}, \quad .: \quad \frac{c}{\sqrt[3]{k}} = \text{const.} \quad .:$

$$\frac{c_1}{\sqrt[3]{k_1}} = \frac{c_2}{\sqrt[3]{k_2}}$$

f) Relación de D y la escala de tangentes T

(1.-) $\log d = \log (10 \tan t), \; .: \; d = 10 \tan t$ y $t = \tan^{-1} \frac{d}{10}$

(2.-) $\log d = \log (10 \tan t) = \text{const} \; .:$

$$\frac{d}{\tan t} = \text{const., ó } \frac{d_1}{\tan t_1} = \frac{d_2}{\tan t_2}$$

Se acostumbra a poner las tangentes creciendo en un sentido y las cotangentes creciendo en sentido contrario, basándose en la identidad cot t = tan (90° - t)

Para encontrar r = C tan S, ... $\frac{...}{45°} = \frac{r}{tan t}$

Para encontrar ... $= \frac{...}{tan t}$, ... $\frac{...}{...} = \frac{...}{tan 45°}$

Ahora bien puesto que:

tan 0° = 0		log tan 0°	= -∞
tan 0° 34' = 0.01		log tan 0° 34'	= -2
tan 5° 43' = 0.1		log tan 5° 43'	= -1
tan 45° = 1		log tan 45°	= 0

En la escala T ... los valores ... tan t comprendidos entre 5° 43' y 45°. ... en la ... proximación ... de ... cálculo, los valores comprendidos entre 0° 35' y 5° 43' coinciden con los respectivos valores del seno, ... ángulos pequeños ...

...) Relación ... D con ... :

(1. ...) log C = log (10 ...) ... $= sen^{-1} \frac{C}{10}$

(...) ... (10 sen ...) = const. ... $\frac{...}{sen} =$ const., o

$\frac{c_1}{sen\ a_1} = \frac{c_2}{sen ...}$

... de tangentes, los senos y cosenos ... regla de cálculo, ... :

$$\cos ... = sen (90° - a)$$

Además, que la func... en el rango comprendido entre 0^{o} y 90^{o}. Para conocer los valores que se... [illegible]

[illegible], ... van l... [illegible]

sen 0^{o}	= 0	log sen 0^{o}	= $-\infty$
[illegible]	= [illegible]	log [illegible]	= [illegible]
sen [illegible]	= 0.100	log sen [illegible]	= [illegible] 1
sen 90^{o}	= 1	log sen [illegible]	= 0

Por consiguiente, en la escala logarítmica de módulo igual a 1 ... [illegible], los valores de ... [illegible] se ubicarán, estarán comprendidos entre [illegible] y [illegible].

[illegible]) ... [illegible] y la escala de ángulos [illegible].

[illegible] ... en los incisos (f) y (g) ... [illegible], se construirá una escala ... [illegible] ángulos comprendidos entre [illegible] y [illegible], válidos ... [illegible]

[illegible]

[illegible]

(1.) log ... [illegible] (1.0 ... [illegible]) .: [illegible]

[illegible]

( ) [illegible] (1 ... sen st) = const .: [illegible] = const., [illegible]

$$\frac{d_1}{sen\ t_1} = \frac{d_2}{sen\ t_2}$$

i) [illegible] ... [illegible], se les ... [illegible] valor π, [illegible] ... con objeto de facilitar las operaciones, [illegible] valor (π) se utilizó en los diferentes cálculos. [illegible] así:

		denominación	fórmula
Escala fija desplazada en π	--	DF	π D
Escala móvil desplazada en π	....	CF	π C
Escala recíproca desplazada en π	---	CIF	π CI

j) Relación de las escalas LL y C.

En casi todos los procesos de cálculo se encuentran números de los cuales se requiere saber determinada potencia o extraerles una raíz. Después de la importancia propia que poseen las escalas básicas C y D, las escalas exponenciales que a continuación se detallan son de lo más valioso para el calculista.

Si suponemos que tenemos una expresión exponencial de un número, de la forma $n_2 = n_1^{c_2/c_1}$ tomando logarítmos en ambos miembros la transformamos en $\log n_2 = \frac{c_2}{c_1} \log n_1$ o lo que es igual $\frac{\log n_2}{c_2} = \frac{\log n_1}{c_1}$ si nuevamente se toman logarítmos de esta expresión para eliminar la forma fraccionaria, se obtiene:

$\log \log n_1 - \log c_1 = \log \log n_2 - \log c_2$ o lo que es lo mismo.

(2.-) $\log \log n - \log c = \text{const.}$ (expresión de escala deslizante)

y las ecuaciones de estas escalas serán $u_n = m \log \log n$ $u_c = m \log c$ los límites de la escala serán:

Para: $u_n = 0$

$$m \log \log n = 0$$

$$\log \log n = 0$$

$$\log n = 1$$

$$n = 10$$

Para $u_n = m$

$$m \log \log n = m$$

$$\log \log n = 1$$

$$\log n = 10$$

$$n = 10^{10}$$

Debido a que el rango de variación 10 n 10^{10} es muy amplio para las longitudes consideradas; las reglas de cálculo comerciales vienen calculadas para = 2.71828... (base de logarítmos neperianos) a estas escalas se les denomina log log y se las señala por las mayúsculas LL. El proceso anteriormente descrito solamente varía en que se toman para la primera operación logarítmos naturales (ln) de tal modo que repitiendo la secuencia de operaciones, quedan así:

$$n_2 = n_1^{c_2/c_1} \qquad \text{tomando logarítmos naturales:}$$

$$\frac{\ln n_2}{c_2} = \frac{\ln n_1}{c_1} \qquad \text{tomando logarítmos decadarios:}$$

$$\log \ln n_2 - \log c_2 = \log \ln n_1 - \log c_1$$

(2.-) $\log \ln n - \log c = \text{const.}$

Por lo que la ecuación de la escala se convierte en $u_n = m \log \ln n$, cuyos límites son:

Para $u_n = 0$

$$m \log \ln n = 0$$

$$\log \ln n = 0$$

$$\ln n = 1$$

$$n = 2.71828 = e$$

Para $u_n = m$

$$m \log \ln n = m$$

$$\log \ln n = 1$$

$$\ln n = 10$$

$$n = 2.71828^{10} = 2.2 \times 10^4$$

A esta escala se le llama LL_3 y su fórmula es e^x, las escalas LL_2 y LL_1 son obtenidas para $e^{0.1x}$ y $e^{0.01x}$ (valores límites).

Para $u_n = -m$

$$m \log \ln n = -m$$

$$\log \ln n = -1$$

$$\ln n = 0.1$$

$$n = e^{0.1} = 1.105$$

rango de LL_2 .... $e^{0.1} < n < e$

Para $u_n = -2m$

$$m \log \ln n = -2m$$

$$\log \ln n = -2$$

$$\ln n = 0.01$$

$$n = e^{0.01} = 1.01 \text{ (aproximadamente)}$$

rango de LL_1 ------ $e^{0.01} < n < e^{0.1}$

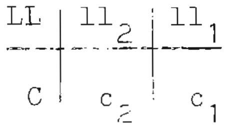
Para efectos constructivos, en la misma forma que se han presentado las relaciones (b),(f),(g) y (h), la ecuación de la escala la puede escribirse $u_n = \log(100 \ln ll)$ donde $\ln ll = \log_e ll$.

Por la ecuación (4) artículo 1, se tiene:

$$\frac{100 \ln ll}{c} = \text{const} \qquad \text{ó también}$$

$$\sqrt[c]{ll} = \text{const.} \quad ó \quad \sqrt[c_1]{ll_1} = \sqrt[c_2]{ll_2} \quad ó \quad ll_2 = ll_1^{\,c_2/c_1}$$

que para la regla de cálculo puede representarse esquemáticamente como:



y por medio de diagrama así:

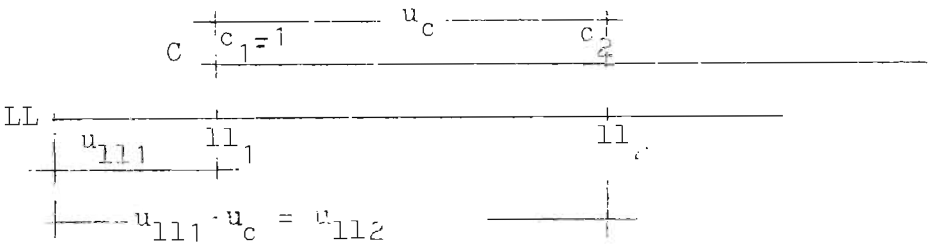
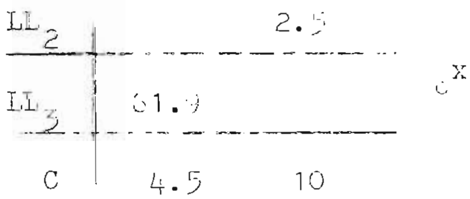


Figura 16

Es decir que para el manejo de la regla, hacemos $c_1 = 1$ ó 10 sobre la escala C y directamente opuesto a ll_1 al efectuar éste movimiento nuestra relación ha quedado convertida en $ll_2 = ll_1^{c_2}$ ó $ll_2 = ll_1^{c_2/10}$. Aquí ha de observarse, con especial atención, que los valores numéricos marcados en las escalas exponenciales son invariables por lo que se refiere a su posición decimal; por tanto el valor 1.14, leido sobre la escala LL2, significa siempre 1.14 y no 11.4 por ejemplo o 114, etc.

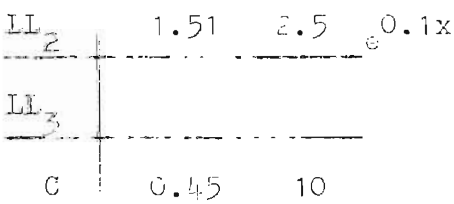
Si queremos determinar $n = 2.5^{4.5}$

esquemáticamente



y para $n = 2.5^{0.45}$

esquemáticamente



Para ubicar la lectura debe recordarse que la potencia de "e" se lee entonces en la escala LL. En esto vale para la escala C el espacio de 1 a 10 en LL_3, el espacio de 0.1 a 1 en LL_2 y el espacio de 0.01 a 0.1 en LL_1.

Algunas reglas, traen las escalas para exponentes negativos llamadas LL_{01}, LL_{03}, estas escalas sirven para valores de 11 0.99 y se construyen usando recíprocos de tal modo que resulte $\left(\frac{1}{ll_2}\right) = \left(\frac{1}{ll_1}\right)^{c_2}$

Las variaciones de estas escalas son:

Para LL_{01} $\quad 0.91 < e < 0.99$

LL_{02} $\quad 0.37 < e < 0.91$

LL_{03} $\quad 0.00005 < e < 0.37$

Se calculan facilmente con estas escalas: potencias y raices de diez, logarítmos decadarios y naturales, potencias y raices de e, potencias y raices de números cualesquiera y logarítmos con base cualquiera.-

k) Relación de D y la escala pitagórica P.

Suponiendo un triángulo rectángulo de hipotenusa unitaria y de catetos "d" y "p" respectivamente, la relación de sus lados viene dada por:

$$p^2 + d^2 = 1$$

$$d = \sqrt{1 - p^2}$$

(1.-) $\log d = \frac{1}{2} \log (1 - p^2)$

Limites: para $u_p = 0$

$$\frac{m}{2} \log (1 - p^2) = 0$$

$$\log (1 - p^2) = 0$$

$$1 - p^2 = 1$$

$$p^2 = 0$$

$$p = 0$$

para $u_p = -m$

$$\frac{m}{2} \log (1 - p^2) = -m$$

$$\log (1 - p^2) = -2$$

$$1 - p^2 = 0.01$$

$$p^2 = 0.99$$

$$p = 0.995$$

La forma usual de representar esta función es ---- $d = \sqrt{1 - (0.1n)^2}$.

La escala es opuesta es decir crece en sentido contrario a D.

Se utiliza generalmente ingresando el valor "p" en la escala D y se lee el valor "d" en la escala P o viceversa. Por ser el valor de la hipotenusa unitario, conocido en cualquiera de las escalas el valor del seno o coseno de un ángulo, en la otra se obtendrá el valor del coseno y seno respectivamente, del mismo ángulo. A menudo los senos de ángulos mayores de 45° se buscan en la escala pitagórica, teniendo presente, por ser escala invertida, que el valor del ángulo que se utiliza es el complementario. Así, para buscar el valor del seno 75° 30 marcamos en la escala D, el seno de $(90^{o} - 75^{o}\ 30')$ = seno $14^{o}\ 30$ y leemos en la escala pitagórica $sen^{-1}\ 75^{o}\ 30' = 0.9682$.-

6) CALCULOS ESPECIALES UTILIZANDO LA REGLA DE CALCULO.

La gran ventaja del uso de la regla de cálculo es la comodidad que nos brinda de poder hacer una serie de cálculos, que hechos en otra forma nos absorberían mucho tiempo.-

Todas las reglas poseen un aditamento corredizo, transparente, llamado cursor, que puede ser simple o de doble ventanilla; este posee un trazo central, delgado, principal, para el ajuste y lectura durante las operaciones. -.-Además lleva en los bordes derecho e izquierdo trazos laterales con marcas especiales o que sirven para la lectura de los valores en las divisiones supletorias que ya no están al alcance del trazo principal.

a) Serie de productos:

Para el manejo de regla de cálculo, debe tratarse de mover la reglilla sólo las veces indis - pensables; con el uso adecuado del cursor.-

Si tenemos una serie de productos, por ejemplo --- $2 \times 3 \times 4 \times 5$. Se procederá de la siguiente manera trabajando con las escalas C, D e I.

ler paso: Coloquese el valor 2 sobre la escala D, frente al valor 3 señalando en la escala I, (no se lee el resultado).

2o Paso: Muevase el cursor y dejese el trazo central de él, sobre el 4 de C (no se lee el resultado)

3er paso: Muévase la reglilla hasta que el 10 de C, se coloque directamente debajo del trazo del cursor y luego des lícese éste, hasta encontrar el 5 de C, el resultado 120 - se lee directamente debajo en D.-

b) Productos y cocientes combinados:

Trabajando con las escalas C y D con ayuda del cursor se pueden efectuar en serie productos y cocientes combinados. Sea por ejemplo, efectuar:

$$\frac{60 \times 40 \times 14}{30 \times 120 \times 20}$$

1er paso: Se coloca el 60 en la escala D frente al 30 de la escala C, con un movimiento de la reglilla.

2o paso: Se lleva el trazo principal del cursor al 40 de la escala C y se corre la reglilla hasta que el 120 de la escala C coincide con el trazo central del cursor que ha quedado fijo.

3er paso: Se corre el cursor hasta el 14 de C, y se corre la reglilla hasta que el 20 de C quede coincidiendo con - el trazo central del cursor. Ahora puede leerse el resultado final que está indicado por el número de la escala D que queda inmediatamente abajo del 1 de C, este valor es 0.466.-

Para encontrar el resultado fácil y rapidamente, bastó hacer tres movimientos de la reglilla, y tres del cursor y se efectuaron cinco operaciones, sin necesidad de leer - los resultados parciales.-

Puede tambien, ocuparse la escala de inversos CI y la escala fija D para efectuar estas operaciones, moviendo en forma alternada la reglilla y el cursor.-

Esta serie de movimientos simplificados contribuyen a aumentar la seguridad en el resultado final.-

c) Tabulación de funciones:

Dependiendo de la posición de la reglilla, con sólo mover el cursor, se pueden tabular algunas funciones simples.-

En la figura 17 se analizan cuatro posiciones diferentes de la reglilla, operando con las escalas A,B,C, y D.-

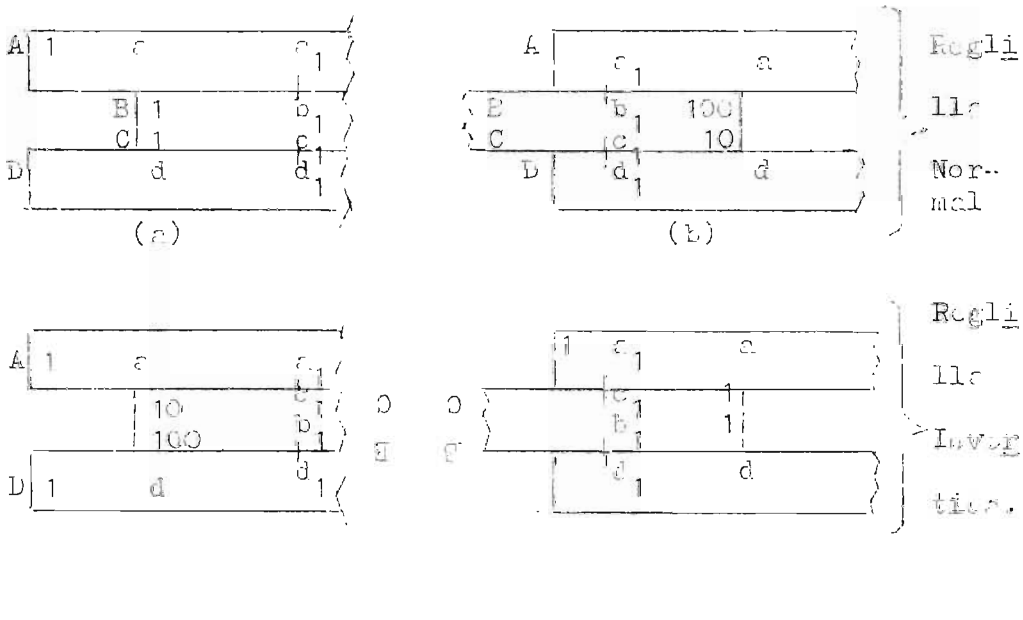


Figura 17

Las siguientes relaciones se establecen:

$$a = d^2 \qquad (5)$$

$$a_1 = d_1^{\,2} \quad y \quad b_1 = c_1^{\,2}$$

Figura 17 (a).

