Universidad de El Salvador
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Matemática

La Enseñanza de la Geometría en el Nivel Medio

TRABAJO DE GRADUACION PRESENTADO POR

Silvia Milagro Mayorga Muñoz

PREVIO A LA OPCION DEL TITULO DE

Licenciado en Matemática

ENERO 1987

SAN SALVADOR EL SALVADOR CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR: LIC. JOSE LUIS ARGUETA ANTILLON

SECRETARIO GENERAL: ING. RENE MAURICIO MEJIA MENDEZ

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO EN FUNCIONES: LIC. JOSE LUIS ARGUETA ANTILLON

SECRETARIO A.I.: ING. EDUARDO MIGUEL CAMPOSVALLE

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE DEL DEPARTAMENTO: LIC. ROLANDO LEMUS GOMEZ

TRABAJO DE GRADUACION

COORDINADOR: ING. CARLOS MAURICIO CANJURA

ASESORES: LIC. MANUEL ALBERTO YANEZ DOÑO

LIC. MARIO ROBERTO NAJARRO

D E D I C A T O R I A

- Con todo **AMOR** y como un estímulo a mi esposo JOSE INOCENTE y a mis hijos CHEPITA, YARITA y JOSE FERNANDO.

- Con todo Respeto y Admiración a mi **MAESTRO** CARLOS MAURICIO CANJURA como un reconocimiento a la labor que realiza para mejorar la enseñanza de la Matemática a nivel nacional.

I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo está dirigido a estudiantes de segundo año de bachillerato y se enmarca en la necesidad de insistir una vez más en la reactivación de la Enseñanza de la Geometría en todo el Sistema Educativo Nacional, razón por la cual el presente trabajo es continuación del trabajo de Graduación titulado "Un Enfoque Moderno de la Enseñanza de la Geometría" el cual está dirigido a estudiantes de primer año de bachillerato. Es del conocimiento de todos la drástica reducción que sufrió la Geometría en los programas que se diseñaron con la Reforma Educativa de 1968. Con esta reforma a nivel de bachillerato en lo que se refiere a Geometría sólo fueron incorporados algunos elementos de Geometría Analítica, y en los niveles educativos inferiores solamente algunos aspectos muy básicos de figuras geométricas.

A lo anterior agreguemos las dos dificultades fundamentales de la Reforma Educativa, estas son: La poca preparación de los maestros para la puesta en marcha de la misma, así como también la concepción equivocada de identificar la Matemática Moderna solo con Teoría de Conjuntos. A la fecha los resultados son evidentes, ya que las promociones estudiantiles tienen muy poco conocimiento de la Geometría.

En este trabajo se propone un modelo en el cual se retoma la Enseñanza de la Geometría; se propone retomarla en concordancia con el estudio del Algebra Lineal. Además, se ha querido combatir la estructura de la Enseñanza Tradicional, introduciendo una forma de enseñanza-aprendizaje en la cual el maestro se convierte en un facilitador del aprendizaje, mientras se promueve una mayor participación del estudiante para la redescubierta del conocimiento. En este sentido la Geometría es un valiosos ingrediente para el desarrollo de la intuición ya que a través de representaciones geométricas, que logra a base de actividades de "dibujo", puede preveer los resultados teóricos esperados.

Por todo lo anterior planteamos para el presente trabajo los siguientes objetivos:

i) Objetivo General:

Elaborar una propuesta metodológica de Enseñanza de la Geometría.

ii) Objetivos Especíificios:

a) Promover la reactivación de la enseñanza de la Geometría Euclideana en el nivel medio y universitario.

b) Elaborar una visión unitaria de la matemática, a través de la relación entre el Algebra Lineal y la Geometría.

c) Tratar de impulsar una metodlogía a base de actividades para despertar la intuición, la iniciativa y creatividad en el estudiante.

Para la consecución de estos objetivos, se ofrece una fórmula de contenidos de Geometría, para desarrollar en el segundo Año de Bachillerato, de acuerdo al esquema siguiente;

CAPITULO I: BARICENTRO PARA n PUNTOS

- Definición de Baricentro para una familia de puntos
- Asociatividad del Baricentro

CAPITULO II: SUBESPACIOS VECTORIALES

- Espacio Vectorial
- Definición de Subespacio Vectorial
- Espacio Suma
- Suma Directa de Subespacios Vectoriales.
- Suma Directa de Subespacios

CAPITULO III: APLICACIONES LINEALES

Definición de
- Homotecia Vectorial
- Transformación de Vectores por una Homotecia
- Vectores Invariantes

Definición de
- Aplicación Lineal
- Imagen de una Aplicación Lineal
- Núcleo de una Aplicación Lineal
- Teorema de Caracterización de Aplicaciones Lineales

CAPITULO IV: APLICACIONES AFINES

- Definición de aplicación afin

- Aplicación Lienal Asociada a una Aplicación afin
- Teorema de CAracterización de Aplicaciones afines
- Propiedades de Aplicaciones Afines
- Proyecciones

CAPITULO V: TRASLACIONES Y SIMETRIAS

- Definición de Traslación
- Propiedades de las Traslaciones
- Simetrias Respecto a una Recta en una Dirección dada.
- Propiedades de las Simetrías

CAPITULO VI: ROTACIONES

- Definición de Rotación
- Propiedades de las Rotaciones
- Rotaciones como una Composición de Simetrias Ortogonales

Para el desarrollo de los contenidos anteriormente propuestos, se ha utilizado una metodología a base de "actividades"; cada actividad requiere de objetivos específicos; si se cree necesario se hace algún comentario y al final de algunas actividades se hace una exposición sobre lo desarrollado en las actividades y en las cuales no aparece exposición será el maestro quien tendrá la responsabilidad de hacerla; todos los capítulos tienen ejercicios propuestos relacionados con el -

contenido de las actividades.

La forma y el orden en que aprecen estos aspectos (con sus funciones que desempeñan), se dá a continuación

NOMBRE DEL CONTENIDO: ______________________________

1. OBJETIVOS:

Su función es determinar lo que esperamos que el estudiante realice en cada una de las actividades.

2. ACTIVIDADES:

Su función es que el estudiante por sí solo, con el auxilio del profesor, desarrolle paso a paso las instrucciones dadas en cada actividad, para que al final obtenga, intuitivamente, la idea sobre lo que se trata en cada actividad.

3. EXPOSICION:

Su función es que el profesor dé una explicación formal del contenido, apoyandose en la actividad que el estudiante desarrolla.

4. EJERCICIOS:

Su función es que el estudiante refuerce y amplíe el contenido visto en cada actividad o actividades.

Entre las ventajas que presenta esta Metodología, podemos mencionar:

i) Se rompe con la estructura de la enseñanza tradicional (clase expositiva)

ii) Quien asume el papel fundamental en el proceso enseñanza-aprendizaje, es el estudiante.

iii) Atiende las diferencias individuales de los estudiantes

iv) Permite que el estudiante progrese a su propio ritmo

v) Puede ser aplicado a un número considerable de estudiantes.

vi) Proporciona los materiales para la consecusión de los objetivos

Este trabajo, que si bien representa un esfuerzo, dejará de de ser trascendente sino es revisado en los distintos niveles Educativos del Sistema de Educación Nacional; y de este sistema depende, que sea implementado.

Indudablemente el trabajo a seguir es grande, hata el momento solamente se ha hablado de 1er. y 2do. año (esto hay que tomarlo como una inquieturd); habría que seguir con 3er. año y en la Universidad; revisar todo lo de Educación Básica, hasta tener una propuesta global en la enseñanza de la Geometría y después, seguir con la enseñanza del Cálculo, con la enseñanza del Algebra, etc.

Para finalizar, dese expresar mi agradecimiento sincero a mis padres Rosa Milagro Mayorga y Marco Tulio Muñoz López (Q.E.P.D) por inculcarme el deseo de superación, influyendo con ello en el logro de mis metas, al Ingeniero Carlos Mauricio Canjura, al Licenciado Manuel Alberto Yánez Doño y al Licenciado Francisco Orlando Parada Batres por su total en--

entrega y paciente colaboración en la elaboración del presente trabajo.

I N D I C E

CAPITULO IV

APLICACIONES AFINES

C A P I T U L O   I

BARICENTRO PARA N PUNTOS

EXPOSICION: *BARICENTRO PARA n PUNTOS*

Llamaremos punto ponderado al par (P,α) formado por un - punto P de $\mathbb{R}^2$ y un real α llamado coeficiente o peso p.

Consideremos una familia finita $((P_1,\alpha_1),(P_2,\alpha_2)\dots(P_n,\alpha_n))$ de n puntos ponderados $(n \geq 1)$; denotemos a la familia $((P_i,\alpha_i))$, $i \in [1,n]$ como la familia de puntos ponderados

DEFINICION 1.1

Sea $((P_i,\alpha_i))$, $i \in [1,n]$ una familia de puntos ponderados;

Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, existe un único punto G tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GP}_i = \vec{0}$$

Aún más, siendo 0 un punto cualquiera de $\mathbb{R}^2$ se tiene:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} (\alpha_1\overrightarrow{OP}_1 + \alpha_2\overrightarrow{OP}_2 + \dots + \alpha_n\overrightarrow{OP}_n) \quad \text{ó}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OP}_i \right)$$

Este punto G es llamado *Baricentro de la Familia* $((P_i,\alpha_i))$, $i \in [1,n]$ o simplemente *Baricentro* de los puntos $P_1,P_2,\dots,P_n$; afectados de los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$.

Se denota: $G = Bar((P_i,\alpha_i)),\ i \in [1,n]$

ACTIVIDAD 1.1

Objetivos

Que el estudiante:

1. Deduzca la propiedad asociativa del baricentro
2. Generalice la propiedad asociativa del baricentro para n puntos.

PROCEDIMIENTO:

Primera Parte

- Toma un plano cuadriculado
- Determina su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$, y una escala adecuada.
- Ubica los puntos $P_1(5,5)$, $P_2(-3,3)$
- Asigna a cada punto un mismo peso ($p = 1$), es decir $(P_1,1)$; $(P_2,1)$.
- Determina el baricentro de los puntos P_1 y P_2, e identifícalo con la letra G'.
- ¿Son las coordenadas de $G' = (2,3)$? si ____ no ____
- Si tu respuesta es afirmativa, estás en lo correcto
- Si tu respuesta es negativa, ¡inténtalo de nuevo!
- Asígnale al punto G' un peso igual a la suma de los pesos de P_1 y P_2. ¿Cuál es el peso resultante? R/ ______
- En el mismo plano ubica el punto $P_3(5,-3)$
- Asígnale el mismo peso ($p = 1$), es decir $(P_3,1)$
- Encuentra el baricentro entre G' y P_3 e identifícalo con

la letra G.

- Efectua: $1(\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'P_1}) + (\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'P_2}) + 1\overrightarrow{GP_3}$
- ¿Fue tu resultado igual a cero? si ____ no ___
- Si tu respuesta es no, inténtalo de nuevo
- Si tu respuesta es sí, simplifica la expresión anterior.
- ¿Llegaste a la expresión $2\overrightarrow{GG'} + 1\overrightarrow{GP_3}$? si ___ no ___
- Si tu respuesta es no, repítelo.
- Si tu respuesta es sí, ¡muy bien!

<u>Segunda Parte</u>

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala adecuada, 1=1 cm.
- Ubica los puntos $P_1(2,3)$, $P_2(-1,2)$, $P_3(2,3)$, $P_4(1,-4)$
- Asígnale los pesos (p = 4,3,2,1) respectivamente, es de-- cir $(P_1,4)$; $(P_2,3)$; $(P_3,2)$; $(P_4,1)$.
- Determina el baricentro de los puntos P_1, P_2 y P_3 e identifícalo como G'.

$$(\text{Ayuda: } 4\overrightarrow{GP_1} + 3\overrightarrow{GP_2} + 2\overrightarrow{GP_3} = \vec{0})$$

- Asígnale al punto G' un peso igual a la suma de los pesos P_1, P_2, P_3.
- Efectúa $(4(\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'P_1}) + 3(\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'P_2}) + 2(\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'P_3})) + 1\overrightarrow{GP_4}$ *
- ¿Fue tu resultado igual a cero? si ____ no ___
- Si tu respuesta es no, ¡intentalo de nuevo!
- Si tu respuesta es sí, simplifica de otra forma la expre-

sión *

- ¿Fue tu resultado $9\overrightarrow{GG'} + 1\overrightarrow{GP_4}$? si ___ no ___
- Si tu respuesta es no, ¡intentalo de nuevo!
- Si tu respuesta es si, ¡muy bién!

Tercera Parte

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala adecuada.
- Ubica los puntos $P_1(2,1)$, $P_2(-2,5)$, $P_3(-3,3)$; $P_4(3,6)$; $P_5(3,0)$.
- Asignale los pesos ($p = 2,3,4,5,1$) respectivamente es decir $(P_1,2)$, $(P_2,3)$, $(P_3,4)$, $(P_4,5)$, $(P_5,1)$.
- Determina el baricentro de los puntos P_3, P_4, P_5
- Efectúa: $(2(GG' + G'P_1) + 3(GG' + G'P_2)) + 4GP_3 + 5GP_4 + 1GP_5$
- ¿Fue tu resultado igual a cero? si ___ no ___
- Si tu respuesta es no, ¡intentalo de nuevo!
- Si tu respuesta es sí, simplifica a la mínima expresión - el resultado anterior.
- ¿Fue tu resultado $5GG' + 4GP_3 + 5GP_4 + 1GP_5$?, si ___ no ___
- Si tu respuesta es no ¡intentalo de nuevo!
- Si tu respuesta es si, estás en lo correcto
- ¿Es la suma de los pesos p_1 y p_2 igual al peso GG'? si ___ no ___

- Si tu respuesta es no, repíte la suma.
- Si tu respuesta es sí ¿podrias generalizar la expresión anterior para n puntos? si ___ no ___
- Si tu respuesta es no, ¡intentalo!
- Si tu respuesta es sí ¿cómo lo harias?

EXPOSICION: *ASOCIATIVIDAD DEL BARICENTRO*

El baricentro G de n puntos ponderados puede obtenerse sustituyendo varios de ellos, por su baricentro G' con peso igual a la suma de los pesos de dichos puntos; en donde la suma de éstos pesos es no nula, y calculando al final el baricentro G con los demás puntos restantes y el baricentro G'.

Esta propiedad es llamada *Asociatividad del Baricentro*.

DEFINICION 1.2

Sea $((P_i,\alpha_i))$, $i \in [1,n]$ una familia de puntos ponderados supongamos que existe una parte J de $[1,n]$ $(J \neq \phi)$ y $J \neq [1,n]$ tal que:

$\sum\limits_{i \in J} \alpha_i \neq 0$. Tomando $K = [1,n] - J$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GP}_i = \vec{0} \iff \sum_{i \in J} \alpha_i \overrightarrow{GP}_i + \sum_{i \in K} \alpha_i \overrightarrow{GP}_i = \vec{0}$$

Si O es un punto cualesquiera de $\mathbb{R}^2$, se tiene

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OP_i} \right]$$

Si reemplazamos O por G y G por G' en donde

G' = Bar$((p_i,\alpha_i))$, $i \varepsilon J$, se tiene:

$$GG' = \frac{1}{\sum_{i\varepsilon J} \alpha} \left(\sum_{i\varepsilon J} \alpha_i \overrightarrow{GP_i} \right)$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0} \quad <=> \quad \left(\sum_{i\varepsilon J} \alpha_i \right) \overrightarrow{GG'} + \sum_{i\varepsilon K} \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$$

Así, el baricentro G de los n puntos ponderados $((P_i,\alpha_i))$, $i \varepsilon [1,n]$ puede calcularse, encontrando primeramente el baricentro G' de los puntos ponderados $((P_i,\alpha_i))$, $i \varepsilon J$ y luego calculando el baricentro de los puntos ponderados $((P_i,\alpha_i))$, $i \notin J$ con el punto G' de peso igual a la suma de los pesos α_i, $i \varepsilon J$. Esta propiedad se denomina: *Asociatividad del Baricentro de n Puntos.*

EJERCICIOS 1.1

1. Sea $((A,1),(B,-2),(C,3))$ un sistema ponderado y $0,0'$ dos puntos de E. Compare los dos vectores:

$$\overrightarrow{0A} - 2\overrightarrow{0B} + 3\overrightarrow{0C} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{0'A} - 2\overrightarrow{0'B} + 3\overrightarrow{0'C}$$

¿Existe un punto G tal que: $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$?

2. Sean A,B,C tres puntos no alineados y D el único punto E tal que el cuadrilatero ABCD sea un paralelogramo. Escoja tres reales α,β,γ no todos nulos tales que:

$$\alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} + \gamma\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

Muestre que para todo punto M del plano (ABC), se puede encontrar tres reales no todos nulos α',β',γ', tales que:

$$\alpha'\overrightarrow{MA} + \beta'\overrightarrow{MB} + \gamma'\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

3. Sea (A,B,C,D) un tetraedro, y A',B',C',D' los centos de gravedad de los triángulos BCD, ACD, ABD, ABC, respectivamente. Escoja un sistema de coordenadas baricentricas de A con respecto a (A',B',C',D').

4. Sea (ABCD) un tetraedro y M un punto del plano P que pasa por A y es paralelo al plano (BCD). Determinar la forma general de un sistema $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ de coordenadas baricéntricas de un tal punto M con respecto a (A,B,C,D). Dar una relación entre $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ independiente del punto M.

C A P I T U L O I I

SUBESPACIOS VECTORIALES

EXPOSICION: *ESPACIO VECTORIAL* $\vec{E}$

1. Sea E un conjunto de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales. Si en E puede definirse una suma tal que: $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^2$ se cumple

   1.0 $(u + v) \in E$

   1.1 $(u + v) + w = u + (v + w)$

   1.2 $u + v = v + u$

   1.3 $\exists 0 \in \mathbb{R}^2, \quad u + 0 = 0 + u = u$

   1.4 $\exists -u \in \mathbb{R}^2, \ u + (-u) = -u + u = 0$

2. Un producto de elementos de $\mathbb{R}$ con elementos de E que satisfaga:

   $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   2.0 $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

   2.1 $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

   2.2 $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

   2.3 $1u = u$

   Se dice entonces que E es un espacio vectorial sobre E. Los elementos de E se denominan vectores y los de $\mathbb{R}$, escalares.

DEFINICION 2.1

Un conjunto de vectores $\vec{E}$ de $\mathbb{R}^2$ y un conjunto de números reales ($\mathbb{R}$) con los numerales 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 en la suma y 2.0, 2.1, 2,3 en el producto de un escalar por un vector define lo que se llama: *Un Espacio Vectorial de $\vec{E}$ Sobre $\mathbb{R}$*.

ACTIVIDAD 2.1

Objetivos

Que el alumno:

1. Adquiera la noción de Subespacio Vectorial
2. Refuerce la representación gráfica

PROCEDIMIENTO:

- Toma un plano cuadriculado
- Determina su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$, y una escala adecuada 1 = 1 cm.
- Considera $\mathbb{R}^2$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$
- Sea $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{1}{2}x\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^2$
- ¿Es $S \neq \phi$? si ___ no ___ ¿por qué? ______________________
- Grafica S
- ¿Es la gráfica de S una línea recta? si ___ no ___
- ¿Pasa la gráfica de S por $(\overrightarrow{0,0})$?

- ¿$\vec{v}_1(2,1)$ y $\vec{v}_2(6,3)$ son elementos de S?
- Toma $\alpha = 3$, $\beta = 2$ de $\mathbb{R}$
- Determina gráfica y analíticamente $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, e identifíca-lo con $\vec{v}$
- ¿Es $\vec{v}(8,4)$?
- ¿Es $\vec{v}$ un elemento de S?
- Determina $\alpha\vec{v}_1$, e identifícalo como $\vec{v}_1'$
- ¿Es $\vec{v}_1'$ un elemento de S?
- Determina $\beta\vec{v}_2$, e identifícalo como $\vec{v}_2'$
- ¿Es $\vec{v}_2'$ un elemento de S?
- Determina $\vec{v}_1' + \vec{v}_2'$, e identifícalo como $\vec{w}$
- ¿Es $\vec{w}$ un elemento de S?
- ¿Cumplen los elementos de S con todas las propiedades de espacio vectorial?
- ¿Qué concluyes? ________________

EXPOSICION: *SUBESPACIO DE UN ESPACIO VECTORIAL*
Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. S se llama *un subespacio de E*, si S es a su vez un espacio vectorial sobre K, con respecto a la adición de vectores y multiplicación por escalar en E. Un criterio más simple para identificar un subespacio es el siguiente:

TEOREMA 2.1

S es subespacio de E sí y solamente sí;

i) S no es vacío

ii) S es cerrado para la adición de vectores: $\vec{S}_1, \vec{S}_2 \in \vec{S}$ implica $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 \in \vec{S}$.

iii) S es cerrado para la multiplicación por escalar;

$s_1 \in S$ implica que $\alpha s_1 \in S$ para todo $\alpha \in K$.

Ejemplos de Subespacios Vectoriales

1) Sea $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = -3x\}$ y las operaciones definidas en $\mathbb{R}^2$:

i) $(x+y) + (x',y') = (x+x', y+y')$

ii) $\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

S_1 es un subespacio vectorial

Prueba

i) Sean (a,b) y (c,d) elementos de S_1

$(a+b) + (c,d) \overset{?}{=} (a+c, b+d)$

$(a,b) \in S_1 \Rightarrow b = -3a$

$(c,d) \in S_1 \Rightarrow d = -3c$

$b+d = -3a - 3c = -3(a+c)$

luego, $(a+c, b+d) \in S_1$

Así la suma es cerrada en S_1

ii) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $(a,b) \in S_1$

$$\alpha(a,b) \stackrel{?}{=} (\alpha a, \alpha b)$$

$$(a,b) \in S_1 \Rightarrow b = -3a$$

$$\alpha b = \alpha(-3a) = -3\alpha a \rightarrow \alpha b = -3(\alpha a)$$

$\therefore$ El producto de un elemento de S_1 por un escalar de $\mathbb{R}$ es cerrado en S_1.

