UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
Departamento de Matemática

Métodos Modernos de Geometría

TRABAJO DE GRADUACION PRESENTADO POR:

ROLANDO AMILCAR QUINTANILLA CORTEZ

PREVIO A LA OPCION DEL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

JULIO 1986.

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR: DR. MIGUEL ANGEL PARADA

SECRETARIO GENERAL: DRA. ANA GLORIA CASTANEDA PADILLA

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO: ING. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

SECRETARIO: ING. RENE MAURICIO MEJIA MENDEZ

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE DEL DEPARTAMENTO: LIC. ROLANDO LEMUS GOMEZ

TRABAJO DE GRADUACION

COORDINADOR: ING. CARLOS MAURICIO CANJURA

ASESOR: LIC. MANUEL ALBERTO YANEZ DOÑO

D E D I C A T O R I A

A MIS PADRES
(De grata recordación)

HERMANOS

ESPOSA e HIJAS

Con cariño

Especialmente a

<u>GUAYITO</u>

INTRODUCCION

"Abajo Euclides, arriba Euclides"

Jean Dieudonné

El presente trabajo tiene como propósito fundamental el de insistir en la necesidad de la Enseñanza de la Geometría Euclideana, en todo el Sistema Educativo Nacional. Es conocida, por casi todos los que trabajamos en la Enseñanza de la Matemática, la drástica reducción que sufrió la Geometría, en los programas que se diseñaron con la Reforma Educativa de 1968; con ésta, a nivel de Bachillerato, sólo se incorporaron algunos elementos de Geometría Analítica, y en los niveles educativos inferiores sólo aspectos muy básicos de algunas figuras Geométricas.

A lo anteriormente señalado agreguemos las dos dificultades fundamentales con las que tropezó la Reforma, estas son: la poca o casi nula preparación de los Maestros para la puesta en marcha de la misma y la erronea concepción de identificar la Matemática Moderna sólo con Teoría de Conjuntos. El resultado, 18 años mas tarde, es evidente: las promociones estudiantiles, tienen muy poco conocimiento de la Geometría y la capacidad de las mismas, para una adecuada representación del espacio es sencillamente alarmante.

La Enseñanza de la Geometría Euclideana en los distintos niveles educativos, y siempre que se respete el desarrollo psicológico del educando, es un valioso ingrediente para el desarrollo de la intuición, en cuanto a las transformaciones en el plano y en el espacio; así como en el desarrollo del pensamiento lógico. Si bien es cierto esto último, es posible lograrlo con las otras ramas de la Matemática, en el primero, la Geometría es realmente insustituible.

En este trabajo se propone un modelo en el cual se recupera la Enseñanza de la Geometría, sin añorar lo que se hacía antes de la Reforma; se propone retomarla en el marco amplio de la Matemática actual; es decir, incorporadas con las otras ramas de la misma. Hoy en día, es perfectamente posible estudiar la Geometría en concordancia con el estudio del Algebra, fundamentalmente en conexión con la estructura Algebráica de espacio vectorial Euclideano. Además, se ha querido combatir la Enseñanza Tradicional, en la cual hay una elevada carga de autoritarismo del Maestro. Se propone para ello una metodología en la cual el Maestro se convierte sólo en un facilitador del aprendizaje, mientras se promueve una mayor participación del estudiante para la redescubierta del conocimiento. En este sentido, la Geometría es también de enorme valor, en cuanto es posible que, a través de representaciones geométricas, que logra con actividades de "dibujo", prevea los resultados teóricos esperados.

Finalmente en este trabajo se logra un mínimo de conocimiento de la estructura de espacio vectorial Euclideano que no sólo es posible aplicarlo en la Geometría, sino, y cada vez más en otras ramas de la Matemática.

Por todo lo anterior planteamos para el presente trabajo, los siguientes objetivos:

i) General:

Elaborar un documento base que sirva de discusión, para mejorar la enseñanza de la Geometría.

ii) Específicos:

a) Promover la reactivación de la enseñanza de la Geometría Euclideana en el nivel Medio y Universitario.

b) Elaborar una visión unitaria de la Matemática, a través de la relación entre el Algebra y la Geometría.

c) Tratar de impulsar una metodología a base de actividades, para despertar la iniciativa y creatividad en el estudiante.

Para la consecusión de estos objetivos, se ofrece una reformulación de contenidos de Geometría, para desarrollar en el 1er. Año de Bachillerato, de acuerdo al esquema siguiente:

UNIDAD I: Sistema de Coordenadas.

i) Trazos elementales de Geometría (rectas, ángulos, circunferencias, etc.)

ii) Escala Numérica

iii) Ubicación de puntos en el plano.

iv) Sistema de Coordenadas Cartesianas.

v) Otros sistemas de Coordenadas

UNIDAD II: Algebra Lineal (Vectores).

- i) Concepto de Vector.
- ii) Las operaciones: Suma, Resta y Producto por un escalar
- iii) Estructura de Espacio Vectorial: Propiedades algebráicas de los vectores.
- iv) Vectores linealmente independientes.
- v) Espacio generado por un conjunto de vectores.
- vi) Base de un espacio de Vectores.
- vii) Descomposición de un vector en una base
- viii) Baricentro

UNIDAD III: Producto Escalar.

- i) Introducción
- ii) Definición.
- iii) Características.
- iv) Propiedades.
  - a) Conmutatividad
  - b) Asociatividad
  - c) Por las posiciones de los vectores
- v) Consecuencias
- vi) Teoremas
- vii) Aplicaciones Elementales

UNIDAD IV: Aplicaciones del Producto Escalar.

- i) Cuadrado escalar de la Suma o la diferencia de dos vectores: $(\vec{u} + \vec{v})^2$ y $(\vec{u} - \vec{v})^2$

ii) Conjunto de puntos M tales que: $MA^2 + MB^2 = K$

iii) Conjunto de puntos M tales que: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = K$

iv) Producto escalar de la suma de dos vectores por su diferencia: $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$

v) Conjunto de puntos M tales que: $MA^2 - MB^2 = K$

vi) Conjunto de puntos M tales que: $\overrightarrow{MA} = K\overrightarrow{MB}$

Para el desarrollo de los contenidos anteriormente propues-- tos, se ha utilizado una metodología, la cual está basada en "actividades"; para cada actividad se definen sus objetivos; si se cree necesario se hace algun comentario, y después de cada actividad o actividades, se formula la exposición sobre lo desarrollado en cada actividad, para terminar con ejercicios relacionados con el contenido.

La forma y el orden en que aparecen estos aspectos (con sus funciones que desempeñan), se dá a continuación:

NOMBRE DEL CONTENIDO: ______________________________

1. Objetivos:

Su función es determinar lo que esperamos que el estudiante, realice en cada una de las actividades.

2. Actividades:

Su función es que el estudiante por si solo, con el auxilio del profesor, desarrolle paso a paso las instrucciones dadas en cada actividad, para que al final obtenga intuitivamente, la idea sobre lo que se trata en cada actividad.

3. Exposición:

Su función es que el profesor dé una explicación formal del contenido, apoyandose en la actividad que el estudiante desarrolla.

4. Ejercicios:

Su función es que el estudiante refuerce y amplíe el contenido visto en cada actividad o actividades.

Entre las ventajas que presenta esta Metodología, podemos mencionar:

i) Se rompe con la enseñanza tradicional (clase expositiva)

ii) Quien asume el papel fundamental en el proceso enseñanza-aprendizaje, es el estudiante.

iii) Atiende las diferencias individuales de los estudiantes

iv) Permite que el estudiante progrese a su propio ritmo.

v) Puede ser aplicado a un número considerable de estudiantes.

vi) Proporcione los materiales para la consecusión de los objetivos.

Para verificar las bondades de esta metodología, se realizaron dos cursos experimentales con jóvemes de nuevo ingreso en la Escuela Nacional de Comercio 1985-1986, y se obtuvo resultados concretos que se pueden analizar claramente en el -

Capítulo V; para satisfacción nuestra, el curso tuvo aceptación y los resultados fueron positivos en un buen porcentaje.

Además, quisieramos que este Trabajo se tomase como un documento inicial de discusión, con el propósito de recuperar la enseñanza de la Geometría; no solo a nivel de 1er. Año de Bachillerato (así como está contemplado en este trabajo); síno que a nivel de todo el sistema Educativo. Para ello es necesario la participación de las distintas Instituciones Educativas: Universidades, Colegios, Instituciones Oficiales, Instituciones Privadas, Ministerio de Educación y de todas las personas interesadas en la Matemática; porque todo esto requiere ser probado con cierta población, ya que no sabemos que metodologicamente sea correcto, a pesar que se tienen resultados estadísticos que nos permiten confiar un poco en lo que se ha hecho. No esperemos que la Universidad Nacional de El Salvador, sea la única Institución que promueva este trabajo a nivel Nacional.

Este trabajo, que si bien representa un esfuerzo, dejará de ser trascendente si no es revisado en los distintos niveles Educativos del Sistema de Educación Nacional; y de este sistema depende, que sea implementado.

Indudablemente el trabajo a seguir es grande; por hoy solo hablamos de 1er. Año (esto hay que tomarlo como una inquietud); habría que seguir con 2do. Año, 3er. Año, en la Univer sidad; revisar todo lo de Educación básica, hasta tener una propuesta gloval, en la Enseñanza de la Geometría. Y después seguir con la enseñanza del Cálculo, con la Enseñanza del Algebra, etc.

Para finalizar, deseo expresar mi agradecimiento sincero a todas las personas que me ayudaron desinteresadamente, para la realización de este trabajo y especialmente al Ing. Carlos Mauricio Canjura y al Lic. Manuel Alberto Yánez Doño, por su total entrega y paciente colaboración.

I N D I C E

Página

CAPITULO I

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

CAPITULO II

VECTOR DESPLAZAMIENTO

Página

Página

Página

C A P I T U L O I

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

ACTIVIDAD DE TRAZOS

ACTIVIDAD 1.1

Objetivos

Que el estudiante:

a) Trace sin ninguna dificultad rectas paralelas, perpendiculares y ángulos.

b) Utilice instrumentos de geometría, tales como: regla, escuadra, transportador, etc.

c) Mida con el transportador la abertura de distintos ángulos.

PROCEDIMIENTO:

Primera Parte

- Toma una hoja de papel (un plano)
- Identifica el plano con la letra π
- Traza una recta (sin escala) en el plano y denomínala con la letra D
- Selecciona un punto en el plano cerca de la recta D y llámalo P
- Toma la escuadra y haz que uno de sus lados (uno de los pequeños) coincida con la recta D (ver Fig. 1.1)
- Toma la regla y la colocas de tal manera que el borde de

ella coincida con el otro lado de la escuadra (ver Fig. 1.2)

- Luego desliza la escuadra sobre el borde de la regla hasta lograr que el lado que coincidía con la recta, coincida con el punto P (ver Fig. 1.3)
- Traza otra recta por el borde de la escuadra que coincide con el punto P y llámala D' (de prima)

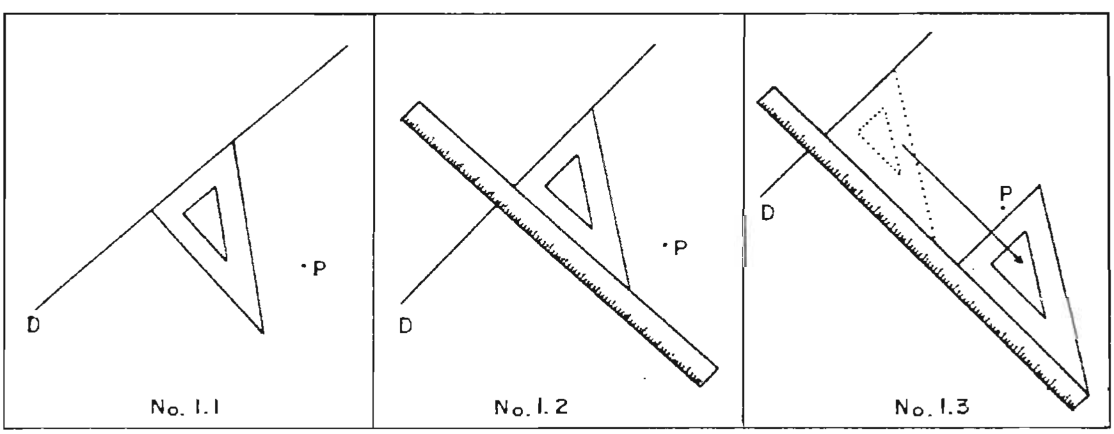
La recta obtenida D' es una recta PARALELA a la recta D

- Sobre el mismo plano, traza otra recta cualquiera y llámala H
- Selecciona un punto P' sobre la misma recta H
- ¿Se podrá trazar una recta paralela a H que pase por P'?

  Sí, ¿cómo es el trazo? ______________________________

  No, ¿por qué? ______________________________

Convendremos que toda recta H es paralela a si misma

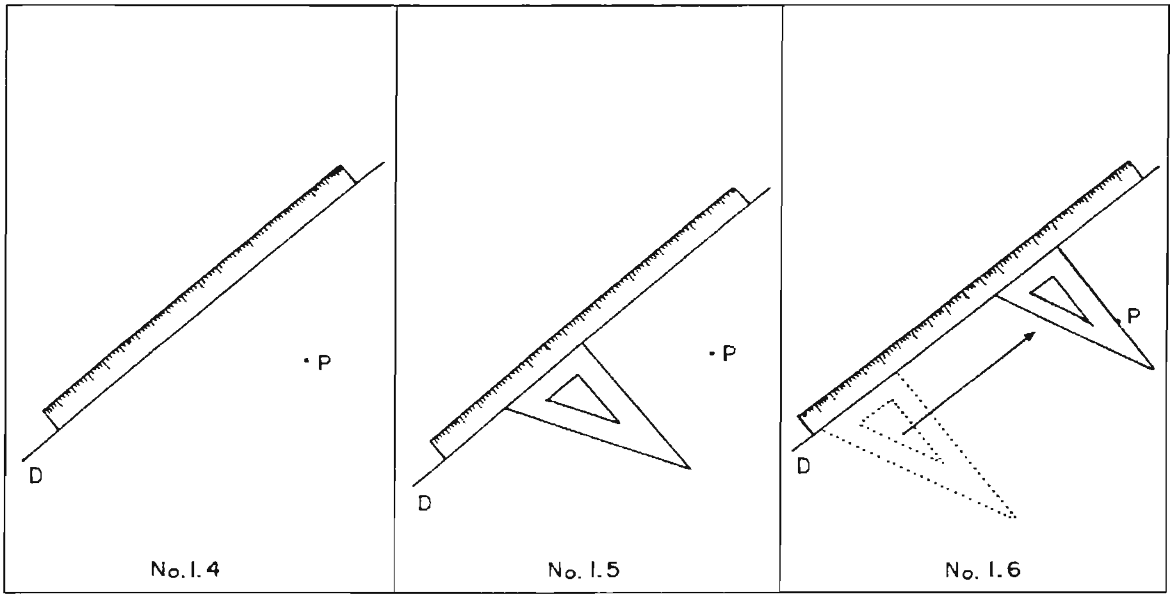


Segunda Parte

- Selecciona un plano y llámalo π
- Traza una recta cualquiera (sin escala) en el plano π y - llámala D
- Selecciona un punto P en el plano cerca de la recta D
- Toma la regla y haz que el borde de ella coincida con la recta D (ver Fig. 1.4)
- Coloca la escuadra de tal manera que uno de sus lados (el más pequeño) coincida con el borde de la regla (ver Fig. 1.5)
- Luego desliza la escuadra sobre el borde de la regla hasta lograr que uno de sus lados (el otro pequeño) coincida con el punto P (ver Fig. 1.6)
- Traza la recta por el borde de la escuadra que coincide - con el punto P y denomínala D'
- Quita la regla y escuadra; prolonga la recta D' hasta cortar la recta D

La recta obtenida D' es una recta PERPENDICULAR a la - recta D

Repite las actividades anteriores hasta lograr trazar rectas paralelas y perpendicualres sin ver las instrucciones - de las actividades.



No. 1.4 No. 1.5 No. 1.6

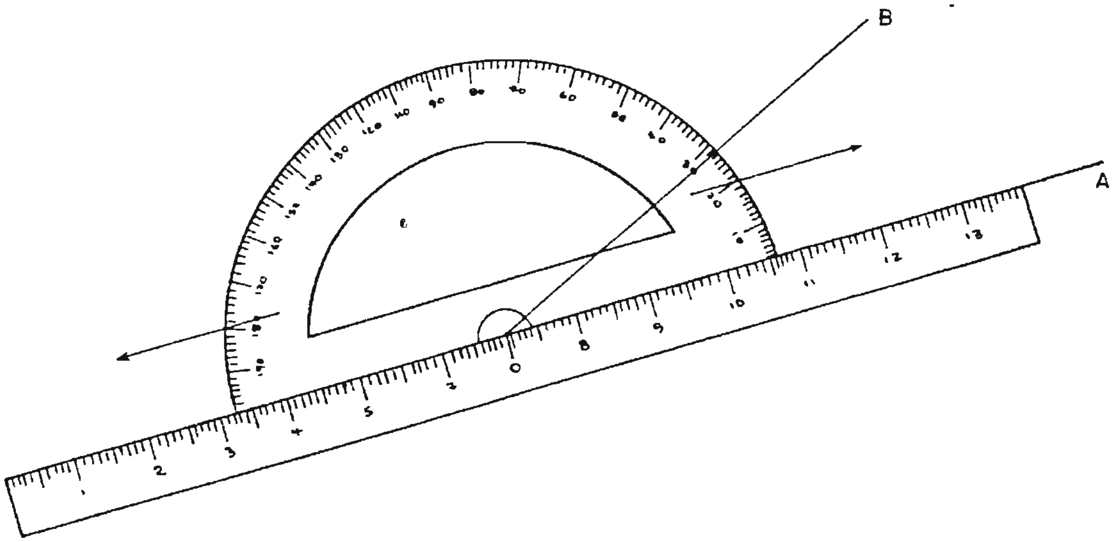
Tercera Parte

- Selecciona un plano y llámalo π
- Traza un ángulo cualquiera en el plano π
- Identifica las rectas del ángulo con las letras A, B; y el vértice (el punto donde se cortan las dos rectas) con la letra O
- Toma una regla y colócala de tal manera que su borde coincida con el lado A del ángulo (ver Fig. 1.7)
- Toma el transportador y colócalo de tal manera que su lado recto (exterior) coincida con el lado A (ver Fig. 1.7) y deslízalo hasta lograr que su *centro* coincida con el punto O.