.:

$$\frac{a}{1} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1}{c_1^{\,2}} = \frac{d_1^{\,2}}{b_1}$$

$$\frac{d}{1} = \frac{d_1}{c_1} = \frac{\sqrt{a_1}}{c_1} = \frac{d_1}{\sqrt{b_1}}$$

Figura 17 (b).

de (5):

$$\frac{a}{100} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1}{c_1^{\,2}} = \frac{d_1^{\,2}}{b_1}$$

$$\frac{d}{10} = \frac{d_1}{c_1} = \frac{\sqrt{a_1}}{c_1} = \frac{d_1}{\sqrt{b_1}}$$

Figura 17 (c).

de (5) :

$$100\, a = a_1\, b_1 = a_1\, c_1^{\,2} = b_1\, d_1^{\,2}$$

$$10\, d = c_1\, d_1 = c_1\sqrt{a_1} = d_1\sqrt{b_1}$$

Figura (d).

de (5a):

$$a = a_1\, b_1 = a_1\, c_1^{\,2} = b_1\, d_1^{\,2}$$

$$d = c_1\, d_1 = c_1\sqrt{a_1} = d_1\sqrt{b_1}$$

Posiciones que nos permiten calcular repetidamente valores directos o inversos de: $f(x)$, $f(x^2)$, $f(\sqrt{x})$ y $f(\sqrt{x^2})$.

d) Cálculo de hipotenusas.

Sean "h" "a" y "b" hipotenusa y catetos respectiva - mente de un triángulo rectángulo cuya relación no logarítmica viene dada por:

$$h = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a < b \text{ (conocidos)}$$

Si se multiplica y divide esta fórmula por "a", se obtiene la expresión:

$$h = a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Con el auxilio de las escalas B y D y un movimiento de la reglilla se puede calcular la hipotenusa (h); para esto, se marca el valor "a" sobre la escala D alineado con el 1 ó 10 de B, se mueve el cursor para señalar el valor "b" en D y se hace la lectura correspondiente en B. Esta lectura es el valor igual a $\left(\frac{b}{a}\right)^2$, por lo que se le aumentará una unidad y con el cursor se marcará este nuevo valor sobre la escala B para leer en D el número correspondiente que es el resultado deseado.-

c) Resolución de Triángulos Rectángulos y Oblicuángulos.-

Son conocidas las fórmulas para el cálculo de triángulos rectángulos y oblicuángulos, por lo que las operaciones que se efectúan se suponen conocidas en las anteriores explicaciones. Se utilizan las escalas A, S, ST, T, D. La razón de este inciso es para aclarar el hecho de que se pretende evitar operaciones superfluas, por lo que deberá constatarse la proporcionalidad entre las escalas de los logaritmos de los números y de los logaritmos de los senos y tangentes, es decir que posean el mismo módulo, para obtener continuidad en las operaciones.

f) Resolución de Ecuaciones de 2o-grado.-

Una ecuación se considera resuelta cuando se determina el valor de sus raíces.

La expresión general de la ecuación de 2o grado es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

o dividiendo por (a): $x^2 + px + q = 0$

y dividiendo por (x) y transponiendo términos:

$$x + q/x = - p$$

Las raíces de ésta ecuación se encuentran con el auxilio de la regla de cálculo, trabajando con las escalas D e I, de la siguiente manera: El valor "q" se señala en D coincidiendo con el 1 ó 10 de I, luego se corre el cursor sobre la escala I (en la cual cada uno de sus valores es "x") hasta encontrar sobre D (en la cual cada uno de sus valores es q/x) un valor tal que sumado al correspondiente de I sea igual a (- p).-

g) <u>Resolución de ecuaciones de 3er grado</u>.

La expresión general de la ecuación de 3er grado es

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

y dividiendo por (a) : $x^3 + ax^2 + cx + b = 0$

Con objeto de simplificar la ecuación se elimina un término de la ecuación, ésta se transforma en otra ecuación, cuyas raíces estarán excedidas en cierto valor, que será determinado por un cambio de variable (En Algebra se demuestra que eso es correcto).La forma reducida de la ecuación cúbica es.

$$y^3 + py + q = 0$$

o dividiendo por (y): $y^2 + q/y = -p$

Con esta representación de la fórmula, se encuentra el valor de las raices en la regla de cálculo, trabajando con las escalas A, D e I de la manera siguiente: El valor "q" se señala en la escala D coincidiendo con el 1 ó 10 de la escala I, corriendo el cursor sobre la escala I (en la cual cada uno de sus valores es q/y) se leerán en D los valores correspondientes de "y" y en A los de y^2. Sumando los valores de I y de A, se eligirán aquellos cuya suma sea igual a (-p). La suma de las raices deberá ser igual a cero para la expresión reducida.

7) VALORES DE USO CORRIENTE MARCADOS EN EL CURSOR Y EN LAS ESCALAS DE LA REGLA DE CALCULO.

Generalmente se señala el valor π en las escalas C, D y CI para facilitar el cálculo de valores π d, πr^2 de las fórmulas muy utilizadas de la circunferencia y el círculo.-

Se señala también los valores ρ', ρ'' y $\rho_{''}$, para facilitar los cálculos de transformación de ángulos dados en valores naturales, a grados, minutos y segundos sexagesimales (ρ' y ρ'') o centesimales ($\rho_{''}$) o viceversa.

Por ser:

$$1 \text{ radián} = \frac{180^\circ}{\pi} = 3438' = \rho' \text{ (minutos sexagesimales)}$$
$$= 206265'' = \rho'' \text{ (segundos sexagesimales)}$$
$$= 636620_{''} = \rho_{''} \text{ (segundos centesimales)}$$

Para obtener el valor en radianes de un ángulo, bastará dividir este por ρ de acuerdo a los métodos anteriormente explicados.-

Para el cálculo de áreas de círculos, teniendo como dato el diámetro se señala sobre la escala C el valor constante "c" que proviene de presentar la ecuación del círculo como:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \left[\frac{d}{(2/\sqrt{\pi})}\right]^2$$

donde $$c = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1.128$$

Se encuentra el área señalando el valor del diámetro sobre la escala D frente al valor "c" marcado en la escala C; el resultado que se desea se obtiene leyendo el valor de la escala A correspondiente a 1 de B.

Los fabricantes de las reglas, suelen marcar en ellas otros valores especiales, por lo que cada regla trae sus propias indicaciones para el manejo.-

C A P I T U L O IV

CONSTRUCCION ESCALAR DE GRAFICOS PARA ECUACIONES DE DOS Y TRES VARIABLES.-

1) Escalas Perpendiculares

La interpretación geométrica de una ecuación, exige la construcción de su gráfico correspondiente.-

En Algebra y Geometria Analítica, se estudian las propiedades de funciones, representándolas en un plano, mediante un sistema de ejes perpendiculares, que se llama "Coordenado Rectangular".- El plano que estos ejes definen, para facilitar el trazo de las funciones, se divide en cuadrados iguales por rectas paralelas a los ejes coordenados, con lo cual la localización de los puntos de la función se realiza rapidamente.- Los ejes coordenados Y y X (vertical y horizontal respectivamente) quedan divididos en partes iguales y representan respectivamente funciones escalares u + m x y v= m y, generalmente con módulo "m" igual a 1 cm ó 1 pulg.

Siendo que los ejes coordenados son escalas, estas podrán ser uniformes y no uniformes, según sea la ----

función que representan.-

En el mercado se obtiene papel modulado de tres -- tipos: El papel de módulo 1 cm y con divisiones al milímetro, llamado por esta razón milimetrado o simplemente milimétrico.- b) Papel logarítmico doble o simplemente llamado logarítmico, con dos escalas logarítmicas ortogonales y módulos generalmente de 12.5 y 25 cm. con una escala variando de 1 a 100 y otras de 1 a 1000.- c) Papel semilogarítmico, graduado con una escala uniforme en un eje, y con una logarítmica en el otro.- Es por - tanto una combinación de los dos anteriores.-

La utilización de cada uno de los tipos de papel - coordenado, se explicará en incisos posteriores.-

2) REPRESENTACION GRAFICA DE UNA FUNCION ENTRE DOS VARIABLES. ECUACION CARTESIANA.-

Se acostumbra a representar por las letras "x" y - "y", las ecuaciones correspondientes a las escalas de - los ejes ortogonales, por ejemplo: $y = m\,\varphi(a)$.- Con la letra O se designa la intersección de las perpendiculares y se llama orígen, de tal manera que se podrán referir valores de la función al eje OY y OX.-

Si tenemos una relación $\emptyset\,(a,b) = 0$ entre dos variables "a" y "b"; cada una de éstas puede ser representada por medio de escalas y estas a la vez, pueden colocarse perpendiculares entre sí.-

Constrúyase dos ejes ortogonales OX y OY en ellos - represéntese la escala $x = {}^{m}a\ f(a)$ y también $y = {}^{m}b\ f(b)$ en donde $f(a)$ y $f(b)$ son de "a" y de "b"; sobre los puntos marcados en estas escalas dibújese perpendiculares - a los ejes.- Pares de valores de "a" y "b" satisfarán la ecuación $\emptyset\,(a,b) = 0$ y determinarán puntos de intersección en el plano sobre las correspondientes perpendiculares a los ejes, esto es, un par de valores a_1 y b_1 corresponden al punto de intersección de la perpendicular a OX a través de $a = a_1$ y la perpendicular a OY a través de $b = b_1$.- La serie de puntos que satisfacen la relación de $\phi\ (a,b) = 0$ determinan la curva de la función.- La ecuación rectangular o Cartesiana de esta curva referida a los ejes OX y OY se obtiene resolviendo las ecuaciones de las escalas $x = {}^{m}a\ f(a)$ y ${}^{m}b\ f(b)$, para a y b en términos de "x" y "y", y sustituyendo estos valores en $\phi\ (a,b) = 0$

El objeto de obtener la ecuación Cartesiana, es poder representar la función por medio de una ecuación de primer grado en "x" y "y" transformando la ecuación de la curva en la de una línea recta.-

Es evidente que la naturaleza de la curva representativa de la relación $\phi\ (a,b) = 0$, varía con las ecuaciones de las escalas.- Esta operación de transformar una curva en una recta, mediante un cambio de escalas se llama "anamorfosis".-

Lo anterior se puede resumir en la siguiente forma:

$$(a,b) = 0 \qquad (1)$$

$$x = {}^{m}a\ \ f(a) \qquad (2)$$

$$y = {}^{m}b\ \ f(b) \qquad (3)$$

de (2) y (3) $\quad a = \gamma(x) \qquad (4)$

$$b = \varphi(y) \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (1)

$$\phi\ (\gamma(x), \varphi(y)\ ) = 0 \qquad (6)$$ ecuación Cartesiana de la curva

3) ESCOGITACION DE ESCALAS EJEMPLO ILUSTRATIVO

Con la resolución de un ejemplo, lo relativo a la escogitación de la ecuación de la escala según los conceptos expuesto en los dos incisos anteriores, se mostrará lo claro del proceso.-

Sea la relación $a^{3/2} = b$ la que se representará gráficamente; el rango de variación de "a" estará determinado entre los valores cero y diez y la longitud de las escalas no debe ser mayor de 18 cm.

La solución a este problema gráfico, se presenta por tres alternativas:

a) $(a,b) = b - a^{3/2} = 0$ (1)

Usando:

$$f(a) = a \qquad f(b) = b$$

$$x = m_a \, a \qquad (2)$$

$$y = m_b \, b \qquad (3)$$

cuando $f(a) = 0 \quad f(b) = 0$

$f(A) = 10 \quad f(B) = 31.63$

$$m_a = \frac{L}{f(A)-f(a)} = \frac{15}{10-0} = 1.5 \text{ cm}$$

$$m_b = \frac{L}{f(B)-f(b)} = \frac{15}{31.63-0} = 0.474 \text{ cm} \qquad 0.5$$

$$L_{nb} = \frac{15 \times 0.5}{0.474} = 15.8 \text{ cm}$$

$$x = 1.5\, a \text{ (cm)} \qquad (2)$$

$$y = 0.5\, b \text{ (cm)} \qquad (3)$$

En el Gráfico 3, se encuentra el trazo de las escalas perpendiculares y de la Curva Cartesiana correspondiente:

De (2) y (3) se obtiene:

$$a = \frac{x}{1.5} \qquad (4)$$

$$b = 2\ y \qquad (5)$$

Sustituyendo en (1)

$$2\ y = \left(\frac{x}{1.5}\right)^{3/2} \quad .:$$

$$y = \frac{x^{3/2}}{3.68} = 0.272\ x^{3/2} \qquad (6) \text{ Ecuación - Cartesiana}$$

Para la construcción del gráfico, se tabularon los siguientes valores.

Para Escalas:

a	x = 1.5 a (cm)	b	y = 0.5 b
0	0	0	0
1	1.5	3	1.5
2	3.0	6	3.0
3	4.5	9	4.5

a	x = 1.5 a (cm)	b	y = 0.5 b
4	6.0	12	6.0
5	7.5	15	7.5
6	9.0	18	9.0
7	10.5	21	10.5
8	12.0	24	12.0
9	13.5	27	13.5
10	15.0	30	15.0

Para curva.-

a	$b = a^{3/2}$	x (cm)	$x^{3/2}$	$y = 0.272x^{3/2}$ (cm)
0	0.00	0	0	0.000
1	1.00	1.5	1.84	0.500
2	2.83	3.0	5.20	1.412
3	5.20	4.5	9.50	2.310
4	8.00	6.0	14.70	3.995
5	11.20	7.5	20.50	5.560
6	14.70	9.0	27.00	7.350
7	18.50	10.5	34.00	9.250
8	22.51	12.0	41.50	11.300
9	27.00	13.5	49.20	13.400
10	31.63	15.0	58.00	15.815

La construcción de la curva se puede realizar por - dos medios; el primero, tabulando y ploteando los valores de ϕ (a,b) = 0; y el segundo, tabulando las magnitudes de la - ecuación cartesiana $y = 0.272\ x^{3/2}$ y midiendo sobre los -- ejes OX y OY los resultados obtenidos, en centimetros.-

El gráfico No. 3, permite corroborar la igualdad de estos dos procidimientos en la construcción.- Es aconsejable para no incurrir en error, desarrollar solamente el -- primer procedimiento.

b) $$(a,b) = b - a^{3/2} = 0 \qquad (1)$$

Usando: $f(a) = a^{3/2}$ $\qquad f(b) = b$

$$x = {}^{m}{}_{a}\ a^{3/2} \qquad (2)$$

$$y = {}^{m}{}_{b}\ b \qquad (3)$$

$$0 < a < 10 \text{ --------------- } 0 < b < 31.63$$

$$^{m}{}_{a} = \frac{15}{10^{3/2}-0} = \frac{15}{31.63} = 0.474 \text{ cm} \approx 0.5 \text{ cm}$$

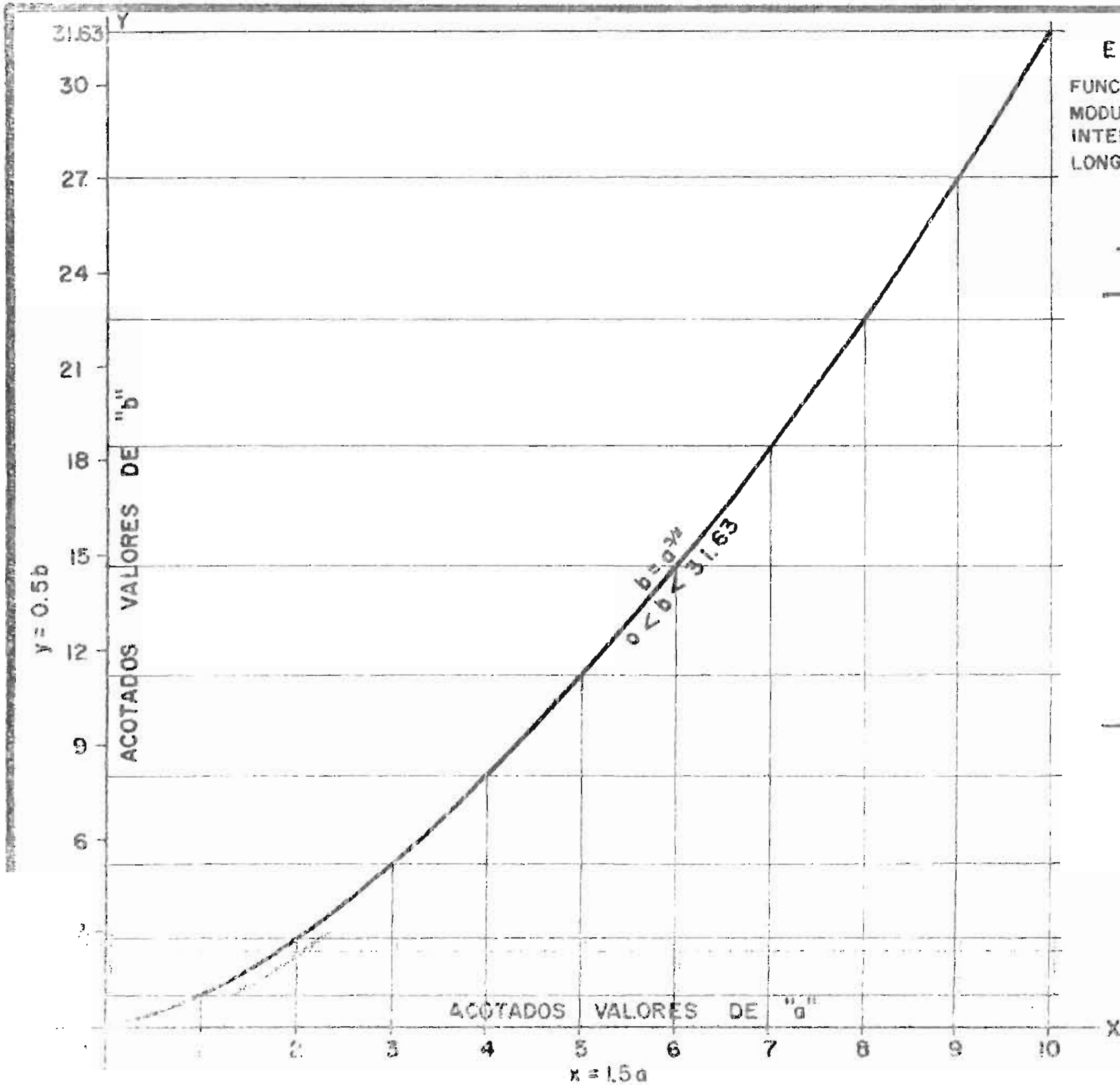


GRAFICO Nº 3

ESCALA – OX –

FUNCION: $x = 1.5a$ cm.

