

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA

Y

ARQUITECTURA



“APUNTES DE MECANICA DE SOLIDOS I”

PROYECTO DE INGENIERIA PRESENTADO POR:

VICTOR ERNESTO GIRON CARBALLO

**PREVIO A LA OPCION DEL TITULO
DE
INGENIERO CIVIL**

MARZO DE 1972

SAN SALVADOR — EL SALVADOR — CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

Dr. RAFAEL MENJIVAR.

SECRETARIO GENERAL:

Dr. MIGUEL ANGEL SPENS VARELA.

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO:

Ing. FELIX ANTONIO ULLOA.

SECRETARIO:

Ing. RODOLFO JENKINS.

COORDINADOR DE L

ESCUELA DE INGENIERIA:

Ing. LEON RIVAS DURAN.

PROYECTO DE INGENIERIA

TEMA :

AFU TES DE MECANICA DE SOLIDOS I

ASESOR ACADEMICO: Ing. RENE MARVAEZ M.
CONSULTORES: Ing. ORLANDO POL/SCO Z.
 Ing. ROBERTO SALAZAR M.

EXAMEN DE GRADO:

PRESIDENTE: Ing. RENE MARVAEZ M.
VOCALES: Ing. ORLANDO POL/SCO Z.
 Ing. ROBERTO SALAZAR M.

San Salvador, El Salvador, Centro America

Marzo de 1972

DEDICATORIA:

A mi esposa: MIRIAM

A mis padres: RAFAEL GIROF
Y
DOROTHY DE GIROF .

A mis hermanos: RAFAEL EDMUNDO, Sra. e Hijo
SAMUEL AFRODISIO
WILFREDO ARISTIDES

A mis parientes

A mis profesores

A mis compañeros y amigos.

San Salvador, El Salvador, C.A. Marzo de 1972. "

INDICE

CAPITULO 1

MECÁNICA

1.1	Introducción.	1
1.2	Principios Fundamentales de la Mecánica.	1
1.3	Definición de Fuerza.	2

CAPITULO 2

OPERACIONES CON FUERZAS

2.1	Resultante de dos Fuerzas Concurrentes.	4
2.2	Resolución de una Fuerza en sus Componentes	4
2.3	Componentes Rectangulares de una Fuerza en tres Dimensiones.	5
2.4	Resultante de un Sistema de Fuerzas Concurrentes.	7
2.5	Vector de Posición.	9
2.6	Momento de una Fuerza con respecto a un Punto.	10
2.7	Teorema de Varignon	11
2.8	Momento de una Fuerza con respecto a un eje.	12
2.9	Pares.	14
2.10	Resolución de una Fuerza en una Fuerza y un Par.	16
2.11	Casos Particulares de sistemas de Fuerzas.	18

CAPITULO 3

ESTÁTICA DE LOS SÓLIDOS RÍGIDOS

3.1	Sólidos Rígidos, Fuerzas Externas e Internas. Diagrama de Cuerpo Libre.	20
3.2	Estática de los Sólidos Rígidos.	21
3.3	Condiciones de Apoyo.	22
3.4	Estabilidad del Equilibrio.	25

CAPITULO 4

APLICACIONES DEL EQUILIBRIO DE LOS SÓLIDOS RÍGIDOS

4.1	Análisis de Armaduras.	31
4.2	Métodos de Análisis.	32
4.3	Marcos.	39
4.4	Rozamiento	41
4.5	Sistema de Fuerzas Distribuidas	45
4.6	Cables.	47

CAPITULO 5

CENTROIDES

5.1	Centro de Gravedad, Centro de Masa, Centroide.	50
5.2	Centroides de Areas y Líneas.	54
5.3	Centroides de Figuras Compuestas.	55

CAPITULO 6

MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN

6.1	Momentos y Productos de Inercia de Areas.	59
6.1.1	Definiciones.	59
6.1.2	Traslación de Ejes de Coordenadas.	62
6.1.3	Rotación de Ejes de Coordenadas.	66
6.1.4	Ejes Principales de Inercia.	68
6.2	Momentos y Productos de Inercia de Masas.	69
6.2.1	Definiciones.	69
6.2.2	Traslación de Ejes de Coordenadas.	72
6.2.3	Rotación de Ejes de Coordenadas.	77
6.2.4	Ejes Principales de Inercia.	80

CAPITULO 7

CINEMATICA

7.1	Cinemática de la Partícula.	86
7.2	Descripción del Movimiento en Componentes Rectangulares.	87
7.3	Descripción del Movimiento en Componentes Tangencial y Normal	88

7.4	Descripción del Movimiento en Coordenadas Cilíndricas.	86
7.5	Movimiento Relativo.	96
7.6	Cinemática de los Sólidos Rígidos.	97
7.7	Rotación de un Sistema de Ejes.	101
7.8	Movimiento de una Partícula Referido a un Sistema de Coordenadas Móviles.	101
7.9	Descripción del Movimiento de un Sólido Rígido.	105
7.10	Movimiento Plano de un Sólido Rígido. Centro Instantáneo.	107

CAPITULO 8

FUERZA, MASA Y ACELERACION

8.1	Introducción, Leyes de Newton.	110
8.2	Sistemas de Unidades.	110
8.3	Ecuaciones del Movimiento de una Partícula	112
8.4	Ecuaciones del Movimiento de un Sistema de Partículas.	115
8.5	Ecuaciones del Movimiento de los Sólidos Rígidos.	117

CAPITULO 9

TRABAJO Y ENERGIA.

9.1	Principio del Trabajo y Energía Cinética. Unidades.	121
9.2	Sistema de Fuerzas Conservativas. Energía Potencial.	122
9.3	Principio de Conservación de la Energía Mecánica.	124
9.4	Principio del Trabajo y Energía Cinética para un Sistema de Partículas.	125
9.5	Principio del Trabajo y Energía Cinética para los Sólidos Rígidos. Conservación de la Energía.	127

CAPITULO 10

IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

10.1	Impulso y Cantidad de Movimiento de una Partícula	133
10.2	Impulso y Cantidad de Movimiento de un Sistema de	

Partículas.	134
10.3 Principio de Conservación del Movimiento Cinético.	139
10.4 Impulso y Cantidad de Movimiento de los Sólidos Rígidos.	139

APENDICE

Propiedades de Secciones Fláas y de Cuerpos Sólidos.	144
--	-----

CAPITULO 1

MECANICA

1.1 INTRODUCCION.

La formación de todo ingeniero comienza con esta ciencia llamada MECANICA. En ella se encuentran principios básicos que contribuyen a dar forma a cualquier especialización de la Ingeniería. Su contenido es enormemente amplio, tan amplio como su propia definición. "La ciencia que trata con las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos sometidos a la acción de fuerzas". Para su estudio, la Mecánica se divide en tres partes:

- a) Mecánica de los sólidos rígidos;
- b) Mecánica de los sólidos deformables;
- c) Mecánica de los fluidos.

Todos los cuerpos reales, cuando son sometidos a la acción de fuerzas, sufren algunas deformaciones. En la mayoría de los casos estas deformaciones son imperceptibles, así que para su estudio y análisis consideramos que no existen tales deformaciones. Cuando llevamos a cabo esta idealización, estamos dándole la categoría de cuerpo rígido y su estudio cae dentro de la MECANICA DE LOS SOLIDOS RIGIDOS, que es el tema que desarrollaremos en este trabajo. Cuando las deformaciones tienen alguna importancia es necesario tomarlas en cuenta en el análisis, llegando así a la Mecánica de los Sólidos Deformables, también conocida como Resistencia de Materiales. Además de cuerpos sólidos, en la naturaleza encontramos líquidos y gases; su estudio queda comprendido en la tercera parte: Mecánica de los Fluidos.

1.2 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA MECANICA.

La base de la Mecánica está en sus principios fundamentales, hechos que la experiencia ha confirmado y a partir de los cuales se desarrolla la enorme teoría de esta ciencia. Estos principios, han servido y siguen sirviendo para hallar las soluciones a problemas sobre reposo o movimiento de los cuerpos que encontramos a nuestro alrededor. Son **cuatro** los principios fundamentales y los podemos enunciar como sigue:

Leyes de Newton.

Primera Ley.- Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme, a menos que sobre él actúe una fuerza.

Segunda Ley.- Si sobre un cuerpo actúa una fuerza, éste se moverá con una

aceleración proporcional a la magnitud de la fuerza y con la misma dirección y sentido que la fuerza.

Tercera Ley.- A toda acción hay siempre una reacción igual y opuesta, es decir, que las acciones mutuas de dos cuerpos, uno sobre el otro, son siempre iguales y dirigidos en sentidos contrarios.

Ley de la Gravedad de Newton.- Dos partículas se atraen mutuamente con fuerzas iguales y opuestas, de magnitud directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

1.3 DEFINICION DE FUERZA.

Una fuerza se define como la acción de un cuerpo sobre otro, de modo que el segundo cambia o tiende a cambiar su estado de reposo o movimiento, o su forma.

Hay diversos tipos de fuerzas, entre los cuales mencionaremos algunos ejemplos: el peso, que es la fuerza de atracción de la tierra sobre los cuerpos; el empuje que podemos ejercer con nuestras manos sobre algún cuerpo; la fuerza de atracción magnética; la presión de un gas encerrado en un recipiente; la presión del viento sobre las paredes de un edificio; la presión atmosférica, etc.

Un cuerpo que cuelga sostenido por una cuerda (Fig. 1.1) es un ejemplo que nos dará una idea clara del concepto de fuerza. Pensamos que el cuerpo tira de la cuerda con una fuerza W igual a su peso, aplicada en el punto de amarre B , vertical y hacia abajo

Del ejemplo anterior podemos deducir que para definir completamente una fuerza necesitamos conocer sus características, que son cuatro, a saber:

a) Magnitud.- Es la medida de la intensidad de la fuerza. Se obtiene comparándola con cierto patrón, el cual se ha elegido arbitrariamente como unidad de fuerza. La unidad

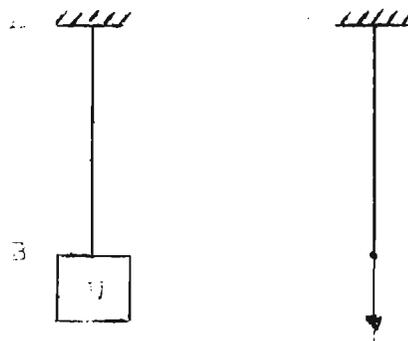


Fig. 1.1

de fuerza que se toma comúnmente es el kilogramo (kg), definido como la fuerza con que la tierra atrae una cierta masa de platino, a 45° de latitud y al nivel del mar. El múltiplo más empleado es la tonelada métrica (T)

que equivale a 1000 kg , y como sub-múltiplo el gramo (g) que equivale a 0.001 kg. En los países de habla inglesa, la unidad de fuerza de uso común es la libra (lb) y sus múltiplos son el KIP (1000 lb) y la tonelada (2000 lb).

b) Punto de Aplicación.- Es el punto en el cual puede considerarse concentrada la fuerza. En realidad, físicamente esto no puede ser cierto, toda fuerza debe tener cierta superficie o volumen en los cuales distribuye su acción. Si regresamos al ejemplo anterior la fuerza W que ejerce el cuerpo sobre la cuerda realmente se distribuye sobre toda la superficie de la sección transversal de la cuerda. Otro ejemplo: el peso es una fuerza de atracción de la tierra, por efecto de la gravedad, que se distribuye en todo el volumen del cuerpo. Sin embargo, frecuentemente lo consideraremos concentrado en un solo punto, sin alterar las demás condiciones del problema que se esté tratando. El punto de aplicación en el cual puede suponerse concentrado el peso de un cuerpo es denominado centro de gravedad del cuerpo.

c) Dirección.- Es la de la recta que pasa por su punto de aplicación y a lo largo de la cual actúa la fuerza. Todo cuerpo al que se le aplica una fuerza, tiende a moverse a lo largo de una línea recta que lleva la dirección de la fuerza; así por ejemplo, un cuerpo que se ve sometido únicamente a la acción de su propio peso, que es siempre vertical, tendrá una tendencia a moverse a lo largo de una línea vertical que pase por su centro de gravedad. Otro ejemplo lo tenemos cuando una fuerza es ejercida sobre un cuerpo a través de una cuerda flexible, la dirección de la fuerza está determinada por la cuerda. A la línea recta que lleva la misma dirección que la fuerza se le conoce como "recta de acción de la fuerza".

d) Sentido.- Nos da a conocer la forma en que actúa la fuerza a lo largo de su línea de acción. En el inciso anterior vimos que cuando un cuerpo está bajo la acción de una fuerza, tiende a moverse sobre una línea recta que lleva la dirección de la fuerza, el sentido del movimiento será igual al sentido que tenga la fuerza que tiende a provocar ese movimiento. Volvamos al mismo ejemplo del cuerpo sobre el que actúa solamente su propio peso. ¿Cómo se moverá? Lo hará verticalmente y hacia abajo porque la fuerza de gravedad es siempre vertical y hacia abajo.

De acuerdo con la discusión anterior nos damos cuenta que una fuerza puede ser representada mediante un vector cuya longitud y dirección correspondan a la magnitud y dirección de la fuerza. Para definir completamente la acción de una fuerza, su magnitud, punto de aplicación, dirección y sentido deben ser dados.

CAPITULO 2

OPERACIONES CON FUERZAS.

2.1 RESULTANTE DE DOS FUERZAS CONCURRENTE.

Cuando varias fuerzas actúan sobre un cuerpo, decimos que éstas forman un sistema de fuerzas. Si además las fuerzas están aplicadas en un mismo punto, el sistema recibe el nombre particular de Sistema de fuerzas concurrentes.

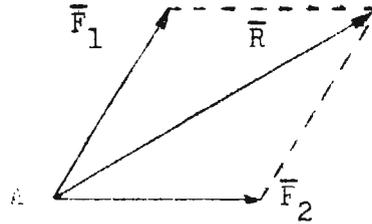


Fig. 2.1

Sean \vec{F}_1 y \vec{F}_2 un sistema de dos fuerzas concurrentes (Fig. 2.1). Se-

gún las reglas del cálculo vectorial, la suma de \vec{F}_1 y \vec{F}_2 es el vector \vec{R} determinado por la diagonal del paralelogramo que tiene por lados a \vec{F}_1 y \vec{F}_2 . Este principio es conocido como la ley del paralelogramo y la fuerza \vec{R} es llamada la resultante de \vec{F}_1 y \vec{F}_2 .

Es un hecho experimental que las fuerzas obedecen la ley de la suma vectorial y que el efecto de \vec{R} sobre el cuerpo considerado es igual al producido por \vec{F}_1 y \vec{F}_2 .

La operación que consiste en determinar la resultante de un sistema de fuerzas se conoce con el nombre de Composición de Fuerzas.

EJEMPLO. 2.1

Determinar la resultante de las fuerzas mostradas.

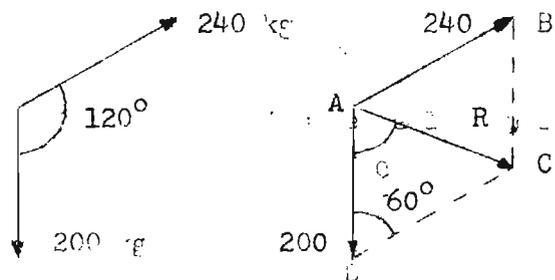
Solución.- Construimos el paralelogramo ABCD con lados iguales a las fuerzas de 240 kg y 200 kg. Del triángulo ACD obtenemos;

$$a) R^2 = (240)^2 + (200)^2 - 2 \times 200 \times 240 \times \cos 60^\circ$$

$$\therefore R = 222 \text{ kg}$$

$$b) \frac{240}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin 60^\circ}$$

$$\alpha = 69^\circ$$



2.2 RESOLUCIÓN DE UNA FUERZA EN SUS COMPONENTES.

La operación inversa a la composición de fuerzas se le llama resolución o descomposición de fuerzas. Así, para una fuerza dada \vec{R} podemos encontrar dos fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 , llamadas componentes de \vec{R} cuya suma sea igual a \vec{R} (Fig.2.1).

En muchos problemas es útil descomponer una fuerza en componentes perpendiculares entre sí. En la figura 2.2 la fuerza \vec{F} se ha descompuesto en una componente \vec{F}_1 a lo largo del eje X y una componente \vec{F}_2 según el eje Y. Es costumbre denominar las componentes colocándoles un sub-índice que indica la dirección de la componente; así, a \vec{F}_1 y \vec{F}_2 las llamamos \vec{F}_x y \vec{F}_y respectivamente. Las componentes que se obtienen de esta manera se llaman componentes rectangulares.

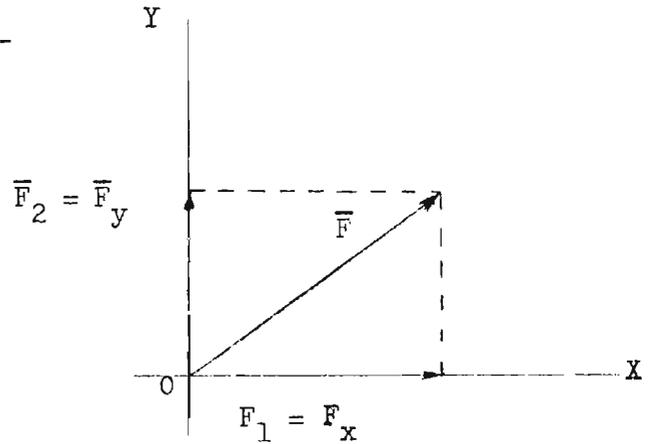


Fig. 2.2

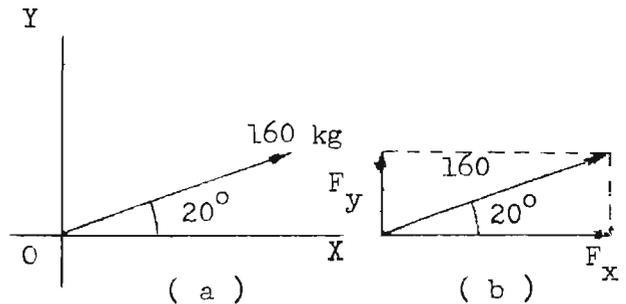
EJEMPLO 2.2

Encontrar las componentes rectangulares de la fuerza indicada.

Solución.- De la figura (b):

$$F_x = 160 \cos 20^\circ = 150 \text{ kg}$$

$$F_y = 160 \sin 20^\circ = 55 \text{ kg}$$



2.3 COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA EN TRES DIMENSIONES

Consideremos una fuerza \vec{F} dirigida del origen O del sistema de ejes de coordenadas X, Y, Z, a un punto A (Fig. 2.3). Podemos descomponer la fuerza \vec{F} en una componente horizontal \vec{F}_{xz} y una componente vertical \vec{F}_y . Luego, \vec{F}_{xz} puede descomponerse en otras dos componentes rectangulares \vec{F}_x y \vec{F}_z según los ejes X y Z respectivamente. De esta manera se ha descompuesto \vec{F} en tres componentes rectangulares \vec{F}_x , \vec{F}_y , \vec{F}_z , dirigidos según ejes X, Y, Z respectivamente. Si ahora dibujamos un paralelepípedo que tenga como aristas a \vec{F}_x , \vec{F}_y , \vec{F}_z (Fig. 2.4). La fuerza \vec{F} será entonces la diagonal de ese paralelepípedo. De la geometría de la figura tenemos:

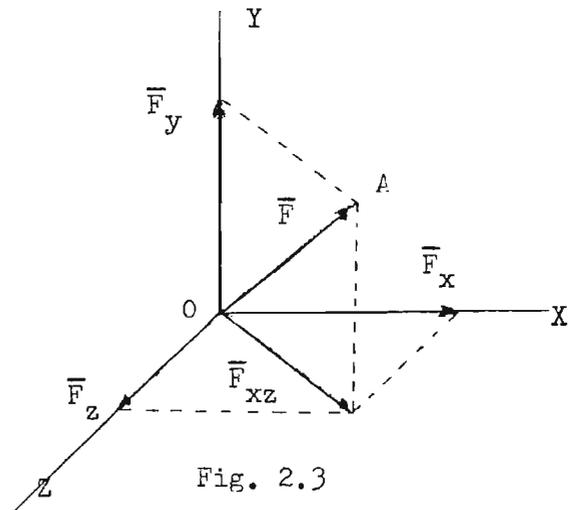


Fig. 2.3

$$F_x = F \cos \theta_x$$

$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$F_z = F \cos \theta_z$$

(2.1)

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

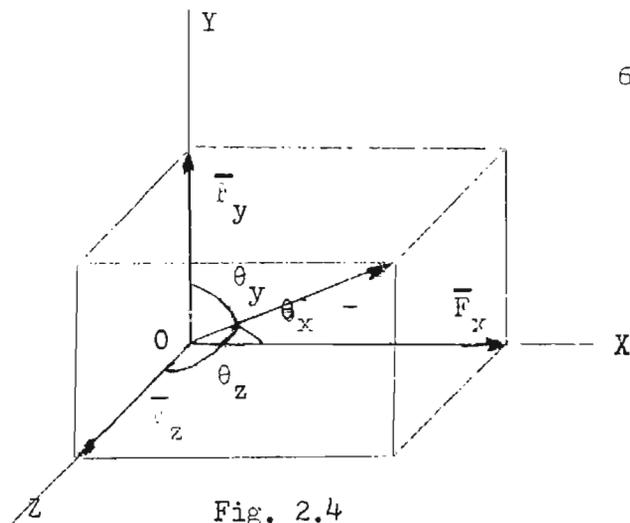


Fig. 2.4

donde θ_x , θ_y , θ_z , son los ángulos que \vec{F} forman con cada uno de los ejes de coordenadas y sus cosenos son llamados cosenos directores de \vec{F} .

Los escalares F_x , F_y , F_z se denominan componentes escalares de \vec{F} , mientras que los vectores \vec{F}_x , \vec{F}_y , \vec{F}_z , se conocen como componentes vectoriales de \vec{F} .

En general, llamaremos componentes de \vec{F} tanto a las escalares como a las vectoriales.

Veamos ahora un sistema de vectores unitarios que tienen las direcciones positivas de los ejes X, Y, Z, (Fig. 2.5). Se designan como \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , respectivamente y nos serán de gran utilidad para expresar los vectores en forma analítica. Así, podemos escribir:

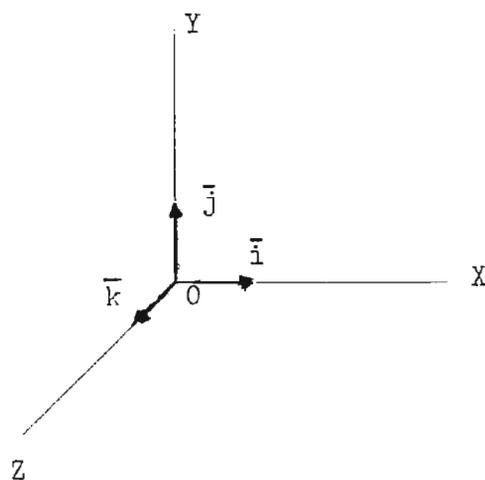


Fig. 2.5

$$\vec{F}_x = F_x \vec{i}$$

$$\vec{F}_y = F_y \vec{j}$$

$$\vec{F}_z = F_z \vec{k}$$

(2.2)

$$\therefore \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

Si ahora sustituimos las ecuaciones (2.1) en (2.2) obtenemos;

$$\vec{F} = F \cos \theta_x \vec{i} + F \cos \theta_y \vec{j} + F \cos \theta_z \vec{k}$$

(2.3)

$$\vec{F} = F (\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k})$$

Lo que significa que \vec{F} puede expresarse como el producto de su magnitud por el vector unitario \vec{e} , siendo:

$$\vec{e} = \cos\theta_x \vec{i} + \cos\theta_y \vec{j} + \cos\theta_z \vec{k} \quad (2.4)$$

EJEMPLO 2.3

Expresar, usando los vectores unitarios \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , la fuerza de 100 kg que va dirigida del punto A(2, -5, 3) al punto B(5, 2, -4).

Solución.- El vector unitario que lleva la dirección de la recta dirigida de A hacia B es:

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \frac{5-2}{\sqrt{(5-2)^2 + (2-(-5))^2 + (-4-3)^2}} \vec{i} + \frac{2-(-5)}{\sqrt{107}} \vec{j} + \frac{-4-3}{\sqrt{107}} \vec{k} \\ &= 0.290 \vec{i} + 0.677 \vec{j} - 0.677 \vec{k} \end{aligned}$$

Luego:

$$\vec{F} = F \vec{e}$$

$$F = 29.0 \vec{i} + 67.7 \vec{j} - 67.7 \vec{k}$$

2.4 RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS CONCURRENTES.

Según hemos visto, cuando sobre un cuerpo actúan varias fuerzas, todas pasando por un mismo punto, constituyen un sistema de fuerzas concurrentes.

Sean \vec{F}_1 , \vec{F}_2 y \vec{F}_3 un sistema de fuerzas concurrentes que actúan sobre un cuerpo. Su resultante está definida por:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \sum \vec{F} \quad (2.5)$$

Si expresamos cada fuerza por medio de sus componentes rectangulares, tendremos:

$$\vec{F}_1 = F_{1x} \vec{i} + F_{1y} \vec{j} + F_{1z} \vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = F_{2x} \vec{i} + F_{2y} \vec{j} + F_{2z} \vec{k}$$

$$\vec{F}_3 = F_{3x} \vec{i} + F_{3y} \vec{j} + F_{3z} \vec{k}$$

$$\begin{aligned}\bar{R} = \Sigma \bar{F} &= (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}) \bar{i} \\ &+ (F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}) \bar{j} \\ &+ (F_{1z} + F_{2z} + F_{3z}) \bar{k}\end{aligned}$$

De lo que se deduce que:

$$\bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k} \quad (2.6)$$

donde:

$$R_x = \Sigma F_x$$

$$R_y = \Sigma F_y \quad (2.7)$$

$$R_z = \Sigma F_z$$

La magnitud de la resultante \bar{R} será:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (2.8)$$

y los cosenos directores:

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R}$$

$$\cos \theta_y = \frac{R_y}{R} \quad (2.9)$$

$$\cos \theta_z = \frac{R_z}{R}$$

EJEMPLO 2.4

Tres fuerzas cuyas magnitudes son 700 kg, 1300 kg y 1400 kg son concurrentes en el origen de coordenadas y están dirigidas a los puntos A(2, -3, 6), B(3, 4, 12), C(-6, 4, -12), respectivamente. Determinar la resultante del sistema.

Solución.- Escribir cada fuerza por medio de sus componentes rectangulares. llamando \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , y \bar{F}_3 a las fuerzas de 700 kg, 1300 kg y 1400 kg, respecti-

vamente, tenemos:

$$\bar{e}_1 = \frac{2}{7} \bar{i} - \frac{3}{7} \bar{j} + \frac{6}{7} \bar{k}$$

$$\bar{e}_2 = \frac{3}{13} \bar{i} + \frac{4}{13} \bar{j} + \frac{12}{13} \bar{k}$$

$$\bar{e}_3 = \frac{6}{14} \bar{i} + \frac{4}{14} \bar{j} - \frac{12}{14} \bar{k}$$

Luego:

$$\bar{F}_1 = 200 \bar{i} - 300 \bar{j} + 600 \bar{k}$$

$$\bar{F}_2 = 300 \bar{i} + 400 \bar{j} + 1200 \bar{k}$$

$$\bar{F}_3 = 600 \bar{i} + 400 \bar{j} - 1200 \bar{k}$$

La resultante de las tres fuerzas dadas es, por definición,

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$$

o sea:

$$\bar{R} = 100 \bar{i} + 500 \bar{j} + 600 \bar{k}$$

2.5 VECTOR DE POSICION.

El vector de posición \bar{r}_A del punto $A(x_A, y_A, z_A)$ es el segmento rectilíneo dirigido desde algún punto de referencia O (tomado como origen de coordenadas) al punto A . Las componentes de \bar{r}_A son simplemente las coordenadas del punto A .

Fig. 2.6 . Así

$$\bar{r}_A = x_A \bar{i} + y_A \bar{j} + z_A \bar{k} \quad (2.10)$$

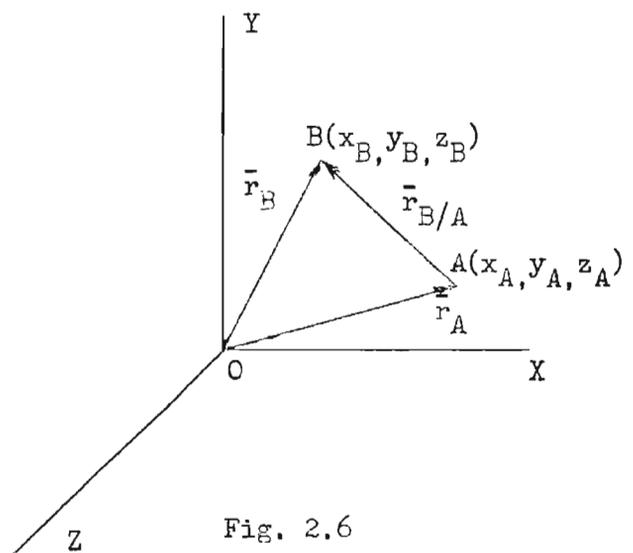


Fig. 2.6

$$(2.11)$$

Un vector dirigido de cualquier punto $A(x_A, y_A, z_A)$ a otro punto

$\vec{r}_B(x_B, y_B, z_B)$ es llamado el vector de posición de B con respecto a A y es denotado por $\vec{r}_{B/A}$. En virtud de la regla para la suma de vectores, podemos escribir:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \quad (2.11)$$

o sea:

$$\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad (2.12)$$

pero:

$$\vec{r}_B = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k}$$

$$\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}$$

$$\therefore \vec{r}_{B/A} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k} \quad (2.13)$$

2.6 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO.

Sea una fuerza \vec{F} aplicada en el punto A cuya posición está determinada por \vec{r} (Fig. 2.7). El momento de \vec{F} respecto a O se define como:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.14)$$

según esta definición, \vec{M}_O es un vector perpendicular al plano que contenga a O y a F. Su magnitud es:

$$M_O = rF \sin\theta = Fd \quad (2.15)$$

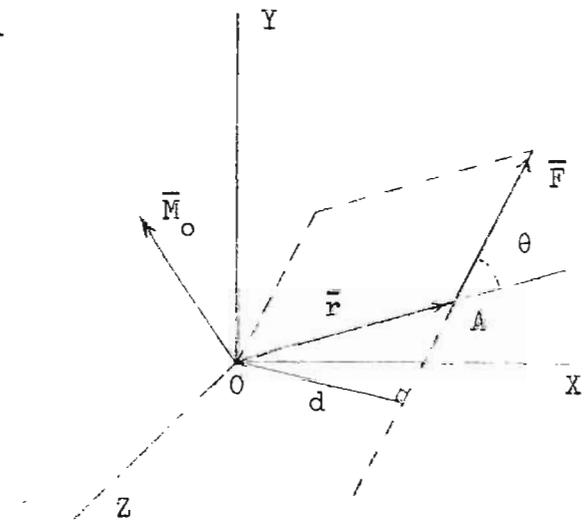


Fig. 2.7 (2.15)

Donde θ es el ángulo formado por las rectas de acción de \vec{r} y \vec{F} , y d es la distancia perpendicular entre O y la recta de acción de \vec{F} . De la ecuación (2.15) podemos observar que el momento \vec{M}_O depende únicamente de la fuerza \vec{F} y de la distancia d , es decir, que no depende de la situación real del punto de aplicación de la fuerza. Por lo tanto, \vec{r} es el vector dirigido del

punto O a cualquier punto sobre la recta de acción de la fuerza \vec{F} .

Esta conclusión es conocida como el Principio de Transmisibilidad: una fuerza puede considerarse aplicada sobre cualquier punto contenido en su recta de acción.

2.7 TEOREMA DE VARIGNON.

Fue establecido por el francés Varignon. Dice así: "El momento con respecto a un punto dado de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al mismo punto".

Una demostración de este teorema puede hacerse empleando la ley distributiva del producto vectorial.

En efecto, sean $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ un sistema de fuerzas concurrentes aplicadas en el punto A. (Fig. 2.8).

La resultante de estas fuerzas es según (2.5):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

El momento de R con respecto a O es:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{R}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 \quad (2.16)$$

Así, la ecuación (2.16) es la expresión matemática del teorema de Varignon.

EJEMPLO 2.5

La fuerza \vec{F} está dirigida del punto A(x_1, y_1) al punto B(x_2, y_2). Determinar el momento de la fuerza con respecto al origen.

Solución. Sabemos que el momento se obtiene realizando el producto vectorial:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

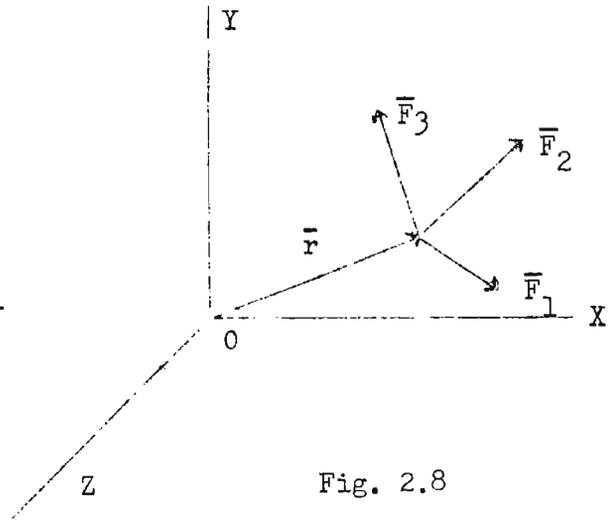


Fig. 2.8

Para nuestro problema tomaremos \vec{r} como el vector de O a A, así:

$$\vec{r} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$$

además:

$$\vec{F} = F \vec{e}$$

$$\vec{F} = \frac{F}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \left[(x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} \right]$$

Del algebra vectorial sabemos que un producto vectorial puede desarrollarse mediante un determinante que lleva en la primera fila los vectores unitarios \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} ; en la segunda, las componentes rectangulares del primer vector; y finalmente en la tercera, lleva las componentes rectangulares del segundo vector. Por lo tanto, podemos escribir:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & 0 \end{vmatrix} \frac{F}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

$$M_O = \frac{x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} F \vec{k}$$

2.8 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE.

El momento M_{OL} de una fuerza \vec{F} respecto a un eje OL se define como la proyección OC sobre el eje OL del \vec{M}_O de \vec{F} con respecto a O. Llamando \vec{e} al vector unitario a lo largo de OL y recordando las propiedades del producto escalar, tendremos:

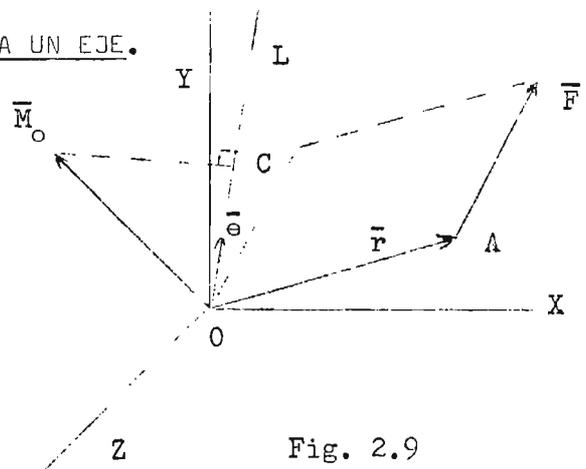


Fig. 2.9

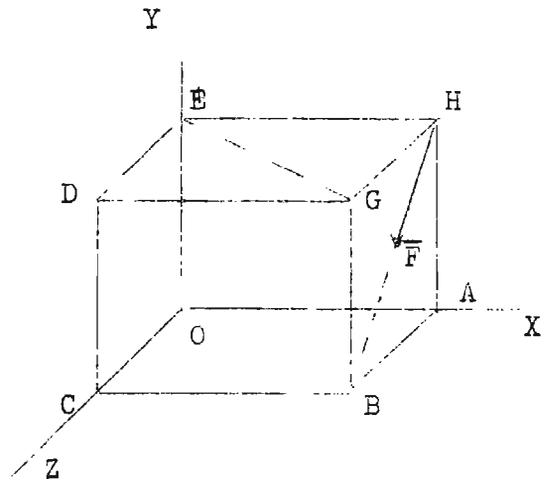
$$M_{OL} = \bar{e} \cdot \bar{M}_O$$

$$M_{OL} = \bar{e} \cdot (\bar{r} \times \bar{F}) \quad (2.17)$$

EJEMPLO 2.6

La fuerza \bar{F} actúa según la diagonal de un cubo de arista a , como se muestra en la figura. Calcular el momento de \bar{F} con respecto a la recta que va de E a G.

Solución.- Hemos visto que el momento de una fuerza se determina mediante el producto mixto:



$$M_{OL} = \bar{e} \cdot (\bar{r} \times \bar{F})$$

Se demuestra en Álgebra Vectorial que esta operación puede desarrollarse resolviendo un determinante que tenga en su primera fila las componentes rectangulares del primer vector; en la segunda fila, las del segundo; y en la tercera fila, las componentes rectangulares del tercer vector. Necesitamos, pues, conocer las componentes cartesianas de \bar{e} , \bar{r} y \bar{F} .

$$\bar{e} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\bar{i} + \bar{j})$$

$$\bar{r} = \overline{EH} = a\bar{i}$$

$$\bar{F} = \frac{F\sqrt{2}}{2} (-\bar{j} + \bar{k})$$

Luego:

$$M_{EG} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

$$= -\frac{aF}{2}$$

2.9 PARES.

Se llama Cupla o Par al sistema formado por dos fuerzas que tienen la misma magnitud, rectas de acción paralelas y sentidos opuestos. Es evidente que la suma vectorial de las fuerzas es cero y que su único efecto es producir una rotación o una tendencia a girar.

Sean \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , respectivamente, los vectores de posición de los puntos de aplicación de las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 que forman un par (Fig. 2.10).

Tomando momentos con respecto a 0 tenemos:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

El momento resultante de las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 con respecto a 0 es la suma de \vec{M}_1 y \vec{M}_2 . Así:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \end{aligned}$$

Pero entre las dos fuerzas existe la relación $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$; por lo tanto:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_1)$$

$$\vec{M} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1$$

De la figura 2.10 tenemos:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{r}$$

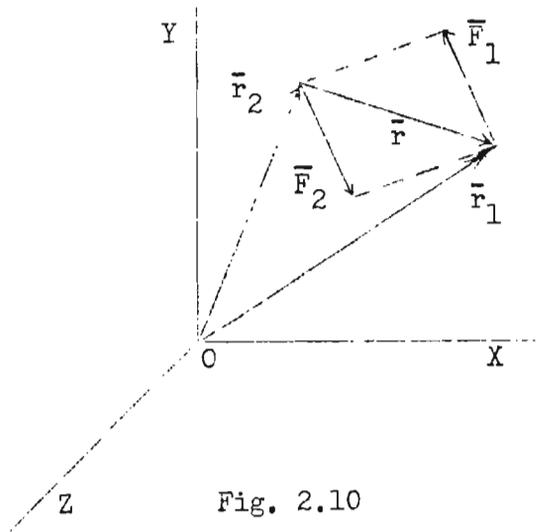


Fig. 2.10

0 sea:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Finalmente:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_1 \quad (2.18)$$

Como \vec{r} es independiente del punto O, el momento del par es independiente del punto con respecto al cual el momento es calculado, es decir, el momento de un par es un vector libre. La magnitud del momento es $rF_1 \sin \theta$ en la cual $r \sin \theta$ es la distancia entre las dos fuerzas.

EJEMPLO 2.7

Obtener el par resultante de las fuerzas cuyas rectas de acción son las diagonales de las caras del paralelepípedo rectangular que se indica.