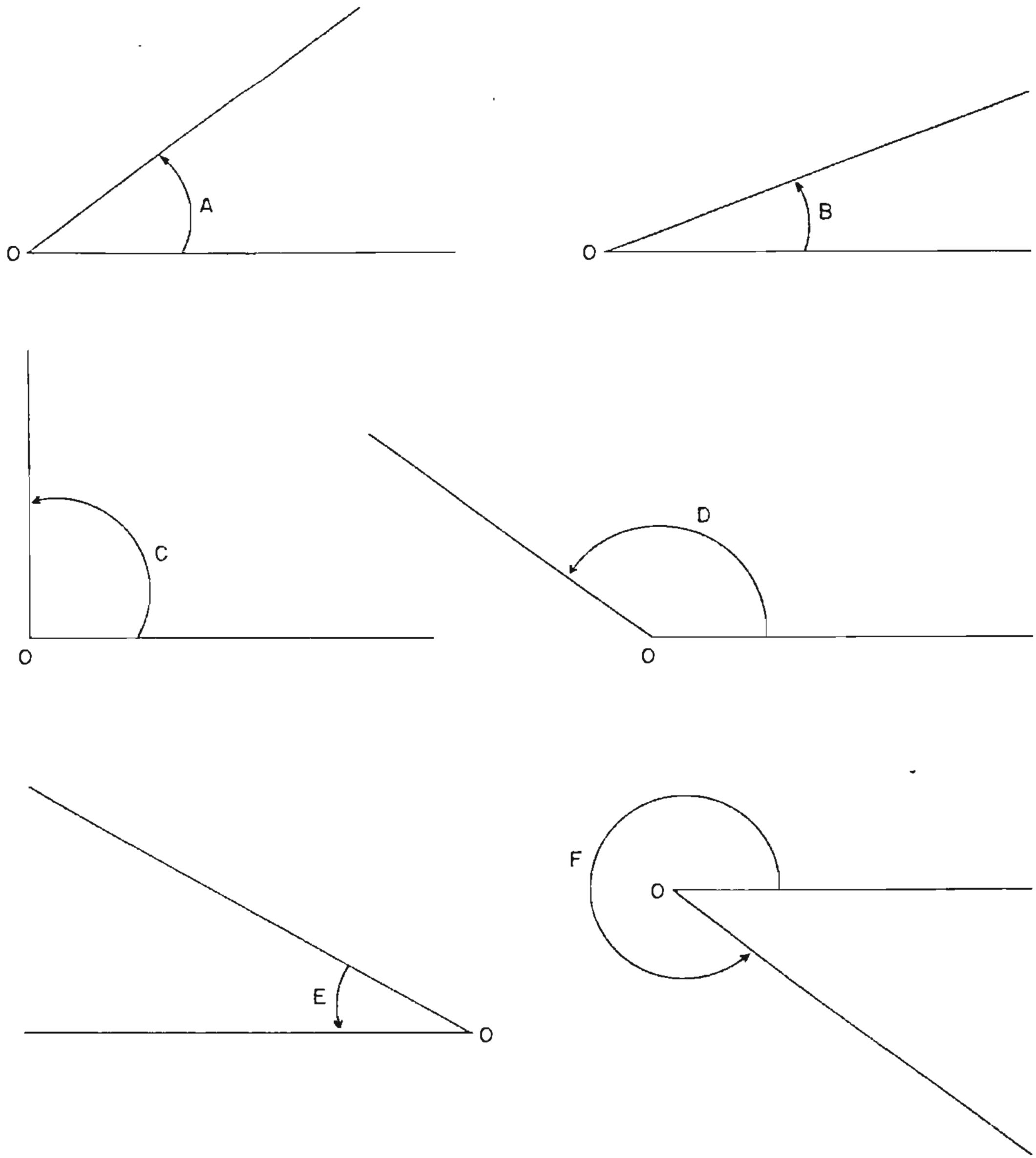
COMENTARIO

En el transportador hay dos escalas de 0 a 180 grados, de izquierda a derecha y viceversa.

- Selecciona la escala que empieza de 0 grados que coincide con la recta A y a partir de ahí cuenta los grados que hay hasta la recta B.
- Identifica con la letra Θ el número de grados que tiene el ángulo trazado y escribe Θ = ____ grados.
- Encuentra numericamente con el transportador la medida de la abertura de los ángulos que se muestran en el plano E.



No. I.7



Plano E

ESCALA NUMÉRICA

ACTIVIDAD 1.2

Objetivos

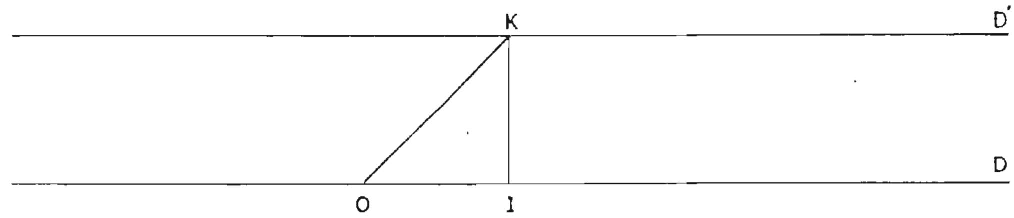
Que el estudiante:

a) Haciendo uso de rectas paralelas y perpendiculares, cons truya una escala numérica cualquiera.
b) Trace rectas con diversas escalas numéricas.
c) Encuentre la relación uno a uno entre los puntos de una recta y los números reales.

PROCEDIMIENTO

Primera Parte

- Selecciona un plano y llámalo π
- Traza una recta D
- Marca 0 y 1 en dos puntos distintos de la recta D (de este modo la recta está provista de una orientación y de una gra-- duación)
- Traza otra recta D' paralela a D (con una separación de 2 cm. aproximadamente)
- Traza una perpendicular a la recta D desde el punto 1 has ta la recta D' llama a este punto de intersepción con la letra K (ver Fig. 1.8)



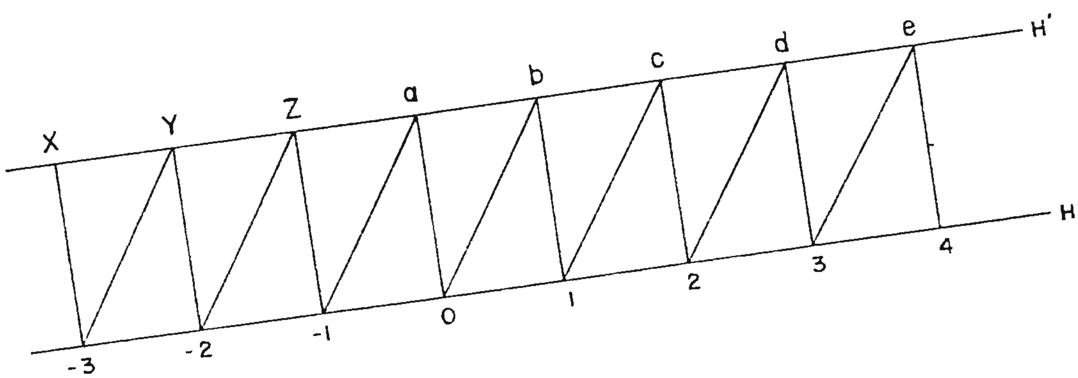
No. 1.8

- Traza una recta desde el punto 0 de la recta D hasta el punto K de la recta D' (ver Fig. 1.8)
- Traza un segmento de recta paralelo al segmento OK, que parta de 1 hasta llegar a D'; a este punto de intersepto llámalo K'
- A partir de K' traza un segmento de recta paralela al segmento 1K (el segmento de recta desde el punto 1 al punto K) hasta llegar a D y a este punto llámalo 2.
- A partir de 2, traza un segmento de recta paralela al segmento 1K' hasta llegar a D' y a este punto denomínalo K"
- A partir de K", traza un segmento de recta paralelo al segmento 2K', hasta llegar a D y a este punto llámalo 3.
- Y asi siguiendo con el mismo procedimiento a la derecha y a la izquierda del punto 0, ubica los demás puntos 4, 5, 6, ... y -1, -2, -3, ...

Hemos obtenido una graduación en la recta D, de números -
enteros.

Segunda Parte

- Traza otra recta H (en el mismo plano π)
- Repite la primera parte completamente (identifica la otra recta paralela a H como H')
- Identifica los números y letras que usarás según la Fig. 1.9



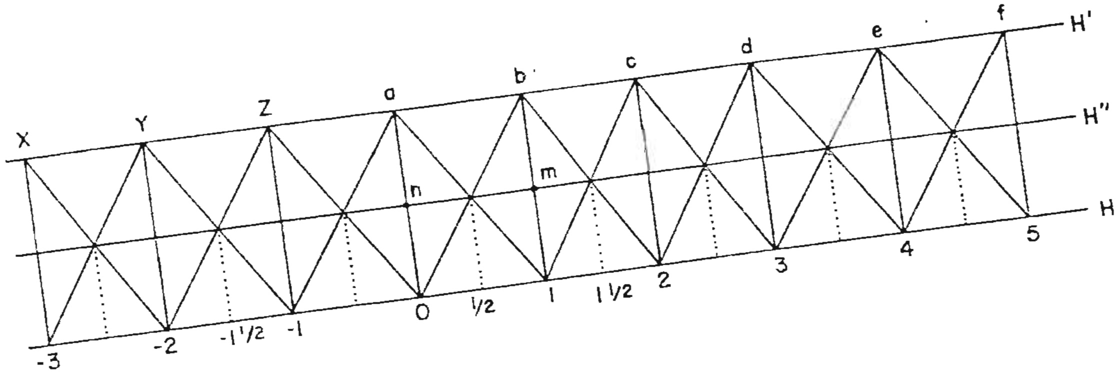
No. 1.9

- Traza un segmento de recta de *a* a 1, otro de *b* a 2, otro de z a 0, y asi sucesivamente los demás segmentos.
- ¿Estos nuevos segmentos de rectas son paralelos? __ si - ___ no

- Traza otra recta H" paralela a H, que pase por los puntos donde se cortan las diagonales de los paralelogramos (a la mitad de la recta H y H').
- Traza segmentos de rectas paralelas de los segmentos b1, c2, d3, etc., que partan de los puntos donde se cortan las diagonales, hasta la recta H (ver Fig. 1.10)
- Estos nuevos puntos en la recta H (puntos medios entre los enteros); identifícalos con su respectivo valor; por ejemplo el punto entre 0 y 1, represéntalo como $\frac{1}{2}$, el punto entre 1 y 2 como $1\frac{1}{2}$; el punto entre 2 y 3 como $2\frac{1}{2}$; el punto entre 0 y -1 como $-\frac{1}{2}$, el punto entre -2 y -1 como $-1\frac{1}{2}$; y asi sucesivamente.
- Ahora sigue subdividiendo la recta H, repitiendo el procedimiento anterior; nada más que en vez de H y H', usa las rectas H y H"

  Ayuda:

  Traza segmentos de recta desde *m* a $\frac{1}{2}$ y a $1\frac{1}{2}$, lo mismo de *n* a $\frac{1}{2}$ y a $-\frac{1}{2}$ (ver Fig. 1.10); con esta misma idea, traza mas segmentos de recta hasta completar los trazos necesarios, obteniendo más puntos medios a los puntos que se han determinado.
- ¿Si se sigue con esta subdivisión, se podran determinar más puntos medios? ______________________________
- Crees que esta subdivisión tiene fin? si _____ no _____



No. 1.10

EXPOSICION: *RELACION UNO A UNO ENTRE LOS NUMEROS REALES Y LOS PUNTOS DE UNA RECTA.*

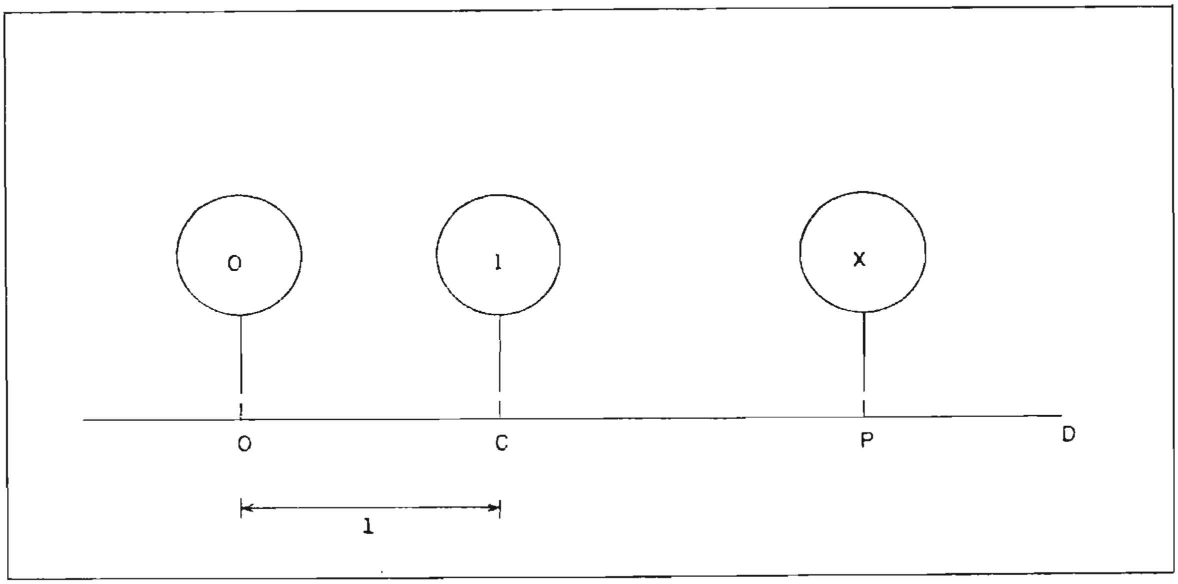
He aqui una recta orientada D (se distingue su punto 0, - llamado origen al cual se le asocia el número 0 y un punto C definido como la *unidad*, al cual se le asocia el número 1).

A todos los puntos P de la recta D se le puede sociar el número "x" de los números reales ($\mathbb{R}$)

El número x es llamado COORDENADA del punto P.

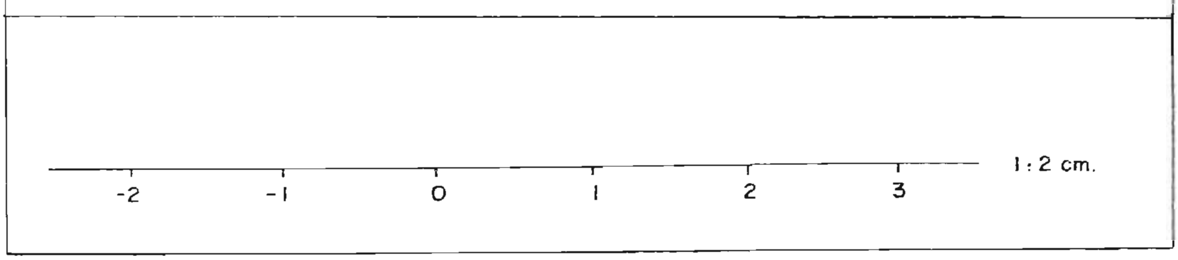
Y es claro que la aplicación: $\mathbb{R} \longrightarrow D$ tq: $x \rightsquigarrow P$ es - una biyección

Gráficamente se tiene la representación indicada en la Fig. 1.11.



COMENTARIO

Siempre que se gradúe una recta es necesario identificar - su respectiva escala numérica. Por ejemplo en la siguiente figura, la recta se gradúo a 2 cm por unidad; a la derecha aparece su identificación.



En la práctica para hacer graduaciones en la *recta*, se utilizan reglas graduadas.

EJERCICIOS 1.1

- Selecciona una hoja de papel
- Traza 5 rectas paralelas entre si
- Marca el punto 0 en cada recta
- Identifica cada recta con las letras A, B, C, D, E
- Toma la regla graduada en cms. y coloca sobre la recta A de tal manera que el punto 0 coincida con el 0 de la regla
- Haz una graduación en la recta A con una escala de 1 cm. por unidad de longitud y marca los puntos con su respectivo número 1, 2, 3, ...
- Después haz lo mismo a la izquierda de 0 y marca los puntos con su respectivo número -1, -2, -3, ...
- Desarrolla lo mismo en las rectas B, C, D, E; utilizando respectivamente las unidades de longitud de: 2 cm, 0.5 cm, 1.5 cm, 2.5 cm.
- Identifica cada recta con su respectiva escala numérica

COMENTARIO:

Recuerda que la *recta* es la que puede tener diferentes graduaciones, según sea su unidad de longitud, ya que la *regla* tiene su graduación fija.

En resumen para una misma recta se pueden usar diferentes graduaciones, dependiendo para que se use.

" COMO LLENAR UN PLANO CON RECTAS "

ACTIVIDAD 1.3

Objetivos

Que el estudiante:

a) Descubra que un plano se puede "llenar" con rectas

b) Determine que para "llenar" un plano es necesario un número infinito de rectas

c) Obtenga una idea intuitiva sobre lo relacionado a "llenar" un plano con rectas

PROCEDIMIENTO

- Selecciona un plano y llámalo π
- Construye un cuadrado en el plano de 7 cm por lado y llámalo C
- Traza una recta en el cuadrado y denomínalo D

- Traza un conjunto de rectas paralelas a D; e identifica a éste conjunto de rectas con la letra F
- Al conjunto de rectas paralelas a D llámalo: Familia de rectas (F), por tener una característica común: todas son paralelas
- Después que haya trazado la familia de rectas:
- ¿Existen espacios vacíos en el cuadro?
  * si tu respuesta es *sí*, siga trazando rectas paralelas a D hasta "llenar" todos los espacios vacíos
  * si tu respuesta es *no*:
- ¿Crees que el número de rectas para "llenar" el plano tiene fin?

  Sí, ¿por qué? ______________________________

  No, ¿por qué? ______________________________
- Crees que podrías llenar otro cuadro C on otras líneas que no sean rectas?

  Si tu respuesta es sí; adelante; veamos como te quedará

  Si tu respuesta es no; ¿qué sugieres?

El número de rectas que se trazan para "llenar" un plano es infinito

UBICACION DE PUNTOS EN EL PLANO

ACTIVIDAD 1.4

Objetivos

Que el estudiante:

a) Encuentre la dificultad que se presenta de identificar univocamente un punto en el plano con sólo una familia de rectas F_1

b) Descubra que es necesario dos familias F_1 y F_2 de rectas para identificar un punto en el plano en forma única

PROCEDIMIENTO:

- Toma una hoja (plano π)
- Selecciona un punto en el plano y llámalo 0
- Selecciona un punto P en el plano diferente al punto 0
- Traza por 0 una recta D (horizontal)
- Traza un conjunto (familia F_1) de rectas paralelas a D
- Denomina por L_1 la recta de la familia F_1 que pasa por P
- Mide con una regla la distancia que hay entre el punto 0 y el punto P y denomínala d.
- Representa los dos elementos (Recta L_1 y distancia d) con un par ordenado $P(L_1,d)$
- Encuentra otro punto P_1 que esté en la recta L_1 y cuya distancia al punto 0 sea d (es decir la misma distancia de 0 a P)

COMENTARIO:

Con lo anterior concluimos que sólo una familia de rectas y las distancias *no* es suficiente para ubicar un punto en el plano en forma UNICA.
(observa que P y P_1 están en la misma recta L_1 y a la misma distancia: d del punto 0)

- Traza por 0 otra recta D' perpendicular a la recta D
- Traza un conjunto (familia F_2) de rectas paralelas a la recta D'
- Denomina por L_2 la recta de la familia F_2 que pasa por P
- Representa el punto P con el par ordenado: (L_1, L_2); es decir el punto P esta en la recta L_1 y L_2
- Dado (L_1, L_2) con L_1 en la familia F_1 y L_2 en la familia F_2; existen puntos y cuantos que están identificados por ese par? ______
- Dado un punto P del plano π, existen y cuántos pares de la forma (L_1, L_2) que identifican a P? ______

COMENTARIO:

Se dice que entre los *puntos* del plano π y los *pares* ordenados del producto cartesiano $F_1 X F_2$, existe biyección (una relación uno a uno)

EXPOSICION: *SISTEMA DE COORDENADAS*

Hemos denominado con la letra griega π a un plano, y con la letra $\mathcal{P}$ al conjunto de puntos "P" del plano π formado por la intersección de dos rectas pertenecientes a las familias F_1 y F_2. El punto "P" lo hemos representado por el par ordenado (L_1, L_2) en donde L_1 es una recta de la familia F_1 y L_2, es una recta de la familia F_2.