MODULO: $m = 1.5$ cm.

INTERVALO: $0 \leq a \leq 10$

LONGITUD: $l = m\left[f(A) - f(a)\right]$

$= 1.5(10 - 0)$

$= 15$ cm.

TABULACION

a	x = 1.5a
0	0
1	1.5
2	3.0
3	4.5
4	6.0
5	7.5
6	9.0
7	10.5
8	12.0
9	13.5
10	15.0

ESCALA – OY –

FUNCION: $y = 0.5b$ cm.

MODULO: $m = 0.5$ cm.

INTERVALO: $0 \leq b \leq 31.63$

LONGITUD: $l = m\left[f(B) - f(b)\right]$

$= 0.5(31.63 - 0)$

$= 15.815$ cm.

TABULACION

b	y = 0.5b
0	0
3	1.5
6	3.0
9	4.5
12	6.0
15	7.5
18	9.0
21	10.5
24	12.0
27	13.5
30	15.0
31.63	15.8

C U R V A

a)

a	$b = a^{3/2}$
0	0.00
1	1.00
2	2.83
3	5.20
4	8.00
5	11.20
6	14.70
7	18.50
8	22.51
9	27.00
10	31.63

b)

x	$y = 0.272\,x^{3/2}$ (cm)
0	0.000
1.5	0.500
3.0	1.412
4.5	2.310
6.0	3.995
7.5	5.560
9.0	7.350
10.5	9.250
12.0	11.300
13.5	13.400
15.0	15.815

$\therefore\ m_a = m_b = 0.5$ cm.

$$L_{na} = L_{nb} = \frac{15 \times 0.5}{0.474} = 15.81 \text{ cm.}$$

$$x = 0.5\ a^{3/2} \text{ cm} \qquad (2)$$

$$y = 0.5\ b \text{ cm} \qquad (3)$$

$$\therefore\ a^{3/2} = 2\ x \qquad (4)$$

$$b = 2\ y \qquad (5)$$

Sustituyendo en (1)

$$y = \frac{2}{2}\ x = x$$ (6) Ecuación Cartesiana.-

La ecuación (6) es la ecuación de una recta a --- 45° con los ejes coordenados, partiendo del orígen.- El - lugar geométrico de la función es mostrado en el gráfico No. 4, para el cual se han tabulado los siguientes valores:

Escalas y Curvas

a	$a^{3/2}$	$x = 0.5\ a^{3/2}$ (cm)	b	$y = 0.5\ b$
0	0.00	0.000	0	0.00
1	1.00	0.500	3	1.50
2	2.83	1.415	6	3.00
3	5.20	2.600	9	4.50
4	8.00	4.000	12	6.00
5	11.20	5.600	15	7.50
6	14.70	7.350	18	9.00
7	18.50	9.250	21	10.50
8	22.51	11.255	24	12.00
9	27.00	13.500	27	13.50
10	31.63	15.815	30	15.00
			31.63	15.81

Curva:

Se tomará la representación de valores tabulada en el inciso (a), o bien valores en centímetros de la ecuación Cartesiana y = x variando entre $0 < x < 15.815$ (ver Gráfico No. 4).-

c) Dentro de éste Capítulo, el procedimiento que a continuación se detalla reviste especial importancia por ser el más útil y aplicado; las ventajas de su uso son claras y se explicarán después de la resolución del -- problema.-

$$\phi\ (a,b) = b - a^{3/2} = 0$$

$$b = a^{3/2}$$

Tomando logarítmos en ambos miembros de la ecuación:

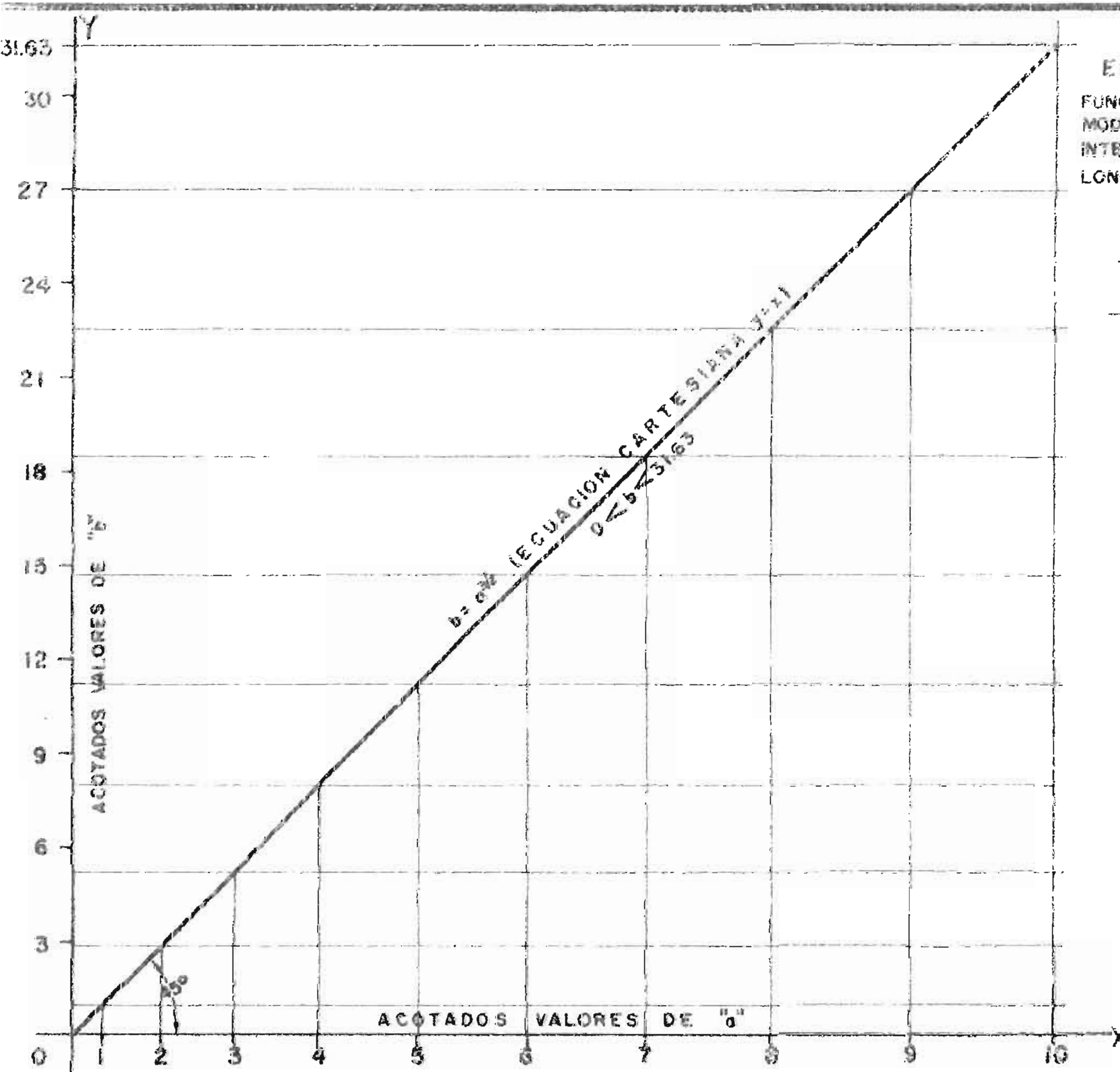
$$\log b = 3/2 \log a \qquad (1)$$

Usando $f(a) = \log a \qquad f(b) = \log b$

$$x = m_a \log a \qquad (2)$$

$$y = m_b \log b \qquad (3)$$

Por ser el $\log 0 = -\infty$, se considerará la función variando entre $1 < a < 10$, sin embargo y como se verá - en la solución se podrán aproximar a cero los valores de - "a" tanto como se desee; basta recordar que las mantisas - de los logarítmos comúnes de los números constituidos por las mismas cifras y colocadas en igual orden son iguales.- Evidentemente, si un número se multiplica o divide por una potencia exacta de diez, dá lugar así, a un nuevo número - cuyas cifras quedan colocadas en igual orden, las manti-- sas de sus logarítmos son iguales.- En el caso particular que se trata, se podrá obtener valores de "a" variando -- entre 10 y 100 o entre 0.1 y 1, por ejemplo:



ESCALA – OX –

FUNCION: $x = 0.5a^{3/2}$ cm.
MODULO: $m = 0.5$ cm.
INTERVALO: $0 < a < 10$
LONGITUD: $l = m[f(A) - f(a)]$
$= 0.5(10^{3/2} - 0)$
$= 15.81$ cm.

TABULACION

a	x = 0.5a
0	0.000
1	0.500
2	1.415
3	2.600
4	4.000
5	5.600
6	7.350
7	9.250
8	11.255
9	13.500
10	15.815

ESCALA – OY –

FUNCION: $y = 0.5b$ cm.
MODULO: $m = 0.5$ cm.
INTERVALO: $0 < b < 31.63$
LONGITUD: $l = m[f(B) - f(b)]$
$= 0.5(31.63 - 0)$
$= 13.81$ cm.

TABULACION

b	y = 0.5b
0	0.0
3	1.5
6	3.0
9	4.5
12	6.0
15	7.5
18	9.0
21	10.5
24	12.0
27	13.5
30	15.0
31.63	15.8

C U R V A

a	$b = a^{3/2}$
0	0.00
1	1.00
2	2.83
3	5.20
4	8.00
5	11.20
6	14.70
7	18.50
8	22.51
9	27.00
10	31.63

Variaciones:

$$a = 1$$
$$b = 31.63$$

Se tomará $L_a = L_b = 12.5$ cm.

$\therefore\ m_a = m_b = 12.5$

$$x = 12.5 \log a \qquad (2)$$
$$y = 12.5 \log b \qquad (3)$$

De (2) y (3).

$$\log a = \frac{x}{12.5} \qquad (4)$$
$$\log b = \frac{y}{12.5} \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (1)

$$\frac{y}{12.5} = \frac{3}{2} \; \frac{x}{12.5}$$

$$y = \frac{3}{2} x \qquad (6) \text{ Ecuación Cartesiana}$$

Tabulación de valores

Escalas.

a ó b	log (a ó b)	x = y = 12.5 log (a ó b) cm
1	0.00000	0.00
2	0.30103	3.76
3	0.47712	5.96
4	0.60206	7.50
5	0.69897	8.74
6	0.77815	9.73
7	0.84510	10.58
8	0.90309	11.30
9	0.95424	11.91
10	1.00000	12.50

Gráfica.

En el gráfico No. 5, se ha presentado la solución logarítmica de $b = a^{3/2} = 0$.-

Si se analiza, la ecuación Cartesiana $y = 3/2\ x$, se verá la similitud con la ecuación de la línea recta $y = m\ x + b$ (en donde "m" es la pendiente de la recta y "b" es el intercepto con el eje OY;) en este caso el valor del intercepto "b" es igual a cero y la pendiente es (el coeficiente de x) ----- igual a 3/2, en esta forma es sumamente sencillo trazar la -- gráfica.-

Se ha dibujado sobre los ejes OX y OY, del Gráfico -- No. 5, las escalas logarítmicas $x = 12.5 \log a$ y $y = 12.5$ - $\log b$ en una extensión de 12.5 cm., para valores de a y b - variando de 1 a 10.-

A partir del punto ($a = 1$, $b = 1$) se ha dibujado -- una recta con una pendiente = 3/2; esta recta corta la perpendicular correspondiente al punto $b = 10$ sobre la perpendicular levantada en $a = 4.65$, es decir señala el punto --- ($a = 4.65$, $b = 10$).- Con esto se cubrió el límite del Gráfico para valores de b, sin embargo no hay necesidad de -- prolongar el eje OY (y esto es una gran ventaja) para disponer variaciones de b entre 10 y 100; se recordará que una escala logarítmica cubre todas las potencias de diez y bastará recorrer a la izquierda o a la derecha el punto deci-- mal para obtener el número dentro de la magnitud deseada, - por lo que en este caso se procede a bajar una perpendicular del punto ($a = 4.65$, $b = 10$) sobre el eje OX ($a = 4.65$, $b=1$) y a travéz de este punto de intersección se pasa una paralela a la recta de pendiente 3/2, esta nueva recta cortará al eje OY, (que ahora representará valores de "b" comprendidos entre 10 y 100) en el punto ($a = 10$, $b = 31.63$).- Es obvio que el campo que se ha cubierto no es completo para los valores de "b" por lo que se procede como en el caso anterior a proyectar el nuevo punto sobre el eje OY que pasa por el orígen y se traza una nueva recta paralela que cortará el eje X de la parte superior en el punto --- ----- (a = 22, b = 100), este punto es proyectado al eje OX y se traza una recta paralela de pend = 3/2 que cortará - el vértice superior del gráfico en el punto --------- (a = 100, b = 1000), desde el cual no se pueden hacer - nuevas proyecciones, por coincidir éstas con los puntos iniciales de las rectas ya trazadas.- Las cuatro rectas dibujadas, se han denominado en el gráfico R, S, T y U y se han marcado sus respectivos campos, de la siguiente manera:

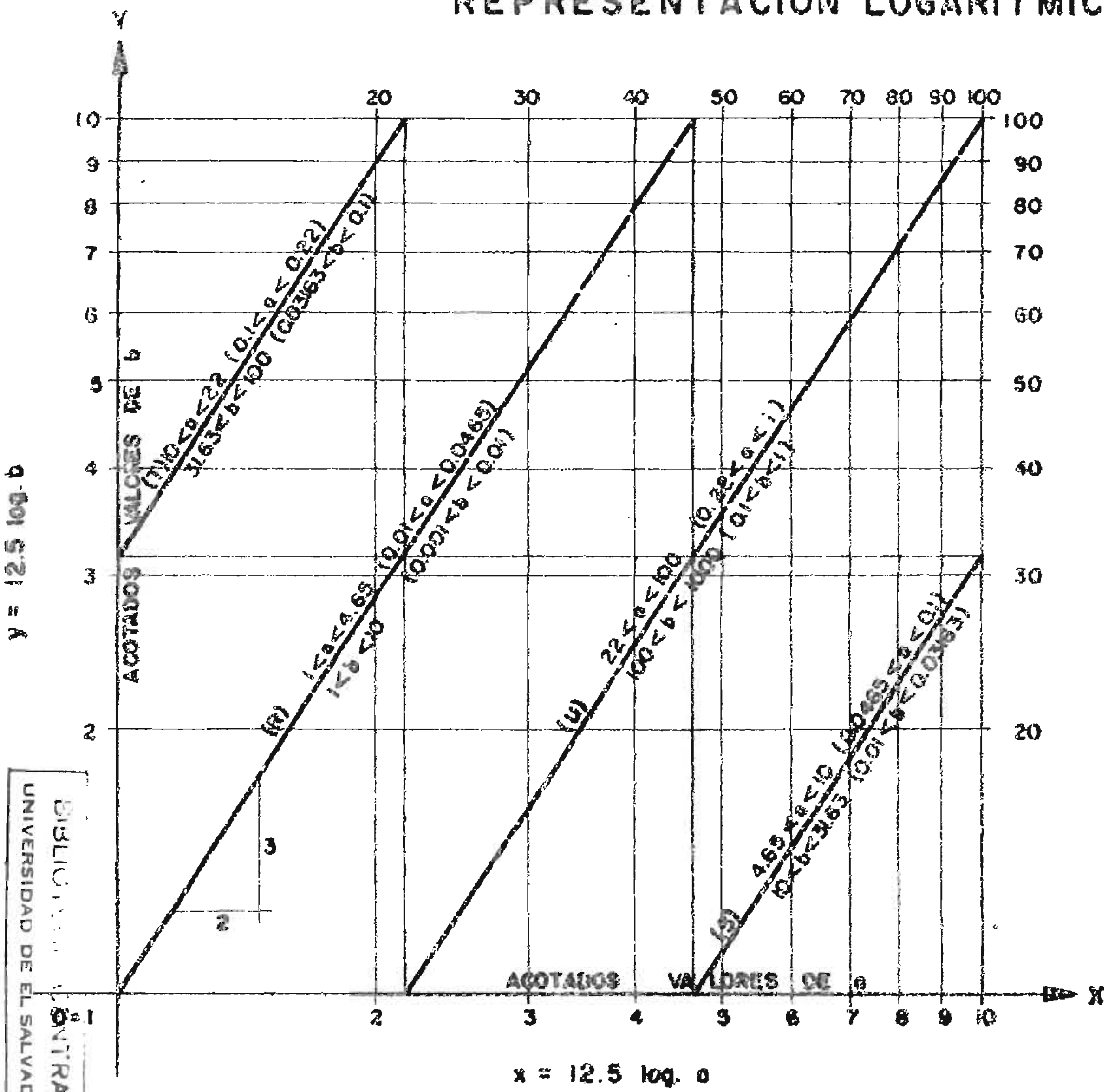
<u>Rectas</u>

R: $1 < a < 4.65$ ----------- $1 < b < 10$
S: $4.65 < a < 10$ ----------- $10 < b < 31.63$
T: $10 < a < 22$ -----------$31.63 < b < 100$
U: $22 < a < 100$ -----------$100 < b < 100$