Solución.- El momento del par formado por las fuerzas de 10 kg es:

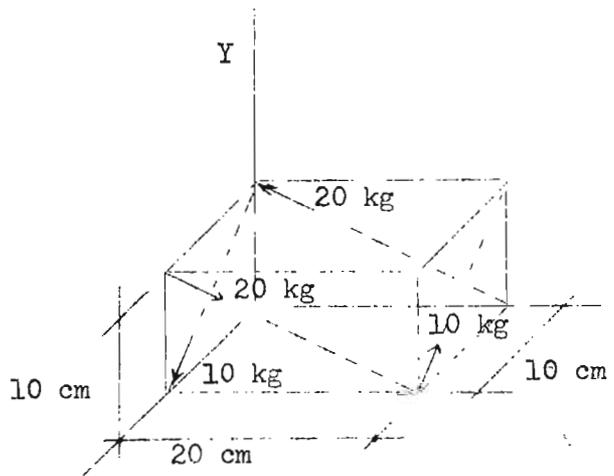
$$\begin{aligned} \vec{M}_1 &= (20 \vec{i}) \times (7.07 \vec{j} - 7.07 \vec{k}) \\ &= 141.4 \vec{j} + 141.4 \vec{k} \quad (\text{kg} \cdot \text{cm}) \end{aligned}$$

Para las fuerzas de 20 kg tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{M}_2 &= (10 \vec{k}) \times (17.90 \vec{i} - 8.95 \vec{j}) \\ &= 89.5 \vec{i} + 179.0 \vec{j} \quad (\text{kg} \cdot \text{cm}.) \end{aligned}$$

Puesto que los pares son vectores libres, \vec{M}_1 y \vec{M}_2 pueden sumarse vectorialmente. Así, el par resultante \vec{M} será:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \\ &= 89.5 \vec{i} + 320.4 \vec{j} + 141.4 \vec{k} \quad (\text{kg} \cdot \text{cm}.) \end{aligned}$$



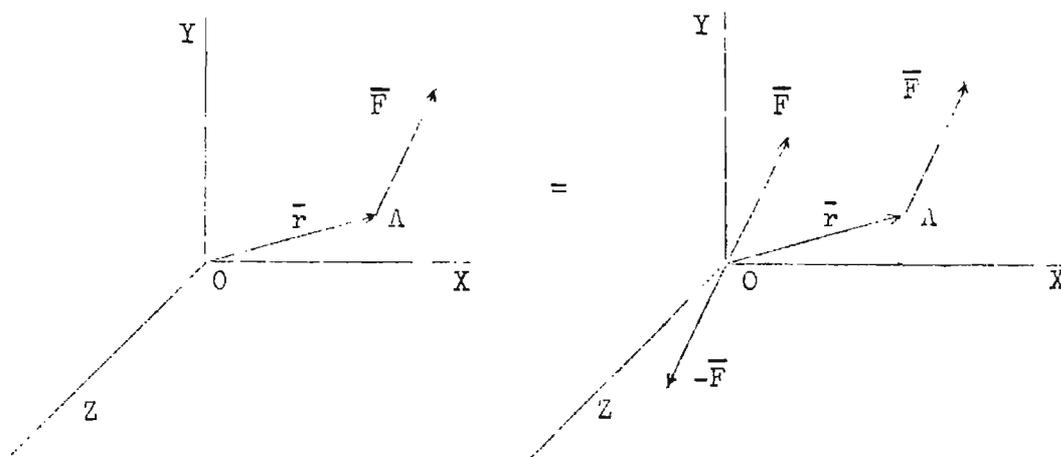
2.10 RESOLUCION DE UNA FUERZA EN UNA FUERZA Y UN PAR.

Fig. 2.11

Empleando las nociones de fuerza y par, es posible descomponer una fuerza dada en otra fuerza aplicada en algún punto determinado y un par. Sea \vec{F} la fuerza que queremos descomponer en otra fuerza aplicada en O y un par (Fig. 2.11). Situemos con origen O un sistema de coordenadas; luego, podemos aplicar en O dos fuerzas, una igual a \vec{F} y la otra a $-\vec{F}$. Es decir, hemos aumentado al sistema un vector cero, no alterando, por lo tanto, la acción de la fuerza primitiva. Como resultado de esta transformación, tenemos ahora una fuerza \vec{F} aplicada en O ; las otras dos fuerzas forman un par de momento $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$. Por consiguiente, "Una fuerza \vec{F} puede ser trasladada a un punto arbitrario O , siempre que se acompañe de un par igual al momento de \vec{F} respecto a O ".

Siguiendo este procedimiento podemos llegar a simplificar un sistema cualquiera de fuerzas.

Supongamos un sistema de n fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$. Primero elegimos un punto arbitrario O y enseguida descomponemos cada fuerza \vec{F}_i en otra fuerza \vec{F}_i que pase por O y el par $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$. Cuando esta operación se ha realizado para todas las fuerzas, el resultado es entonces un sistema de fuerzas, concurrentes en O , y un sistema de vectores momentos también concurrentes en O . Estos pueden combinarse sumando vectorialmente cada sistema por separado hasta obtener una fuerza resultante y un par resultante. Por lo tanto, cualquier sistema de fuerzas, por complejo que sea, puede reducirse a un sistema equivalente de fuerzas y pares que actúan en el punto dado.

Las expresiones analíticas de esta operación son:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}$$

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots + \vec{M}_n = \sum \vec{M}$$

En coordenadas cartesianas:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

$$\vec{M}_R = M_{Rx} \vec{i} + M_{Ry} \vec{j} + M_{Rz} \vec{k}$$

Siendo:

$$R_x = \sum F_x; R_y = \sum F_y; R_z = \sum F_z$$

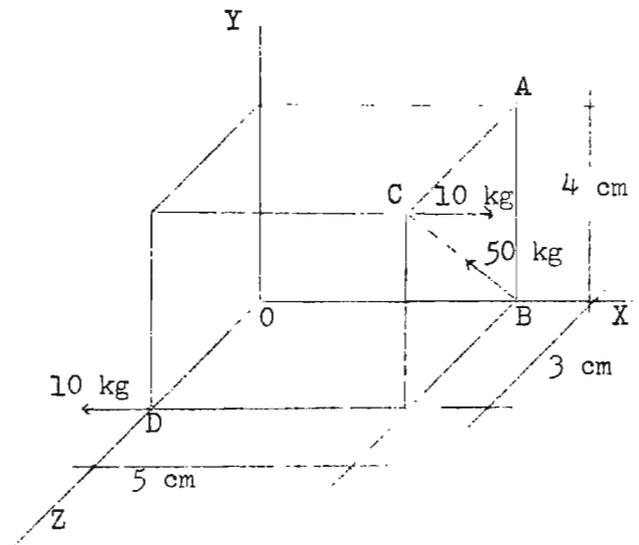
$$M_{Rx} = \sum M_x; M_{Ry} = \sum M_y; M_{Rz} = \sum M_z \quad (2.19)$$

EJEMPLO 2.8

Sustituir el sistema de fuerzas mostrado por otro equivalente aplicado en el punto A.-

Solución.- Al trasladar todas las fuerzas al punto A, vemos que las fuerzas de 10 kg se anulan, quedando únicamente la de 50 kg, que en componentes rectangulares es:

$$\vec{R} = 40\vec{j} + 30\vec{k} \quad (\text{kg})$$



El par resultante en este punto es el vector suma de los pares que se obtienen debido a la traslación de las fuerzas. Así, para la fuerza de 10 kg aplicada en c:

$$\vec{M}_1 = (3\vec{k}) \times (10\vec{i}) = 30\vec{j} \quad (\text{kg-cm})$$

Para la fuerza de 10 kg en D:

$$\begin{aligned}\bar{M}_2 &= (- 4\bar{j} + 3\bar{k}) \times (- 10\bar{i}) \\ &= - 30\bar{j} - 40\bar{k} \quad (\text{kg-cm})\end{aligned}$$

Para la fuerza de 50 kg en B:

$$\begin{aligned}\bar{M}_3 &= (- 4\bar{j}) \times (40\bar{j} + 30\bar{k}) \\ &= - 120\bar{i} \quad (\text{kg-cm})\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\bar{M} &= \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3 \\ &= - 120\bar{i} - 40\bar{k} \quad (\text{kg-cm})\end{aligned}$$

2.11 CASOS PARTICULARES DE SISTEMAS DE FUERZAS .

El conjunto de seis ecuaciones de (2.19) representa el caso general de un sistema tridimensional. Sin embargo, a menudo nuestro trabajo estará relacionado con sistemas de fuerzas más sencillos, tales como fuerzas paralelas o sistemas coplanares. Por ejemplo, si el sistema no contiene componente de fuerza F_z entonces $R_z = \sum F_z$ es automáticamente nula, y el número de ecuaciones que intervienen es menor.

Los casos de sistemas de fuerzas y las ecuaciones correspondientes, deducidas de (2.19) que podemos encontrar es como sigue:

1.- Caso General de un Sistema Tridimensional.

Corresponde al sistema discutido en la sección anterior. Las ecuaciones son:

$$R_x = \sum F_x; R_y = \sum F_y; R_z = \sum F_z \quad (2.20)$$

$$M_{Rx} = \sum M_x; M_{Ry} = \sum M_y; M_{Rz} = \sum M_z$$

2.- Sistema Tridimensional de Fuerzas Concurrentes.

La resultante de este sistema es una fuerza única localizada en el punto de aplicación del sistema. Para determinarla completamente se deben determinar

sus tres componentes.

$$R_x = \sum F_x; R_y = \sum F_y; R_z = \sum F_z \quad (2.21)$$

3.- Sistema General de Fuerzas Coplanares.

Si definimos el plano, en el cual están contenidos todas las fuerzas del sistema, como (x,y) tendremos las siguientes ecuaciones.

$$R_x = \sum F_x; R_y = \sum F_y \quad (2.22)$$

$$M_z = \sum M_z$$

4.- Sistema Coplanar de Fuerzas Concurrentes.

En este caso todas las fuerzas están contenidas en un sólo plano, el cual puede definirse como en el caso anterior por (x,y), la resultante es una fuerza única que pasa por el p nto de aplicación del sistema. Las ecuaciones son, por lo tanto:

$$R_x = \sum F_x; R_y = \sum F_y \quad (2.23)$$

CAPITULO 3

ESTATICA DE LOS SOLIDOS RIGIDOS

3.1 SOLIDOS RIGIDOS. FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE.

Un sólido rígido es un modelo que idealiza un cuerpo sólido como una distribución continua de partículas, cuyas posiciones relativas se mantienen invariables. En forma más simple, diremos que es un sólido indeformable.

Las fuerzas involucradas en los problemas prácticos son de dos tipos:

- a) Fuerzas Externas.- representan la acción de otros cuerpos sobre el que se está estudiando. Determinan el estado (reposo o movimiento) del cuerpo considerado.
- b) Fuerzas Internas.- Mantienen unidas a las partes que componen el sólido rígido.

Al resolver un problema es necesario considerar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en estudio. Así, el primer paso en la solución del problema consiste en dibujar un diagrama de cuerpo libre, el cual se obtiene al aislar el cuerpo de todo lo que lo rodea.

En este diagrama deben indicarse claramente todas las fuerzas externas que representan acciones directamente aplicadas y reacciones de cuerpos circundantes. Cuando el sólido libre está formado por varias partes, las fuerzas que éstas ejercen unas sobre otras, son fuerzas internas y no deben por lo tanto, tomarse en cuenta en el diagrama de cuerpo libre.

Para ilustrar estos conceptos sobre fuerzas externas e internas y diagramas de cuerpo libre, consideremos los dos bloques de pesos W_1 y W_2 mostrados en la figura 3.1 (a). El diagrama de cuerpo libre cuando los dos bloques están juntos formando un solo cuerpo está dibujado en la Fig. 3.1(b), las fuerzas externas que actúan sobre este sistema son los pesos W_1 y W_2 y la fuerza N ejercida por la superficie de apoyo. Las acciones ejercidas por un bloque sobre el otro son fuerzas internas para este sistema, por esta razón no aparecen en el diagrama.

En la figura 3.1(c) están dibujados los diagramas de cuerpo libre para cada uno de los bloques. Las fuerzas externas para el bloque superior son su peso W_1 y la fuerza N_1 ejercida por el bloque inferior. Sobre el bloque inferior, las fuerzas externas son su peso W_2 , la fuerza N_1 debida al bloque superior y la fuerza N debida a la superficie de apoyo. Nótese como N_1 es una fuerza externa para cada bloque pero es una fuerza interna para el sistema de los dos bloques.

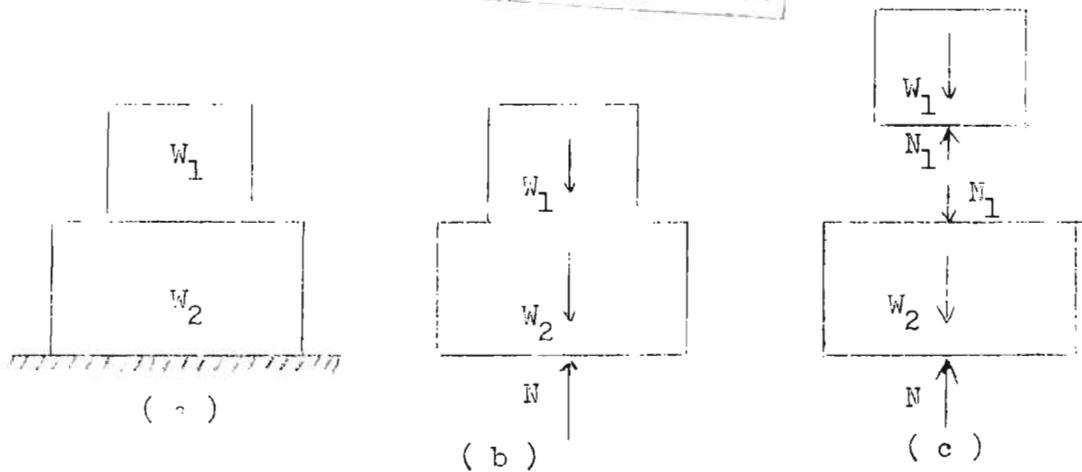


Fig. 3.1

3.2 ESTÁTICA DE LOS SÓLIDOS RÍGIDOS.-

ESTÁTICA es la parte de la mecánica que estudia los cuerpos en reposo.

Por definición, un sistema de fuerzas está en equilibrio cuando la fuerza resultante y el par resultante son iguales a cero. Las condiciones analíticas del equilibrio, de acuerdo con esta definición, las podemos escribir en forma vectorial así:

$$\bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k} = 0 \quad (3.1)$$

$$\bar{M}_R = M_{Rx} \bar{i} + M_{Ry} \bar{j} + M_{Rz} \bar{k} = 0$$

O bien, mediante las ecuaciones escalares siguientes:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0 \quad (3.2)$$

$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0$$

Podemos ahora definir el equilibrio de los sólidos rígidos de la siguiente manera: "un sólido rígido está en equilibrio cuando las fuerzas externas que actúan sobre él forman un sistema de fuerzas en equilibrio". Tomando en cuenta la segunda ley de Newton, podemos afirmar que un sólido rígido, inicialmente en reposo, permanecerá en reposo si dicho sólido se encuentra en equilibrio. Dicho de otra manera, "todo cuerpo en reposo se haya en equilibrio estático".

Como ya lo mencionamos anteriormente, frecuentemente estaremos frente a

problemas en los cuales el sistema de fuerzas aplicado a los sólidos rígidos es más sencillo que el caso general que se acaba de plantear. Es importante reconocer, para un sistema dado el número de ecuaciones independientes que pueden escribirse, puesto que así sabremos el número de incógnitas que pueden determinarse de las condiciones de equilibrio.

Así, el número de ecuaciones independientes para el:

1.- Caso General de un Sistema Tridimensional es de Seis:

$$\sum F_x = 0 ; \quad \sum F_y = 0 ; \quad \sum F_z = 0$$

(3.3)

$$\sum M_x = 0 ; \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

2.- Sistema Tridimensional de Fuerzas Concurrentes es de Tres:

$$\sum F_x = 0 ; \quad \sum F_y = 0 ; \quad \sum F_z = 0$$

(3.4)

3.- Sistema General de Fuerzas Coplanares es También de Tres :

$$\sum F_x = 0 ; \quad \sum F_y = 0 ; \quad \sum M_z = 0$$

(3.5)

4.- Sistema Coplanar de Fuerzas Concurrentes es de Dos:

$$\sum F_x = 0 ; \quad \sum F_y = 0$$

(3.6)

En la práctica, y con el objeto de obtener soluciones más sencillas debe seleccionarse cuidadosamente el sistema coordinado al cual son referidas las fuerzas. Las ecuaciones, de momentos por ejemplo, pueden simplificarse seleccionando un eje de momentos que corte las rectas de acción de algunas fuerzas del sistema, para que de esta manera sea el menor número posible de incógnitas las involucradas en dichas ecuaciones.

3.3 CONDICIONES DE APOYO.

Para encontrar la solución correcta de un problema dado, hemos dicho que debemos hacer un diagrama de cuerpo libre. Es importante, para hacer este diagrama el hecho de tener una idea clara acerca de que fuerzas son las que actúan sobre el sólido rígido en estudio. De aquí la necesidad de conocer los tipos de vínculo y la formas de interacción entre los cuerpos.

Sistemas Plancs.- Las reacciones ejercidas sobre una estructura bidimensional dependen del tipo de apoyo, y son los de uso mas frecuente los siguientes:

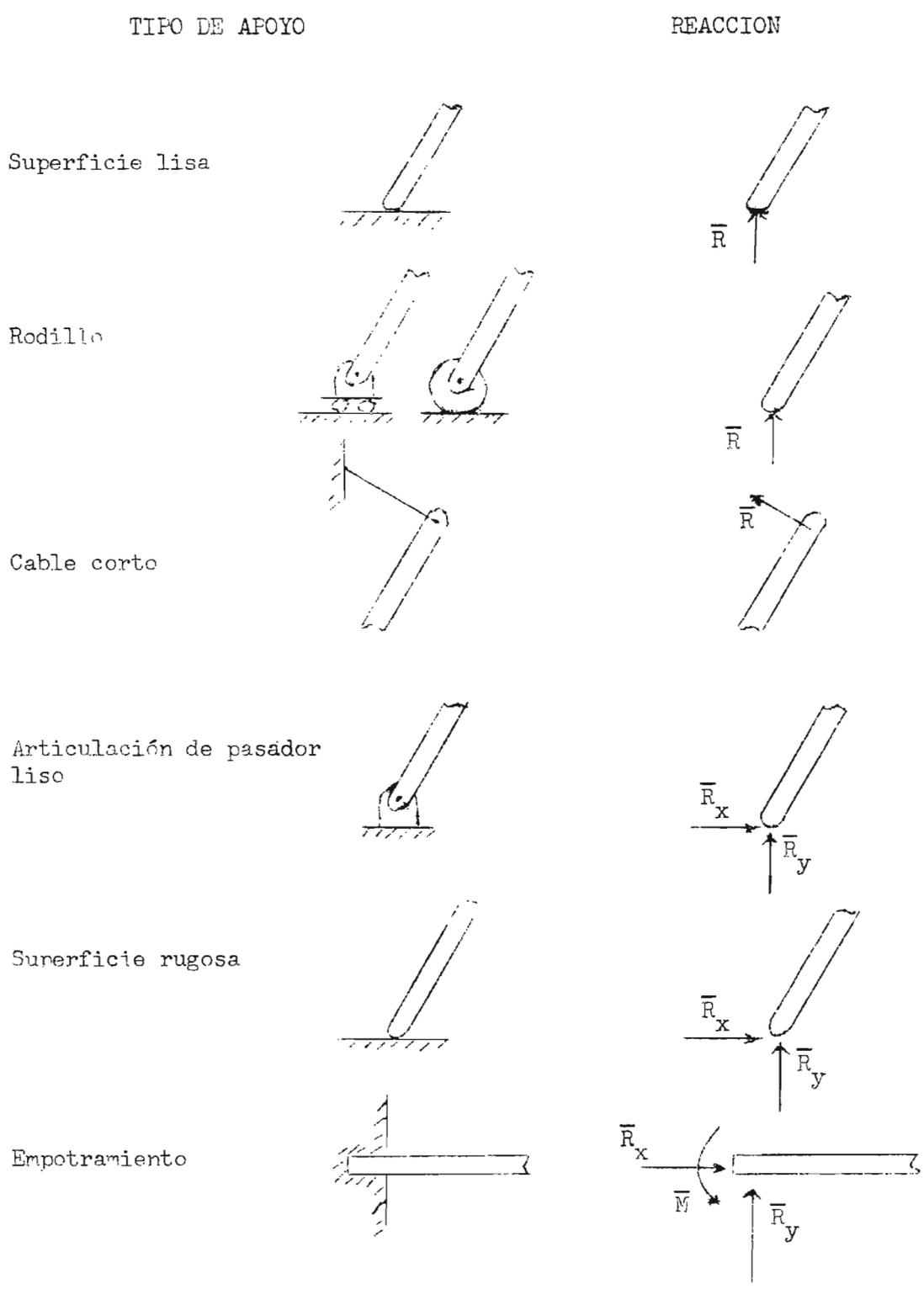
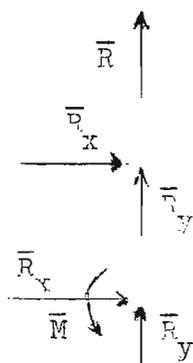


Fig. 3.2

Nota:



reacción de dirección conocida.

reacción de dirección desconocida, pero que se ha descompuesto en componentes rectangulares.

reacción compuesta por una fuerza de dirección desconocida y un par \bar{M}

Sistema tridimensionales.— Los tipos de apoyo comúnmente empleados en sistemas tridimensionales son los que siguen:

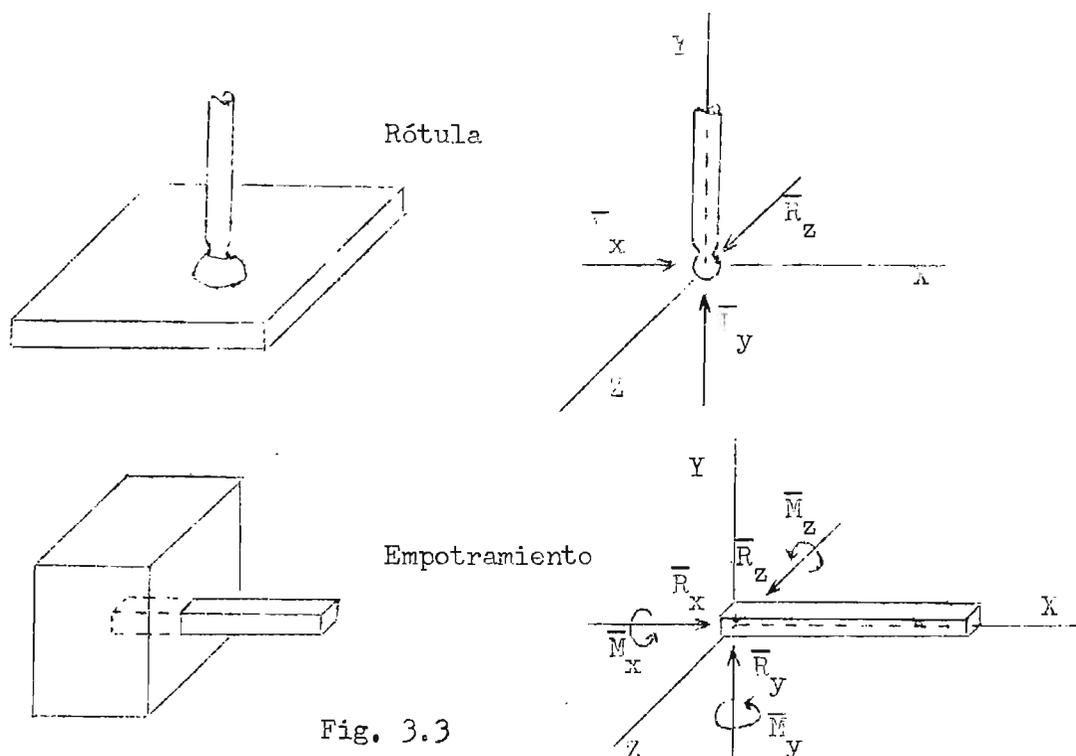


Fig. 3.3

Estos son solamente algunos de los tipos de apoyos que encontramos en la práctica. Para determinar la reacción de un apoyo cualquiera puede procederse de la siguiente manera: imaginar que se trata de mover el sólido a lo largo de cada una de las tres direcciones ortogonales definidas por el sistema de ejes X, Y, Z; en la dirección en que este movimiento esté restringido habrá una componente de la fuerza de reacción.

Luego imaginar que se trata de hacer girar el sólido alrededor de cada uno

de los ejes X, Y, Z; si hay restricción a que la rotación se produzca, entonces significa que existe una componente del par de reacción en el apoyo. Siguiendo este procedimiento es fácil reconocer que reacciones ofrece un determinado tipo de apoyo.

3.4 ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO.

Vimos en las secciones anteriores las condiciones de equilibrio de un sólido rígido y los tipos de apoyo. Sin embargo, conviene saber como determinar, ante un problema dado, que tipo o tipos de apoyo son necesarios para restringir completamente un sólido y además reconocer bajo que circunstancias las reacciones pueden ser determinadas usando las condiciones de equilibrio.

Por restringir completamente un sólido debe entenderse que, no importando que sistema de fuerzas esté actuando, el sólido no se moverá. Esto es equivalente a decir que el sólido está apoyado de tal manera que bajo cualquier condición de carga las seis ecuaciones de equilibrio (3.2) son satisfechas. Vemos pues, que para cumplir este requisito necesitamos un arreglo de seis reacciones.

Consideremos el sólido mostrado en la figura 3.4. En (a), el punto A del sólido está fijo mediante tres barras rígidas, no coplanares y con sus extremos articulados. Estas tres barras son suficientes para asegurar que $F_x = 0$;

$\sum F_y = 0$; $\sum F_z = 0$. Sin embargo, el sólido está libre para girar alrededor del punto A o sea, que si hay fuerzas aplicadas: $\sum M_x \neq 0$; $\sum M_y \neq 0$;

$\sum M_z \neq 0$. En (b) un segundo punto, B, se ha fijado usando dos barras para asegurar $\sum M_x = 0$; $\sum M_y = 0$. En estas condiciones el único movimiento posible es una rotación del sólido alrededor del eje Z, y para prevenirlo se ha colocado una barra en el punto C de manera que no sea secante al eje AB (diagrama c). Así pues, seis barras articuladas, o un sistema equivalente,

restringe completamente un sólido en el espacio. Debe aclararse que no es necesario que el arreglo de las barras sea exactamente como el mostrado en el diagrama (c); así por ejemplo, en (d) se muestra otro arreglo que cumple el mismo propósito.

Sin embargo, no podemos concluir que con cualquier arreglo de seis barras, o un sistema equivalente, logramos restringir completamente un sólido. Por ejemplo, en los diagramas (e) y (f) se muestran dos casos en los cuales no se ha logrado. En (e) es evidente que el sólido puede rotar alrededor del eje AB sin que haya resistencia ante alguna carga externa, el peso por ejemplo, que produzca un momento alrededor de este eje. Es decir, $\sum M_z \neq 0$. En (f) nota-

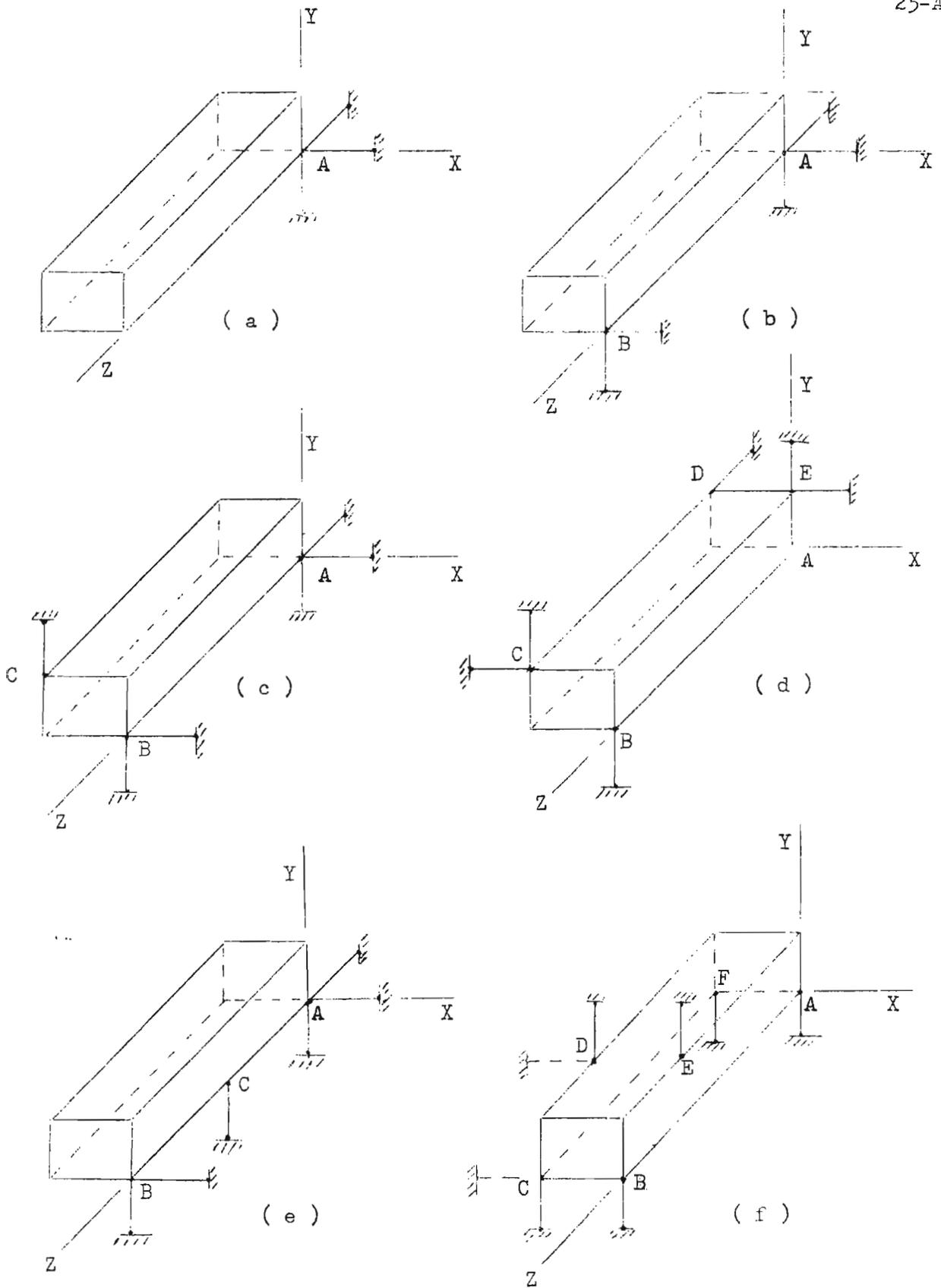


Fig. 3.4

mos que las seis barras (de trazo lleno) son paralelas. Como consecuencia de este arreglo vemos que cualquier carga externa perpendicular a las barras no puede ser resistida, esto es, $\sum F_x \neq 0$; $\sum F_z \neq 0$. Una situación semejante se observa si las barras en D y en C son colocadas como se indica mediante las líneas punteadas. En este caso todas las barras son perpendiculares a una dirección común (paralela al eje Z) y cualquier fuerza en esa dirección se encuentra sin resistencia, por lo tanto, $\sum F_z \neq 0$.

De la discusión anterior podemos sacar las siguientes conclusiones:

1.- Un sólido está completamente restringido si mediante el sistema de apoyo usado las seis ecuaciones de equilibrio (3-2) son satisfechas para cualquier condición de carga. Este estado de los sólidos suele denominarse también con la palabra estable.

2.- Un sólido está parcialmente restringido cuando el sistema de apoyo usado determina que las reacciones son fuerzas cuyas rectas de acción son secantes a una misma recta o son perpendiculares a una dirección común, o bien el número de reacciones es menor de seis. Esta condición es también conocida con el nombre de inestable.

Si el sistema de apoyo usado para soportar las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido ofrece mas de seis incógnitas, el número de ecuaciones de equilibrio es menor que el número de incógnitas, es decir, el sistema se encuentra estáticamente indeterminado.

La situación en la cual el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones de equilibrio es conocido como estáticamente determinada.

Finalmente, si existen menos de seis incógnitas, hay mas ecuaciones que incógnitas y no pueden ser satisfechas algunas de las condiciones de equilibrio bajo condiciones generales de carga, o sea el sólido está parcialmente restringido.

Sólido Rígido Bajo Cargas Coplanares.-

Vimos antes que son tres ecuaciones escalares las necesarias para expresar las condiciones de equilibrio de un sólido rígido que está bajo la acción de un sistema general de fuerzas coplanares.

Estas condiciones pueden ser satisfechas mediante un sistema de apoyos formado por tres barras (o su equivalente) como se muestra en la figura 3.5 (a). El número de incógnitas es igual al número de ecuaciones escalares de e-

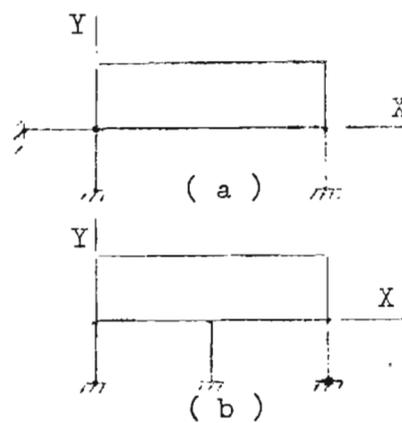


Fig. 3.5

equilibrio; el sólido está impedido de moverse en cualquier dirección o girar alrededor de algún eje perpendicular al plano de la figura. Esto es, basta un arreglo de tres barras o un sistema equivalente para restringir completamente un sólido en el plano.

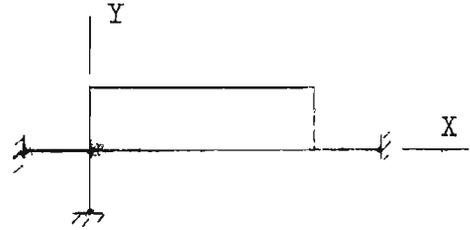


Fig. 3.5 (c)

Sin embargo, y como en el caso general, existen restricciones en la manera de como este arreglo debe hacerse. Se muestran en la figura 3,5,(b) y (c) los dos casos en los cuales el sólido está parcialmente restringido. Las explicaciones se deducen del caso general. En (b) todas las reacciones son perpendiculares a una dirección común en el mismo plano de la figura; esto es, para una carga cualquiera, $\Sigma F_x \neq 0$; en (c) todas las reacciones son secantes a una misma recta (perpendicular al plano de la figura en el punto A), así, para una carga cualquiera, $\Sigma M_z \neq 0$.

Si en el sistema de apoyos intervienen mas de tres incógnitas, hay más incógnitas que ecuaciones. El sistema es, por lo tanto, estáticamente indeterminado. Si hay igual número de incógnitas que de ecuaciones, el sistema es estáticamente determinado. Por último, si hay menor número de incógnitas que de ecuaciones, el sólido está parcialmente restringido.

EJEMPLO 3.1

Calcular las reacciones de los apoyos del sólido mostrado en la figura. El sólido pesa 3000 kg y el centro de gravedad está en el punto c.

Solución. - Primero dibujamos un diagrama de cuerpo libre del sólido.

Puesto que tratamos con un sistema coplanar, podemos encontrar las tres incógnitas del problema: T, B_x , B_y .

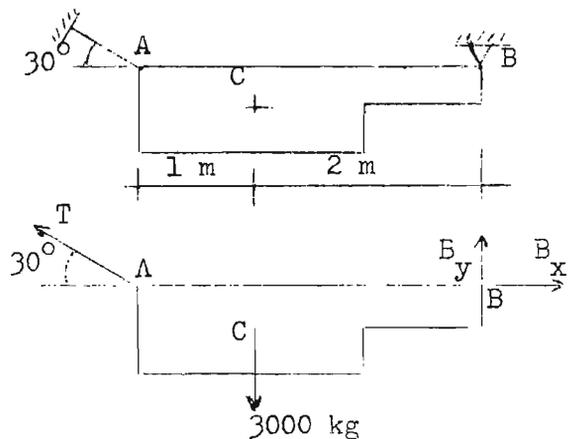
Escribamos primero la ecuación de momentos con respecto a un eje Z que

pase por el punto B. Por comodidad, diremos simplemente, momentos con respecto al punto B.

$$\Sigma M_B = 0$$

$$3000 \times 2 - T \times 3 \text{ sen } 30^\circ = 0$$

$$T = 4000 \text{ kg}$$



Luego, de $\sum F_x = 0$, tenemos:

$$B_x - T \cos 30^\circ = 0$$

$$B_x = 4000 \times 0.866 = 3464 \text{ kg} \longrightarrow$$

De $\sum F_y = 0$ obtenemos B_y . Así:

$$B_y + T \sin 30^\circ - 3000 = 0$$

$$B_y = 3000 - 4000 \times 0.5$$

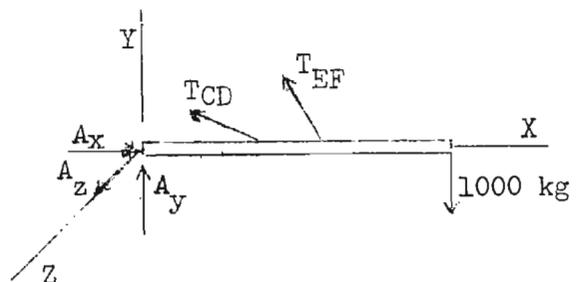
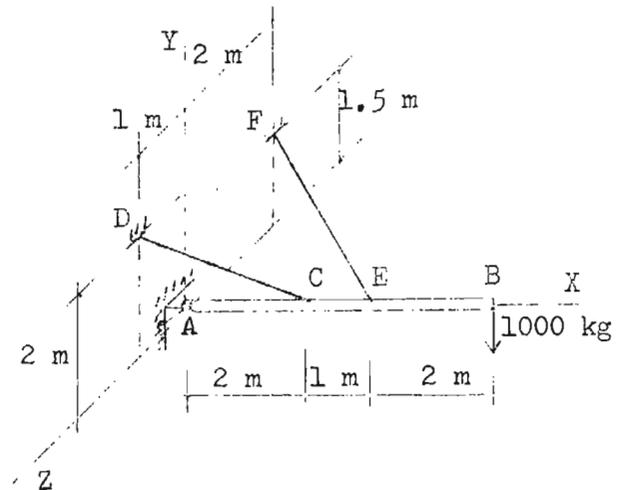
$$B_y = 1000 \text{ kg} \uparrow$$

EJEMPLO 3.2

Una barra que soporta en su extremo libre B una fuerza de 1000 kg está apoyada mediante una rótula en A y dos cables CD y EF. Encontrar las tensiones en los cables y las componentes de la reacción en A.

Solución.— Del diagrama de cuerpo libre observamos que hay solamente cinco incógnitas a pesar de tener un sistema general de fuerzas en el espacio. Esto se debe a que todas las fuerzas cortan al eje X dando por resultado que la ecuación escalar $\sum M_x = 0$ es redundante, es decir, que únicamente poseemos cinco ecuaciones escalares disponibles para encontrar las cinco incógnitas.

Las expresiones vectoriales de las fuerzas involucradas son:



$$\vec{P} = -1000 \vec{j}$$

$$\vec{R}_A = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{T}_{CD} = -0.67 T_{CD} \vec{i} + 0.67 T_{CD} \vec{j} + 0.33 T_{CD} \vec{k}$$

$$\vec{T}_{EF} = -0.77 T_{EF} \vec{i} + 0.384 T_{EF} \vec{j} - 0.512 T_{EF} \vec{k}$$

Tomando momentos con respecto al eje Y:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -0.67T_{CD} & 0.67T_{CD} & 0.33T_{CD} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -0.77T_{EF} & 0.384T_{EF} & -0.512T_{EF} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando, obtenemos:

$$T_{CD} = 2.3 T_{EF}$$

Ahora tomemos momentos con respecto al eje Z:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -0.67T_{CD} & 0.67T_{CD} & 0.33T_{CD} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -0.77T_{EF} & 0.384T_{EF} & -0.512T_{EF} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1000 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$1.33T_{CD} + 1.15T_{EF} - 5000 = 0$$

Sustituyendo $T_{CD} = 2.3T_{EF}$, obtenemos T_{EF} :

$$T_{EF} = 1190 \text{ kg}$$

Entonces:

$$T_{CD} = 2.3 \times 1190 = 2730 \text{ kg}$$

$$\text{De } \Sigma F_x = 0 :$$

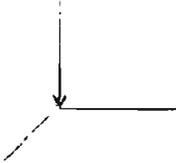
$$A_x - 0.67 \times 2730 - 0.77 \times 1190 = 0$$

$$A_x = 2737 \text{ kg}$$


$$\text{De } \Sigma F_y = 0 :$$

$$A_y - 1000 \uparrow + 0.67 \times 2730 \uparrow + 0.384 \times 1190 = 0$$

$$A_y = -1277$$

$$A_y = 1277 \text{ kg}$$


$$\text{De } \Sigma F_z = 0 :$$

$$A_z \uparrow + 0.33 \times 2730 - 0.512 \times 1190 = 0$$

$$A_z = -300$$

$$A_z = 300 \text{ kg}$$


CAPITULO 4

APLICACIONES DEL EQUILIBRIO DE LOS SOLIDOS RIGIDOS.