DEFINICION 1.0

Sean F_1 y F_2 dos familias de rectas que se intersectan perpendicularmente en el plano π; llamaremos SISTEMA DE COORDENADAS a este conjunto de rectas que nos sirven para ubicar UNIVOCAMENTE un punto P en el plano.

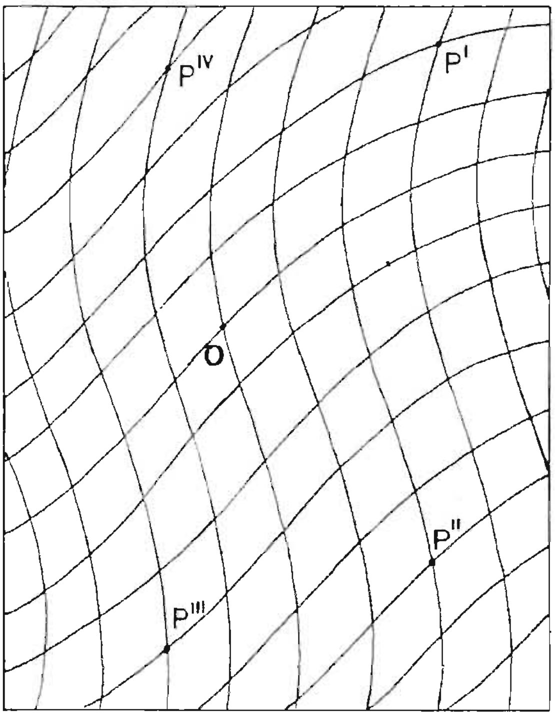
= Es claro que la aplicación:

$$U: \mathcal{P} \longrightarrow F_1 X F_2$$

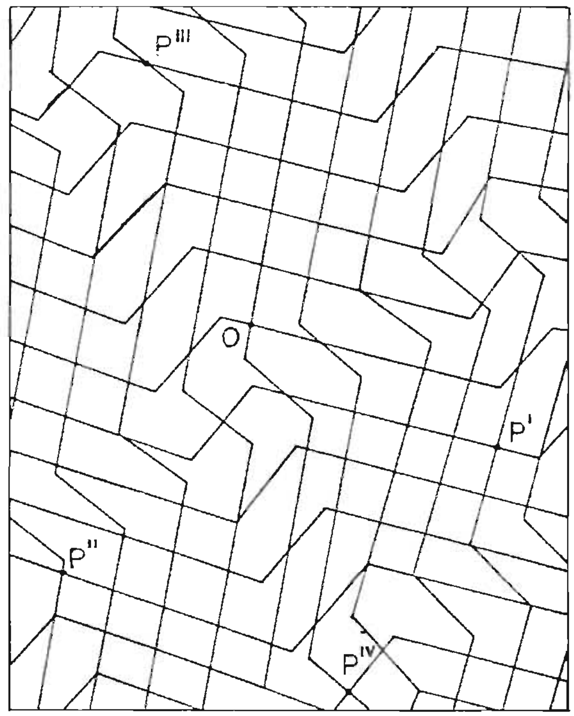
$$P \rightsquigarrow (L_1, L_2) \text{ es biyectiva}$$

EJERCICIOS 1.2

En los gráficos 1.2.0 y 1.2.1, identifica de alguna manera los puntos P', P", P"' y P^{iv}



No. 1.2.0



No. 1.2.1

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

ACTIVIDAD 1.5

Objetivos

Que el estudiante:

a) Construya un sistema de coordenadas con escalas numéri-- cas iguales

b) Formule claramente el concepto de sistema de coordenadas cartesianas

PROCEDIMIENTO:

- Selecciona un punto 0 en el plano π
- Selecciona un punto P en el plano π diferente a 0
- Traza una recta horizontal D que pase por el punto 0
- Construye una graduación en la recta D (Toma el punto 0 - como el cero de la graduación) y a una escala: 1: 1 cm
- Traza una familia F_1 de rectas perpendiculares a D que pasen por los puntos 0, 1, 2, 3, ..., -1, -2, -3, ...
- Identifica cada una de éstas rectas de la familia F_1 con la letra x; por ejemplo la recta que pasa el punto 2 de - la recta D denomínela x = 2 y asi las demás.
- Existe una recta x de F_1 que pase por P?
  * Si tu respuesta es sí; identifícala con su correspondiente número real: "a" es decir x = a
  * Si tu respuesta es no; traza otra recta perpendicular a D que pase por P e identifícala con su respectivo número real: "a", es decir x = a
- En la recta X = 0 (que pasa por el punto 0) construye una graduación utilizando la misma escala 1: 1 cm
- Traza una familia F_2 de rectas perpendiculares a la recta X = 0 que pasen por los puntos: 1, 2, 3, ... -1, -2, -3, ...

- Identifica cada una de estas rectas de la familia F_2 con la letra "y"; por ejemplo la recta que pasa por el punto 1 de la recta X = 0, denomínala: y = 1 y asi los demás
- Existe una recta "y" de F_2 que pasa por P?
  * Si tu respuesta es si; identifícala con su correspon--- diente número real: "b", es decir y = b
  * Si tu respuesta es no; traza otra recta perpendicular a la recta X = 0 que pase por P e identifícala con el nú- mero real: "b"; es decir y = b
- Representa el punto P con el par ordenado: (a, b)

COMENTARIO:

Hemos convenido en identificar al primer elemento del par ordenado: a; como un elemento "x" de la familia F_1 y al - segundo elemento: b; como un elemento "y" de la familia - F_2

En esta sección hemos utilizado el par ordenado (a,b) en vez de (L_1, L_2)

EXPOSICION: *SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS*

En consecuencia tenemos:

DEFINICION 1.1

Si en un plano π establecemos un sistema de coordenadas con familias F_1 y F_2 de "rectas", este sistema recibe el nombre de: Sistema de Coordenadas Cartesianas (las rectas son no necesariamente perpendiculares)

Este método de localización de puntos se debe a "René Descartes" Filósofo y Matemático Francés, de cuyo nombre se deriva lo denominado "cartesiano".

DEFINICION 1.2

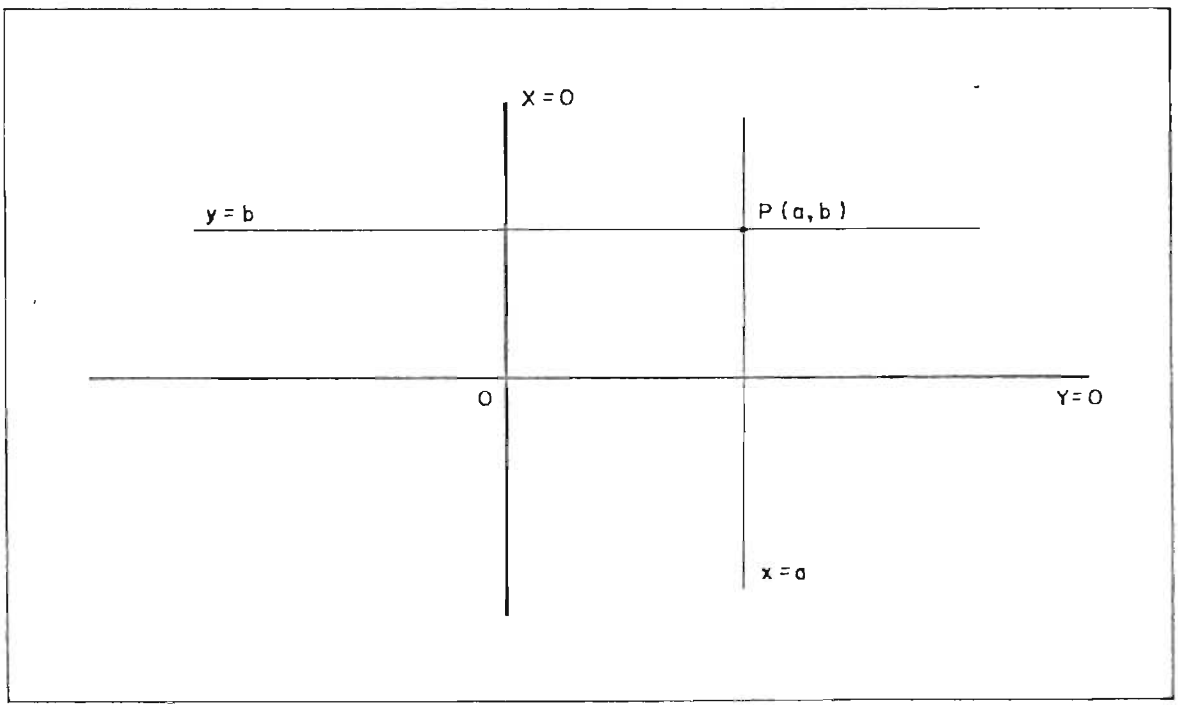
Si tenemos un sistema de coordenadas, en un plano π, con familias F_1 y F_2 de rectas "perpendiculares", este se llamará: Sistema de Coordenadas cartesianas rectangulares (SCCR).

En este sistema las rectas $X = 0$ y $Y = 0$ de F_1 y F_2, respectivamente definen el origen (intersección de "X" y "Y") además en cada una de ellas se construye una graduación (no necesariamente la misma); convendremos en identificar las rectas de la familia F_1 con la letra x y las rectas de la familia F_2, con la letra y.

Un punto P ubicado en un plano con un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, lo representaremos con el par (a, b); los números a y b son llamados: las coordenadas rectangulares del punto P en este sistema.

En donde al número "a" le llamaremos: abscisa, y al número "b" le llamaremos: ordenada

Para indicar que las coordenadas del punto P son *a* y *b*; una vez SOBREENTENDIDO un determinado sistema de coordenadas; escribiremos abreviadamente el punto P, así: P(a, b).

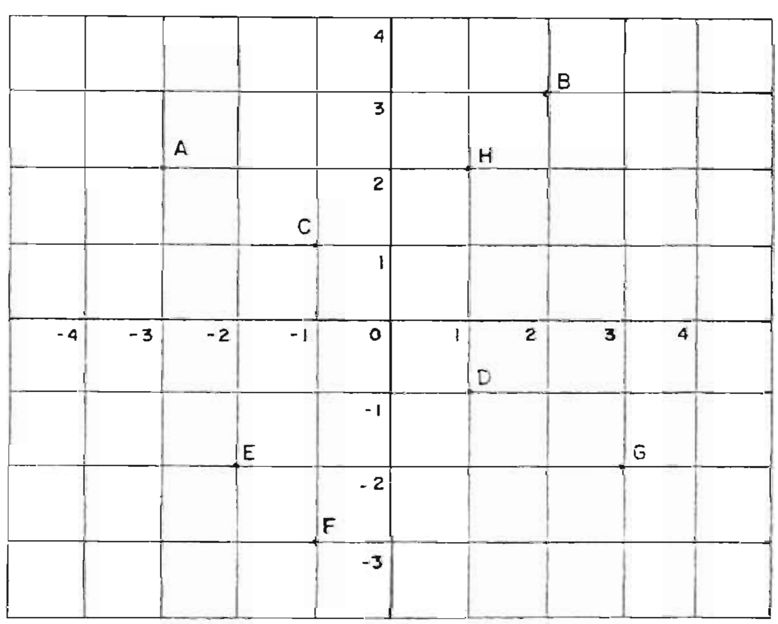


EJERCICIOS 1.3

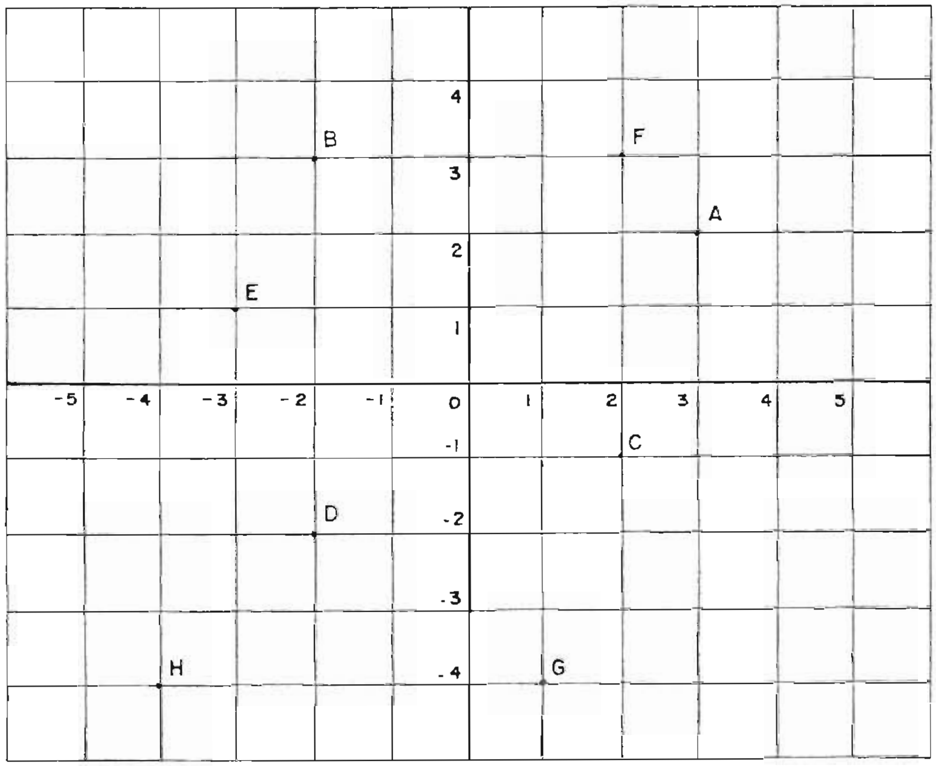
1) Dada una hoja de papel milimetrado (las lineas rectas se entienden como familia de rectas perpendiculares) y seleccionando una línea recta horizontal (por conveniencia) a la cual llamaremos Y = 0 y otra vertical (perpendicular a la horizontal) a la que llamaremos X = 0; definiendo claramente el punto de origen del sistema de coordenadas y una adecuada escala numérica en cada una de las rectas (X = 0 y Y = 0), ubica los puntos en el plano cuyos pares son: A(4,2); B(-3,4) C(4,-5) D(-3, -6); E(0,7); F(2,0), G(1,1), H(0, -3), I(-4,0).

2) Dado el siguiente sistema de coordenadas en el plano π; identifica las coordenadas de los pares ordenados para cada punto.

a)

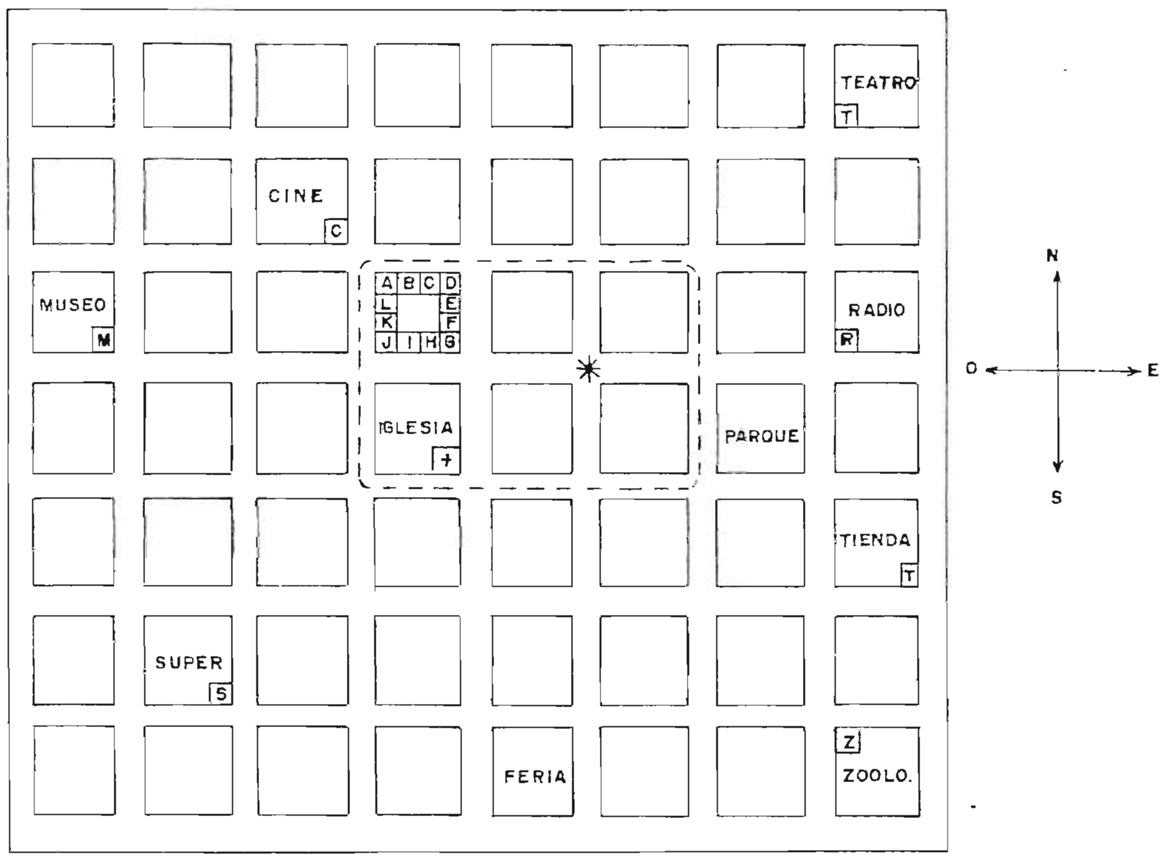


b)

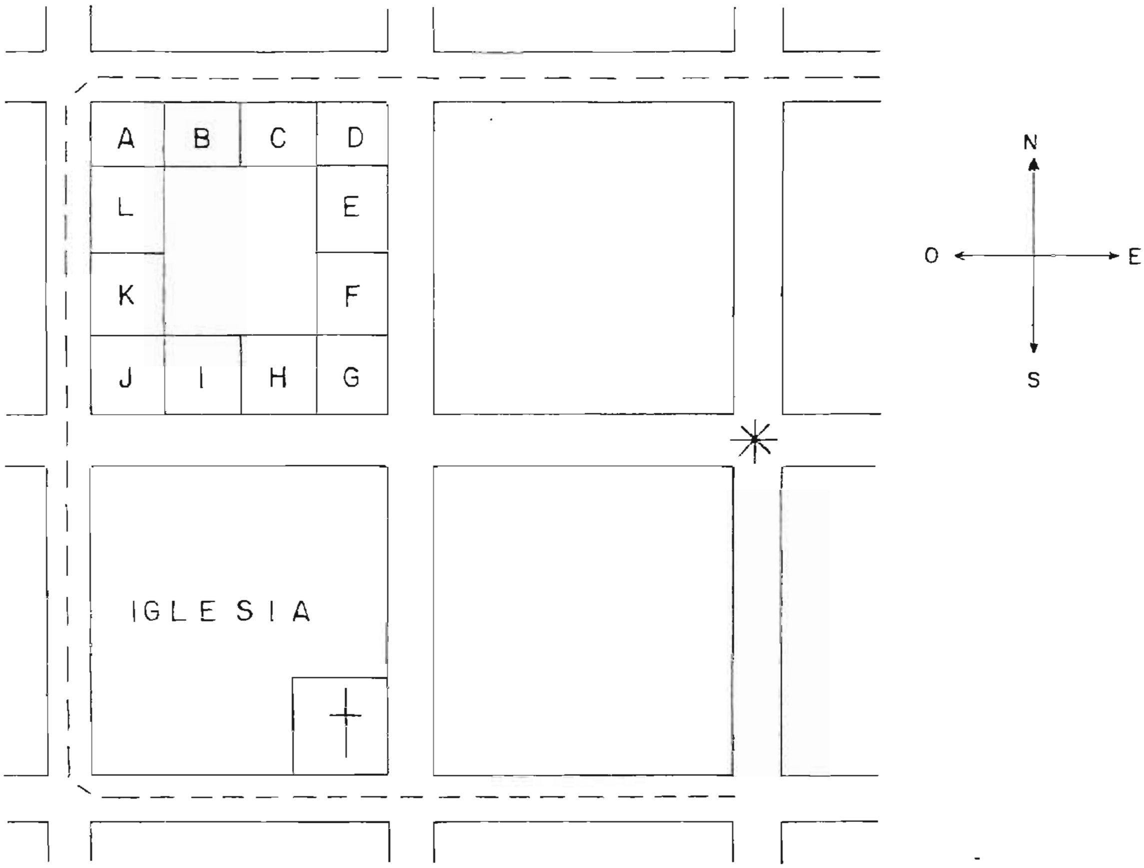


3) A continuación damos un ejercicio para que el alumno utilice toda su imaginación, lógica, raciocinio.