Ahora bien y como se dijo al principio de este inciso, las escalas logarítmicas permiten obtener campo de variación menores o mayores que los inicialmente supuestos.- Por variar "a" de 1 a 100 y "b" de 1 a 1000, los - coeficientes de conversión son sus respectivos recíprocos o sus respectivos múltiplos, por ejemplo, las rectas anteriores representan también estos valores que se han -- marcado en el gráfico:

R: $0.01 < a < 0.0465$ ------- $0.001 < b < 0.01$
S: $0.0465 < a < 0.1$ ------- $001 < b < 0.03163$
T: $0.1 < a < 0.22$ ------- $0.03163 < b < 0.1$
U: $0.22 < a < 1$ ---------- $0.1 < b < 1$

REPRESENTACION LOGARITMICA DE $b - a^{3/2} = 0$



FUNCIONES : $x = 12.5 \log. a$ cm.
$y = 12.5 \log. b$ cm.

MODULOS : $m = m = 12.5$ cm.

INTERVALO : $1 < a$ ó $b < 10$

LONGITUD : $l = 12.5(\log. 10 - \log. 1) = 12.5$ cm.

TABULACION

a ó b	x=y=12.5 log.(a ó b) cm.
1	0.00
2	3.76
3	5.96
4	7.50
5	8.74
6	9.73
7	10.56
8	11.30
9	11.91
10	12.50

ECUACION CARTESIANA : $y = 3/2\, x$

RECTA COMPEND. = $3/2$

INTERSEPTO = 0

GRAFICO Nº 5

Otro medio de obtener o efectuar el gráfico consiste en tabular la ecuación y al tener sus valores, teniendo en cuenta que en los ejes OX y OY se han tabulado los valores de "a" y "b".-

Las ventajas de este último tipo de efectuar la gráfica son:

Rapidez en el trazo

Mayor exactitud en la definición de puntos

Amplitud del campo de variación

4) FUNCIONES POTENCIALES. FUNCIONES EXPONENCIALES. USO DEL PAPEL LOGARITMICO Y SEMILOGARITMICO.-

Funciones Potenciales

Llámase función potencial a toda relación del tipo $b^p = na^q$ en donde p, q y n son constantes.-

Este tipo de ecuaciones justifica el uso del papel coordenado logarítmico al representar geometricamente la función de acuerdo al siguiente desarrollo:

$$b^p = na^q \qquad (1)$$

Tomando logarítmos: $p \log b = \log n + q \log a$ (1)

si $m_b = m_a = m$

se tiene

$$x = m \log a \qquad (2)$$

$$y = m \log b \qquad (3)$$

$\therefore$

$$\frac{x}{m} = \log a \qquad (4)$$

$$\frac{y}{m} = \log b \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (1)

$$\frac{p\ y}{m} = \frac{q\ x}{m} + \log n$$

$$y = \frac{q}{p}\ x + \frac{m}{p} \log n \qquad (6) \text{ Ecuacion Cartesian}$$

Esta última expresión (6) es la ecuación de una recta en donde q/p es la pendiente y $\frac{m}{p}$ log n es el valor de la ordenada, en el eje "Y".- Al analizar la ecuación (1) expresada logarítmicamente, se evidencia la necesidad de hacer logarítmicas las escalas perpendiculares OY - OX - para obtener la expresión de una línea recta dada en la Ecuación Cartesiana (6).- Esta ecuación podrá generalizarse más si se hace $m_a = m_b$, m_b, expresándose así:

$$Y = \frac{q}{p}\ \frac{m_b\ x}{m_a} + \frac{m_b}{p} \log n \qquad (6)$$

Funciones Exponenciales.- Cuando una de las variables aparece como un exponente en una relación del tipo ---- $b = p\ q^{na}$, en donde p, q y n son constantes, se tiene - una función exponencial.- En este tipo de ecuaciones se justifica el uso del papel coordenado semilogarítmico para representar geometricamente la función:

Se efectúa el desarrollo siguiente:

$$b = p\ q^{na} \qquad (1)$$

Tomando logarítmos: $\log b = na \log q + \log p$ (1)

Si se hace:

$$x = m_a\ a \qquad (2)$$

$$y = m_b \log b \qquad (3)$$

$$\frac{x}{m_a} = a \qquad (4)$$

$$\frac{y}{m_b} = \log b \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (1)

$$\frac{y}{m_b} = \frac{n\,x}{m_a} \log q + \log p$$

se obtiene $y = \left(\frac{m_b}{m_a} n \log q\right) x + m_b \log p$ (6) Ecuación Cartesiana

Esta ecuación (6) es la ecuación de una recta en -- recta en donde $\left(\frac{m_b}{m_a} n \log q\right)$ es la pendiente y (m_b log p) es el valor del intercepto en OY.- La ecuación Cartesiana fué obtenida al hacer una escala uniforme y la -- otra logarítmica, dando por resultado un gráfico semilogarítmico.- La solución de problema, en estos dos casos señalados se efectúa siguiendo el procedimiento mostrado en el ejemplo ilustrativo.-

5) REPRESENTACION DE UNA RELACION ENTRE TRES VARIABLES UTILIZANDO ESCALAS PERPENDICULARES.-

El método utilizado para representar una relación de tres variables ϕ (a, b, w) = 0 es una generalización del método descrito en el artículo 2 de este Capítulo.- Consiste en representar dos de las variables sobre sendas escalas perpendiculares.- Por ejemplo $x_a = m_a$ f (a) y $y = m_b$ f(b); a la otra variable (w) se le asigna un valor cualquiera($w = w_1$) tal que ϕ (a, b, w_1) = 0, en esta condición una ecuación de dos variables "a" y - "b", puede ser representada, por el método de escala -- perpendiculares, como una curva; esta curva será para - el valor asignado w_1 y como tal se marcará en el gráfico.- La representación se completa asignando valores -- sucesivos a w (w_1, w_2, w_3, w_4, ... w_n) con los cuales se obtendrá una serie de curvas representativas cada - una marcada con su valor correspondiente de w,. Cual-- quiera de las variables puede ser representada por una serie de cuervas.-

En la representación de tres variables también se persigue representar la curva por medio de líneas - rectas, efectuando la anamorfosis de la ecuación ori-- ginal.-

6) ESCOGITACION DE ESCALAS. EJEMPLO ILUSTRATIVO

Un ejemplo típico para explicar el procedimiento que se debe seguir en la construcción de gráficos de -- tres variables es el dado por la relación ab = w.- Con este ejemplo se ilustran tres soluciones a saber:

a)

$$a \; b = w \qquad (1)$$

$$x = m_a \; a \qquad (2)$$

$$y = m_b \; b \qquad (3)$$

Ecuaciones de Escalas

Por comodidad se hace $m_a = m_b = m$ y $L_a = L_b = L = 8$ cm de (2) y (3)

$$a = \frac{x}{m_a} = \frac{x}{m} \qquad (4)$$

$$b = \frac{y}{m_b} = \frac{y}{m} \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (1)

$$x \; y = m^2 \omega \qquad (6)$$

Rango $0 < a$ ó $b < 10$ -------- $0 < w < 100$

$$m = \frac{L}{f(A) - f(a)} = \frac{8}{10 - 0} = 0.8 \text{ cm}$$

$$x = 0.8 \; a \quad \therefore \quad a = \frac{x}{0.8}$$

$$y = 0.8 \; b \quad \therefore \quad b = \frac{y}{0.8}$$

Se construirá el gráfico No. 6A, para valores de ----- w = 1, 5, 10, 30 y 70.-

Se tabulan los siguientes valores.

w = 1;	x y = 0.64	w = 5;	xy = 3.20	w = 10;	xy = 6.40
x	$y = \frac{0.64}{x}$	x	$y = \frac{3.20}{x}$	x	$y = \frac{6.40}{x}$
0.2	3.2	0.4	8	0.8	8
0.4	1.6	0.5	6.4	1	6.4
0.64	1.0	1	3.2	2	3.2
0.8	0.8	2	1.6	4	1.6
1	0.64	4	0.8	8	0.8
2	0.32	5	0.64	10	0.64

w = 30;	x y = 19.20	w = 70 ;	x y = 44.80
x	$y = \frac{19.20}{x}$	x	$y = \frac{44.80}{x}$
2.5	7.68	6	7.46
3	6.40	6.5	6.88
4	4.80	7	6.40
5	3.84	7.5	5.96
6	3.20	8	5.60
8	2.40	5.5	8.15

En el gráfico No. 6A, se ven las curvas correspondientes.- Este sistema de representación no es aconsejable por la dificultad que presenta el trazo de las curvas, lo que acarrea inexactitud en las lecturas.

b) $ab = w$ (1)

Rango: $0 < a$ ó $b < 10$ --- ----- $0 < w < 100$

Se escogerán como escalas ortogonales $L_a = L_w = 10$ cm

REPRESENTACION DE $ab = w$
$w = (1, 5, 10, 30$ y $70)$

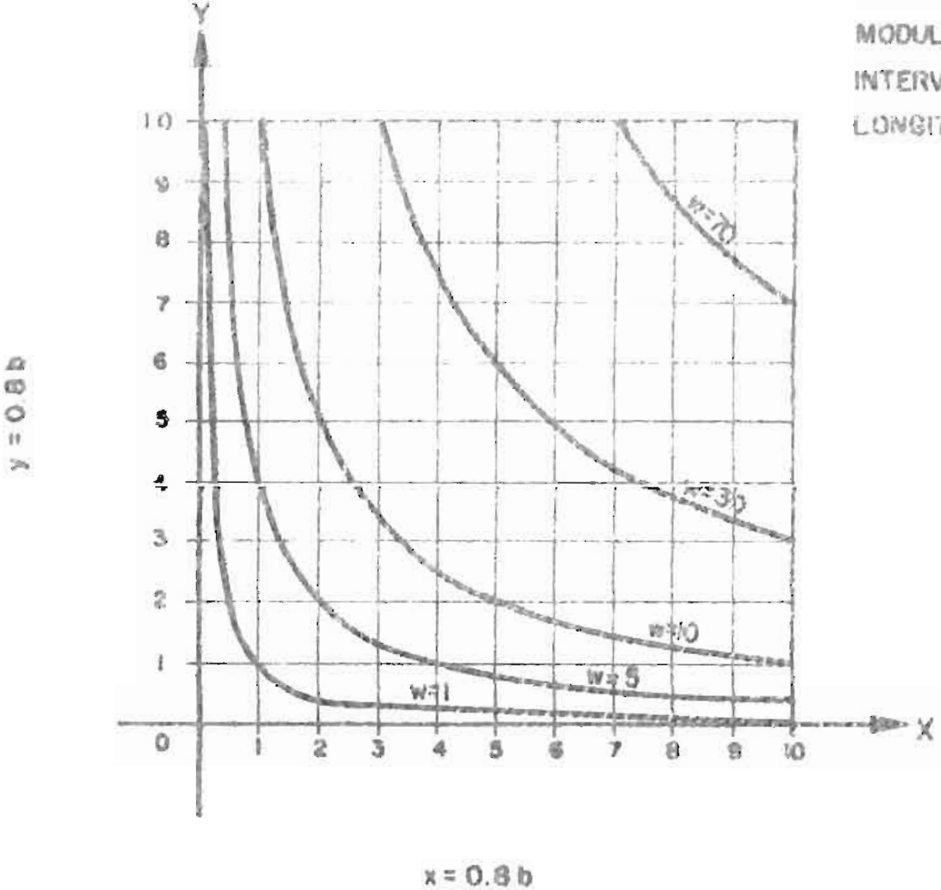
FUNCION : $x = 0.8\,a$

$y = 0.8\,b$

MODULOS : $m_a = m_b = 0.8$ cm.

INTERVALO . $0 < a$ ó $b < 10$

LONGITUD : $l = 0.8\,(10-0) = 8$ cm



TABULACION

a ó b	x = y = 0.8(a ó b)
0	0.0
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2
10	8.0

FUNCION $xy = 0.64\,w$
$w = 1, 10, 30$ y 70

TABULACION TIPO
PARA $w = 5 \longrightarrow xy = 3.20$

x	y = 3.20/x
0.4	8.00
0.5	6.40
1.0	3.20
2.0	1.60
4.0	0.80
5.0	0.64
6.0	0.53
7.0	0.46
8.0	0.40

GRAFICO Nº 6-A

Por tanto:

$$m_a = \frac{L}{f(A) - f(a)} = \frac{10}{10 - 0} = 1 \text{ cm}$$

$$m_w = \frac{10}{f(W) - f(w)} = \frac{10}{100 - 0} = 0.1 \text{ cm}$$

$$x = m_a\, a = a \qquad (2)$$

$$y = m_w\, w = 0.1\, w \qquad (3)$$

$$a = x \qquad (4)$$

$$w = \frac{y}{0.1} = 10\, y \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (1)

$$y = \frac{b}{10}\, x \qquad (6)$$

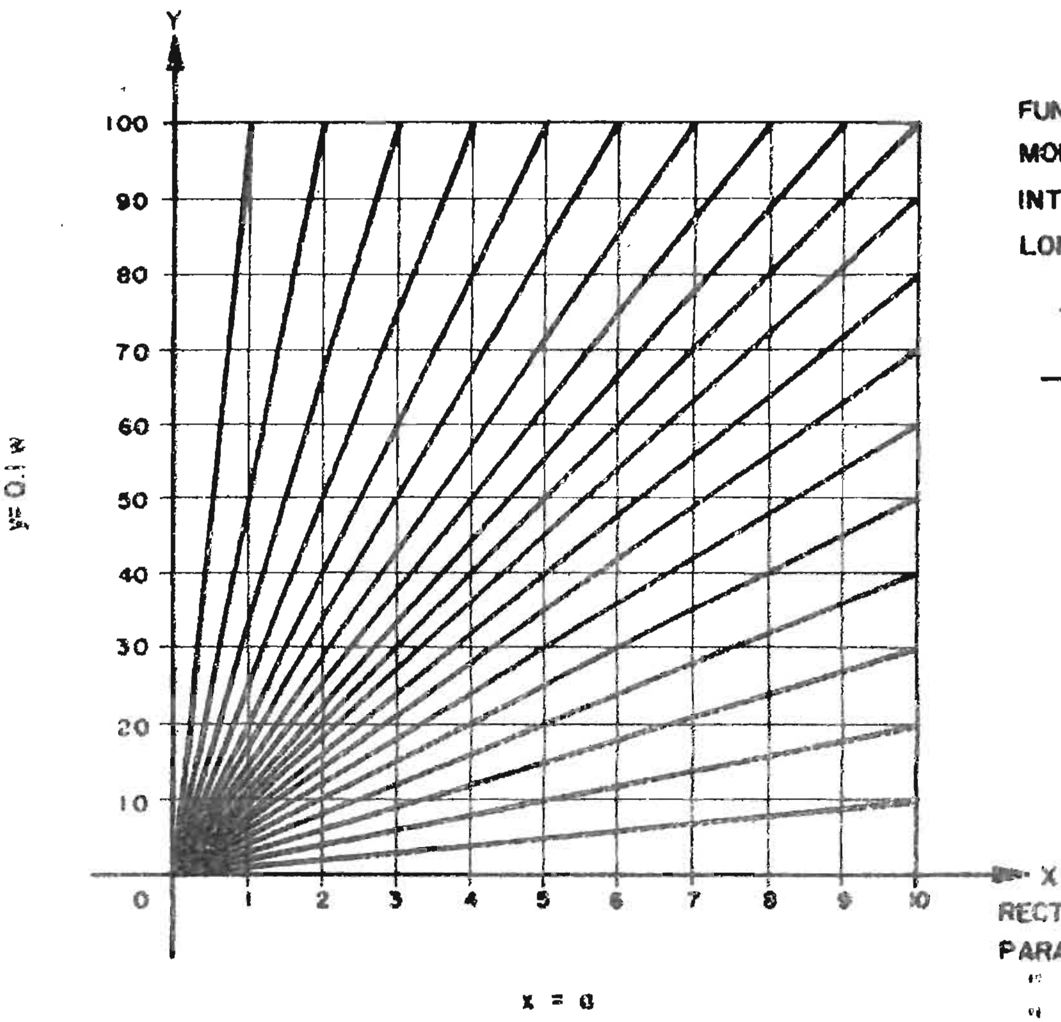
Esta ecuación representa una recta de pendiente igual a b/10.- Conforme "b" vaya tomando valores diferentes, la pendiente se irá modificando, convirtiéndose el gráfico en un haz de rectas radiales.- .- La construcción de este ábaco es sencilla aunque presenta el inconveniente de que el macizo de rectas converge en un punto y además que éstas cortan a las líneas guías horizontales en ángulos muy pequeños defectos que corresponden inexactitudes en las lecturas.