4.1 ANALISIS DE ARMADURAS.

Un tipo común de estructuras empleadas en ingeniería consiste en un sistema de barras conectadas entre sí mediante soldadura, remaches o pasadores. Estas estructuras son conocidas con el nombre de armaduras. Con el objeto de simplificar su análisis haremos algunas idealizaciones. Así, en las armaduras tridimensionales supondremos que las barras están interconectadas por rótulas, mientras que en las armaduras planas los miembros estarán conectados por pasadores lisos.

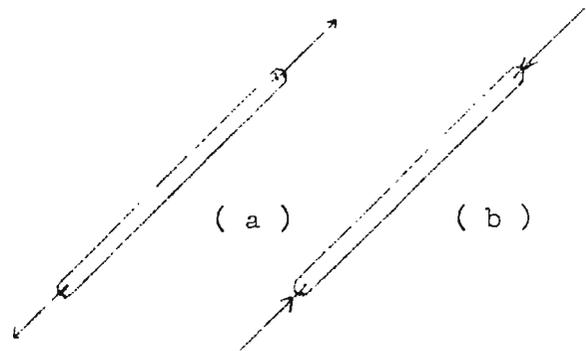
Otra hipótesis consiste en suponer que todas las cargas (incluyendo el peso de las barras que forman la armadura) están aplicados en los nudos solamente. Un nudo representa la conexión entre los miembros que forman la armadura.

Teniendo en cuenta estas hipótesis, puede considerarse entonces cada barra como un sólido con fuerzas aplicadas únicamente en sus extremos.

Para que estas fuerzas se encuentren

en equilibrio han de ser de igual magnitud, colineales y de sentido opuesto.

En la figura 4.1 se muestran los dos casos posibles. En (a) las fuerzas tienden a estirar la barra, es decir, la barra trabaja a tensión (también conocido como tracción), mientras que en (b) las fuerzas tienden a acortar la barra, trabajando así a compresión.



Armaduras Simples.- En la figura 4.2 se muestran algunos ejemplos de armaduras planas y tridimensionales. Consideremos primero la armadura (a); cuando se le aplica un sistema de fuerzas como el mostrado, la armadura se deformará perdiendo completamente su forma original, es decir, no tiene una configuración estable. En (b) la armadura está formada por tres barras; notamos que con la forma triangular obtenemos una configuración rígida de la armadura puesto que ésta mantiene su forma original bajo cualquier tipo de cargas. En (c) se muestra como puede obtenerse una armadura rígida mas grande agregando dos barras BD y CD a la forma básica triangular ABC para obtener un nuevo nudo. Este

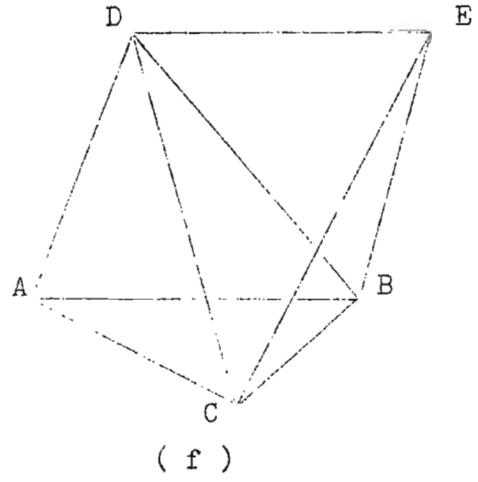
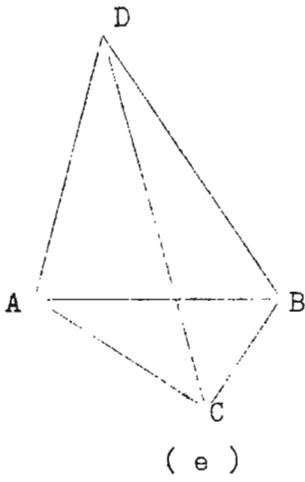
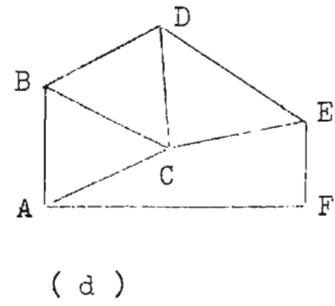
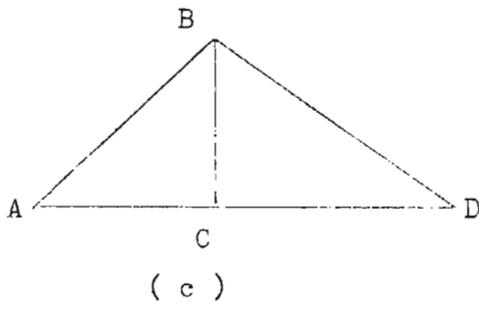
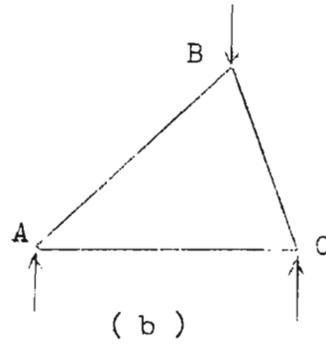
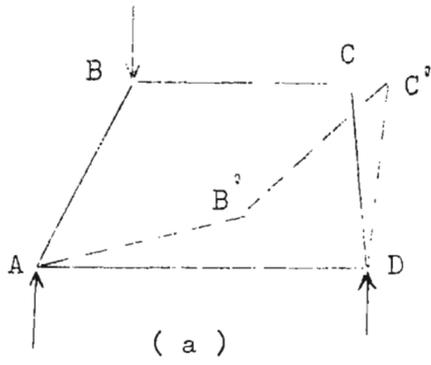


Fig. 4.2

procedimiento puede repetirse añadiendo dos barras cada vez para obtener un nuevo nudo y la armadura resultante será siempre rígida, como puede verse en (d).

Observemos que la armadura básica triangular en (b) tiene tres barras y tres nudos; en (c) hay cinco barras en total y cuatro nudos. Es decir, que cada vez que aumentamos dos barras aparece un nuevo nudo, resultando así la siguiente relación entre el número de barras, m , y el número de nudos, n , de una armadura plana.:

$$m = 2n - 3 \quad (4.1)$$

La configuración básica de la armadura tridimensional rígida está formada por seis barras unidas en sus extremos para formar un tetraedro. (Fig. 4.2e). Añadiendo tres barras cada vez a esta configuración para obtener un nuevo nudo podemos obtener una estructura rígida mas grande (Fig, 4.2f). Observemos que el tetraedro tiene seis barras y cuatro nudos y que, cada vez que se aumentan tres barras aparece un nuevo nudo, dando por resultado la siguiente relación:

$$m = 3n - 6 \quad (4.2)$$

Las armaduras, planas y tridimensionales, construidas de esta manera son conocidas como armaduras simples.

4.2 MÉTODOS DE ANALISIS.

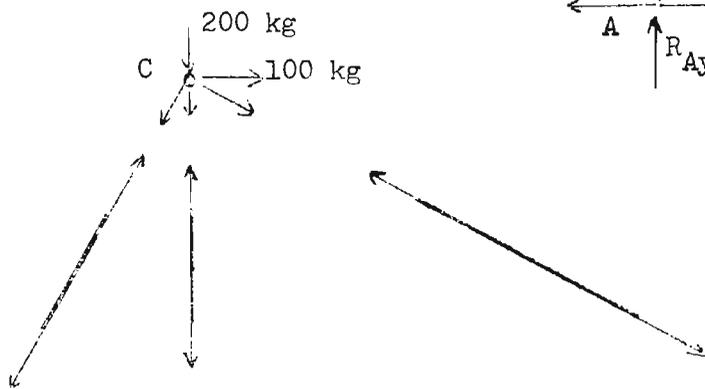
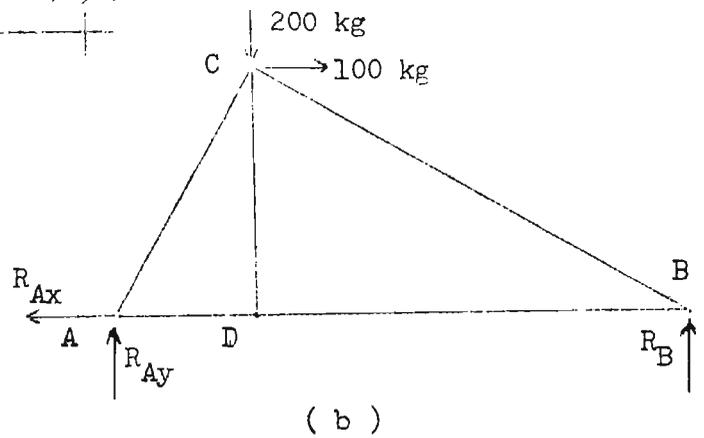
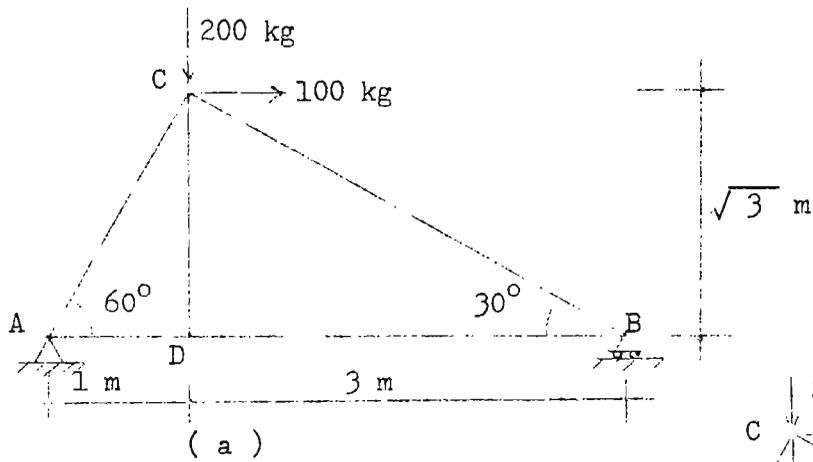
1.- Método de los Nudos. Este método consiste en encontrar las fuerzas en las barras escribiendo las ecuaciones de equilibrio para cada nudo de la armadura. Los siguientes ejemplos ilustran el método.

EJEMPLO 4.1

Determinar las fuerzas en todas las barras de la armadura mostrada en la figura (a)

Solución.- En la figura (b) ha sido dibujado el diagrama de cuerpo libre de la armadura completa. Las reacciones de los apoyos R_{Ax} , R_{Ay} , R_B pueden ser calculadas.

Hemos visto que una armadura puede ser considerada como una combinación de pasadores y barras sometidas a la acción de fuerzas en sus extremos, de igual magnitud, colineales con el eje de la barra y de sentido opuesto. La ar-



madura puede, por lo tanto, descomponerse y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada pasador y cada barra como se ve en la figura (c). Además, la tercera ley de Newton indica que las fuerzas de acción y reacción entre las barras y los pasadores que las unen son iguales y opuestas, es decir, que las fuerzas ejercidas por una barra sobre los dos pasadores que le sirven de unión deben llevar la dirección del eje de la barra y ser iguales y opuestas.

Como la armadura está en equilibrio, cada pasador debe estarlo también. El procedimiento consiste en plantear sucesivamente el equilibrio de cada nudo, empezando por un nudo en el que se desconozca sólo dos fuerzas (obsérvese que es un sistema coplanar de fuerzas concurrentes) y cuando éstas han sido determinadas pasar a otro nudo que tenga también dos incógnitas y así sucesivamente.

Otra observación importante es que no siempre es posible determinar por simple inspección si las barras están a tensión o a compresión, para resolver esta situación supondremos que todas las fuerzas son de tensión y al obtener los resultados, un valor positivo indicará que la suposición es correcta, es decir, que la fuerza es de tensión; en caso contrario la fuerza será de compresión. Nótese de la figura (c) que las fuerzas de tensión se alejan del nudo.

Resolvamos entonces el problema que tenemos planteado. Para la armadura completa (Fig. b)

$$\Sigma M_A = 0$$

$$R_B \times 4 - 200 \times 1 - 100 \times 3 = 0$$

$$R_B = 93.3 \text{ kg} \quad \uparrow$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$100 - R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ax} = 100 \text{ kg} \quad \leftarrow$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_{Ay} + R_B - 200 = 0$$

$$R_{Ay} = 200 - 93.3$$

$$R_{Ay} = 106.7 \text{ kg} \quad \uparrow$$

⋮

Nudo A:

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{AC} \operatorname{sen} 60^\circ + 106.7 = 0$$

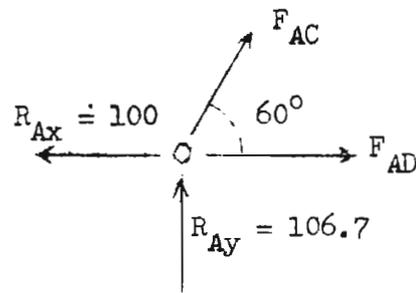
$$F_{AC} = -123 \text{ kg}$$

$$F_{AC} = 123 \text{ kg (compresión)}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{AC} \cos 60^\circ + F_{AD} - 100 = 0$$

$$F_{AD} = 161.5 \text{ kg (tensión)}$$

Nudo D:

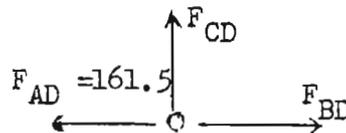
$$\sum F_x = 0$$

$$F_{BD} - F_{AD} = 0$$

$$F_{BD} = 161.5 \text{ kg (tensión)}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{CD} = 0$$

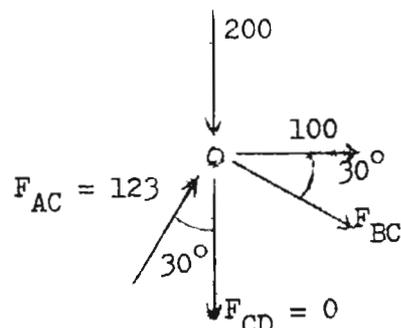
Nudo C:

$$\sum F_x = 0$$

$$100 + F_{BC} \cos 30^\circ + F_{AC} \operatorname{sen} 30^\circ = 0$$

$$F_{BC} = -186.5 \text{ kg}$$

$$F_{BC} = 186.5 \text{ kg (compresión)}$$



Obsérvese que aún cuando no se ha planteado la ecuación $\sum F_y = 0$ para el nudo C ni las dos ecuaciones de equilibrio del nudo B ya hemos determinado las fuerzas en todas las barras. Esta situación puede explicarse así: como la armadura tiene n nudos, habrá disponibles $2n$ ecuaciones. Recordemos que para una armadura plana $m = 2n - 3$, o sea, $2n = m + 3$, lo que significa que podemos encontrar las m fuerzas de las barras más las 3 reacciones de los apoyos R_{Ax} , R_{Ay} y R_B estudiando únicamente las ecuaciones de los nudos. El hecho de que la armadura entera sea un sólido rígido en equilibrio se debe a que sus partes componentes se encuentran en equilibrio y las tres ecuaciones empleadas inicialmente no son por lo tanto independientes de las ecuaciones asociadas a los nudos. Sin embargo, pueden usarse, como lo hemos hecho en este ejemplo, y al final con las ecuaciones sobrantes comprobar los resultados.

EJEMPLO 4.2

Determinar la fuerza en cada barra de la armadura mostrada. El apoyo en A es una rótula, mientras que en B y C son rodos.

Solución.- Para la armadura completa:

$$\sum M_x = 0$$

$$- 3 R_C = 0$$

$$R_C = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

$$3R_B - 3P = 0$$

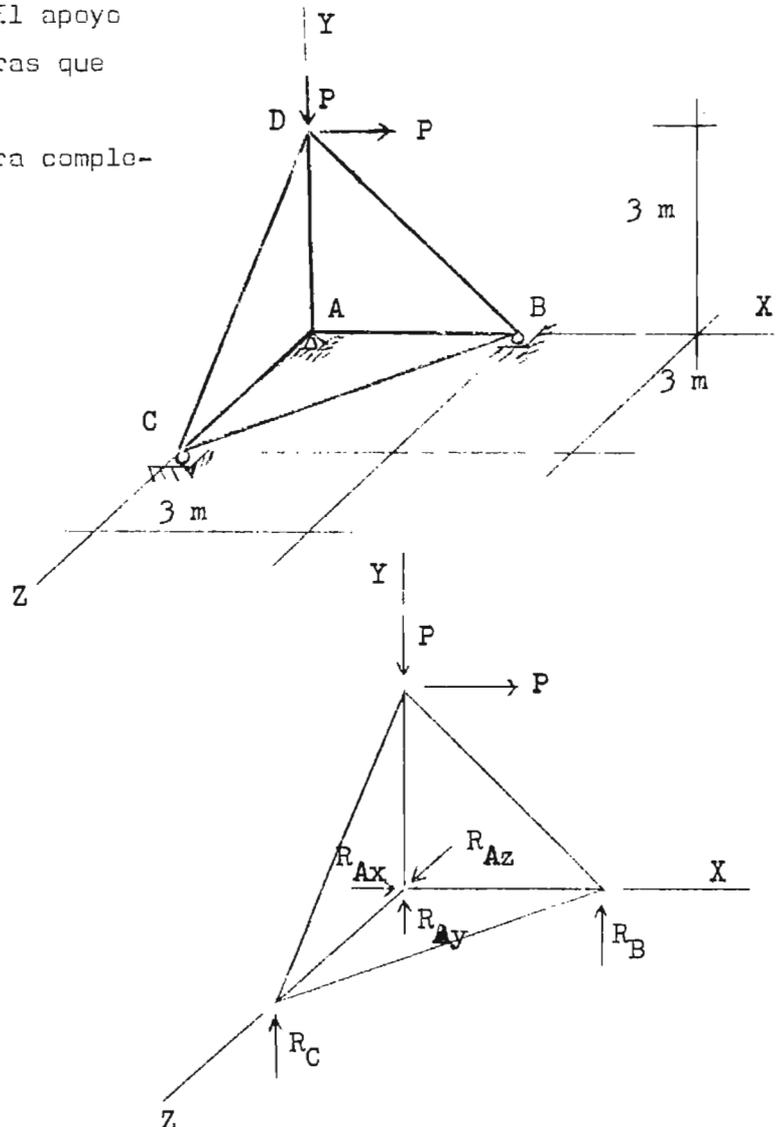
$$R_B = P \quad \uparrow$$

$$\sum F_x = 0$$

$$P + R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ax} = -P$$

$$R_{Ax} = P \quad \leftarrow$$



$$\sum F_y = 0$$

$$R_{Ay} + R_B - P = 0$$

$$R_{Ay} = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$R_{Az} = 0$$

Nudo A :

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{AB} - R_{Ax} = 0$$

$$F_{AB} = P \text{ (tensión)}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{AD} + R_{Ay} = 0$$

$$F_{AD} = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$F_{AC} + R_{Az} = 0$$

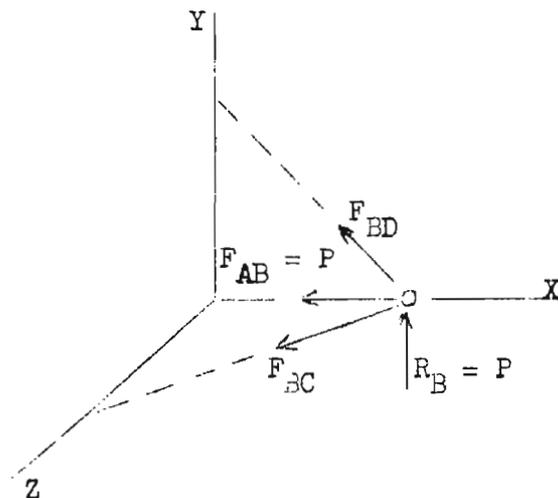
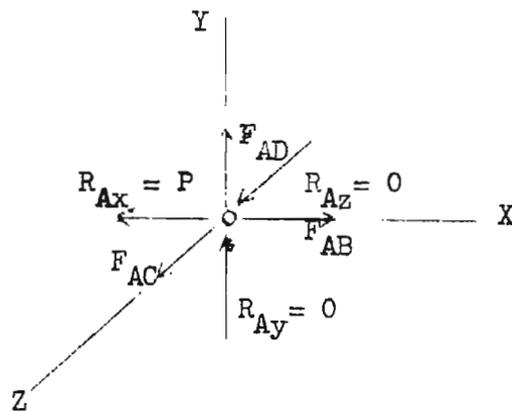
$$F_{AC} = 0$$

Nudo B:

$$\sum F_z = 0$$

$$F_{BC} \text{ sen } 45^\circ = 0$$

$$F_{BC} = 0$$



$$\sum F_x = 0$$

$$- F_{BD} \cos 45^\circ - F_{BC} \cos 45^\circ - F_{AB} = 0$$

$$F_{BD} = - P \sqrt{2}$$

$$F_{BD} = P \sqrt{2} \text{ (compresión)}$$

Obsérvese que el mismo resultado se obtiene de $\sum F_y = 0$.

Nudo C.- Es obvio que $F_{CD} = 0$.

2.- Método de las Secciones.- Este método es útil para aquellos casos en que únicamente se desea conocer las fuerzas en algunas barras. El método consiste en dibujar un diagrama de cuerpo libre de una parte de la armadura de tal manera que la fuerza deseada aparezca como una fuerza externa.

EJEMPLO 4.3

Determinar las fuerzas en las barras CD, DE y BE de la armadura de la figura (a)

Solución.- Para la armadura entera (figura b)

$$\sum M_A = 0$$

$$6R_B - 400 \times 1.5 - 300 \times 2 = 0$$

$$R_B = 200 \text{ kg} \uparrow$$

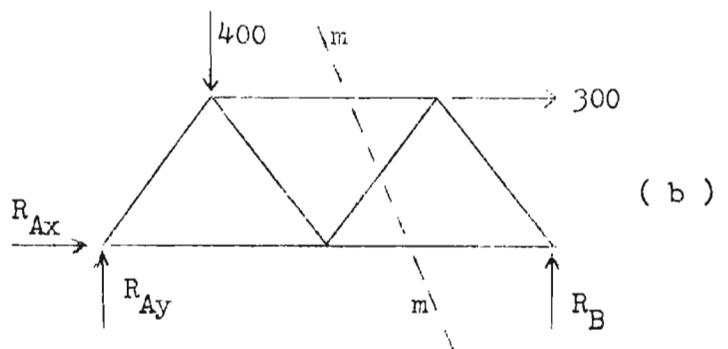
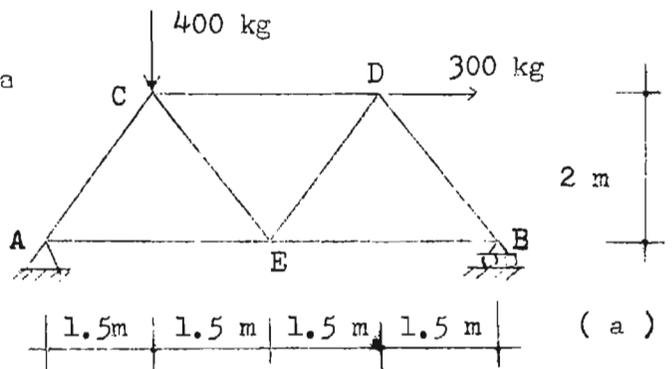
$$\sum F_x = 0$$

$$300 - R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ax} = 300 \text{ kg} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{Ay} + R_B - 400 = 0$$



$$R_{Ay} = 200 \text{ kg} \uparrow$$

Cortamos ahora la armadura como se indica por la línea punteada mm y escogemos la parte derecha como cuerpo libre.

$$\sum M_D = 0$$

$$R_B \times 1.5 - F_{BE} \times 2 = 0$$

$$F_{BE} = 150 \text{ kg (tensión)}$$

$$\sum F_y = 0$$

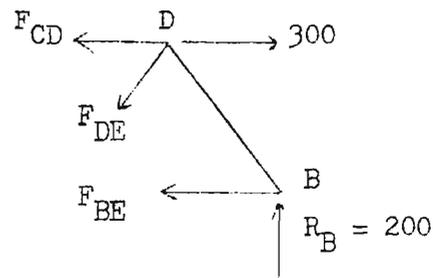
$$200 - F_{DE} \times \frac{4}{5} = 0$$

$$F_{DE} = 250 \text{ kg (tensión)}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$300 - F_{CD} - F_{DE} \times \frac{3}{5} - F_{BE} = 0$$

$$F_{CD} = 0$$



4.3 MARCOS

Con el nombre de marcos se conoce un tipo de estructuras cuyos componentes son barras sometidas a fuerzas que no actúan a lo largo de sus ejes longitudinales.

El ejemplo que sigue servirá para ilustrar el análisis de estas estructuras.

EJEMPLO 4.4

Determinar las fuerzas que actúan sobre cada barra del marco indicado en la figura (a).

El marco está formado por dos barras AC y BD conectadas mediante un pasador en C. Está apoyado mediante una articulación de pasador liso en A y rodillo en B. El diagrama de cuerpo libre del marco completo está mostrado en la figura (b); notamos que las fuerzas exteriores son la fuerza aplicada 1200 kg, las dos componentes A_x y A_y de la reacción en A y la fuerza R_B de la reacción en B. Las reacciones pueden ser determinadas de este diagrama, así:

$$\sum M_A = 0$$

$$4R_B - 3 \times 1200 = 0$$

$$\therefore R_B = 900 \text{ kg} \uparrow$$

$$\sum F_x = 0$$

$$1200 - A_x = 0$$

$$\therefore A_x = 1200 \text{ kg} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_B - A_y = 0$$

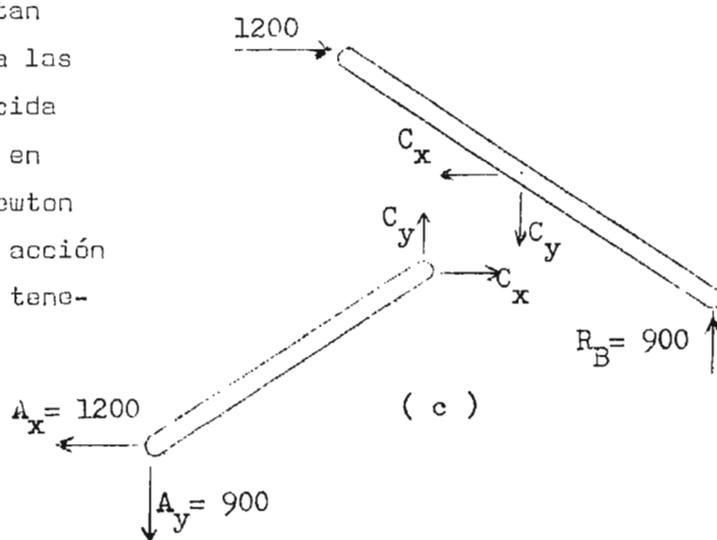
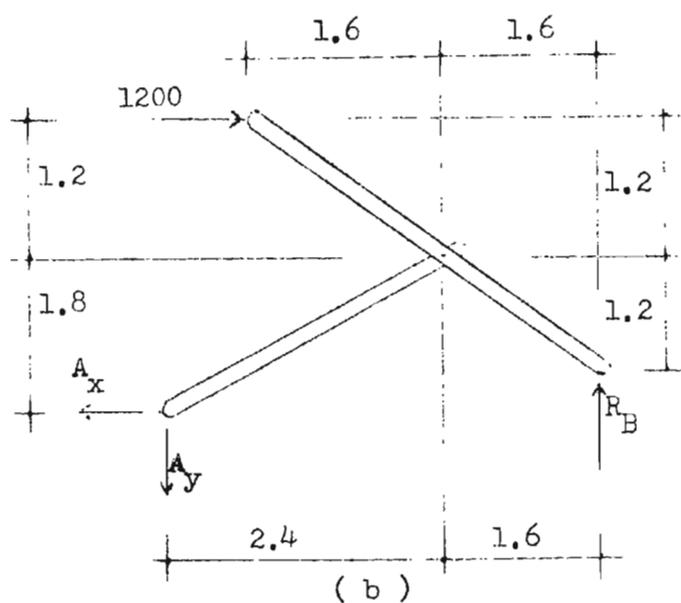
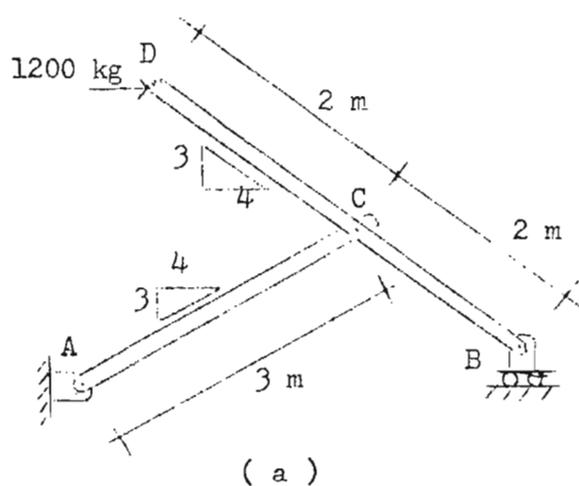
$$\therefore A_y = 900 \text{ kg} \downarrow$$

En seguida desmontamos el marco y dibujamos diagramas de cuerpo libre para cada una de las barras. Se observará que las componentes de la fuerza ejercida en C por la barra BD sobre AC se representan igual y de sentido contrario a las componentes de la fuerza ejercida por AC sobre BD. Esto se hace en virtud de la tercera ley de Newton que establece el principio de acción y reacción. Para la barra BD, tenemos:

$$\sum F_x = 0$$

$$1200 - C_x = 0$$

$$\therefore C_x = 1200 \text{ kg}$$



$$\sum F_y = 0$$

$$900 - C_y = 0$$

$$\therefore C_y = 900 \text{ kg}$$

Debe hacerse notar que, de igual manera que en las armaduras, no han sido usadas todas las ecuaciones de equilibrio, tales como las del miembro AC. Las razones son las mismas ya expuestas en el caso de las armaduras. Sin embargo, estas ecuaciones sirven para comprobar los resultados.

4.4 ROZAMIENTO

En el análisis de los sólidos rígidos que hasta ahora hemos considerado, hemos supuesto que todas las superficies en contacto eran lisas, es decir, sin rozamiento. La fuerza de rozamiento es la fuerza tangente a las superficies en contacto que tiende a evitar el movimiento relativo entre las superficies. La fuerza de rozamiento es un factor descable en algunos casos, por ejemplo, en los frenos; pero también se trata de disminuir o eliminar en otros para que las pérdidas de energía sean mínimas.

Existen dos tipos de rozamiento: a) Rozamiento seco o de Coulomb que se verifica entre superficies no lubricadas; b) Rozamiento fluido que tiene lugar entre capas de fluido que se mueven a diferentes velocidades. Nuestro estudio lo limitaremos al análisis del rozamiento seco, pues corresponde a la Mecánica de Fluidos el estudio del rozamiento fluido.

Consideremos el bloque mostrado en la figura 4.3 (a), que descansa sobre una superficie rugosa y al que se ha aplicado una fuerza P de dirección paralela al plano de la superficie. En (b), el diagrama de cuerpo libre del bloque ha sido dibujado. Si P es pequeño, el bloque no se moverá, pues existe la fuerza de rozamiento F horizontal que equilibra a P .

Si la fuerza P aumenta, la fuerza de rozamiento también aumenta de

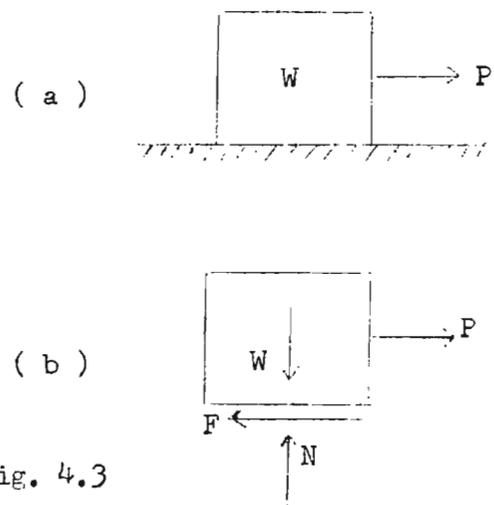


Fig. 4.3

manera que las fuerzas P y F siguen siendo iguales en magnitud.

Así, si la fuerza de rozamiento F es planteada como una función de P , la curva que se obtiene es una línea recta cuya pendiente es igual a uno (Fig. 4.4). Si la fuerza P se aumenta aún más, el bloque comenzará a moverse, indicando que la fuerza de rozamiento F ha alcanzado su máximo valor F_m . Inmediatamente después que el bloque comienza a moverse, la magnitud de F desciende hasta un valor F_k que permanece aproximadamente constante. Es decir,

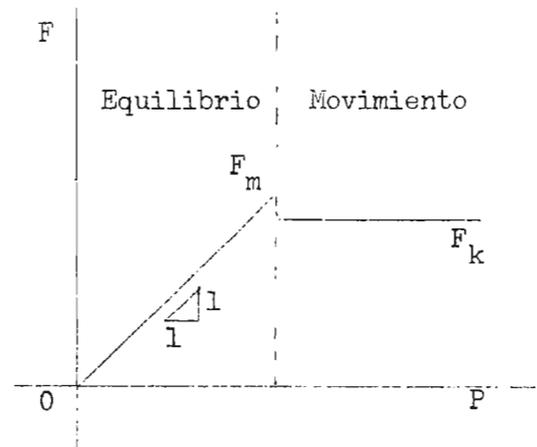


Fig. 4.4

que para un sólido en movimiento, la fuerza de rozamiento cinético F_k es menor que la fuerza de rozamiento estático F_m . Experimentalmente se demuestra que el valor máximo F_m de la fuerza de rozamiento es proporcional a la componente normal N de la reacción de la superficie. Así:

$$F_m = \mu_s N \quad (4.3)$$

donde μ_s es llamado coeficiente de rozamiento estático. De manera semejante, la magnitud F_k de la fuerza de rozamiento cinético puede escribirse como sigue:

$$F_k = \mu_k N \quad (4.4)$$

en donde μ_k es el coeficiente de rozamiento cinético. Estos coeficientes son determinados en forma experimental.

Es importante observar que la fuerza de rozamiento debe siempre ser menor que $\mu_s N$, pero que es igual a este valor solamente si el máximo valor ha sido alcanzado. Para el caso particular en que $F = F_m$, diremos que el movimiento es inminente, pues un pequeño incremento de la fuerza P provocará movimiento al sólido.

Debe tenerse en cuenta que la fuerza de rozamiento actúa siempre en sentido opuesto al del movimiento que tienden a producir las fuerzas externas. En algunos problemas esta dirección no es evidente y entonces debe suponerse; si la

suposición es incorrecta, la magnitud de F resultará con signo negativo, haciéndose necesario resolver de nuevo el problema con la fuerza de rozamiento en la dirección apropiada.

Algunas veces conviene sustituir la fuerza normal N y la fuerza de rozamiento F por su resultante R. Se ve en la Fig. 4.5 que R hace un ángulo ϕ con la componente normal. Para la condición de movimiento inminente, se denomina ángulo de rozamiento estático ϕ_s , y se observa que:

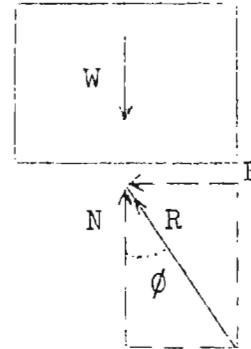


Fig. 4.5

$$\tan \phi_s = \frac{\mu_s N}{N}$$

$$\tan \phi_s = \mu_s \quad \text{ó} \quad \phi_s = \arctan \mu_s \quad (4.5)$$

De modo semejante, el ángulo de rozamiento cinético se encuentra que vale:

$$\phi_k = \arctan \mu_k \quad (4.6)$$

EJEMPLO 4.5

Determinar la mínima fuerza horizontal P que provoque movimiento en el sistema mostrado.

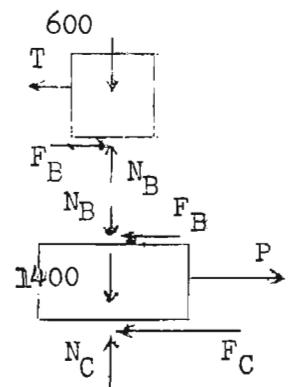
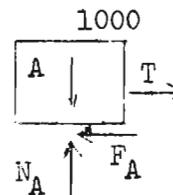
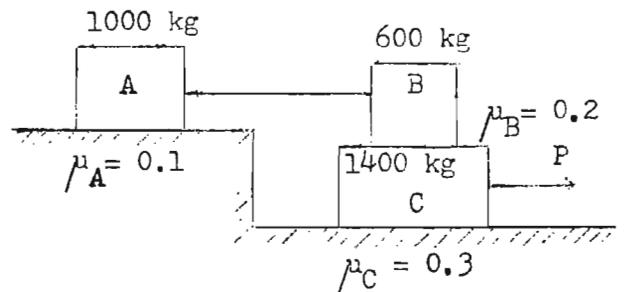
Solución.- Comenzamos dibujando diagramas de cuerpo libre para cada bloque.

Observamos que se presentan dos soluciones posibles :

a) se mueve todo el conjunto, En estas condiciones:

$$F_A = \mu_A N_A \quad \text{y} \quad F_C = \mu_C N_C$$

$$\text{pero: } F_B \leq \mu_B N_B$$



b) Desliza el bloque C permaneciendo inmóviles A y B. Para esta posibilidad debe cumplirse:

$$F_B = \mu_B N_B \quad \text{y} \quad F_C = \mu_C N_C$$

$$\text{Pero } F_A \leq \mu_A N_A$$

Supondremos que la primera solución es la correcta. Así, del bloque A, tenemos:

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad N_A = 1000 \text{ kg}$$

$$F_A = 0.1 \times 1000$$

$$F_A = 100 \text{ kg}$$

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad T = F_A = 100 \text{ kg}$$

Bloque B:

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad N_B = 600 \text{ kg}$$

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad F_B = T = 100 \text{ kg}$$

$$F_{Bm} = \mu_B N_B = 0.2 \times 600 = 120 \text{ kg}$$

Es decir que $F_B < F_{Bm}$, lo que significa que la suposición es correcta, y, por supuesto, descartamos la segunda posibilidad de movimiento.

Bloque C:

$$\sum F_y = 0$$

$$N_C = 1400 + 600 = 2000 \text{ kg}$$

$$F_C = 0.3 \times 2000 = 600 \text{ kg}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$P - F_B - F_C = 0$$

$$P = 100 + 600$$

$$P = 700 \text{ kg}$$

4.5 SISTEMAS DE FUERZAS DISTRIBUIDAS.

En los sistemas de fuerzas que hemos considerado hasta ahora, han sido tratadas las fuerzas aplicadas en un solo punto, es decir, que las hemos considerado como cargas concentradas. En la realidad las fuerzas están aplicadas, sobre alguna región del cuerpo sobre el que actúan. Si esta región es muy pequeña, comparada con las dimensiones del cuerpo, la fuerza se considera concentrada. Algunos ejemplos en los cuales el efecto de la distribución debe considerarse los hallamos en la presión del viento sobre las paredes de un edificio, la presión del agua sobre una compuerta, etc. Encontramos tres tipos de fuerzas distribuidas:

- 1.- Fuerzas distribuidas a lo largo de una línea (ejemplo, las cargas sobre una viga);
- 2.- Fuerzas distribuidas sobre una superficie (ejemplo, la presión del agua en una presa);
- 3.- Fuerzas distribuidas en un volumen (ejemplo, atracción de la gravedad).