El arquitecto Luis Eduardo, quiere diseñar una nueva simbología (Nomenclatura), para ubicar una casa en una ciudad; como le ayudarías a ubicar los "puntos" (casas) en el siguiente plano; suponiendo que el asterisco * marca el centro de la ciudad. Las casas a ubicar son las que están señaladas en el plano (M, S, C, +, T, R, T, Z). Nota: las "avenidas" son de norte a sur (o de sur a norte); las "calles" son de oriente a poniente (o de poniente a oriente)



4) Ampliaremos la parte de la ciudad que tiene líneas puntea das para tratar de ubicar especificamente las casas A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K y L, de la manzana señalada. - Ayúdale al arquitecto Luis Eduardo, a definir especifica- mente (univocamente) su ubicación en el plano de la ciu-- dad.



UBICACION DE UN PUNTO EN EL PLANO

ACTIVIDAD 1.6

Objetivos

Que el estudiante:

a) Descubra que la ubicación de un punto en el plano, depende del sistema de coordenadas a usar.

b) Identifique que aún teniendo un MISMO tipo de sistemas - coordenadas, ello no es suficiente, para la ubicación única de un punto en el plano.

c) Identifique que los ejes en un sistema, son no necesariamente perpendiculares.

PROCEDIMIENTO:

Primera Parte

- Toma tres hojas de pepel transparente
- Identifica los planos con las letras A, B, C
- Toma el plano A
  * Selecciona un punto 0 en el plano A
  * Traza una recta horizontal que pase por el punto 0 y denomínala Y = 0
  * Traza una recta perpendicular a la recta Y = 0 que pase por punto 0 y denomínala X = 0
  * Selecciona un punto P en el plano A diferente al punto 0
- Toma el plano B y C
- Desarrolla lo mismo que en el plano A de tal manera que las rectas X = 0 y Y = 0 y el punto P, coincidan en los 3 planos al sobreponer una hoja sobre la otra (aprovecha la transparencia del papel)
- Toma nuevamente el plano A y construye una graduación en las dos rectas X = 0 y Y = 0 a una escala de 1 cm por unidad
- Toma el plano B y construye una graduación en las rectas X = 0 y Y = 0 a una escala de 1.5 cm por unidad.
- Toma el plano C y construye una graduación en las rectas -

$X = 0$ y $Y = 0$ a una escala de 2.0 cm por unidad

- Toma por separado cada plano y ubica en cada uno de ellos el punto P con su respectivo par ordenado (de acuerdo a su escala)
- ¿Son iguales las coordenadas de P en cada plano? ___ si - ___ no
- ¿A qué se debe este fenómeno?

____

____

- Como explicas el hecho de que a pesar de estar en la misma posición P en los tres planos, sus coordenadas en los tres pares ordenados, son diferentes?

____

____

____

<u>Segunda Parte</u>

- Toma tres hojas de papel transparente
- Identifica los planos con las letras D, E, F
- Toma el plano D
  * Traza una recta horizontal ($Y = 0$) y marca el punto 0
  * Traza una recta perpendicular a $Y = 0$ que pase por el punto 0 y llámala $X = 0$
- Toma los planos E y F y desarrolla lo mismo que en el plano D

- Toma nuevamente los planos D, E y F y construye una graduación en las rectas X = 0 y Y = 0 de cada plano; a una escala de: 1.0 cm, 1.5 cm y 2.0 cm, respectivamente.
- Toma por separado cada plano y ubica en cada uno de ellos el par ordenado (3,2) y represéntalo con la letra P en los tres planos
- Coloca las tres hojas una sobre la otra, de tal manera que las rectas X = 0, Y = 0, coincidan en los 3 planos.
- ¿Coinciden los puntos P de cada plano? ___ si ___ no
- ¿A qué se debe este fenómeno? ______________________________
- ¿Si se ubicó el mismo par (3,2) en los tres planos; porqué el punto P no coincide al poner los tres planos uno sobre el otro?

____

____

- ¿Qué puedes concluir de la Primera y Segunda Parte con respecto a la ubicación de un punto en el plano? ____________

____

- ¿De que elementos depende la ubicación de un punto en el plano de manera UNICA? ______________________________

____

Tercera Parte

- Selecciona un punto 0 en el plano π
- Selecciona un punto P en el plano π diferente de 0

- Traza una recta D horizontal que pase por el punto 0
- Construye una graduación en la recta D (toma el punto 0 como el cero de la graduación) y con una escala de 1:1 cm
- Traza otra recta D' (que *no* sea perpendicular a D) que pase por el punto 0
- Construye una graduación en la recta D' (toma el punto 0 como el cero de la graduación) y con una escala de 1:5 cm
- Traza una familia F_1 de rectas paralelas a D' que pasen por los puntos 1, 2, 3, ..., -1, -2, -3, ... de la recta D
- Cada una de estas rectas de la familia F_1, identifícalas con la letra x
- Traza una familia F_2 de rectas paralelas a D que pasen por los puntos 1, 2, 3, ..., -1, -2, -3, ... de la recta D'
- Cada una de estas rectas de la familia F_2 identifícalas con la letra y
- Existe una recta x de F_1 y una recta y de F_2 que pase por el punto P?
  * Si tu respuesta es sí; identifícalas con sus correspondientes números reales: $x = a$ y $y = b$
  * Si tu respuesta es no; traza otras rectas paralelas a D y D' que pasen por P e identifícalas con sus correspondientes números reales: $x = a$ y $y = b$
- Representa el punto P con el par ordenado: (a,b)

COMENTARIO:

Notarás que para la ubicación de un punto en forma única en el plano, las rectas D y D' no tiene que ser necesariamente perpendiculares

EXPOSICION: *UBICACION DE PUNTOS EN EL PLANO*

La ubicación de un punto en un plano π depende "exclusivamente" del sistema de coordenadas que se este usando. Además debe aclararse especificamente la escala numérica en cada sistema de coordenadas.

Es necesario tener presente estas condiciones, ya que se pueden presentar aspectos como en la actividad 1.6:

1a Parte: en donde el punto P (a,b) del plano A es el "mismo" punto P (c,d) del plano B

2a Parte: en donde el punto P(3,2) del plano D es diferente al punto P(3,2) del plano E.

En resumen:

Cuando se trata de "ubicar" un punto en el plano, generalmente lo primero que se hace es trazar dos rectas perpendiculares, definiendo su orígen y tomando una graduación sin especificar su escala numérica; proceso que consideramos inade--

cuado. Lo adecuado debe ser, que cada vez que ubiquemos un punto en el plano determinemos especificamente su sistema de coordenadas; porque un mismo punto; (Act. 1.6: 1a. Parte) en el plano, puede tener distintas coordenadas o un mismo par ordenado; (Act: 1.6: 2a. Parte) puede ser identificado en el plano en distintas posiciones, dependiendo del sistema de coordenadas que se hayan seleccionado.

OTROS SISTEMAS DE COORDENADAS

ACTIVIDAD 1.7

Objetivos

Que el estudiante:

a) Descubra que existen otros sistemas de coordenadas
b) Determine que no solo con rectas podemos formar sistemas de coordenadas
c) Descubra que existen también familia de curvas

PROCEDIMIENTO:

- Toma un plano π
- Selecciona un punto 0 en el plano π
- Selecciona un punto P en el plano π diferente al punto 0
- Con el compaz traza un conjunto de circunferencias con centro en el punto 0

COMENTARIO:

A este conjunto de circunferencias le llamaremos: Fami-- lia C de circunferencias por tener una característica común, todas tienen el mismo centro 0.

- Denomína por "r" la circunferencia de la familia C que pasa por P (r es el radio de la circunferencia que pasa por P)
- Mide con una regla la distancia que hay entre el punto 0 y el punto P, y denomínala d
- Representa a la circunferencia de radio r y la distancia d que identifica al punto P con el par ordenado P(r,d)
- Encuentra otros puntos que esten en la circunferencia de - radio r y que estan a la misma distancia *d* del punto 0

COMENTARIO:

Establecemos que con las circunferencias y el elemento - distancia no es suficiente para ubicar un punto en el - plano de manera única.

- Traza un conjunto de rectas (Familia F) que pasen por el - punto 0 (no son paralelas)
- Denomína por "L" la recta de la familia F que pasa por el

punto P

- Representa el punto P con el par ordenado: P(r,L)
- Encuentra otro punto P' que esta en la circunferencia con radio "r" y esta en la recta L

COMENTARIO:

Con lo anterior concluimos que sólo con circunferencias y rectas no es suficiente para ubicar un punto en forma única.

(Note que los puntos P y P' estan sobre la misma circunferencia de radio r y sobre la recta L)

- Traza por el punto 0 una recta D (horizontal)
- Identifica la semirecta (del punto 0 a la derecha) de la recta D con la letra B

COMENTARIO:

La medición de ángulos se hará a partir de la semirecta B con las demás rectas de la familia F, en el sentido contrario a las agujas del reloj

- Mide el ángulo formado por la semirecta B y la recta L y denomínalo Θ
- Representa el punto P con el par ordenado: $P(r,\Theta)$

- Existe otro punto que tenga las características de P; es decir que esté en la circunferencia de radio r y que tenga un ángulo Θ? ______________________________
- ¿Cuál es el ángulo que forma la semirecta B? __________
- ¿Cuál es el ángulo que forma la recta que pasa por el punto P'? ______________________________

COMENTARIO:

Concluimos que con los radios de las circunferencias con centro en 0 y los ángulos formados con la semirecta B y la familia de rectas de F, se puede ubicar en forma única un punto en el plano.
Esta otra manera de ubicar un punto en el plano (la otra se definió a través de rectas) nos da la idea de que hay mas sistemas de coordenadas, para ubicar un punto en el plano.

- Ubica un punto P en otro plano π marcando el punto 0, haciendo uso de otro tipo de curvas.

EXPOSICION: *OTROS SISTEMAS DE COORDENADAS*

Hemos establecido que para ubicar un punto P en el plano no sólo se utilizan familias de rectas, sino que se puede usar otro tipo de familia de curvas (por ejemplo circunferencias).

Es claro que independientemente la familia de rectas (curvas) que se use para determinar un sistema de coordenadas, es necesario identificar la escala numérica y el punto de orígen.

DEFINICION 1.3

Sean F_1 y F_2 dos familias de rectas (curvas) diferentes entre si en un plano; denominamos: "Sistemas de coordenadas", el conjunto de rectas (curvas) que nos sirven para ubicar un punto en el plano de manera UNICA.

C A P I T U L O I I
VECTOR DESPLAZAMIENTO

INTRODUCCION AL CONCEPTO DE VECTOR

ACTIVIDAD 2.1

Objetivos

Que el estudiante

a) Verifique la dificultad que existe en identificar con una sola cantidad ciertos fenómenos físicos

b) Descubra que hay fenómenos físicos que para ser identificados; ademas de su magnitud, es necesario conocer otras características, tales como: dirección y sentido

PROCEDIMIENTO

Primera Parte

- Observa el plano de una ciudad que se te presenta en la figura 2.0
- Identifica la letra 0 como el centro de la ciudad
- Identifica las siguientes indicaciones: (referente al plano de la ciudad)

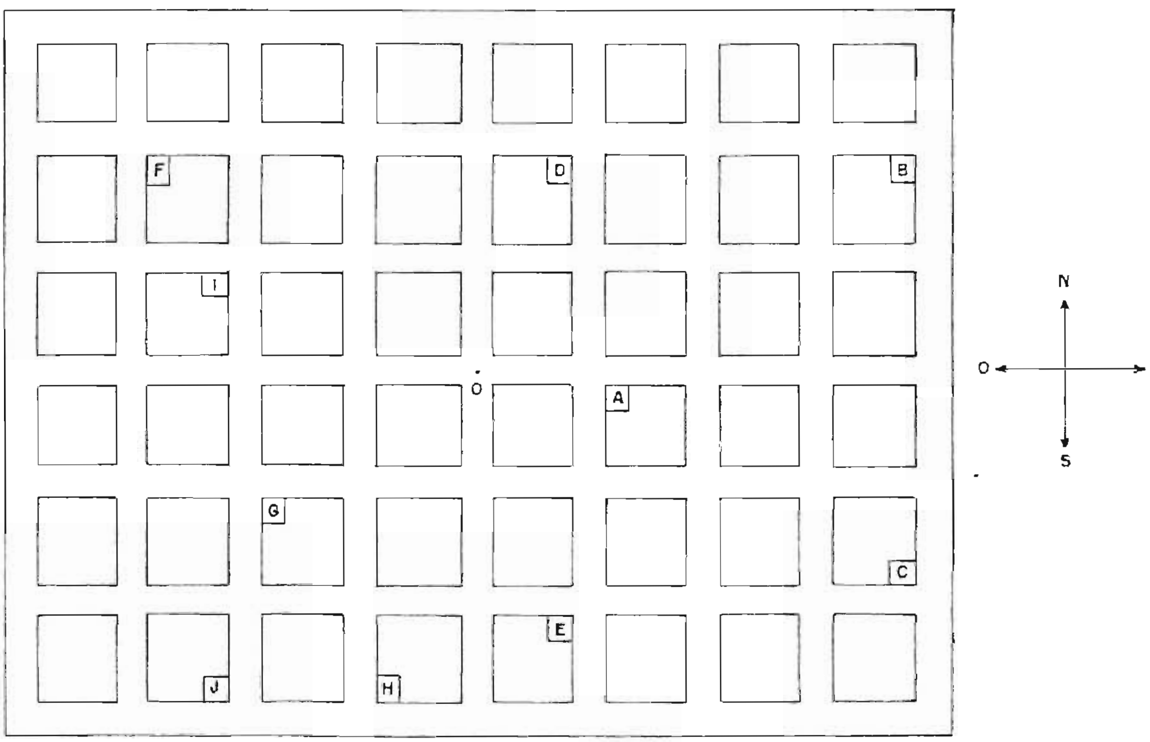
  i) El movimiento a la derecha es el ESTE, a la izquierda al OESTE, hacia arriba al NORTE y hacia abajo el SUR.

  ii) Todas la personas en la ciudad se novilizan de acuerdo a la siguiente regla: independientemente donde se en--cuentren; primero caminaran al ESTE o al OESTE y des--pues al NORTE o al SUR, ¿entendido?

Dada la Información:

Luis y Eduardo, viven en la casa A;

Luis, visita a un anigo que vive en la casa B y Eduardo, visita a otro amigo que vive en la casa C.



Plano de una ciudad

FIG. N. 2.0

- Representa con lápiz (de distinto color) el camino que toma Luis y Eduardo, según la indicación dada
- ¿Cuántas cuadras camina cada uno de ellos, para visitar a sus amigos? ______
- ¿Se encuentran a la misma distancia de su casa? __ si __ no
- ¿Si caminaron el mismo número de cuadras, porque no llegaron Luis y Eduardo a la misma casa? ______
- Puedes representar el camino recorrido por cada uno de ellos, con solo el número de cuadras?

  si ___ ¿por qué? ______

  no ___ ¿por qué? ______
- En que se diferencia el trayecto de Luis con el de Eduardo?

  ______
- Además del número de cuadras, que otro aspecto se tiene que agregar, para diferenciar un trayecto del otro? ______

  ______
- Simplifica simbólicamente el trayecto de Luis y el de Eduardo ______

COMENTARIO:

Pedro llega a buscar a Luis y a Eduardo; pero la señora de la casa esta insegura de donde estan sus hijos, y le dice: a Luis, búsquelo 3 cuadras al ESTE y 2 al SUR, en la casa C, y a Eduardo, 3 cuadras al ESTE y 2 cuadras al NORTE en la casa B.

- ¿Es correcta la información dada por la señora?

  sí, por qué? ______________________________

  no, por qué? ______________________________

- Si fuera posible hacer un solo trayecto, para Luis y Eduardo (es decir, ir de la casa A a las casas B y C) como lo representarías gráficamente en el plano de la ciudad, siendo bien específico para indicar de y para donde es el trayecto.

COMENTARIO: Olga y José, viven en la casa G y deciden ir a ver a su tío y novia, respectivamente, que viven en la casa I y J, respectivamente.

- Representa el trayecto de cada uno de ellos con lápiz de color
- ¿Camina cada uno de ellos el mismo número de cuadras? __si __ no
- ¿Hacen el recorrido sobre la misma avenida? __ si __ no
- ¿Cuál es la diferencia en cada uno de los recorridos? ___

  ____

- ¿En que sentido viajan Olga y José? ______________________________
- ¿Será suficiente, decir que Olga está a dos cuadras de G y sobre una misma avenida, para indicar que está en la casa I?

si, por qué? ___________________________________

no, por qué? ___________________________________

¿Qué otros aspectos hay que considerar? ______________

- En conclusión; de que elementos harás uso para ubicar el trayecto de un punto a otro en una ciudad? ____________
- Realiza otros recorridos del centro de la ciudad a las casas G, H y F, D
- Identifica cada uno de esos recorridos, con lápiz de color
- Identifica simbólicamente cada recorrido ______________

____

COMENTARIO:

Se observa que para identificar un cierto trayecto en el plano de la ciudad, no es suficiente enumerar el número de cuadras, sino que hay que definir en que dirección (avenida o calle) y el sentido (Norte Sur u Oeste Este), en que se camina.