En el gráfico No. 6B, se ha presentado esta solución: Se han dado valores a "b", por ejemplo b = (1,2,5, 10) convirtiendo la ecuación (6) en y = (0.1 x, 0.2 x, 0.5 x, -- x etc.).-

Se muestra también las tabulaciones requeridas para las escalas perpendiculares.-

c) Esta solución implica escoger escalas logarítmicas.- Como sucede con las relaciones de dos variables,

REPRESENTACION DE $ab = w$



FUNCION : $x = a$

MODULO : $m_a = 1$ cm.

INTERVALO : $0 < a < 10$

LONGITUD : $l = 10$ cm.

TABULACION

a	x = a
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10

FUNCION : $y = 0.1\,w$

MODULO : $m_w = 0.1$

INTERVALO : $0 < w < 100$

LONGITUD : $l = 10$ cm.

TABULACION

w	y = 0.1 w
0	0
10	1
20	2
30	3
40	4
50	5
60	6
70	7
80	8
90	9
100	10

RECTAS — $y = b/10\ x$

PARA $b = 1$ $y = 0.1\,x$ PENDIENTE = 0.1

" $b = 2$ $y = 0.2\,x$ " = 0.2

" $b = 3$ $y = 0.3\,x$ " = 0.3

. . . .

. . . .

GRAFICO Nº 6-B

este método es generalmente el más adecuado para repre-- sentar una función de tres variables.-

$$ab = w \qquad (1)$$

Tomando logarítmos $\log a + \log b = \log w \quad (1)$

Rango $1 < a$ ó $b < 10$ --------- $1 < w < 100$

$$m_a = m_b = m = 12.5 \text{ cm}$$

$$x = m \log a = 12.5 \log a \quad (2)$$

$$y = m \log b = 12.5 \log b \quad (3)$$

$$L_a = L_b = L = 12.5 \text{ cm}$$

$$\log a = \frac{x}{12.5} \qquad (4)$$

$$\log b = \frac{y}{12.5} \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (1)

$$x + y = 12.5 \log w$$

$$.\!: \quad y = - x + 12.5 \log w \qquad (6)$$

La ecuación (6), representará una familia de rectas, con intersecto igual a $12.5 \log w$ y con pendiente igual a (- 1), (ángulo de 135° con parte postiva del eje X).-

La construcción de estas rectas es sumamente sencilla; bastará dar valores a w para obtener los valores - del intersecto, por ejemplo:

Si $w = 1$ ------------ $y = - x$

Si $w = 2$ ------------ $y = - x + 12.5 \log 2$

En el gráfico No.7, se ha representado la solución logarítmica de

$$ab = w \text{ (valores de } w = 1, 2, 3 \text{ ------, } 100)$$

En las tres soluciones mostradas en este artículo, cada uno de éstos ábacos puede funcionar como una tabla de multiplicación y división: en efecto dado dos valores sobre $x = a_1$ e $y = b_1$, su producto esta dado por la cota de la línea recta o curva que pasa por el punto de -- coordenadas (a_1, b_1).- El cociente se determina procediendo a la inversa.-

Es conveniente recordar que en las tabulaciones para "x" y "y" que se han practicado, los valores que se obtienen están dados en centimetros.-

7) DIAGRAMAS DE TRES EJES, PARA TRES VARIABLES

Se describirán en este artículo, dos métodos para representar graficamente mediante el uso de tres ejes las variaciones de a, b, w relacionadas por una ecuación del tipo $f(a) + F(b) = \phi(w)$.-

a) Diagrama de tres ejes, dos ortogonales y un bisector

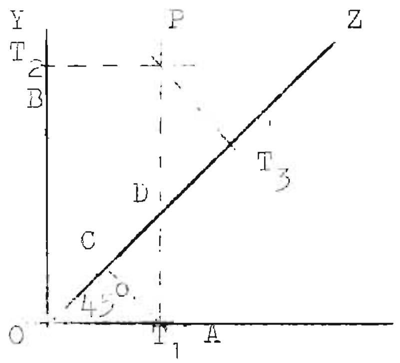
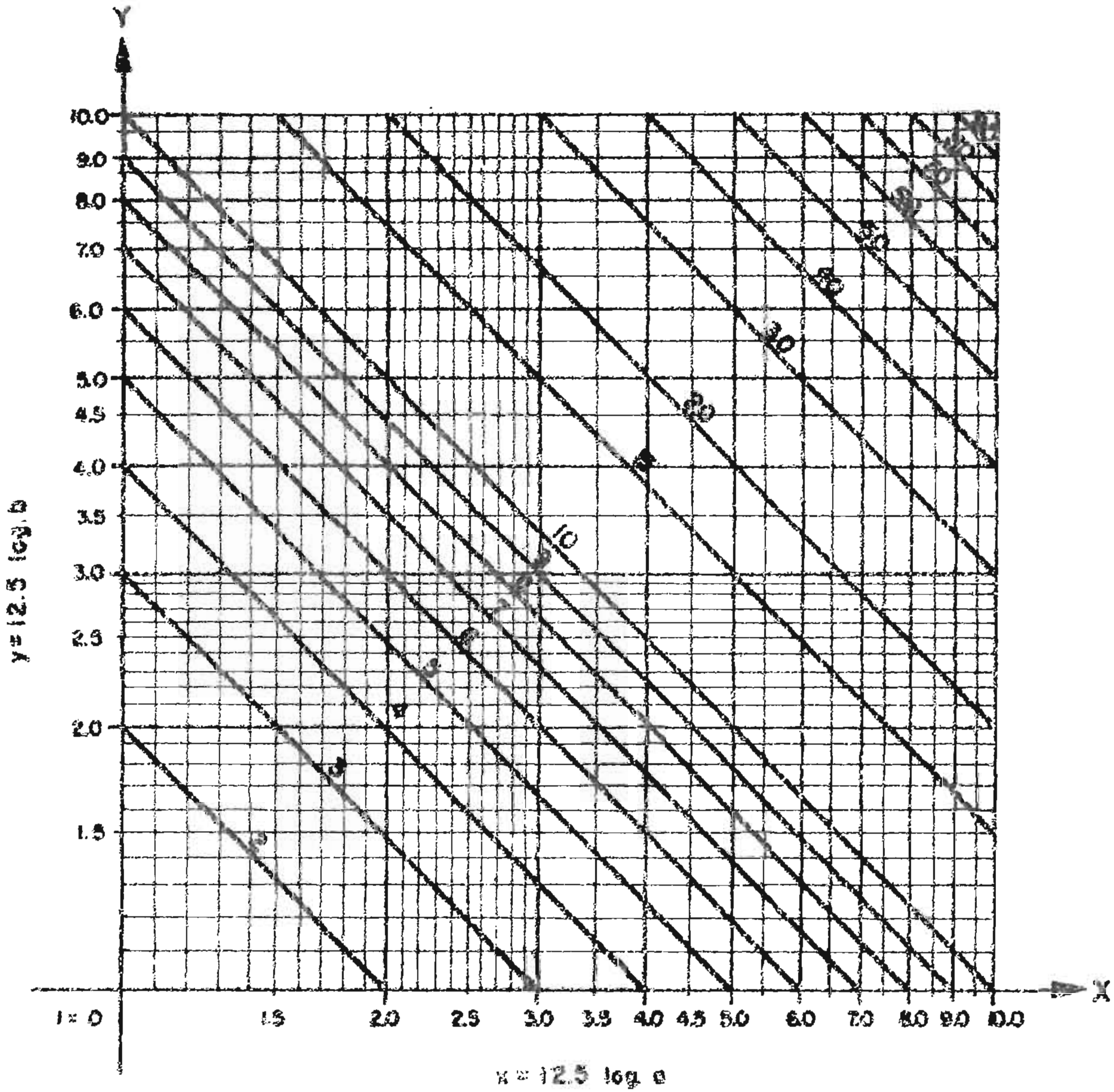


Figura 18



FUNCIONES : $x = y = 12.5 \log(a \text{ ó } b)$

MODULO : $m = 12.5$ cm.

INTERVALO : $0 < a \text{ ó } b < 10$

LONGITUD : $l = 12.5$ cm.

TABULACION

a ó b	x = y = 12.5 log(a ó b) cm.
1	0.00
2	3.76
3	5.96
4	7.50
5	8.74
6	9.73
7	10.56
8	11.30
9	11.91
10	12.50

RECTAS : $y = -x + 12.5 \log. w$

PARA $w = 1$ $y = -x$

$w = 2$ $y = -x + 12.5 \log 2$

. . . .

. . . .

. . . .

etc.-

GRAFICO Nº 7

Se ha construido en la figura 18, dos ejes ortogonales - OX y OY y un eje bisector OZ entre los dos primeros.- Desde un punto arbitrario P en el plano se han trazado líneas índices PT_1, PT_2, PT_3 perpendiculares a cada uno de los ejes OX, OY, OZ las cuales los intersectan en los puntos A, B, W respectivamente.- La línea PT_1 corta al eje OZ en D, y se ha dibujado AC perpendicular a O D.-

Con ésta construcción se establecen las siguientes relaciones:

$$OW = OC + (CD + DW)$$

$$OC = OA \cos 45^\circ$$

$$CD + DW = (AD + DP) \cos 45^\circ = OB \cos 45^\circ$$

$$OW = (OA + OB) \cos 45^\circ = \frac{OA + OB}{\sqrt{2}} \qquad (7)$$

Si se hace

$$x = OA = m \quad f(a)$$

$$y = OB = m \quad F(b)$$

$$z = OW = m' \; \phi \; (w)$$

entonces sustituyendo estos valores en (7), se tendrá:

$$m' \; \phi \; (w) = \frac{m}{\sqrt{2}} \; (f\ (a) + F\ (b)\ )$$

pero $f\ (a) + F(b) = \phi\ (w)$

por tanto: $m' = \dfrac{m}{\sqrt{2}}$ (8)

De lo que se concluye que si en el eje bisector - se dibuja una escala $z = \frac{m}{\sqrt{2}} \phi\ (w)$, cualquier grupo de - tres índices que provengan de un punto en el plano, intersectarán a los ejes respectivos, en puntos A,B,W que satisfacen a $f\ (a) + F\ (b) = \phi\ (w)$

b) <u>Diagrama de tres ejes, dos ejes de 120^o y un bisector</u>

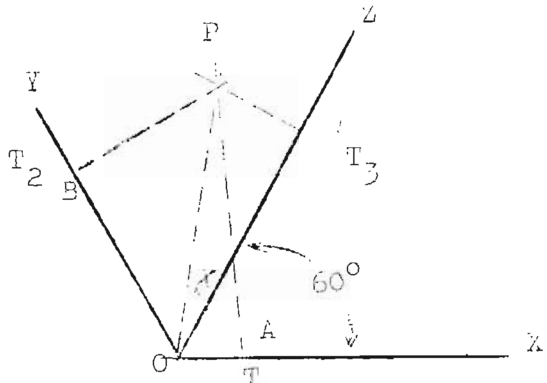


Figura 19

Mediante un proceso similar al anterior, en la - figura 19, se establecen las siguientes relaciones ti- gonométricas.-

$$OW = OP \cos \alpha$$

$$OA = OP \cos (60^o + \alpha) = OP (\cos 60^o \cos\alpha - \operatorname{sen} 60^o \operatorname{sen}\alpha)$$
$$OB = OP \cos (60^o - \alpha) = OP (\cos 60^o \cos\alpha + \operatorname{sen} 60^o \operatorname{sen}\alpha)$$
$$\therefore OA + OB = 2\ OP \cos 60^o \cos\alpha = OP \cos\alpha = OW \quad (9)$$

Las escalas se construirán con el mismo módulo

$$\left.\begin{aligned} OA &= m\ f(a) \\ OB &= m\ F(b) \\ OW &= m\ \emptyset\ (w) \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Sustituyendo (10) en (9)

$$f\ (a) + F\ (b) = \emptyset\ (w)$$

De lo que se concluye que si se trazan las ecua ciones (2) en sus ejes respectivos, cualquier grupo de tres índices que provengan de un punto en el plano, in- tersectarán a los respectivos ejes en puntos A,B,W que satisfacen a $f(a) + F(b) = \emptyset\ (w)$.

Los dos tipos de gráficos descritos, tienen el inconveniente de tener un cam o muy limitado para escoger los módulos, pues no se puede mantener un control definido sobre las longitudes de las escalas.-

Otro problema que se presenta es el de la lectura con tres índices, para lo cual se recomienda dibujarlos sobre papel transparente; el cual, a su vez, se colocará sobre el diagrama para efectuar las lecturas.-

8) SOLUCION GRAFICA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS DE SEGUNDO, TERCERO Y CUARTO GRADO.-

Ecuaciones de cuarto grado

Sobre un papel coordenado rectangular, dibujese las escalas uniformes de $x = ma$ y $y = mb$ (ortogonales).

Dentro del gráfico dibujese la parábolo $y^2 = 2x$ y el círculo $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ con radio "r" y centro en (h, k).-

Resolviendo simultaneamente estas ecuaciones, se encuentra las ordenadas de sus puntos de intersección por eliminación de "x".

$$y^2 = 2x \qquad (11)$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad (12)$$

Eliminando (x):

De (1) $\quad x = \frac{y^2}{2}$

Sustituyendo en (2)

$$\left(\frac{y^2}{2} - h\right)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Resolviendo y agrupando a conveniencia

$$y^4 + 4(1 - h)y^2 - 8ky + 4(h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

$aw^2 + bw + c = 0$, por lo que las raíces estarán excedidas en la cantidad $p/4$.-

Ecuación de tercer grado.- Se utilizarán las ecuaciones -deducidas en el inciso anterior.-

Si en la ecuación $w^4 + aw^2 + bw + c = 0$, el valor "c" se hace igual a cero, entonces el radio "r" se hace igual a $\sqrt{h^2 + k^2}$ lo que implica que el círculo pasará por el orígen y la ecuación puede expresarse como $w\ (w^3 + aw + b) = 0$ y por tanto $w = 0$ es decir que una raíz será nula y la expresión se convierte en $w^3 + aw + b = 0$ ecuación de tercer -- grado.-

El valor de las raíces reales se obtiene, en la -forma descrita en el inciso anterior con el correspondiente chequeo de valores en la ecuación original.-

Una ecuación completa del tipo $z^3 + pz^2 + qz + r = 0$ puede ser resuelta mediante el uso del gráfico, eliminando -un termino de la ecuación mediante el cambio de variable -- $z = (w - p/3)$ con lo que la ecuación se convierte en $w^3 + aw + b = 0$.-

Ecuación de segundo grado.- Utilizando la parábola $y^2 = 2x$ y la línea recta $y = mx + k$ por un procedimiento análogo a los dos anteriores, se podrán encontrar los valores -de las raíces reales de la ecuación de segundo grado.

$$y^2 = 2x \qquad (16)$$

$$y = mx + k \qquad (17)$$

De (16) $$x = \frac{y^2}{2}$$

Dividiendo esta ecuación por un número arbitrario t^4, se tie-
ne:

$$\left(\frac{y}{t}\right)^4 + \frac{4\,(1-h)}{t^2}\left(\frac{y}{t}\right)^2 - \frac{8\,k}{t^3}\,\frac{y}{t} + \frac{4\,(h^2 + k^2 - r^2)}{t^4} = 0 \quad (13)$$

ecuación de la forma

$$w^4 + aw^2 + bw + c = 0 \qquad (14)$$

por comparación de (3) y (4)

$$w = \frac{y}{t}\ , \quad a = \frac{4\,(1-h)}{t^2}\ , \quad b = -\frac{8\,k}{t^3}\ , \quad c = \frac{4\,(h^2 + k^2 - r^2)}{t^4}$$