En el caso de un sistema de fuerzas distribuidas a lo largo de una línea, la intensidad de carga w se define como la fuerza por unidad de longitud, esto es,

$$w = \frac{d F}{d L} \quad (4.7)$$

Cuando es sobre un área,

$$w = \frac{d F}{d A} \quad (4.8)$$

y sobre un volumen

$$w = \frac{d F}{d V} \quad (4.9)$$

Consideremos el sistema de fuerzas distribuidas a lo largo del eje X mostrado en la figura 4.6 La intensidad de carga w es una función $w(x)$ de la distancia x medida a partir de O a lo largo del eje X. Según la ecuación (4.7), la carga sobre una longitud dx es:

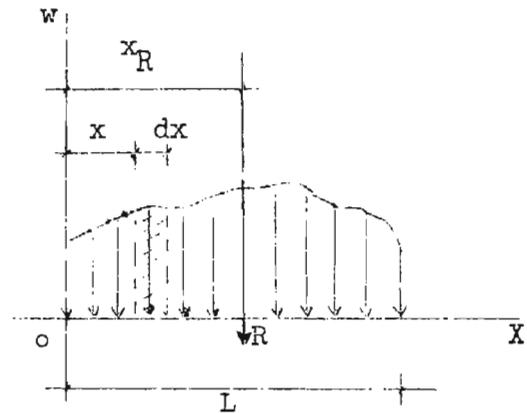


Fig. 4.6

$$dF = w(x) dx \quad (4.10)$$

La magnitud de la fuerza resultante de este sistema será:

$$R = \int dF = \int_0^L w(x) dx \quad (4.11)$$

Debemos indicar además la posición de esta resultante, Esto se hace sabiendo que el momento de la resultante es igual a la suma de los momentos de las componentes. En este caso las componentes son las fuerzas dF . Tomando momentos con respecto a O , tenemos:

$$\begin{aligned} x_R R &= \int x dF = \int_0^L x w(x) dx \\ \therefore \int_0^L x w(x) dx & \\ x_R &= \frac{\int_0^L x w(x) dx}{\int_0^L w(x) dx} \end{aligned} \quad (4.12)$$

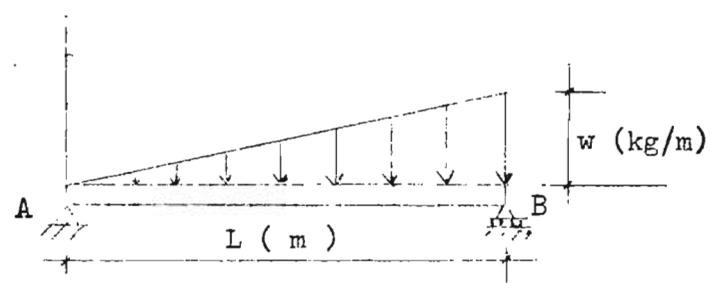
donde x_R es la distancia desde O a la recta de acción de R .

EJEMPLO 4.6

Determinar la resultante de la carga distribuida que varía linealmente a lo largo de la viga AB que se muestra en la figura.

Solución.— Usando el resultado obtenido en 4.11, observamos que la magnitud de la resultante es igual al área del diagrama de carga. Así:

$$R = \frac{wL}{2} (\text{kg})$$



La posición la encontramos a partir de 4.12 en la cual $w(x)$ es:

$$w(x) = \frac{w}{L} x$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} x_R &= \frac{\int_0^L x \cdot \frac{w}{L} x \, dx}{\frac{wL}{2}} \\ &= \frac{2}{3} L \text{ (m)} \end{aligned}$$

4.6 CABLES.

Otro tipo de elementos estructurales utilizados en obras de ingeniería como puentes colgantes, líneas de transmisión de energía eléctrica, etc, son los cables. Consideremos un cable fijo a dos puntos A y B, Fig. 4.7 (a) y sometido a la acción de una carga distribuida. Supondremos que el cable es flexible, lo que significa que la fuerza interna en cualquier punto es de tensión y dirigida a lo largo de su eje; o sea, que es tangente a la curva que adopta el cable en el punto considerado.

Supongamos un caso general de carga distribuida. En la Fig. 4.7 (b) se ha dibujado el diagrama de cuerpo libre de la parte del cable que se extiende desde el punto mas bajo O hasta un punto determinado C. Las fuerzas que actúan sobre esta porción del cable son T_0 en O, que es horizontal, la tensión T_C en C, tangente al cable en este punto, y la resultante w de la carga distribuida que actúa en la parte del cable que se estudia.

De las ecuaciones de equilibrio se deduce que:

$$T_0 = T_C \cos \theta \quad (4.13)$$

$$W = T_C \sin \theta \quad (4.14)$$

$$T_C = \sqrt{T_0^2 + W^2} \quad (4.15)$$

$$\tan. \theta = \frac{W}{T_0} \quad (4.16)$$

De la ecuación (4.13) es evidente que la componente horizontal de la fuerza de tensión T_C es la misma en cualquier punto C. De (4.14) vemos que la compo-

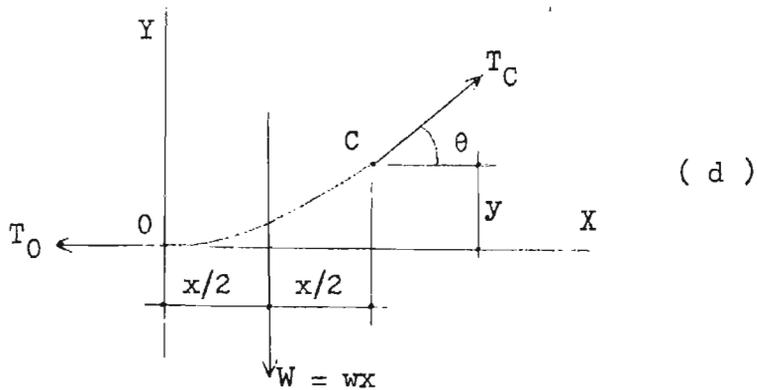
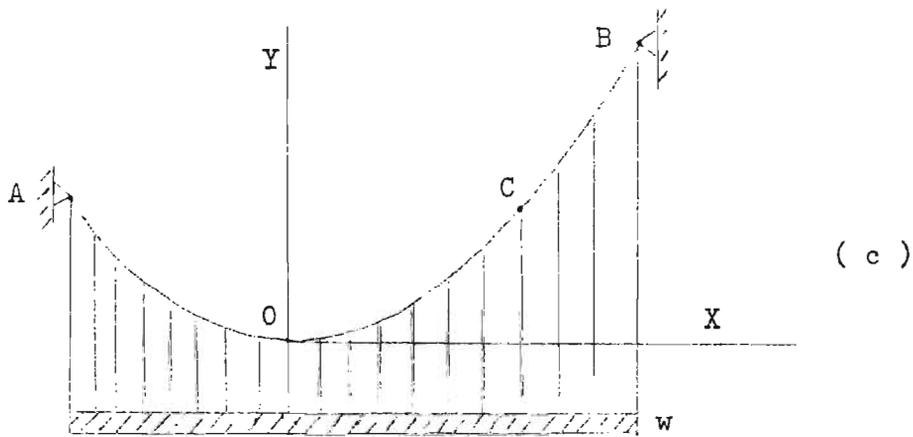
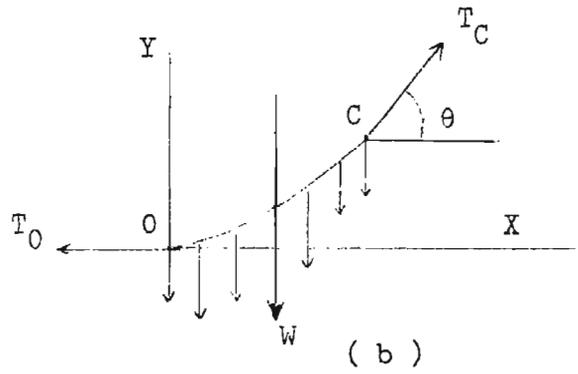
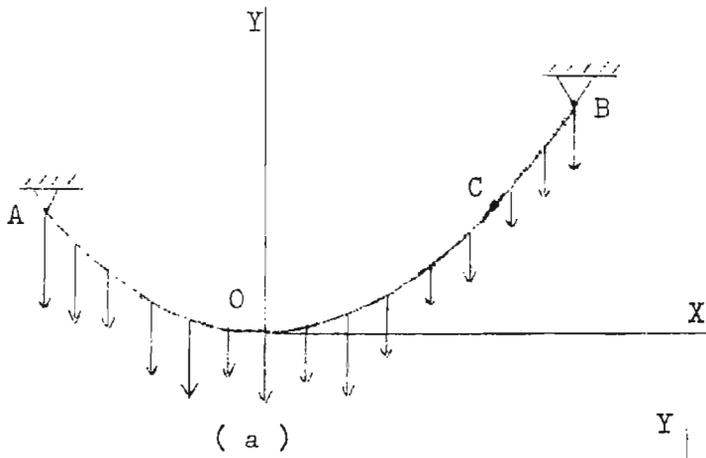


Fig. 4.7

nente vertical es igual a la carga W que existe desde O a C . De la relación (4.15) vemos que la tensión es mínima en O pues para este punto $W = 0$, y que es máxima en el punto de apoyo mas alejado de O .

EJEMPLO 4.7

Determinar, para el cable de la figura 4.7 (c) que lleva una carga uniformemente distribuida w a lo largo de la horizontal, expresiones para: a) la tensión T_C en el punto $C(x,y)$; b) la longitud del tramo de cable de O a C .

Solución.- Un ejemplo de cables con carga uniformemente distribuida se encuentra en los puentes colgantes, donde el peso de los cables es pequeño comparado con el de la plataforma que soporta. Escogemos como diagrama de cuerpo libre la porción de cable entre O y C mostrada en la figura 4,7 (d). La fuerza W resultante de la carga distribuida es $W = wx$.

De la ecuación (4.15):

$$T_C = \sqrt{T_0^2 + w^2 x^2}$$

Tomando momentos con respecto a C :

$$\sum M_C = 0$$

$$wx \cdot \frac{x}{2} - T_0 y = 0$$

$$y = \frac{w x^2}{2 T_0} \quad \text{ó} \quad T_0 = \frac{w x^2}{2y}$$

Observamos que esta ecuación corresponde a una parábola de eje vertical y vértice en el origen de coordenadas. Es decir, que la curva formada por un cable cargado uniformemente a lo largo de la horizontal es una parábola.

La longitud del tramo de cable de O a C puede obtenerse como sigue:

$$S_{OC} = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$\text{Como: } y = \frac{w x^2}{2 T_0}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w x}{T_0}$$

Luego:

$$S_{oc} = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{w^2 x^2}{T_0^2}} dx$$

Usando el teorema del binomio para expandir el radical, tendremos:

$$\begin{aligned} S_{oc} &= \int_0^x \left(1 + \frac{w^2 x^2}{2 T_0^2} - \frac{w^4 x^4}{8 T_0^4} + \dots \right) dx \\ &= x \left(1 + \frac{w^2 x^2}{6 T_0^2} - \frac{w^4 x^4}{40 T_0^4} + \dots \right) \end{aligned}$$

A

Además, sabemos que $T_0 = \frac{w x^2}{2y}$, que al ser sustituido en la ecuación anterior, resulta.

$$S_{oc} = x \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y}{x} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{y}{x} \right)^4 + \dots \right)$$

CAPITULO 5

CENTROIDES.

5.1 CENTRO DE GRAVEDAD. CENTRO DE MASA. CENTROIDE.

El peso de un cuerpo es la fuerza de atracción que la tierra, por efecto de la gravedad, ejerce sobre el cuerpo. Un cuerpo consiste de un gran número de partículas, y sobre cada una de ellas la tierra ejerce su acción. Así pues, el peso de un cuerpo no es más que un sistema de fuerzas distribuidas sobre todo el volumen del cuerpo y dirigido hacia el centro de la tierra, sin embargo, en la práctica se suponen paralelas. Normalmente trabajaremos considerando el peso como una fuerza concentrada que es la resultante del sistema de fuerzas gravitacionales. El punto de aplicación del peso o el punto donde se considera concentrado el peso se denomina centro de gravedad del cuerpo.

Consideremos el cuerpo mostrado en la figura (5.1). Tomamos del cuerpo un elemento de peso $d\bar{w}$ localizado mediante el vector de posición $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. El peso total del cuerpo será:

$$\bar{W} = \int d\bar{w} \quad (5.1)$$

Para encontrar la posición del centro de gravedad, nos valemos del hecho de que la resultante debe producir el mismo efecto que sus componentes, o sea, que el momento de \bar{W} debe ser igual a la suma de los momentos producidos por todas las fuerzas $d\bar{w}$. Así, si $\bar{r}_c = x_c\bar{i} + y_c\bar{j} + z_c\bar{k}$ determina la posición del centro de gravedad, tendremos:

$$\bar{r}_c \times \bar{W} = \int \bar{r} \times d\bar{w} \quad (5.2)$$

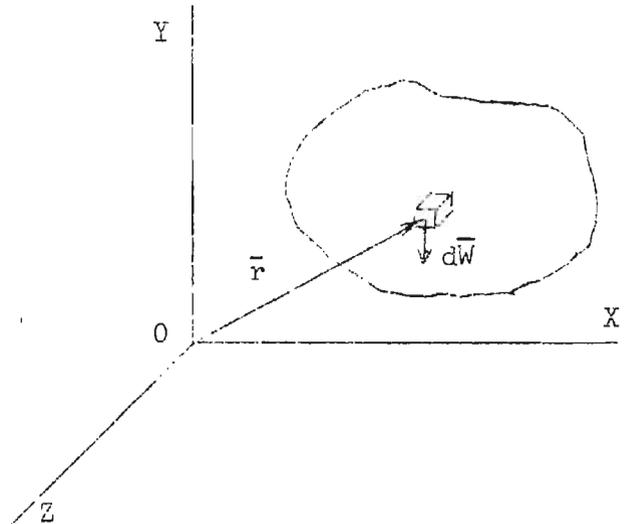


Fig. 5.1

De (5.1) tenemos:

$$- \bar{W}_j = \int (- d\bar{W}_j)$$

de la cual resulta la ecuación escalar

$$W = \int dW \quad (5.3)$$

De (5.2)

$$(x_c \bar{i} + y_c \bar{j} + z_c \bar{k}) \times (- \bar{W}_j) = \int (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) \times (- d\bar{W}_j)$$

Esta ecuación puede escribirse de la siguiente forma:

$$(x_c \bar{W}_i + y_c \bar{W}_j + z_c \bar{W}_k) \times (- \bar{j}) = \int (x d\bar{W}_i + y d\bar{W}_j + z d\bar{W}_k) \times (- \bar{j})$$

o bien:

$$(x_c \bar{W}_i + y_c \bar{W}_j + z_c \bar{W}_k) \times (- \bar{j}) = \left[\int (x d\bar{W}_i + y d\bar{W}_j + z d\bar{W}_k) \right] \times (- \bar{j})$$

Por lo tanto:

$$x_c \bar{W}_i + y_c \bar{W}_j + z_c \bar{W}_k = \int x d\bar{W}_i + \int y d\bar{W}_j + \int z d\bar{W}_k$$

Igualando componentes

$$x_c W = \int x dW ; y_c W = \int y dW ; z_c W = \int z dW \quad (5.4)$$

mediante estas tres ecuaciones escalares determinamos las coordenadas del centro de gravedad.

De la segunda ley de Newton sabemos que la masa de un cuerpo es proporcional a su peso, por esta razón las ecuaciones (5.3) y (5.4) pueden escribirse también de la forma:

$$m = \int dm$$

$$x_c m = \int x dm$$

(5.5)

$$y_c m = \int y dm$$

$$z_c m = \int z dm$$

en donde m , representa la masa total del cuerpo, dm la masa del elemento de peso dW ; x_c , y_c , z_c las coordenadas del centro de masa del cuerpo.

Si el sólido está hecho de un material homogéneo de peso específico γ , se puede escribir:

$$dW = \gamma dV$$

$$W = \gamma V$$

en la cual dV representa el volumen en el elemento de peso dW y V el volumen total del cuerpo. Sustituyendo estas relaciones en (5.3) y (5.4)) obtenemos:

$$V = \int dv$$

$$x_c V = \int x dv$$

(5.6)

$$y_c V = \int y dv$$

$$z_c V = \int z dv$$

El punto definido por x_c , y_c , z_c obtenidas de las relaciones (5.6) se denomina el centroide del volumen del cuerpo considerado.

Es importante observar que para un cuerpo de peso específico constante, el centro de gravedad, centro de masa y centroide coinciden en el mismo punto. Si el peso específico no es constante en todo el volumen, el centro de gravedad coincide con el centro de masa pero no con el centroide.

A las integrales $\int x dv$; $\int y dv$; $\int z dv$ se les denomina con el nombre de momentos de primer orden del volumen con respecto a los planos YZ, XZ, XY respectivamente.

Algunas conclusiones que pueden deducirse de las ecuaciones (5.6) son:

- a) Si el centroide está situado en un plano coordenado, el momento de primer orden del volumen con respecto a ese plano es nulo.
- b) Cuando un volumen posee un plano de simetría, su centroide está situado en dicho plano; si posee dos planos de simetría, el centroide está en la recta de intersección de los dos planos; finalmente, cuando el volumen posee tres planos de simetría que se cortan en un punto, este punto es el centroide del volumen. Esta propiedad permite encontrar inmediatamente el centroide de esferas, elipsoides, cilindros, cubos, etc.

EJEMPLO 5.1

Localizar el centroide del prisma triangular que se indica en la Fig.

Solución.- Observando la figura nos damos cuenta que posee un plano de simetría paralelo al plano XY su ecuación es $z = b/2$ es decir, que la coordenada Z_c es igual a $b/2$. Para determinar x_c consideremos el elemento mostrado en la Fig. (a) de volumen

$$dv = by \, dx$$

Pero

$$y = \frac{b}{a} x$$

luego:

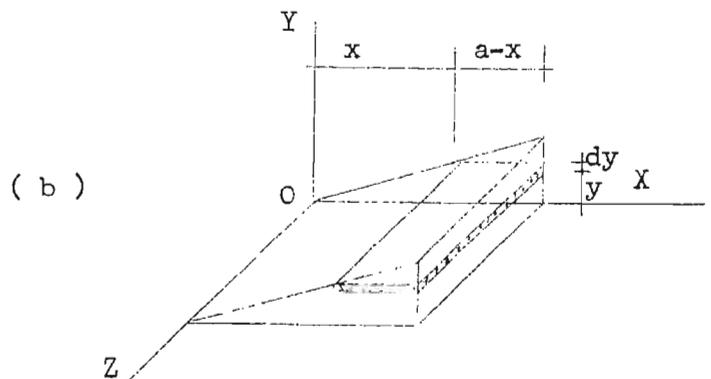
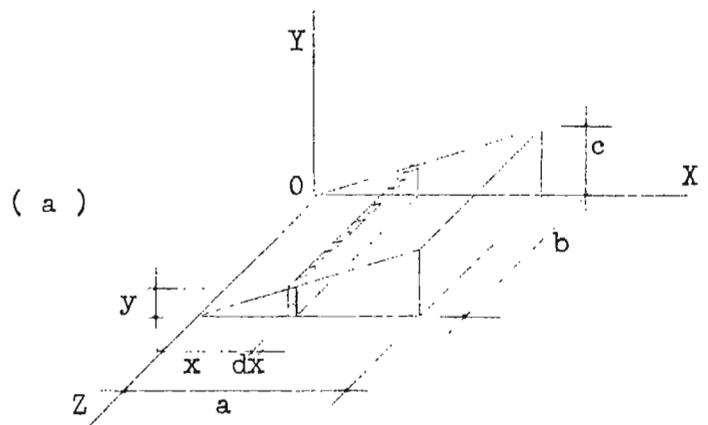
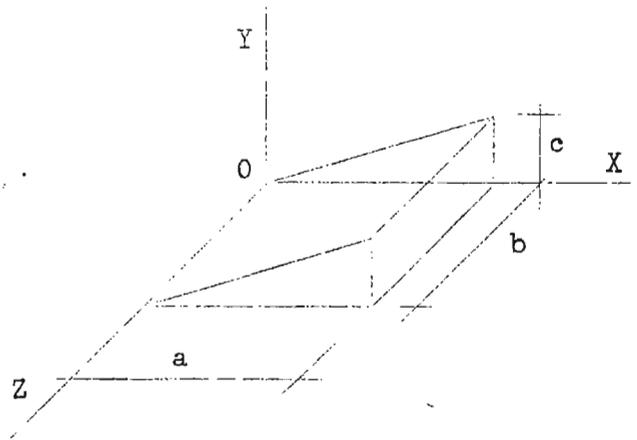
$$dv = \frac{bc}{a} x \, dx$$

El volumen total será :

$$V = \int dv = \frac{bc}{a} \int_0^a x \, dx = \frac{abc}{2}$$

entonces:

$$x_c = \frac{\int x \, dv}{V} = \frac{\frac{bc}{a} \int_0^a x^2 \, dx}{\frac{abc}{2}} = \frac{2}{3} a$$



Considerando como dv el elemento mostrado en la figura (b) y siguiendo un proceso semejante al anterior se demuestra que $y_c = \frac{1}{3} c$. Así pues, el centroide tiene coordenadas:

$$x_c = \frac{2}{3} a ; y_c = \frac{1}{3} c ; z_c = \frac{b}{2}$$

5.2 CENTROIDES DE AREAS Y LINEAS.

Consideremos una placa vertical de espesor uniforme e igual a t y supongamos que su plano medio coincide con el plano XY, de manera que $z_c = 0$ (Fig. 5.2). El volumen de un elemento de la placa se puede expresar como:

$$dv = t \cdot dA$$

Siendo dA el área de la base del elemento.

El volumen total a la placa será:

$$V = t \cdot A$$

donde A expresa el área total de la placa.

Si sustituimos estos valores en (5.6) obtenemos, despues de eliminar t :

$$A = \int dA$$

$$x_c A = \int x dA \tag{ 5.7 }$$

$$y_c A = \int y dA$$

Vemos como el problema se ha reducido a considerar unicamente dos dimensiones (figura 5.3). Las coordenadas x_c , y_c nos darán la posición del centroide del área A que se considere.

A las integrales $\int x dA, \int y dA$ se les da el nombre de momentos de primer orden del área A con respecto a los ejes Y y X respectivamente. Nos damos cuenta de las ecuaciones (5.7) que si el centroide de un área está situada en un eje de coordenadas, el momento de primer orden del área con respecto a ese eje es cero. Vemos también que si el área tiene un eje de simetría, el centroide está

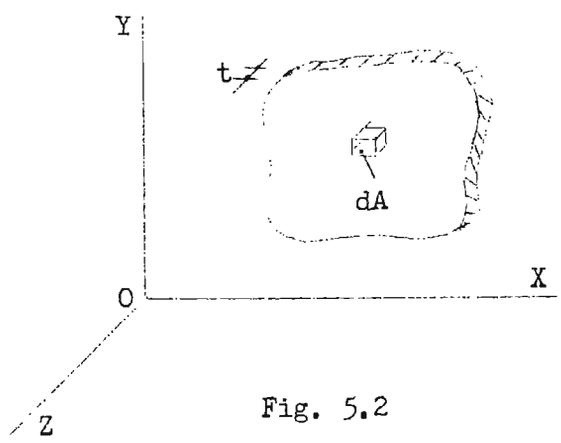


Fig. 5.2

situado sobre ese eje; si posee dos ejes de simetría, estará situado en el punto donde los ejes se cortan.

De este modo se hace evidente la posición del centroide para una circunferencia, un rectángulo, etc.

En la figura 5.4 se muestra un alambre delgado de sección transversal constante. El volumen de un elemento del alambre es $dv = A dL$ siendo A el área de la sección transversal y dL la longitud del elemento. Si esta relación la sustituimos en las ecuaciones (5.6) obtenemos el resultado siguiente, en el cual L es la longitud total del alambre:

$$L = \int dL$$

$$x_c L = \int x dL$$

$$y_c L = \int y dL$$

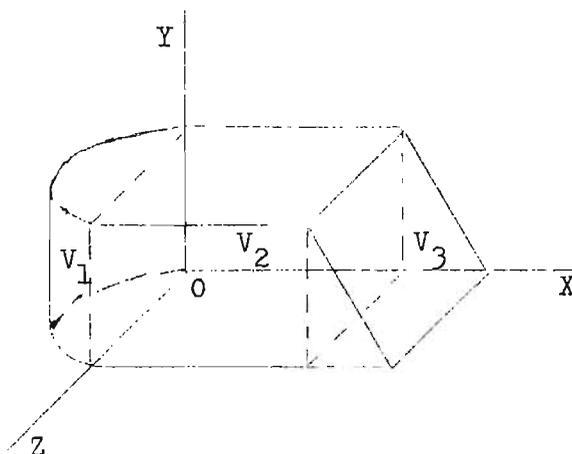
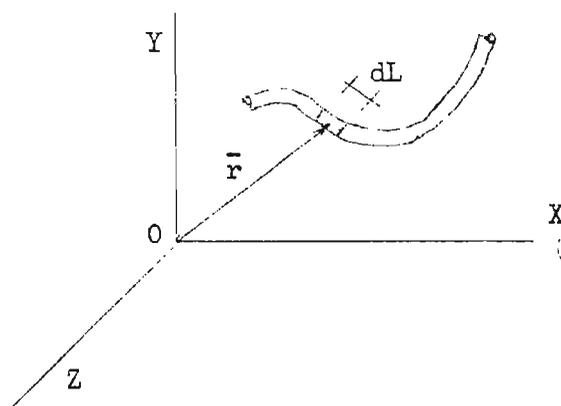
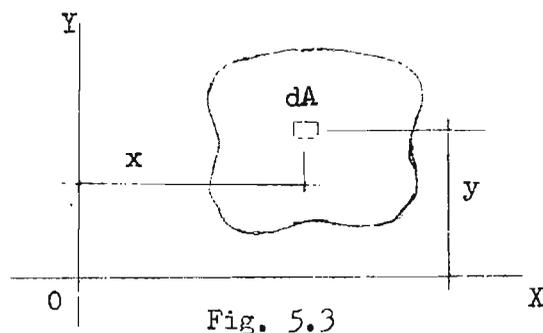
$$z_c L = \int z dL$$

De esta forma, entonces obtenemos el centroide de la línea L .

5.3 CENTROIDES DE FIGURAS COMPUESTAS.

En muchos casos, como en el indicado en la figura (5.5), se hace necesario dividir un volumen o una superficie en figuras simples. Así vemos como el volumen de la figura (5.5) se ha dividido en tres formas elementales, un cilindro de base semi-circular y de volumen V_1 , un paralelepípedo rectangular V_2 y un prisma triangular V_3 .

La coordenada x_c del centroide del



volumen total es:

$$x_c = \frac{\int x \, dv}{V} = \frac{\int x_1 \, dv_1 + \int x_2 \, dv_2 + \int x_3 \, dv_3}{V_1 + V_2 + V_3}$$

Pero:

$$\int x_1 \, dv_1 = x_{c1} V_1 ; \int x_2 \, dv_2 = x_{c2} V_2 ; \int x_3 \, dv_3 = x_{c3} V_3$$

Entonces:

$$x_c = \frac{x_{c1} V_1 + x_{c2} V_2 + x_{c3} V_3}{V_1 + V_2 + V_3}$$

o sea:

$$x_c = \frac{\sum x_{ci} V_i}{\sum V_i}$$

De manera semejante se pueden obtener y_c , z_c . Así pues, para un volumen compuesto:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_{ci} V_i}{\sum V_i} \\ y_c &= \frac{\sum y_{ci} V_i}{\sum V_i} \\ z_c &= \frac{\sum z_{ci} V_i}{\sum V_i} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para un área compuesta, de modo semejante, se tiene:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_{ci} A_i}{\sum A_i} \\ y_c &= \frac{\sum y_{ci} A_i}{\sum A_i} \end{aligned} \quad (5.10)$$

y finalmente para una línea:

$$x_c = \frac{\sum x_{ci} L_i}{\sum L_i}$$

$$y_c = \frac{\sum y_{ci} L_i}{\sum L_i}$$

$$z_c = \frac{\sum z_{ci} L_i}{\sum L_i}$$

(5.11)

En el apéndice, al final de estos apuntes se encuentra información acerca de la posición del centroide para figuras geométricas de uso frecuente.

EJEMPLO 5.2

Hallar el centroide del área indicada en la figura.

Solución.- El área sombreada puede considerarse formado como una combinación de tres áreas más simples: la suma de un triángulo más un rectángulo menos un semicírculo:

Usando las fórmulas dadas en el apéndice, tenemos:

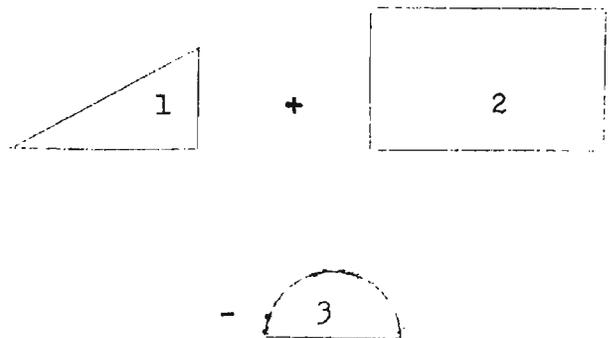
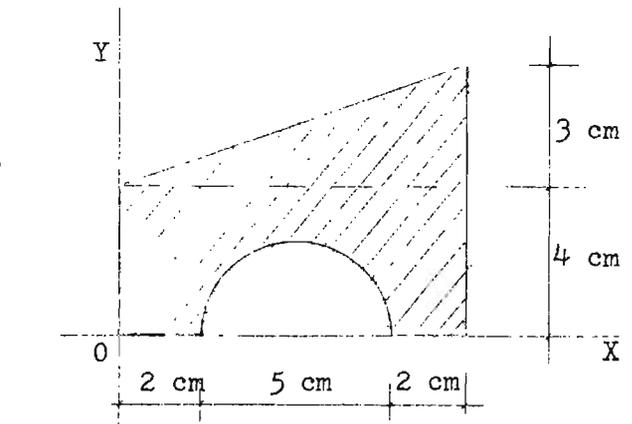
1.- Áreas:

$$A_1 = \frac{1}{2} \times 9 \times 3 = 13.5 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 9 \times 4 = 36.0 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = -\frac{\pi (2.5)^2}{2} = -9.82 \text{ cm}^2$$

$$\sum A_i = 39.68 \text{ cm}^2$$



2.- Abscisas:

$$x_{c1} = \frac{2}{3} b = \frac{2}{3} \times 9 = 6 \text{ cm.}; A_1 x_{c1} = 13.5 \times 6 = 81.0 \text{ cm}^3$$

$$x_{c2} = \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} \times 9 = 4.5 \text{ cm.}; A_2 x_{c2} = 36.0 \times 4.5 = 162.0 \text{ cm}^3$$

$$x_{c3} = 4.5 \text{ cm.}; A_3 x_{c3} = -9.82 \times 4.5 = -44.19 \text{ cm}^3$$

$$\sum A_i x_{ci} = 198.81 \text{ cm}^3$$

3.- Ordenadas:

$$y_{c1} = 4 + 1/3h = 4 + 1/3 \times 3 = 5 \text{ cm} \quad ; \quad \hat{A}_1 y_{c1} = 13.5 \times 5 = 67.5 \text{ cm}^3$$

$$y_{c2} = 1/2h = 1/2 \times 4 = 2 \text{ cm} \quad ; \quad \hat{A}_2 y_{c2} = 36. \times 2 = 72.0 \text{ cm}^3$$

$$y_{c3} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \times 2.5}{3\pi} = 1.06 \text{ cm} \quad ; \quad \hat{A}_3 y_{c3} = - 9.82 \times 1.06 = - 10.41 \text{ cm}^3$$

$$\sum \hat{A}_i y_{ci} = 129.09 \text{ cm}^3$$

Usando las ecuaciones (5.10)

$$x_c = \frac{198.81}{39.68} = 5.01 \text{ cm.}$$

$$y_c = \frac{129.09}{38.68} = 3.26 \text{ cm.}$$

CAPITULO 6MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN.6.1 MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA DE AREAS.6.1.1 DEFINICIONES.

Consideremos el área representada en la figura 6.1. Hemos visto anteriormente que el momento de primer orden con respecto al eje X del área es $\int y \, dA$. La razón de llamar a esta integral como momento de primer orden es que en muchos problemas de ingeniería aparece otra integral: $\int y^2 \, dA$, la cual se denomina momento de segundo orden del área con respecto al eje X.

Esta integral es comúnmente conocida con el nombre de momento de inercia del área con respecto al eje X y denotada con el símbolo I_x . Así, definimos,

$$I_x = \int y^2 \, dA ; I_y = \int x^2 \, dA \quad (6.1)$$

como los momentos de inercia del área con respecto a los ejes de coordenadas X y Y respectivamente.

Como consecuencia de las definiciones anteriores aparece otra integral: $\int r^2 \, dA$ donde r es la distancia desde el origen de coordenadas O al elemento dA. Esta integral se denomina como momento polar de inercia del área con respecto a O, se denota por J_o .

$$J_o = \int r^2 \, dA \quad (6.2)$$

Puede verse de la figura 6.1 que:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

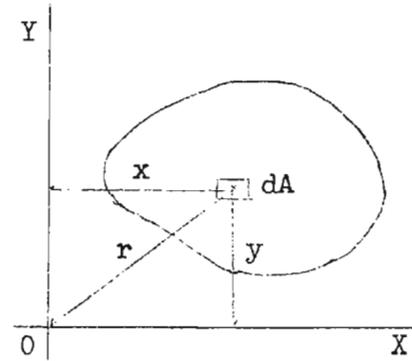


Fig. 6.1

que al sustituir en (6.2) obtenemos:

$$J_o = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

o sea:

$$J_o = I_x + I_y \quad (6.3)$$

Asociados a los momentos de inercia están los radios de giro que se definen como sigue:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (6.4)$$

$$k_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

donde A es el área total, k_x y k_y son, respectivamente, los radios de giro con respecto a los ejes X y Y , y k_o es el radio polar de giro con respecto a O . Otra integral de gran importancia, llamada producto de inercia del área con respecto a los ejes X y Y , y denotada por el símbolo I_{xy} , es:

$$I_{xy} = \int x y dA \quad (6.5)$$

donde x , y son las coordenadas del elemento de área dA .

De las definiciones podemos observar que los momentos de inercia son siempre positivos, mientras que el producto de inercia puede ser positivo o negativo. Además, si uno de los ejes de coordenadas es de simetría para el área, el producto de inercia es igual a cero.

El momento de inercia de un área compuesta puede evaluarse de una manera parecida a la usada para encontrar el centroide de figuras compuestas, dividiendo la figura total en áreas más simples A_1, A_2, \dots, A_n . Así, con respecto al eje X tenemos

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \dots + \int_{A_n} y^2 dA$$

Así,

$$I_x = (I_x)_1 + (I_x)_2 + \dots + (I_x)_n \quad (6.6)$$

Lo mismo puede decirse sobre el producto de inercia.

EJEMPLO 6.1

Calcular los momentos y producto de inercia del triángulo mostrado con respecto a los ejes X, Y.

Solución.- Para calcular I_x podemos usar la franja que se indica en la figura, de área $dA = xdy$. Luego:

$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 x dy$$

$$\text{Pero: } y = -\frac{h}{b}x + h$$

$$\text{o sea: } x = -\frac{b}{h}y + b$$

Entonces:

$$I_x = \int_0^h y^2 \left(-\frac{b}{h}y + b \right) dy$$

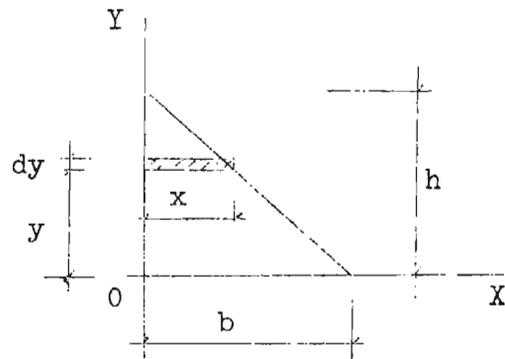
Finalmente, después de evaluar la integral:

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

Este resultado debe interpretarse así: el momento de inercia de un triángulo rectángulo con respecto a un eje que pasa por su base es igual al producto de la base por el cubo de la altura y luego dividido entre doce.

Ahora bien, si consideramos como base el cateto vertical de longitud h y altura del triángulo el lado b , observamos que el eje Y es un eje que pasa por la base del triángulo, por lo que podemos escribir

$$I_y = \frac{b^3h}{12}$$



El producto de inercia se evalúa tomando como elemento de área el mostrado en la figura

$$dA = dx \, dy$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_0^h \int_0^x xy \, dx \, dy \\ &= \int_0^h y \frac{x^2}{2} \, dy \end{aligned}$$

Pero: $x = -\frac{b}{h}y + b$

Luego:

$$I_{xy} = \int_0^h \frac{y}{2} \left(-\frac{b}{h}y + b \right)^2 \, dy$$

Integrando, llegamos a:

$$I_{xy} = \frac{1}{24} b^2 h^2$$

6.1.2 TRASLACION DE EJES DE COORDENADAS.

Corrientemente es necesario evaluar el momento de inercia de un área con respecto a un eje determinado cuando se conoce el momento de inercia con respecto a otro eje paralelo.

Consideremos el área de la figura 6.2. Sea C el centroide del área y (x_c, y_c) sus coordenadas con respecto al sistema de ejes X, Y. Con origen en C situamos un segundo sistema de ejes X_c, Y_c paralelo al primero. El

momento de inercia con respecto al eje X es :

$$I_x = \int y^2 dA$$

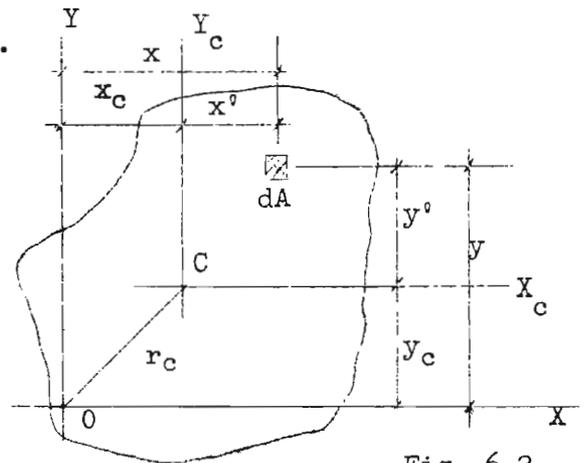
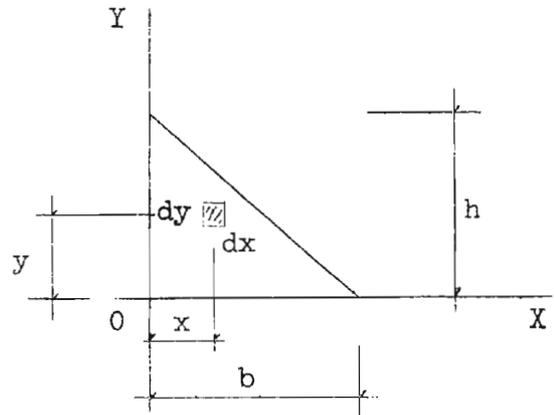


Fig. 6.2

De la figura tomamos:

$$y = y' + y_c$$

Luego:

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y' + y_c)^2 dA \\ &= \int y'^2 dA + 2y_c \int y' dA + y_c^2 \int dA \end{aligned}$$

En esta ecuación, la primera integral representa el momento de inercia I_{x_c} del área con respecto al eje X_c . La segunda integral es el momento de primer orden con respecto al mismo eje, como el centroide del área está sobre este eje, la integral es igual a cero. Finalmente, la tercera integral es el área total A . Entonces,

... :

$$I_x = I_{x_c} + Ay_c^2 \quad (6.7)$$

De manera semejante se puede demostrar que:

$$I_y = I_{y_c} + Ax_c^2 \quad (6.8)$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + Ax_c y_c \quad (6.9)$$

Para el momento polar de inercia, tenemos:

$$\begin{aligned} J_o &= I_x + I_y \\ &= (I_{x_c} + Ay_c^2) + (I_{y_c} + Ax_c^2) \\ &= (I_{x_c} + I_{y_c}) + A(x_c^2 + y_c^2) \end{aligned}$$

Pero: $J_c = I_{x_c} + I_{y_c}$

$$x_c^2 + y_c^2 = r_c^2$$

...

Por lo tanto:

$$J_o = J_c + A r_c^2 \quad (6.10)$$

Las ecuaciones (6.7), (6.8), (6.9) y (6.10) son las expresiones matemáticas del Teorema de los ejes paralelos o Teorema de Steiner.