Segunda Parte

3 grupos de jóvenes (2 por cada grupo) desarrollan la competencia siguiente; "Mover un bloque de hielo que esta sobre el piso" Fig. 2.1; cada grupo participa según la figura 2.2, 2.3 y 2.4; se ha convenido en que cada joven tiene la misma potencia en fuerzas

- Identifica cada grupo con las letras A, B, C. (respectivamente)
- Identifica como F_1, F_2 las fuerzas que hacen los jóvenes del grupo A; como F_3, F_4 las fuerzas que hacen los del grupo B y F_5 y F_6 las fuerzas que hacen los del grupo C.
- Qué grupo mueve con facilidad el bloque de hielo? ________

  ¿Por qué? ____
- ¿Qué grupo no mueve el bloque de hielo? _______ ¿por qué?

  ____
- ¿Qué grupo mueve con dificultad el bloque de hielo? _____
- A que se deben los resultados diferentes, si en cada grupo, los jóvenes realizan la misma cantidad de fuerzas? _______
- Las fuerzas F_1 y F_2 del grupo A estan en la misma dirección? __ si __ no; en el mismo sentido? __ si __ no
- Las fuerzas F_3 y F_4 del grupo B estan en la misma dirección? __ si __ no; en el mismo sentido? __ si __ no

- Las fuerzas F_5 y F_6 del grupo C estan en la misma direc--- ción? ___ si ___ no, en el mismo sentido? ___ si ___ no

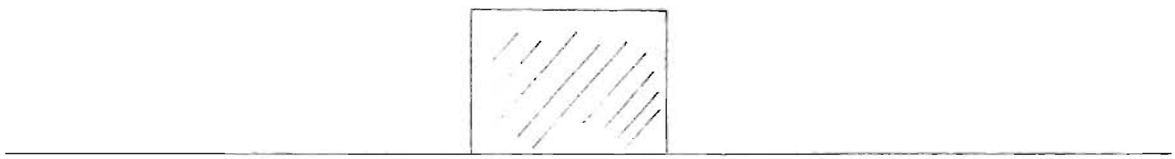


FIG. No. 2.1

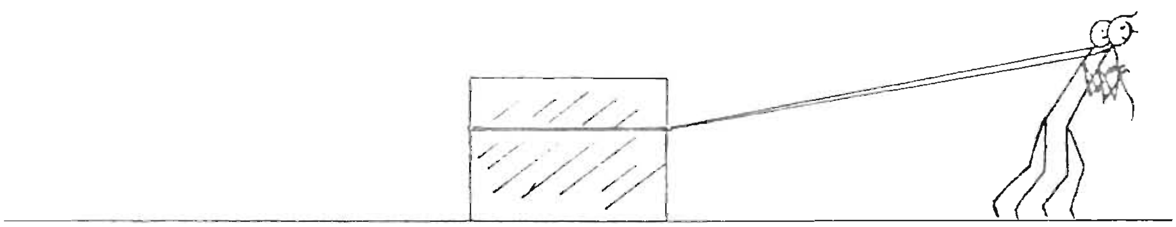


FIG. No. 2.2

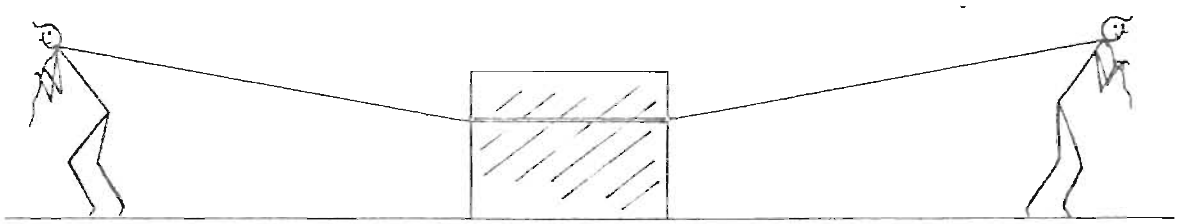


FIG. No. 2.3

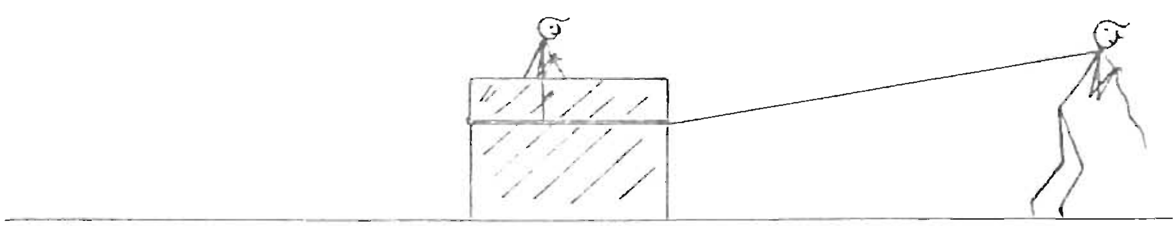


FIG. No. 2.4

COMENTARIO:

Si en el grupo B cambiamos al joven de la derecha por -- otro que tiene mayor fuerza

- ¿Crees que al hacer fuerzas se mueve el bloque de hielo?

  ___ si ___ no

- Si se mueve, hacia que lado sería? ____________________

- Identifica este nuevo grupo con la letra D

- Que aspectos diferentes existen entre el grupo B y D, con respecto al tipo de fuerzas que hacen los jóvenes? ________

  ____

- Dibuja las figuras 2,2, 2.3, 2.4, con trazos simples (esquematicamente) de tal manera que no aparezcan los jóvenes; pero sí, que se identifique hacia donde se dirigen las fuerzas

COMENTARIO:

Se observa que para mover el bloque de hielo, depende - del número de jóvenes y además de la FORMA cono se hace. En los grupos A,B se hace fuerza en la misma dirección; por lo tanto la "dirección" se puede identificar por una recta paralela a las fuerzas.

En los grupos D y B se hace fuerzas en sentido contrario (opuesto), por lo tanto podemos identificar el "sentido" de las fuerzas por su orientación (cada dirección tiene dos sentidos opuestos)

En los grupos A, B, C, los jóvenes tiene la misma cantidad de fuerzas, pero en el grupo D, los jóvenes tienen distinta cantidad de fuerza, por lo tanto, esta cantidad de fuerza se puede identificar como: magnitud de fuerza.

<u>En resumen</u>

Existen cantidades en la vida cotidiana, como la fuerza que no se pueden identificar con solo *su cantidad de fuerzas*, - sino que es necesario considerar otros elementos, tales como: la dirección y el sentido.

EXPOSICION: *CONCEPTO DE VECTOR*

Se llama vector a todo segmento orientado (Fig. 2.5), en el que se distinguen los aspectos siguientes: dirección, sentido y magnitud.

Se representa a los vectores con una sola letra con una flechita arriba $\vec{v}$ (Fig. 2.5) o bien por dos letras, con flechita arriba $\overrightarrow{OA}$ (que representa el origen y el extremo del vector) Fig. 2.6

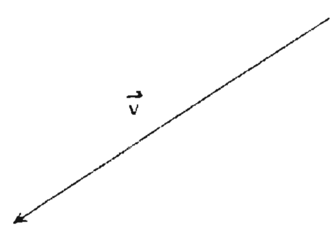


FIG. No. 2.5

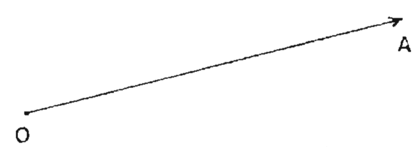


FIG. No. 2.6

REPRESENTACION DE LOS VECTORES EN EL PLANO

ACTIVIDAD 2.2

COMENTARIO:

Todas las actividades que se desarrollan a continuación, sobre un plano se identificarán en el plano $\mathbb{R}^2$ y en un "mismo" sistema de coordenadas rectangulares. ¿Entendido?

Objetivos

Que el estudiante:

a) Descubra que la noción (Física) de vector, se puede representar facilmente en un plano.

b) Determine que existe una manera simple (par ordenado) de identificar todo vector en el plano.

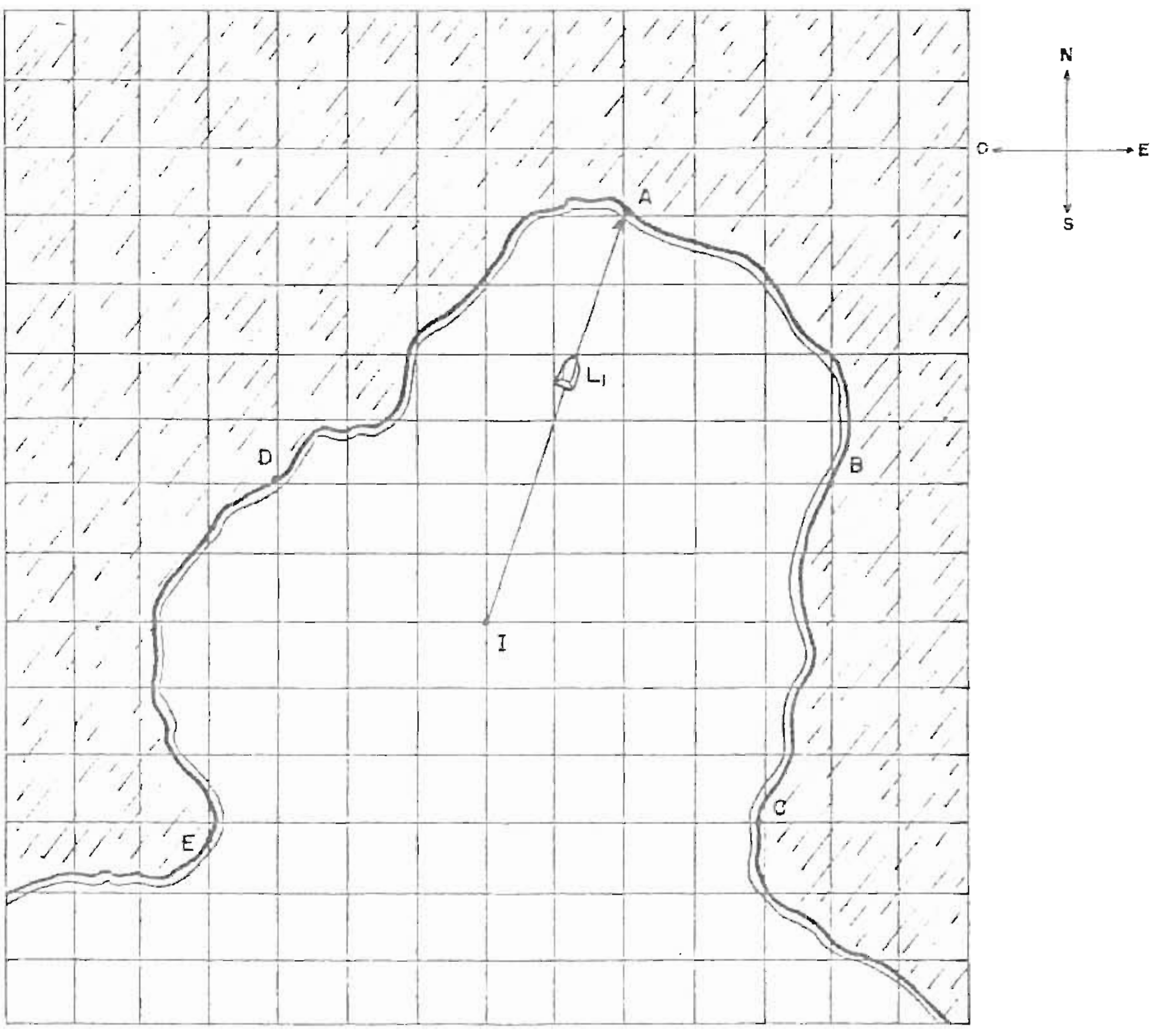
COMENTARIO:

Don Luis vive en una pequeña Isla, (Fig. 2.1) y es el único que produce cierto artículo, que tiene que distribuir todas las mañanas a los compradores en los muelles A, B, C, D, E; todos le han exigido que quieren su mercadería a las 7:00 horas; por lo que don Luis, dispone de cinco lanchas.

- Identifica las 5 lanchas como: L_1, L_2, L_3, L_4, L_5
- Identifica la Isla como punto de partida de las lanchas y llámala I
- Identifica la trayectoria de la lancha L_1 (de la Isla al Muelle A) como 2 km al Este y 6 km al Norte (se ha cuadriculado el mapa a una escala de 1:1 km). Ver Fig. 2.7
- Representa la trayectoria de L_1 mas simplemente: 2E y 6N, lo que se puede escribir (2E, 6N)
- Identifica en forma similar las trayectoria que seguirán

las lanchas L_2, L_3, L_4, L_5, para llegar a los muelles B, C, D, E respectivamente y grafica las trayectorias

- Determina las trayectorias que haran de regreso las lanchas L_1, L_2 ... L_5
- La trayectoria de la lancha L_1 se simboliza: (2E, 6N), podrías escribirlo en forma mas simple? ___ no ___ si, ¿como? ______



Esc. 1:1 Km.

FIG. No. 2.7

COMENTARIO:

Las cantidades básicas para describir una trayectoria - son las horizontales y verticales (en la orientación - del papel). En las horizontales: Este a la derecha y - Oeste a la izquierda; si usamos la convención del plano cartesiano, el camino de la Isla (origen del plano) al muelle D en vez de (3W, 2N) lo podemos escribir (-3,2). Como habría peligro de confundirse con los pares ordenados que representan a un PUNTO; es necesario aclarar - cuando el par es un vector y cuando es un punto.

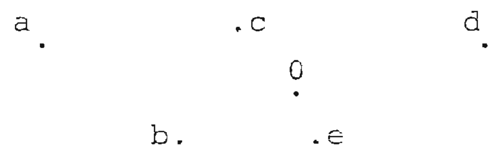
- Usando pares ordenados determina las trayectorias de las lanchas, cuando van de la Isla (I) a los muelles A, B, C, E
- Escribe como pares ordenados las trayectorias de las lanchas, cuando van de los muelles A, B, C, D, E a la Isla (I)
- Simboliza la trayectoria de la Isla (I) al muelle A como: "de I a A" o mas simplemente $\overrightarrow{IA}$; luego escribe: $\overrightarrow{IA} = (2,6)$ que significa: "el viaje entre I y A es 2 km al Este y 6 km al Norte" o en el plano cartesiano: "el viaje entre I y A es 2 unidades a la derecha, 6 hacia arriba"
- Simboliza en forma similar las trayectorias de las lanchas L_1, L_2, ..., L_5 de la Isla a los muelles y de los - muelles a la Isla.

EXPOSICION: *VECTORES EN EL PLANO*

He aquí el plano π

Todos los puntos del plano π desempeñan el mismo papel.

Se dibuja algunos puntos del plano π y se les llama a,b c,d,; se llama 0 a uno de sus puntos.



El punto *a* define la traslación o vector $\overrightarrow{oa}$ (ver Fig. 2.8)

FIG. No. 2.8

Hemos designado como $\vec{\pi}$ el conjutno de vectores del plano π por lo tanto:

$$\vec{\pi} = \{\vec{p} = \overrightarrow{op} \ / \ p \in \pi\}$$

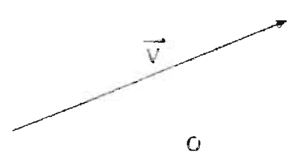
Hemos designado cono π_o el plano π en el cual hemos llamado 0 a uno de sus puntos.

Es evidente que la aplicación: $\pi_o \longrightarrow \vec{\pi}$

$p \leadsto \vec{p} = \overrightarrow{op}$ es una biyección

Por lo tanto es posible representar todo vector de $\vec{\pi}$ - por un punto del plano π_o

He aquí un vector $\vec{v}$ de $\vec{\pi}$



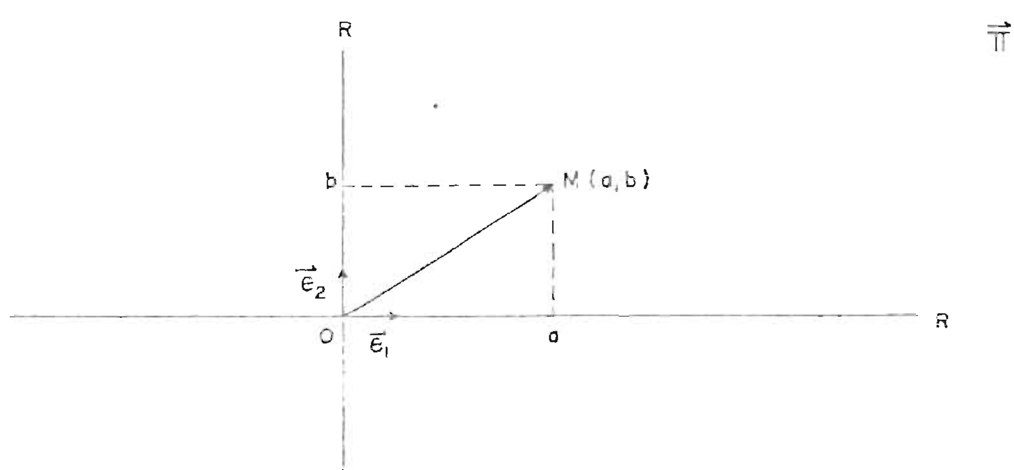
Construye el punto v que representa al vector $\vec{v}$

EXPOSICION: *VECTORES EN UN MISMO PLANO DEFINIDOS EN UN SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES R^2*

En la sección anterior, para referirnos a un plano, utilizamos la letra π en donde se identifican sólo puntos; designaremos como $\vec{\pi}$ al plano vectorial asociado al plano π; en este plano identificamos vectores.

Todo vector $\overrightarrow{OM}$ en el plano $\vec{\pi}$ (con su sistema de coordenadas R^2) será representado de la forma: (a,b) que son las coordenadas del punto M (ver Fig. 2.9); en donde es necesario definir su referencia del sistema cartesiano que se USE; así: $(0, \vec{e_1}, \vec{e_2})$; en donde 0: origen del plano; $\vec{e_1}$: unidad de longitud en la recta Y = 0 y $\vec{e_2}$: unidad de longitud en la recta X = 0.

El vector $\overrightarrow{OM}$ = (a,b) está determinado especificamente como un par ordenado; del cual se identifica su dirección, sentido y magnitud.