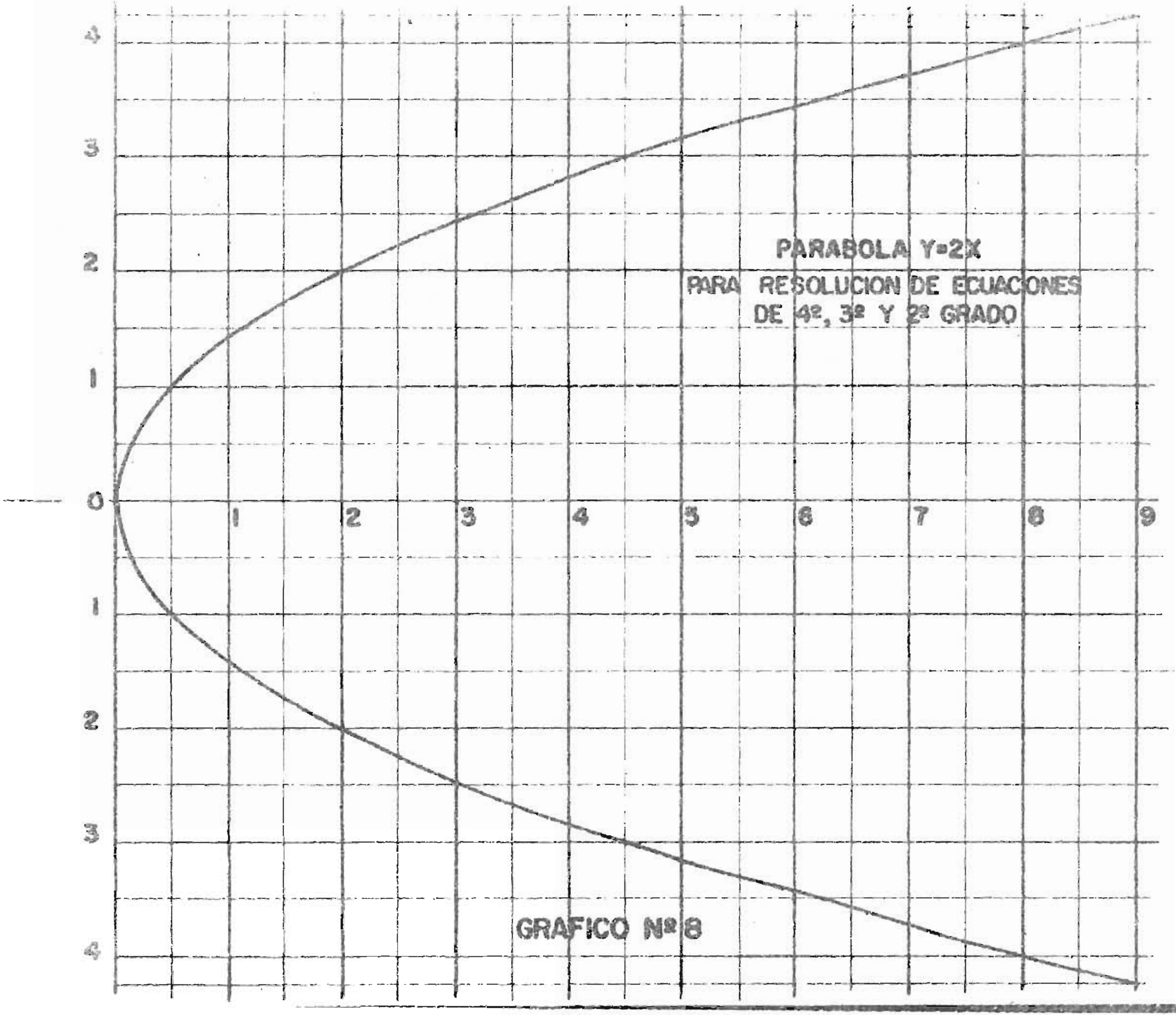
Las coordenadas del centro y el radio del círculo están expresadas entonces por:

$$h = \frac{4 - at^2}{4}\ , \quad k = -\frac{bt^3}{8} \quad y \quad r = \sqrt{h^2 + k^2 - \frac{ct^4}{4}} \qquad (15)$$

El número arbitrario "t" se ha introducido en la ecuación con objeto de que el centro del círculo se encuentre siempre a la derecha del eje OY en donde se localiza el vértice de la parábola.-

En el gráfico No. 8, se ha dibujado la parábola $y^2 = 2\,x$, con intervalos de 2 cm. para cada unidad.- La forma de obtener las raíces, de acuerdo a lo anterior, es dibujar un círculo de radio r con coordenadas centrales "h" y "x" obtenidas según 15, la medida de las ordenadas "y" en los puntos de intersección divididas por el valor arbitrario "t" dará el valor de las raices reales, las cuales deberán ser comprobadas por sustitución en la ecuación original.-

Una ecuación del tipo $z^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s = 0$, podrá ser resuelta mediante el uso del gráfico, si se elimina un término de la ecuación mediante un cambio de variable $z = w - p/4$ con lo que la ecuación se reduce a la forma w^4 +



PARABOLA Y=2X
PARA RESOLUCION DE ECUACIONES
DE 4º, 3º Y 2º GRADO
GRAFICO Nº 8
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Sustituyendo en (17)

$$y = \frac{my^2}{2} + k$$

Resolviendo y agrupando términos

$$y^2 - \frac{2\,y}{m} + \frac{2\,k}{m} + 0$$

Dividiendo por un número arbitrario t^2

$$\left(\frac{y}{t}\right)^2 - \frac{2}{mt}\left(\frac{y}{t}\right) + \frac{2\,k}{mt^2} \qquad (18)$$

ecuación de la forma

$$w^2 + aw + b = 0 \qquad (19)$$

Por comparación de (3) y (4)

$$w = \frac{y}{t} \;,\; a = -\frac{2}{mt} \;,\; b = \frac{2\,k}{mt^2}$$

La pendiente y el intercepto de la línea recta, se expresan por:

$$m = -\frac{2}{at} \;,\; k = -\frac{bt}{a}$$

El valor de las raíces reales de la ecuación de segundo grado, se encontrará midiendo las ordenadas "y" en los puntos de intersección de la recta con la parábola.- Estos valores obtenidos deberán ser divididos por el número arbitrario "t" y luego sustituidos en la ecuación (19) para la correspondiente comprobación

C A P I T U L O V

N O M O G R A M A S

1) GENERALIDADES

En este Capítulo se explicarán algunos métodos de representación gráfica más ventajosos que los métodos expuestos en el Capítulo procedente. Por su simplicidad, la nomografía es una valiosa contribución a la matemática aplicada,

Basicamente, los nomogramas, son curvas o líneas rectas escalares, construidas de tal manera que si una línea recta las corta, señala sobre ellas valores que satisfacen a una relación dada de las variables que representan las escalas. La recta transversal de corte se llama línea índice.

A los nomogramas se les llaman también "Diagramas de - Puntos Alineados".- Como se verá en los incisos posteriores, los nomogramas guardan las siguientes ventajas sobre los gráficos de coordenadas cartesianas, a saber:

Los diagramas de puntos alineados utilizan menor número de líneas, lo que facilita las lecturas y los hace menos complejos.

Los valores intermedios, son interpolados directamente sobre las escalas, con el consiguiente aumento en la exactitud de la estimación.

Su construcción es más sencilla.

Denota el cambio inmediato de las variables envueltas,- cuando una de ellas cambia.

Los nomogramas son utilizados en oficinas técnicas cuyo-trabajo generalmente es sistemático y especializado, para simplificar los procedimientos de cálculo.

Los principios fundamentales de la construcción de nomogramas consisten en representar una ecuación que contiene tres variables ϕ (a, b, w)=o por medio de tres escalas, se efectúan combinaciones para representar funciones que contengan un número mayor de variables o bien se combinan para representar dentro de un gráfico una serie de funciones.

2) NOMOGRAMAS DE ESCALAS PARALELAS - FUNCIONES $f(a)+F(b) = \phi(w)$ ó $f(a)\ F(b) = \phi(w)$

$f(a)+F(b) = \phi(w)$ es una representación similar a $f(a)\ F(b) = \phi(w)$ cuando en ésta tomamos logaritmos en ambos miembros, convirtiéndose así en $\log f(a)+\log F(b)=\log \phi(w)$.

Para interpretar con mayor claridad el método de puntos alineados y de acuerdo a lo dicho anteriormente, en la Fig. (20), se muestra un esquema formado por tres ejes paralelos.

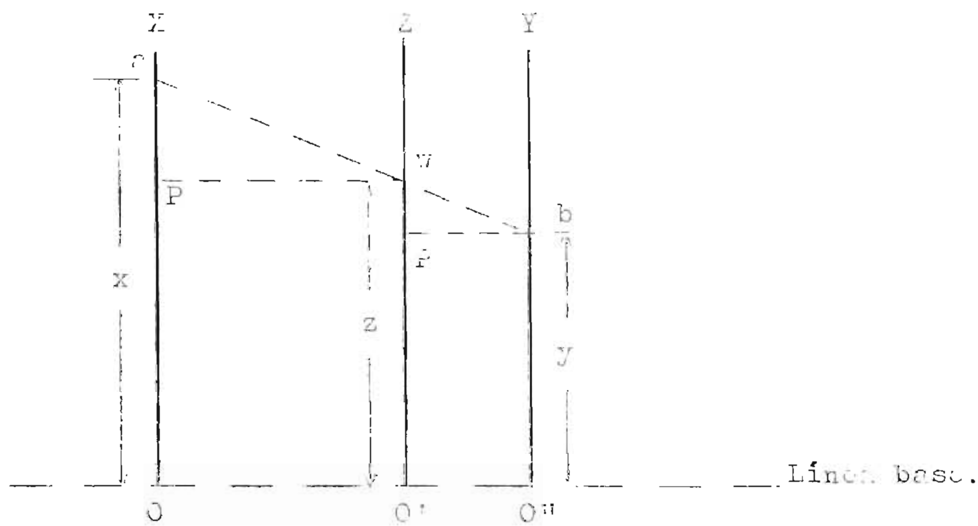


Figura 20

Los ejes se han nombrado OX, O'Z , O"Y y se supone que cada uno alojará una escala x,z,y tal que $x=m_1\ f(a)$, $Y=m_2\ F(b)$ $z= m_3\ \phi(w)$.

Se han alineado los puntos estremos de estas escalas mediante la recta transversal $\overline{awb}$; por los puntos de intersección de esta recta con los ejes O'Z y O"Y se trazaron las rectas wP y bP paralelas a una línea arbitraria OO'O" que sirve de base a los orígenes de las escalas. Como una condición de construcción se tiene que OO'/O'O" = m_1/m_2 y que los triángulos aPw y wP'b son semejantes. A partir de esta representación se establecerán las condiciones geométricas que relacionan las escalas.-

$$f(a) + F(b) = \phi(w) \qquad (1)$$

Comparando triángulos semejantes (aPw) y (wP'b)

$$\frac{Pw}{P'b} = \frac{aP}{wP'} = \frac{OO'}{O'O''} = \frac{m_1}{m_2}$$

entonces:
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x-z}{z-y}$$

desarrollando y agrupando términos:

$$z(m_1 + m_2) = m_2 x + m_1 y$$

$$\frac{x}{m_1} + \frac{y}{m_2} = z\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 \quad m_2}\right) \qquad (2)$$

ahora bien:
$$\frac{x}{m_1} = f(a), \quad \frac{y}{m_2} = F(b), \quad \frac{z}{m_3} = \phi(w) \qquad (3)$$

Reemplazando los valores de (3) en (2), se obtiene(1)

$$f(a) + F(b) = \phi(w) \qquad (1)$$

$$z\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 \quad m_2} = \frac{z}{m_3}$$

$$\therefore \quad m_3 = \frac{m_1 \quad m_2}{m_1 + m_2} \qquad (4)$$

Con estos requisitos, decimos que la línea índice corta a los ejes en tres puntos correspondientes a los valores a,b,w que satisfacen a $f(a) + F(b) = \phi(w)$.-

Puede presentarse el caso de tener una de las escalas creciendo en sentido contrario a las otras dos, esto sucede cuando una de las funciones esta afectada por un signo negativo; tomando entonces la expresión las formas : $f(a) - F(b) = \phi(w)$ ó $f(a)/F(b) = \phi(w)$. (Esta segunda forma se convierte en la primera al tomar logaritmos para ambos miembros de la ecuación). Lo que se puede comprobar en la Fig. 21.-

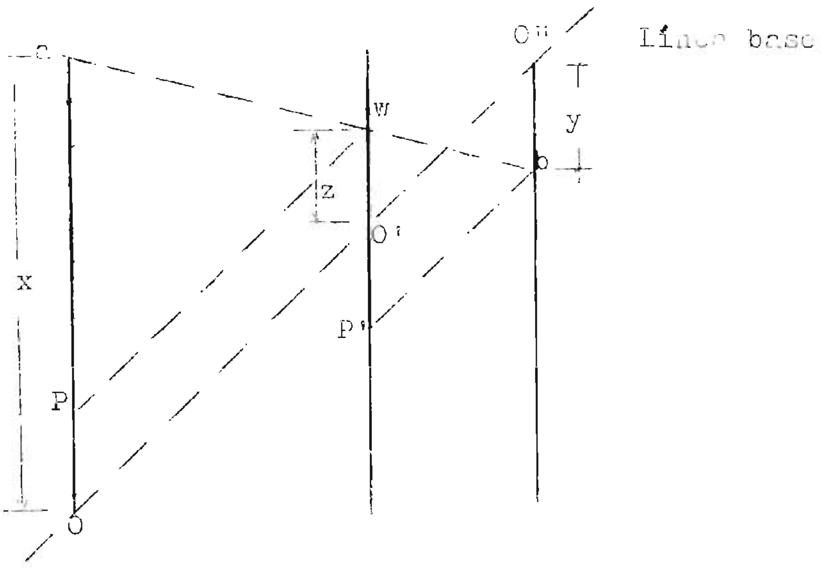


FIGURA No. 21

3) EJEMPLO ILUSTRATIVO - OBSERVACIONES GENERALES

En el inciso (c) artículo 6o. del Capítulo anterior, se representó logarítmicamente la función $ab = w$; en la misma forma se ha procedido para obtener las ecuaciones de las escalas $x = 12.5 \log a$ y $y = 12.5 \log b$. en donde 12.5 cm. = $m_1 = m_2$. Las escalas se dibujarán paralelas verticales, a -

una distancia entre ambas de 12.5 cm. también. Por el orígen de una de ellas se pasará una recta perpendicular horizontal que al cortar a la otra, señalará en ella su punto de orígen. Se desarrollarán las dos escalas. Para dibujar la escala paralela vertical $z = m_3 \log w$, se sustituirán valores en $OO'/O'O'' = m_1/m_2 = 12.5/12.5 = 1/1$ lo que da por resultado $OO' = 1$, $O'O'' = 1$, o sea, que el eje O'Z se trazará entre los otros dos ejes y equidistante de ellos.

Ahora bien, por la ecuación (4) Art. 2 de este Capítulo

$$m_3 = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{156.25}{25} = 6.25$$

$$\therefore \qquad z = 6.25 \log w$$

Obtenida la tercera escala, se desarrollará en el eje O'Z. El Gráfico No. 9 muestra el nomograma de $ab = w$ con las dimensiones calculadas en este artículo y con los rangos de variación adoptados en el Capítulo anterior.

Este ejemplo ilustrativo puede emplearse para recomendar un procedimiento general de construcción de nomogramas de ejes paralelos.

Escójase dos módulos arbitrarios m_1 y m_2 y sobre dos líneas paralelas separadas a una distancia conveniente; escríbanse las escalas $x = m_1\ f(a)$ y $y = m_2\ F(b)$. La línea que una los orígenes de éstas dos escalas será la línea base. (no es necesario dibujarla).

Dibujese una tercera línea paralela (eje Z) que se encuentre separada de cada uno de los otros ejes a una distancia dada por m_1/m_2.