De i) y ii) se tiene que S_1 es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. (Ver - Fig. 2.1)

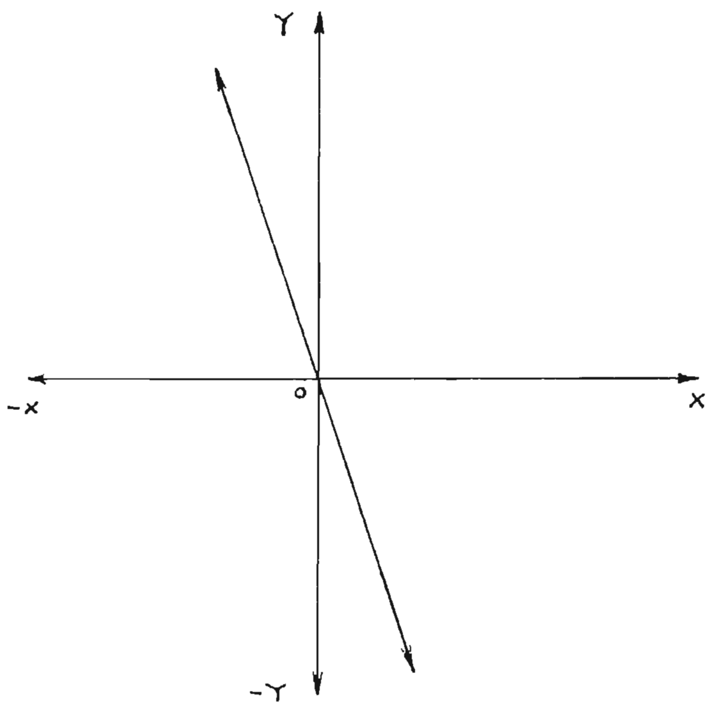


Fig. 2.1.

2) Sea $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = x \wedge y = 2z\}$ con las operaciones definidas en S_2 por:

i) $(x,y,z) + (x',y',z') = (x + x', y + y', z + z')$

ii) $\alpha(x,y,z) = (\alpha x,\alpha y,\alpha z)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

S_2 es un subespacio vectorial.

Prueba

i) Probemos que la suma en S_2 es cerrada.

Sean (a,b,c) y (d,e,f) elementos de S_2, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(a,b,c) + (d,e,f) \stackrel{?}{=} (a+d,\ b+e,\ c+f)$

$(a,b,c) \in S_2 \Rightarrow a = b,\ b = 2c$

$(d,e,f) \in S_2 \Rightarrow d = e,\ e = 2f$

$a+d = b+e$ y $b+e = 2c+2f = 2(c+f)$

luego $(a+d,\ b+e,\ c+f) \in S_2$

$\therefore$ La suma es cerrada para S_2.

ii) Probemos que el producto de un elemento de S_2 por un escalar es cerrado en S_2.

Sean $(a,b,c) \in S_2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha(a,b,c) = (\alpha a,\alpha b,\alpha c)$

$(a,b,c) \in S_2 \Rightarrow a = b$ y $b = 2c$

$\alpha a = \alpha b$ y $\alpha b = \alpha(2c) \Rightarrow \alpha b = 2\alpha c$

luego, $\alpha(a,b,c) \in S_2$

De i) y ii) se tiene que S_2 es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. (Ver Fig. 2.2)

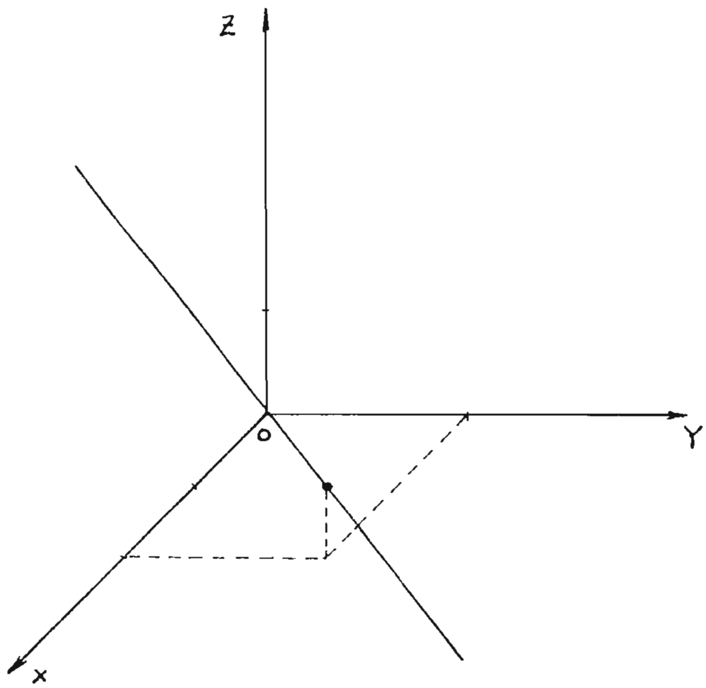


Fig. 2.2.

3) Verifica si $S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 3x + 1\}$ es un subespacio vectorial o no sobre $\mathbb{R}^2$, con las operaciones definidas - en S_3 por:

i) $(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y')$

ii) $\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

<u>Prueba</u>

i) Sean (a,b) y (c,d) elementos de S_3

$(a,b) + (c,d) \overset{?}{=} (a + c,\ b + d)$

$(a,b) \in S_3 \Rightarrow b = 3a + 1$

$(c,d) \in S_3 \Rightarrow d = 3c + 1$

$b + d = (3a + 1) + (3c + 1)$

$\quad = (3a + 3c) + (1 + 1) = 3(a + c) + 2$

luego, $(a + c, b + d) \notin S_3$, ¿por qué?. ______________________

Es decir, S_3 no es cerrado bajo la operación suma y por lo tanto, S_3 *no es un subespacio vectorial.*

Observa que en este caso, ya no es necesario analizar si se cumple ii), pues no se cumplió la parte i).

Graficamente, tenemos:

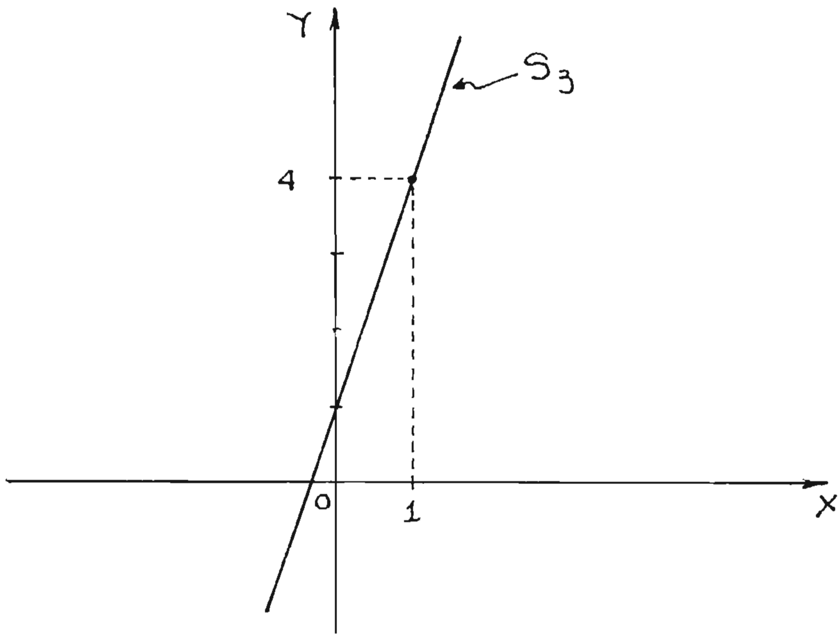


Fig. 2.3

Nota que la gráfica de S_3 es una recta que *no* pasa por origen (0,0), mientras que la de S_1 si pasa por el origen. (Fig. 1).

EJERCICIOS 2.1

1. Verifica que $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = z \text{ y } z = 2y\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, con las operaciones de $\mathbb{R}^3$ defi-

nidas por:

i) $(a,b,c) + (a',b',c') = (a + a', b + b', c + c')$

ii) $\alpha(a,b,c) = (\alpha a,\alpha b,\alpha c)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Verifica que $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = -4y\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Si las operaciones en $\mathbb{R}^2$ estan definidas:

   i) $(m,n) + (m',n') = (m + m', n + n')$

   ii) $\alpha(m,n) = (\alpha m,\alpha n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Grafica S y S_1 en el espacio y el plano, respectivamente.

4. Sabiendo que $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas en el ejercico 1. Verifique que $\{(0,0,0)\}$ y $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$

5. Determina si los siguientes conjuntos con las operaciones del ejercicio 2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$:

   $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x + 1\}$

   $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = -3x - 4\}$

   Explica tus resultados.

EXPOSICION: *ESPACIO SUMA.*
Sean E_1, E_2 subespacios del espacio vectorial E. Llamaremos espacio suma de E_1 y E_2 y lo denotamos por $E_1 + E_2$ al subespacio generado por la unión de E_1 con E_2, es decir: $E_1 + E_2 = \langle E_1 \cup E_2 \rangle = \{z \in E / z = x + y,\ x \in E_1,\ y \in E_2\}$

Ejemplo:

Toma $\overrightarrow{\mathbb{R}}^3$ espacio vectorial

$E_1 = \{(x,0,0)/x \in \mathbb{R}\}$

$E_2 = \{(0,y,0)/y \in \mathbb{R}\}$

$E_3 = \{(0,0,z)/z \in \mathbb{R}\}$

Subespacios de $\mathbb{R}^3$

Representemos E_1, E_2 y E_3 con el espacio

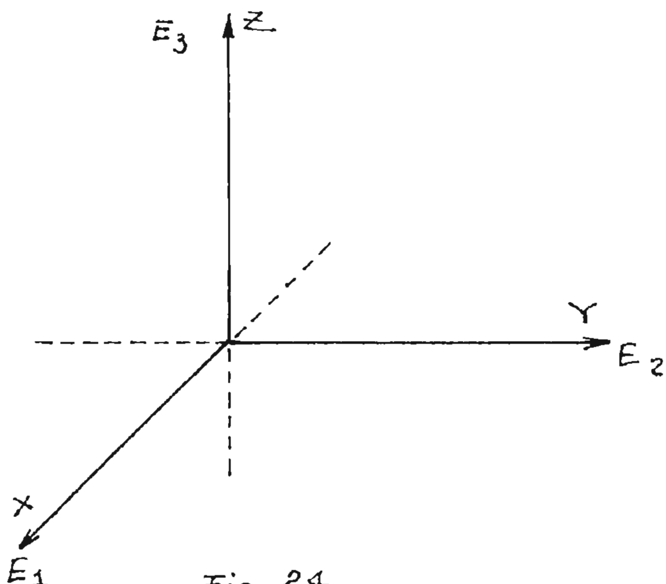


Fig. 2.4

Toma:

$\vec{x}_1 = (3,0,0)$ de E_1

$\vec{y}_1 = (0,4,0)$ de E_2

Grafica $\vec{s} = \vec{x}_1 + \vec{y}_1$

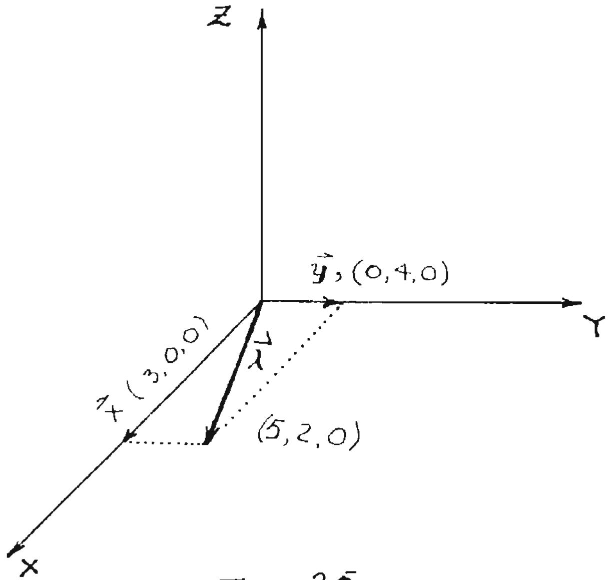


Fig. 2.5

Toma $\vec{v}(5,2,0)$ de $\mathbb{R}^3$

Expresemos $\vec{v}$ como la suma de un elemento de E_1 y un elemento de E_2.

$$\vec{v} = (\overrightarrow{5,0,0}) + (\overrightarrow{0,2,0})$$

Toma $\vec{v}_1$ $(a,y,0)$ y espresemoslo como la suma de un elemento - de E_1 y un elemento de E_2.

$$\vec{v}_1 = (\overrightarrow{x,0,0}) + (\overrightarrow{0,y,0})$$

COMENTARIO:

Todo vector de $\overrightarrow{\mathbb{R}}^3$ de la forma $(x,y,0)$ puede expresarse co̲ mo la suma de un elemento de E_1 y un elemento de E_2, es de̲ cir que el conjunto:

$$E_4 = \{(x,y,0) \varepsilon \mathbb{R}^3\}$$

se puede expresar como la suma de E_1 y E_2.

Gráficamente tenemos:

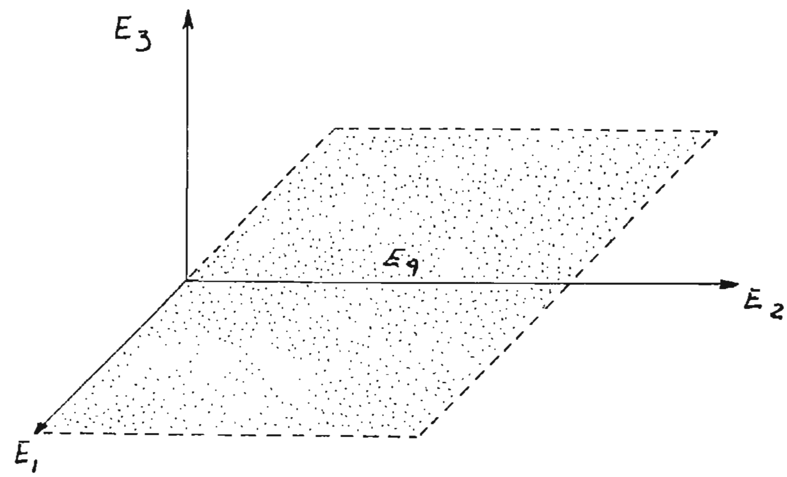


Fig. 2.6

Observa que $E_1 + E_2$ es distinto de $\mathbb{R}^3$ ya que $\vec{v}_2(1,2,3)$ un - vector de $\mathbb{R}^3$ no puede ser expresado como la suma de un elemento de E_1 y un elemento de E_2.

Tomemos $\vec{v}(2,4,0)$ de E_4 y $\vec{v}_1(0,0,5)$ de E_3

Grafiquemos $\vec{s}_1 = \vec{v} + \vec{v}_1$

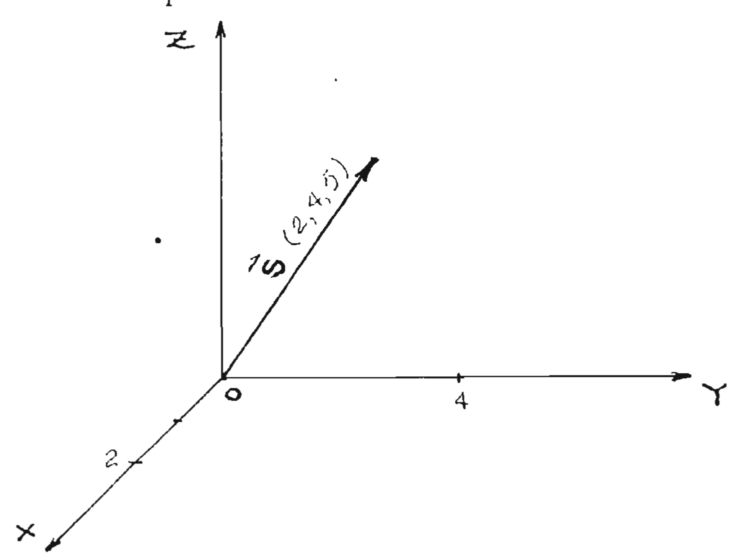


Fig. 2.7

Tomemos $\vec{v}(x,y,0)$ de E_4 y $\vec{v}(0,0,z)$ de E_3

Determinemos $\vec{s}_2 = \vec{v} + \vec{v}_2$

$$\vec{s}_2 = (x,y,z)$$

Tomemos $\vec{y}(3,4,6)$ de $\mathbb{R}^3$

Expresemolo como la suma de un elemento de E_4 y un elemento de E_3

$$\vec{v} = (\overrightarrow{3,4,0}) + (\overrightarrow{0,0,6})$$

COMENTARIO:

Todo vector de $\vec{\mathbb{R}}^3$ de la forma $(\overrightarrow{x,y,z})$ puede escribirse como la suma de un vector de E_4 y un vector de E_3, es decir - que el conjunto

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

Se puede expresar como la suma de E_4 y E_3 es decir:

$E = E_1 + E_2 + E_3$

Gráficamente temenos:

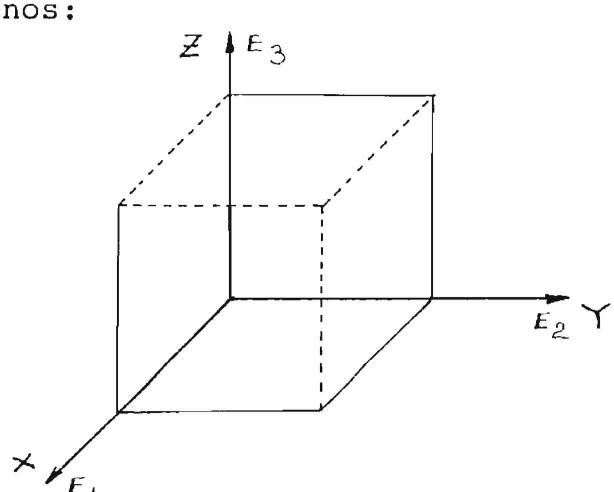


Fig. 2.8

EJERCICIOS 2.2

1. Sea $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = -5x\}$; $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 8x\}$

   Verifica que $E_1 + E_2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones siguientes:

   i) $(a + b) + (a',b') = (a + a', b + b')$

   ii) $\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$

   - Grafica E_1, E_2 y $E_1 + E_2$ con planos diferentes

2. Sean $S_1 = \{(x,x,3x) \in \mathbb{R}^3\}$ y $S_2 = (x,2x,x) \in \mathbb{R}^3\}$.

   Verifica que $S_1 + S_2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, con las operaciones definidas en $\mathbb{R}^3$

   i) $(m,n,p) + (m',n',p') = (m + m', n + n', p + p')$

   $\lambda(m,n,p) = (\lambda m, \lambda n, \lambda p)$

   - Grafica S_1, S_2 y $S_1 + S_2$ en espacios diferentes.

ACTIVIDAD 2.2

Objetivos

Que el alumno:

Adquiera la noción de suma directa de subespacios vectoriales.

PROCEDIMIENTO:

Primera Parte

- Sea $\mathbb{R}^2$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$
- Sean $S = \{(x,y)/y = 2x\}$ y $D = \{(x,y)/y = \frac{1}{2}x\}$ subespa--- cios de $\mathbb{R}^2$
- Determina $S \cap D$, gráficamente
- ¿Fué tu resultado $\{\overrightarrow{(0,0)}\}$?
- Sean $\vec{s}_1(x,2x)$ y $\vec{d}_1(y,\frac{1}{2})$ elementos de S y D respectivamente con x e y $\varepsilon\, \mathbb{R}$.
- Sean $\vec{v}(7,5)$ un elemento de $\mathbb{R}^2$
- Determina $\vec{s}_1 + \vec{d}_1$
- Iguala tu resultado anterior a $\vec{v}$
- ¿Fué tu resultado $\vec{v} = (x + y,\ 2x + \frac{1}{2}y)$?
- Determina el valor de x e y para que la igualdad anterior sea válida.
- ¿Fué tu resultado $x = 1$ e $y = 6$?
- ¿Podrás encontrar vectores $\vec{s}$ y $\vec{d}$ diferentes a los dados que hagan cierto $\vec{v} = (x + y,\ 2x + \frac{1}{2}y)$?, si ___ no ___
- Si tu respuesta es sí, ¿cuáles serias esos vectores?

Segunda Parte

- Sea $\vec{v}_1(a,b)$ un vector de $\mathbb{R}^2$
- Determina $\vec{v}_1 = \vec{s}_1 + \vec{d}_1$
- ¿Fué tu resultado $\overrightarrow{(a,b)} = (x + y,\ 2x + \frac{1}{2}y)$?

- Determina el valor de x e y para que la igualdad anterior sea válida.
- ¿Fué tu resultado $x = -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$ e $y = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}b$?
- ¿Es $(-\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b, \frac{-2}{3}a + \frac{4}{3}b)$ un elemento de S? si ___ no ___
- ¿Es $(\frac{4}{3}a - \frac{2}{3}b, \frac{2a}{3} - \frac{1}{3}b)$ un elemento de D? si ___ no ___
- ¿Podras escribir $\mathbb{R}^2$ como la suma de S y D? si ___ no ___ ¿por qué?
- ¿Qué concluyes? ________________________________

EXPOSICION: *SUMA DIRECTA DE SUBESPACIOS*

DEFINICION 2.2

Sean E_1, E_2 subespacios del espacio vectorial E. Decimos - que la suma $E_1 + E_2$ es la suma directa de E_1 con E_2, si se cumple:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0} \text{ con } \vec{v}_1 \varepsilon E_1, \ \vec{v}_2 \varepsilon E_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{0}$$

Es decir que $\overline{0}$ solamente puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}, \text{ donde } \vec{0} \varepsilon E_1 \text{ y } E_2$$

De lo anterior afirmamos que todo vector que pertenece a $E_1 + E_2$ tiene escritura única donde $\vec{v} = x + y$ con $x \varepsilon E_1$ y $y \varepsilon E_2$.