EJEMPLO 6.2

Para el área de la figura del ejemplo (5.2) encontrar los momentos y el producto de inercia con respecto a ejes centroidales paralelos a los ejes dados.

Solución.- Primero encontremos I_x , I_y , I_{xy} de la figura total. Así, la dividiremos en las mismas tres áreas mas simples en que se dividió para ubicar su centroide. Tomando las fórmulas dadas en el apéndice tenemos:

Fig. 1

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{36} = \frac{9 \times (3)^3}{36} = 6.75 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned} I_x &= I_{xc} + A y_c^2 \\ &= 6.8 + 13.5 \times (5)^2 \\ &= 344.3 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$I_{yc} = \frac{b^3h}{36} = \frac{(9)^3 \times 3}{36} = 60.8 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned} I_y &= I_{yc} + A x_c^2 \\ &= 60.8 + 13.5 \times (6)^2 \\ &= 546.8 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$I_{xc yc} = \frac{b^2h^2}{72} = \frac{(9)^2 (3)^2}{72} = 10.1 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{xc yc} + A x_c y_c \\ &= 10.1 + (13.5) (6) (5) \\ &= 415.1 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

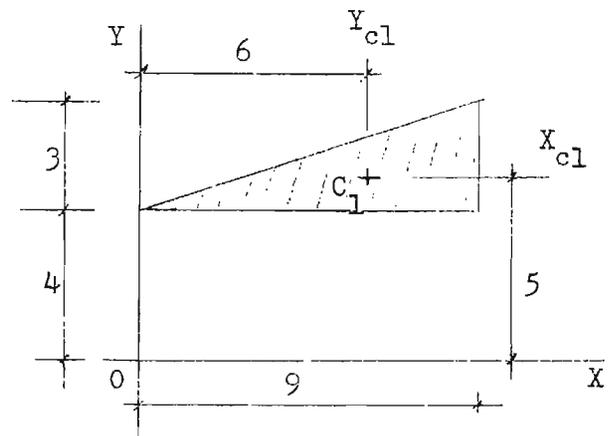
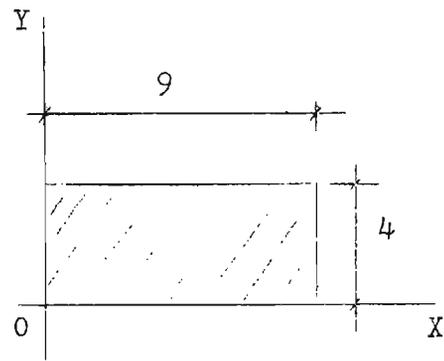


Fig. 2

$$I_x = \frac{bh^3}{3} = \frac{(9)(4)^3}{3} = 192 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{b^3h}{3} = \frac{(9)^3(4)}{3} = 972 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4} = \frac{(9)^2(4)^2}{4} = 324 \text{ cm}^4$$

Fig. 3

$$I_x = \left(\frac{1}{8}\right)\pi r^4 = \left(\frac{1}{8}\right)\pi (2.5)^4$$

$$= 15.4 \text{ cm}^4$$

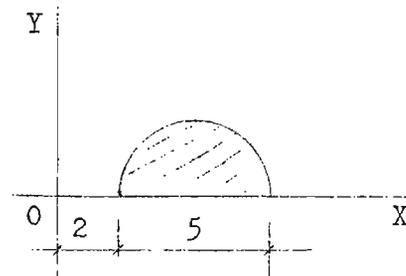
$$I_{yc} = \left(\frac{1}{8}\right)\pi r^4 = 15.4 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 15.4 + (9.82)(4.5)^2$$

$$= 213.4 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_c y_c} = 0$$

$$I_{xy} = 0 + (9.82)(4.5)(1.06) = 46.8 \text{ cm}^4$$



Debemos recordar que la figura 3 es un área negativa, así, para la figura entera:

$$I_x = 344.3 + 192 - 15.4 = 520.9 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 546.8 + 972 - 213.4 = 1305.4 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 415.1 + 324 - 46.8 = 692.3 \text{ cm}^4$$

Aplicamos ahora las ecuaciones (6.7), (6.8) y (6.9) a toda la figura:

$$I_{x_c} = I_x - Ay_c^2$$

$$= 520.9 - (39.68)(3.26)^2 = 98.9 \text{ cm}^4$$

$$I_{yc} = I_y - A x_c^2$$

$$= 1305.4 - (39.68) (5.01)^2 = 307.4 \text{ cm}^4$$

$$I_{xc yc} = I_{xy} - A x_c y_c$$

$$= 692.3 - (39.68)(5.01)(3.26) = 44.3 \text{ cm}^4$$

6.1.3 ROTACION DE EJES DE COORDENADAS.

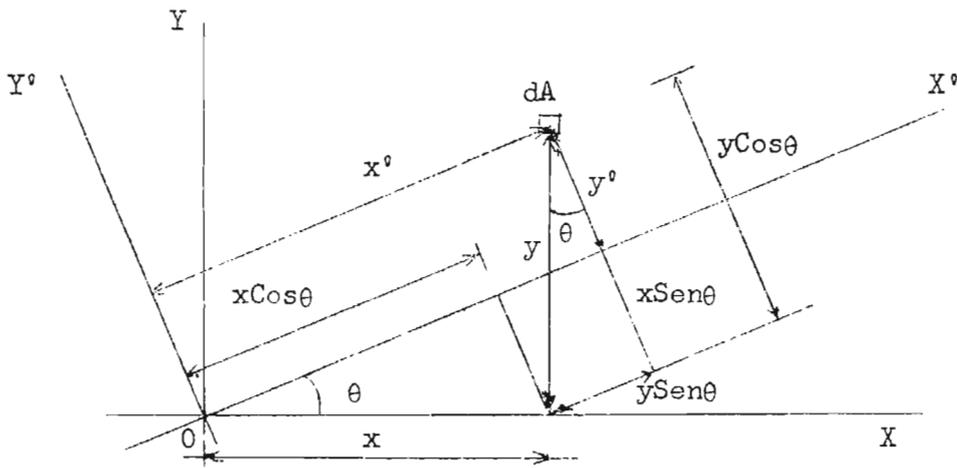


Fig. 6.3

Existen también problemas en los cuales, conocidos los momentos de inercia y el producto de inercia de un área con respecto a un par de ejes, se necesita obtener los momentos y producto de inercia con respecto a otro par de ejes que tienen el mismo origen que los primeros.

Consideremos el área de la figura 6.3. Supongamos conocidos I_x , I_y , I_{xy} con respecto a los ejes X , Y . Nos proponemos encontrar expresiones para $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{x'y'}$, con respecto a los ejes X' , Y' obtenidos de haber rotado un ángulo θ los ejes originales.

De la figura puede verse que

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Además, por definición:

$$I_{x'} = \int y'^2 dA$$

Luego:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA \\ &= \cos^2 \theta \int y^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy dA + \sin^2 \theta \int x^2 dA \end{aligned}$$

Sabemos que por definición:

$$I_x = \int y^2 dA; \quad I_y = \int x^2 dA; \quad I_{xy} = \int xy dA$$

Por lo tanto:

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2 I_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

Usando las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos^2 \theta = 1/2 (1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin^2 \theta = 1/2 (1 - \cos 2\theta)$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

Obtenemos:

$$I_{x'} = 1/2 I_x (1 + \cos 2\theta) + 1/2 I_y (1 - \cos 2\theta) - I_{xy} \sin 2\theta$$

Simplificando, llegamos finalmente a que:

$$I_{x'} = 1/2 (I_x + I_y) + 1/2 (I_x - I_y) \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (6.11)$$

Siguiendo un proceso análogo, se obtienen expresiones para $I_{y'}$, $I_{x'y'}$:

$$I_{y'} = 1/2 (I_x + I_y) - 1/2 (I_x - I_y) \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (6.12)$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (6.13)$$

6.1.4 EJES PRINCIPALES DE INERCIA

Según las definiciones dadas a los momentos y productos de inercia, sabemos que estas cantidades son constantes para un sistema de ejes dados. Así pues, vemos que en las ecuaciones (6.11), (6.12), (6.13) las cantidades I_x , I_y , I_{xy} son constantes, es decir que $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{x'y'}$ son funciones únicamente del ángulo θ .

Demostraremos en esta sección que existe un sistema de ejes X_p, Y_p con respecto a los cuales los momentos de inercia son para uno máximo y para el otro mínimo.

Los ejes que cumplen con esta condición se denominan ejes principales de inercia y los momentos con respecto a ellos, momentos principales de inercia.

Para determinar la posición de estos ejes con respecto a otros X, Y dados, derivamos la ecuación (6.11) con respecto a θ e igualamos a cero esa derivada, así;

$$\frac{d I_{x'}}{d \theta} = - \frac{2 (I_x - I_y)}{2} \cos 2\theta - 2 I_{xy} \sin 2\theta = 0$$

De esta ecuación se obtiene:

$$\tan 2\theta = - \frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (6.14)$$

La ecuación (6.14) tiene dos soluciones para θ que difieren en 90° , pues:

$$\tan 2\theta = \tan (2\theta + 180^\circ)$$

Uno de los valores de θ localiza el eje de momento de inercia máximo, mientras que el otro valor corresponde al eje de momento de inercia mínimo. Es importante hacer notar que el producto de inercia es cero con respecto a los ejes principales, lo que se demuestra sustituyendo el resultado de la ecuación (6.14) en (6.13). Consecuentemente podemos decir que los ejes de simetría son ejes principales pues los productos de inercia son nulos, pero los ejes principales no son necesariamente ejes de simetría.

EJEMPLO 6.3

Con los datos obtenidos en el ejemplo anterior encontrar la dirección de los ejes principales centroidales y los correspondientes momentos de Inercia.

Solución.- Los datos obtenidos en el ejemplo anterior son:

$$I_{xc} = 98.9 \text{ cm}^4$$

$$I_{yc} = 307.4 \text{ cm}^4$$

$$I_{xcyc} = 44.3 \text{ cm}^4$$

a.- Ejes principales. Usando la ecuación (6.14) obtenemos la dirección de los ejes principales.

$$\tan 2\theta = - \frac{2 \times 44.3}{98.9 - 307.4} = 0.425$$

$$2\theta = 23.1^\circ$$

$$\theta = 11.55^\circ$$

b.- Momentos principales de inercia; usando la ecuación (6.11):

$$I_{xp} = \frac{1}{2} (98.9 + 307.4) + \frac{1}{2} (98.9 - 307.4) \cos 23.1^\circ - 44.3 \sin 23.1^\circ$$

$$I_{xp} = 89.7 \text{ cm}^4$$

De la ecuación (6.12)

$$I_{yp} = 316.6 \text{ cm}^4$$

6.2 MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA DE MASAS.

6.2.1 DEFINICIONES .

Consideremos un sólido rígido y tomemos de él un elemento de masa $dm = \rho dV$, donde ρ es la densidad de masa y dV su volumen. La posición de ese elemento con referencia a un marco cartesiano XYZ es:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

(6.15

Definamos las cantidades siguientes:

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int \rho (y^2 + z^2) dV & I_{xy} &= \int \rho xy dV \\
 I_{yy} &= \int \rho (x^2 + z^2) dV & I_{xz} &= \int \rho xz dV \\
 I_{zz} &= \int \rho (x^2 + y^2) dV & I_{yz} &= \int \rho yz dV
 \end{aligned}
 \tag{6.16}$$

Los términos I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} son los momentos de inercia de la masa del sólido con respecto a los ejes X, Y, Z, respectivamente. Los términos I_{xy} , I_{xz} , I_{yz} son los productos de inercia de la masa del sólido con respecto a los ejes XY, XZ, YZ respectivamente.

Es importante hacer notar que los paréntesis $(y^2 + z^2)$, $(x^2 + z^2)$, $(x^2 + y^2)$ de los momentos de inercia representan los cuadrados de las distancias perpendiculares del elemento al eje respectivo. Podemos ver también de los integrales que:

$$I_{xy} = I_{yx}$$

$$I_{xz} = I_{zx}$$

$$I_{yz} = I_{zy}$$

Asociados a los momentos de inercia están los radios de giro que son definidos como sigue:

$$\begin{aligned}
 r_x &= \sqrt{\frac{I_{xx}}{m}} \\
 r_y &= \sqrt{\frac{I_{yy}}{m}} \\
 r_z &= \sqrt{\frac{I_{zz}}{m}}
 \end{aligned}
 \tag{6.17}$$

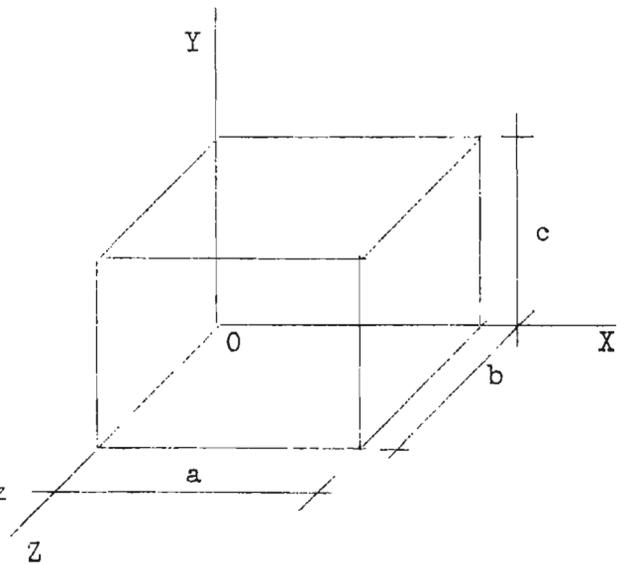
donde m es la masa total de sólido y r_x , r_y , r_z son los radios de giro correspondientes a los ejes X, Y, Z respectivamente.

EJEMPLO 6.4

Encontrar los momentos y productos de inercia del sólido rectangular de densidad uniforme ρ con respecto a los ejes XYZ indicados en la figura.

Solución.— Calculemos primero I_{xx} . Para ello tomemos un elemento de volumen $dV = dx dy dz$. De la definición:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_0^b \int_0^c \int_0^a (y^2 + z^2) \rho dx dy dz \\ &= \int_0^b \int_0^c (y^2 + z^2) a \rho dy dz \\ &= \int_0^b \left(\frac{c^3}{3} + z^2 c \right) a \rho dz \\ &= \left(\frac{abc^3}{3} + \frac{ab^3c}{3} \right) \rho \\ &= \frac{\rho V}{3} (c^2 + b^2) \end{aligned}$$



donde V es el volumen del sólido. De manera semejante se encuentra que:

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \frac{\rho V}{3} (b^2 + a^2) \\ I_{zz} &= \frac{\rho V}{3} (c^2 + a^2) \end{aligned}$$

Ahora calcularemos I_{xy} a partir de su definición:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_0^b \int_0^c \int_0^a xy \rho dx dy dz \\ &= \int_0^b \int_0^c \frac{a^2}{2} y \rho dy dz \\ &= \frac{a^2 c^2}{4} \rho dz \\ &= \frac{a^2 bc^2 \rho}{4} = \frac{\rho V}{4} ac \end{aligned}$$

De igual modo obtenemos:

$$I_{xz} = \frac{\rho V}{4} ab$$

$$I_{yz} = \frac{\rho V}{4} bc$$

6.2.2 TRASLACION DE EJES DE COORDENADAS.

Sea XYZ un marco de referencia cartesiano. La posición de cualquier elemento P del sólido con respecto a XYZ es:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad (6.18)$$

Tomemos ahora el centro de masa C del sólido localizado por:

$$\bar{r}_c = x_c\bar{i} + y_c\bar{j} + z_c\bar{k} \quad (6.19)$$

Si en C situamos un sistema de ejes Xc Yc Zc paralelo a XYZ, la posición de P se puede encontrar como:

$$\bar{r} = \bar{r}_c + \bar{r}_{P/C} \quad (6.20)$$

Siendo:

$$\bar{r}_{P/C} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}' \quad (6.21)$$

donde (X' Y' Z') son las coordenadas de P referidas a Xc Yc Zc.

De la ecuación (6.20) obtenemos:

$$x = x_c + x'$$

$$y = y_c + y' \quad (6.22)$$

$$z = z_c + z'$$

Supongamos conocidos los momentos de inercia $I_{x_c x_c}$, $I_{y_c y_c}$, $I_{z_c z_c}$ y los pro-

ductos de inercia $I_{x_c y_c}$, $I_{x_c z_c}$, $I_{y_c z_c}$ con respecto a los ejes centroidales. De la ecuaciones (6.16) tenemos que para los ejes XYZ:

$$I_{xx} = \int \rho (y^2 + z^2) dV$$

sustituyendo los valores encontrados en (6.22)

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int \rho [(y_c + y')^2 + (z_c + z')^2] dV \\ &= \int \rho (y'^2 + z'^2) dV + (y_c^2 + z_c^2) \int \rho dV + 2y_c \int \rho y' dV + 2z_c \int \rho z' dV \end{aligned}$$

Como el origen del sistema $X_c Y_c Z_c$ es el centro de masas, se cumple que:

$$\int \rho (y'^2 + z'^2) dV = I_{x_c x_c}$$

$$\int \rho y' dV = 0$$

$$\int \rho z' dV = 0$$

Además

$$\int \rho dV = m$$

Luego:

$$I_{xx} = I_{x_c x_c} + m (y_c^2 + z_c^2) \quad (6.23)$$

nótese que $(y_c^2 + z_c^2)$ es el cuadrado de la distancia entre los ejes X y X_c . De manera semejante se puede demostrar que:

$$I_{yy} = I_{y_c y_c} + m (x_c^2 + z_c^2) \quad (6.24)$$

$$I_{zz} = I_{z_c z_c} + m (x_c^2 + y_c^2) \quad (6.25)$$

En general, podemos establecer que el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje es igual al momento de inercia del mismo respecto del eje paralelo que pasa por el centro de masa, más el producto de la masa total por

el cuadrado de la distancia entre los ejes.

Los productos de inercia se transforman de una manera análoga, y se obtienen las siguientes relaciones:

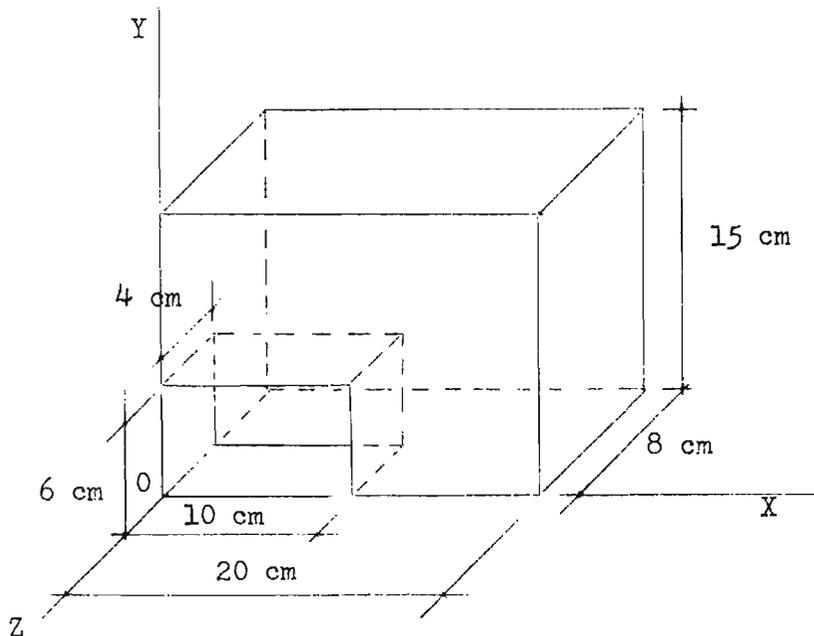
$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + m x_c y_c$$

$$I_{xz} = I_{x_c z_c} + m x_c z_c \quad (6.26)$$

$$I_{yz} = I_{y_c z_c} + m y_c z_c$$

EJEMPLO 6.5

Determinar los momentos y productos de inercia con respecto a ejes centroidales, paralelos a los indicados en la figura, del sólido de densidad uniforme



Solución. Consideraremos el sólido formado por un prisma rectangular de $20 \times 8 \times 15$ cm. al que se le resta otro menor de $8 \times 4 \times 6$ cm.

Para el prisma mayor:

$$V = 20 \times 8 \times 15 = 2400 \text{ cm}^3$$

$$x_c = 10 \text{ cm}$$

$$y_c = 7.5 \text{ cm}$$

$$z_c = -4 \text{ cm}$$

$$I_{xx} = \frac{2400 \rho}{3} (8^2 + 15^2) = 231200 \rho$$

$$I_{yy} = \frac{2400 \rho}{3} (20^2 + 8^2) = 371200 \rho$$

$$I_{zz} = \frac{2400 \rho}{3} (20^2 + 15^2) = 500000 \rho$$

$$I_{xy} = \frac{2400 \rho}{4} \times 20 \times 15 = 180000 \rho$$

$$I_{xz} = -\frac{2400 \rho}{4} \times 20 \times 8 = -96000 \rho$$

$$I_{yz} = -\frac{2400 \rho}{4} \times 15 \times 8 = -72000 \rho$$

Para el prisma menor:

$$V = 10 \times 6 \times 4 = 240 \text{ cm}^3$$

$$x_c = 5 \text{ cm}$$

$$y_c = 3 \text{ cm}$$

$$z_c = -2 \text{ cm}$$

$$I_{xx} = \frac{240 \rho}{3} (6^2 + 4^2) = 4160 \rho$$

$$I_{yy} = \frac{240 \rho}{3} (10^2 + 4^2) = 9280 \rho$$

$$I_{zz} = \frac{240 \rho}{3} (10^2 + 6^2) = 10880 \rho$$

$$I_{xy} = \frac{240 \rho}{4} \times 10 \times 6 = 3600 \rho$$

$$I_{xz} = -\frac{240 \rho}{4} \times 10 \times 4 = -2400 \rho$$

$$I_{yz} = -\frac{240 \rho}{4} \times 6 \times 4 = -1440 \rho$$

Para el sólido dado:

$$V = 2400 - 240 = 2160 \text{ cm}^3$$

$$x_c = \frac{2400 \times 10 - 240 \times 5}{2160} = 10.56 \text{ cm}$$

$$y_c = \frac{2400 \times 7.15 - 240 \times 3}{2160} = 8.00 \text{ cm}$$

$$z_c = \frac{-2400 \times 4 + 240 \times 2}{2160} = -4.22 \text{ cm}$$

$$I_{xx} = (231200 - 4160) \text{ e} = 227040 \text{ e}$$

$$I_{yy} = (371200 - 9280) \text{ e} = 361920 \text{ e}$$

$$I_{zz} = (500000 - 10880) \text{ e} = 489120 \text{ e}$$

$$I_{xy} = (180000 - 3600) \text{ e} = 176400 \text{ e}$$

$$I_{xz} = - (96000 - 2400) \text{ e} = -93600 \text{ e}$$

$$I_{yz} = - (72000 - 1440) \text{ e} = -70560 \text{ e}$$

Finalmente, mediante el teorema de la traslación de ejes, encontramos los momentos y productos de inercia requeridos.

$$I_{xcxc} = 227040 \text{ e} - 2160 \text{ e} \left[8.00^2 + (-4.22)^2 \right] = 50000 \text{ e}$$

$$I_{ycyc} = 361920 \text{ e} - 2160 \text{ e} \left[10.56^2 + (-4.22)^2 \right] = 82000 \text{ e}$$

$$I_{zczc} = 489120 \text{ e} - 2160 \text{ e} \left[10.56^2 + 8.00^2 \right] = 111000 \text{ e}$$

$$I_{xcyc} = 176400 \text{ e} - 2160 \text{ e} \times 10.56 \times 8.00 = -5600 \text{ e}$$

$$I_{xczc} = -93600 \text{ e} - 2160 \text{ e} \times 10.56 \times (-4.22) = 2500 \text{ e}$$

$$I_{yczc} = -70560 \text{ e} - 2160 \text{ e} \times 8.00 \times (-4.22) = 2440 \text{ e}$$

6.2.3 ROTACION DE EJES DE COORDENADAS.-

Supongamos que los momentos y productos de inercia de la masa de un sólido con respecto a un sistema de ejes XYZ son conocidos.

Desearnos determinar los correspondientes a otro sistema de ejes $X' Y' Z'$ que tenga el mismo origen de XYZ. (puede decirse que $X' Y' Z'$ corresponde a una rotación de X Y Z alrededor de su origen).

Tomemos un elemento de masa $dm = \rho \, dV$ del sólido, localizado con respecto a XYZ mediante:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

y con respecto a $X' Y' Z'$ por:

$$\bar{r} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}'$$

Nótese que el vector de posición \bar{r} es el mismo, aunque esté expresado en componentes rectangulares de dos sistemas distintos.

Ahora veamos como podemos calcular el momento de inercia $I_{x'x'}$, con respecto al eje X' . Por definición:

$$I_{x'x'} = \int \rho (y'^2 + z'^2) dV \quad (6.27)$$

Para evaluar $I_{x'x'}$, debemos transformarlo a una función de XYZ. Para eso encontremos primero la magnitud de \bar{r} .

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

de lo cual:

$$y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - x'^2 \quad (6.28)$$

Ahora tomando en cuenta las propiedades del producto escalar, tenemos:

$$x' = \bar{i}' \cdot \bar{r}$$

$$x' = \bar{i}' \cdot (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})$$

$$x' = x(\bar{i}' \cdot \bar{i}) + y(\bar{i}' \cdot \bar{j}) + z(\bar{i}' \cdot \bar{k}) \quad (6.29)$$

Observando que en la ecuación (6.29) los productos escalares indicados representan los cosenos directores del eje X' con el sistema $X Y Z$. Si denotamos estos cosenos directores por l , tenemos:

$$l_{x',x} = \vec{i}' \cdot \vec{i}$$

$$l_{x',y} = \vec{i}' \cdot \vec{j} \quad (6.30)$$

$$l_{x',z} = \vec{i}' \cdot \vec{k}$$

Entonces, la ecuación (6.29) queda escrita de la siguiente forma:

$$x' = x l_{x',x} + y l_{x',y} + z l_{x',z} \quad (6.31)$$

Con este resultado, sustituido en (6.28) y luego en (6.27), obtenemos:

$$I_{x',x'} = \int \rho \left[(x^2 + y^2 + z^2) - (x l_{x',x} + y l_{x',y} + z l_{x',z})^2 \right] dV \quad (6.32)$$

Puesto que :

$$l_{x',x}^2 + l_{x',y}^2 + l_{x',z}^2 = 1 \quad (6.33)$$

la ecuación (6.32) puede escribirse de la forma:

$$I_{x',x'} = \int \rho \left[(x^2 + y^2 + z^2) (l_{x',x}^2 + l_{x',y}^2 + l_{x',z}^2) - (x l_{x',x} + y l_{x',y} + z l_{x',z})^2 \right] dV \quad (6.34)$$

Desarrollando las operaciones indicadas en (6.34) y **agrupando términos, obtenemos.**

$$I_{x'x'} = l_{x'x}^2 \int \rho (y^2 + z^2) dV + l_{x'y}^2 \int \rho (x^2 + z^2) dV + l_{x'z}^2 \int \rho (x^2 + y^2) dV \\ - 2l_{x'x} l_{x'y} \int \rho xy dV - 2l_{x'x} l_{x'z} \int \rho xz dV - 2l_{x'y} l_{x'z} \int \rho yz dV$$

Recordando las definiciones dadas por (6.16), obtenemos $I_{x'x'}$ expresado en términos de los momentos y productos de inercia conocidos, esto es:

$$I_{x'x'} = l_{x'x}^2 I_{xx} + l_{x'y}^2 I_{yy} + l_{x'z}^2 I_{zz} - 2 l_{x'x} l_{x'y} I_{xy} - 2 l_{x'x} l_{x'z} I_{xz} \\ - 2 l_{x'y} l_{x'z} I_{yz} \quad (6.35)$$

Expresiones semejantes se obtienen para $I_{y'y'}$ e $I_{z'z'}$. Los productos de inercia se calculan siguiendo un proceso análogo al anterior, llegando a relaciones de la siguiente forma:

$$I_{x'y'} = - l_{x'x} l_{y'x} I_{xx} - l_{x'y} l_{y'y} I_{yy} - l_{x'z} l_{y'z} I_{zz} \\ + (l_{x'x} l_{y'y} + l_{x'y} l_{y'x}) I_{xy} + (l_{x'y} l_{y'z} + l_{x'z} l_{y'y}) I_{yz} \\ + (l_{x'z} l_{y'x} + l_{x'x} l_{y'z}) I_{xz} \quad (6.36)$$

Debido al gran número de términos y sub-índices involucrados en las ecuaciones de transformación (6.35) y (6.36), se hace necesario buscar un método para sistematizarlas.

Esto se puede hacer definiendo una matriz de momentos y productos de inercia:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & - I_{xy} & - I_{xz} \\ - I_{xy} & I_{yy} & - I_{yz} \\ - I_{xz} & - I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Esta matriz se denomina tensor de inercia del sólido con respecto al sistema XYZ.

El procedimiento para encontrar cualquiera de los momentos o productos de inercia con respecto a $X' Y' Z'$ en términos de los correspondientes a XYZ es como sigue:

1.- $I_{m'n'}$ representa cualquiera de los momentos o productos de inercia con respecto a $X' Y' Z'$, esto es, que m' y n' pueden tomar los valores X', Y', Z' dependiendo de lo que se desee.

2.- I_{mn} representa cualquiera de los momentos o productos de inercia con respecto a XYZ, es decir, que m y n pueden ser X, Y, Z.

3.- Los cosenos directores que determinan la posición de los ejes $X'Y'Z'$ con respecto a XYZ se representarán por $l_{m'n'}$ y $l_{n'm'}$.

4.- El tensor de inercia debe transformarse mediante la siguiente operación:

$$I_{m'n'} = \sum_m \sum_n l_{m'n'} l_{n'm'} I_{mn} \quad (6.38)$$

5.- Al efectuar la operación anterior debe tenerse en cuenta que los términos para los cuales $m \neq n$ ó $m' \neq n'$ en I tienen signo negativo.

6.2.4 EJES PRINCIPALES DE INERCIA.

En la sección anterior hemos visto que hay un gran número de términos en las ecuaciones de transformación para una rotación de ejes. Veremos en esta sección que siempre es posible elegir un sistema de ejes $X_p Y_p Z_p$ con respecto a los cuales los productos de inercia de un sólido dado son nulos. Estos ejes se denominan ejes principales de inercia.

Los momentos de inercia $I_{x_px_p}, I_{y_py_p}, I_{z_pz_p}$ reciben el nombre de momentos principales de inercia.

Para la determinación de los ejes principales de un sólido se requiere que se conozcan los momentos y productos de inercia con respecto a un sistema de ejes XYZ cualesquiera. Según la ecuación (6.35) tenemos:

$$I_{x'x'} = l_{x'x}^2 I_{xx} + l_{x'y}^2 I_{yy} + l_{x'z}^2 I_{zz} - 2 l_{x'x} l_{x'y} I_{xy} - 2 l_{x'x} l_{x'z} I_{xz} - 2 l_{x'y} l_{x'z} I_{yz}$$

Si hacemos la siguiente relación:

$$OP = \frac{1}{\sqrt{I_{x'x'}}} ; I_{x'x'} = \frac{1}{(OP)^2} \quad (6.39)$$

en la cual OP sea la distancia medida sobre el eje X' desde el origen de coordenadas hasta un punto P .

El lugar geométrico de los puntos P cuando el eje X' gira alrededor de O es una superficie (Fig. 6.4).

Si (x, y, z) son las coordenadas del punto P referidas al sistema XYZ , tenemos:

$$l_{x'x} = \frac{x}{OP} ; l_{x'y} = \frac{y}{OP} ; l_{x'z} = \frac{z}{OP} \quad (6.40)$$

Luego, sustituyendo las ecuaciones (6.39) y (6.40) en (6.35), tenemos:

$$x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} - 2xy I_{xy} - 2xz I_{xz} - 2yz I_{yz} = 1 \quad (6.41)$$

De la Geometría Analítica, sabemos que esta ecuación representa un elipsoide, que llamaremos elipsoide de inercia.

Este elipsoide tiene tres ejes ortogonales de simetría que se cortan en un mismo punto O . Además, observemos que si los ejes XYZ giran, la ecuación del elipsoide cambia, pero él en sí es invariable. Eligiendo como sistema de referencia el formado por los ejes ortogonales de simetría $X''Y''Z''$, la ecuación (6.41) se transforma en:

$$x''^2 I_{x''x''} + y''^2 I_{y''y''} + z''^2 I_{z''z''} = 1 \quad (6.42)$$

En esta ecuación (x'', y'', z'') son las coordenadas del elipsoide relativas al nuevo sistema de referencia, $I_{x''x''}$, $I_{y''y''}$, $I_{z''z''}$ son los momentos de inercia de masa del sólido con respecto a los nuevos ejes.

De la ecuación (6.42) y de la geometría del elipsoide podemos sacar algunas observaciones:

a). Los coeficientes para los términos en xy , xz , yz son nulos, o sea

$$I_{x''y''} = 0 ; I_{x''z''} = 0 ; I_{y''z''} = 0$$

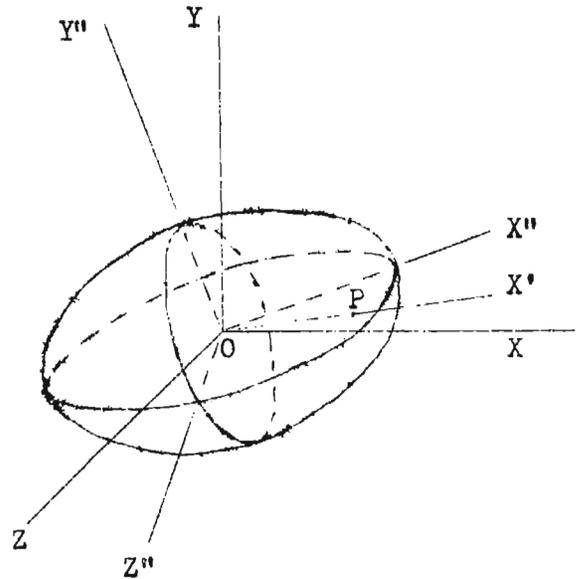


Fig. 6.4

b.- Uno de los ejes de simetría del elipsoide es la mayor distancia OP del origen a la superficie y otro es la distancia mas corta.-

De acuerdo con la definición dada para los ejes principales y la primera observación, vemos que $x''y''z''$ corresponden al sistema de ejes principales X_p, Y_p, Z_p , pues para ellos los productos de inercia son nulos. Además, según la ecuación (6.39) el eje que pasa por O para el cual el momento de inercia es maximo corresponde al valor de OP mínimo; y el mínimo momento de inercia corresponde al eje en el cual OP es máximo. Tomando en cuenta la segunda observación, vemos que para los ejes principales se obtienen los momentos de inercia principales: uno que es máximo, otro mínimo y el tercero que toma un valor intermedio.

De esta manera, el tensor de inercia para los ejes principales toma la forma de una matriz diagonal, así

$$I = \begin{bmatrix} I_{x_p x_p} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_p y_p} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_p z_p} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Hasta ahora hemos encontrado propiedades de los ejes principales sin llegar a establecer como encontrarlos. Observemos la ecuación (6.41) que según hemos dicho corresponde al elipsoide de inercia, esta es una ecuación de la forma:

$$\phi(x, y, z) = C \quad (6.44)$$

El gradiente de ϕ es :

$$\bar{\nabla} \phi = \frac{\delta \phi}{\delta x} \bar{i} + \frac{\delta \phi}{\delta y} \bar{j} + \frac{\delta \phi}{\delta z} \bar{k} \quad (6.45)$$

Ahora bien, el gradiente es siempre un vector normal a la superficie en el punto considerado, si evaluamos $\bar{\nabla} \phi$ para el punto en que X_p corta al elipsoide tendremos que $\bar{\nabla} \phi$ lleve la dirección de X_p . Luego, podemos escribir:

$$l_{x_p x_p} \bar{i} + l_{x_p y_p} \bar{j} + l_{x_p z_p} \bar{k} = \frac{\delta \phi / \delta x}{|\bar{\nabla} \phi|} \bar{i} + \frac{\delta \phi / \delta y}{|\bar{\nabla} \phi|} \bar{j} + \frac{\delta \phi / \delta z}{|\bar{\nabla} \phi|} \bar{k} \quad (6.46)$$

O sea:

$$\frac{\delta \phi}{\delta x} = \left| \bar{\nabla} \phi \right| l_{x_p x}$$

$$\frac{\delta \phi}{\delta y} = \left| \bar{\nabla} \phi \right| l_{x_p y} \quad (6.47)$$

$$\frac{\delta \phi}{\delta z} = \left| \bar{\nabla} \phi \right| l_{x_p z}$$

De la ecuación (6.41) podemos calcular los valores $\frac{\delta \phi}{\delta x}$, $\frac{\delta \phi}{\delta y}$, $\frac{\delta \phi}{\delta z}$, obteniendo el siguiente resultado:

$$\frac{\delta \phi}{\delta x} = 2xI_{xx} - 2yI_{xy} - 2zI_{xz} = \left| \bar{\nabla} \phi \right| l_{x_p x}$$

$$\frac{\delta \phi}{\delta y} = 2yI_{yy} - 2xI_{xy} - 2zI_{yz} = \left| \bar{\nabla} \phi \right| l_{x_p y} \quad (6.48)$$

$$\frac{\delta \phi}{\delta z} = 2zI_{zz} - 2xI_{xz} - 2yI_{yz} = \left| \bar{\nabla} \phi \right| l_{x_p z}$$

Como $\bar{\nabla} \phi$ ha sido evaluado para el punto P en que \mathbf{X}_p corta al elipsoide, los valores de x, y, z, de las ecuaciones (6.42) corresponden a las coordenadas de ese punto, razón por la cual podemos escribir:

$$x = (OP) l_{x_p x}$$

$$y = (OP) l_{x_p y} \quad (6.49)$$

$$z = (OP) l_{x_p z}$$

En las cuales OP es la distancia desde el origen al punto P antes definido. Sustituyendo (6.49) en (6.48), tenemos:

$$\begin{aligned}
l_{x_p x} I_{xx} - l_{x_p y} I_{xy} - l_{x_p z} I_{xz} &= \frac{|\bar{\nabla} \phi|}{2(OP)} l_{x_p x} \\
l_{x_p y} I_{yy} - l_{x_p x} I_{xy} - l_{x_p z} I_{yz} &= \frac{|\bar{\nabla} \phi|}{2(OP)} l_{x_p y} \\
l_{x_p z} I_{zz} - l_{x_p x} I_{xz} - l_{x_p y} I_{yz} &= \frac{|\bar{\nabla} \phi|}{2(OP)} l_{x_p z}
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Si ahora multiplicamos estas tres ecuaciones por $l_{x_p x}$, $l_{x_p y}$, $l_{x_p z}$ respectivamente, y luego las sumamos miembro a miembro y tomando en cuenta que $l_{x_p x}^2 + l_{x_p y}^2 + l_{x_p z}^2 = 1$, llegamos a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
l_{x_p x}^2 I_{xx} + l_{x_p y}^2 I_{yy} + l_{x_p z}^2 I_{zz} - 2 l_{x_p x} l_{x_p y} I_{xy} - 2 l_{x_p x} l_{x_p z} I_{xz} \\
- 2 l_{x_p y} l_{x_p z} I_{yz} &= \frac{|\bar{\nabla} \phi|}{2(OP)}
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Al comparar esta ecuación con (6.41) observamos que son idénticas, luego:

$$I_{x_p x_p} = \frac{|\bar{\nabla} \phi|}{2(OP)} \tag{6.52}$$

Sustituyendo este resultado en (6.50) y enseguida agrupando términos, obtenemos:

$$\begin{aligned}
l_{x_p x} (I_{xx} - I_{x_p x_p}) - l_{x_p y} I_{xy} - l_{x_p z} I_{xz} &= 0 \\
- l_{x_p x} I_{xy} + l_{x_p y} (I_{yy} - I_{x_p x_p}) - l_{x_p z} I_{yz} &= 0 \\
- l_{x_p x} I_{xz} - l_{x_p y} I_{yz} + l_{x_p z} (I_{zz} - I_{x_p x_p}) &= 0
\end{aligned} \tag{6.53}$$

Expresando estas ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix}
(I_{xx} - I_{x_p x_p}) & - I_{xy} & - I_{xz} \\
- I_{xy} & (I_{yy} - I_{x_p x_p}) & - I_{yz} \\
- I_{xz} & - I_{yz} & (I_{zz} - I_{x_p x_p})
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
l_{x_p x} \\
l_{x_p y} \\
l_{x_p z}
\end{bmatrix}
= 0 \tag{6.54}$$

Para soluciones no triviales de este sistema de ecuaciones el determinante de la matriz de los momentos y productos de inercia debe ser nulo, esto es:

$$\begin{vmatrix} (I_{xx} - I_{x_p x_p}) & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & (I_{yy} - I_{y_p y_p}) & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & (I_{zz} - I_{z_p z_p}) \end{vmatrix} = 0 \quad (6.55)$$

El desarrollo del determinante conduce a una ecuación cúbica en $I_{x_p x_p}$ siendo sus tres raíces los momentos principales de inercia. Con cada uno $I_{x_p x_p}$ de estos valores obtenemos de (6.53) tres cosenos directores, correspondientes a cada uno de los ejes principales referidos al sistema original $X Y Z$. De esta manera podemos determinar la posición de los ejes principales y los momentos de inercia correspondientes.