El punto orígen de "z" se determina por la intersección

NOMOGRAMA DE ESCALAS PARALELA DE $ab = w$

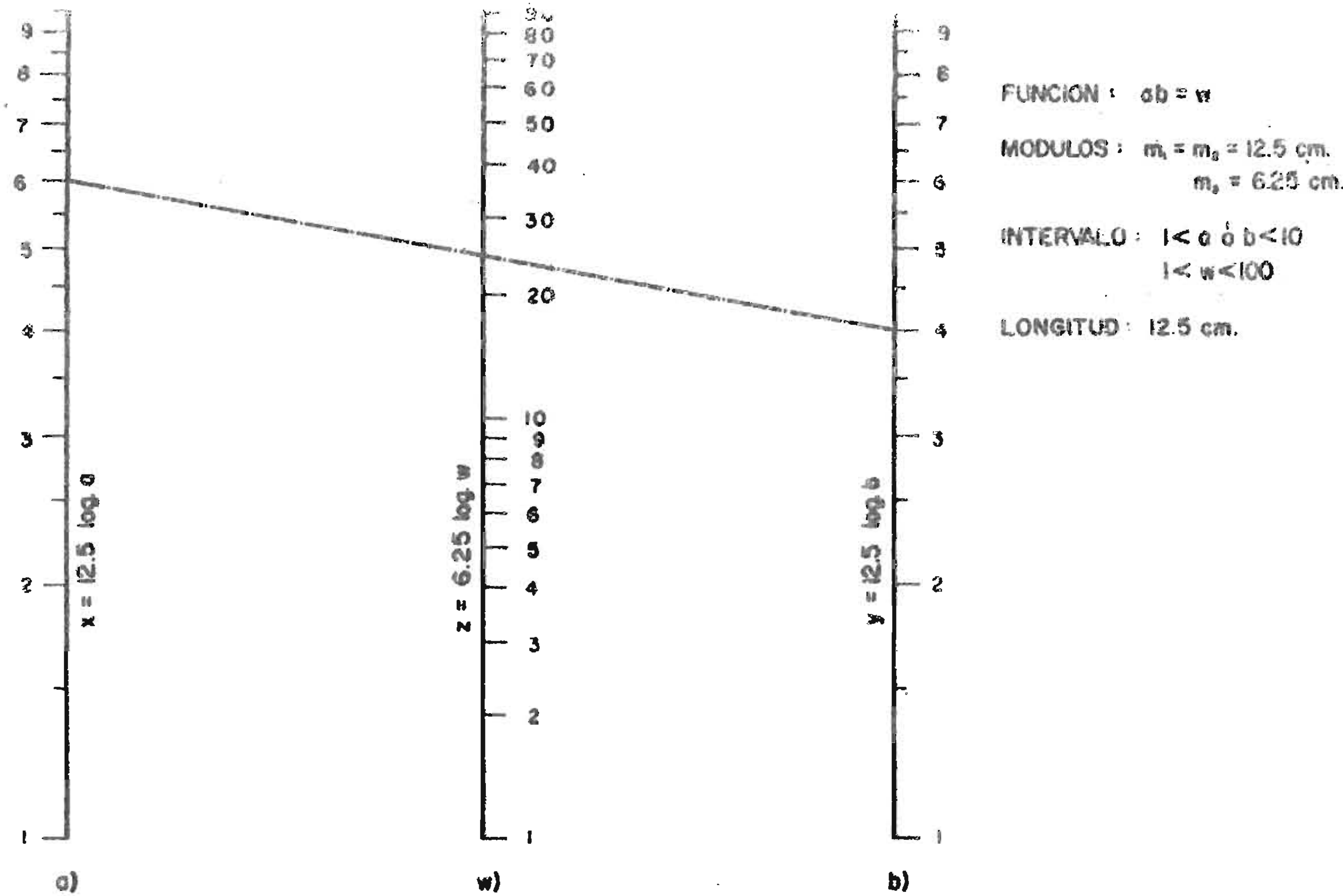


GRAFICO Nº 9

de la línea base con su eje.

Determínese $m_3 = \dfrac{m_1 \quad m_2}{m_1 + m_2}$ y dibujese la escala - - - $z = m_3\ \phi(w)$.

Es recomendable construir los nomogramas tendiendo a - una figura cuadrada con objeto de que la línea índice no desarrolle ángulos agudos que hacen perder exactitud en las lecturas.

Aunque no se presenta a menudo, ciertos rangos de las variables, por ejemplo "a" y "b", hacen que sus orígenes - no estén marcados en los límites del gráfico, por lo que habrá que hacer una asignación de valores a ellos para obtener uno correspondiente de w. Con esto, se podrá marcar sobre las escalas los valores asignados y el calculado, unidos por una línea índice. E l valor determinado para w podrá ser utilizado como punto de orígen para desarrolar la escala - $z = m_3\ \phi\ (w)$.-

4) <u>NOMOGRAMAS PARA MAS DE TRES ESCALAS PARALELAS - FUNCIONES</u> <u>$f(a) + F(b) + \phi(w) + \ldots. = \mathcal{F}(l)$</u> ó <u>$f(a).\ F\ (b).\ \phi(w)\ldots \mathcal{F}(l)$</u>

$f(a) + F(b) + \phi(w)\ \ldots = \mathcal{F}(l)$ es una representación similar a $f(a).\ F(b)\ \phi(w) = \mathcal{F}\ (l)$ cuando en ésta tomamos logaritmos en ambos miembros, convirtiéndose así en $\log f(a) + \log F(b) + \log \phi\ (w)\ \ldots. = \log \mathcal{F}\ (l)$.

La resolución de nomogramas de escalas paralelas, que contengan cuatro o más variables se efectúa en la misma forma que se esplicó en el artículo No. 2 de este Capítulo, - con la única variante de introducir una variable "v" que -

permite descomponer la ecuación original en relaciones parciales de tres variables.

Sea la función $f(a) + F(b) + \phi(w) = \sigma(l)$, para diseñar su representación nomográfica, se hace que:

$$f(a) + F(b) = v \qquad (5)$$

y

$$v + \phi(w) = \sigma(l) \qquad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) permiten construir dos combinaciones de tres escalas paralelas de puntos alineados.

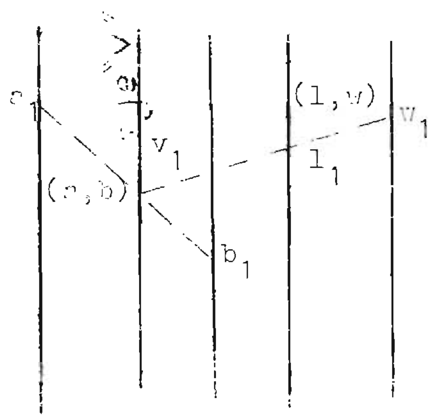


Figura 22

La figura 22, muestra esquematicamente la representación (5) y (6).

Obviamente, por conveniencia, el eje en el que se representa "v" no llevará graduación: luego, los puntos origenes de f(a) y F(b) pueden ser tomados arbitrariamente puesto que cualquier valor de "v" estará alineado con los correspondientes de "a" y "b". Por tanto la construcción de una de las expresiones (5) y (6) no conlleva ninguún requerimiento especial. Supóngase que en esta forma ha sido construido el nomograma de tres ejes para (5). En este caso, para construir (6), el punto orígen de una de sus escalas, por ejem plo w, puede tambien disponerse arbitrariamente; más, para determinar valores en la escala "l" deberá calcularse una serie de valores a_1, b_1, [illegible]$_1$ que satisfagan a $f(a)$ + --- $F(b) + \phi(w) = \sigma(l)$, con los cuales se podrá desarrollar la escala. Para efectuar las lecturas de valores se procede según el orden seguido en el proceso de construcción y por tanto se necesitarán dos líneas índices, la primera unirá los valores "a" y "b", como se señala en la Figura 22 en - donde se han tomado dos números a_1 y b_1 cualesquiera, in-- tersectando el eje "v" en un punto v_1 y la segunda que uni- rá los valores relacionados l_1 y w_1 a partir de v_1.

Con el procedimiento anterior, es muy sencillo conocer el valor de una variable en una función que contiene a cua- tro, cuando tres de ellas son conocidas.

La ecuación oríginal $f(a) + F(b) + \phi(w) = \sigma(l)$, puede escribirse también en la forma $f(a) + F(b) = \sigma(l) - \phi(w)$, e introduciendo el valor "v" con un procedimiento similar al anterior se descompone en:

$$f(a) + F(b) = v \qquad (7)$$

$$\sigma(l) - (w) = v \qquad (8)$$

que tienen una representación esquemática como la mostrada en la Figura 23 en la que se señala que habrá una escala -- construida en dirección opuesta a las demás.

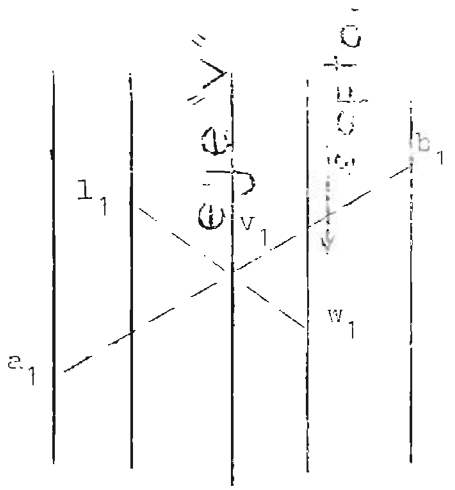


FIGURA 23

5) <u>NOMOGRAMAS EN "Z" - FUNCIONES $F(b)\ \phi(w) = f(a)$ ó $f(a)=F(b)^{\phi(w)}$</u>

$F(b)\ \phi(w) = f(a)$ es una representación similar a $f(a)=F(b)^{\phi(w)}$, cuando en ésta tomamos logaritmos en ambos miembros,- convirtiéndose así en $\log f(a) = \phi(w) \log F(b)$.

La primera representación de estas funciones, ya fue - estudiada en el artículo 2 de este capítulo al construir - un nomograma de tres escalas paralelas logarítmicas.

En este artículo, se estudiarán los nomogramas en "Z", también llamados en "N" por su similitud con éstas letras, que constarán de dos ejes paralelos y uno transversal; las escalas que estos ejes alojarán son escalas naturales.

Para interpretar mejor el método a seguir en los nomogramas en "Z", de acuerdo a lo dicho anteriormente; se muestra en la Fig. 24, un esquema formado por dos ejes paralelos y uno oblicuo a estos.

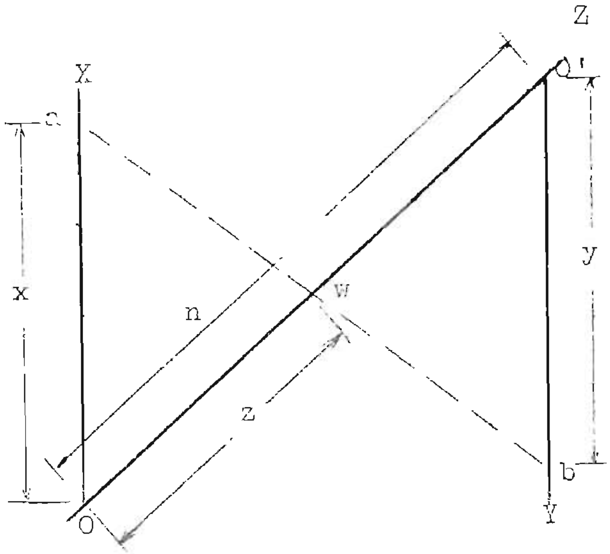


FIGURA 24

Los ejes se han nombrado OX, OZ, O'Y y se supone que cada uno alojará una escala x,z, y tal que $x = m_1\ f(a)$, $y = m_2\ F(b)$, $z = m_3\ \phi\ (w)$. Se han alineado los puntos extremos de estas escalas mediante la recta transversal awb; por lo tanto Oa = x, O'b = y y Ow = z. Para establecer condiciones geométricas que relacionen x, y,z, se ha hecho OO' =n, de tal modo que se formen dos triángulos semejantes Oaw y O'bw y se tiene:

$$F(b)\ \phi\ (w) = f(a) \qquad (9)$$

Comparando triángulos semejantes

$$\frac{Oa}{O'b} = \frac{Ow}{wO'} = \frac{x}{y} = \frac{z}{n-z}$$

entonces $x = \dfrac{zy}{n-z} = m_1\ f(a) = \dfrac{z\ m_2\ F(b)}{n-z}$

$$\therefore \quad f(a) = \frac{z\ m_2}{m_1(n-z)}\ F\ (b) \qquad (10)$$

Apartir de esta ecuación, deberá tomarse

$$\phi(w) = \frac{z\ m_2}{m_1(n-z)}$$ para obtener la expresión (9) en (10)

o sea que: $$z = \frac{n\ \phi(w)\ m_1}{\phi(w) m_1 + m_2} \qquad (11)$$

De lo que se afirma que la línea índice corta a los -- ejes en tres puntos correspondientes a los valores a,b,w - que satisfacen a $F(b)\ \phi\ (w) = f(a)$.-

Vale hacer notar que la escala "y" crece en sentido contrario a "x".

La construcción de este tipo de nomogramas exigiría -- calcular valores de z para cada valor de w, que aparezca - en la escala, se abrevia la construcción con el procedimiento que a continuación se detalla:

a) Dibújese dos ejes paralelos OX y O'Y separados convenientemente y entre ellos un eje oblicuo OZ de una longitud n.

b) Sobre el eje OX, con orígen O, constrúyase la escala $x = m_1\ f(a)$

Sobre el eje O'Y con orígen O', constrúyase la escala $y = m_2\ F\ (b)$.

Para construir la escala z, como medio de simplificación se utilizarán las relaciones obtenidas a partir de la figura 25 en ella se ha construido sobre el eje OX la escala OC $= x_1$ y sobre el eje O' Y se ha escogido un punto D a una distancia 1 de O'; uniendo los puntos C y D por medio de una línea recta, esta cortará el eje OZ en un punto w distante un valor z del punto O, formándose los triángulos semejantes OC w y O'D w.

Se obtienen las siguientes relaciones:

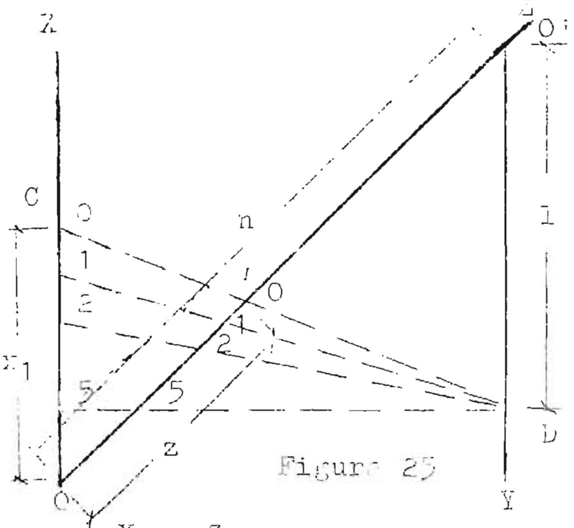


Figura 25

$$\frac{x_1}{l} = \frac{z}{n - z}$$

$$.: \qquad z = \frac{n\,x_1}{l + x_1} \qquad (12)$$

igualando (11) y (12)

$$\frac{n\,\emptyset\,(w)\,m_1}{\emptyset\,(w)\,m_1 + m_2} = \frac{n\,x_1}{l + x_1} = z$$

$$.: \qquad x_1 = l\,\frac{m_1}{m_2}\,\emptyset\,(w) \qquad (13)$$

La expresión (13) es una ecuación más fácil de tabular, por lo que se la utilizará como auxiliar para marcar en el eje OZ los valores "w" correspondientes a la escala "w".

Entonces, para construir la escala $z = \frac{n\,\emptyset(w)\,m_1}{\emptyset(w)\,m_1 + m_2}$ debe

rá disponerse sobre el eje OY una escala auxiliar ----
$x_1 = l \frac{m_1}{m_2}$ $\phi(w)$ marcando en ella los diferentes valores de "w".-Sobre el eje O'Y deberá marcarse un punto D a una distancia conveniente l de O'. Tomando D como un punto fijo, desde el cual se irán uniendo los valores señalados en ---- x_1 ($w = 1,2,3...$), mediante un haz de rectas, póngase sobre el eje OZ los correspondientes puntos de intersección con estas rectas y apúntese en éstos, los mismos valores de "w" indicados en x_1, con lo que se obtendrá la escala requerida.

En la práctica, no se acostumbra a dibujar el conjunto de rectas radiales, sinó solamente señalar los puntos de intersección en OZ. Es recomendable hacer dos o tres sustituciones en la ecuacion(11) para comprobar valores en la escala "z". El nomograma está completo con el último paso explicado.-

6) LA CLAVE O LLAVE.

Con objeto de que cualquier persona pueda utilizar convenientemente un nomograma, sin peligro de incurrir en --- error, especialmente cuando las variables involucradas son cuatro o más, deberá ponerse al pie del mismo, una clave indicadora que ordene la secuencia en que deberán efectuarse las lecturas o bien en que forma deberán disponerse las lineas índices para encontrar la función buscada. A este tipo de indicación se la llama clave o llave.-

Algunos autores acostumbran a poner la clave, mediante líneas índice tipo, que resuelve un problema particular.

Ambos tipos de sistema indicador son muy buenos, aunque es más usual el primero de los mencionados.

7) NOMOGRAMAS CON INTERSECCION DE DOS LINEAS INDICES-FUNCIONES

$\frac{f(a)}{F(b)} = \frac{\varnothing(w)}{\psi(1)}$.