Cuando se tiene que $E = E_1 + E_2$, entonces decimos que E_1 y E_2 son subespacios suplementarios.

C A P I T U L O   I I I

APLICACIONES LINEALES

ACTIVIDAD 3.1

Objetivo

Que el alumno:

1. Adquiera la noción de homotecia vectorial

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{e},\vec{j})$ y una escala adecuada 1 = 1 cm.
- Toma $\lambda = 5$ de $\mathbb{R}$.
- Sea h: $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ la aplicación, tal que $h(\overrightarrow{x,y}) = (\overrightarrow{x,y})$
- Sean $\vec{u}(1,2)$ y $\vec{v}(3,4)$ vectores de $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$
- Determina $h(\vec{u})$, $h(\vec{v})$, e identificalos como $\vec{u}'$, $\vec{v}'$, respectivamente.
- ¿Fue tu resultado $\vec{u}'(5,10)$ y $\vec{v}'(15,20)$? si ___ no ___
- Grafica $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ en el mismo plano.
- ¿Cuál es la relación entre $\vec{u}$ y $\vec{u}'$?
- ¿Cuál es la relacion entre $\vec{v}$ y $\vec{v}'$?
- Compara la magnitud de $\vec{u}$ y $\vec{u}'$.
- Compara la magnitud de $\vec{v}$ y $\vec{v}'$.
- ¿Qué concluyes? ____

EXPOSICION: *HOMOTECIA VECTORIAL*

Sea $\overline{E}$ un espacio vectorial y λ un escalar no nulo

Para todo vector $\vec{u}$ de $\vec{E}$, el vector $\lambda\vec{u}$ pertenece $\overline{E}$.

DEFINICION 3.1

Llamaremos homotecia vectorial de razón λ a la aplicación

$$h: \vec{E} \longrightarrow \vec{E}$$
$$\vec{u} \rightsquigarrow h(\vec{u}) = \lambda\vec{u}, \ \forall\vec{u} \in \vec{E}$$

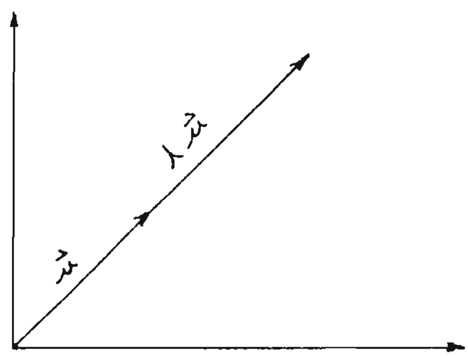


Fig. 3.1

Observa que $\vec{u}$ y $h(\vec{u})$ tiene el mismo origen

<u>Consecuencias de las Homotecias</u>

i) si $\lambda = 1$ entonces $h(\vec{u}) = \vec{u}$

ii) si $\lambda = -1$ entonces $h(\vec{u}) = -\vec{u}$

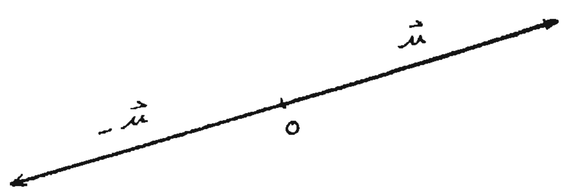


Fig. 3.2

- La imagen de una homotecia de la suma de dos vectores para una homotecia, es la suma de las imagenes de estos - dos vectores, (Ver fig. 3.3)

$$h(\vec{u} + \vec{v}) = h(\vec{u}) + h(\vec{v})$$

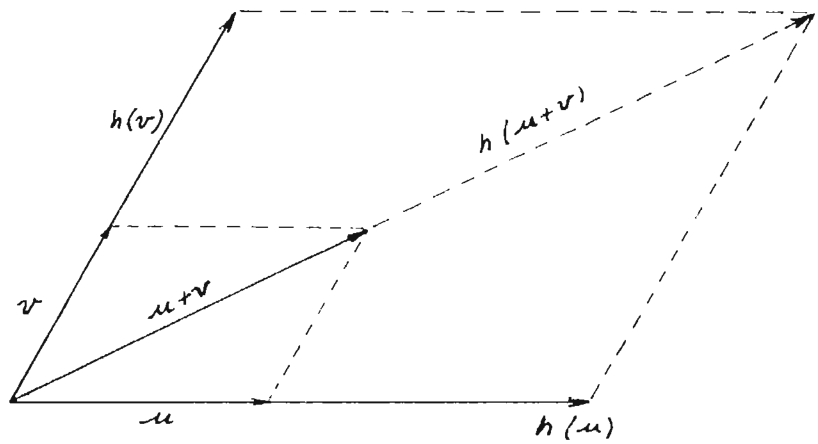


Fig. 3.3.

ACTIVIDAD 3.2

Objetivos

Que el estudiante:

1. Verifica que vectores linealmente dependientes e independientes son transformados por una homotecia vectorial en vectores linealmente dependientes e independientes, res-- pectivamente.

PROCEDIMIENTO

Primera Parte

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{e},\vec{j})$, y una escala adecuada
- Sea $h\colon \vec{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \vec{\mathbb{R}}^2$ una homotecia vectorial tal que: $h(\vec{u}) = 2\vec{u}$
- Sean $\vec{u}(2,-3)$, $\vec{v}(-4,6)$ vectores de $\vec{\mathbb{R}}^3$
- Verifica que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son l.d. (linealmente dependientes)
- Determina $h(\vec{u})$, $h(\vec{v})$ e identifícalos como $\vec{u}$, $\vec{v}'$, respectivamente.
- ¿Son los vectores $h(\vec{u})$, $h(\vec{v})$ l.d.? si ___ no ___
- Grafica en el plano los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$.
- Mide las longitudes de los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$.
- Escribe el vector $\vec{v}'$ en términos de $\vec{u}'$.
- Escribe el vector $\vec{u}'$ en términos de $\vec{v}'$
- Efectúa gráficamente o con pares ordenados: $2\vec{u}' + \vec{v}'$
- ¿Cuál fue tu resultado? ______________________________
- Efectúa gráficamente o con pares ordenados: $3\vec{u}' + \frac{3}{2}\vec{v}'$ y $2\vec{u}' + (-2\vec{u}')$
- ¿Cuál es el resultado? ______________________________
- ¿Qué concluyes? ______________________________

Segunda parte

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala adecuada 1 = 1cm.

- Sea $h_1: \vec{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \vec{\mathbb{R}}^2$ un homotecia vectorial, tal que $h_1(\bar{u}) = 3\bar{u}$.
- Toma $\vec{u}(4,2)$ y $\vec{v}(3,7)$ de $\vec{\mathbb{R}}^2$
- Verifica que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son l.i (linealmente independientes).
- Determina $h_1(\vec{u})$ y $h_1(\vec{v})$ e identifícalos como $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$, respectivamente.
- Grafica en el plano los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$.
- ¿Son los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$ l.i? si ___ no ___
- ¿Puedes escribir el vector $\vec{u}'$ en términos del vector $\vec{v}'$? si ___ no ___.
- Si tu respuesta es sí, ¿cómo lo representas? ______________
- ¿Será posible encontrar dos números reales cualesquiera - a,b diferentes de cero, para que $a\vec{u}' + b\vec{v}' = \vec{0}$? si ___ no ___
- Si tu respuesta es sí, ¿cuáles son esos números?
- ¿Para qué valores de a,b se puede dar la relación $a\vec{u}' + b\vec{v}' = 0$? ______________________________
- ¿Qué concluyes? ______________________________

<table>
<tr><td>EXPOSICION:</td><td>TRANSFORMACION DE VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES Y LINEALMENTE DEPENDIENTES POR UNA HOMOTECIA VECTORIAL DE RAZON λ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sea h: $\vec{E} \longrightarrow \vec{E}$ una homotecia de razón λ. Entonces h transforma vectores linealmente dependientes a vectores linealmente dependientes, es decir si $\vec{u}_1$; $\vec{u}_2$ son linealmente de-</td></tr>
</table>

pendientes, $h(\vec{u}_1)$ y $h(\vec{u}_2)$ son tambien linealmente dependientes.

Además, h transforma vectores linealmente independientes es decir, si $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente independientes, $h(\vec{u}_1)$ y $h(\vec{u}_2)$ también lo serán.

DEFINICION 3.2 *VECTOR INVARIANTE*

Si se tiene una homotecia h de razón $\lambda \in \mathbb{R}$ se dice que $\vec{u} \in \vec{E}$ del dominio de h es un vector invariante si cumple - $h(\vec{u}) = \vec{u}$

$\vec{0}$ es un vector invariante para toda homotecia h de razon λ.

EJERCICIOS

1. Se tiene $\mathbb{R}^2$ un espacio vectorial, $\vec{u}'$ el transformado del vector $\vec{u}$ por la homotecia vectorial de razón λ.

   - Determina el vector $\vec{u}'$ en los casos siguientes:

     a) $\vec{u} = (3,-5)$, $\lambda = 2$

     b) $\vec{u} = (\sqrt{5} - 2,\ 1 - \sqrt{2})$, $\lambda = \sqrt{10}$

     c) $\vec{u} = (\sqrt{2} - 1,\ 1 - \sqrt{3})$, $\lambda = -\sqrt{6}$

2. Se tiene $\mathbb{R}^3$ un espacio vectorial, $\vec{u}'$ el transformado del vector $\vec{u}$ por la homotecia vectorial de razón λ.

   - Determina el vector $\vec{u}'$ en los casos siguientes:

     a) $\vec{u} = (\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{3}{5})$ $\lambda = 60$

b) $\vec{u} = (120, -140, 160)$, $\lambda = -\frac{1}{20}$

c) $\vec{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{6})$, $\lambda = -\sqrt{6}$

3. Sea $\bar{E}$ un espacio vectorial, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ una base de $\bar{E}$.

   Considera la homotecia vectorial h de razón $\lambda = -3$ y sea $\vec{u}' = h(\vec{u})$ el transformado por h del vector $\vec{u}(-1,2)$.

   a) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\vec{u}'$?

   b) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\vec{e}_1' = h(\vec{e}_1)$ y $\vec{e}_2' = h(\vec{e}_2)$?.

   c) Demuestra que $(\vec{e}_1', \vec{e}_2')$ es una base de $\vec{E}$. ¿Cuáles son las coordenadas de $\vec{u}'$ en esta base?

4. Determina el conjunto de vectores invariantes para una homotecia vectorial de razón $\lambda = 3$ y $\lambda = 1$, respectivamente.

ACTIVIDAD 3.3

Objetivo

Que el alumno:

1. Adquiera la noción de aplicación lineal.

PROCEDIMIENTO

<u>Primera Parte</u>

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$, y una escala adecuada.

- Sea $f: \overrightarrow{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}}^3$, tal que $f(\overrightarrow{x,y}) = (x + 2\overrightarrow{y, -x}, 3y)$
- Toma $\vec{u}(1,2)$, $\vec{v}(3,4)$ de $\mathbb{R}^2$
- Determina $f(\vec{u})$
- ¿Fue tu resultado $(5,-1,6)$?
- Determina $f(\vec{v})$
- ¿Fue tu resultado $(11,\overrightarrow{-3,}12)$?
- Efectúa $\vec{u} + \vec{v}$, e identifícalo como $\vec{w}$
- ¿Fue tu resultado $\vec{w} = (\overrightarrow{4,6})$?
- Determina $f(\vec{w})$
- ¿Fue tu resultado $(16,\overrightarrow{-4,}18)$?
- Efectúa $f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
- ¿Fue tu resultado igual a $f(w)$?

<u>Segunda Parte</u>

- Toma $\lambda = 3$ de $\mathbb{R}$
- Efectúa $\lambda\vec{u}$
- ¿Fue tu resultado $(\overrightarrow{3,6})$?
- Determina $f(\lambda\vec{u})$
- ¿Fue tu resultado $(15,\overrightarrow{-3,}18)$?
- Efectúa $\lambda f(\vec{u})$
- ¿Fue tu resultado igual a $f(\lambda\vec{u})$?
- ¿Qué concluyes? ______________________________

EXPOSICION: *APLICACION LINEAL.*

Se dice que una aplicación f de un espacio vectorial $\vec{E}$ en un espacio vectorial $\vec{F}$ es lineal, sí y solamente sí f posee las dos propiedades siguientes:

P1) $\forall \vec{u} \in \vec{E}$, $\forall \vec{v} \in \vec{E}$, $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

P2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{u} \in \vec{E}$, $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$

COMENTARIO

La propiedad P1) expresa que la imagen por f de la suma de los vectores es igual a la suma de las imágenes de los vectores (Fig. 3.4)

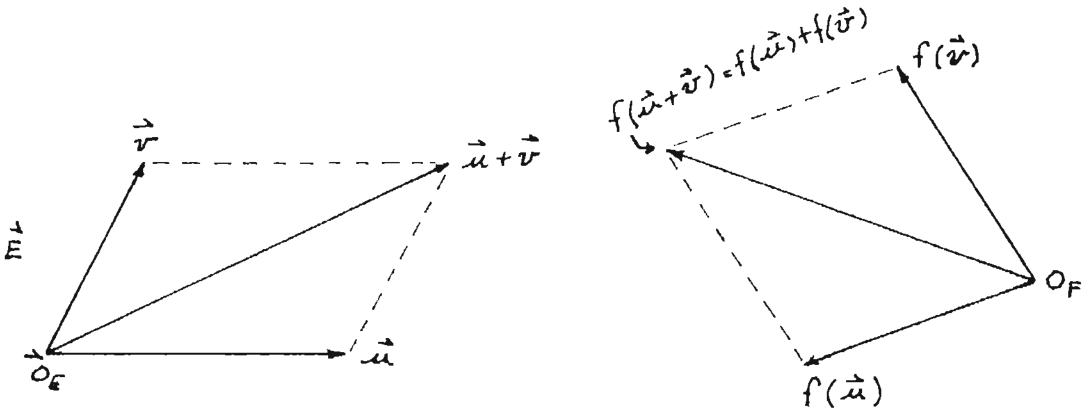


Fig. 3.4

La propiedad P2) expresa que la imágen por f del producto de un vector por un escalar es igual al producto del escalar por la imágen del vector (Fig. 3.5)

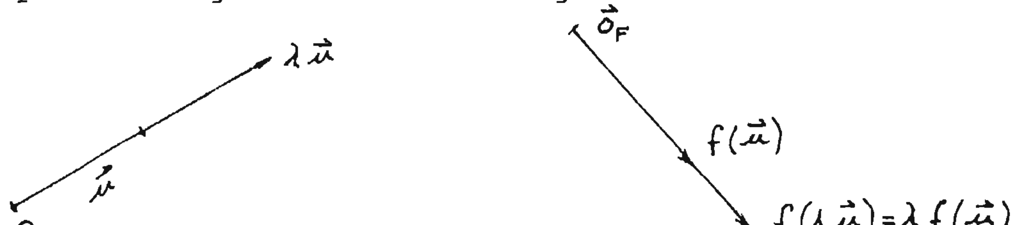


Fig. 3.5

ACTIVIDAD 3.4

Objetivo

Que el Alumno:

1. Verifica que las homotecias de razón λ, son aplicaciones lineales.

PROCEDIMIENTO

Primera Parte

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$, y una escala adecuada
- Sea f: $\vec{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \vec{\mathbb{R}}^2$ una homotecia de razon $\lambda = 3$, tal que:
  $(x,y) \rightsquigarrow 3(x,y)$
- Toma $\vec{u}(a,b)$, $\vec{v}(c,d)$ de $\vec{\mathbb{R}}^2$
- Determina $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, e identifícalos como $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$
- Efectúa $\vec{u} + \vec{v}$, e identifícalo como $\vec{w}$
- Determina $f(\vec{w})$
- Efectúa $f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
- Compara tu resultado con $f(\vec{w})$; ¿cómo son? ¿son iguales?
  si ___ no ___

Segunda Parte

- Toma $\lambda_1 = 2$ de $\mathbb{R}$
- Efectúa $\lambda\vec{u}$
- Determina $f(\lambda\vec{u})$
- Efectúa $\lambda\vec{u}'$

- Compara tu resultado con $f(\lambda\vec{u})$, ¿son iguales?
- ¿Qué concluyes? .

> COMENTARIO
>
> Las homotesias vectoriales de razón λ, con $\lambda \in \mathbb{R}$, cumplen las propiedades de las aplicaciones lineales por tanto diremos que *toda homotecia vectorial es una aplicación lineal*.

ACTIVIDAD 3.5

Objetivo

Que el alumno:

1. Adquiera la noción de imagen de una aplicación lineal.

PROCEDIMIENTO

Primera Parte

- Toma un plano cuadriculado
- Determina su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$, y una escala adecuada 1 = 1 cm.
- Sea $f: \vec{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \vec{\mathbb{R}}^2$ una aplicación lineal, tal que:

  $(x,y,z) \rightsquigarrow (x-y+2z,\ x+y-2z)$
- Toma $\vec{v}_1(0,0,0)$ de $\vec{\mathbb{R}}^3$
- Determina $f(\vec{v}_1)$, e identifícalo como $\vec{v}_1'$
- ¿Son las coordenadas de $\vec{v}_1' = (0,0)$?

- ¿Podrías afirmar que para $\vec{v}_1'$ de $\mathbb{R}^2$ existe $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1'$? si ___ no ___ ¿por qué? ______________________
- Toma $\vec{v}_2(1,2,3)$ y $\vec{v}_3(4,5,6)$ de $\mathbb{R}^3$
- Determina $f(\vec{v}_2)$, e identifícalo como $\vec{v}_2'$
- Determina $f(\vec{v}_3)$, e identifícalo como $\vec{v}_3'$
- ¿Fueron tus resultados $\vec{v}_2'(5,-3)$ y $\vec{v}_3'$ $(11,-3)$?
- ¿Podrias afirmar que para $\vec{v}_2'$ y $\vec{v}_3'$ de $\mathbb{R}^2$ existen $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ - de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{v}_2) = \vec{v}_2'$ y $f(\vec{v}_3) = \vec{v}_3'$? si ___ no ___ - ¿por qué? ______________________
- Efectúa $\vec{v}_2 + \vec{v}_3$, e identifícalo $\vec{w}$
- Determina $f(\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$, e identifícalo como $\vec{w}'$
- ¿Fue tu resultado $\vec{w}(16,-6)$?
- Efectúa $f(\vec{v}_2) + f(\vec{v}_3)$
- ¿Fue tu resultado igual a $\vec{w}'$?
- ¿Podrias afirmar que para $\vec{w}'$ de $\vec{\mathbb{R}}^2$ existe $\vec{w}$ de $\vec{\mathbb{R}}^3$, tal - que $f(\vec{w}) = \vec{w}'$? si ___ no ___ ¿por qué? ______________________

Segunda Parte

- Toma $\alpha = 2$ de $\mathbb{R}$
- Determina $\alpha\vec{v}_2'$, e identifícalo como $\vec{u}'$
- ¿Fue tu resultado igual a $\vec{u}'(10,-6)$?
- ¿Podrías afirmar que para $\vec{u}'(10,-6)$ de $\mathbb{R}^2$ existe un ele-- mento $\vec{u}$ de $\vec{\mathbb{R}}^3$, tal que $f(\vec{u}) = \vec{u}'$? si ___ no ___ ¿por qué?

____

- Determina las coordenadas de $\vec{u}$
- ¿Fue tu resultado $\vec{u}(2,4,6)$?
- Efectúa $f(\alpha\vec{v}_2)$
- ¿Es tu resultado igual a $\vec{u}'$?
- ¿Podrías afirmar que $f(\vec{u}) = \alpha f(\vec{v}_2)$? si ___ no ___ ¿por qué?

____

- ¿Qué concluyes? ______________________________

EXPOSICION: *IMAGEN DE UNA APLICACION LINEAL*
Sea f una aplicación lineal de un espacio vectorial $\vec{E}$ en un espacio vectorial $\vec{F}$ DEFINICION 3.3 Llamaremos *imagen de una aplicación lineal f*, y la denotaremos por Im f, al conjunto de transformaciones por f de todos los vectores de $\vec{E}$. La imagen de f es entonces, el subconjunto de $\vec{F}$ definido por: $\mathrm{Im}\, f = \{\vec{u}' \in F / \exists \vec{u} \in \vec{E}\ f(\vec{u}) = \vec{u}'\}$

ACTIVIDAD 3.6

Objetivo

Que el Alumno:

1. Adquiera la noción de Núcleo de una aplicación lineal.

PROCEDIMIENTO

- Sea f: $\overrightarrow{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}}^3$ una aplicación lineal, tal que

  $(x,y,z) \rightsquigarrow (0,0,z)$
- Toma $\vec{v}_1(0,0,0)$ de $\overline{\mathbb{R}}^3$
- Determina $f(\vec{v}_1)$
- ¿Fue tu resultado $(0,\vec{0},0)$?
- Toma $\vec{v}_2(1,2,0)$, $\vec{v}_3(-2,4,0)$
- Determina $f(\vec{v}_2)$, $f(\vec{v}_3)$
- ¿Fue tu resultado en ambos casos igual a $(0,\vec{0},0)$?
- ¿Efectúa $\vec{v}_2 + \vec{v}_3$, e identifícalo como $\overline{v}_4$?
- ¿Fue tu resultado $\vec{v}_4(-1,6,0)$?
- Determina $f(\vec{v}_4)$
- ¿Fue tu resultado igual a $(0,\vec{0},0)$?
- Sea $\alpha = 5 \varepsilon \mathbb{R}$
- Determina $\alpha\vec{v}_2$, e idéntifícalo como $\vec{v}_5$.
- ¿Fue tu resultado $\vec{v}_5(5,10,0)$?
- Determina $f(\vec{v}_5)$
- ¿Fue tu resultado igual a $(0,\vec{0},0)$?
- ¿Qué concluyes?