Como puede verse es bastante laboriosa la determinación de los ejes principales, pero en la mayoría de los casos normales es evidente su posición. De las definiciones dadas para los productos de inercia por las ecuaciones (6.16) puede verse que si el sólido tiene dos planos de simetría perpendiculares y elegimos los planos coordenados de manera que dos de ellos coincidan con los de simetría, todos los productos de inercia son nulos, en consecuencia, estos ejes de coordenadas serán los ejes principales de inercia.-

CAPITULO 7

CINEMÁTICA

7.1 CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA.

Cinemática es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento sin considerar los factores que lo producen. Es pues, el estudio de la geometría del movimiento.

El concepto de partícula lo usaremos como una idealización de algunos cuerpos que serán considerados sin volumen pero con masa. Podemos decir que son puntos en el espacio.

Sin embargo, cuando esta idealización no conduzca a resultados realistas, las dimensiones de los cuerpos deberán ser tomadas en cuenta en el análisis, como veremos mas adelante.

La curva que describe una partícula en movimiento es denominada trayectoria. Consideremos una partícula que se mueve describiendo la trayectoria C (Fig. 7.1). La posición de la partícula P en el instante t está definida por el vector $\vec{r}(t)$, que va de un punto fijo O a la partícula. Sea $\Delta \vec{r}$ el cambio que experimenta \vec{r} en el intervalo $(t, t + \Delta t)$, luego;

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \quad (7.1)$$

La velocidad $\vec{v}(t)$ de la partícula en el instante t se define como sigue:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (7.2)$$

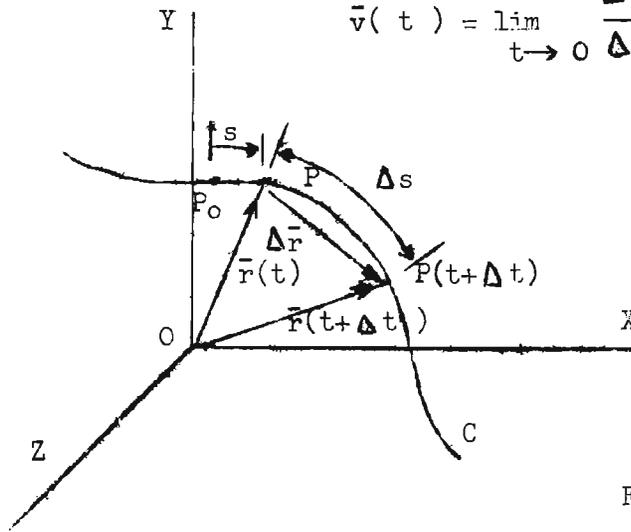


Fig. 7.1

De acuerdo con esta definición la velocidad es un vector tangente a la trayectoria en el punto considerado. Sea $\Delta \vec{v}$ el cambio que sufre la velocidad

de la partícula en el intervalo $(t, t + \Delta t)$, luego:

$$\bar{v} = \bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)$$

La aceleración $\bar{a}(t)$ de la partícula en el instante t se define así:

$$\bar{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} \quad (7.3)$$

Nótese que la función vectorial $\bar{r}(t)$ define por completo el movimiento de una partícula.

7.2 DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO EN COMPONENTES RECTANGULARES.

Adoptemos un marco de referencia cartesiano XYZ con origen en O (Fig. 7.1).

Entonces, el vector $\bar{r}(t)$ puede ser expresado como sigue:

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \quad (7.4)$$

donde: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son las coordenadas de la partícula en el instante t . La velocidad y la aceleración son entonces:

$$\bar{v}(t) = \dot{x}(t)\bar{i} + \dot{y}(t)\bar{j} + \dot{z}(t)\bar{k} \quad (7.5)$$

$$\bar{a}(t) = \ddot{x}(t)\bar{i} + \ddot{y}(t)\bar{j} + \ddot{z}(t)\bar{k} \quad (7.6)$$

donde los puntos denotan derivación con respecto al tiempo. (Esta notación seguirá usándose en adelante).

Ejemplo 7.1

Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = 4x^2$ donde " x " y " y " están medidos en metros. Se sabe que $x = y = 0$ y que $\dot{x} = 4$ m/seg cuando $t = 0$. Encontrar la posición, velocidad y aceleración de la partícula en función de t .

Solución: Sabemos, de los datos del problema, que:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 4$$

Entonces:

$$dx = 4dt$$

$$x = 4t + c_1$$

Pero $x = 0$ cuando $t = 0$. Luego $c_1 = 0$, por tanto:

$$x = 4t$$

Sustituyendo en $y = 4x^2$, queda:

$$y = 64t^2$$

Luego:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{r} = (4t)\vec{i} + (64t^2)\vec{j} \quad (\text{m})$$

que define la posición de la partícula. La velocidad será:

$$\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{r}} = 4\vec{i} + 128t\vec{j} \quad (\text{m/sog})$$

y la aceleración:

$$\vec{a} = 128\vec{j} \quad (\text{m/sog}^2)$$

7.3 DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO EN COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL

Sea la posición de la partícula P definida por su distancia s medida, a lo largo de la curva, desde un punto de referencia P_0 (Fig. 7.1). De la definición de velocidad, tenemos:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad (7.7)$$

donde: $\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$ es un vector unitario tangente a la trayectoria en la posición $\vec{r}(t)$.

$$\text{Haciendo: } \vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (7.8)$$

$$\text{Escribimos: } \vec{v}(t) = \dot{s} \vec{u} \quad (7.9)$$

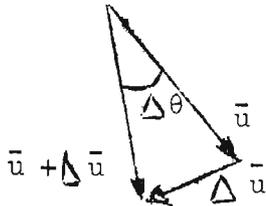
La aceleración es:

$$\vec{a} = \ddot{s} \vec{u} + \dot{s} \dot{\vec{u}} \quad (7.10)$$

Esta expresión puede ser transformada como sigue: \vec{u} cambia de dirección continuamente, pero su magnitud es siempre la unidad.

Sea $\Delta\theta$ el ángulo que gira el vector \vec{u} en el intervalo $(t, t + \Delta t)$.

(Fig. 7.2). Entonces: $|\Delta\vec{u}| = 2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}$



$$|\bar{u}| = |\bar{u} + \Delta \bar{u}| = 1$$

Fig. 7.2

si $\Delta \theta$ es pequeño, la relación anterior conduce a la aproximación

$$|\Delta \bar{u}| \approx \Delta \theta$$

Pero cuando $\Delta \theta \rightarrow 0$, tenemos:

$$|d\bar{u}| = d\theta$$

Observando que los vectores \bar{u} y $d\bar{u}$ son ortogonales, podemos escribir:

$$d\bar{u} = \bar{n} |d\bar{u}| = \bar{n} d\theta \quad (7.11)$$

donde \bar{n} es un vector unitario, ortogonal a \bar{u} y dirigido hacia el centro de curvatura. El plano formado por \bar{u} y \bar{n} en el punto considerado se le llama plano osculador. De la ecuación (7.11)

$$\dot{\bar{u}} = \bar{n} \frac{d\theta}{dt} = \bar{n} \cdot \frac{ds}{dt} / \frac{ds}{d\theta}$$

Pero $\frac{ds}{d\theta}$ es el radio de curvatura ρ de la trayectoria. Luego:

$$\dot{\bar{u}} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n}$$

Sustituyendo en la expresión para la aceleración, resulta:

$$\bar{a}(t) = \ddot{s} \bar{u} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n} \quad (7.12)$$

Vemos que la aceleración está contenida en el plano osculador; $\bar{a}_u = \ddot{s} \bar{u}$ es la componente tangencial, y $\bar{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n}$ es la componente normal. Para completar un tercio de vectores unitarios ortogonales, se define el vector unitario \bar{n}_b así:

$$\bar{n}_b = \bar{n} \times \bar{u} \quad (7.13)$$

Ejemplo 7.2

Un automovilista parte del reposo, iniciando una curva de 200m, de radio. Lleva una aceleración tangencial constante de $2\text{m}/\text{seg}^2$. Calcular el espacio que habrá recorrido su automóvil hasta que la magnitud de su aceleración total sea de $3\text{m}/\text{seg}^2$.

Solución.- Puesto que la aceleración tangencial es constante, podemos escribir:

$$\ddot{s} = \frac{\dot{ds}}{dt} = 2$$

$$ds = 2 dt$$

$$\dot{s} = 2t + C_1$$

Como el vehículo parte del reposo, se tiene que $\dot{s} = 0$ para $t = 0$, de manera que $C_1 = 0$. Luego:

$$\dot{s} = 2t = \frac{ds}{dt}$$

$$ds = 2t dt$$

$$s = t^2 + C_2$$

Si tomamos como origen de s el punto donde el movimiento se inicia, tendremos que $s = 0$ para $t = 0$, lo que conduce a que $C_2 = 0$. Entonces;

$$s = t^2$$

Si ahora expresamos la aceleración como:

$$\bar{a} = a_u \bar{u} + a_n \bar{n}$$

tendremos que cuando el automóvil tenga una aceleración total de $a = 3\text{m/seg}^2$;

$$a^2 = a_u^2 + a_n^2$$

$$a_n^2 = a^2 - a_u^2 = 9 - 4 = 5$$

$$a_n = \sqrt{5}$$

Luego:

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \sqrt{5}$$

$$\dot{s}^2 = 200 \sqrt{5} = 21.2 \text{ m/seg}^2$$

Ahora bien, como $\dot{s} = 2t$, para el instante que estamos considerando;

$$t = \frac{\dot{s}}{2} = \frac{21.2}{2} = 10.6 \text{ seg}$$

Por tanto, $(s=t^2)$ tenemos finalmente el espacio recorrido por el automóvil:

$$s = (10.6)^2 = 112 \text{ m}$$

7.4 DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO EN COORDENADAS CILÍNDRICAS.

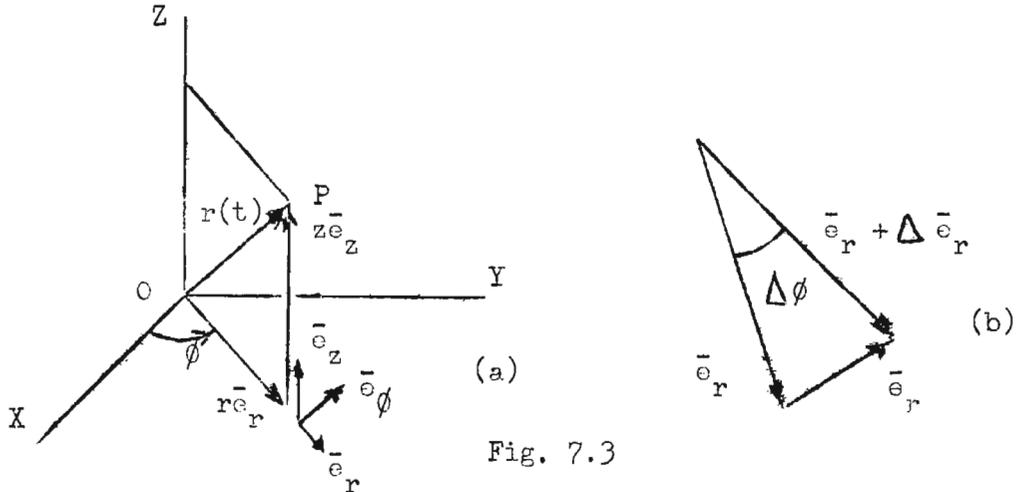


Fig. 7.3

La posición de la partícula puede ser expresada en términos de las coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , (Fig. 7.3a). Introduzcamos los vectores unitarios $\bar{e}_r, \bar{e}_\phi, \bar{e}_z$ en la dirección de las coordenadas r, ϕ, z respectivamente, los cuales forman un sistema ortogonal. Entonces el vector de posición $\bar{r}(t)$ es:

$$\bar{r}(t) = r\bar{e}_r + z\bar{e}_z \quad (7.14)$$

Dado que \bar{e}_z es constante en magnitud y dirección, la velocidad resulta:

$$\bar{v}(t) = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\bar{e}}_r + \dot{z}\bar{e}_z \quad (7.15)$$

Teniendo en cuenta que \bar{e}_r, \bar{e}_ϕ cambian solamente en dirección:

$$\dot{\bar{e}}_r = \frac{d\bar{e}_r}{dt} = \frac{d\bar{e}_r}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \frac{d\bar{e}_r}{d\phi} \quad (7.16)$$

$$\dot{\bar{e}}_\phi = \frac{d\bar{e}_\phi}{dt} = \frac{d\bar{e}_\phi}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \frac{d\bar{e}_\phi}{d\phi} \quad (7.17)$$

Pero:

$$\frac{d\bar{e}_r}{d\phi} = \lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{e}_r}{\Delta\phi}$$

De la Fig. 7.3 (b).

$$|\Delta\bar{e}_r| = 2\text{Sen} \frac{\Delta\phi}{2}$$

Si $\Delta\phi$ es pequeño:

$$|\Delta \bar{e}_r| \approx \Delta\phi$$

Y cuando $\Delta\phi \rightarrow 0$:

$$|d\bar{e}_r| = d\phi$$

Luego:

$$\frac{d\bar{e}_r}{d\phi} = \bar{e}_\phi \quad (7.18)$$

De manera semejante puede ser demostrado que:

$$\frac{d\bar{e}_\phi}{d\phi} = -\bar{e}_r \quad (7.19)$$

Sustituyendo (7.18) y (7.19) en las ecuaciones (7.16) y (7.17):

$$\dot{\bar{e}}_r = \dot{\phi} \bar{e}_\phi \quad (7.20)$$

$$\dot{\bar{e}}_\phi = -\dot{\phi} \bar{e}_r \quad (7.21)$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (7.15):

$$\bar{v}(t) = \dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\phi} \bar{e}_\phi + \dot{z} \bar{e}_z \quad (7.22)$$

La aceleración es:

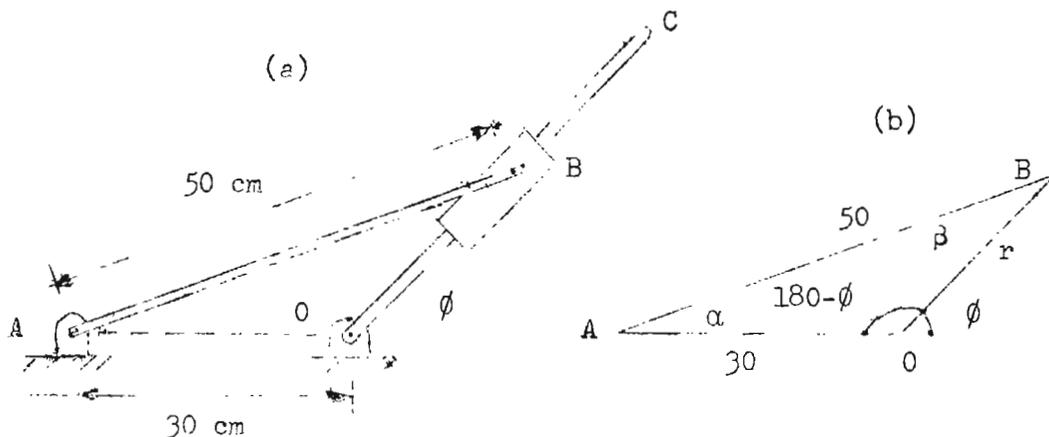
$$\bar{a}(t) = \ddot{r} \bar{e}_r + \dot{r} \dot{\bar{e}}_r + \dot{r} \dot{\phi} \bar{e}_\phi + r \ddot{\phi} \bar{e}_\phi + r \dot{\phi} \dot{\bar{e}}_\phi + \ddot{z} \bar{e}_z$$

Teniendo en cuenta (7.20) y (7.21), resulta:

$$\bar{a}(t) = (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \bar{e}_r + (2 \dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \bar{e}_\phi + \ddot{z} \bar{e}_z \quad (7.23)$$

Ejemplo 7.3

Dos varillas están unidas mediante un collarín deslizando B como se muestra en la figura (*). Sabiendo que la varilla articulada en O gira con velocidad angular constante $\dot{\phi} = 4 \text{ rad/seg}$ en sentido contrario a las agujas de un reloj, determinar la velocidad absoluta de B cuando $\phi = 45^\circ$.



Solución.- Tomemos como origen de coordenadas el punto O, luego $r = OB$. De la geometría del triángulo AOB, en la figura (b), tenemos:

$$\beta = \phi - \alpha \quad (A)$$

Aplicando la ley de los senos, se tiene:

$$\frac{r}{\text{Sen } \alpha} = \frac{50}{\text{Sen } (180-\phi)} = \frac{30}{\text{Sen } \beta} \quad (B)$$

$$r \text{Sen } \phi = 50 \text{ Sen } \alpha \quad (C)$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$r \text{Cos } \phi \frac{d\phi}{dt} + \text{Sen } \phi \frac{dr}{dt} = 50 \text{Cos } \alpha \frac{d\alpha}{dt} \quad (D)$$

De (C) también podemos obtener:

$$50 \text{ Sen } \beta = 30 \text{ Sen } \phi \quad (E)$$

Sustituyendo (A) en (E):

$$50 \text{ Sen } (\phi - \alpha) = 30 \text{ Sen } \phi$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$50 \text{Cos } (\phi - \alpha) \left(\frac{d\phi}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} \right) = 30 \text{Cos } \phi \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\phi}{dt} - \frac{3}{5} \frac{\text{Cos } \phi}{\text{Cos } (\phi - \alpha)} \frac{d\phi}{dt} \quad (F)$$

Ahora evaluemos los valores que hemos encontrado para $\phi = 45^\circ$. De (E):

$$\text{Sen } \beta = \frac{30}{50} \quad \text{Sen } 45^\circ = 0.424$$

$$\beta = 25.1^\circ$$

Sustituyendo en (A):

$$\alpha = \phi - \beta = 45.0^\circ - 25.1^\circ = 19.9^\circ$$

Luego, de (C):

$$r = 50 \frac{\text{Sen } \alpha}{\text{Sen } \phi} = 50 \frac{\text{Sen } 19.9^\circ}{\text{Sen } 45.0^\circ} = 24.1 \text{ cm}$$

De (F) podemos calcular $\frac{d\alpha}{dt}$ sabiendo que $\frac{d\phi}{dt} = 4$

$$\frac{d\alpha}{dt} = 4 - \frac{3 \text{ Cos } 45^\circ}{5 \text{ Cos } 25.1^\circ} \cdot 4 = 2.13 \text{ rad/seg}$$

Sustituyendo ahora en (D):

$$24.1 \text{ Cos } 45^\circ (4) + \text{Sen } 45^\circ \frac{dr}{dt} = 50 \text{ Cos } 19.9^\circ (2.13)$$

Resolviendo:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = 45.1 \text{ cm/seg}$$

Ahora sustituyendo en la ecuación deducida para la velocidad, observando además que el movimiento se desarrolla en un solo plano ($\dot{z} = 0$), resulta:

$$\bar{v} = 45.1 \bar{e}_r + 24.1 \times 4 \bar{e}_\phi$$

$$\bar{v} = 45.1 \bar{e}_r + 96.4 \bar{e}_\phi$$

La Magnitud es:

$$v = \sqrt{(45.1)^2 + (96.4)^2} = 106.5 \text{ cm/seg}$$

7.5 MOVIMIENTO RELATIVO.-

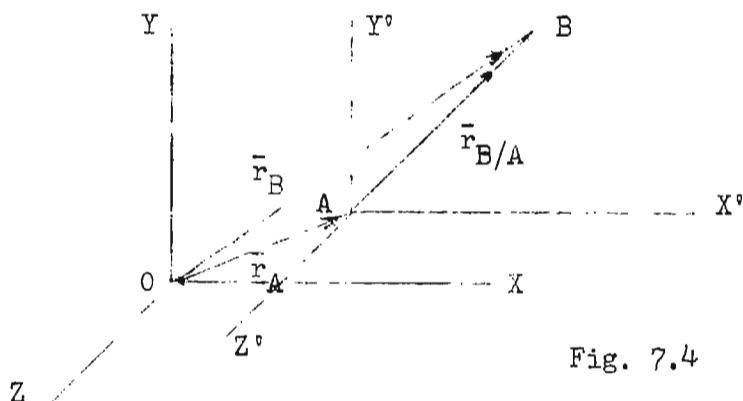


Fig. 7.4

Cuando el movimiento de una partícula está referido a un sistema fijo se denomina Movimiento Absoluto. Cuando la posición, velocidad y aceleración son referidos a ejes en movimiento, se dice que el movimiento es Relativo.

Sean A y B dos partículas en movimiento, O un punto fijo en el espacio, XYZ y X'Y'Z' dos marcos de referencia cartesianos con sus orígenes en O y A respectivamente (Fig. 7.4)

Tenemos entonces, que los ejes XYZ forman un sistema de referencia fijo y cualquier movimiento descrito con respecto a esos ejes será un movimiento absoluto. Como A es una partícula en movimiento, X'Y'Z' formarán un sistema de referencia móvil y cualquier movimiento referido a ellos será un movimiento relativo. Sean \vec{r}_A y \vec{r}_B los vectores de posición absoluta de las partículas A y B respectivamente, y $\vec{r}_{B/A}$ el vector de posición relativo de B respecto a A, de la fig. 7.4 se tiene:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \quad (7.24)$$

derivando con respecto al tiempo:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \quad (7.25)$$

siendo \vec{v}_A y \vec{v}_B las velocidades absolutas de las partículas A y B respectivamente, y $\vec{v}_{B/A}$ la velocidad relativa de B respecto de A.

Derivando de nuevo con respecto al tiempo

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \quad (7.26)$$

donde:

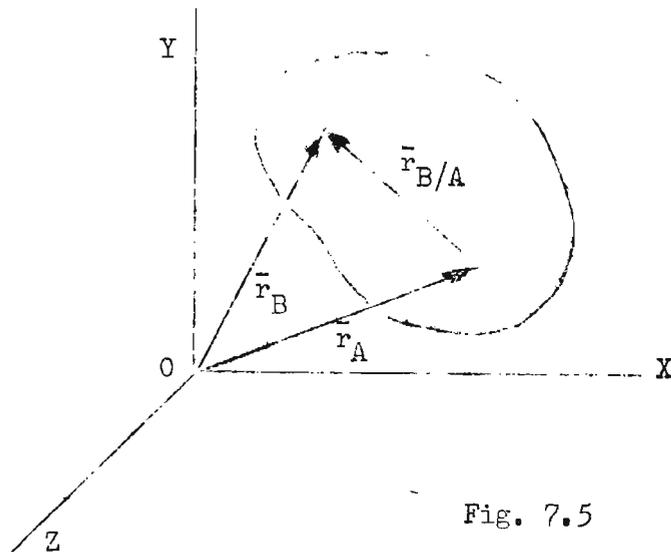
\bar{a}_A es la aceleración absoluta de A

\bar{a}_B es la aceleración absoluta de B

$\bar{a}_{B/A}$ es la aceleración relativa de B respecto de A.

En particular si el sistema X'Y'Z' está fijo a un cuerpo, recibe el nombre de sistema de coordenadas materiales.

7.6 CINEMATICA DE LOS SOLIDOS RIGIDOS.



Un sólido rígido es un modelo que idealiza un cuerpo sólido como una distribución continua de partículas, cuyas posiciones relativas se mantienen invariables. En otras palabras, es un sólido indeformable.

Movimiento de traslación.— Sean A y B dos partículas cualesquiera que pertenecen a un sólido rígido (Fig. 7.5). La posición de la partícula B viene dada por:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{B/A} \quad (7.27)$$

si $\bar{r}_{B/A}$ es independiente del tiempo, o sea que es constante en magnitud y dirección, se dice que el sólido está animado de movimiento de traslación. Derivando con respecto al tiempo, tenemos:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A \quad (7.28)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A \quad (7.29)$$

En consecuencia, un sólido rígido animado de movimiento de traslación, todas sus partículas tienen la misma velocidad y la misma aceleración.

Movimiento de Rotación.- En el estudio de la cinemática de los sólidos rígidos, encontramos otro tipo de movimiento llamado rotación. Este se presenta cuando las partículas que forman el sólido describen circunferencias alrededor de un eje fijo.

Sea P una partícula que pertenece a un sólido rígido, cuya posición $P(t)$ está referida a un sistema de coordenadas fijo, XYZ , mediante el vector de posición $\vec{r}(t)$, (Fig.7.6). Sea \vec{q} el vector unitario que define la dirección del eje fijo OA alrededor del cual P se mueve describiendo una circunferencia.

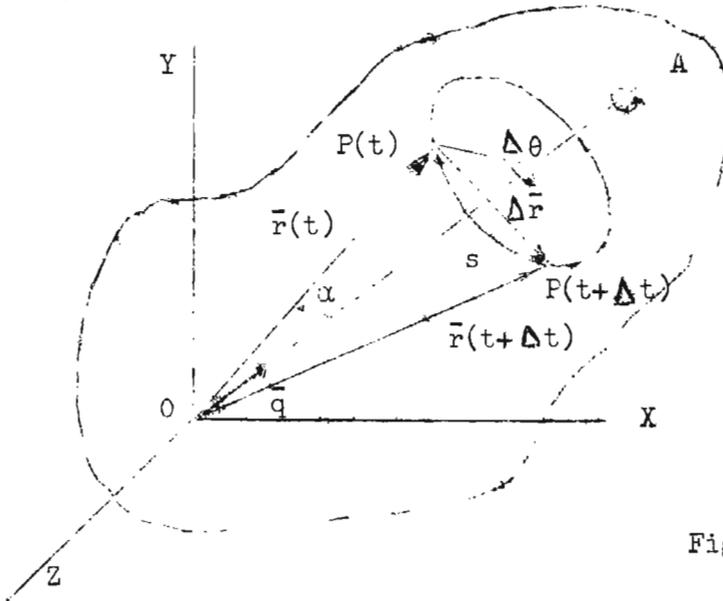


Fig. 7.6

La ecuación (7.9) fue escrita así:

$$\vec{v} = \dot{s} \vec{u} \quad (7.9)$$

donde \vec{u} es un vector unitario tangente a la trayectoria en $P(t)$ y $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$. Sea $r = |\vec{r}|$, entonces, el vector $\vec{q} \times \vec{r}$ es normal al plano OAP , esto es, paralelo a \vec{u} , y su magnitud es $r \text{ Sen } \alpha$. Luego:

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{r \text{ Sen } \alpha} \right) \vec{q} \times \vec{r}$$

Sustituyendo en (7.9):

$$\vec{v} = \left(\frac{\dot{s}}{r \text{ Sen } \alpha} \right) \vec{q} \times \vec{r}$$

Recordando que la trayectoria de la partícula es una circunferencia:

$$ds = r \text{ Sen } \alpha \, d\theta$$

$$\dot{s} = r \operatorname{Sen} \alpha \cdot \dot{\theta}$$

Luego, $\bar{v} = \dot{\theta} \bar{q} \times \bar{r}$

Definiendo $\bar{\omega} = \dot{\theta} \bar{q}$ como velocidad angular, tenemos:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (7.30)$$

La aceleración de la partícula P es:

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}$$

Teniendo en cuenta que $\dot{\bar{r}} = \bar{v}$, y definiendo $\bar{\alpha} = \dot{\bar{\omega}}$ como aceleración angular, podemos escribir:

$$\bar{a} = \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad (7.31)$$

Movimiento alrededor de un punto fijo.- Si un punto de un sólido rígido está fijo, podemos comprobar que el movimiento del sólido equivale a una rotación del mismo alrededor de un eje que pasa por el punto fijo.

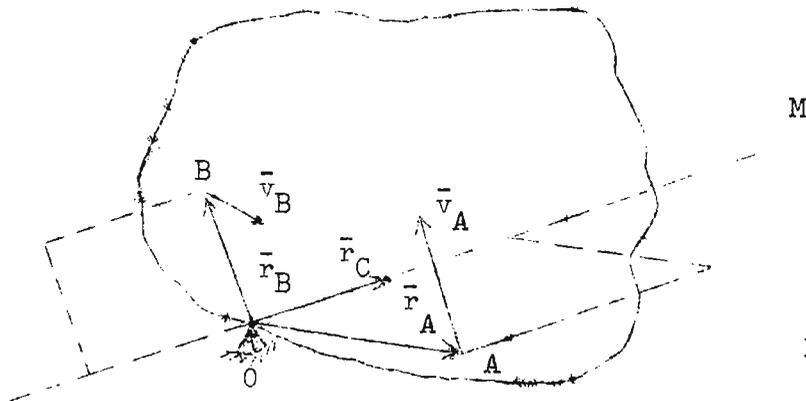


Fig. 7.7

Sea O el punto fijo de un sólido rígido (Fig.7.7), \bar{r}_A el vector de posición de la partícula A que pertenece al sólido. Sabemos que la magnitud de \bar{r}_A es constante, luego:

$$\bar{r}_A \cdot \bar{r}_A = \text{constante}$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$\bar{r}_A \cdot \bar{v}_A = 0$$

De aquí que \vec{v}_A sea perpendicular a \vec{r}_A . Entonces, podemos construir un plano que pase por 0 y por A, y que sea perpendicular a \vec{v}_A . Ahora, elijamos una partícula B del sólido, fuera del plano antes construido. Tenemos que para esta partícula se cumple que:

$$\vec{r}_B \cdot \vec{v}_B = 0$$

Luego, podemos construir otro plano que pase por 0 y por B, y sea perpendicular a \vec{v}_B . Como los dos planos pasan por 0, su intersección será la recta OM.

Ahora bien, sobre la recta OM tomemos una partícula cualquiera C, para la cual se cumple que:

$$a) \quad \vec{r}_C \cdot \vec{v}_C = 0 \quad (7.32)$$

$$b) \quad \vec{r}_{C/A} = \vec{r}_C - \vec{r}_A$$

$$(\vec{r}_C - \vec{r}_A) \cdot (\vec{r}_C - \vec{r}_A) = \text{constante}$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$(\vec{r}_C - \vec{r}_A) \cdot (\vec{v}_C - \vec{v}_A) = 0$$

Como \vec{v}_A es perpendicular a $\vec{r}_{C/A}$:

$$(\vec{r}_C - \vec{r}_A) \cdot \vec{v}_C = 0 \quad (7.33)$$

c) De manera semejante a (b):

$$(\vec{r}_C - \vec{r}_B) \cdot \vec{v}_C = 0 \quad (7.34)$$

Los resultados obtenidos en (7.32), (7.33) y (7.34) admiten dos explicaciones:

a) \vec{v}_C es perpendicular a los planos construidos de la manera antes descrita; ó

$$b) \quad \vec{v}_C = 0$$

La primera suposición es desde luego imposible, así que para el instante considerado, tenemos dos puntos fijos, 0 y C que definen un eje alrededor del cual el sólido está rotando. Si $\vec{\omega}$ es el vector velocidad angular, en-

tonces:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P \quad (7.35)$$

donde \vec{r}_P es el vector de posición de la partícula P, dirigido de O a P.

7.7 ROTACION DE UN SISTEMA DE EJES.

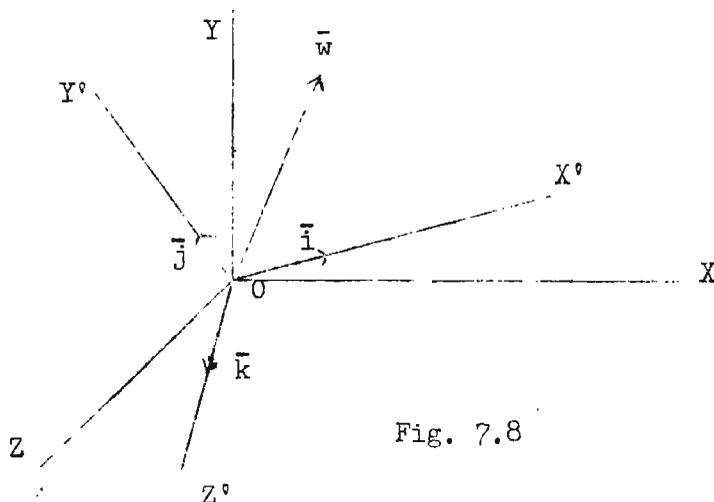


Fig. 7.8

Sea el sistema de coordenadas $X'Y'Z'$ que rota con respecto a los ejes fijos XYZ con una velocidad angular $\vec{\omega}$ (Fig.7.8) Los vectores unitarios \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} definen las direcciones de los ejes X' , Y' , Z' , respectivamente. De acuerdo con la ecuación (7.35) podemos escribir:

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i}$$

$$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j}$$

$$\dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k}$$

(7.36)

8.º MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA REFERIDO A UN SISTEMA DE COORDENADAS MOVILES.

Sea B una partícula cuya posición está determinada con respecto al sistema de coordenadas $X'Y'Z'$ con origen en la partícula A. (Fig. 7.9) si XYZ es un sistema de referencia fijo, \vec{r}_B denota la posición absoluta de B. De la figura tenemos:

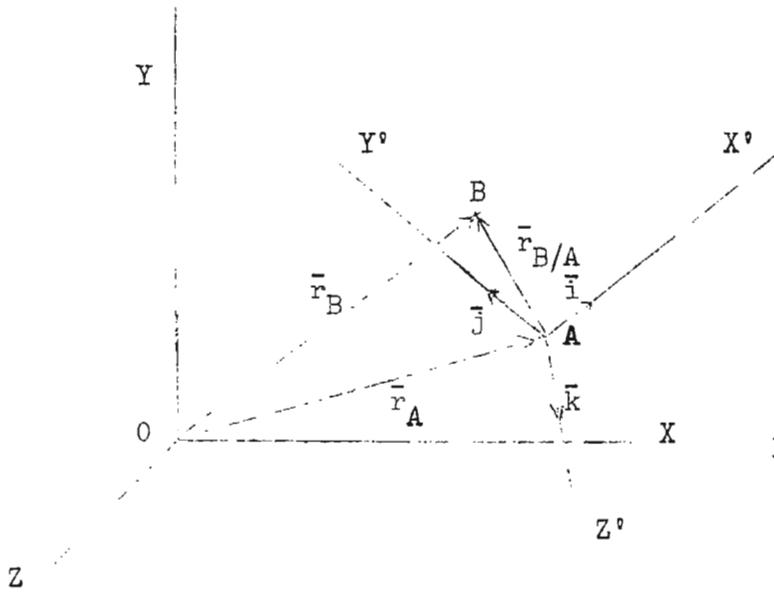


Fig. 7.9

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{B/A} \quad (7.37)$$

siendo $\bar{r}_{B/A} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ (7.38)

Mótese que $\bar{r}_{B/A}$ está referido al sistema móvil $X' Y' Z'$. Derivando con respecto al tiempo:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A} \quad (7.39)$$

siendo \bar{v}_A la velocidad de A. Además

$$\bar{v}_{B/A} = \dot{\bar{r}}_{B/A} = (\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}) + (x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}}) \quad (7.40)$$

donde el primer paréntesis expresa la velocidad de la partícula B relativa al sistema móvil, la cual denotaremos con $\bar{v}_{B/A}^*$

$$\bar{v}_{B/A}^* = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} \quad (7.41)$$

usando además los resultados obtenidos en las ecuaciones (7.36) puede simplificarse el segundo paréntesis:

$$(\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}) = \bar{\omega} \times (\bar{x}\bar{i} + \bar{y}\bar{j} + \bar{z}\bar{k}) = \bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A} \quad (7.42)$$

Donde $\bar{\omega}$ es la velocidad angular del sistema $X'Y'Z'$. Sustituyendo (7.41) y (7.42) en (7.40):

$$\bar{v}_{B/A} = \bar{v}_{B/A}^* + \bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A} \quad (7.43)$$

Finalmente de (7.39):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A}^* + \bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A} \quad (7.44)$$

La aceleración absoluta de B se obtiene de la ecuación (7.39)

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{B/A} \quad (7.45)$$

siendo \bar{a}_A la aceleración de A.

Ahora, $\bar{a}_{B/A} = \dot{\bar{v}}_{B/A}$ (7.46)

O sea, $\bar{a}_{B/A} = \dot{\bar{v}}_{B/A}^* + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_{B/A} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{B/A}$ (7.47)

Donde $\dot{\bar{v}}_{B/A}^* = (\ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}) + (\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k})$ (7.48)

El primer paréntesis de (7.48) es la aceleración de la partícula B relativa al sistema móvil la cual denotaremos con $\bar{a}_{B/A}^*$

$$\bar{a}_{B/A}^* = (\ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}) \quad (7.49)$$

El segundo paréntesis de la ecuación (7.48) puede ser simplificado usando las ecuaciones (7.36)

$$(\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}) = \bar{\omega} \times (\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}) = \bar{\omega} \times \bar{v}_{B/A}^* \quad (7.50)$$

Luego: $\dot{\bar{v}}_{B/A}^* = \bar{a}_{B/A}^* + \bar{\omega} \times \bar{v}_{B/A}^*$ (7.51)

Sustituyendo el valor encontrado en (7.43) para evaluar $\bar{\omega} \times \bar{v}_{B/A}^*$, tenemos:

$$\bar{\omega} \times \bar{v}_{B/A} = \bar{\omega} \times (\bar{v}_{B/A}^* + \bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A}) = \bar{\omega} \times \bar{v}_{B/A}^* + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A}) \quad (7.52)$$

Sustituyendo en (7.49) los resultados (7.51) y (7.52)

$$\bar{a}_{B/A} = \bar{a} \times \bar{r}_{B/A} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A}) + \bar{a}_{B/A}^* + 2 \bar{\omega} \times \bar{v}_{B/A}^* \quad (7.53)$$

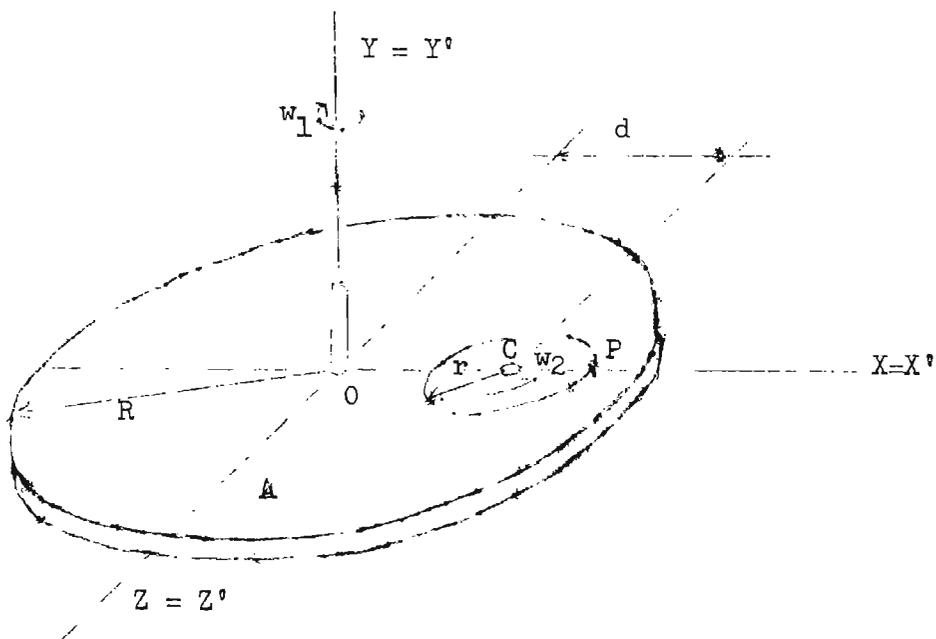
Por último, en (7.45):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a} \times \bar{r}_{B/A} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A}) + \bar{a}_{B/A}^* + 2 \bar{\omega} \times \bar{v}_{B/A}^* \quad (7.54)$$

Los tres primeros términos de la expresión (7.54) representan la aceleración absoluta de un punto rígidamente unido al sistema de coordenadas móviles $X^0 Y^0 Z^0$ que coincide con la posición de B (Fig. 7.9). (Obsérvese que para un punto en esas condiciones $\bar{v}_{B/A}^* = \bar{a}_{B/A}^* = 0$). El cuarto término $\bar{a}_{B/A}^*$, según vimos, es la aceleración de la partícula B relativa al sistema móvil $X^0 Y^0 Z^0$. El último término $2 \bar{\omega} \times \bar{v}_{B/A}^*$ es llamado aceleración de Coriolis.