EJERCICIOS 2.1

COMENTARIO

Convengamos en identificar la referencia de sus escalas en las rectas $Y = 0$ y $X = 0$, así $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ en donde:

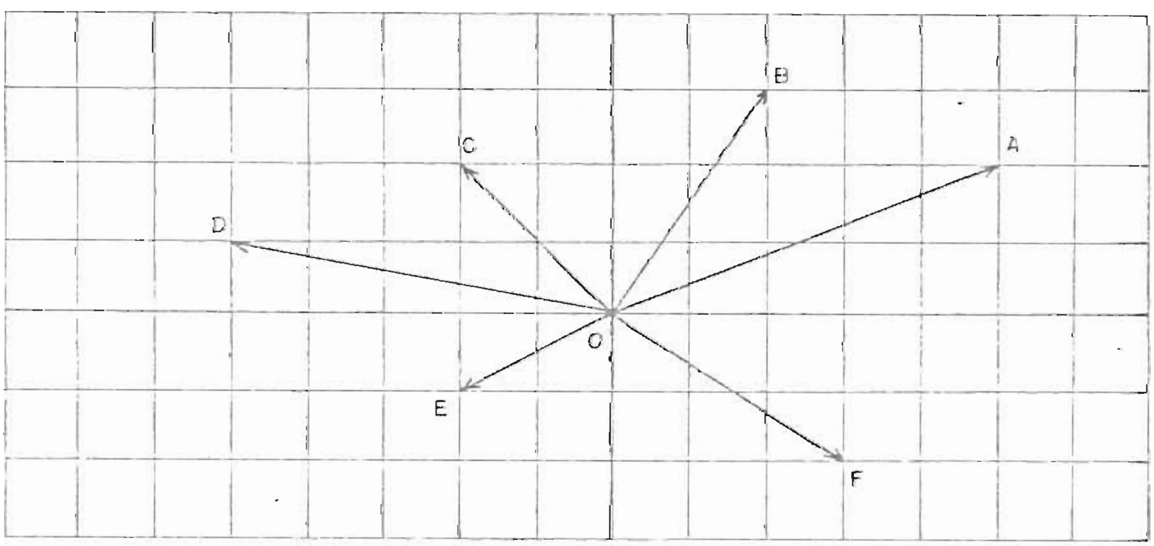
0: Origen

$\vec{e}_1$: Unidad de longitud en la recta $Y = 0$

$\vec{e}_2$: Unidad de longitud en la recta $X = 0$

2.2.1 En el plano π se tiene un número de vectores en el plano cartesiano.

Identifica simbólicamente cada uno de ellos.



2.1.2 En un plano con SCCR de R^2, grafica los vectores:

$\vec{u} = (4,5)$; $\vec{v} = (-3,6)$; $\vec{w} = (-4,-2)$ $\vec{s} = (4,-3)$;

$\vec{t} = (0,5)$

INTRODUCCION A LAS OPERACIONES CON VECTORES

ACTIVIDAD 2.3

Objetivos

Que el estudiante:

a) Reafirme el concepto de vector, con sus tres caracter--rísticas: magnitud, sentido y dirección.

b) Determine una idea intuitiva de sumar vectores en forma gráfica.

c) Obtenga conclusiones de los gráficos realizados.

PROCEDIMIENTO

En la Fig. 2.10, se observa un río, cuyas aguas van a - una velocidad de 20 mts. por minuto, de izquierda a derecha (ver flechita); además se identifican dos posiciones a las orillas del río: 0 y A (opuestas entre si); - el ancho del río es de 40 metros.

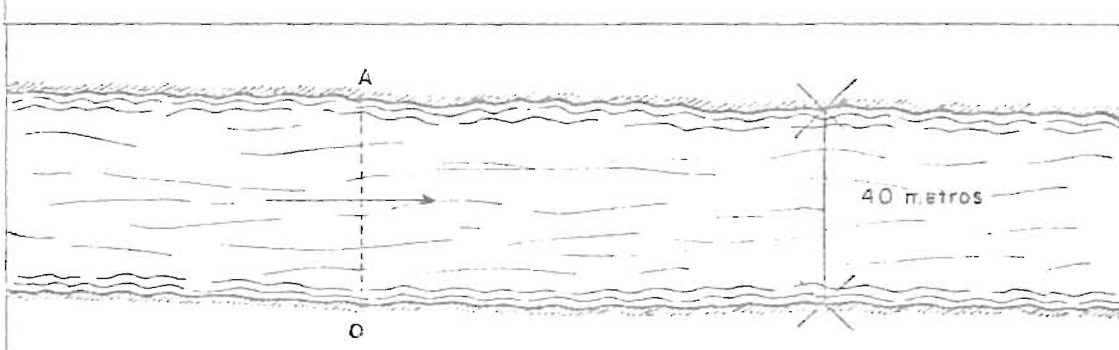


FIG. No. 2.10

- Para facilitar las siguientes preguntas se ha esquematizado la Fig. 2.10, con la Fig. 2.11 (a una escala de 1 - cm por cada 10 metros)

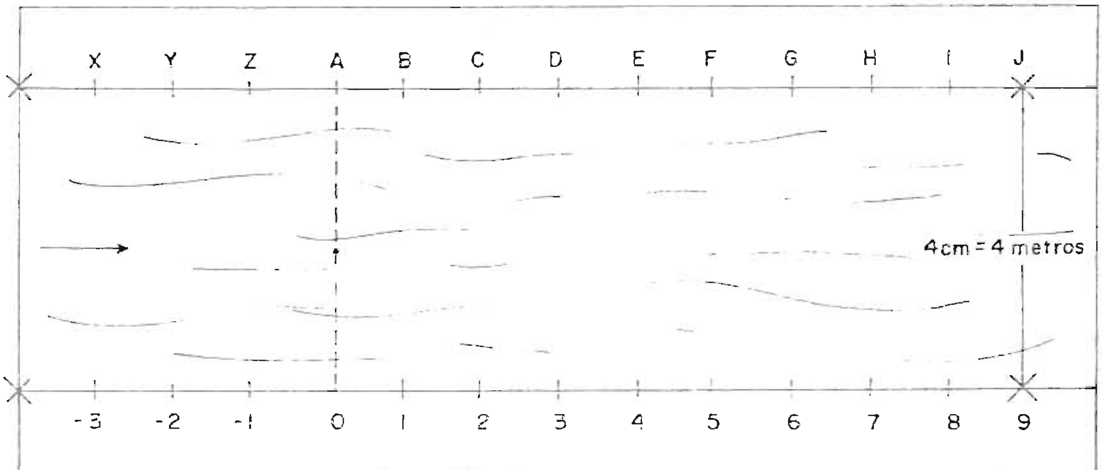


FIG. No. 2.11

Se desarrollan 4 competencias:

1a. Tres jóvenes: W, K y L que nadan a 40, 20, 10 me-- tros por minuto respectivamente, se lanzan al agua (uno por uno) desde la posición 0 en la dirección de A.

¿Crees que los 3 jóvenes (W, K y L) llegarán a la posición A? ____ sí ____ no, por qué? ____________________

Recuerda que la velocidad del agua es de 20 metros por minuto.

- Identifica la posición a la que llega W al otro lado del río.
- Representa con una flecha de orilla a orilla, (en la Fig. 2.11) la trayectoria que siguió W.
- Identifica la trayectoria de W con $\vec{v}_1$
- Mide con la regla la distancia que nadó W y trasládala a metros e identifícala con la letra d_1
- Identifica la posición a la que llega K al otro lado del río.
- Representa con una flecha de orilla a orilla (en la Fig. 2.11), la trayectoria que siguió K
- Identifica la trayectoria de K con $\vec{v}_2$
- Mide con la regla la distancia que nadó K y trasládala a metros e identifícala con la letra d_2
- Identifica la posición a la que llega L al otro lado del río
- Representa con una flecha (en la Fig. 2.11) la trayecto-- ria que siguió L
- Identifica la trayectoria de L con $\vec{v}_3$
- Mide con la regla la distancia que nadó L y trasládala a metros e identifícala con la letra d_3
- ¿Nadaron los 3 jóvenes la misma distancia? ___ si ___ no
- ¿Quién nadó la menor distancia? _____ por qué? ____________
- ¿Quién nadó la mayor distancia? _____ por qué? ____________
- ¿Quién tardó mas tiempo en atravezar el río? ____________

- Dibuja con flechas, aparte de la Fig. 2.11, indicando la dirección de lanzamiento de los jóvenes, la dirección del agua y la dirección de nado que siguió cada joven.

2a. Esquematiza otra figura idéntica a la Fig. 2.11 y llámala la Fig. 2.11-A

* Tres jóvenes: P, Q, R, que nadan a una misma velocidad: 40 metros por minuto, se lanzan al agua (uno por uno) desde la posición 0 en la dirección: X, A, D; respectivamente.

- ¿Crees que los 3 jóvenes llegarán al otro lado del río al mismo punto? ___ si ___ no, por qué? ______________________
- Determina la relación entre la velocidad de nado de los jóvenes y la velocidad de la corriente del agua (ayuda: por cada 10 metros que el joven nada, el río lo arrastra 5 métros)
- Representa con flechas las trayectorias de lanzamiento (de orilla a orilla) de los jóvenes P, Q, R desde la posición 0 en la dirección X, A, D; respectivamente.
- Identifica cada trayectoria con $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$; respectivamente
- Mide con una regla la distancia de las trayectorias $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ e identifícalas con las letras d_1, d_2, d_3; respectivamente.

Recuerda, por cada 2 metros que el joven nada, el río - lo arrastra un metro.

- Identifica la posición a la que llegarán P, Q, R al otro lado del río
- Representa con flechas (de otro color) las trayectorias - de nado que seguirán P, Q, R al atravezar el río
- Identifica cada trayectoria con $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$; respectivamente.
- Mide con una regla la distancia de las trayectorias $\vec{a}_1$, - $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$.
- ¿Quién nadó menor distancia? ______________________
- ¿Quién nadó mayor distancia? ______________________
- ¿Quién llegó mas cerca del punto A (al otro lado del río)?

  ____

- Dibuja con flechas, aparte de la Fig. 2.11-A indicando la dirección de lanzamiento de cada joven, la dirección de - la corriente del agua; y la dirección de nado que siguió cada joven.

3a. Dibjuja otra figura idéntica a la Fig. 2.11 y llámala - Fig. 2.11-B.

* Dos jóvenes S_1, S_2 que nadan a 50 y 20 metros por minuto, respectivamente, se lanzan al agua (uno por uno); S_1 lo hace desde la posición 5 en la dirección C y S_2 lo hace desde la posición 2 en la dirección Z.

- Determina la relación entre la velocidad de nado de cada joven con la velocidad del agua.
- Representa con flechas las trayectorias de *lanzamiento* (de orilla a orilla) de los jóvenes S_1 y S_2; desde las posiciones: 5 y 2 hasta los puntos C y Z, respectivamente
- Identifica cada trayectoria con $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, respectivamente.
- Mide con una regla las distancias de las trayectorias $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y trasládala a metros e identifícalas con las letras d_1 y d_2
- Identifica la posición a la que llegarán S_1 y S_2 (al otro lado del río)
- Llegarán S_1 y S_2 al mismo punto al otro lado del río? ___ si ___ no.
- Representa con flechas (de otro color) las trayectorias de *nado* que seguirán S_1 y S_2 desde las posiciones 5 y 2, respectivamente
- Identifica cada trayectoria con $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$, respectivamente
- ¿Llegarán los dos jóvenes al mismo punto, al otro lado

del rio? ___ si ___no

- ¿Por qué llegaron los dos al mismo punto lanzándose de diferentes posiciones? ______________________________

- ¿Quién nadó menor distancia? ________________________

- Dibuja con flechas (aparte de la Fig. 2.11-B) indicando - la dirección de lanzamiento de cada joven, la dirección - del agua y la dirección de nado que siguió cada joven.

4a. Dibuja otra figura idéntica a la Fig. 2.11 y llámala -- Fig. 2.11-C

- Dibuja un bote de remos en el punto medio del río entre el número 0 y la letra A e identifícalo con la letra B'

* Dos jóvenes T_1, T_2 que nadan a 40 metros por minuto - cada uno, se lanzan al agua (simultaneamente) desde - el bote (B') que está anclado (fijo). T_1 lo hace a la derecha y T_2 lo hace a la izquierda.

- Después de un minuto de haberse lanzado al agua T_1 y T_2, identifica con las letras W_1 y W_2 las posiciones a las - que han llegado.

- Representa con flechas las trayectorias de nado de T_1 y - T_2.

- Quién está mas lejos del bote? _____, por qué? __________

____

- Quién está mas cerca del bote? ____, por qué? __________

____

- A qué distancia del bote se encuentran T_1 y T_2? ________
- A qué se debe que no estan a la misma distancia? ________

____

- ¿Si T_2 después del primer minuto deja de nadar, un minuto después en que posición estará? ____________________

COMENTARIO:

Se distinguen 3 aspectos claramente en esta actividad: en el caso 1º. la variación de magnitud; cada joven nada diferente distancia; en el 2ª. y 3er. caso la variación de dirección (diferentes direcciones de lanzamiento) y en el 4º. caso la variación de sentido, diferente sentido (opuesto) en el lanzamiento de cada joven. Siempre que se manejen los elementos: dirección, sentido y magnitud, se estará relacionando con el conepto de vector.

En resumen:

Si un joven se mueve con una velocidad $\vec{v}$ en un río, cuyas aguas tienen una velocidad $\vec{u}$; el resultado es que el joven se mueve con una velocidad resultante $\vec{w}$ (El vector $\vec{w}$ es la suma de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$; (ver Fig. 2.12)

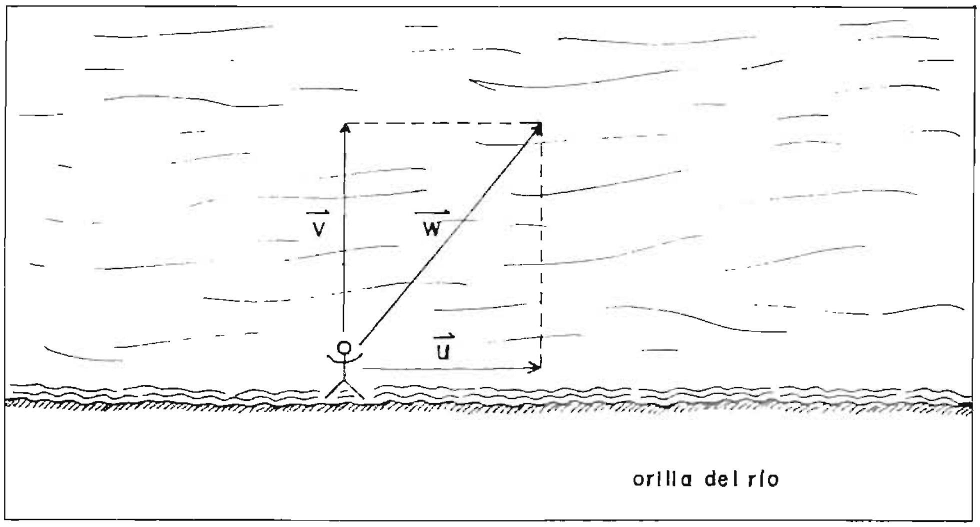


FIG. No. 2.12

SUMA DE VECTORES COMO PARES ORDENADOS

ACTIVIDAD 2.4

Objetivos

Que el estudiante:

a) Descubra la forma gráfica y con pares de sumar y vectores.
b) Identifique el método del paralelogramo, para sumar vectores.
c) Obtenga conclusiones de los gráficos.

PROCEDIMIENTO:

En la Fig. 2.13 se muestra el plano de una ciudad en forma esquematizada, para facilitar la ubicación de algunos lugares.

El origen del plano cartesiano, identifica al centro de la ciudad.

COMENTARIO:

Convengamos en que si una persona se moviliza en la ciudad; el RECORRIDO se representará como un par ordenado; por ejemplo, si está en una posición X y se moviliza 2 cuadras a la derecha (Este) su representación es (2,0), si es 2 cuadras hacia arriba (Norte) (0,2), si es 2 cuadras hacia abajo (Sur) (0,-2); es decir en el par ordenado: la primera componente, identifica el recorrido - (Izquierda-derecha), la segunda componente, identifica el recorrido (arriba-abajo)

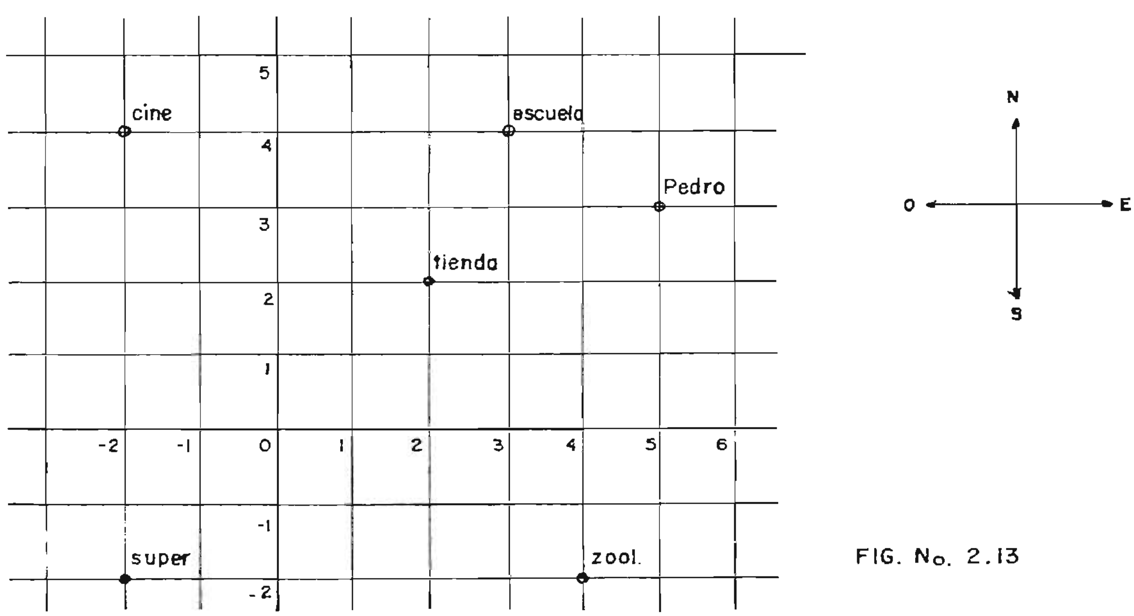


FIG. No. 2.13

Primera Parte

- Partiendo del centro de la ciudad, de cuantas maneras puedes llegar a la casa de Pedro; P(5,3)?
- Identifica algunas *rutas* con colores diferentes, para llegar a la casa de Pedro.
- Selecciona algunas *rutas* e identifícalas con las letras - r_1, r_2, r_3, ... etc.
- Para cada ruta; determina los distintos *recorridos* a la - izquierda, derecha, arriba o abajo y representa cada recorrido, con su respectivo par ordenado.
- Selecciona la ruta r_1
- Determina cuantos recorridos se dan en la ruta r_1
- Identifica los recorridos de la siguiente manera: $\overrightarrow{OA}$ después $\overrightarrow{AB}$ después $\overrightarrow{BC}$ ... hasta llegar a la casa de Pedro - (según el número de recorridos)
- Identifica los recorridos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, ... etc., con sus - respectivos pares ordenados
- Suma los pares ordenados (se suman las primeras y segun-- das componentes de cada par); por ejemplo:

$$(1,0) + (2,4) = (3,4)$$

- Se podrá representar la suma de los recorridos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, - etc., como un sólo recorrido $\overrightarrow{OP}$? ___ sí ___ no
  * Si tu respuesta es sí, simboliza esa suma de recorridos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, ... etc., con el recorrido $\overrightarrow{OP}$

- Selecciona la ruta r_2
- Determina cuantos recorridos se dan en la ruta r_2
- Identifica los recorridos así: $\overrightarrow{OK}$, después $\overrightarrow{KL}$, después $\overrightarrow{LM}$, etc., hasta llegar a la casa de Pedro.
- Identifica los recorridos $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{LM}$, ... etc., con sus - respectivos pares ordenados.
- Suma los pares ordenados
- Se podrá representar la suma de los recorridos $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{KL}$, - $\overrightarrow{LM}$, etc., como un sólo recorrido $\overrightarrow{OP}$? ___ sí ___ no; si su respuesta es sí:
  * Simboliza la suma de los recorridos $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{KL}$, ... etc., - con el recorrido $\overrightarrow{OP}$
- Selecciona otras rutas r_3, r_4, ... etc., y haz un procedimiento igual a los que se te han planteado anteriormente
- ¿Independientemente de la ruta que se seleccioné; al sumar los pares ordenados en cada ruta, tu resultado siempre es (5,3)? ___ sí ___no
- Qué concluyes? ______________________________________

  ____
- ¿Se podrán identificar todas las rutas r_1, r_2, r_3, r_4, ... etc., con una sóla ruta $\overrightarrow{OP}$? ___ sí ___ no

COMENTARIO:

Se analizarán otras rutas más específicas, para obtener un resultado más simple, con respecto a la suma de pa-- res ordenados.