EXPOSICION: *NUCLEO DE UNA APLICACION LINEAL*
Sea $\vec{E}$ y $\vec{F}$ dos espacios vectoriales de vectores nulos $\vec{0}_E$ y $\vec{0}_F$ respectivamente y sea f una aplicación lineal de $\vec{E}$ en $\vec{F}$.

DEFINICION 3.4

Llamaremos *Núcleo de una aplicación lineal f*, y lo denotaremos como ker f, al conjunto de vectores $\vec{u}$ de $\vec{E}$ tales que $f(\vec{u}) = \vec{0}_F$

$$\ker f = \{\vec{u} \in \vec{E} / f(\vec{u}) = \vec{0}_F\}$$

El núcleo de la aplicación lineal f es un subconjunto del espacio vectorial $\vec{E}$, es un subconjunto no vacío, estable para la adición y estable para la multiplicación por un - escalar, es entonces un subespacio vectorial de $\vec{E}$.

ACTIVIDAD 3.7

Objetivo

Que el alumno:

1. Dada una aplicación lineal y una base del dominio verifica que la imagen de cualquier vector está completamente - determinada por la combinación lineal de las imágenes de esa base.

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala adecuada 1 = 1cm.
- Toma $\vec{a}_1(1,0)$, $\vec{a}_2(0,1)$ vectores de $\vec{\mathbb{R}}^2$
- ¿Forman $(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ una base de $\vec{\mathbb{R}}^2$? si ____ no ____, ¿por qué?

- Toma $\vec{v}_1(3,4)$, $\vec{v}_2(1,3)$ vectores de $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$
- Sea $f: \overrightarrow{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ una aplicación lineal tal que,

  $f(\vec{a}_1) = \vec{v}_1 \quad , \quad f(\vec{a}_2) = \vec{v}_2$
- Toma $\vec{v}(3,2)$ del dominio de f.
- ¿Podrías escribir $\vec{v}$ como una combinación lineal de $\vec{a}_1$ y -

  $\vec{a}_2$? si ___ no ___ ¿por qué?. ______________________________
- Si tú respuesta fue si, ¿obtuviste como respuesta

  $\vec{v} = 3(1,0) + 2(0,1)$? si ___ no ___ ¿por qué? ____________
- Determina $f(\vec{v})$.
- ¿Obtuviste como resultado $f(\vec{v}) = f(3(1,0) + 2(0,1))$?

  si ___ no ___
- Si tu respuesta es sí, reescribe la expresión anterior --

  ¿podría escribirse como $f(\vec{v}) = 3f(1,0) + 2f(0,1)$?

  si ___ no ___ ¿por qué? ______________________________
- ¿Podrías escribir $f(\vec{v}) = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$?, si ___ no ___ ¿por -

  qué? ____
- Toma $\vec{u}(x,y)$ del dominio de f.
- Escribe $\vec{u}$ como una combinación lineal de $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$
- ¿Fue tu resultado $\vec{n} = x(1,0) + y(0,1)$? si ___ no ___
- Determina $f(\vec{n})$
- ¿Fue tu resultado $f(\vec{n}) = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2$? si ___ no ___
- ¿Qué concluyes? ______________________________________

EXPOSICION:	*TEOREMA DE CARACTERIZACION DE APLICACIONES LINEALES.*

Para toda base $(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)$ de un espacio vectorial $\vec{E}$ y una familia $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n)$ de n vectores de un espacio vectorial w, existe una aplicación lineal única f de $\vec{E}$ en w - tal que:

$$f(\vec{a}_1) = \vec{v}_1,\ f(\vec{a}_2) = \vec{v}_2,\ \ldots,\ f(\vec{a}_n) = \vec{v}_n$$

ACTIVIDAD 3.8

Objetivo

Que el Alumno:

1. Dada una aplicación lineal f

   a) Verifique que el núcleo de f se reduce a $\{0\}$

   b) Toma $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ vectores del dominio de f y verifica que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son linealmente indiferentes.

   c) Vefica que $f(\vec{v}_1)$ y $f(\vec{v}_2)$ son vectores linealmente independientes.

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Determina su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala adecuada - 1 = 1 cm.
- Sea $f: \vec{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \vec{\mathbb{R}}^2$ una aplicación lineal tal que

  $(x,y) \rightsquigarrow (3x,3y)$

- Determina el núcleo de f.
- ¿Fue tu resultado núcleo de f = $\{(0,0)\}$? si ___ no ___
  ¿por qué? ______________________________
- Toma $\vec{v}_1(3,1)$, $\vec{v}_2(4,5)$ de $\mathbb{R}^2$ y verifica que son linealmente independientes.
- Determina $f(\vec{v}_1)$ y $f(\vec{v}_2)$
- ¿Fueron tus resultados $f(\vec{v}_1) = (9,3)$, $f(\vec{v}_2) = (12,15)$
- ¿La expresión $\vec{0} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$ es válida para escalares α y β no nulos? si ___ no ___ ¿por qué? ______________________________
- Si tu respuesta es sí, determina $f(\vec{0})$
- ¿Fue tu resultado $f(\vec{0}) = \alpha f(\vec{v}_1) + \beta f(\vec{v}_2)$? si ___ no ___
- Como $f(\vec{0}) = 0$, determina los valores de α y β que satisfacen la relación $0 = \alpha f(\vec{v}_1) + \beta f(\vec{v}_2)$
- ¿Fue tu resultado $\alpha = \beta = 0$?, explica tu resultado ________

  ____
- ¿Podrías afirmar que los vectores $f(\vec{v}_1)$ y $f(\vec{v}_2)$ son linealmente independientes?. Explica tu afirmación.
- ¿Qué concluyes? ______________________________

EJERCICIOS

1. Dadas las siguientes aplicaciones determina, en cada caso, si son aplicaciones lineales.

   a) $\forall\ x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = -3x$

   b) $\forall\ x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

c) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = x + 2y$

d) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = xy$

e) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = x + y + 1$

f) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = (x - 3y,\ 2x - 6y)$

g) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = (0, x + y)$

2. Dadas las siguientes aplicaciones lineales, determina el núcleo y la imagen, en cada caso.

a) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x + 2y - x,\ 3y)$

b) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 2x - y$

c) $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^2, f(x,y,z) = (x - y + 2z,\ x + y - 2z)$

3. Dada una aplicación lineal f tal que:

$f(1,2) = 3 \ ,\quad f(1,0) = -4$

a) Demuestra que (1,2), (1,0) de $\mathbb{R}^2$ constituya una base de $\mathbb{R}^2$

b) Determina f(a,b), para todo vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

4. Sea E un espacio vectorial y $\beta = (i,j)$ una base de $\vec{E}$ y f una aplicación lineal de $\overline{E}$ en $\overline{E}$ tal que:

$$f(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j} \quad y \quad f(\vec{j}) = -2\vec{i} - 4\vec{j}$$

a) Calcula, en función de coordenadas x,y de un vector $\vec{u}'$, las coordenadas x', y' de su transformado $\vec{u}'$ por f.

b) Determina el núcleo de f.

5. Sea $\vec{E}$ un espacio vectorial $\beta = (i,j,k)$ una base de $\vec{E}$, f

una aplicación lineal de $\bar{E}$ en $\bar{E}$ tal que:

$$f(\vec{i}) = \vec{j} \quad , \quad f(\vec{j}) = k \quad , \quad f(\vec{k}) = \vec{i}$$

a) Calcula en función de coordenadas x,y,z de un vector $\vec{u}$, las coordenadas x',y',z' de su transformado $\vec{u}'$ por f.

b) Determina el núcleo y la imagen de f.

C A P I T U L O   I V

APLICACIONES AFINES

ACTIVIDAD 4.1

Objetivo

Que el Alumno;

1. Adquiera la noción de aplicación afin.

PROCEDIMIENTO

Primera Parte

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia (0,i,j), y una escala adecuada.
  1 = 1 cm.
- Grafica la función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2x$
- Verifica que f es lineal
- Toma los valores $x = -1, 0, 1$, con $x \in \mathbb{R}$
- Determina f(-1), escribe tu resultado ____________________
- Determina f(0), escribe tu resultado ____________________
- Determina f(1), escribe tu resultado ____________________
- Ubica en el plano los puntos (x,f(x))
- Une los puntos (x,f(x)) en el plano e identifica la gráfica con la letra f.
- ¿Es la gráfica de f una línea recta? si ___ no ___
- Si tu respuesta es no, ¡repíte!
- Si tu respuesta es si, ¡muy bien!

- ¿Pasa la gráfica de f por el punto $(0,0)$? si ___ no ___
- Efectúa $f(-1) + 3$, escribe tu resultado ________________
- Efectúa $f(0) + 3$, escribe tu resultado ________________
- Efectúa $f(1) + 3$, escribe tu resultado ________________
- Ubica en el mismo plano los puntos $(x, f(x) + 3)$
- Une los puntos en el plano, e identifica la gráfica con la letra f_1.
- ¿Es la gráfica de f_1 una línea recta? si ___ no ___
- Si tu resultado es sí, ¡muy bién!
- ¿Podrias escribir la fórmula general de f_1? si ___ no ___
- Si tu respuesta es sí ¿fue tu resultado $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, - tal que: $x \rightsquigarrow 2x + 3$?
- ¿Podrías escribir f_1 en términos de f? si ___ no ___
- Si tu respuesta es no, ¡inténtalo!
- Si tu respuesta es sí, ¿cómo lo harias? ________________

<u>Segunda Parte</u>

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0, \vec{i}, \vec{j})$, con una escala 1 = 1 cm.
- Grafica la función $f: \overrightarrow{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ tal que,

$$(\overline{x,y}) \rightsquigarrow f(\overrightarrow{x,y}) = 3(\overrightarrow{x,y})$$

- Toma $\vec{v}_1(1,2)$, $\vec{v}_2(-3,4)$; $\vec{v}_3(3,2)$ de $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$
- Determina $f(\vec{v}_1)$, $f(\vec{v}_2)$ y $f(\vec{v}_3)$, e identificalos como $\vec{v}'_1$, $\vec{v}'_2$, $\vec{v}'_3$ respectivamente.
- ¿Fueron tus resultados $\vec{v}'_1(3,6)$, $\vec{v}'_2(-9,12)$, $\vec{v}'_3(9,6)$?

- Ubica en el plano $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$, e identifica la gráfica cono f.
- Determina las coordenadas del vector $\vec{v}_1' + \vec{v}_3'$, e identificalo como $\vec{v}_4'$.
- Determina las coordenadas de $\vec{v}_2' + \vec{v}_3'$, e identificalo como $\vec{v}_5'$.
- Ubica en el mismo plano $\vec{v}_4'$ y $\vec{v}_5'$, e identifica la gráfica como f_1.
- ¿Podrías expresar f_1 en función de f? si ___ no ___
- Si tu respuesta es no, ¡intentalo!
- Si tu respuesta es sí, ¿cómo lo harias?
- ¿Fue tu resultado $f_1 : \vec{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \vec{\mathbb{R}}^2$, tal que?

$$(x,y) \rightsquigarrow 3(\overrightarrow{x,y}) + (\overrightarrow{3,2})$$

- ¿Qué concluyes? ______________________________

EXPOSICION: *APLICACION AFIN*

DEFINICION 4.1

Sea $\vec{E}$ un espacio vectorial.

Se dice que una aplicación f de $\vec{E}$ en $\vec{E}$ es *afín* sí y solamente sí existe una aplicacion lineal $\psi: \vec{E} \longrightarrow \vec{E}$ y un vector $\vec{b}$ de $\vec{E}$ tal que:

$$(\forall \vec{v} \in \vec{E})\,(f(\vec{v}) = \psi(\vec{v}) + \vec{b})$$

ACTIVIDAD 4.2

Objetivos

Que el Alumno:

1. Determine la aplicación lineal asociada a una aplicación afin.
2. Induzca el procedimiento para caracterizar las aplicaciones a fines.

PROCEDIMIENTO

Primera Parte

- Toma un plano cuadriculado
- Determina su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$, y una escala adecuada $1 = 1$ cm.
- Grafica la aplicación afin $f: \overrightarrow{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ tal que,

$$\vec{M} \rightsquigarrow 2M + \overrightarrow{(2,3)}$$

- Toma $\vec{O}(0,0)$, $\vec{M}(4,6)$, $\vec{N}(1,2)$ de $\mathbb{R}^2$
- Definamos $f_1: \overrightarrow{O\mathbb{R}} \longrightarrow \overrightarrow{O\mathbb{R}}^2$ tal que,

$$\vec{M} \rightsquigarrow 2\vec{M}$$

- ¿Es f_1 una aplicación afin? si ___ no ___
- ¿Qué puedes decir de f_1 con respecto a f?
- Determina $f(\vec{O})$, e identificalo como $\vec{O}'$
- ¿Fue tu resultado $\vec{O}'(2,3)$?
- Determina $f(\vec{M})$, e identifícalo como $\vec{M}'$
- ¿Fue tu resultado $\vec{M}'(10,15)$?

- Determina $f(\vec{N})$, e identifícalo como $\vec{N}'$
- ¿Fue tu resultado $\vec{N}'(4,7)$?, si ___ no ___
- Determina $\vec{OM}$, escribe tu resultado ______________________
- Determina $\vec{ON}$, escribe tu resultado ______________________
- Determina $f_1(\overrightarrow{OM})$
- ¿Fue tu resultado $\overrightarrow{(-8,-12)}$? si ___ no ___
- Determina $f_1(\overrightarrow{ON})$
- ¿Fue tu resultado $\overrightarrow{(-2,-4)}$? si ___ no ___
- Determina $\overrightarrow{M'N'}$
- ¿Fue tu resultado igual a $\overrightarrow{O'N'} - \overrightarrow{O'M'}$?, si ___ no ___
- ¿Es $\overrightarrow{O'N'} - \overrightarrow{O'M'}$ igual a $f_1(\overrightarrow{ON}) - f_1(\overrightarrow{OM})$? si ___ no ___
- ¿Podrías afirmar que $f_1(\overrightarrow{ON}) - f_1(\overrightarrow{OM}) = f_1(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})$?

  si ___ no ___ ¿por qué? ______________________________
- ¿Podrias afirmar que $f_1(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = f_1(\overrightarrow{MN})$? si ___ no ___
- Compara $\overrightarrow{M'N'}$ con $f_1(\overrightarrow{MN})$
- ¿Qué concluyes? ______________________________

<u>Segunda Parte</u>

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$, y una escala adecuada
- Grafica la aplicación afin f: $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ tal que,

$$\vec{M} \rightsquigarrow 3\vec{M} + \overrightarrow{(1,2)}$$

- Toma $\vec{Q}(4,6)$, $\vec{N}(1,2)$, $\vec{M}(2,3)$ de $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$
- Sea f_1: $\overrightarrow{O\mathbb{R}^2} \longrightarrow \overrightarrow{O\mathbb{R}^2}$ tal que

$$\vec{M} \rightsquigarrow 3\vec{M}$$

- ¿Es f_1 una aplicación afin?. Si ___ no ___
- ¿Qué puedes decir de f_1 con respecto a f?
- Determina $f(\vec{0})$, e identifícalo como $\vec{0}'$
- ¿Fue tu resultado $(\overrightarrow{13,20})$? si ___ no ___
- Determina $f(\vec{M})$, e identifícalo como $\vec{M}'$
- ¿Fue tu resultado $\vec{M}'(7,11)$?, si ___ no ___
- Determina $f(\vec{N})$, e identifícalo como $\vec{N}'$
- ¿Fue tu resultado $\vec{N}'(4,8)$? si ___ no ___
- Determina $\overrightarrow{0M}$, escribe tu resultado ______________________
- Determina $\overrightarrow{0N}$, escribe tu resultado ______________________
- Determina $f_1(\overrightarrow{0M})$
- ¿Fue tu resultado (9,12)?, si ___ no ___
- Determina $\overrightarrow{M'N'}$
- ¿Fue tu resultado igual a $\overrightarrow{0'N'} - \overrightarrow{0'M'}$?, si ___ no ____
- ¿Podrías afirmar que $\overrightarrow{0'N'} - \overrightarrow{0'M'} = f\ (\overrightarrow{0N}) - f_1(\overrightarrow{0M})$?

  si ___ no ___ ¿Por qué? ______________________________
- ¿Podrías afirmar que $f_1(\overrightarrow{0N}) - f_1(\overrightarrow{0M}) = f_1(\overrightarrow{0N} - \overrightarrow{0M})$? si ___

  no ___ ¿por qué? ______________________________________
- Compara $\overrightarrow{M'N'}$ con $f_1(\overrightarrow{MN})$, ¿cómo son?
- ¿Qué concluyes? ______________________________________

EXPOSICION: *TEOREMA DE CARACTERIZACION DE APLICACIONES AFINES.*
Una aplicación de $\vec{E}$ en $\vec{E}$ es afin sí y solamente sí existe una aplicación lineal $\psi: \vec{E} \longrightarrow \vec{E}$ tal que, cualesquiera que sean los pares de puntos homólogos (M,M') y (N,N'): $\overrightarrow{M'N'} = \psi(\overrightarrow{MN})$

ACTIVIDAD 4.3

Objetivo

Que el Alumno:

1. Dada una aplicación afín verifique que conserva el baricentro de una familia de puntos ponderados.

PROCEDIMIENTO

Primera Parte

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala adecuada 1 = 1cm.
- Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación afín tal que,

  $(x,y) \leadsto (x',y')$, $x' = 3x + 2$, $y' = 3y + 3$
- Toma los puntos C(-4,7) y D(5,1) de $\mathbb{R}^2$
- Asíngnale al punto C peso 1 y al punto D peso 2; es decir (C,1) y (D,2) y ubícalos en el plano.
- Calcula gráfica y algebraicamente el baricentro de los puntos (C,1) y (D,2), e identifícalo como G.

(Ayuda: usa la exposición $1\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$)

- Determina f(C), f(D) y f(G), e identifícalos como C', D' y G', respectivamente.
- Asíngnale al punto C' peso 1 y al punto D' peso 2, es de-- cir (C',1) y (D',2) y ubícalos en el plano.
- Calcula algebraicamente el baricentro de los puntos C' y - D' e identifícalo como G".

  (Ayuda: usa la exposición $1\overrightarrow{GC}' + 2\overrightarrow{GD}' = \vec{0}$)
- Verifícalo gráficamente
- Compara G. con G" ¿como son? ¿son iguales?
- ¿Qué concluyes? ______________________________

Segunda Parte

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala adecuada.
- Sea f: $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ una aplicación afin tal que:

  $$(x,y) \rightsquigarrow (x',y'),\ x' = 2x + 3,\ y' = 2y - 1$$
- Toma los puntos $P_1(-3,3)$; $P_2(3,6)$ y $P_3(6,0)$
- Asigna a cada punto un mismo peso (p = 1), es decir $(P_1,1)$; $(P_2,1)$; $(P_3,1)$.
- Encuentra algebraicamente el baricentro de los puntos $(P_1,1)$; $(P_2,1)$; $(P_3,1)$ e identifícalo como G.
- Verifícalo gráficamente.
- Determina $f(P_1)$, $f(P_2)$, $f(P_3)$, f(G) e identifícalos como P_1', P_2', P_3' y G', respectivamente.

- Asigna a los puntos P_1', P_2', P_3' el mismo peso $p = 1$.
- Encuentra algebraicamente el baricentro de los puntos P_1', P_2', P_3'.
- Encuentra el baricentro de los puntos

  i) P_1' y P_2' e identifícalo con la letra G_1

  ii) P_2' y P_3' e identifícalo con la letra G_2

  iii) P_3' y P_1' e identifícalo con la letra G_3

- Traza segmentos de rectas desde: G_1 al punto P_3' ; G_2 al -- punto P_1' y G_3 al punto P_2'.
- ¿Se cortan los 3 segmentos: G_1P_3'; G_2P_1', G_3P_2' en un mismo - punto? si ___ no ___
- Identifica el punto de intersección con la letra G"
- Representa con otro color los vectores: $\overrightarrow{G''P_1'}$, $\overrightarrow{G''P_2'}$ y $\overrightarrow{G''P_3'}$
- Determina las coordenadas de G"
- Suma los vectores $\overrightarrow{G''P_1'}$, $\overrightarrow{G''P_2'}$ y $\overrightarrow{G''P_3'}$ (gráficamente ó con - pares ordenados).
- Compara las coordenadas de G" y G', ¿cómo son? ¿son igua-- les?, si ___ no ___
- ¿Qué concluyes? ____

EXPOSICION:	*CONSERVACION DEL BARICENTRO DE LAS APLICACIONES AFINES*

- Se dice que una aplicación f de E en E conserva el baricentro si, para toda familia $((A_i,\alpha_i))_{i\in[1,n]}$ de puntos ponderados de baricentro G, ($\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$), la familia $((A'_i,\alpha_i))_{i\in[1,n]}$ tiene por baricentro G' (siempre que - $A'_i = f(A_i)$, $G' = f(G)$.
- Las aplicaciones afines tienen la propiedad de conservar el baricentro de un conjunto de puntos ponderados.