Ejemplo 7.4

Un disco A de radio R está girando con velocidad angular constante ω_1 alrededor de un eje fijo que pasa por O y en el sentido que se muestra. El disco pequeño de radio r está al disco A en C y está girando con velocidad angular constante ω_2 relativa a A y con el sentido que se muestra. Obtener la aceleración del punto P sobre el disco pequeño en este instante.



Solución.- Para resolver este problema, primero localizaremos un sistema de ejes fijos XYZ con origen en O; luego, el sistema de ejes móviles X'Y'Z' por conveniencia, situaremos su origen en O y coincidentes, en este instante, con el sistema fijo XYZ. (El sistema móvil gira con el disco ω_2 con velocidad angular ω_2). Usando la ecuación deducida para la aceleración, tenemos:

$$\bar{a}_O = 0$$

$$\bar{\alpha} = 0 \quad (\text{pues } \omega_1 = \text{constante})$$

$$\bar{r}_{P/O} = (d + r) \bar{i}$$

$$\bar{\omega} = -\omega_1 \bar{j}$$

$$\bar{a}_{P/O}^* = (\omega_2 \bar{j}) \times \left[(\omega_2 \bar{j}) \times (r \bar{i}) \right] = -\omega_2^2 r \bar{i}$$

$$\bar{v}_{P/O}^* = (\omega_2 \bar{j}) \times (r \bar{i}) = -\omega_2 r \bar{k}$$

(obsérvese que $\bar{a}_{P/O}^*$ y $\bar{v}_{P/O}^*$ corresponden a un movimiento de rotación, con velocidad angular constante, del disco pequeño alrededor de su eje C).

Entonces:

$$\bar{a}_P = (-\omega_1 \bar{j}) \times \left[(-\omega_1 \bar{j}) \times (d + r) \bar{i} \right] + (-\omega_2^2 r \bar{i}) + 2(-\omega_1 \bar{j}) \times (-\omega_2 r \bar{k})$$

Desarrollando las operaciones indicadas, obtenemos:

$$\bar{a}_P = -\left[\omega_1^2 d + (\omega_2 - \omega_1) r \right] \bar{i}$$

7.9 DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO RÍGIDO.-

Para describir el movimiento de un sólido rígido es necesario especificar de alguna manera el movimiento de cada partícula del sólido.

Sean A y B dos partículas que pertenecen a un sólido rígido (Fig. 7.10).

El vector \bar{r}_A determina la posición absoluta de A respecto de un sistema de coordenadas fijo XYZ. Sea A origen de un sistema de coordenadas materiales X'Y'Z'.

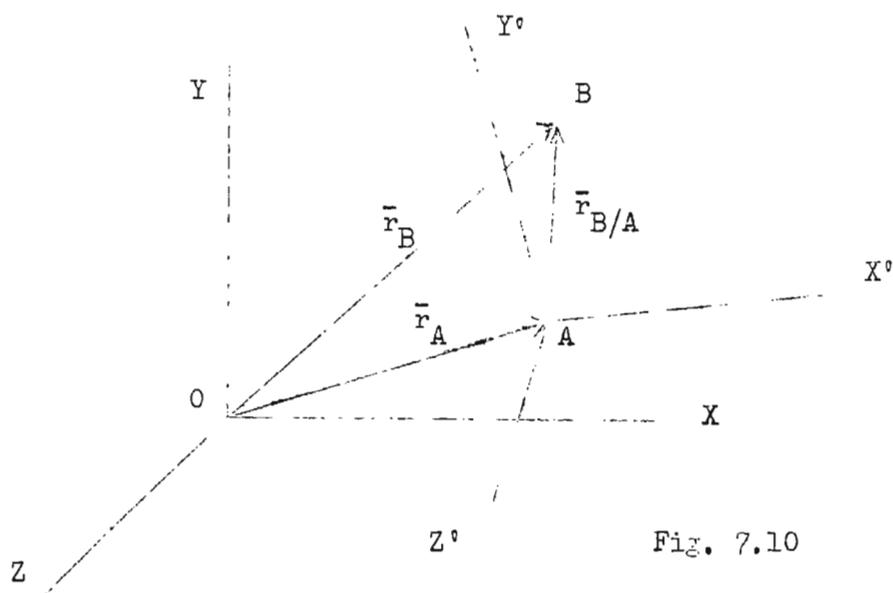
Por tratarse de un sólido rígido, $\bar{r}_{B/A}$, que determina la posición de B relativa al sistema móvil X'Y'Z', es constante en magnitud y dirección con

respecto a esos ejes. En consecuencia, en las ecuaciones (7.44) y (7.54) los términos vectoriales $\bar{v}_{B/A}^*$ y $\bar{a}_{B/A}^*$ son iguales a cero ($\bar{v}_{B/A}^* = \bar{a}_{B/A}^* = 0$) y las ecuaciones del movimiento resultan ser;

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{B/A} \quad (7.55)$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A} \quad (7.56)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\alpha} \times \bar{r}_{B/A} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A}) \quad (7.57)$$



Nótese de estas ecuaciones que el movimiento de cualquier partícula de un sólido rígido (y por consiguiente el movimiento del sólido) puede determinarse si se conoce el movimiento de otra partícula del sólido y la velocidad angular del mismo.

A menudo las ecuaciones (7.55), (7.56) y (7.57) son expresadas así:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{B/A}$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{B/A}$$

Estas relaciones expresan el movimiento de un sólido rígido como la superposición de una traslación, igual a la de un punto dado A, más una rotación del mismo alrededor de un eje que pasa por A. (Este planteamiento se conoce como Teorema de Chasles). Así:

MOVIMIENTO DE B = TRASLACION + ROTACION

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{B/A}$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + (\bar{v}_{B/A} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A})$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{B/A} = \bar{\alpha} \times \bar{r}_{B/A} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A})$$

7.10 MOVIMIENTO PLANO DE UN SOLIDO RIGIDO. CENTRO INSTANTANEO.-

Cuando cualquier partícula de un sólido rígido permanece en un mismo plano se dice que éste está animado de movimiento plano.

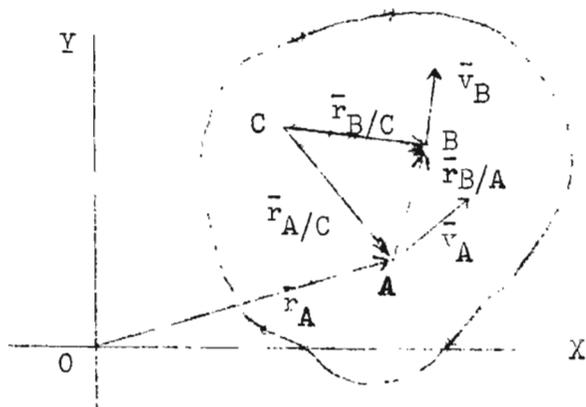


Fig. 7.11

Sean A y B dos partículas que pertenecen a un sólido rígido (Fig. 7.11) De acuerdo con la ecuación (7.56), sabemos que la velocidad de B está dada por

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A} \quad (7.58)$$

Debemos notar que para el movimiento plano, $\bar{\omega}$, si existe, es un vector perpendicular al plano de movimiento y que, en general, todas las partículas tendrán, en el instante considerado, velocidad diferentes. Supongamos que la velocidad de la partícula C es nula en ese instante. Entonces:

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{r}_{B/C} \quad (7.59)$$

En forma análoga:

$$\bar{v}_A = \bar{\omega} \times \bar{r}_{A/C} \quad (7.60)$$

Nótese que \bar{v}_A y \bar{v}_B son perpendiculares a $\bar{r}_{A/C}$ y $\bar{r}_{B/C}$ respectivamente y que

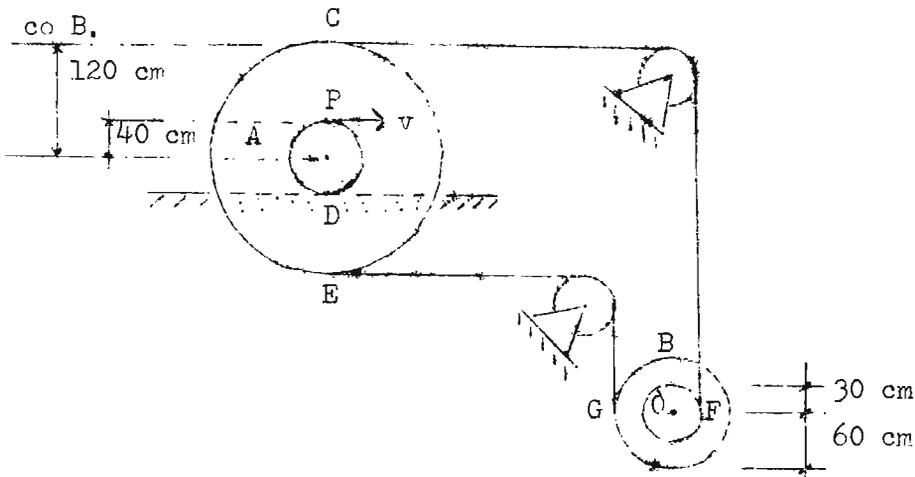
$$v_A = \omega r_{A/C} \quad (7.61)$$

$$v_B = \omega r_{B/C} \quad (7.62)$$

En consecuencia, en un instante dado, las partículas de un sólido rígido animado de movimiento plano tiene las mismas velocidades que tendrían si el sólido girara, en ese instante, alrededor de un eje perpendicular al plano de movimiento. Este eje se denomina eje instantáneo de rotación y su intersección con el plano del movimiento, centro instantáneo de rotación. Este punto puede ser localizado en el sólido o en una extensión imaginaria de él.

Ejemplo 7.5

El disco A está rodando sin deslizar de modo que el punto P lleva una velocidad v como se indica en la figura. Los cables son inextensibles y de masa despreciable, estando enrollados de tal manera que no hay deslizamiento entre las poleas y los cables. Determinar la velocidad de O, centro del disco B.



Solución.— Puesto que el disco A rueda sin deslizar, la velocidad del punto D es nula, siendo, por tanto, el punto D el centro instantáneo de rotación. Luego:

$$v_P = v = \omega_A r_{P/D}$$

$$\omega_A = \frac{v}{80} \downarrow$$

Entonces:

$$v_C = \omega_A r_{C/D} = \frac{v}{80} 160 = 2v \rightarrow$$

$$v_F = 2v \downarrow$$

$$v_E = \omega_A r_{E/D} = \frac{v}{80} 80 = v \leftarrow$$

$$v_G = v \uparrow$$

Si llamamos N al centro instantáneo de rotación del disco B, y dado que los vectores \vec{v}_F y \vec{v}_G son perpendiculares a $\vec{r}_{F/N}$ y $\vec{r}_{G/N}$ respectivamente, podemos establecer la siguiente relación (ver figura):

$$\frac{v}{r_{G/N}} = \frac{2v}{r_{F/N}}$$

$$r_{F/N} = 2r_{G/N}$$

Además

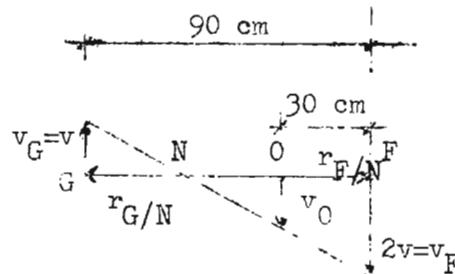
$$r_{G/N} + r_{F/N} = 90$$

Resolviendo las dos ecuaciones anteriores, encontramos la posición de N. Así:

$$r_{G/N} = 30 \text{ cm}; \quad r_{F/N} = 60 \text{ cm}$$

De la figura podemos obtener la velocidad de O:

$$v_O = v \downarrow$$



CAPITULO 8

FUERZA, MASA Y ACCELERACION.

8.1 INTRODUCCION. LEYES DE NEWTON

Hasta aquí hemos tratado el movimiento sin considerar las fuerzas que lo provocan (Cinemática). Estudiaremos ahora la Cinématica, que es la parte de la Mecánica que relaciona las fuerzas con las variables que definen la geometría del movimiento. El tratamiento del problema será hecho en este capítulo a partir de las Leyes de Newton, las cuales enunciaremos a continuación.

LEYES DE NEWTON.-

- 1.- Toda partícula permanece en reposo o se mueve en línea recta con velocidad constante, a menos que sobre ella actúe una fuerza
- 2.- Toda partícula sobre la que actúe una fuerza se mueve con aceleración proporcional a la magnitud de dicha fuerza y en la misma dirección y sentido que ella.
- 3.- A toda acción corresponde siempre una reacción igual y opuesta, es decir, las acciones mutuas entre dos partículas son siempre iguales y dirigidas en sentidos contrarios.

Estas tres leyes son aplicables únicamente a las partículas.

La primer ley indica que una fuerza es requerida para producir un cambio en el movimiento de una partícula.

La segunda ley es cuantitativa. Establece una relación entre la fuerza que actúa sobre la partícula, su masa y la aceleración resultante. Matemáticamente podemos escribir:

$$\vec{F} = k m \vec{a} \quad (8.1)$$

donde \vec{a} es la aceleración \vec{F} es la fuerza resultante, m la masa de la partícula y k es una constante de proporcionalidad. Finalmente, con la tercera ley es posible extender la aplicación de las dos primeras a los cuerpos, teniendo en cuenta que éstos están formados por una distribución de partículas.

8.2 SISTEMAS DE UNIDADES:-

De acuerdo con la segunda ley de Newton, si las unidades de aceleración, fuerza y masa son elegidas arbitrariamente, la constante k debe determinarse experimentalmente.

Por simplicidad, conviene que la constante k sea igual a la unidad, lo

cual es logrado definiendo convenientemente las unidades de fuerza, masa y aceleración.

Así, definiremos la unidad de fuerza como la fuerza necesaria para producir una aceleración unitaria a una partícula cuya masa es la unidad. Por ejemplo, si la aceleración es medida en m/seg^2 y la masa en kilogramos-masa, la unidad de fuerza será la fuerza necesaria para producir una aceleración de $1 m/\text{seg}^2$ a una partícula de masa 1 kg-masa , esta unidad es llamada Newton y el sistema de unidades así establecido, sistema absoluto mks. Otros sistemas absolutos son el cgs y el inglés. (ver cuadro).

Los sistemas de unidades, llamados terrestres, técnicos o gravitacionales, definen la unidad de masa como la masa de una partícula que adquiere una aceleración unitaria al aplicarle una unidad de fuerza. Por ejemplo, si la aceleración es medida en pies/seg^2 y la fuerza en libras, la unidad de masa será la masa de una partícula que adquiere $1 \text{ pie}/\text{seg}^2$ al aplicarle la fuerza de 1 lb. , esta unidad es llamada slug.

Cualquiera que sea el sistema de unidades podemos escribir:

$$m = \frac{W}{g} \quad (8.2)$$

donde m es la masa de una partícula, W su peso y g la aceleración de la gravedad ($g = 9.8 m/\text{seg}^2 = 32.2 \text{ pies}/\text{seg}^2$)

SISTEMAS DE UNIDADES

Dimensiones	METRICOS		INGLESES		
	ABSOLUTOS		TECNICO	ABSOLUTO	TECNICO
	mks	egs			
Longitud	m	cm.	m	pie	pie
Tiempo	seg.	seg.	seg.	seg.	seg.
Fuerza	newton	dina	kg.	pundal	lb.
Masa	kg-masa	g-masa	U.T.M.	lb.-masa	slug.

Abreviaturas:

m: metro

cm: centímetro

seg; segundo

kg: kilogramo-fuerza

lb: libra-fuerza

kg-masa: kilogramo-masa

g-masa: gramo-masa

U.T.M; Unidad técnica de masa

lb-masa: libra-masa

8.3 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA

Teniendo en cuenta que la constante k es igual a la unidad para los sistemas de unidades que usaremos, la ecuación (8.1) resulta :

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (8.3)$$

Sea un marco de referencia cartesiano; la ecuación (8.3) equivale a las tres ecuaciones escalares:

$$F_x = ma_x$$

$$F_y = ma_y \quad (8.4)$$

$$F_z = ma_z$$

La ecuación (8.3) puede ser escrita en la forma:

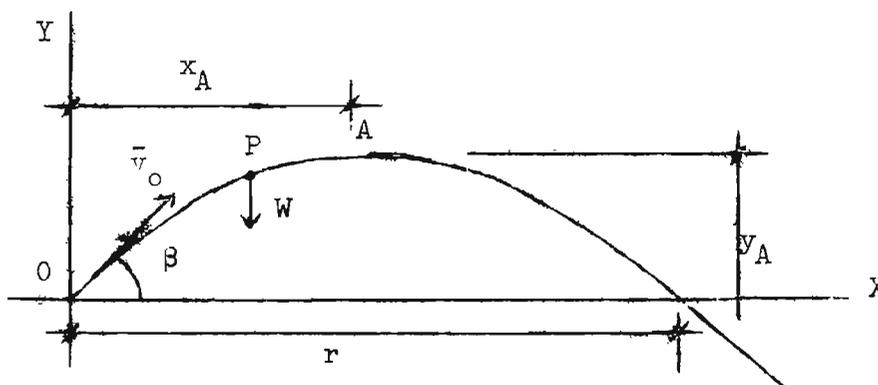
$$\vec{F} - m\vec{a} = 0 \quad (8.5)$$

En la que el vector $-m\vec{a}$ puede ser visto como una fuerza, la cual llamaremos Fuerza de Inercia. La ecuación (8.5) expresa que la partícula se encuentra en equilibrio bajo la acción de las fuerzas \vec{F} y $-m\vec{a}$. Diremos en-

tonces que la partícula se encuentra en equilibrio dinámico. En estos términos, el problema dinámico puede ser resuelto como un problema de Estática

Ejemplo 8.1

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL



Sea un proyectil disparado desde el origen de coordenadas con velocidad \bar{v}_0 que hace un ángulo β con la horizontal (ver figura) Despreciando la resistencia del aire, sobre el proyectil actúa solamente su peso W . Las ecuaciones del movimiento en componentes rectangulares son:

$$F_x = \frac{W}{g} \ddot{x}$$

$$F_y = \frac{W}{g} \ddot{y}$$

$$0 = \frac{W}{g} \ddot{x}$$

$$-W = \frac{W}{g} \ddot{y}$$

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = -g$$

Integrando tenemos:

$$\dot{x} = C_1$$

$$\dot{y} = -gt + C_2$$

Sabemos que para:

$$t = 0, \dot{x}(0) = v_0 \cos \beta, \dot{y}(0) = v_0 \sin \beta$$

Por lo tanto:

$$C_1 = v_0 \cos \beta$$

$$C_2 = v_0 \sin \beta$$

$$\dot{x} = v_0 \cos \beta$$

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin \beta$$

(A)

Una segunda integración da:

$$x = v_0 \cos \beta t + C_3 \qquad y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \operatorname{Sen} \beta t + C_4$$

Siendo las condiciones iniciales $x(0) = 0$; $y(0) = 0$ tenemos:

$$C_3 = 0 \qquad C_4 = 0$$

$$x = v_0 \cos \beta t \qquad y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \operatorname{Sen} \beta t \qquad (B)$$

Las ecuaciones (A) y (B) determinan la velocidad y la posición del proyectil, respectivamente, para cualquier instante t . La ecuación de la trayectoria del proyectil puede encontrarse de las ecuaciones (B).

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \beta}$$

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \beta} \right)^2 + v_0 \operatorname{Sen} \beta \left(\frac{x}{v_0 \cos \beta} \right)$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \beta} x^2 + \operatorname{tg} \beta x$$

Esta es la ecuación de una parábola cuadrática de eje vertical. Las coordenadas del vértice A pueden obtenerse observando que para ese punto $\frac{dy}{dx} = 0$, o bien que $\dot{y} = 0$.

De (A)

$$\dot{y}_A = -gt_A + v_0 \operatorname{Sen} \beta = 0$$

$$t_A = \frac{v_0 \operatorname{Sen} \beta}{g}$$

Sustituyendo este valor en (B)

$$x_A = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{Sen} 2\beta$$

$$y_A = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{Sen}^2 \beta$$

El alcance del proyectil es r . (ver figura)

$$r = 2x_A = \frac{v_0^2}{g} \text{ Sen } 2\beta$$

El ángulo β para el cual el alcance del proyectil es el máximo es:

$$\frac{dr}{d\beta} = 2 \frac{v_0^2}{g} \text{ Cos } 2\beta = 0 \quad \beta = 45^\circ$$

Entonces:

$$r_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{g}$$

8.4 ECUACION DEL MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTICULAS.

El movimiento de un sistema de n partículas se establece escribiendo para cada partícula la segunda ley de Newton, así:

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i \quad (8.6)$$

Donde el sub-índice i indica que la ecuación se refiere a la partícula i . La fuerza resultante actuando sobre la partícula está escrita como la suma de la componente \vec{F}_i debido a las fuerzas externas, más la componente \vec{f}_i debida a las fuerzas internas.

La ecuación del movimiento para el sistema entero se obtiene sumando las ecuaciones establecidas para cada partícula, entonces:

$$\sum \vec{F}_i + \sum \vec{f}_i = \sum (m_i \vec{a}_i) \quad (8.7)$$

Según la tercera Ley de Newton :

$$\sum \vec{f}_i = 0 \quad (8.8)$$

Por consiguiente, la ecuación (8.7) se reduce a:

$$\Sigma \bar{\mathbf{F}}_i = \Sigma (m_i \bar{\mathbf{a}}_i) \quad (8.9)$$

Esta ecuación expresa "que la resultante de las fuerzas exteriores aplicadas a un sistema de partículas es igual a la suma de los productos de las mismas".

Ahora bien, la masa total del sistema es:

$$m = \Sigma m_i \quad (8.10)$$

y la resultante de las fuerzas externas :

$$\bar{\mathbf{F}} = \Sigma \bar{\mathbf{F}}_i \quad (8.11)$$

El centro de masa C está localizado por:

$$\bar{\mathbf{r}}_c = \frac{1}{m} \Sigma (m_i \bar{\mathbf{r}}_i) \quad (8.12)$$

$$\text{O sea } m\bar{\mathbf{r}}_c = \Sigma (m_i \bar{\mathbf{r}}_i) \quad (8.13)$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$m \bar{\mathbf{v}}_c = \Sigma (m_i \bar{\mathbf{v}}_i) \quad (8.14)$$

$$m \bar{\mathbf{a}}_c = \Sigma (m_i \bar{\mathbf{a}}_i) \quad (8.15)$$

Luego, la ecuación (8.9) se convierte en

$$\bar{\mathbf{F}} = m\bar{\mathbf{a}}_c \quad (8.16)$$

La cual defino el movimiento del centro de masa C de un sistema de partículas. Podemos decir, entonces, "que el movimiento del centro de masa de un sistema de partículas es igual al de una partícula que tenga una masa igual a la masa total del sistema, sometido a la acción de la resultante de las fuerzas externas".

8.5 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE LOS SÓLIDOS RÍGIDOS .

Ya hemos definido que un sólido rígido es una distribución continua de partículas que mantienen en forma invariable sus posiciones relativas. Un sólido rígido, es pues, un sistema de partículas, cumpliéndose, por lo tanto, la ecuación (8.16):

$$\bar{F} = m\bar{a}_c \quad (8.17)$$

donde \bar{F} es la resultante de las fuerzas externas y C es el centro de masa del sólido.

El momento con respecto a C de las fuerzas que actúan sobre la partícula del sólido, es:

$$\bar{M}_c = \bar{r}_{i/c} \times (\bar{F}_i + \bar{f}_i) = \bar{r}_{i/c} \times m_i \bar{a}_i \quad (8.18)$$

De la ecuación (7.57) tenemos :

$$\bar{a}_i = \bar{a}_c + \bar{\alpha} \times \bar{r}_{i/c} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{i/c}) \quad (8.19)$$

Sustituyendo en (8.18) :

$$\bar{M}_c = \bar{r}_{i/c} \times (\bar{F}_i + \bar{f}_i)$$

$$\bar{M}_c = \bar{r}_{i/c} \times m_i \bar{a}_c + \bar{r}_{i/c} \times m_i (\bar{\alpha} \times \bar{r}_{i/c}) + \bar{r}_{i/c} \times m_i \left[\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{i/c}) \right] \quad (8.20)$$

Ahora bien, tomando momentos con respecto a C de todas las fuerzas que actúan sobre el sólido rígido, tenemos:

$$\sum \bar{M}_c = \sum \bar{r}_{i/c} \times (\bar{F}_i + \bar{f}_i) = \sum \bar{r}_{i/c} \times \bar{F}_i + \sum \bar{r}_{i/c} \times \bar{f}_i \quad (8.21)$$

Debido a que las fuerzas internas ocurren en pares iguales, opuestas y colineales, sus momentos se anulan, esto es:

$$\sum \bar{r}_{i/c} \times \bar{f}_i = 0$$

Luego:

$$\Sigma \bar{M}_c = \Sigma \bar{r}_{i/c} \times \bar{F}_i$$

Esta expresión indica que el momento con respecto a C es debido únicamente a las fuerzas externas aplicadas al sólido.

Comparando las ecuaciones (8.20) y (8.21), observamos que corresponde a la suma de todas las ecuaciones (8.20) escritas para cada partícula, así:

$$\Sigma \bar{M}_c = \Sigma \bar{r}_{i/c} \times m_i \bar{a}_c + \Sigma \bar{r}_{i/c} \times m_i (\bar{\alpha} \times \bar{r}_{i/c}) + \Sigma \bar{r}_{i/c} \times m_i \left[\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{i/c}) \right] \quad (8.22)$$

Evaluable cada uno de los términos de la ecuación (8.22) por separado, tenemos:

$$\Sigma \bar{r}_{i/c} \times m_i \bar{a}_c = \left(\Sigma m_i \bar{r}_{i/c} \right) \times \bar{a}_c \quad (8.23)$$

Teniendo en cuenta que $\bar{r}_{i/c}$ está medido a partir del centro de masa, vemos que:

$$\Sigma m_i \bar{r}_{i/c} = 0 \quad (8.24)$$

O sea que el primer término de (8.22) es nulo:

$$\Sigma \bar{r}_{i/c} \times m_i \bar{a}_c = 0 \quad (8.25)$$

Tomemos ahora $\Sigma \bar{r}_{i/c} \times m_i (\bar{\alpha} \times \bar{r}_{i/c})$. Para determinararlo, situemos en C un sistema de ejes cartesianos X Y Z y expresemos con respecto a ese sistema los siguientes vectores:

$$\bar{r}_{i/c} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k} \quad (8.26)$$

$$\bar{\alpha} = \alpha_x \bar{i} + \alpha_y \bar{j} + \alpha_z \bar{k} \quad (8.27)$$

Al efectuar el producto de los vectores de este término llegamos al resultado siguiente, en el cual, la partícula i la consideramos como un elemento de masa $m_i = dm = \rho dV$

$$\begin{aligned}
\Sigma \bar{r}_{i/c} x m_i (\bar{\alpha} x \bar{r}_{i/c}) &= \int \bar{r}_{i/c} x (\bar{\alpha} x \bar{r}_{i/c}) dm \\
&= \left[\alpha_x \int \rho (y^2 + z^2) dV - \alpha_y \int \rho xy dV - \alpha_z \int \rho xz dV \right] \bar{i} \\
&\quad + \left[-\alpha_x \int \rho xy dV + \alpha_y \int \rho (x^2 + z^2) dV - \alpha_z \int \rho yz dV \right] \bar{j} \\
&\quad + \left[-\alpha_x \int \rho xz dV - \alpha_y \int \rho yz dV + \alpha_z \int \rho (x^2 + y^2) dV \right] \bar{k} \\
&\hspace{15em} (8.28)
\end{aligned}$$

Recordando las definiciones dadas para los momentos y productos de inercia de masa, tenemos:

$$\begin{aligned}
\Sigma \bar{r}_{i/c} x m_i (\bar{\alpha} x \bar{r}_{i/c}) &= \left[\alpha_x I_{xx} - \alpha_y I_{xy} - \alpha_z I_{xz} \right] \bar{i} \\
&\quad + \left[-\alpha_x I_{xy} + \alpha_y I_{yy} - \alpha_z I_{yz} \right] \bar{j} \\
&\quad + \left[-\alpha_x I_{xz} - \alpha_y I_{yz} + \alpha_z I_{zz} \right] \bar{k} \\
&\hspace{15em} (8.29)
\end{aligned}$$

Nos falta únicamente evaluar el tercer término de (8.22). Expresando mediante sus componentes rectangulares el vector $\bar{w} = w_x \bar{i} + w_y \bar{j} + w_z \bar{k}$ referido al mismo sistema XYZ centroidal, y además, haciendo la misma consideración para la masa de la partícula i , obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Sigma \bar{r}_{i/c} x m_i \bar{w} x (\bar{w} x \bar{r}_{i/c}) &= \int \bar{r}_{i/c} x \bar{w} x (\bar{w} x \bar{r}_{i/c}) dm \\
&= \bar{i} \left[w_x w_z \int \rho xy dV + (w_z^2 - w_y^2) \int \rho yz dV + w_y w_z \left[\int \rho (x^2 + y^2) dV - \int \rho (x^2 + z^2) dV \right] - w_x w_y \int \rho xz dV \right] \\
&\quad + \bar{j} \left[w_x w_y \int \rho yz dV + (w_x^2 - w_z^2) \int \rho xz dV + w_x w_z \left[\int \rho (y^2 + z^2) dV - \int \rho (x^2 + y^2) dV \right] - w_y w_z \int \rho xy dV \right] \\
&\quad + \bar{k} \left[w_y w_z \int \rho xz dV + (w_y^2 - w_x^2) \int \rho xy dV + w_x w_y \left[\int \rho (x^2 + z^2) dV - \int \rho (y^2 + z^2) dV \right] - w_x w_z \int \rho yz dV \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum \bar{r}_{i/c} \times m_i \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}_{i/c}) \\
&= \left[w_x w_z I_{xy} + (w_z^2 - w_y^2) I_{yz} + w_y w_z (I_{zz} - I_{yy}) - w_x w_y I_{xz} \right] \bar{i} \\
&+ \left[w_x w_y I_{yz} + (w_x^2 - w_z^2) I_{xz} + w_x w_z (I_{xx} - I_{zz}) - w_y w_z I_{xy} \right] \bar{j} \\
&+ \left[w_y w_z I_{xz} + (w_y^2 - w_x^2) I_{xy} + w_x w_y (I_{yy} - I_{xx}) - w_x w_z I_{yz} \right] \bar{k} \quad (8.30)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (8.22) los resultados encontrados en (8.25), (8.29) y (8.30), obtenemos:

$$\sum \bar{M}_c = \sum M_x \bar{i} + \sum M_y \bar{j} + \sum M_z \bar{k} \quad (8.31)$$

donde:

$$\sum M_x = \alpha_x I_{xx} + w_y w_z (I_{zz} - I_{yy}) + I_{xy} (w_x w_z - \alpha_y) - I_{xz} (\alpha_z + w_x w_y) + I_{yz} (w_z^2 - w_y^2)$$

$$\sum M_y = \alpha_y I_{yy} + w_x w_z (I_{xx} - I_{zz}) + I_{yz} (w_x w_y - \alpha_z) - I_{xy} (\alpha_x + w_y w_z) + I_{xz} (w_x^2 - w_z^2)$$

$$\sum M_z = \alpha_z I_{zz} + w_x w_y (I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz} (w_y w_z - \alpha_x) - I_{yz} (\alpha_y + w_x w_z) + I_{xy} (w_y^2 - w_x^2) \quad (8.32)$$

De la cinemática recordamos que el movimiento de un sólido rígido puede considerarse como la superposición de dos movimientos, uno de traslación más uno de rotación alrededor de un eje que pase por el punto de referencia, lo cual se comprueba en virtud de las ecuaciones (8.17) y (8.32). La primera corresponde a la traslación del sólido con el centro de masa C, y

la segunda a la rotación del mismo alrededor de un eje que pase por C. Las ecuaciones (8.32) pueden simplificarse si elegimos el sistema de referencia centroidal XYZ de manera que coincida con los ejes principales que pasan por el centro de masa, es claro que los productos de inercia son todos cero, dando por resultado las siguientes ecuaciones;

$$\Sigma M_x = \alpha_x I_{xx} + w_y w_z (I_{zz} - I_{yy})$$

$$\Sigma M_y = \alpha_y I_{yy} + w_x w_z (I_{xx} - I_{zz})$$

$$\Sigma M_z = \alpha_z I_{zz} + w_x w_y (I_{yy} - I_{xx}) \quad (8.33)$$

CAPITULO 9TRABAJO Y ENERGIA.9.1 PRINCIPIO DEL TRABAJO Y ENERGIA CINETICA . UNIDADES.

Se enuncia así: "La variación que experimenta la energía cinética de una partícula es igual al trabajo realizado por la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula". (Es también conocido como teorema de las Fuerzas Vivas).

Sea una partícula de masa m que se mueve de la posición A a otra B bajo la acción de la fuerza \vec{F} . De la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{r}} \quad (9.1)$$

Multiplicando escalarmente ambos miembros de la ecuación por $d\vec{r}$ e integrando las posiciones A y B de la partícula, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_A^B m \ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \ddot{\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt \\ &= \frac{1}{2} m \int_A^B d(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \int_A^B dv^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \end{aligned} \quad (9.2)$$

La integral del lado izquierdo de esta ecuación se denomina el trabajo hecho por la fuerza \vec{F} y se representa por U_{A-B} . El término $\frac{1}{2}mv^2$ se llama energía cinética de la partícula y se representa por EC. Así, con esta ecuación queda establecido matemáticamente el principio del trabajo y la energía cinética.

$$U_{A-B} = EC_B - EC_A \quad (9.3)$$

Debe observarse que el vector $d\vec{r}$ es tangente a la trayectoria del movimiento de la partícula, de modo que el producto escalar $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ representa la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento multiplicado por el desplazamiento. Expandiendo el producto escalar $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ por medio de las componentes rectangulares, tenemos :

$$U_{A-B} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (9.4)$$

La variación del trabajo con relación al tiempo se denomina Potencia (1).

$$P = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v} \quad (9.5)$$

Debe notarse que el trabajo, la energía cinética y la potencia son cantidades escalares.

UTIL DES. El trabajo y la energía cinética resultan de multiplicar fuerzas por desplazamientos. Entonces, en el sistema técnico la unidad de trabajo es el Kilográmetro (Kgm); en el sistema m.k.s. el el newton-metro y se le llama Julio; en el c.g.s. es la dina-centímetro denominada Ergio. En el sistema técnico inglés es el pie-libra.

La potencia resulta de dividir el trabajo entre el tiempo. En el sistema técnico la unidad de potencia es el Kilográmetro por segundo (Kgm/seg), un múltiplo suyo es el caballo de vapor (cv) que equivale a 75 Kgm/seg. En el sistema m.k.s. la unidad es el watio (w), múltiplos de él son el kilowatio (1kw = 1000w) y el megawatio (1mw = 10⁶w); y en el c.g.s la unidad es el ergio/seg. En el sistema técnico inglés la unidad de potencia es el pie-libra/seg. Múltiplo suyo es el horse-power (1 HP = pies-libra/seg = 33000 pies-libra/min.)

9.2 SISTEMA DE FUERZAS CONSERVATIVAS. ENERGIA POTENCIAL.

Sea P una partícula bajo la acción de una fuerza \bar{F} que es función de la posición de su punto de aplicación solamente, así:

$$\bar{F} = \bar{F}(x, y, z) \quad (9.6)$$

Si además, esta fuerza puede ser expresada como el gradiente de alguna función escalar $\phi(x, y, z)$, la cual llamaremos función potencial, esto es, si podemos escribir:

$$\bar{F} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \bar{k} \quad (9.7)$$

Entonces, el trabajo hecho por la fuerza \bar{F} cuando la partícula se mueve de A a B resulta:

$$\begin{aligned}
 U_{A-B} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \nabla \phi \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_A^B \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}) \\
 &= \int_A^B \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right) = \int_A^B d\phi
 \end{aligned}$$

$$U_{A-B} = \phi_B - \phi_A = \Delta \phi \quad (9.8)$$

Vemos que el trabajo realizado por \vec{F} es independiente de la trayectoria seguida por la partícula, siendo únicamente función de los puntos extremos A y B.

Una fuerza que cumpla con estas condiciones es llamada fuerza conservativa. La función V definida como sigue:

$$V = - \phi(x,y,z) \quad (9.9)$$

Es llamada la energía potencial de la partícula. Observamos entonces que la energía potencial de la partícula es una función escalar que depende únicamente de su posición.

De acuerdo con la definición de V, podemos escribir:

$$U_{A-B} = - \Delta V \quad (9.10)$$

La ecuación (9.10) expresa que "la variación en energía potencial entre dos puntos es igual y de signo contrario al trabajo realizado por la fuerza conservativa \vec{F} sobre la partícula".

Si la trayectoria es tal que la posición final de la partícula coincide con la inicial (o sea que la trayectoria es cerrada), es evidente que no ha habido

cambio en su energía potencial, por consiguiente, el trabajo hecho por \vec{F}_c es cero :

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (9.11)$$

9.3 PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA ENERGIA MECANICA.

La suma de la energía cinética y potencial se denomina energía mecánica total de la partícula.

De las ecuaciones (9.3) y (9.10) tenemos :

$$U_{A-B} = EC_B - EC_A = V_A - V_B$$

$$V_A + EC_A = V_B + EC_B \quad (9.12)$$

La ecuación (9.12) es el enunciado matemático del principio de conservación de la energía mecánica que dice "cuando una partícula se mueve bajo la acción de un sistema de fuerzas conservativas, su energía mecánica total permanece constante".

SISTEMAS MIXTOS DE FUERZAS.

Frecuentemente se encuentran partículas sometidas tanto a la acción de fuerzas conservativas como no conservativas. Por ejemplo, el rozamiento entre una partícula y el plano sobre el que se mueve.

Si \vec{F}_c es la resultante de un sistema de fuerzas conservativas que actúa sobre una partícula, y \vec{F}_n la resultante de las no conservativas, de acuerdo con (9.3), podemos escribir:

$$\int_1^2 \vec{F}_c \cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = EC_2 - EC_1 \quad (9.13)$$

De la ecuación (9.10):

$$\int_1^2 \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = V_1 - V_2 \quad (9.14)$$

De estas dos ecuaciones se deduce que:

$$V_2 + EC_2 = V_1 + EC_1 + \int_1^2 \vec{F}_n \cdot d\vec{r} \quad (9.15)$$

Este resultado extiende el principio de conservación de la energía a los sistemas no conservativos, puede decirse entonces, que "la energía mecánica final de la partícula es igual a su energía mecánica inicial más el trabajo desarrollado por las fuerzas no conservativas".

9.4 PRINCIPIO DEL TRABAJO Y ENERGIA CINETICA PARA UN SISTEMA DE PARTICULAS.

La energía cinética de un sistema de partículas es la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales:

$$EC = \Sigma \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \quad (9.16)$$

Refiriendo el movimiento de cada partícula al centro de masa del sistema, tenemos:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_c + \bar{r}_{i/c} \quad (9.17)$$

donde:

\bar{r}_i es el vector de posición de la partícula i

\bar{r}_c es el vector de posición del centro de masa c

$\bar{r}_{i/c}$ es el vector de posición de la partícula i con respecto al centro de la masa.

además:

$$v_i^2 = \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i = (\bar{v}_c + \bar{v}_{i/c}) \cdot (\bar{v}_c + \bar{v}_{i/c})$$

$$v_i^2 = v_c^2 + 2 \bar{v}_c \cdot \bar{v}_{i/c} + v_{i/c}^2 \quad (9.18)$$

sustituyendo en (9.16)

$$EC = \Sigma \left(\frac{1}{2} m_i v_c^2 \right) + \bar{v}_c \cdot \frac{d}{dt} \left(\Sigma m_i \bar{r}_{i/c} \right) + \frac{1}{2} \Sigma m_i v_{i/c}^2 \quad (9.19)$$

Teniendo en cuenta que $\bar{r}_{i/c}$ está medido a partir del centro de masa, resulta:

$$\Sigma m_i \bar{r}_{i/c} = 0 \quad (9.20)$$

Entonces la energía cinética del sistema es:

$$EC = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_{i/c}^2 \quad (9.21)$$

donde m es la masa total. Luego, podemos decir que la energía cinética de un sistema de partículas es la suma de la energía cinética de una partícula con una masa igual a la masa total del sistema y con una velocidad igual a la del centro de masa, más la energía cinética del sistema relativa al centro de masa.