La relación $\frac{f(a)}{F(b)} = \frac{\varnothing(w)}{\psi(1)}$, ya fue resuelta mediante el uso de escalas logarítmicas, ahora se utilizará una representación de escalas naturales.-

Por medio de la Figura No.26, se establecen las condiciones básicas:

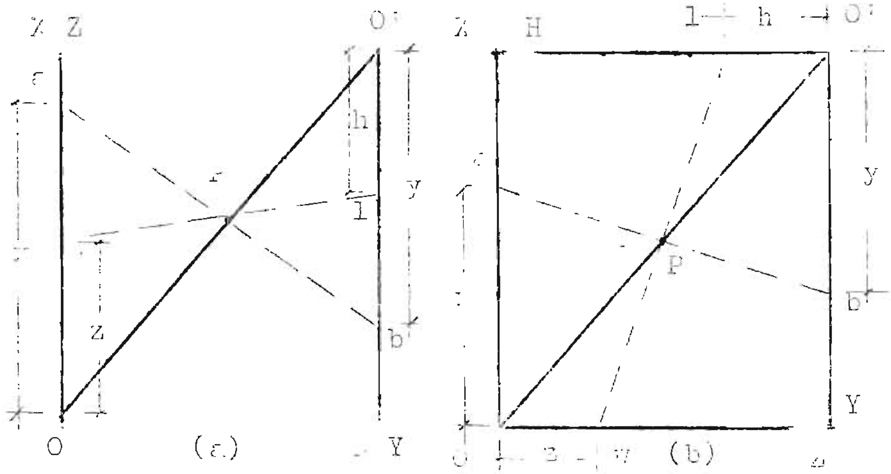


Figura 26

Se construyen los ejes OX, O'Y, OZ y O'H por medio de ejes paralelos en donde OZ coincide con OX y O'H coincide con O'Y, Figura 26 (a): o bien, como se muestra en la Figura 26 (b), OZ forma un ángulo conveniente con OX y O'H lo forma con OY. Se construye una recta transversal común OO'. Por un punto P escogido sobre OO' se dibujan dos líneas índices que cortan a los ejes en los puntos a, b, w y 1.-

Las escalas x, y, z y h estarán alojadas respectivamente en los segmentos OaP, O'bP y OwP; O'lP se establecerá la forma en que x, y, z y h se relacionan, como a continuación se detalla:

$$\frac{x}{y} = \frac{OP}{PO'}$$

$$\frac{z}{h} = \frac{OP}{PO'}$$

$$\therefore \qquad \frac{x}{y} = \frac{z}{h} \qquad (14)$$

Entonces, si las ecuaciones de las escalas son:

$$x = m_1 \; f(a)$$

$$y = m_2 \; F(b)$$

$$z = m_3 \; \phi(w)$$

$$h = m_4 \; \Phi\,(l)$$

donde

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4}$$

La relación se convierte en $\frac{f(a)}{F(b)} = \frac{\phi(w)}{\Phi(l)}$, pudiendo decirse que si las dos líneas índices se cortan en un punto sobre OO'; éstas, cortarán valores de a, b, w y l que satisfarán a $\frac{f(a)}{F(b)} = \frac{\phi(w)}{\Phi(l)}$.

Luego, para construir este tipo de nomogramas se procede de la siguiente manera:

Dibújese una línea oblicua OO' cualquiera, de una longitud conveniente.

Por los extremos de OO' dibújese los ejes paralelos OX y O'Y y los ejes paralelos O'H y OZ, (OZ puede coincidir con OX o formar con el un ángulo de una obertura conveniente).

Sobre los ejes, construyanse las escalas

$x = m_1 f(a)$, $y = m_2 F(b)$, $z = m_3 \emptyset(w)$, $h = m_4$ (1)

Los modulos son arbitrarios, pero deberán cubrir la relación $\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4}$.-

Para la lectura del nomograma, deberá usarse las dos líneas índices, de tal manera que una de ellas una "a" con "b" y la otra una "w" con "l", intersectándose en un punto sobre OO'.-

Algunas ecuaciones como $f(a).F(b).\emptyset(w)= \sigma(l)$ ó $f(a).F(b) = \emptyset(w).\ \sigma(l)$ etc.... pueden ser representadas por este tipo de nomogramas.

8) NOMOGRAMAS CON INTERSECCION DE DOS O MAS LINEAS INDICES - FUNCIONES $f(a) = F(b).\emptyset(w).\ \sigma(l)$....

En los casos de ecuaciones que envuelven tres o más - variables, un gran número de ellas, pueden ser escritas en la forma $f(a) = F(b).\emptyset(w).\emptyset(l)$....

Este tipo de funciones ha sido representado anteriormente mediante nomogramas que contienen escalas logarítmicas; sin embargo, pueden ser representadas mediante escalas naturales. El caso presentado en el artículo anterior es un caso especial de este tipo de ecuaciones. Ahora se ampliará el método para los casos de tres, cinco y seis variables teniendo en cuenta los aspectos que se estudiaron para el caso de cuatro variables.-

<u>Relacion de tres variables $f(a) = F(b).\emptyset(w)$:</u>

Una ecuación que involucre tres variables puede escribirse tambien en la forma $\frac{f(a)}{F(b)} = \frac{\emptyset(w)}{1}$. Las ecuaciones de las escalas que deberán plantearse son:

$$x = m_1 \ f(a)$$

$$y = m_2 \ F(b)$$

$$z = m_3 \ \emptyset(w)$$

$$h = m_4$$

Los módulos estarán relacionados de tal forma que $\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4}$. La escala "h" del inciso anterior, deberá reemplazarse por un punto fijo "1" en el eje O' a una distancia m_4 de O'. (Figura 15(a) y (b)). Las lecturas se efectúan con el auxilio de dos líneas índices, de las cuales la primera unirá "a" y "b" y la segunda, "w" y el punto fijo "1". Deberá tenerse en consideración que las dos líneas índices deberán cortar la recta transversal OO' en un punto P cualquiera, situado sobre ella.

Si el punto fijo "1" se le utiliza como un centro de proyección, entonces los respectivos valores de la escala "w" podrán ser proyectados sobre la recta transversal OO', de tal modo que se formará entonces un nomograma en "Z", puesto que se tendrán dos escalas paralelas y una tercera oblicua a estas. Bastará considerar solamente una línea índice que corte valores de a, b, y w que satisfagan la ecuación $f(a) = F(b)\ \emptyset(w)$.-

<u>Relación de cinco variables. $f(a)$. (1). $\Theta(r) = F(b)\ \emptyset(w)$</u>

Para construir un nomograma de una ecuación que envuelva cinco variables $f(a)\ (1)\ \Theta(r) = F(b)\ \emptyset(w)$, esta puede descomponerse en $\dfrac{f(a)}{F(b)} = \dfrac{\emptyset(w)}{q}$ y $\dfrac{q}{(1)} = \dfrac{\Theta(r)}{1}$; las dos -- últimas expresiones exigen la construcción de una escala adicional "q" y la consideración de un punto fijo; además se utilizarán dos pares de líneas índices para marcar los valores y como un caso especial, procediendo en igual forma que en el caso de tres variables, podrán ocuparse solamente tres líneas índices.-

Estos nomogramas se construyen de la manera que esquematicamente señala la Fig. 27(a) y 27 (b).

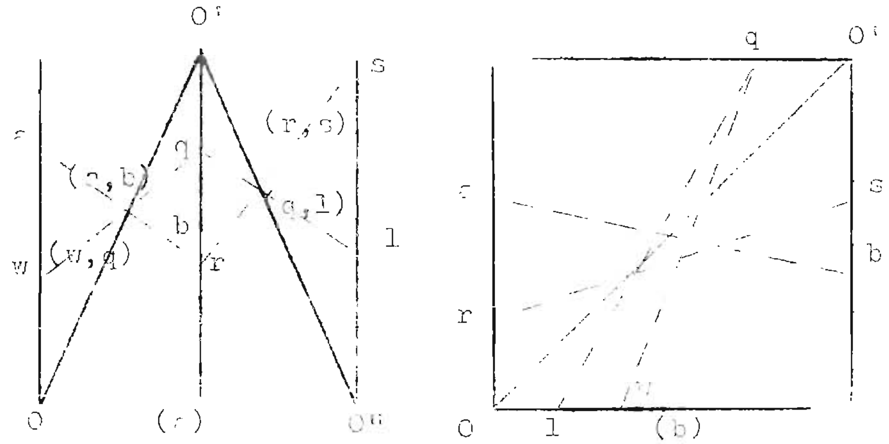


Figura 27

Como se aprecia después de la descomposición de la -- fórmula que contiene las cinco variables, se han formado dos grupos de cuatro variables (una de las cuales, es común a ambos grupos). En la figura 27 (a) se han dispuesto tres ejes paralelos unidos por dos rectas oblicuas a ellos OO' y O'O". Es obvio que la escala "q" no necesitará graduarse. Las ecuaciones de las escalas son:

Para el primer par de ejes (uno de ellos común)

$$x = m_1 \ f(a)$$

$$y = m_2 \ f(b)$$

$$z = m_3 \ \emptyset(w)$$

$$h = m_4 \ q(\text{no se gradúa})$$

Para el eje común y tercer eje

$$x_1 = m_4 \ q(\text{no se gradúa})$$

$$y_1 = m_5 \sigma(1)$$

$$z_1 = m_6 \ \Theta(r)$$

$$h_1 = m_7 \ (\text{punto "s"})$$

El procedimiento de construcción adoptado es idéntico al descrito en el artículo 7 de este Capítulo.-

El caso especial que se mencionó al principio de este inciso, se obtiene al descomponer la fórmula en dos ecuaciones del tipo $\frac{f(a)}{F(b)} = \frac{\emptyset(w)}{q}$ y $q = \sigma(1).\Theta(r)$.-

Para la construcción correspondiente a la primera de estas ecuaciones se procede en igual forma que para el caso de cuatro variables; para la segunda, se construye de acuerdo a las instrucciones para tres variables, proyectando los valores de "r" en su eje oblicuo correspondiente, al considerar el punto s como un centro de proyección. Para una mejor interpretación, inmediatamente abajo se muestra la figura 28, que detalla esquemáticamente este tipo de simplificación.-

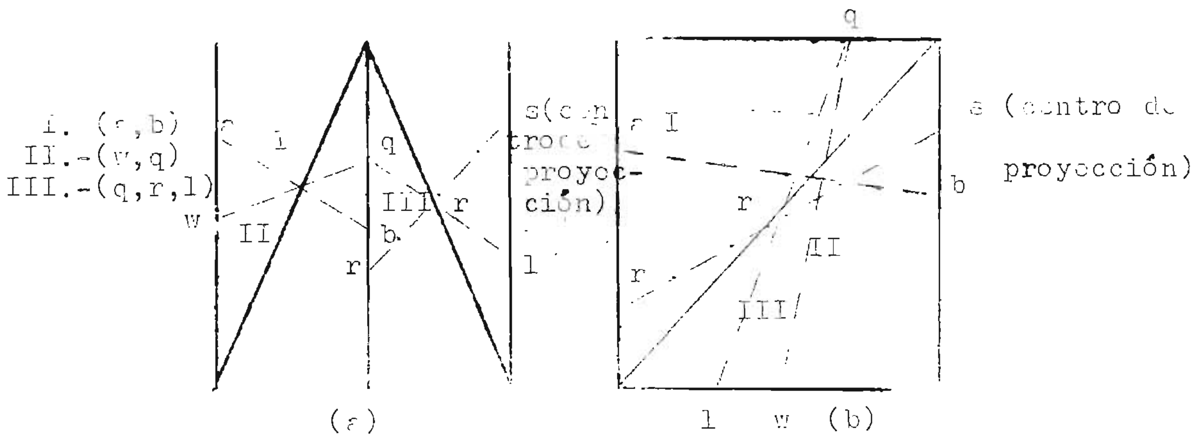


Figura 28

Al efectuar las lecturas se ocuparán solamente los tres índices señalados en la Figura, siendo ellos para (a,b) el índice I; para (w,q), el II y para (q,r,l), el III.-

<u>Relación de seis variables. $f(a)\ \sigma(l)\ \theta(r) = F(b)\ \emptyset(w)\ \psi(s)$</u>

Con el método anterior es sumamente sencilla la construcción para el caso de fórmulas que contienen seis variables. La descomposición de la fórmula se presenta en idéntica forma, agrupando en dos ecuaciones las variables en juego, e introduciendo también la escala adicional "q". Las dos expresiones quedan como $\frac{f(a)}{F(b)} = \frac{\emptyset(w)}{q}$ y $\frac{q}{\sigma(l)} = \frac{\theta(r)}{\psi(s)}$.-Como en el caso precedente las escalas q, b y r se alojan en el eje común. La representación esquemática mostrada en la Figura 28 (a) y 28 (b), es válida para el desarrollo de estos nomogramas. Las lecturas sobre el nomograma necesitan dos pares de líneas índices.

Es claro entonces que el caso analizado para fórmulas de cinco variables, no es más que un caso especial de fórmu las de seis variables en el cual (s) vale uno.

NOMOGRAMAS DE TRES O MAS ESCALAS CONCURRENTES. FUNCIONES

$\frac{1}{f(a)} + \frac{1}{F(b)} = \frac{1}{\emptyset(w)}$ ó $\frac{1}{f(a)} + \frac{1}{F(b)} + \frac{1}{\emptyset(w)} + \ldots = \frac{1}{G}$ (1)

Mediante el auxilio de la Figura 29, se establecerán las condiciones para representar ecuaciones de la forma $\frac{1}{f(a)} + \frac{1}{F(b)} = \frac{1}{\emptyset(w)}$ por medio de nomogramas formados por tres escalas concurrentes.-

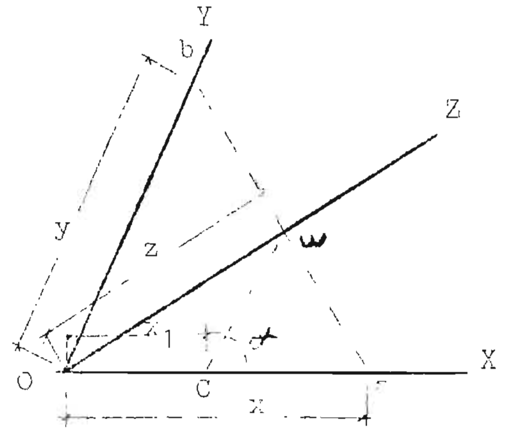


Figura 29

Esta figura muestra tres ejes concurrentes OX, OY y Ow, los cuales alojarán las escalas x,y,z respectivamente. Por los puntos extremos "a" y "b" de estas escalas se ha trazado una línea índice que cortará al eje OZ en un valor extremo w de la escala z; para que esto tenga validez, la posición de OZ debe ser tal, que si por el punto w se dibuja una recta recta wC paralela a OY, se determina la razón - $\frac{OC}{Cw} = \frac{m_1}{m_2}$. Entonces, en los triángulos semejantes a Cw y - a Ob, se tiene que $\frac{Cw}{Ob} = \frac{Ca}{OA}$.

El segmento OC alojará una escala x_1, por lo que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{m_2}{m_1}\, x_1}{y} = \dfrac{x - x_1}{x} \\[2ex] \text{ó } \dfrac{m_1}{x} + \dfrac{m_2}{y} = \dfrac{m_1}{x_1} \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Sobre el eje OX se dibujará la escala $x = m_1\ f(a)$ y $x_1 = m_1\ \varnothing(w)$ y sobre el eje OY, la escala $y = m_2\ F(b)$, por lo que al sustituir en (15), se obtiene la ecuación de - forma:

$$\frac{1}{f(a)} + \frac{1}{F(b)} = \frac{1}{\varnothing(w)}$$

Para que una línea índice corte los valores de a,b y w que satisfagan la ecuación, se proyectarán todos los valores de w en la escala x_1 sobre el eje OZ para formar la escala z, en donde se marcarán los mismos valores de w.-

Una extensión a este método se obtiene al hacer $m_1 = m_2$, entonces el eje OZ bisecta el ángulo X O Y de valor cualquiera α . La figura 29, sirve tambien para ilustrar las relaciones entre las escalas x,y y z, éstas son las siguientes.

$$\frac{Ow}{OC} = \frac{\text{sen } (180^\circ - \alpha)}{\text{sen } \alpha/2}$$

por ser $z = Ow$

$$= \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha/2}\, x_1 = \frac{2 \text{ sen } \alpha/2 \cos \alpha/2}{\text{sen } \quad /2}\, x_1$$

$$= m_1\ (2 \cos \alpha/2)\ \varnothing(w)$$

Si se toma $= 120^\circ$, las ecuaciones simplifican:

$$x = mf(a)$$

$$y = mF(b)$$

$$z = m\varnothing(w)$$

Cuando se tiene más de tres variables en la ecuación, por ejemplo la función de cuatro variables:

$$\frac{1}{f(a)} + \frac{1}{F(b)} + \frac{1}{\varnothing(w)} = \frac{1}{(l)}$$

Como en casos anteriores se introduce una variable auxiliar "q", y se descompone la función en dos ecuaciones de tres variables cada una:

$$\frac{1}{f(a)} + \frac{1}{F(b)} = \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{\varnothing(w)} = \frac{1}{(l)}$$

La escala "q" no necesita graduarse y se construye común a gráficos individuales de tres escalas concurrentes, de tal modo que al unirse éstos, les sirve de unión; como se muestra en la Figura 30.

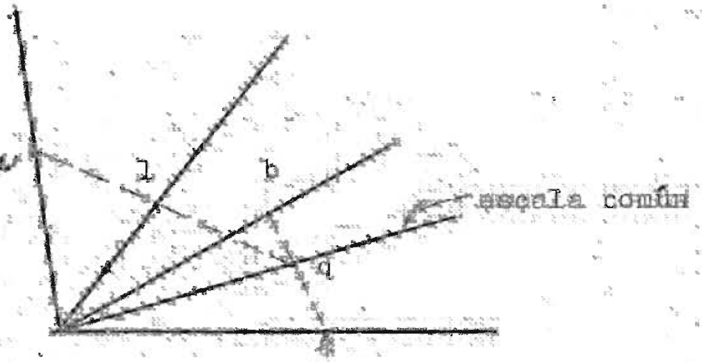


Figura 30

Dos líneas índice se necesitan, una cortando valores de a y b y la otra valores de "w" y "l" que deberán a su vez coincidir sobre el eje q. Los valores señalados satisfarán a $\frac{1}{f(a)} + \frac{1}{F(b)} + \frac{1}{\varnothing(w)} = \frac{1}{(l)}$.-