EJERCICIOS 4.1

1.a) La traslación de vector $\vec{u}$ es denotada $t_{\vec{u}}$. Escriba la definición y demuestre que para todo bipunto (M_1,M_2), la igualdad $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M'_1M'_2}$

b) Demuestre que, si $G = bar((M_1,m_1),(M_2,m_2))$, entonces $G' = bar((M'_1,m_1),(M'_2,m_2))$.

c) En el caso que $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$, ¿cuál es la definición analytica de $t_{\vec{u}}$?

2) Demuestre que, si una aplicación de P en P conserva el baricentro de toda cupla de puntos ponderados, entonces:

a) Ella transforma dos puntos equipolentes de dos bipuntos equipolentes.

b) Si tres puntos C,M_1 y M_2 son alineados y tales que $\overrightarrow{CM_2} = \lambda\overrightarrow{CM_1}$, entonces las imágenes son alineadad y: $\overrightarrow{C'M'_2} = \lambda\overrightarrow{C'M'_1}$

ACTIVIDAD 4.4

Objetivo

Que el Alumno:

1. Adquiera la noción de proyección

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Sea D: $3x - 2y + 1 = 0$ y A: $-x - y = 0$ dos rectas
- Gráfica D y A en el mismo plano
- Determina la pendiente m de la recta A.
  (Ayuda $m = \frac{-\beta}{\alpha}$, β el coeficiente de y, α el coeficiente de x)
- Toma $M(0,2)$ de $\mathbb{R}^2$
- Determina la recta A_M que pasa por M y es paralela a A.
- ¿Fue tu resultado A_M: $y = -x + 2$?
- Determina el punto de intercepción de D y A_M, e identifíca lo como M'
- ¿Fue tu resultado $M'(3/5, 7/5)$?
- Toma $M_1(a,b)$ de $\mathbb{R}^2$
- Determina la recta A_{M_1} que pasa por M_1 y es paralela a A.
- ¿Fue tu resultado A_{M_1}: $y = -x + b + a$?
- Determina el punto de intercepción de A_{M_1} y D
- ¿Fue tu resultado M_1' $(\frac{2}{5}(a+b) - \frac{1}{2}, \frac{3}{5}(a+b) + \frac{1}{5})$?
- ¿Podrías afirmar que todo punto del plano se proyecta so--

bre la renta D paralelamente a la recta A?

- ¿Qué conluyes? ____

DEFINICION 4.2

Llamaremos proyección p del plano P sobre la recta D paralelamente a la recta A (o paralelamente a la recta vectorial $\vec{A}$) a la aplicación del plano sobre él mismo que a todo punto M del plano hace corresponder su proyección M', sobre D paralelamente a A.

Es decir $p: P \longrightarrow P$
$M \rightsquigarrow M'$

Consecuencias inmediatas:

i) $\forall M \in P \quad M \in D \Longrightarrow p(M) = M$, ya que todos los puntos de D son proyecciones de ellos mismos sobre la recta D paralelamente a A. (Fig. 4.1(a))

ii) $\forall M \in P \quad M \notin D \Longrightarrow p(M) \neq M$, ya que M no puede ser proyección de ningun punto del plano sobre la recta D paralelamente a A, por el hecho de no pertenecer a D. (Fig. 4.1(b))

Resulta entonces $\forall M \in P \quad M \in P \Longleftrightarrow p(M) = M$

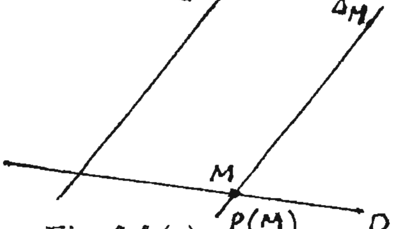


Fig. 4.1 (a)

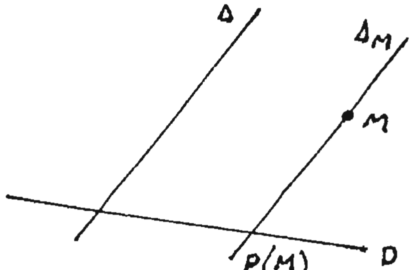


Fig. 4.1 (b)

ACTIVIDAD 4.5

Objetivo

Que el Alumno:

1. Dadas D y A dos rectas secantes, determine analíticamente la proyección p del plano $\mathbb{R}^2$ sobre la recta D en la di-- rección de la recta A.

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$, y una escala adecuada 1 = 1cm.
- Toma D: $2x - y + 3 = 0$ y A: $3x + y = 0$ dos rectas y grafícalas en un mismo plano.
- ¿Son D y A dos rectas secantes? si ___ no ___ ¿por qué?

  ____

- Determina un vector direccional de A, e identifícalo como $\bar{u}$.
- ¿Fue tu resultado de la forma $\vec{u}$, con $\vec{u} = \binom{-1}{3}$? si ___ no ___
- Sea $M\binom{x}{y}$ un punto de $\mathbb{R}^2$ y $M'\binom{x'}{y'}$ su transformado por p.
- Grafica la recta que contiene a M y M', e identifícala como A_M.
- ¿A y A_M son dos rectas pararelas? si ___ no ___, ¿por qué?

  ____

- ¿Podrías afirmar que existe t de $\mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{MM'} = t\vec{u}$?,

  si ___ no ___ ¿por qué? ______________________________

- Determina las coordenadas de $\overrightarrow{MM'}$.
- ¿Fue tu resultado $\overrightarrow{MM'}\binom{x'-x}{y'-y}$?, si ___ no ___
- Determina las coordenadas de $t\vec{u}$
- ¿Fue tu resultado $t\vec{u}\binom{-t}{3t}$? si ___ no ___
- ¿Podrías afirmar que $x' - x = -t$ y $y' - y = 3t$? si ___

  no ___

- Simplifica las expresiones anteriores y obtiene:

  $x' = x - t$ y $y' = y + 3t$ (*)

- Sustituye $M'\binom{x'}{y'}$ en D.
- ¿Fue tu resultado $2(x - t) - (y + 3t) + 3 = 0$? si ___

  no ___

- Determina el valor de t para que la expresión anterior sea válida.
- ¿Fue tu resultado $t = \frac{1}{5}(2x - y + 3)$?, si ___ no ___
- Sustituye el valor de t en las igualdades de (*)
- ¿Fue tu resultado $x' = \frac{1}{5}(3x + y - 3)$ y ($y' = \frac{1}{5}(x+2y+9)$?

  si ___ no ___

- ¿Podrías definir la proyección p del plano $\mathbb{R}^2$ sobre D paralelamente a A?, si ___ no ___
- ¿Fue tu resultado $p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que:

$$(x,y) \rightsquigarrow (x',y')$$

con $x' = \frac{1}{5}(3x + y - 3)$ y $y' = \frac{1}{5}(x + 2y + 9)$?

Ejemplo

Sea $\mathbb{R}^2$ el plano, D y Δ las rectas de ecuaciones

$$D: x - 2y + 3 = 0$$

$$\Delta: 2x + y - 1 = 0$$

Define analíticamente la proyección p de $\mathbb{R}^2$ sobre D paralelamente a Δ.

Sea $M\binom{x}{y}$ un punto del plano P y $M'\binom{x'}{y'}$ su transformado por p.

El punto M' es el punto de intercepción de la recta D y la recta Δ_M que contiene a M y es paralela a Δ.

Un vector director de las rectas Δ y Δ_M es el vector $\vec{u}\binom{-1}{2}$ como el punto M' pertenece a la recta Δ_M, existe un real t tal que: $\overrightarrow{MM'} = t\vec{u}$, es decir tal que:

$$\begin{cases} x' - x = -t \\ y' - y = 2t \end{cases}, \quad \text{además} \quad \begin{cases} x' = x - t & (1) \\ y' = y + 2t & (2) \end{cases}$$

por otra parte, como el punto M' pertenece a la recta D, se tiene:

$$(x - t) - 2(y + 2t) + 3 = 0$$

esto implica que: $t = \frac{1}{5}(x - 2y + 3)$

Sustituyendo t por $\frac{1}{5}(x - 2y + 3)$ en las igualdades (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{cases} x' = x - \frac{1}{5}(x - 2y + 3) \\ y' = y + \frac{2}{5}(x - 2y + 3) \end{cases}$$

EXPOSICION:

Sean D y A dos rectas secantes incluidas en el plano P. Para todo punto M del plano P, la recta A_M contiene a M y es paralela a la recta A y secante a la recta D en un punto M' llamado proyección de M sobre D paralelamente a A (Fig. 4.2(a).

Si M' es la proyección de un punto M sobre una recta D paralelamente a A, podemos afirmar que M' es la proyección del punto M sobre la recta D paralelamente a una recta A' cualesquiera que sea paralela a A (Fig. 4.2(b)).

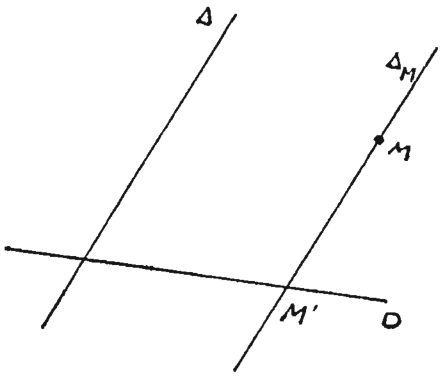


Fig 4.2(a)

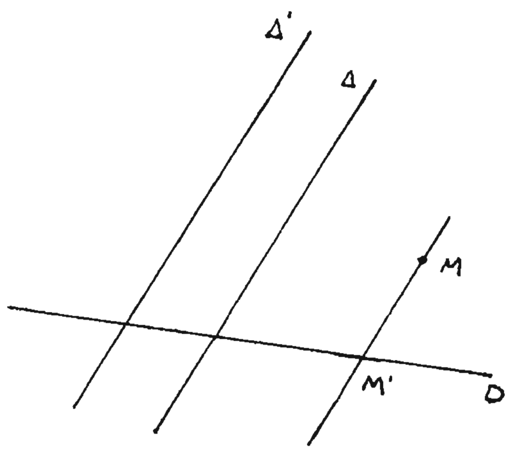


Fig 4.2(b)

Notese que en la definición del punto M', la recta A no menciona que pasa por la dirección $\vec{A}$. Por esta razón, se dice entonces que M' es la proyección de M sobre D paralelamente a la recta vectorial $\vec{A}$.

ACTIVIDAD 4.6

Objetivo

Que el Alumno:

1. Definida una proyección p del plano $\mathbb{R}^2$ sobre una recta D paralelamente a una recta A, determine las ecuaciones de las rectas D y A.

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$, y una escala adecuada
- Sea $p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección de $\mathbb{R}^2$ sobre una recta D paralelamente a una recta A tal que $p(x,y) = (x',y')$ con - $x' = \frac{1}{3}(2x - y + 1)$, $y' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2)$.
- Toma $M_1(-2,3)$, $M_2(4,-3)$ y $M_3(x,-x + 1)$ puntos de $\mathbb{R}^2$
- Determina $p(M_1)$, e identifícalo como M_1'
- ¿Fue tu resultado $M_1'(-2,3)$? si ___ no ___
- Determina $p(M_2)$, e identifícalo como M_2'
- ¿Fue tu resultado $M_2'(4,-3)$?, si ___ no ___
- Determina $p(M_3)$, e identifícalo como M_3'
- ¿Fue tu resultado $M_3'(x,-x+1)$?, si ___ no ___
- ¿Podrías afirmar que M_1, M_2 y M_3 son puntos invariantes - por p?, si ___ no ___ ¿por qué? ______________________________
- Determina una expresión general para el conjunto de puntos invariantes por p, e identifícalo como D.

- ¿Fue tu resultado $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x + 1\}$?
- Grafica D
- Efectúa $-x' + 1$
- ¿Fue tu resultado igual a y'?, si ___ no ___
- ¿Podrás afirmar que $M'\binom{x'}{y'}$ es un elemento de D?.
- Toma $M(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ y $M'(x',y')$ de D
- Determina las coordenadas de $\overrightarrow{MM'}$
- ¿Fue tu resultado $\overrightarrow{MM'}(x' - x,\ y' - y)$?, si ___ no ___
- Efectúa $x' - x$
- ¿Fue tu resultado $x' - x = \frac{1}{3}(-x - y + 1)$?, si ___ no ___
- Efectúa $y' - y$
- ¿Fue tu resultado $y' - y = \frac{1}{3}(-x -y + 1)$?, si ___ no ___
- Efectúa $2(x' - x)$
- ¿Fue tu resultado igual a $y' - y$?, si ___ no ___
- ¿Podrías afirmar que la segunda componente del vector $\overrightarrow{MM'}$ es igual a dos veces la primera componente de $\overrightarrow{MM'}$?, si ___ no ___
- Determina una expresión general para los elementos de la forma $\overrightarrow{MM'}$, e identifícalo como A
- ¿Fue tu resultado $A = \{(x,y)/y = 2x\}$?, si ___ no ___
- Grafica A
- ¿Son D y A dos rectas secantes?, si ___ no ___

ACTIVIDAD 4.7

Objetivo

Que el Alumno:

1. Adquiera la noción de proyección vectorial

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$, y una escala adecuada.
- Sean $\vec{D}$: $x + y = 0$, $\vec{A}$: $2x + 3y = 0$ rectas vectoriales
- Sea p: $\vec{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \vec{\mathbb{R}}^2$ una aplicación tal que:

  $(x,y) \rightsquigarrow (x',y')$, con $x' = -2x - 3y$, $y' = 2x + 3y$
- Grafica en un mismo plano las rectas $\vec{D}$ y $\vec{A}$.
- Toma $\vec{u}\binom{2}{3}$, $\vec{v}\binom{-1}{5}$ vectores de $\vec{\mathbb{R}}^2$
- Determina las coordenadas de los vectores $p(\vec{u})$ y $p(\vec{v})$, e identifícalos como $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ respectivamente.
- Ubica en el mismo plano que graficastes las rectas $\vec{D}$ y $\vec{A}$ los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$
- Pertenecen los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$ a la recta vectorial $\vec{D}$?

  si ___ no ___
- Determina en forma gráfica y por pares ordenados los vectores $\vec{u} - \vec{u}'$, $\vec{v} - \vec{v}'$, e identifícalos como $\vec{a}$ y $\vec{b}$, respectivamente.
- ¿Pertenecen los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a la recta vectorial $\vec{A}$?

  si ___ no ___

- ¿Podrías afirmar que todo vector de $\vec{\mathbb{R}}^2$ se proyecta sobre la recta $\vec{D}$ paralelamente a la recta $\vec{A}$?, si ___ no ___
- ¿Qué concluyes? ______________________________

EXPOSICION: *PROYECCION VECTORIAL*

DEFINICION 4.3

Llamaremos proyección p del plano $\vec{P}$ sobre la recta vectorial $\vec{D}$ paralelamente a la recta vectorial $\vec{A}$, a la aplicación del plano vectorial $\vec{P}$ a él mismo, que a todo vector $\vec{u}$ le hace corresponder su proyectado $\vec{u}'$ sobre la recta vectorial $\vec{D}$ paralelamente a la recta vectorial.

Es decir que para todo vector $\vec{u}$ de transformado $\vec{u}'$ por p, se tiene:

$$\vec{u}' \in \vec{D} \quad y \quad \vec{u} - \vec{u}' \in \vec{A}$$

Si hacemos $\vec{u}'' = \vec{u} - \vec{u}'$, podemos escribir

$$\vec{u}' \in \vec{D}, \ \vec{u}'' \in \vec{A}, \ \vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'',$$

lo que prueba que $\vec{u}'$ es la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{D}$, paralelamente a $\vec{A}$, se tiene entonces $p(\vec{u}) = \vec{u}'$ por consiguiente $p(\vec{u}) = \vec{u}' \iff [\vec{u}' \in D \ \ y \ \ \vec{u} = \vec{u}' \in \vec{A}]$

EJEMPLOS:

1. Sea $\vec{\mathbb{R}}^2$ el plano vectorial; $(\vec{i},\vec{j})$ una base de $\vec{\mathbb{R}}^2$

   Consideremos dos rectas vectoriales $\vec{D}$ y $\vec{A}$ de ecuaciones:

$$\vec{D}: x - 2y = 0,$$

$$\vec{A}: x + y = 0$$

Definamos analíticamente la proyección p de $\mathbb{R}^2$ sobre $\vec{D}$ paralelamente a $\vec{A}$.

PROCEDIMIENTO:

Sea $\vec{u}\binom{x}{y}$ y $\vec{u}'\binom{x'}{y'}$ su proyección bajo p, es decir $\vec{u}' = p(\vec{u})$ (Ver Fig. 4.3).

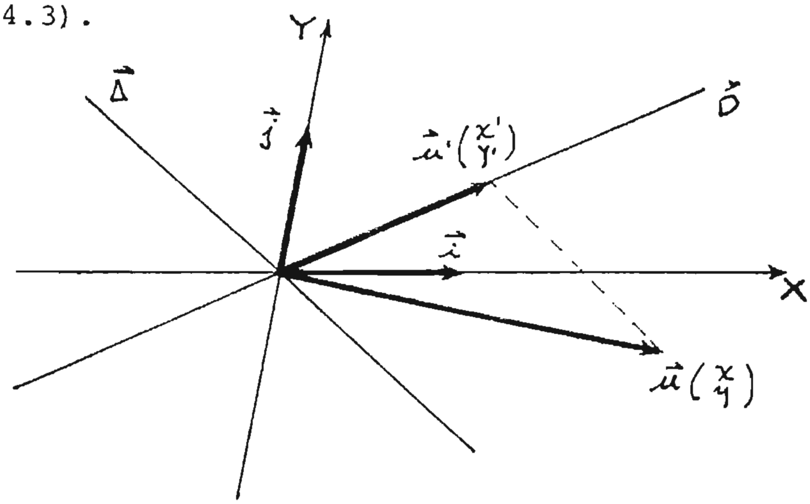


Fig. 4.3

Se tiene que:

$$\vec{u}' \varepsilon \vec{D} \quad y \quad \vec{u} - \vec{u}' \varepsilon \vec{A}$$

Como $\vec{u}' \varepsilon \vec{D}$ podemos escribir que $x' - 2y' = 0$ ①

Por otra parte tenemos que el vector $\vec{u} - \vec{u}'$ tiene por coordenadas $\vec{u}-\vec{u}' = \binom{x - x'}{y - y'}$ y como $\vec{u} - \vec{u}' \varepsilon \vec{A}$ podemos escribir

$(x - x') + (y - y') - 0$ es decir $x' + y' = x + y$ ②

De las igualdades ① y ② obtenemos inmediatamente

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}(x + y) \\ y' = \frac{1}{3}(x + y) \end{cases}$$

2. Sea $\vec{\mathbb{R}}^2$ el plano vectorial y $(\vec{i},\vec{j})$ una base de $\vec{\mathbb{R}}^2$

Consideremos la aplicación f de $\vec{\mathbb{R}}^2$ a $\vec{\mathbb{R}}^2$ definida analíticamente por: $f: \vec{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \vec{\mathbb{R}}^2$

$$(x,y) \rightsquigarrow (x',y'), \text{ con } x' = \frac{3}{8}(2x+y),$$

$$y' = \frac{1}{4}(2x+y).$$

<u>Determinemos</u>

a) El conjunto de vectores invariantes por f.

b) El núcleo de f.

c) Demostremos que f es una proyección sobre una recta - vectorial

PROCEDIMIENTO

a) Un vector $\vec{u}\binom{x}{y}$ es invariante por f si y solamente si - $f(\vec{u}) = \vec{u}$, es decir si:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{8}(2x + y) \\ y = \frac{1}{4}(2x + y) \end{cases}$$

$$\text{Como } \begin{cases} x = \frac{3}{8}(2x + y) \\ y = \frac{1}{4}(2x + y) \end{cases} \Longleftrightarrow 2x - 3y = 0$$

Resulta entonces que el conjunto de vectores invariantes por f es la recta vectorial de ecuación $2x - 3y = 0$.

Designemos por $\vec{D}$ esta recta vectorial, es decir:

$$\vec{D}: 2x - 3y = 0$$

b) Un vector $\vec{u}\binom{x}{y}$ pertenece al núcleo de f sí y solamente si $f(\vec{u}) = \vec{0}$, es decir sí y solamente sí

$$\begin{cases} \frac{3}{8}\ (2x + Y) = 0 \\ \frac{1}{4}\ (2x + y) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Como} \begin{cases} \frac{3}{8}\ (2x + y) = 0 \\ \frac{1}{4}\ (2x + y = 0 \end{cases} \iff 2x + y = 0$$

Resulta entonces que el núcleo de f es la recta vectorial de ecuación $2x + y = 0$. Designemos por $\vec{A}$ esta recta vectorial es decir, $\vec{A}: 2x + y = 0$

c) Si la aplicación f es una proyección sobre una recta vectorial, f es la proyección sobre $\vec{D}$ paralelamente a $\vec{A}$.

Demostraremos que para todo vector $\vec{u}\binom{x}{y}$, se tiene que:

$$f(\vec{u}) \in \vec{D} \quad y \quad \vec{u} - f(\vec{u}) \in \vec{A}$$

El vector $f(\vec{u})$ tiene por coordenadas $\frac{3}{8}(2x + y)$, $\frac{1}{4}(2x + y)$ y D: $2x - 3y = 0$, sustituyamos las coordenadas de $f(\overline{u})$ en D e inmediatamente constamos que:

$$2\left[\frac{3}{8}(2x + y)\right] - 3\left[\frac{1}{4}(2x + y)\right] = 0$$

lo que prueba que $f(\vec{u})$ pertenece a $\vec{D}$.

De la misma manera probemos que el vector $\vec{u} - f(\vec{u}) \varepsilon \vec{A}$.