- Selecciona 2 recorridos para ir del centro a la Escuala; e identifícalos así: $\overrightarrow{OA}$, después $\overrightarrow{AE}$
- Determina para cada recorrido $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AE}$ su respectivo par ordenado
- Suma estos pares ordenados y compara el resultado con el par del recorrido $\overrightarrow{OE}$, ¿son iguales? ___ sí ___ no
- ¿Se podrá representar la suma de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{AE}$ como: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE}$? ___ sí ___ no
- Selecciona 2 recorridos para ir de la Escuela a la casa - de Pedro; e identifícalos así: $\overrightarrow{EK}$, después $\overrightarrow{KP}$
- Determína para cada recorrido $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{KP}$, su respectivo par - ordenado
- Suma estos pares ordenados y compara el resultado con el par del recorrido $\overrightarrow{EP}$, ¿son iguales? ___ sí ___ no
- Se podrá representar la suma de EK y KP como: $\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{EP}$? ___ sí ___ no
- Suma los pares que representan a los recorridos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EK}$ y $\overrightarrow{KP}$
- ¿El resultado de la suma anterior es el par (5,3)? ___ sí

____ no

- ¿Se podrá representar la suma de $\overrightarrow{OE}$ y $\overrightarrow{EP}$ como; $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{OP}$?

  ___ sí ___ no

- En el plano de la ciudad representa con flechas la ruta $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{EP}$ y $\overrightarrow{OP}$

- ¿Se podrá interpretar que la suma del vector $\overrightarrow{OE}$ con el vector $\overrightarrow{EP}$ es igual al vector $\overrightarrow{OP}$? ___ sí ___ no

- ¿Se podrá interpretar que la suma de los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EK}$ y $\overrightarrow{KP}$ es igual al vector $\overrightarrow{OP}$? ___ sí ___ no

COMENTARIO:

La combinación de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EK}$ y $\overrightarrow{KP}$ que resulta de $\overrightarrow{OP}$, es una forma de suma; luego se puede escribir:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EK} + \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{OP}$$

Además la suma gráfica de vectores se interpreta como colocar un vector a continuación de otro y el vector resultante es igual al vector de origen, al extremo del último.

Ver Fig. 2.14

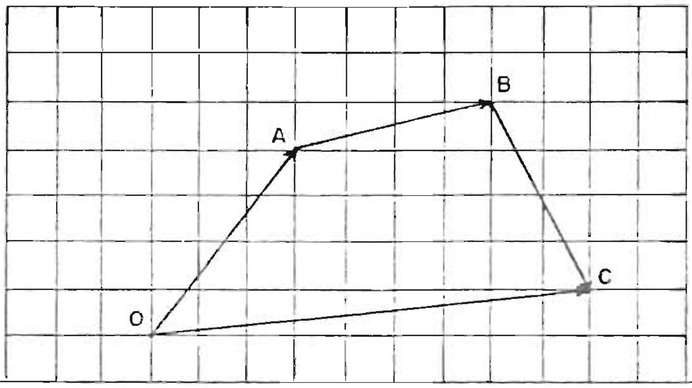


FIG. No. 2.14

- La interpretación de suma de vectores como pares, se determina así: (ver Fig. 2.14).

  Como: $\overrightarrow{OA} = (3,4)$; $\overrightarrow{AB} = (4,1)$; $\overrightarrow{BC} = (2,-4)$ y $\overrightarrow{OC} = (9,1)$

  luego:
  $$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= (3,4) + (4,1) + (2,-4)\\ &= (3 + 4 + 2,\ 4 + 1 + (-4))\\ &= (9,1)\\ &= \overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

  * Repita los procedimientos anteriores para ir del centro de la ciudad a otros lugares: Cine, Tienda, Super, Zoo.

Segunda Parte

Si tenemos 3 puntos colineales A, B, C (en una misma dirección), entonces la suma se puede interpretar de dos formas: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (Fig. 2.15)

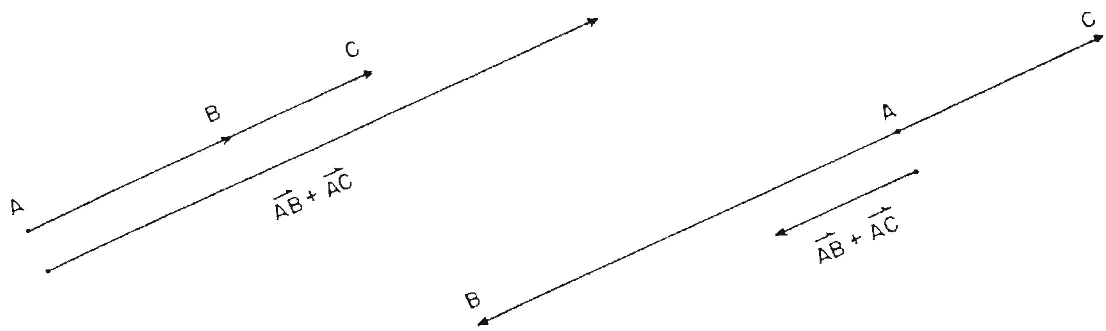


FIG. No. 2.15

Procedimiento para sumar vectores en una misma dirección:

Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ realiza las siguientes sumas:

———————————> $\vec{u}$ ——————> $\vec{v}$ <——————————— $\vec{w}$

1º) $\vec{u} + \vec{v}$

- Traza dos rectas paralelas en la dirección de los vecto--res (separados 2 cm aproximadamente) e identifícalos con las letras D y D' (ver Fig. 2.16)
- Coloca los dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ sobre la recta D de tal manera que coincidan los dos orígenes de los vectores (identifícalo con la letra O) (ver Fig. 2.16)
- Ubica un punto P en la recta D' (ver Fig. 2.16)

———————————————————————— D'

———————————————————————— D

- Traza segmentos de recta desde el origen al punto P y después desde el punto P al extremo del vector $\vec{u}$ (formando - un triángulo)
- Traza otro segmento de recta desde el extremo del vector $\vec{v}$ paralelo al segmento OP hasta tocar un punto de la recta D'; e identifícalo como P'
- Traza otro segmento de recta desde el punto P' hasta la - recta D que sea, paralela al segmento que va desde el punto P al extremo del vector $\vec{u}$
- Identifica este punto con la letra E

- Traza un vector desde el punto 0 al punto E
- El vector $\overrightarrow{OE}$ es la suma de los vectores $\vec{v} + \vec{u}$

2º.) $\vec{u} + \vec{w}$

Aquí haz lo mismo, lo único que en vez del vector $\vec{v}$ - utiliza $\vec{w}$ en todo

EXPOSICION: *SUMA DE VECTORES, COMO PARES ORDENADOS*
Fijemos la referencia $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en el plano Sean (x_1, y_1) las coordenadas del vector v_1 que pertenecen a π y Sean (x_2, y_2) las coordenadas del vector v_2 que pertenecen a π
Def. 2.1 Si $(x_1, y_1) \in R^2$ y $(x_2, y_2) \in R^2$ entonces $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
Luego: $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ son las coordenadas de $v_1 + v_2$

Adición de vectores = Adición de Coordenadas

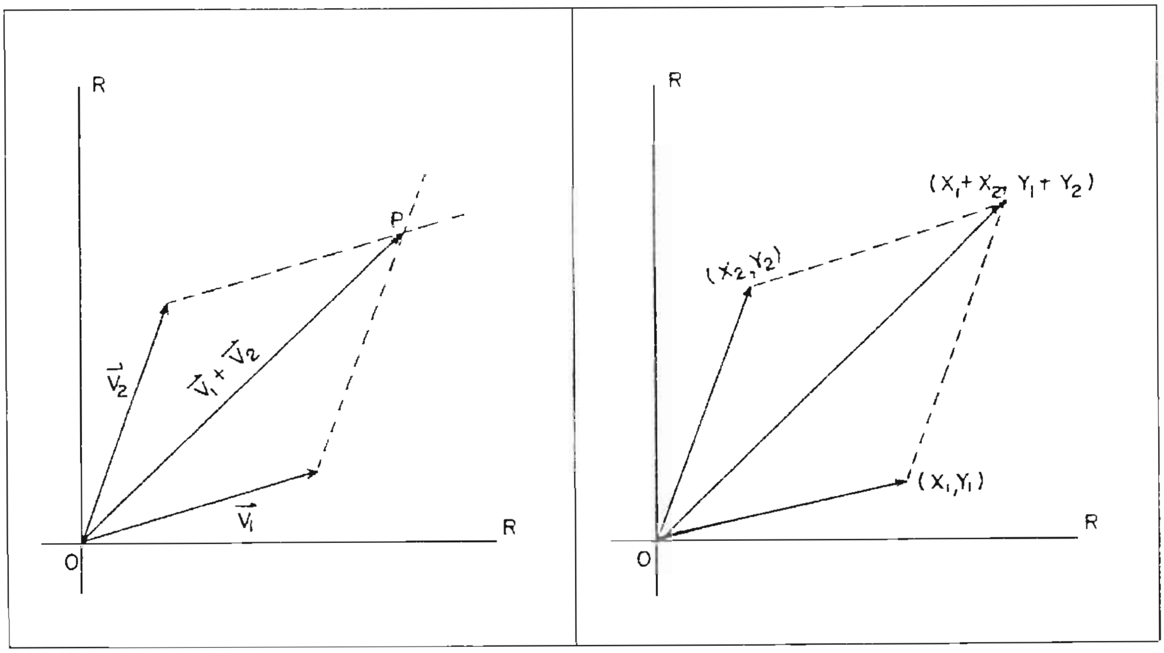


FIG. No. 2.17

En la Fig. 2.17 hemos obtenido el vector suma, usando un método gráfico llamado: "ley del paralelogramo". Que consiste en trazar rectas paralelas a los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, hasta cortarse en un punto P; el vector suma $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, es la diagonal del paralelogramo (del punto 0 al punto P).

COMENTARIO:

A veces se tiene ventaja simbólica cuando se conoce el origen y extremo de un vector; veamos el siguiente caso:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$$

El vector resultante de la suma se identifica como el - origen del primero (o) con el extremo del último (D), - es decir $\overrightarrow{OD}$

He aquí su representación gráfica (Fig. 2.18)

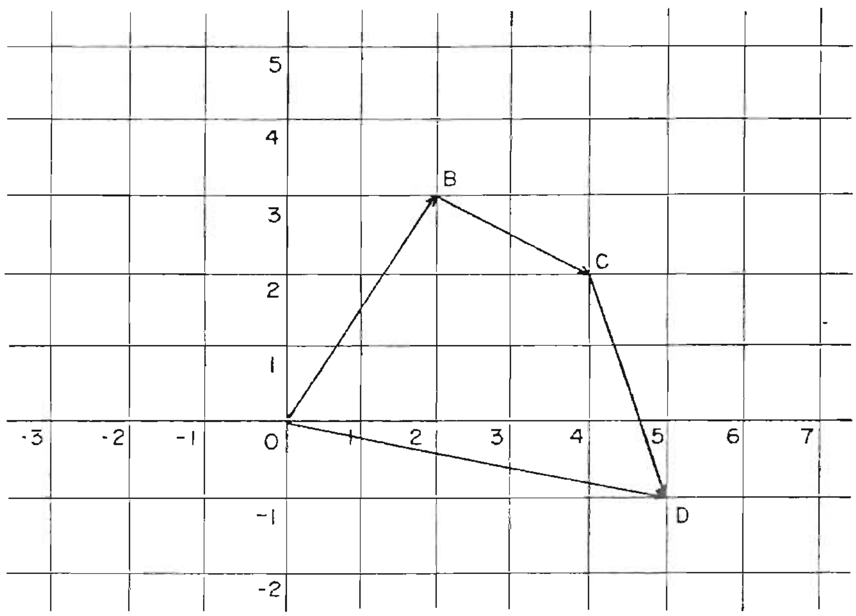


FIG. No. 2.18

Realizando la suma como pares ordenados, tenemos:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (2,3) + (2,-1) + (1,-3)$$

$$= (5,-1)$$

$$= \overrightarrow{OD}$$

PROPIEDAD CONMUTATIVA Y ASOCIATIVA DE LOS VECTORES

ACTIVIDAD 2.5

Objetivos

Que el estudiante

a) Realice procesos gráficos para descubrir las leyes de Conmutatividad y Asociatividad en los Vectores.

b) Determine que se pueden comprobar las leyes: Conmutativa y Asociativa en los vectores (forma gráfica).

PROCEDIMIENTO:

<u>Primera Parte</u>

- Toma un plano π (cuadriculado)
- Representa un sistema de coordenadas cartesianas en el plano π (SCCR)
- Identifica el origen del sistema con la letra O
- Define claramente la referencia $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$
- Utiliza una escala adecuada
- Partiendo del origen, grafica el vector $\vec{u} = (2,5)$
- A continuación del vector $\vec{u}$ suma el vector $\vec{v} = (4,-2)$
- Representa gráficamente el vector $\vec{u} + \vec{v}$ y determina el resultado de la suma como par ordenado
- Luego, a partir del origen, grafica el vector $\vec{v} = (4,-2)$
- A continuación del vector $\vec{v}$ suma el vector $\vec{u} = (2,5)$
- Representa gráficamente el vector $\vec{v} + \vec{u}$ y determina el

resultado de la suma como par ordenado

- ¿el vector suma: $\vec{u} + \vec{v}$ es el mismo vector suma: $\vec{y} + \vec{u}$?

  ___ sí ___ no

- ¿Como pares ordenados: $\vec{u} + \vec{v}$ resulta ser igual a $\vec{v} + \vec{u}$?

  ___ sí ___ no

- ¿Qué concluyes de este tipo de suma? ______________________

  ____

- Suma los vectores $\vec{a} = (-2,4)$; $\vec{b} = (4,2)$ de las dos formas: $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{b} + \vec{a}$; gráficamente y como pares ordenados (en otro plano). Obtenga conclusiones.

COMENTARIO:

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$; la suma de los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{v} + \vec{u}$ se ilustra en la Fig. 2.19; este aspecto nos induce a determinar que: la suma vectorial es CONMUTATIVA

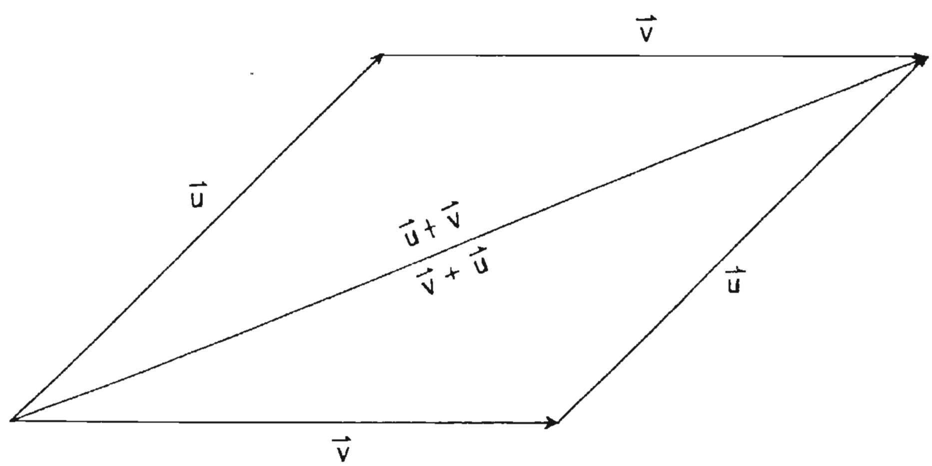


FIG. No. 2.19

Segunda Parte

- Toma otro plano π (cuadriculado)
- Identifica un sistema de coordenadas cartesianas en el - plano π. (SCCR).
- Identifica el origen del sistema, con la letra O
- define especificamente su referencia $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$
- Utiliza una graduación adecuada
- A partir de O grafica el vector $\vec{u} = (1,3)$; seguido de $\vec{u}$, el vector $\vec{v} = (2,2)$
- Identifica la suma de $\vec{u} + \vec{v}$ con el vector $\vec{c}$
- Representa gráficamente la suma de $\vec{u} + \vec{v}$ (de otro color)
- Seguido del vector c grafica el vector $\vec{w} = (3,-3)$
- Identifica la suma de $\vec{c} + \vec{w}$ con el vector $\vec{n}$ (gráficamente)
- Determina la suma de $\vec{c} + \vec{w}$ con pares ordenados
- Identifica la suma de $\vec{v} + \vec{w}$ con el vector $\vec{r}$ y represénta-lo gráficamente (de otro color) y como par ordenado
- Identifica la suma de $\vec{u} + \vec{r}$ con el vector $\vec{s}$ (gráficamente)
- Determina la suma de $\vec{u} + \vec{r}$ con pares ordenados
- ¿Cómo es el vector $\vec{n}$ con el vector $\vec{s}$? ____________________
- ¿Tienen los vectores $\vec{n}$ y $\vec{s}$ las mismas coordenadas como pares? ___ sí ___ no
- ¿Se podrá escribir: $\vec{c} + \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$? ___ sí ___ no
- ¿Se podrá escribir: $\vec{u} + \vec{r} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$? ___ sí ___ no
- Si el resultado de $\vec{n}$ y $\vec{s}$ son iguales, ¿se podra escribir: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$? ___ sí ___ no

- ¿Qué concluyes de este tipo de suma? ______________________

COMENTARIO:

Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$; la suma de los vectores: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ y $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ se ilustra en la Fig. 2.20

Este criterio nos induce a determinar que: la suma vectorial es ASOCIATIVA.