El trabajo realizado por todas las fuerzas del sistema es la suma de los trabajos hechos sobre cada partícula, así:

$$\begin{aligned} U_{1-2} &= \sum \int_1^2 (\bar{F}_i + \bar{f}_i) \cdot d\bar{r}_i = \int_1^2 \sum (\bar{F}_i + \bar{f}_i) \cdot (d\bar{r}_c + d\bar{r}_{i/c}) \\ &= \int_1^2 \sum \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_c + \int_1^2 \sum \bar{f}_i \cdot d\bar{r}_c + \int_1^2 \sum (\bar{F}_i + \bar{f}_i) \cdot d\bar{r}_{i/c} \quad (9.22) \end{aligned}$$

Si hacemos $\bar{F} = \sum \bar{F}_i$ y notamos además que la suma de las fuerzas internas es cero, $\sum \bar{f}_i = 0$, tenemos:

$$U_{1-2} \stackrel{\pm}{=} \int_1^2 \bar{F} \cdot d\bar{r}_c + \int_1^2 \sum (\bar{F}_i + \bar{f}_i) \cdot d\bar{r}_{i/c} \quad (9.23)$$

Este resultado nos da el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas.

Escribamos ahora separadamente las ecuaciones de trabajo y energía cinética para cada partícula, y luego sumamos miembro a miembro todas las ecuaciones, así:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (\bar{F}_i + \bar{f}_i) \cdot d\bar{r}_i &= \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)_2 - \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)_1 \\ \sum \int_1^2 (\bar{F}_i + \bar{f}_i) \cdot d\bar{r}_i &= \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)_2 - \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)_1 \quad (9.24) \end{aligned}$$

El miembro izquierdo de (9.24) corresponde al trabajo realizado por todas las fuerzas, y el miembro derecho a la variación de la energía cinética del sistema.

Usando los resultados obtenidos en (9.21) y (9.23) podemos transformar la ecuación (9.24) :

$$\int_1^2 \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}}_c + \int_1^2 \Sigma (\bar{\mathbf{F}}_i + \bar{\mathbf{f}}_i) \cdot d\bar{\mathbf{r}}_{i/c} = \left[\frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \Sigma m_i v_{i/c}^2 \right]_2 - \left[\frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \Sigma m_i v_{i/c}^2 \right]_1 \quad (9.25)$$

Ahora bien, usando el resultado obtenido en la ecuación (9.16) e integrando con respecto a $\bar{\mathbf{r}}_c$, obtenemos:

$$\int_1^2 \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}}_c = \left(\frac{1}{2} m v_c^2 \right)_2 - \left(\frac{1}{2} m v_c^2 \right)_1$$

Por lo tanto, la ecuación (9.25) equivale a las siguientes expresiones:

$$\int_1^2 \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}}_c = \left(\frac{1}{2} m v_c^2 \right)_2 - \left(\frac{1}{2} m v_c^2 \right)_1 \quad (9.26)$$

$$\int_1^2 \Sigma (\bar{\mathbf{F}}_i + \bar{\mathbf{f}}_i) \cdot d\bar{\mathbf{r}}_{i/c} = \left(\frac{1}{2} \Sigma m_i v_{i/c}^2 \right)_2 - \left(\frac{1}{2} \Sigma m_i v_{i/c}^2 \right)_1 \quad (9.27)$$

Estas ecuaciones expresan el principio del trabajo y la energía cinética para un sistema de partículas.

9.5 PRINCIPIO DEL TRABAJO Y ENERGIA CINETICA PARA LOS SOLIDOS RIGIDOS.

CONSERVACION DE LA ENERGIA.

Hemos encontrado en la ecuación (9.21) que la energía cinética para un sistema de partículas es:

$$EC = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \Sigma m_i v_{i/c}^2 \quad (9.28)$$

en la cual $\bar{\mathbf{v}}_{i/c}$ es la velocidad relativa de la partícula i con respecto al centro de masa. Para un sólido rígido este valor es:

$$\bar{\mathbf{v}}_{i/c} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}_{i/c} \quad (9.29)$$

en la cual $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ es el vector velocidad angular del sólido. Luego:

$$v_{i/c}^2 = \bar{\mathbf{v}}_{i/c} \cdot \bar{\mathbf{v}}_{i/c} = (\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}_{i/c}) \cdot (\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}_{i/c}) \quad (9.30)$$

En términos de sus componentes rectangulares, obtenemos:

$$\begin{aligned}\bar{w} \times \bar{r}_{i/c} &= (w_x \bar{i} + w_y \bar{j} + w_z \bar{k}) \times (x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}) \\ &= (w_y z - w_z y) \bar{i} + (w_z x - w_x z) \bar{j} + (w_x y - w_y x) \bar{k}\end{aligned}\quad (9.31)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}v_{i/c}^2 &= (\bar{w} \times \bar{r}_{i/c}) \cdot (\bar{w} \times \bar{r}_{i/c}) \\ &= (w_y z - w_z y)^2 + (w_z x - w_x z)^2 + (w_x y - w_y x)^2\end{aligned}\quad (9.32)$$

Desarrollando los cuadrados y agrupando términos:

$$\begin{aligned}v_{i/c}^2 &= w_x^2 (y^2 + z^2) + w_y^2 (x^2 + z^2) + w_z^2 (x^2 + y^2) \\ &\quad - 2w_x w_y xy - 2w_x w_z xz - 2w_y w_z yz\end{aligned}\quad (9.33)$$

volviendo ahora a la ecuación (9.2^a) donde la masa m_i de la partícula i del sólido es:

$$m_i = dm = \rho dV \quad (9.34)$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned}EC &= \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \int \left[w_x^2 (y^2 + z^2) + w_y^2 (x^2 + z^2) + w_z^2 (x^2 + y^2) \right. \\ &\quad \left. - 2w_x w_y xy - 2w_x w_z xz - 2w_y w_z yz \right] \rho dV \\ &= \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \left[w_x^2 \int \rho (y^2 + z^2) dV + w_y^2 \int \rho (x^2 + z^2) dV + w_z^2 \int \rho (x^2 + y^2) dV \right. \\ &\quad \left. - 2w_x w_y \int \rho xy dV - 2w_x w_z \int \rho xz dV - 2w_y w_z \int \rho yz dV \right]\end{aligned}\quad (9.35)$$

Ahora bien, recordemos que x, y, z son las componentes rectangulares del vector $\bar{r}_{i/c}$ el cual está referido a un marco cartesiano con origen en el centro de

masa C del sólido. Vemos pues, que las integrales de la ecuación (9.35) son los momentos y productos de inercia del sólido con respecto al sistema de ejes que tiene su origen en C . Así pues:

$$EC = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \left[w_x^2 I_{xx} + w_y^2 I_{yy} + w_z^2 I_{zz} - 2w_x w_y I_{xy} - 2w_x w_z I_{xz} - 2w_y w_z I_{yz} \right] \quad (9.36)$$

Podemos interpretar este resultado así, el primer término representa la energía cinética de traslación del sólido, mientras que el segundo da la energía cinética de rotación del mismo alrededor de su centro de masa.

También hemos encontrado que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas, según la ecuación (9.23) es:

$$U_{1-2} = \int_1^2 \bar{F} \cdot d\bar{r}_c + \int_1^2 \Sigma \left[(\bar{F}_i + \bar{f}_i) \cdot d\bar{r}_{i/c} \right] \\ = \int_1^2 \bar{F} \cdot d\bar{r}_c + \int_1^2 \Sigma (\bar{F}_i \cdot d\bar{r}_{i/c}) + \int_1^2 \Sigma (\bar{f}_i \cdot d\bar{r}_{i/c}) \quad (9.37)$$

Para un sólido rígido, el término $\int_1^2 \Sigma (\bar{f}_i \cdot d\bar{r}_{i/c})$ es nulo.

En efecto, sean A y B dos partículas de un sólido y C el centro de masa del mismo, \bar{f} y $-\bar{f}$ las fuerzas ejercidas por B sobre A y por A sobre B respectivamente.

$$U_{1-2} = \int_1^2 \bar{f} \cdot d\bar{r}_{A/c} + (-\bar{f}) \cdot d\bar{r}_{B/c} = \int_1^2 \bar{f} \cdot (d\bar{r}_{A/c} - d\bar{r}_{B/c}) \quad (9.38)$$

Pero:

$$d\bar{r}_{A/c} = \bar{v}_{A/c} dt$$

$$d\bar{r}_{B/c} = \bar{v}_{B/c} dt$$

$$C \text{ sea: } d\bar{r}_{A/c} - d\bar{r}_{B/c} = (\bar{v}_{A/c} - \bar{v}_{B/c}) dt = \bar{v}_{A/B} dt$$

que sustituido en (9.38) nos da:

$$U_{1-2} = \int_1^2 (\bar{f} \cdot \bar{v}_{A/B}) dt \quad (9.39)$$

$\bar{v}_{A/B}$ es perpendicular a $\bar{r}_{A/B}$ y por lo tanto a \bar{f} , de donde el producto escalar $\bar{f} \cdot \bar{v}_{A/B}$ es nulo, esto es, que el trabajo de las fuerzas de interacción entre dos partículas cualesquiera del sólido con respecto al centro de masa es igual a cero. De lo que se deduce que:

$$\int_1^2 \Sigma (\bar{F}_i \cdot d\bar{r}_{i/c}) = 0 \quad (9.40)$$

El segundo término de (9.37) representa el trabajo realizado por todas las fuerzas externas que actúan sobre el sólido con respecto al centro de masa. Este término lo podemos transformar recordando de la cinemática que:

$$\begin{aligned} d\bar{r}_{i/c} &= \bar{v}_{i/c} dt \\ &= (\bar{\omega} \times \bar{r}_{i/c}) dt \\ &= (\bar{\omega} dt) \times \bar{r}_{i/c} \end{aligned}$$

Pero: $d\bar{\theta} = \bar{\omega} dt$

Luego: $d\bar{r}_{i/c} = d\bar{\theta} \times \bar{r}_{i/c}$ (9.41)

Sustituyendo (9.41) en $\int_1^2 \Sigma (\bar{F}_i \cdot d\bar{r}_{i/c})$, encontramos:

$$\int_1^2 \Sigma (\bar{F}_i \cdot d\bar{r}_{i/c}) = \int_1^2 \Sigma [\bar{F}_i \cdot (d\bar{\theta} \times \bar{r}_{i/c})]$$

Según las propiedades del producto mixto de tres vectores, tenemos:

$$\int_1^2 \Sigma (\bar{F}_i \cdot d\bar{r}_{i/c}) = \int_1^2 \Sigma [d\bar{\theta} \cdot (\bar{r}_{i/c} \times \bar{F}_i)]$$

en donde $\bar{r}_{i/c} \times \bar{F}_i$ es el momento de la fuerza \bar{F}_i con respecto al centro de masa, así:

$$\bar{M}_{i/c} = \bar{r}_{i/c} \times \bar{F}_i$$

Entonces:

$$\int_1^2 \Sigma (\bar{F}_i \cdot d\bar{r}_{i/c}) = \int_1^2 \Sigma (\bar{M}_{i/c} \cdot d\bar{\theta})$$

Teniendo en cuenta que $d\bar{\theta}$ es el mismo para todo el sólido:

$$\int_1^2 \Sigma (\bar{F}_i \cdot d\bar{r}_{i/c}) = \int_1^2 (\Sigma \bar{M}_{i/c}) \cdot d\bar{\theta}$$

Haciendo ahora $\bar{M}_c = \Sigma \bar{M}_{i/c}$, finalmente obtenemos:

$$\int_1^2 \Sigma (\bar{F}_i \cdot d\bar{r}_{i/c}) = \int_1^2 \bar{M}_c \cdot d\bar{\theta} \quad (9.42)$$

Luego, en (9.37) sustituimos (9.42) para encontrar el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre el sólido:

$$U_{1-2} = \int_1^2 \bar{F} \cdot d\bar{r}_c + \int_1^2 \bar{M}_c \cdot d\bar{\theta} \quad (9.43)$$

Habiendo determinado que, para un sistema de partículas, el trabajo es igual a la variación en la energía cinética. Fuesto que un sólido rígido es un sistema de partículas, se tiene :

$$U_{1-2} = EC_2 - EC_1$$

$$\int_1^2 \bar{F} \cdot d\bar{r}_c + \int_1^2 \bar{M}_c \cdot d\bar{\theta} = \left[\frac{1}{2} mv_c^2 + \frac{1}{2} (w_x^2 I_{xx} + w_y^2 I_{yy} + w_z^2 I_{zz} - 2w_x w_y I_{xy} - 2w_x w_z I_{xz} - 2w_y w_z I_{yz}) \right]_1^2 \quad (9.44)$$

Sabemos también, según la ecuación (9.26) que para un sistema de partículas:

$$\int_1^2 \bar{F} \cdot d\bar{r}_c = \left[\frac{1}{2} mv_c^2 \right]_1^2$$

Por lo tanto, la ecuación (9.44) equivale a las dos siguientes:

$$\int_1^2 \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}}_c = \left[\frac{1}{2} m v_c^2 \right]_1^2 \quad (9.45)$$

$$\int_1^2 \bar{\mathbf{M}}_c \cdot d\bar{\theta} = \frac{1}{2} \left[w_x^2 I_{xx} + w_y^2 I_{yy} + w_z^2 I_{zz} - 2w_x w_y I_{xy} - 2w_x w_z I_{xz} - 2w_y w_z I_{yz} \right]_1^2 \quad (9.46)$$

Estas ecuaciones expresan el principio del trabajo y energía cinética para un sólido. La primera describe el movimiento del centro de masa del sólido, mientras que la segunda, el movimiento del sólido con respecto al centro de masa. Para simplificar la ecuación (9.46) podemos elegir como ejes principales de inercia el sistema de referencia que pasa por el centro de masa, obteniendo:

$$\int_1^2 \bar{\mathbf{M}}_c \cdot d\bar{\theta} = \frac{1}{2} \left[w_x^2 I_{xx} + w_y^2 I_{yy} + w_z^2 I_{zz} \right]_1^2 \quad (9.47)$$

Conservación de la Energía.

Ya antes hemos visto que el trabajo de las fuerzas conservativas se puede expresar en función de la variación de energía potencial. Si un sólido rígido se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, el principio de trabajo y energía se puede expresar de la forma siguiente:

$$EC_1 + V_1 = EC_2 + V_2 \quad (9.48)$$

Que en palabras dice así: 'si un sólido se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, la suma de la energía cinética y de la energía potencial del sólido permanece constante'. En algunas ocasiones tendremos que tratar con sólido rígido sometidos a la acción de sistemas mixtos de fuerzas, es decir, de fuerzas conservativas y de fuerzas no conservativas. En este caso, la ecuación deberá escribirse así:

$$EC_1 + V_1 + \int_1^2 \bar{\mathbf{F}}_n \cdot d\bar{\mathbf{r}} = EC_2 + V_2 \quad (9.49)$$

CAPITULO 10IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO10.1 IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA.

Sea una partícula de masa m sobre la que actúa un conjunto de fuerzas cuya resultante es \bar{F} . De la segunda ley de Newton:

$$\bar{F} = \bar{m}a = m \frac{d\bar{v}}{dt} \quad (10.1)$$

$$\bar{F} dt = m d\bar{v} \quad (10.2)$$

Integrando tenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = \int_{\bar{v}_1}^{\bar{v}_2} m d\bar{v} \quad (10.3)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 \quad (10.4)$$

El término $\int \bar{F} dt$ es llamado impulso y el vector $m\bar{v}$, cantidad de movimiento. La ecuación (10.4) establece que "el impulso de \bar{F} es igual al cambio en la cantidad de movimiento de la partícula sobre la que actúa durante un intervalo de tiempo dado".

Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es nula, el impulso es cero y la ecuación (10.4) se reduce a;

$$m\bar{v}_2 = m\bar{v}_1 \quad (10.5)$$

es decir, cuando el impulso de la fuerza resultante es nulo, se conserva la cantidad de movimiento de la partícula.

Consideremos ahora dos partículas de masa m_A y m_B que ejercen acciones mutuas. De acuerdo con la tercera ley de Newton, éstas serán iguales y opuestas; por consiguiente los impulsos de esas fuerzas serán también iguales y opuestas. Así, para la partícula A:

$$\int \bar{F}_A dt = m_A \bar{v}_{A2} - m_A \bar{v}_{A1} \quad (10.6)$$

Para la partícula B:

$$\int \bar{F}_B dt = m_B \bar{v}_{B2} - m_B \bar{v}_{B1} \quad (10.7)$$

Pero:

$$\int \bar{F}_A dt = - \int \bar{F}_B dt \quad (10.8)$$

Por consiguiente:

$$(m_A \bar{v}_{A2} - m_A \bar{v}_{A1}) = - (m_B \bar{v}_{B2} - m_B \bar{v}_{B1}) \quad (10.9)$$

$$m_A \bar{v}_{A2} + m_B \bar{v}_{B2} = m_A \bar{v}_{A1} + m_B \bar{v}_{B1} \quad (10.10)$$

En general podemos establecer:

$$m_A \bar{v}_A + m_B \bar{v}_B = \text{constante} \quad (10.11)$$

Si hay más de dos partículas en el sistema y todas las fuerzas actuando sobre ellas son debidas a acciones mutuas, es decir, que no hay fuerzas externas, podemos escribir:

$$\sum m_i \bar{v}_i = \text{constante} \quad (10.12)$$

Este resultado se conoce como Principio de conservación de la cantidad de movimiento.

10.2 IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTICULAS.-

Quando en un problema intervienen varias partículas, la ecuación (10.4) debe describirse para cada uno; así:

$$\int_1^2 (\bar{F}_i + \bar{f}_i) dt = (m_i \bar{v}_i)_2 - (m_i \bar{v}_i)_1 \quad (10.13)$$

Sumando ahora vectorialmente todas las ecuaciones, llegamos al siguiente resultado:

$$\sum_1^2 \int (\bar{F}_i + \bar{f}_i) dt = \sum_1^2 (m_i \bar{v}_i)_2 - \sum_1^2 (m_i \bar{v}_i)_1 \quad (10.14)$$

Sin embargo, como la resultante de las fuerzas internas siempre es nula, resulta:

$$\sum_1^2 \int \bar{F}_i dt = \sum_1^2 (m_i \bar{v}_i)_2 - \sum_1^2 (m_i \bar{v}_i)_1 \quad (10.15)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la ecuación (8.14), el resultado anterior puede expresarse usando el movimiento del centro de masa:

$$\sum_1^2 \int \bar{F}_i dt = (m \bar{v}_c)_2 - (m \bar{v}_c)_1 \quad (10.16)$$

Este resultado es idéntico al que se obtendría si se considerara el movimiento de una partícula de masa $m = \sum m_i$ sobre la que se aplicarían todas las fuerzas externas.

Momento Cinético. - El momento cinético o cantidad de movimiento angular H_o , de una partícula de masa m con respecto a un punto fijo O se define mediante la expresión:

$$\bar{H}_o = \bar{r} \times m \bar{v} \quad (10.17)$$

donde \bar{r} es el vector de posición de la partícula con respecto a O .

El momento cinético de un sistema de partículas es la suma de los correspondientes a todas las partículas, así:

$$\bar{H}_o = \sum (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i) \quad (10.18)$$

Derivando con respecto al tiempo, encontramos:

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum (\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i) + \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) \quad (10.19)$$

Dado que los vectores \vec{v}_i y $m_i \vec{v}_i$ tienen la misma dirección, su producto vectorial es cero, por lo tanto:

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) \quad (10.20)$$

Ahora bien, de la segunda ley de Newton, tenemos que para cada partícula:

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i \quad (10.21)$$

Premultiplicando vectorialmente este resultado por \vec{r}_i :

$$\vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \vec{f}_i) = \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \quad (10.22)$$

Y para todo el sistema:

$$\sum \left[\vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \right] = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) \quad (10.23)$$

El miembro izquierdo de esta ecuación representa el momento de todas las fuerzas respecto al punto fijo O, y el miembro derecho es $\dot{\vec{H}}_O$.

Debido a que las fuerzas internas ocurren en pares iguales, opuestas y colineales, sus momentos se anulan, por consiguiente el momento resultante es debido únicamente a las fuerzas externas del sistema:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (10.24)$$

Entonces, la ecuación (10.23) expresa que "el momento resultante, con respecto a un punto fijo O, de las fuerzas externas aplicadas a un sistema de partículas es igual a la variación con el tiempo del momento cinético del sistema con respecto al mismo punto O".

$$\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O \quad (10.25)$$

Hasta aquí, el momento cinético ha sido tomado con respecto a un punto fijo. Frecuentemente conviene elegir un punto que no sea fijo. Sea P un punto cuya velocidad tiene la misma dirección que la velocidad del centro de masas del sistema.

La partícula i se localiza respecto a un punto fijo mediante el vector de posición:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_P + \vec{r}_{i/P} \quad (10.26)$$

Ahora bien, el momento cinético del sistema respecto a P será:

$$\vec{H}_P = \sum (\vec{r}_{i/P} \times m_i \vec{v}_i) \quad (10.27)$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$\dot{\vec{H}}_P = \sum (\vec{v}_{i/P} \times m_i \vec{v}_i) + \sum (\vec{r}_{i/P} \times m_i \vec{a}_i) \quad (10.28)$$

Mostraremos que el primer término del miembro de la derecha de la ecuación (10.28) es nulo. En virtud de la ecuación (10.26) podemos escribir:

$$\vec{v}_{i/P} = \vec{v}_i - \vec{v}_P \quad (10.29)$$

Luego, el primer término de (10.28) resulta ser;

$$\sum (\vec{v}_{i/P} \times m_i \vec{v}_i) = \sum \left[(\vec{v}_i - \vec{v}_P) \times m_i \vec{v}_i \right] = -\sum (\vec{v}_P \times m_i \vec{v}_i) \quad (10.30)$$

Hagamos ahora referencia al centro de masa C.

$$\bar{r}_i = \bar{r}_c + \bar{r}_{i/c} \quad (10.31)$$

$$\bar{v}_i = \bar{v}_c + \bar{v}_{i/c} \quad (10.32)$$

Sustituyendo en (10.30) :

$$\begin{aligned} \sum (\bar{v}_{i/P} \times m_i \bar{v}_i) &= - \sum \left[\bar{v}_P \times m_i (\bar{v}_c + \bar{v}_{i/c}) \right] \\ &= - \sum (\bar{v}_P \times m_i \bar{v}_c) - \sum (\bar{v}_P \times m_i \bar{v}_{i/c}) \\ &= - \bar{v}_P \times \bar{v}_c \sum m_i - \bar{v}_P \times \sum m_i \bar{v}_{i/c} \end{aligned} \quad (10.33)$$

Pero como \bar{v}_P y \bar{v}_c tienen la misma dirección :

$$\bar{v}_P \times \bar{v}_c \sum m_i = 0 \quad (10.34)$$

y además como $\bar{r}_{i/c}$ está referido al centro de masa :

$$\sum m_i \bar{r}_{i/c} = 0 \quad (10.35)$$

Luego :

$$\sum m_i \bar{v}_{i/c} = 0 \quad (10.36)$$

Por otra parte, el momento resultante respecto a P de todas las fuerzas aplicadas al sistema de particulás es :

$$\bar{M}_P = \sum \left[\bar{r}_{i/P} \times (\bar{F}_i + \bar{f}_i) \right] = \sum (\bar{r}_{i/P} \times m_i \bar{a}_i) \quad (10.37)$$

Entonces la ecuación (10.28) se reduce a la siguiente :

$$\dot{\bar{H}}_P = \bar{M}_P \quad (10.38)$$

Si el punto P coincide con el centro de masa C, resulta :

$$\dot{\bar{H}}_C = \bar{M}_C \quad (10.39)$$

Las ecuaciones (10.25), (10.38) y (10.39) expresan que la relación $\dot{\bar{H}} = \bar{M}$ es válida cuando el punto de referencia es : (a) un punto fijo; (b) el centro de masa del sistema; (c) cualquier punto cuya velocidad sea paralela a la velocidad del centro de masa.

10.3 PRINCIPIO DE CONSERVACION DEL MOMENTO CINETICO.

Cuando el momento resultante de las fuerzas externas es cero, la ecuación $\dot{\bar{H}} = \bar{M}$ toma la forma :

$$\dot{\bar{H}} = 0 \quad (10.40)$$

$$0 \text{ sea : } \bar{H} = \text{constante} \quad (10.41)$$

Esto es el principio de conservación del momento cinético, el cual establece que : " si el momento con respecto a O de las fuerzas externas aplicadas al sistema de partículas es nulo, el momento cinético con respecto a ese mismo punto permanece constante ".

10.4 IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE LOS SOLIDOS RIGIDOS.

Otro conjunto de relaciones que son de utilidad en el movimiento de un sólido rígido pueden obtenerse a partir de los conceptos de impulso y cantidad de movimiento.

Sea XYZ un sistema de coordenadas que tiene su origen en el centro de masa C del sólido rígido. El momento cinético o cantidad de movimiento angular del sólido respecto a C, según la ecuación (10.27) es :

$$\bar{H}_C = \sum (\bar{r}_{i/c} \times m_i \bar{v}_i) \quad (10.42)$$

donde i es una partícula del sólido, $\bar{r}_{i/c}$ su vector de posición con respecto al centro de masa, \bar{v}_i su velocidad, m_i su masa. Del movimiento relativo

sabemos que :

$$\bar{v}_i = \bar{v}_c + \bar{w} \times \bar{r}_{i/c}$$

Luego :

$$\begin{aligned} \bar{H}_c &= \sum \left[\bar{r}_{i/c} \times m_i (\bar{v}_c + \bar{w} \times \bar{r}_{i/c}) \right] \\ &= \sum \bar{r}_{i/c} \times m_i \bar{v}_c + \sum \bar{r}_{i/c} \times m_i (\bar{w} \times \bar{r}_{i/c}) \\ &= (\sum m_i \bar{r}_{i/c}) \times \bar{v}_c + \sum \bar{r}_{i/c} \times m_i (\bar{w} \times \bar{r}_{i/c}) \end{aligned}$$

El primer término de esta expresión es nulo por estar $\bar{r}_{i/c}$ referido al centro de masa. Entonces :

$$\bar{H}_c = \sum \bar{r}_{i/c} \times m_i (\bar{w} \times \bar{r}_{i/c}) \quad (10.43)$$

Si hacemos $m_i = dm = \rho dV$, podemos escribir :

$$\bar{H}_c = \int \rho \bar{r}_{i/c} \times (\bar{w} \times \bar{r}_{i/c}) dV \quad (10.44)$$

En componentes rectangulares, tenemos :

$$\bar{r}_{i/c} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

$$\bar{w} = w_x\bar{i} + w_y\bar{j} + w_z\bar{k}$$

$$\bar{H}_c = H_{cx}\bar{i} + H_{cy}\bar{j} + H_{cz}\bar{k} \quad (10.45)$$

Luego :

$$\begin{aligned} \bar{r}_{i/c} \times (\bar{w} \times \bar{r}_{i/c}) &= \left[w_x(y^2 + z^2) - w_yxy - w_zxz \right] \bar{i} \\ &\quad + \left[-w_xxy + w_y(x^2 + z^2) - w_zyz \right] \bar{j} \\ &\quad + \left[-w_xxz - w_yyz + w_z(x^2 + y^2) \right] \bar{k} \end{aligned}$$

De lo que se deduce que :

$$H_{cx} = w_x \int \rho (y^2 + z^2) dV - w_y \int \rho xy dV - w_z \int \rho xz dV$$

$$H_{cy} = -w_x \int \rho xy dV + w_y \int \rho (x^2 + z^2) dV - w_z \int \rho yz dV$$

$$H_{cz} = -w_x \int \rho xz dV - w_y \int \rho yz dV + w_z \int \rho (x^2 + y^2) dV$$

Observando que las integrales representan los momentos y productos de inercia del sólido con respecto a su centro de masa, podemos escribir :

$$H_{cx} = w_x I_{xx} - w_y I_{xy} - w_z I_{xz}$$

$$H_{cy} = -w_x I_{xy} + w_y I_{yy} - w_z I_{yz}$$

$$H_{cz} = -w_x I_{xz} - w_y I_{yz} + w_z I_{zz} \quad (10.46)$$

Estas ecuaciones nos dan las componentes rectangulares del momento cinético de un sólido rígido con respecto a su centro de masa. Ahora vamos a desarrollar las ecuaciones del movimiento del sólido usando relaciones de impulso y cantidad de movimiento. Recordemos que para un sistema de partículas, el movimiento del centro de masa, según (10.16), está dado por :

$$\int_1^2 \bar{F}_i dt = (m\bar{v}_c)_2 - (m\bar{v}_c)_1 \quad (10.47)$$

Al ser el sólido rígido un sistema de partículas, esta ecuación define el movimiento de su centro de masa. Ahora tenemos que determinar el movimiento con respecto al centro de masa. A partir de la ecuación (10.39) :

$$\bar{M}_c = \dot{\bar{H}}_c = \frac{d}{dt} (\bar{H}_c)$$

O sea :

$$\bar{M}_c dt = d(\bar{H}_c) \quad (10.48)$$

Cuando el sólido se mueve de la posición 1 a la posición 2, la ecuación (10.48) puede ser integrada para obtener :

$$\int_1^2 \bar{M}_c dt = \int_1^2 d(\bar{H}_c)$$

$$\int_1^2 \bar{M}_c dt = \bar{H}_{c2} - \bar{H}_{c1} \quad (10.49)$$

donde el término $\int_1^2 \bar{M}_c dt$ es llamado impulso angular. La ecuación (10.49)

expresa que " el impulso angular de las fuerzas externas que actúan sobre el sólido con respecto a su centro de masa es igual al cambio en la cantidad de movimiento angular o momento cinético " .

Las ecuaciones (10.48) y (10.49) relacionan las fuerzas y el tiempo con los cambios en la velocidad angular del sólido rígido respectivamente.

Estas ecuaciones vectoriales conducen a las siguientes ecuaciones escalares :

$$\int_1^2 F_x dt = \left[m v_{cx} \right]_1^2$$

$$\int_1^2 F_y dt = \left[m v_{cy} \right]_1^2$$

$$\int_1^2 F_z dt = \left[m v_{cz} \right]_1^2$$

$$\int_1^2 \bar{M}_{cx} dt = \left[w_x I_{xx} - w_y I_{xy} - w_z I_{xz} \right]_1^2$$

$$\int_1^2 \bar{M}_{cy} dt = \left[-w_x I_{xy} + w_y I_{yy} - w_z I_{yz} \right]_1^2$$

$$\int_1^2 \bar{M}_{cz} dt = \left[-w_x I_{xz} - w_y I_{yz} + w_z I_{zz} \right]_1^2 \quad (10.50)$$

Las últimas tres expresiones pueden simplificarse si el sistema de coordenadas materiales elegidos coinciden con los ejes principales de inercia del sólido, llegando a obtener :

$$\int_1^2 M_{cx} dt = \left[w_x I_{xx} \right]_1^2$$

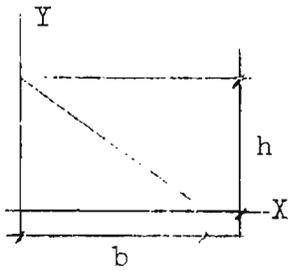
$$\int_1^2 M_{cy} dt = \left[w_y I_{yy} \right]_1^2$$

$$\int_1^2 M_{cz} dt = \left[w_z I_{zz} \right]_1^2$$

(10.51)

APENDICE

PROPIEDADES DE SECCIONES PLANAS Y DE CUERPOS SOLIDOS.



Triángulo rectángulo

$$A = \frac{1}{2} bh$$

$$x_c = \frac{1}{3} b$$

$$y_c = \frac{1}{3} h$$

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{36}$$

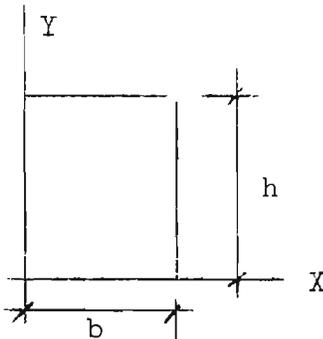
$$I_{yc} = \frac{b^3h}{36}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12}$$

$$I_{xcyc} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$$



Rectángulo

$$A = bh$$

$$x_c = \frac{1}{2} b$$

$$y_c = \frac{1}{2} h$$

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{12}$$

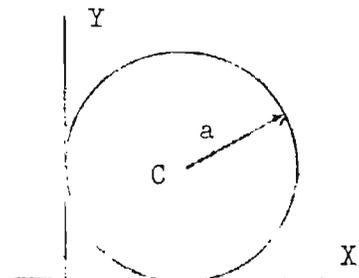
$$I_{yc} = \frac{b^3h}{12}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{3}$$

$$I_{xcyc} = 0$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$$



Círculo

$$A = \pi a^2$$

$$x_c = a$$

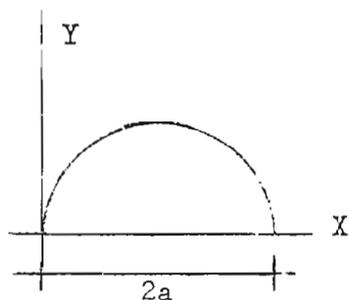
$$y_c = a$$

$$I_{xc} = I_{yc} = \frac{1}{4} \pi a^4$$

$$I_x = I_y = \frac{5}{4} \pi a^4$$

$$I_{xcyc} = 0$$

$$I_{xy} = \pi a^4$$



Semi - círculo

$$A = \frac{1}{2} \pi a^2$$

$$x_c = a$$

$$y_c = \frac{4a}{3\pi}$$

$$I_{xc} = \frac{a^4 (9\pi^2 - 64)}{72 \pi}$$

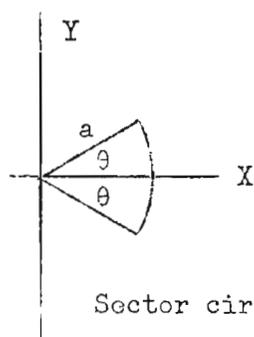
$$I_{yc} = \frac{1}{8} \pi a^4$$

$$I_x = \frac{1}{8} \pi a^4$$

$$I_y = \frac{5}{8} \pi a^4$$

$$I_{xcyc} = 0$$

$$I_{xy} = \frac{2}{3} a^4$$



Sector circular

$$A = a^2 \theta$$

$$x_c = \frac{2a}{3} \frac{\text{Sen } \theta}{\theta}$$

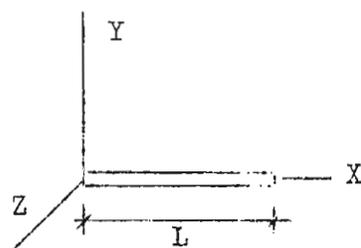
$$y_c = 0$$

$$I_x = \frac{1}{4} a^4 (\theta - \text{Sen } \theta \text{ Cos } \theta)$$

$$I_y = \frac{1}{4} a^4 (\theta + \text{Sen } \theta \text{ Cos } \theta)$$

$$I_{xcyc} = 0$$

$$I_{xy} = 0$$



Barra delgada

$$m = \rho L$$

$$x_c = \frac{1}{2} L$$

$$y_c = 0$$

$$z_c = 0$$

$$I_x = I_{xc} = 0$$

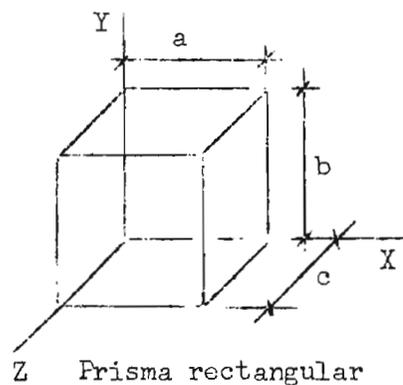
$$I_{yc} = I_{zc} = \frac{mL^2}{12}$$

$$I_y = I_z = \frac{mL^2}{3}$$

$$I_{xcyc} = 0$$

$$I_{xy} = 0$$

etc.



Prisma rectangular

$$m = \rho abc$$

$$x_c = \frac{1}{2} a$$

$$y_c = \frac{1}{2} b$$

$$z_c = \frac{1}{2} c$$

$$I_{xc} = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}$$

$$I_x = \frac{m(b^2 + c^2)}{3}$$

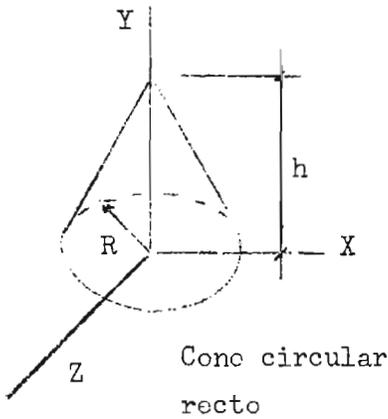
$$I_{xcyc} = 0$$

etc.

$$I_{xy} = \frac{mab}{4}$$

$$I_{xz} = \frac{mac}{4}$$

$$I_{yz} = \frac{mbc}{4}$$



$$m = \frac{1}{3} \pi \rho R^2 h$$

$$x_c = 0$$

$$y_c = \frac{1}{4} h$$

$$z_c = 0$$

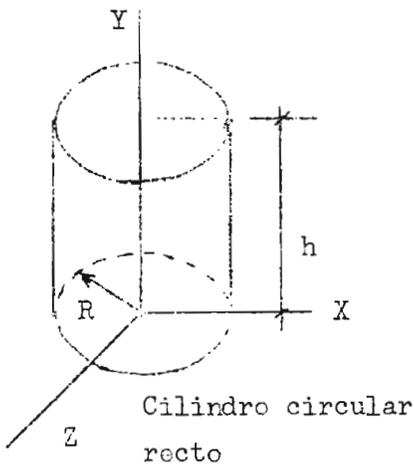
$$I_{xc} = I_{zc} = \frac{3m}{80} (4R^2 + h^2)$$

$$I_{yc} = I_y = \frac{3mR^2}{10}$$

$$I_x = I_z = \frac{m(3R^2 + 2h^2)}{20}$$

$$I_{xcyc} = 0, I_{xy} = 0$$

etc.



$$m = \pi \rho R^2 h$$

$$x_c = 0$$

$$y_c = \frac{1}{2} h$$

$$z_c = 0$$

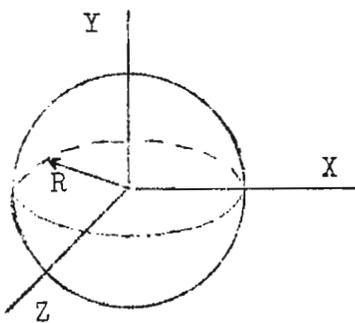
$$I_{xc} = I_{zc} = \frac{m(3R^2 + h^2)}{12}$$

$$I_{yc} = I_y = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_x = I_z = \frac{m(3R^2 + 4h^2)}{12}$$

$$I_{xcyc} = 0, I_{xy} = 0$$

etc.



$$m = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$$

$$x_c = 0$$

$$y_c = 0$$

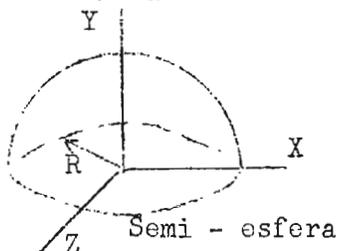
$$z_c = 0$$

$$I_{xc} = I_x = \frac{2}{5} mR^2$$

etc.

$$I_{xcyc} = 0, I_{xy} = 0$$

etc.



$$m = \frac{2}{3} \pi \rho R^3$$

$$x_c = 0$$

$$y_c = \frac{3}{8} R$$

$$z_c = 0$$

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} mR^2$$

$$I_{xcyc} = 0, I_{xy} = 0$$

etc.