El vector $\vec{u} - f(\vec{u})$ tiene por coordenadas $\frac{1}{8}(2x - 3y)$, $\frac{1}{4}(-2x + 3y)$ y A: $2x + y = 0$, sustituyendo las coordenadas de $\vec{u} - f(\vec{u})$ en $\vec{A}$ inmediatamente podemos constatar que:

$$2\left[\frac{1}{8}(2x - 3y)\right] + \left[\frac{1}{4}(-2x + 3y)\right] = 0$$

Lo que prueba que $\vec{u} - f(\vec{u})$ pertenece a $\vec{A}$

EJERCICIOS 4.2

1. Sea el plano $\mathbb{R}^2$ $(0,\vec{i},\vec{j})$ un referencia de $\mathbb{R}^2$, determinar analíticamente, en los casos siguientes, la proyección sobre D paralelamente a la recta vectorial $\vec{\Delta}$ de base $\vec{u}$:

   a) D: $2x + y - 3 = 0$, $\vec{u}\binom{2}{-1}$

   b) D: $3x - 2y + 1 = 0$, $\vec{u}\binom{1}{1}$

   c) D: $y = 0$, $\vec{u}\binom{0}{1}$

   d) D: $x - y = 0$, $\vec{u}\binom{1}{-1}$

2. Repetir el ejercicio anterior en los casos siguientes donde D y Δ estan definidos en forma cartesiana

   a) D: $5x + 3y - 2 = 0$, Δ: $3x - y = 0$

   b) D: $x = 0$, Δ: $y = 0$

   c) D: $x + y + 1 = 0$, Δ: $x - y = 0$

   d) D: $ax + by + c = 0$, Δ: $\alpha x + \beta y + k = 0$

3. Sea p una aplicación definida analíticamente de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$

..

demostrar en los casos siguientes que p es la proyección sobre D, paralelamente a una recta vectorial $\overline{\Delta}$ dotada de una base.

a) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -5x - 3y - 3 \\ y' = 10x + 6y + 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(3x + y + 1) \\ y' = \frac{1}{4}(3x + y - 3) \end{cases}$ d) $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(5x - 5y + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - 26 + 2) \end{cases}$

4. Sea D y Δ dos rectas secantes del plano $\mathbb{R}^2$. A todo punto M de $\mathbb{R}^2$, se le asocia el punto M', proyección de M sobre D paralelamente a Δ y al punto M", proyección de M sobre Δ paralelamente a D.

   1º Sea A un punto de $\mathbb{R}^2$, determinar el conjunto de pun-- tos M tales que los puntos A, M' y M" son alineados

   2º Sea u un vector no nulo, determinar el conjunto de pun tos M tales que los vectores $\overrightarrow{M'M''}$, $\vec{u}$ son linealmente - dependientes.

5. Sea D,D',D" tres rectas de $\mathbb{R}^2$ secantes de dos y I un pun to de D. A todo punto M de $\mathbb{R}^2$, se asocia el punto M', - proyección de M sobre D paralelamente a D', el punto M", proyección de M sobre D paralelamente a D".

   1º Determinar el conjunto de puntos M tales que I sea el punto medio de (M',M")

ACTIVIDAD 4.8

Objetivo

Que el Alumno:

1. Definida la proyección puntual p sobre una recta D paralelamente a una recta A y π la proyección vectorial sobre $\vec{D}$ paralelamente a $\vec{A}$, comprueba que para todo bipunto (M,N) de transformado (M',N') por p: $\overrightarrow{M'N'} = \pi(\overrightarrow{MN})$

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala adecuada 1 = 1cm.
- Sea p: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección puntual de $\mathbb{R}^2$ sobre D - paralelamente a $\vec{A}$, tal que p(x,y) = (x',y') con

$$x' = -5x - 3y - 3 \quad , \quad y' = 10x + 6y + 5$$

- Sea π: $\vec{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \vec{\mathbb{R}}^2$ la proyección vectorial de $\vec{\mathbb{R}}^2$ sobre $\vec{D}$ paralelamente a $\vec{A}$, tal que π(x,y) = (x',y'), con

$$x' = -5x - 3y, \; y' = 10x + 6y$$

- Toma M(1,2), N(3,4) puntos de $\mathbb{R}^2$
- Determina p(M), p(N), e identifícalos como M',N', respectivamente.
- ¿Son las coordenadas de M'(-14,27) y N'(-30,59)? si ___ no ___
- Determina gráfica y analíticamente las coordenadas del vec

tor $\overrightarrow{MN}$, e identifícalo como $\vec{u}$.

- ¿Fue tu resultado $\vec{u}(2,2)$? si ___ no ___
- Determina $\pi(\vec{u})$, e identifícalo como $\vec{v}$
- ¿Fue tu resultado $\vec{v}(-16,32)$? si ___ no ___
- Determina gráfica y analíticamente las coordenadas del vec tor $\overrightarrow{M'N'}$ e identifícalo como $\vec{u}'$
- ¿Fue tu resultado $\vec{u}'(-16,32)$? si ___ no ___
- Compara los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{v}$
- ¿Qué concluyes? ______________________________

EXPOSICION:

Sean D y A dos rectas secantes incluidas en el plano P, de dirección $\vec{D}$ y $\vec{A}$, respectivamente.

Las rectas vectoriales $\vec{D}$ y $\vec{A}$ son distintos (sino las rec-- tas D y A serían paralelas).

Designemos por p la proyección de P sobre D paralelamente a A y por π la proyección del plano vectorial $\vec{P}$ sobre la recta vectorial $\vec{D}$ paralelamente a $\vec{A}$, para distinguir estas dos proyecciones, diremos que la primera, p, es una proyec ción puntual y la segunda π, es una proyección vectorial.

* Sean M y N dos puntos del plano P de transformados M' y N' respectivamente por p.

  Los puntos M', N' pertenecen a la recta D de dirección - $\vec{D}$, se tiene:

$$\overrightarrow{M'N'} \in \vec{D}$$

* Si almenos uno de los puntos M y N pertenecen a la recta D,M por ejemplo (Fig. 4.4), se tiene:

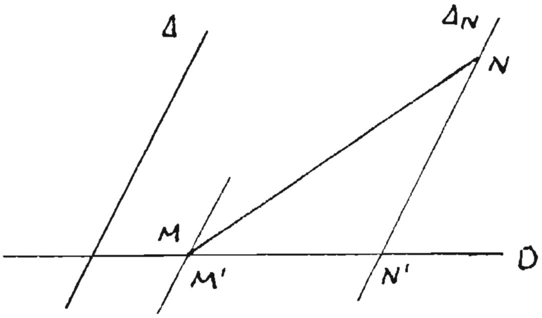


Fig. 4.4

a: $M' = M$, lo que implica

$$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MN'} = \overrightarrow{N'N}$$

Los puntos N', N pertenecen a la recta Δ_N que es paralela a Δ lo que quiere decir es que de dirección $\vec{\Delta}$, se tiene:

$$\overrightarrow{N'N} \in \vec{\Delta}$$

Podemos escribir

$$\overrightarrow{M'N'} \in \vec{D} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'} \in \vec{\Delta}$$

Como π es la proyección del plano vectorial $\vec{P}$ sobre la recta vectorial $\vec{D}$, se prueba que:

$$\pi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$$

* Si almenos uno de los puntos M,N no pertenecen a la recta D, consideremos un punto A que pertenece a la recta D (Fig. 4.5)

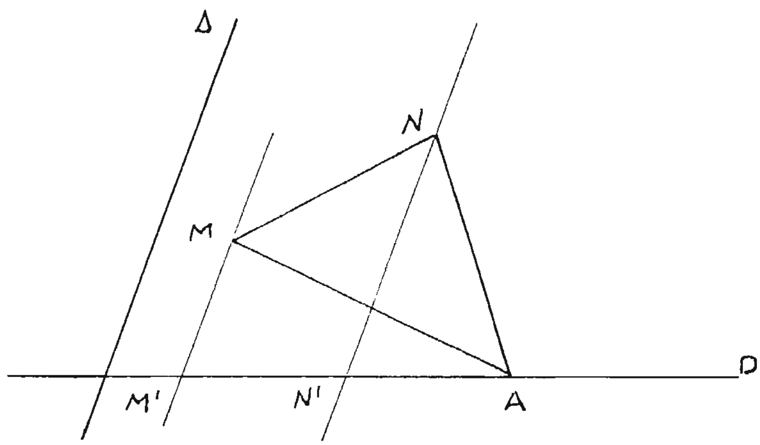


Fig. 4.5

Se tiene entonces:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$$

lo que implica que, π es lineal

$$(\overrightarrow{MN}) = \pi(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = \pi(\overrightarrow{AN}) - \pi(\overrightarrow{AM})$$

por otra parte, el estudio precedente nos permite afirmar:

$$\pi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM'} \quad y \quad \pi(\overrightarrow{AN}) - \overrightarrow{AN'}$$

Resulta entonces que:

$$\pi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{AN'} - \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{M'N'}$$

TEOREMA 4.1

Sean D y Δ dos rectas secantes del plano P, de dirección respectiva $\vec{D}$ y $\vec{\Delta}$; p la proyección puntual sobre D paralelamente a Δ y π la proyección vectorial sobre $\vec{D}$ paralelamente a $\vec{\Delta}$, se tiene, para todo bipunto (M,N) de transformado (M',N') por p:

$$\overrightarrow{M'N'} = \pi(\overrightarrow{MN})$$

ACTIVIDAD 4.9

Objetivo

Que el Alumno:

1. Dada una proyección p induzca en la prueba del teorema de Thales.

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia, $(O,\vec{i},\vec{j})$ y una escala adecuada 1 = 1cm.
- Sea p: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación, tal que $p(x,y) = (x',y')$ - con $x' = \frac{1}{3}(5x - 5y + 2)$ $y' = \frac{1}{3}(2x - 2y + 2)$.
- ¿Es p una proyección? si ___ no ___ ¿por qué? ____________
- Toma A(1,-1), B(4,-6), C(-2,4) puntos de $\mathbb{R}^2$
- Ubica A,B y C en el plano
- ¿Son A,B, y C colineales? si ___ no ___
- Determina las coordenadas de $\overrightarrow{AC}$
- ¿Fue tu resultado $\overrightarrow{AC}(-3,5)$? si ___ no ___
- Determina las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$
- ¿Fue tu resultado $\overrightarrow{AB}(3,-5)$? si ___ no ___
- Encuentra el valor α, tal que cumpla la relación

$$\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$$

- Encuentra p(A), p(B) y p(C), e identifícalos como A', B', y C', respectivamente.
- ¿Fue tu resultado A'(4,2), B'$(\frac{52}{3}, \frac{22}{3})$, C'$(\frac{-28}{3}, \frac{10}{3})$? si ___ no ___
- Determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{A'C'}$
- ¿Fue tu resultado $(\frac{-40}{3}, \frac{-16}{3})$? si ___ no ___
- Determina las coordenadas de A'B'$(\frac{-40}{3}, \frac{16}{3})$
- Encuentra el valor α_1, tal que cumpla con la relación

..

$$\overrightarrow{A'C'} = \alpha_1 \overrightarrow{A'B'}$$

- Compara los valores de α y α_1
- ¿Qué concluyes? ______________________________

EXPOSICION

Sean tres puntos A,B,C del plano $\underline{P}$ tal que:

$$\exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$$

Los tres puntos A,B,C se proyectan sobre una recta D paralelamente a una recta Δ en tres puntos A', B', C' (Fig. 4.6)

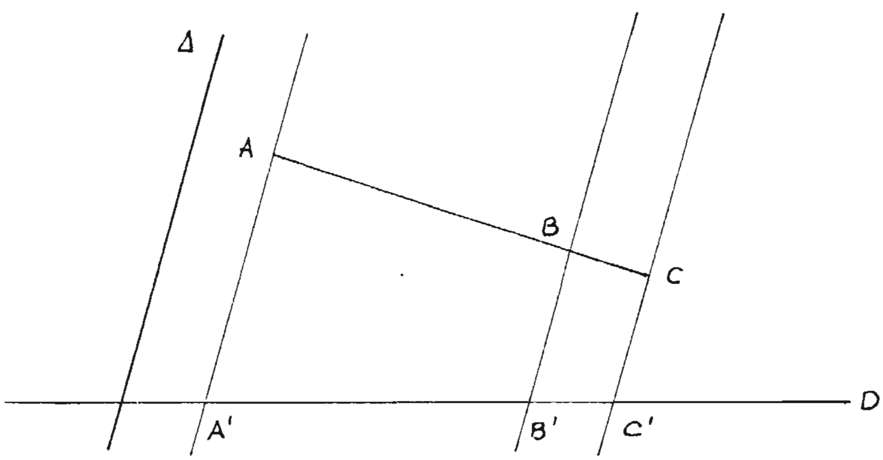


Fig. 4.6

$\vec{D}$ y $\vec{\Delta}$ son las direcciones respectivas de las rectas D y Δ y π la proyección vectorial sobre $\vec{D}$ paralelamente a $\vec{\Delta}$, se tiene:

$$\overrightarrow{A'B'} = \pi(\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{A'C'} = \pi(\overrightarrow{AC})$$

Como $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$ y la aplicación π es lineal, se tiene entonces:

$$\pi(\overrightarrow{AC}) = \pi(t\overrightarrow{AB}) = t\pi(\overrightarrow{AB})$$

resulta entonces $\overrightarrow{A'C'} = t\overrightarrow{A'B'}$

<u>Teorema de Thales</u>:

Tres puntos A,B,C tales que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$ se proyectan respectivamente sobre una recta D paralelamente a una recta Δ en tres puntos A', B', C' tales que:

$$\overrightarrow{A'C'} = t\overrightarrow{A'B'}$$

EJERCICIOS 4.3

1. Sean A,B,C tres puntos no alineados; M y M' dos puntos que pertenecen respectivamente a las rectas AB y AC, demuestra la equivalencia de los siguientes enunciados:
   a) La recta MM' es paralela a la recta BC;
   b) $\exists\ t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AM'} = t\overrightarrow{AC}$

2. Demuestra que si se tienen dos puntos A y B que se proyectan sobre una recta D paralelamente a una recta Δ en dos puntos A' y B', el punto medio (A,B) se proyecta en el punto medio del bipunto (A',B').

C A P I T U L O   V

TRASLACIONES Y SIMETRIAS

ACTIVIDAD 5.1

Objetivo

Que el Alumno:

1. Adquiera la noción de traslación vectorial.

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$
- Sea $f: \vec{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \vec{\mathbb{R}}^2$ una aplicación tal que

$$f(x,y) = (x + 4, y + 5)$$

- Sea $M(3,2)$, $N(-1,4)$, $P(a,b)$ puntos de $\mathbb{R}^2$
- Ubica en el plano los puntos M,N.
- Determina $f(M)$ y $f(N)$ e identifícalos como M', N', respectivamente.
- Ubica en el plano M' y N'.
- Determina gráficamente y por pares ordenados las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{MM'}$ y $\overrightarrow{NN'}$
- Determina $f(P)$, e identifícalo como P'.
- Determina gráficamente y por pares ordenados las coordenadas de $\overrightarrow{PP'}$
- Compara entre sí $\overrightarrow{MM'}$, $\overrightarrow{NN'}$ y $\overrightarrow{PP'}$.
- Determina $\overrightarrow{M'M}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NN'}$, $\overrightarrow{M'N'}$.

- Efectúa $\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}$
- Compara tu resultado con $\overrightarrow{M'N'}$
- Compara $\overrightarrow{M'N'}$ con $\overrightarrow{MN}$. ¿cómo son?
- ¿Qué concluyes? ______________________________

ESPOSICION: *RRASLACION VECTORIAL*

Sea $\vec{u}$ un vector del plano vectorial $\vec{E}$.

Llamaremos traslación vectorial de vectores $\vec{u}$, y la denotaremos como $t_{\vec{u}}$: a la aplicación de E en E que a todo punto M de E, asocia el punto M', tal que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, es decir:

$$t_{\vec{u}}: \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ M \rightsquigarrow M' \end{array} \text{ de donde } \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

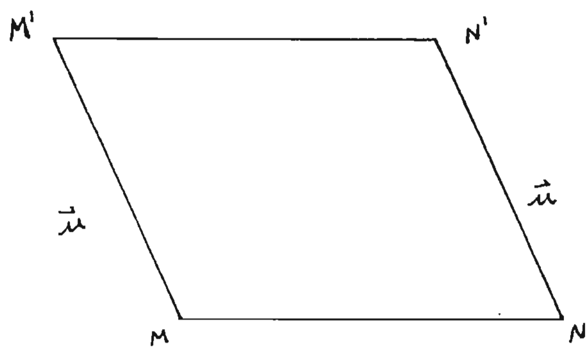


Fig. 5.1

ACTIVIDAD 5.2

Objetivo

Que el alumno:

1. Verifique que las traslaciones conservan la distancia

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala adecuada $1 = 1\text{cm}$.
- Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación tal que:
  $(x,y) \rightsquigarrow (x+1,\ y+2)$
- Verifica que f es una traslación vectorial.
- Toma $\vec{v}_1(6,8)$, $\vec{v}_2(\overrightarrow{3,4})$ vectores de $\mathbb{R}^2$
- Determina gráfica y analíticamente la distancia de $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$, e identifícalo como d_1.
- ¿Fue tu resultado $d_1 = \sqrt{(6-3^2 + (8-4)^2}$?
- Determina $f(\vec{v}_1)$, $f(\vec{v}_2)$, e identifícalo como $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$
- ¿Fue tu resultado $\vec{v}_1'(7,10)$ y $\vec{v}_2'(4,6)$?
- Determina gráfica y analíticamente la distancia de $\vec{v}_1'$ a - $\vec{v}_2'$, e identifícala como d_2
- ¿Fue tu resultado $d_2 = \sqrt{(7,-4)^2 + (10-6)^2}$?
- Compara las distancias d_1 y d_2. Explica tu resultado______
- ¿Que concluyes? ______________________________

EXPOSICION: *CONSERVACION DE LA DISTANCIA DE TRASLACIONES*
Se tiene: $$M \longrightarrow M' \qquad N \rightsquigarrow N'$$ por la traslación $t_{\vec{u}}$. Es decir $\overrightarrow{M'M} = \vec{u}$, $\overrightarrow{N'N} = \vec{u}$ para todo M,N. De lo anterior: $$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}$$ $$\overrightarrow{M'N'} = \vec{u} + \overrightarrow{MN} + (-\vec{u})$$ $$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$$ De donde $\lVert\overrightarrow{M'N'}\rVert = \lVert\overrightarrow{MN}\rVert$ (1) Recordemos que la distancia de MN se determina $\lVert\overrightarrow{MN}\rVert$. En consecuencia (1) significa que la distancia de M' a N' es la misma que la de M a N.

ACTIVIDAD 5.3

Objetivos

Que el Alumno:

1. Dada una función f verifique si es o no una traslación.
2. Verifique que las traslaciones conservan la ortogonalidad

PROCEDIMIENTO

* Sea f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función, tal que:

$f(x,y) = (x + 3, y + 4)$

- Verifica que f es una traslacion
- Sea A(4,6), B(7,6), C(4,8) puntos de $\mathbb{R}^2$
- Determina gráficamente y por pares ordenados el vector $\overrightarrow{AB}$, e identifícalo como $\vec{v}_1$
- ¿Fue tu resultado $\vec{v}_1(3,0)$?
- Determina gráficamente y por pares ordenados el vector $\overrightarrow{AC}$, e identifícalo como $\vec{v}_2$.
- ¿Fue tu resultado $\vec{v}_2(0,2)$?
- Con ayuda del transportador determina $\widehat{CAB}$, e identifícalo como Θ
- ¿Fue tu resultado $\Theta = 90°$?
- Determina $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$
- ¿Fue tu resultado igual a cero?
- ¿Podrías afirmar que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son perpendiculares?
- Determina f(A), f(B), f(C), e identifícalos como A', B', - C', respectivamente.
- Determina gráficamente y por pares ordenados el vector $\overrightarrow{A'B'}$, e identifícalo como $\vec{v}_1'$
- Determina gráficamente y por pares ordenados el vector $\overrightarrow{A'C'}$, e identifícalo como $\vec{v}_2'$
- Con ayuda del transportador determina el valor del ángulo

$\widehat{C'A'B'}$, e identifícalo como Θ_1

- Compara el valor de Θ con Θ_1
- Determina $\langle \vec{v}_1', \vec{v}_2' \rangle$
- Compara tu resultado con $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$
- ¿Que concluyes? ______________________________

EXPOSICION: *CONSERVACION DE ORTOGONALIDAD DE LAS TRASLACIONES.*

Aplicando la traslación $t_{\vec{u}}$ a los puntos M, N, P y S de E, tenemos:

$$M \longrightarrow M'$$
$$N \longrightarrow N'$$
$$P \longrightarrow P'$$
$$S \longrightarrow S'$$

Es decir:

$$\|\overrightarrow{M'N'}\| = \|\overrightarrow{MN}\|, \quad \|\overrightarrow{P'S'}\| = \|\overrightarrow{PS}\| \quad (1)$$

$$\langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PS} \rangle = \|\overrightarrow{MN}\| \, \|\overrightarrow{PS}\| \cos \Theta$$

$$\langle \overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'S'} \rangle = \|\overrightarrow{M'N'}\| \, \|\overrightarrow{P'S'}\| \cos \beta \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2), tenemos:

$$\langle \overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'S'} \rangle = \|\overrightarrow{MN}\| \, \|\overrightarrow{PS}\| \cos \beta \quad (3)$$

De (3) tenemos que: $\cos \Theta = \cos \beta$

$$\therefore \quad \Theta = \beta \quad \text{ó} \quad \Theta = -\beta$$

ACTIVIDAD 5.4

Objetivo

Que el Alumno:

1. Dada una función f.

   a) Verifique que se trata de una traslación

   b) Verifique que f conserva el baricentro de una familia de puntos ponderados.

PROCEDIMIENTO

Primera Parte

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala adecuada $1 = 1\text{cm}$.
- Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación tal que:

  $(x,y) \rightsquigarrow (x + 2,\ y + 5)$
- Verifica que f es una traslación
- Toma los puntos A(-2,-2), B(-1,7), C(5,1) y ubicalos en el plano $\mathbb{R}^2$.
- Une los puntos con segmentos de rectas
- Asignale al punto A peso 2; al punto B peso 1 y al punto C peso 2.
- Encuentra algebraicamente el baricentro G de los puntos - ponderados (A,2); (B,1) y (C,2).

$$(\text{Ayuda: } 2\overrightarrow{GA} + 1\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0})$$

- ¿Tiene el punto G las coordenadas (1,1)? si ___ no ___

Segunda Parte

- Determina f(A), f(B), f(C) y f(G) e identifícalos como A', B', C', y G', respectivamente.
- Ubica los puntos A', B', C' en el mismo plano
- Une los puntos con segmentos de rectas
- Asígnale al punto A' peso 2, al punto B' peso 1 y al punto C peso 2.
- Encuentra algebraicamente el baricentro G_1 de los puntos ponderados (A',2); (B',1), y (C',2)

$$(\text{Ayuda: } 2\overrightarrow{G_1A'} + 1\overrightarrow{G_1B'} + 2\overrightarrow{G_1C'} = \vec{0})$$

- ¿Tiene el punto G_1 las coordenadas (3,6)? si ___ no ___

Tercera Parte

- Gráficamente encuentra el baricentro G_2 entre A' y B'.
- Gráficamente encuentra el baricentro G_3 entre G_2 y C'
- Determina las coordenadas de G_3
- ¿Tiene G', G_1 y G_3 las mismas coordenadas? si ___ no ___

  Explica tu resultado ______________________________
- ¿Qué concluyes? ______________________________

EJERCICIOS 5.1

1. Diga en los casos siguientes, si la aplicación f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es una traslación:

a) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y) = (x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{3})$

b) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y) = (x - 3y, 2x - 6y)$

c) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y) = (x - \frac{2}{3}, y - 8)$

d) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y) = (x^2, y^2)$

e) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y) = (y,x)$

2. Sea f una aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que

   $\forall M \in \mathbb{R}^2$ y M' su transformado por f se cumple que
   $\overrightarrow{MM'} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

   Determina analíticamente f.

3. Sea g una aplicación de $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ en $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ tal que $\forall M \in \overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ y M' su transformado por f se cumple $\overrightarrow{MM'} = (-2,-3)$

   a) Determina analíticamente g.

   b) Toma $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de $\mathbb{R}^2$ y verifica que $d(\vec{v}_1,\vec{v}_2) = d(\vec{v}_1',\vec{v}_2')$, con $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$ los transformados de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ por g.

4. Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\overrightarrow{MM'} = (5,3)$ con M' el trans-- formado por f.

   a) Determina analíticamente f.

   b) Toma A,B,C de $\mathbb{R}^2$ y determina $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

   c) Determina $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$

   d) Mide con un transportador el ángulo $\widehat{CAB}$

   e) ¿Podrias afirmar que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son ortogonales?

ACTIVIDAD 5.6

Objetivo

Que el Alumno:

1. Adquiera la noción de simetría

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala adecuada $1 = 1$cm.
- Sea $S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación tal que:

$$(x,y) \rightsquigarrow (x',y') \text{ con } x' = \frac{1}{7}(-5x - 4y + 12)$$

$$y' = \frac{1}{7}(-6x + y + 6)$$

- Sea $M(2,2)$, $N(2,4)$ puntos de $\mathbb{R}^2$
- Determina $S(M)$ y $S(N)$ e identifícalos como M' y N' respectivamente
- ¿Fue tu resultado $M'(\frac{6}{7}, \frac{-4}{7})$ y $N'(-2, \frac{-2}{7})$?
- Sea D la recta de ecuación $3x + y - 3 = 0$
- Grafica D y M', N' en un mismo plano
- Encuentra el punto medio de M y M', e identifícalo como I_M
- Encuentra el punto medio de N y N', e identifícalo como I_N
- Ubica en el plano I_M y I_N
- ¿Podrias afirmar que I_M y I_N pertenecen a la recta D?
- Determina la distancia de I_M a M, e identifícala como d_1
- Determina la distancia de I_M a M', e identifícala como d_2

- Compara d_1 y d_2 ¿Como son? ______________________________

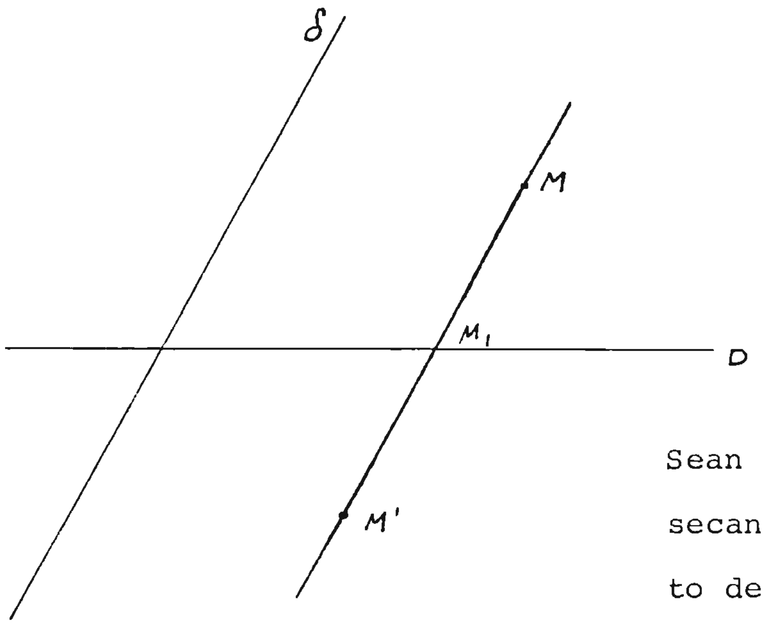
- Determina la distancia de I_N a N, e identifícala como d_3

- Determina la distancia de I_N a N', e identifícala como d_4

- Compara d_3 y d_4 ¿cómo son? ______________________________

- ¿Qué concluyes? ______________________________

EXPOSICION: *SIMETRIA RESPECTO A UNA RECTA EN UNA DIRECCION DADA*



Sean D y δ dos rectas secantes. Sea M un punto del plano. Denominamos simétrico de M respecto a D en la dirección δ al punto M' tal que:

- $\overrightarrow{MM'}$ pertenece a la recta vectorial $\vec{\delta}$
- El punto medio del segmento MM' pertenece a D.

$$S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$M \rightsquigarrow S(M) = M'$$

Cuando δ y D son ortogonales la simetría S se dice que es una simetría ortogonal.

ACTIVIDAD 5.7

Objetivos

Que el Alumno:

Definida una aplicación S de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$

1. Determine el conjunto de puntos invariantes por S.
2. Demuestre que para todo punto M de transformado M' por S
   a) El punto medio de M y M' pertenece al conjunto de puntos invariantes.
   b) El vector $\overrightarrow{MM'}$ pertenece a una recta vectorial fija $\vec{\Delta}$
3. Concluya que S es un simetría

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala adecuada $1 = 1\text{cm}$.
- Sea $S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación tal que $S(x,y) = (x',y')$ con $x' = x$, $y' = -y + 2$
- Determina el conjunto de puntos invariantes por S, e identifícalo como D.

- ¿Fue tu resultado $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 1\}$?
- Grafica D en el plano
- Toma $M(0,2)$ y $N)x,y)$ de $\mathbb{R}^2$
- Determina $S(M)$, $S(N)$, e identifícalos como M' y N', respectivamente
- Determina el punto medio entre M y M', e identifícalo como P(M)
- Determina el punto medio entre N y N', e identifícalo como P(N)
- ¿Los puntos P(M) y P(N) son invariantes por S? si ___ no ___
- Determina gráfica y analíticamente los vectores $\overrightarrow{MM'}$, $\overrightarrow{NN'}$ e identifícalos como $\vec{u}$ y $\vec{v}$, respectivamente
- ¿Podrías afirmar que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ pertenece a la recta $\vec{\Delta}$: $x = 0$?
- ¿Podrías concluir que la aplicación S es una simetría con respecto a D paralelamente a Δ?

<u>Ejemplo</u>

Sea $S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una simetría de ejes tal que:

$$(x,y) \rightsquigarrow (x',y') \text{ con } x' = \frac{1}{3}(x+4y-4),\ y' = \frac{1}{3}(2x-y+4)$$

a) Determinemos el conjunto de puntos invariantes por S.

Un punto $M\binom{x}{y}$ es invariante por S sí y solamente sí:

$$x = \frac{1}{3}(x + 4y - 4)$$

$$y = \frac{1}{3}(2x - y + 4)$$

$$\text{Como} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3}(x + 4y - 4) \\ \\ y = \frac{1}{3}(2x - y + 4) \end{cases} \iff x - 2y + 2 = 0$$

Resulta entonces que el conjunto de puntos invariantes por S.

Es la recta D de ecuación D: $x - 2y + 2 = 0$ (Fig. 5.3)

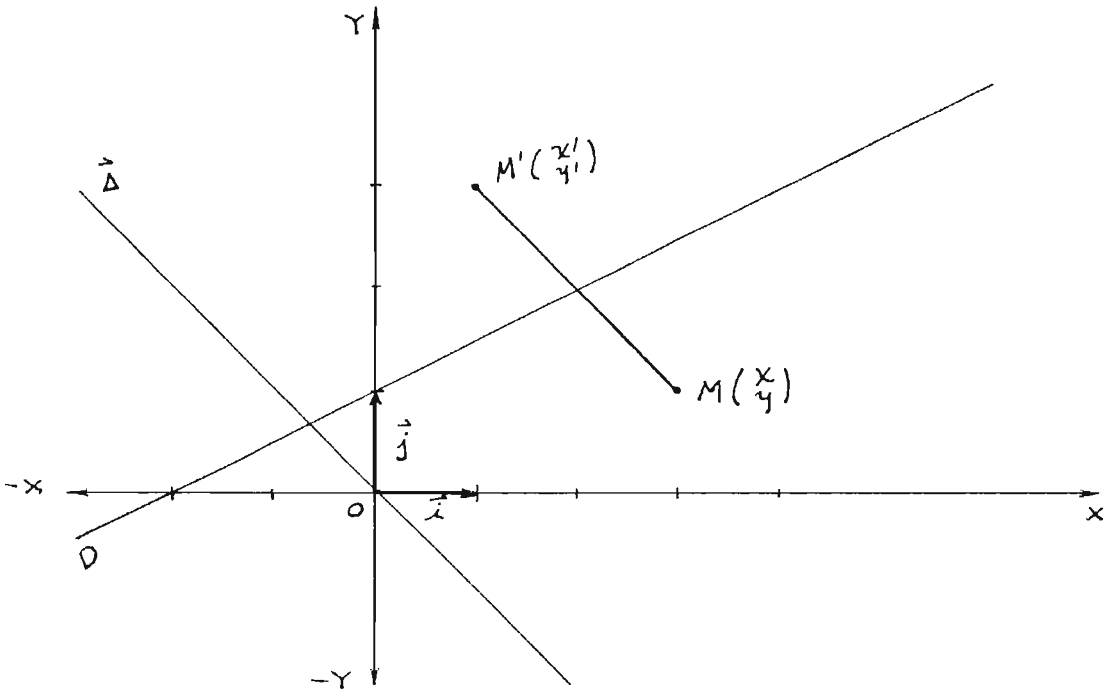


Fig. 5.3

b) Para todo punto $M\binom{x}{y}$ de transformado $M'\binom{x'}{y'}$, el punto medio P(M) de los puntos M y M' tiene por coordenadas:

$$\frac{1}{2}(x + x') = \frac{2}{3}(x + y - 1), \ \frac{1}{2}(y + y') = \frac{1}{3}(x + y + 2)$$

Mostremos que P(M) pertenece a la recta D

$$D;\ x - 2y + 2 = 0$$

$$\left[\frac{2}{3}(x + y - 1)\right] - 2\left[\frac{1}{3}(x + y + 2)\right] + 2 = 0$$

c) Demostremos que, para todo punto $M\binom{x}{y}$ de transformado - $M'\binom{x'}{y'}$, el vector $\overrightarrow{MM'}$ pertenece a una recta vectorial fija $\overline{\Delta}$.

El vector $\overline{MM'}$ tiene por coordenadas:

$$x' - x = \frac{1}{3}(x + 4y - 4) - x = \frac{2}{3}(-x + 2y - 2),$$

$$y' - y = \frac{1}{3}(2x - y + 4) - y = \frac{2}{3}(x - 2y + 2),$$

Se tiene entonces $x' - x = -(y' - y)$.

Resulta que el vector MM' pertenece a la recta vectorial $\vec{\Delta}$ que tiene por ecuación $\vec{\Delta}$: $x + y = 0$.

El estudio realizado prueba que la aplicación S es la simetría con respecto a la recta D paralelamente a la recta vectorial $\vec{\Delta}$.

ACTIVIDAD 5.8

Objetivo

Que el Alumno:

1. Dadas dos rectas secantes D y Δ, defina analiticamente la simetría S con respecto a D paralelamente a Δ

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$, y una escala adecuada

- Grafica las rectas D: $2x - 3y + 6 = 0$ y $\Delta = 2x - y = 0$ - en un mismo plano.
- Son D y Δ rectas secantes?
- Ubica en el plano el punto $M\binom{x}{y}$ y $M'\binom{x'}{y'}$ su transformado por la simetría S de eje D paralelamente a Δ.
- Traza la recta que pasa por M y M' e identifícala como Δ_M
- Determina un vector direccional de la recta Δ e identifícala como $\vec{u}$
- Determina el valor real t que datisface la relación $\overrightarrow{MM'}=t\vec{u}$
- Determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{MM'}$
- ¿Fue tu resultado $MM' = \binom{x'-x}{y'-y}$?
- Determina las coordenadas del vector $t\vec{u}$
- ¿Fue tu resultado $t\vec{u} = \binom{t}{2t}$?
- Iguala los resultados de los vectores MM' y $t\vec{u}$
- ¿Fue tu resultado $x' = x + t$, $y' = y + 2t$ *?
- Determina el punto medio de M y M', e identifícalo como M_1
- ¿Es M_1 un punto de la recta D: $2x - 3y + 6 = 0$? si ___ no ___ ¿por qué? ______________________________
- Si tu respuesta es sí sustituye el valor de M_1 en D y determina el valor de t.
- ¿Fue tu resultado $t = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y + \frac{3}{2}$? si ___ no ___
- Sustituye el valor de t en *
- ¿Qué concluyes? ______________________________

Ejemplo:

Sea $\mathbb{R}^2$ el plano y su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$, sean D y Δ las rectas de ecuaciones:

$$D:\ 3x + y - 3 = 0$$

$$\Delta:\ x - 2y = 0$$

a) Definamos analíticamente la simetría S con respecto a Δ paralelamente a Δ.

Sea $M\binom{x}{y}$ un punto de $\mathbb{R}^2$ y $M'\binom{x'}{y'}$ su transformado por S (Fig. 5.4)

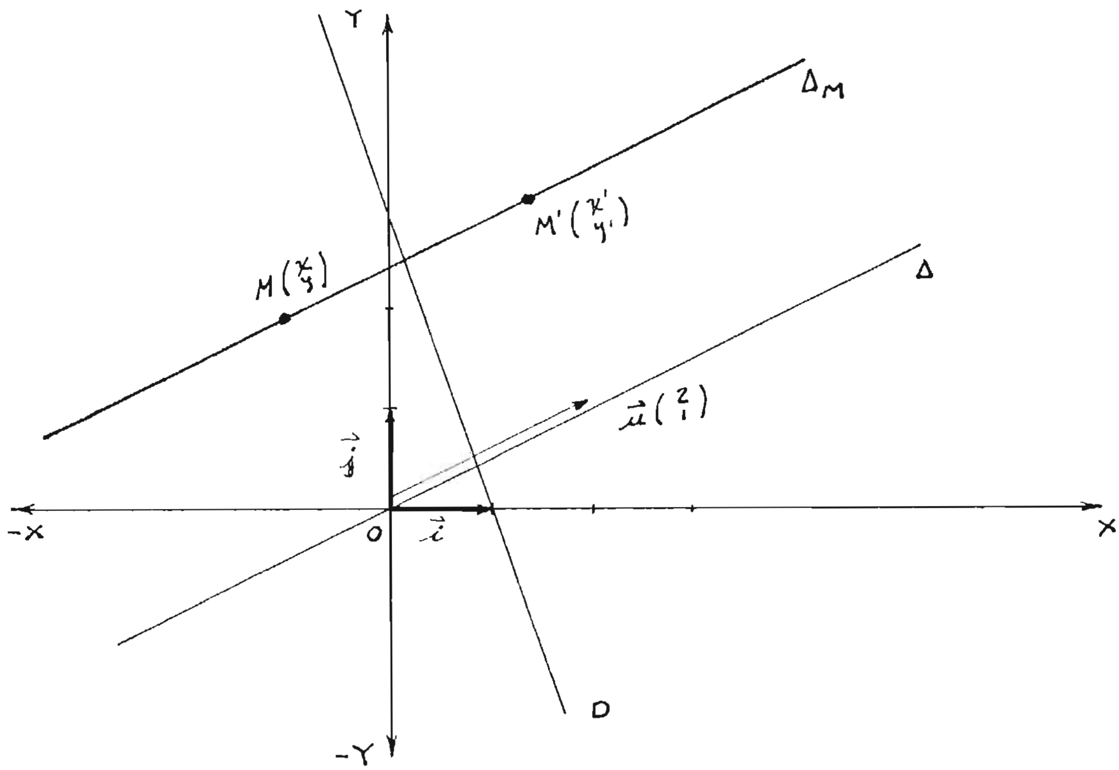


Fig. 5.4

Tomemos un vector direccional $\vec{u} = \binom{2}{1}$ de la recta Δ, y de la recta Δ_M que contiene a M y es paralela a Δ.

Como el punto M' pertenece a la recta $\Delta_{M'}$, existe un real t - tal que:

$$\overrightarrow{MM'} = t\vec{u}$$

es decir tal que $\begin{cases} x' - x = 2t \\ y' - y = t \end{cases}$

Se tiene entonces I= $\begin{cases} x' = x + 2t \\ y' = y + t \end{cases}$

El punto medio de los puntos M y M' tiene por coordenadas

$\frac{1}{2}(x + x') = \frac{1}{2}(x + x + 2t) = x + t$, $\frac{1}{2}(y+y') = \frac{1}{2}(y+y+t) = \frac{1}{2}(2y + t)$

como el punto medio de M y M' pertenece a la recta D de ecuación $3x + y - 3 = 0$, se tiene:

$$3(x + t) + \frac{1}{2}(2y + t) - 3 = 0 \quad (1)$$

De la igualdad (1) podemos obtener el valor de t y operando tenemos:

$$t = -\frac{2}{7}(3x + y - 3)$$

Al sustituir el valor de t en I, obtenemos:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{7}(-5x - 4y + 12) \\ y' = \frac{1}{7}(-6x + 5y + 6) \end{cases}$$

De todo lo anterior concluimos que la simetría S con respecto a D paralelamente a Δ es la aplicación:

$$S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$M \rightsquigarrow M' \quad \text{con } M\binom{x'}{y'} \text{ y } x' = \frac{1}{7}(-5x - 4y + 12)$$
$$y' + \frac{1}{7}(-6x + 5y + 6)$$

EJERCICIOS 5.2

1. Sean A,B,C tres puntos no alineados. Determinar las simetrias de ejes que dejan invariante el conjunto {A,B,C}.

   Demuestra que los ejes de estas simetrias son concurrentes.

2.a) Una recta Δ con dos rectas paralelas D y D' respectivamente en A y A'. Designa por:

   i) S la simetría con respecto a D, paralelamente a Δ.

   ii) S' la simetría con respecto a D', paralelamente a Δ.

   Define la aplicación compuesta $S' \circ S$.

  b) Sea t una traslación de vector $\overline{u}$. Demuestra que existen dos rectas paralelas D y D' y una recta Δ secante a D y secante a D' tales que: $t = S' \circ S$.

3. Sea $\mathbb{R}^2$ el plano $(0,\vec{i},\vec{j})$ un referencial de $\mathbb{R}^2$

Designemos por S la simetría con respecto a una recta D - paralelamente a una recta Δ.

- Defina analíticamente la simetría S en los casos siguientes:

 - Dada una ecuación cartesiana de la recta D y $\vec{u}$ un vector director de la recta Δ:

 a) $x = 0$, $\vec{u}\binom{1}{0}$ c) $y = 0$, $\vec{u}\binom{0}{1}$

 b) $y = 0$, $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$ d) $x - y = 0$, $\vec{u}\binom{-1}{1}$

 e) $ax + by + c = 0$, $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$

4. Sea $\mathbb{R}^2$ el plano $(0,\vec{i},\vec{j})$ un referencial de $\mathbb{R}^2$

Sea S la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida analíticamente por

$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - 1 \end{cases}$$

1º) Determina el conjunto de puntos invariantes por S. - Sea D este conjunto.

2º) Demuestra que para todo punto M de transformado M' - por S:

 a) El punto medio de (M,M') pertenece a D

 b) El vector $\overrightarrow{MM'}$ pertenece a una recta vectorial fija $\vec{\Delta}$ dotada de una base.

3º) Deduce si S es ó no una simetria. Razona tu respuesta.

- Repite el ejercicio anterior en los casos siguientes:

a) $\begin{cases} x' = -x - 3 \\ y' = y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -2x - 3y - 3 \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases}$

- Sea $\mathbb{R}^2$ el plano $(0,\vec{i},\vec{j})$ un referencial de $\mathbb{R}^2$

Designa por D la recta de abcisas, por D' la recta de ordenadas y por Δ la recta de ecuación $x + y - 1 = 0$.

A todo punto M de $\mathbb{R}^2$ se asocia su simétrico M' con respecto a Δ, paralelamente a D y el punto M", simétrico de M con respecto a Δ, paralelamente a D'.

1º) Determina el conjunto de puntos M tales que $\overrightarrow{M'M''} = \vec{i} - \vec{j}$

2º) Demuestra que existe un punto M, y solo uno tal que: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''} = \vec{0}$

- Sean A,B,C tres puntos no alineados. Determina las simetrias de ejes que dejan invariante el conjunto {A,B,C}.

CAPITULO VI

ROTACIONES

ACTIVIDAD 6.1

Objetivo

Que el Alumno:

1. Adquiera la noción de rotación

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\bar{i},\bar{j})$ y una escala adecuada $1 = 1cm$.
- Sea $r: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación tal que:
  $(x,y) \rightsquigarrow (x',y')$,

  con $x' = \frac{1}{2}(x\sqrt{3} + y + 3 - \sqrt{3})$, $y' = \frac{1}{2}(-x + y\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3})$
- Toma $A(-1,1)$, $M(2,4)$, $N(6,5)$ puntos de $\mathbb{R}^2$
- Ubica A,M,N en el plano $\mathbb{R}^2$
- Determina $r(A)$, $r(M)$, $r(N)$, e identifícalos como A',M',N', respectivamente y ubicalos en el plano $\mathbb{R}^2$
- ¿Es A un punto invariante por r?. Explica tu resultado ___
- Determina la distancia de A a M, e identifícala como d_1.
- Determina la distancia de A a M', e identifícala como d_2
- Compara d_1 y d_2, ¿cómo sea? ______________________
- Determina la distancia de A a N, e identifícala como d_3
- Determina la distancia de A a N', e identifícala como d_4
- Compara d_3 y d_4, ¿cómo son? ______________________
- Determina en forma gráfica y por pares ordenados los vecto_

tes $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AM}'$, $\overrightarrow{AN}'$

- Con ayuda del transportador mide el $\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM}'}$, e identifícalo como Θ
- Con ayuda del transportador mide el $\widehat{\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AN}'}$, e identifícalo como Θ_1
- Compara Θ y Θ_1, ¿cómo son? ______________________
- ¿Qué concluyes? ______________________

EXPOSICION: *DEFINICION DE ROTACION*

Llamaremos Rotación de centro A y de ángulo Θ la aplicación que deja invariante A y que a todo punto M distinto de A, asocia el punto M', definido por:

$$d(A,M) = d(A,M') \quad y \quad \widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM}'} = \Theta$$

Como M es distinto de A, su imagen M' es el punto de intercepción de la circunferencia de centro A que pasa por M y de la semirecta At' tal que $\widehat{At,At'} = \Theta$, también At es la semirecta de origen A que contiene a M. (Ver Fig. 6.1).

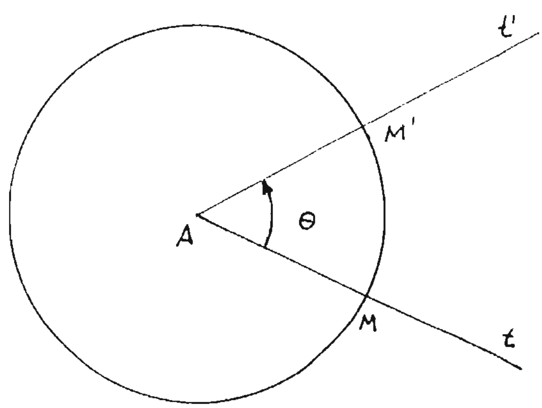


Fig. 6.1

ACTIVIDAD 6.2

Objetivos

Que el Alumno:

1. Dada una aplicación ψ demuestre que se trata de una rotación.
2. Calcule las coordenadas de su centro A.
3. Calcule el ángulo de rotación de ψ.

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$, y una escala adecuada 1 = 1cm.
- Sea ψ: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación tal que:
  $(x,y) \rightsquigarrow (x',y')$, con $x' = -y + 1$, $y' = x + 1$
- Determina el conjunto de puntos invariantes por ψ, e identifícalo como I.
- ¿Fue tu resultado $I = \{A(0,1)\}$? si ___ no ___
- Toma el punto $B\binom{n}{m}$ de $\mathbb{R}^2$, $B \neq A$. Ubica B en el plano.
- Calcula $\psi(B)$, e identifícalo como B'
- ¿Fue tu resultado $B'\binom{-m+1}{n+1}$? si ___ no ___. Ubícalo en el plano
- Calcula gráficamente y por pares ordenados el vector $\overrightarrow{AB}$
- ¿Obtuviste como resultado $\overrightarrow{AB} = \binom{n}{m-1}$? si ___ no ___
- Calcula la $\|\overrightarrow{AB}\|$, e identifícala como <u>a</u>.
- ¿Obtuviste como resultado $a = \sqrt{n^2 + (m-1)^2}$?.

- Calcula gráficamente y por pares ordenados el vector $\overrightarrow{AB}'$.
- ¿Obtuvistes como resultado $\overrightarrow{AB}' = \binom{-m + 1}{n}$? si ___ no ___
- Determina la $\|\overrightarrow{AB}'\|$, e identifícalo como b
- ¿Obtuviste como resultado $b = \sqrt{(-m + 1)^2 + n^2}$?
- Compara a con b, ¿cómo es tu resultado?. Razona tu respuesta ______
- Calcula gráficamente y por pares ordenados el vector $\overrightarrow{BB}'$
- ¿Obtuviste como resultado $\overrightarrow{BB}' = \binom{-m + 1 - n}{n + 1 - m}$? si ___ no ___
- Determina la $\|\overrightarrow{BB}'\|$, e identifícala como c.
- ¿Obtuviste como resultado $c = \sqrt{(-m + 1 - n)^2 + (n + 1 - M)^2}$? si ___ no ___
- Mide con un transportador el ángulo $\Theta = \widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}'}$
- Determina en forma analítica el ángulo $\Theta_1 = \widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}'}$ (Ayuda: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\Theta_1$)
- Compara Θ y Θ_1 ¿cómo son? ¿es $\Theta = \Theta_1 = 90°$? si ___ no ___ explica tu resultado ______
- ¿Qué concluyes? ______

EXPOSICION:

Se tiene que ψ de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ se caracteriza por:

1. ψ tiene un único punto invariante $A(0,1)$
2. $\forall M \neq A$ se tiene $d(A,M) = d(A,M')$, com M' el transformado de M por ψ.
3. $\forall M \neq A$ se tiene $\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM}'} = \Theta = 90°$

En consecuencia, ψ es la rotación de centro $A(0,1)$ y ángulo $\Theta = 90°$

Diremos que g *es la rotación de centro* A *y de ángulo* Θ

Ejemplo:

Toma el plano $\mathbb{R}^2$ y un referencial ortonormal directo $(0,\vec{i},\vec{j})$. Determina analíticamente la rotación r de centro A(-1,2) y - ángulo $\Theta = \frac{\pi}{3}$ rad.

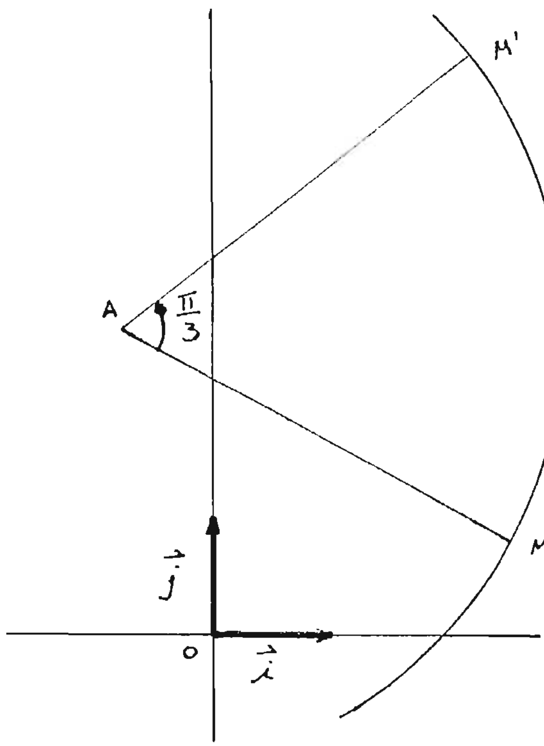


Fig. 6.2

Sea M(x,y), un punto distindo de A, de imagen M'(x',y').

Los vectores $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{AM'}$ tienen por coordenadas

$$AM = \begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \qquad AM' = \begin{cases} X' = x' + 1 \\ Y' = y' - 2 \end{cases}$$

Además, $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{AM}'\|$ y $\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM}'} = \frac{\pi}{3}$ rad.

Hagamos: $\rho = \|\overrightarrow{AM}\|$ y $\alpha = \widehat{i,\overrightarrow{AM}}$

Se tiene entonces:

$$\rho = \|\overrightarrow{AM}'\| \text{ y } \widehat{i,\overrightarrow{AM}'} = \widehat{\vec{i},\overrightarrow{AM}} + \widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM}'}$$
$$= \alpha + \frac{\pi}{3}$$

Luego, tenemos como resultado:

$$(I) \begin{cases} X = \rho\cos\alpha \\ Y = \rho\,\text{sen}\,\alpha \end{cases} \qquad \text{y (II)} \begin{cases} X' = \rho\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) \\ Y' = \rho\,\text{sen}(\alpha + \frac{\pi}{3}) \end{cases}$$

Escribamos (II) aplicando la propiedad del coseno de la suma de ángulos.

$$(II) \begin{cases} X' = \rho(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3} - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}) \\ \quad = \frac{1}{2}\rho\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\,\text{sen}\,\alpha \\ Y' = \rho(\text{sen}\,\alpha\cos\frac{\pi}{3} + \cos\alpha\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}) \\ \quad = \frac{1}{2}\rho\,\text{sen}\,\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\cos\alpha \end{cases}$$

Sustituyendo I en II obtenemos III

$$(III) \begin{cases} X' = \frac{1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}Y \\ Y' = \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y \end{cases}$$

Sustituyendo en (III) X', Y', X, Y por x' + 1, y' - 2, x + 1, y -2, Obtemenos:

$$\begin{cases} x' + 1 = \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y - 2) \\ y' - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x + 1) + \frac{1}{2}(y - 2) \end{cases} \quad ó \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \frac{-\sqrt{3}}{x}y - \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{cases}$$

ACTIVIDAD 6.3

Objetivos

Que el Alumno:

1. Determine analíticamente la rotación r, conociendo el centro y el ángulo de la rotación.
2. Saque conclusiones de los gráficos.

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$, y una escala adecuada 1=1cm.
- Sean $A(0,\sqrt{3})$ y $\Theta = \frac{\pi}{6}$ el centro y el ángulo de la rotación r, respectivamente.
- Toma $M\binom{x}{y}$ un punto de $\mathbb{R}^2$ y $M'\binom{x'}{y'}$ su transformado por r.
- Determina los vectores $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{AM'}$, e identifícalos como $\vec{M}_1$ y $\vec{M}_2$, respectivamente.
- ¿Fueron las coordenadas de $\vec{M}_1$ $\begin{cases} x = x \\ y = y - \sqrt{3}? \end{cases}$
- ¿Fueron las coordenadas de $\vec{M}_2$ $\begin{cases} x' = x' \\ y' = y' - \sqrt{3}? \end{cases}$
- Determina $\|\vec{M}_1\|$ y $\|\vec{M}_2\|$, e identifícalo como ρ y ρ', respec-

tivamente.

- Compara ρ y ρ', ¿son iguales? si ___ no ___
- ¿Podrías afirmar que $\widehat{\vec{M}_1,\vec{M}_2} = \frac{\pi}{6}$ rad? si ___ no ___ ¿por qué?

____

- Traslada los vector $\overline{M}_1$, y $\overline{M}_2$ al origen *
- Identifica como α el ángulo formado por $\widehat{i,M_1}$
- En base a los gráficos obtenidos en * ¿podrias afirmar que; $\widehat{\vec{i},\vec{M}_2} = \widehat{\vec{i},\vec{M}_1} + \widehat{\vec{M}_1 M_2}$? si ___ no ___ ¿por qué? ______________
- Si tu respuesta es sí la expresión anterior puede reescribirse como $\widehat{\vec{i},\vec{M}_2} = \alpha + \frac{\pi}{6}$
- Obtiene a partir de los gráficos resultados en * las coordenadas de x,y,x',y'.
- ¿Fueron tus resultados (I) $\begin{cases} x = \rho\cos\alpha \\ y = \rho\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$,

$$\text{(II)} \begin{cases} x' = \rho\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) \\ y' = \rho\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

- Escribe (II) aplicando la propiedad del coseno de la suma de ángulos.
- ¿Fue tu resultado (III) $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\cos\alpha - \frac{1}{2}\rho\,\text{sen}\,\alpha \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\,\text{sen}\,\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha \end{cases}$?
- Sustituye (I) en (III)

- ¿Fue tu resultado $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}x \end{cases}$?

- ¿Que concluyes? ______________________________

ACTIVIDAD 6.4

Objetivo

Que el Alumno:

1. Verifique que la composición de simetrias ortogonales es una rotación

PROCEDIMIENTO

- Toma un plano cuadriculado
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala adecuada
- Sea g: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una simetria tal que:

  $(x,y) \leadsto (x',y')$,

  con $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$, $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$
- Sea f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un simetria tal que:

  $(x,y) \leadsto (x',y')$

  con $x' = y$, $y' = x$
- Verifica que f y g son simetrias ortogonales
- Sea r: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación tal que:

  $(x,y) \leadsto (f \circ g)_{(x)}$
- Determina el conjunto de puntos invariantes por g, e identificalo como D.

- ¿Fue tu resultado $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = (\sqrt{2} - 1)x\}$? si ___ no ___
- Si tu respuesta es sí ¿podrías afirmar que D es el eje de simetría de g? si ___ no ___
- Determina el conjunto de puntos invariantes por f, e identifícalo como Δ.
- ¿Fue tu resultado $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$? si ___ no ___
- Si tu respuesta es sí ¿podrias afirmar que Δ es el eje de simetría de f? si ___ no ___
- Determina el conjunto de puntos invariantes por r, identifícalo como I
- ¿Fue tu resultado $I = \{A(0,0)\}$?
- Sea $M\binom{1}{2}$ y $N\binom{-3}{1}$ puntos de $\mathbb{R}^2$
- Determina r(M) y r(N), e identifícalos como M' y N', respectivamente.
- Determina la distancia de A a M, e identifícala como d_1
- Determina la distancia de A a M', e identifícala como d_2
- Compara d_1 y d_2 ¿cómo son? ______________________
- Determina los vectores $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{AM'}$, e identifícalos como a, b, respectivamente.
- Determina la distancia de A a N, e identifícala como d_3
- Determina la distancia de A a N', e identifícala como d_4
- Compara d_3 y d_4 ¿cómo son? ______________________
- Determina los vectores $\overrightarrow{AN}$ y $\overrightarrow{AN'}$, e identifícalos como a',

b', respectivamente.

- Determina los vectores MM' y NN' e identifícalos como c y c', respectivamente.
- Mide con un transportador los ángulos $\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}}$ y $\widehat{\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AN'}}$, e identifícalos como θ y θ_1 ¿cómo son? ____________________
- Determina en forma analítica el valor de $\hat{\theta}$

  (Ayuda: $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta_i$)
- Determina en forma analítica el valor de $\hat{\theta}_1$

  (Ayuda: $c'^2 = b'^2 + a'^2 - 2a'b'\cos\theta_1$)
- ¿Fueron tus resultados θ y $\theta_1 \approx 81.87°$? si ___ no ___
- Si tu respuesta es sí ¡tienes buen cálculo!
- Si tu respuesta es no, repíte hasta lograrlo
- ¿Qué concluyes? ______________________________

EXPOSICION: *ROTACIONES COMO UNA COMPOSICION DE SIMETRIAS ORTOGONALES*

Sean D y D' dos rectas que pasan por un punto A dado. Estudiemos la aplicación compuesta $r = S_{D'} \circ S_D$ de dos sime-- trias ortogonales de ejes D y D'.

Consideremos dos semirectas A_x y $A_{x'}$ de origen A incluidas en D y D', respectivamente. (Fig. 6.3) y una abertura α de ángulo orientado $(A_x, A_{x'})$

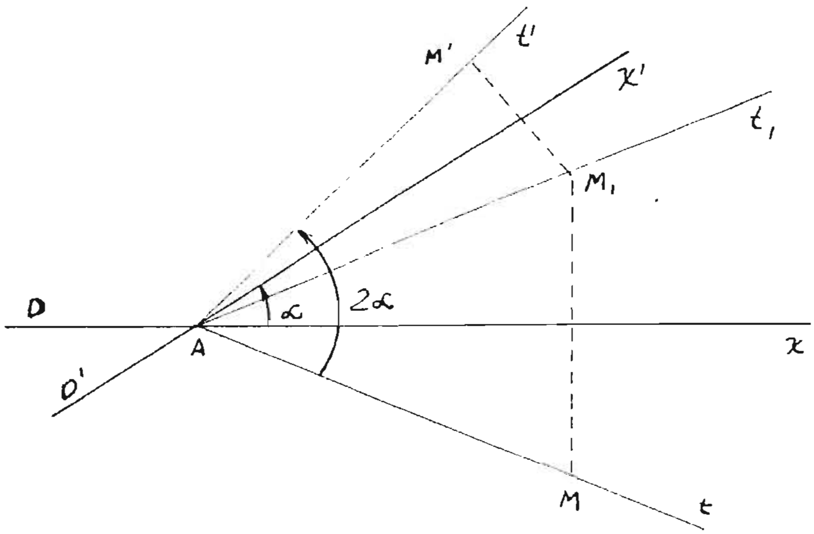


Fig. 6.3

El punto A invariante para S_D y para $S_{D'}$ es igualmente para r.

Sea M un punto diferente de A, M_1 su imagen por S_D y M' la imagen de M_1 por $S_{D'}$

Notemos que las semi-rectas de origen A; A_t, A_{t_1}, $A_{t'}$ contienen a los puntos M, M_1, M', respectivamente.

Por otra parte, tenemos:

$$AM = AM_1 \quad y \quad \widehat{A_t, A_x} = \widehat{A_x, A_{t_1}} \quad (1)$$

y además:

$$AM_1 = AM' \quad y \quad \widehat{At, Ax'} = \widehat{Ax', At'} \quad (2)$$

De las igualdades (1) y (2), obtenemos:

$$AM = AM'$$

Además, tenemos que:

$$\widehat{A_t, A_{t'}} = \widehat{A_t, A_t} + \widehat{A_{t_1}, At'},$$

$$\widehat{A_t, A_{t'}} = 2(\widehat{A_x, A_{t_1}} + \widehat{A_{t_1}, A_{x'}})$$

$$= 2(\widehat{A_x, A_{x'}}) = 2\alpha$$

Resulta entonces que el punto M', imagen de M por r, está definida por:

$$AM = AM' \quad y \quad \widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}} = 2\alpha$$

EJERCICIOS 6.1

Sea $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ el plano vectorial, $(\vec{i}, \vec{j})$ una base ortogonal directa de $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$.

1. Sea ψ la aplicación lineal de $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ en $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ tal que $\psi(\vec{i}) = j$ y $\psi(\vec{j}) = -i$

   - Demuestra que ψ es una rotación vectorial

     a) Calcula el centro A de ψ

     b) Calcula el ángulo de rotación β de ψ

2. Sea ψ la aplicación lineal de $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ en $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ tal que $\psi(i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$, $\psi(j) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$

   - Determina analíticamente la aplicación ψ, y verificar si se trata o no de una rotación.

3. Sea ψ una rotación de $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ en $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$ tal que:

$\psi(\vec{i}) = \frac{1}{3}(3i - 4j)$ y $\psi(\vec{j}) = \frac{1}{5}(4\vec{i} + 3j)$

a) Calcula el centro A de ψ

b) Calcula el ángulo de rotación Θ de ψ

4. Sean ψ y ψ_1 aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que:

a) $\psi(\vec{i}) = \vec{j}$, $\psi(\vec{j}) = \vec{i}$

b) $\psi_1(\vec{i}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{i}$, $\psi_1(\vec{j}) = -\frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

- Demuestra que ψ y ψ_1 son simetrias ortogonales

- Determina analíticamente $\psi \circ \psi_1$ y deduce si se trata de una rotación, determinando el centro A y el ángulo β de $\psi \circ \psi_1$

B I B L I O G R A F I A

1. Frédérique Papy, Matemática Moderna, Tomo II, Ed, Univer sitaria de Buenos Aires, 1970

2. C, Geutier, D. Geril, G, Girard, C, Thirçé et A, Warus-- fel, Aleph, Algébre/Geométrie, 2a, Act, Classiques Bachette, 79, Boulevard Saint Germain, Paris,

3. Mina S. de Carakushansky, Guilherme de la Penha, Algebra Lineal, Junio de 1976.

4. Luis A, Santaló, Espacios Vectoriales y Geometría Analí- tica, Monografía Nº 2. Serie de Matemática. Organización de los Estados Americanos. Washington, D.C. 1974

5. Jean Dieudonné, Algebra Linéare et Geométrie Elementaira, Paris.

6. Lang Serge, Algebra Lineal, Yale University

7. C, Gautier, C. Thircé, Mathématique Premiéres S et E. - Geométrie. Classiques Hachette, 82, Boulevard Saint Ger- main, Paris.