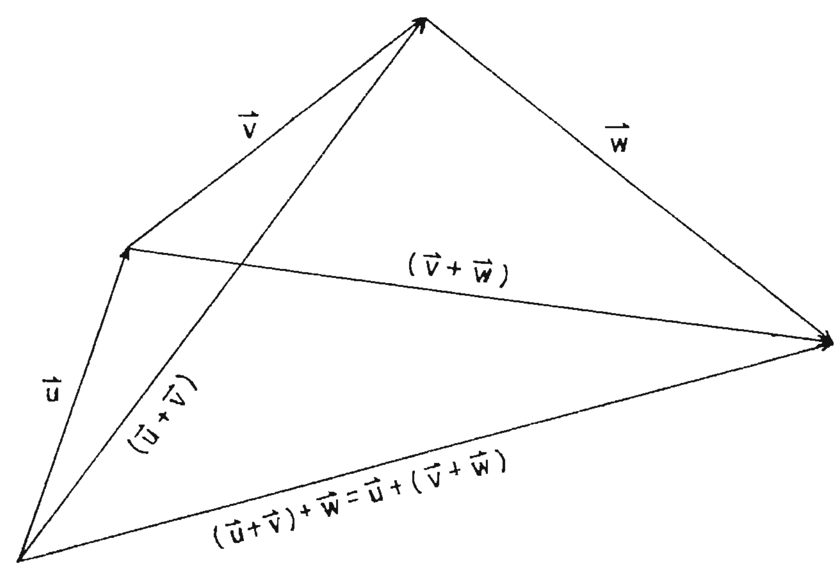
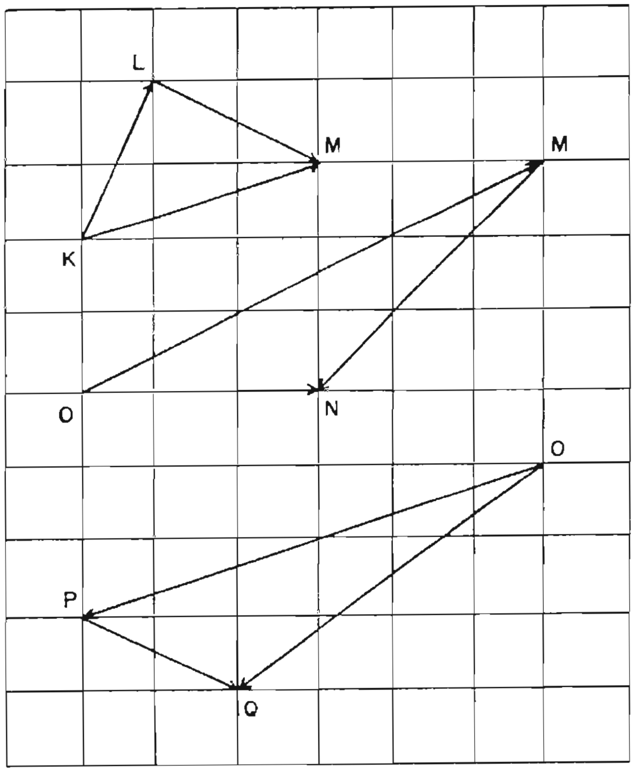


FIG. No. 2.20

EJERCICIOS 2.1

Dado el siguiente gráfico efectúa las sumas (por pares ordenados) indicados en cada caso:

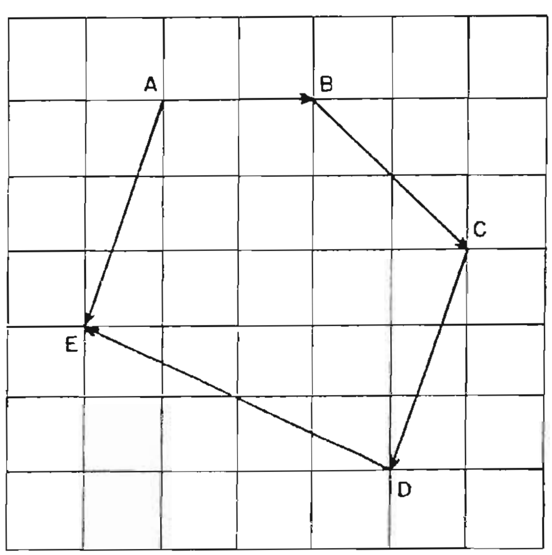
Por ejemplo: $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KM}$



1: 1cm.

2) Verifica la suma gráfica del siguiente diagrama, haciéndolo con pares ordenados.

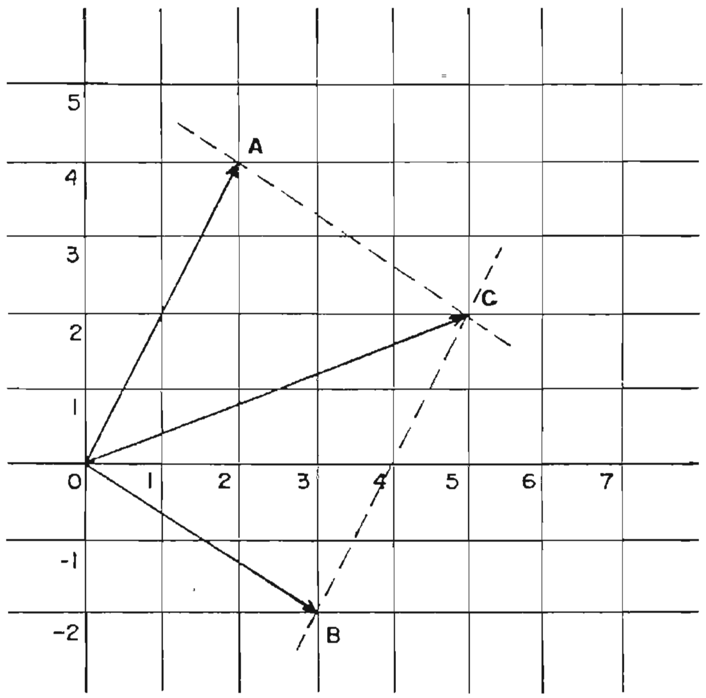
Es decir que: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$



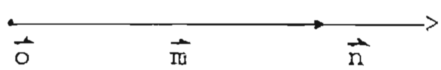
1: 1cm.

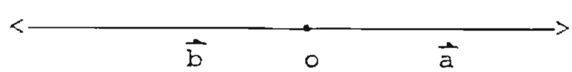
3) Del siguiente diagrama en donde se ha utilizado el método del paralelogramo para sumar los vectores $\overrightarrow{OA}$ con $\overrightarrow{OB}$ - verifica que:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ y que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ (utilizando pares ordenados)



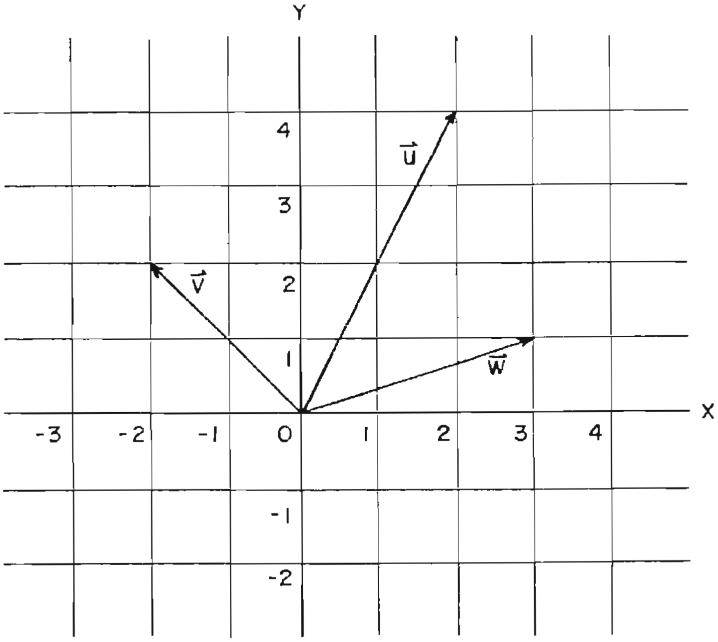
4) Del siguiente gráfico efectúe $\vec{m} + \vec{n}$ y $\vec{a} + \vec{b}$

i) 

ii) 

5) Si $\vec{u} = (4,-2)$ y $\vec{v} = (-4,2)$ efectúa $\vec{u} + \vec{v}$ gráficamente y por pares.

6) Dados los vectores $\vec{v} = (-2,2)$; $\vec{u} = (2,4)$ y $\vec{w} = (3,1)$ efectúa las sumas siguientes en forma gráfica (un plano para cada suma) y como pares ordenados.



i) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

ii) $\vec{v} + \vec{w} + \vec{u}$

iii) $\vec{w} + \vec{u} + \vec{v}$

iv) $\vec{u} + \vec{w} + \vec{v}$

7) Utilizando el método del paralelogramo efectúa las sumas siguientes (en papel cuadriculado).

i) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; si $\overrightarrow{OA} = (2,4)$ y $\overrightarrow{OB} = (3,2)$

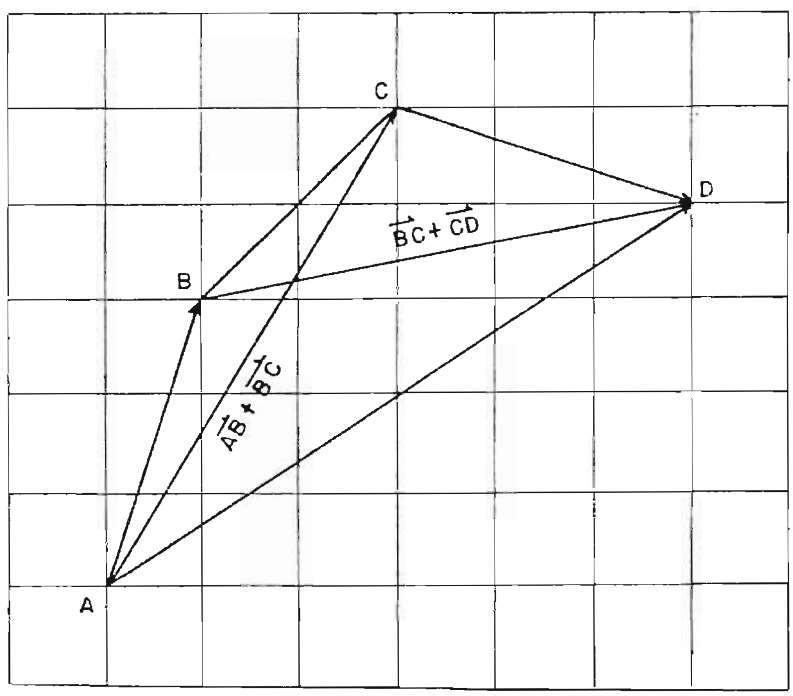
ii) $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$; si $\overrightarrow{OE} = (2,4)$ y $\overrightarrow{OF} = (4,-3)$

iii) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$; si $\overrightarrow{OC} = (-2,4)$ y $\overrightarrow{OD} = (4,1)$

iv) $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH}$; si $\overrightarrow{OG} = (-3,4)$ y $\overrightarrow{OH} = (3,4)$

v) $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$; si $\overrightarrow{OI} = (1,4)$ y $\overrightarrow{OJ} = (3,-1)$

8) En el siguiente diagrama se ilustra la suma de los vecto res:



$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$ de dos maneras

i) $(\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AD}$

ii) $(\vec{AB}) + (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AD}$

verifícalo utilizando pares ordenados.

COMENTARIO:

En la Fig. 2.21, los vectores propuestos tienen la misma dirección, longitud; pero sentido opuesto; por lo que un vector se identifica como el opuesto del otro; una manera simple de representarlo es anteponiéndole el signo menos al vector.

Así, por ejemplo, el vector opuesto de $\vec{v}$ es $-\vec{v}$ (Fig. 2.22)

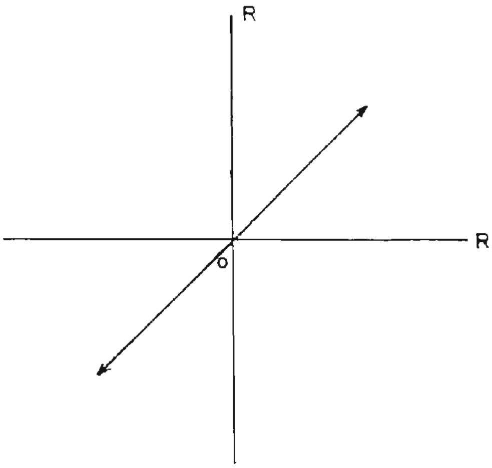


FIG. No. 2.21

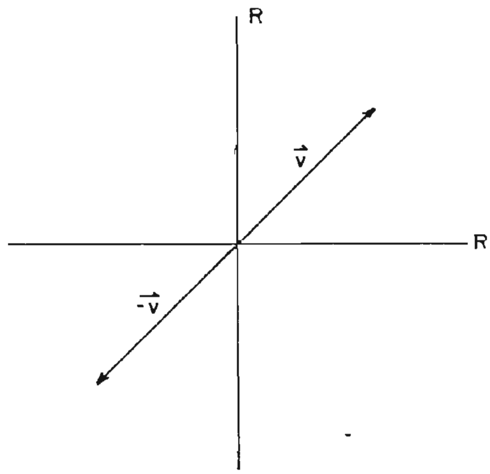


FIG. No. 2.22

En el siguiente diagrama $\overrightarrow{AB} = (5,-2)$; su opuesto es: $-\overrightarrow{AB} = (-5,2)$ pero $(-5,2) = \overrightarrow{BA}$; luego: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (en este caso); además $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$; pero $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = (5,-2) + (-5,2)$

$$= (0,0)$$

Por lo tanto: $\overrightarrow{AA} = (0,0)$; se conviene en identificar al vector $(0,0)$ con la letra $\vec{0}$ (se lee: vector cero)

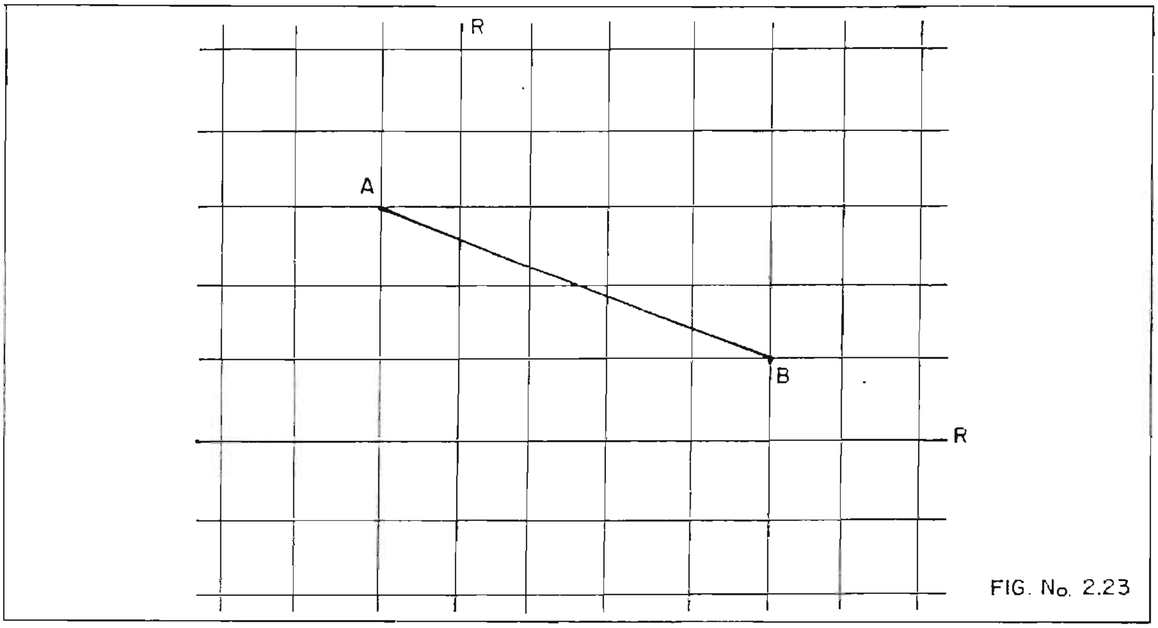


FIG. No. 2.23

El criterio del vector opuesto nos define la diferencia de vectores, es decir si tenemos por ejemplo la suma del vector $\overline{v}$ = (2,4) con el opuesto del vector u = (-2,5) se tendría lo siguiente:

$$\vec{v} + (-u) = (2,4) + (2,-5)\text{; ya que } -\vec{u} = (2,-5)$$
$$= (4,-1)$$

o sea que en vez de $\vec{v} + (-\vec{u})$ se tiene $\vec{v} - \vec{u}$;

es decir $\vec{v} - \vec{u} = (2,4) - (-2,5) = (4,-1)$

Su representación gráfica se da en la Fig. 2.24

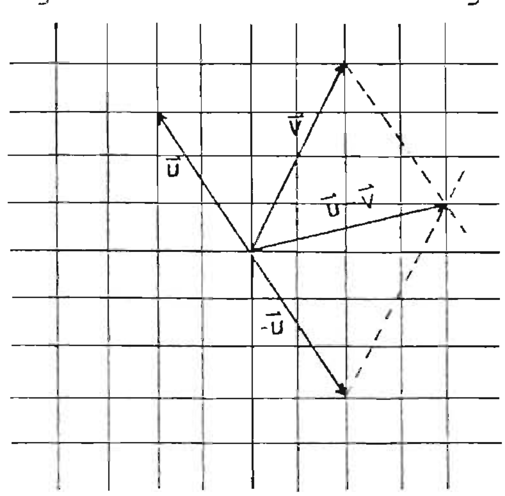


FIG No 2.25

En general para dos vectores cualesquiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$ su suma y - su diferencia se ilustra a la siguiente Figura: (2.25)

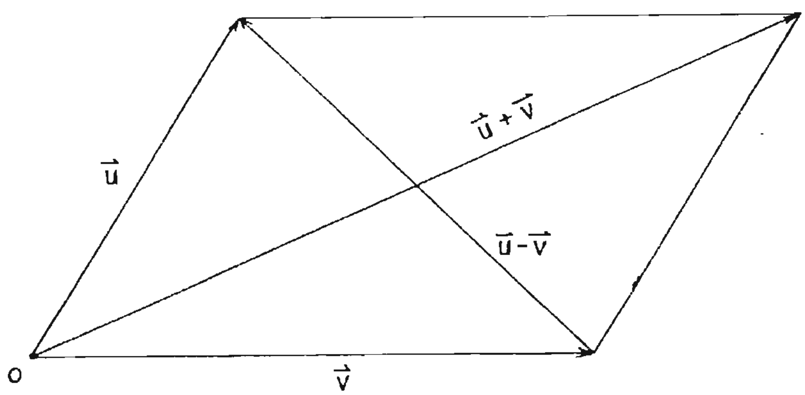


FIG. No. 2.25

EXPOSICION: *DIFERENCIA DE VECTORES*
Fijemos la referencia $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en el plano R^2.   Sean (x_1, y_1) las coordenadas del vector $\vec{v}_1$ que pertenece a R^2 y   Sean (x_2, y_2) las coordenadas del vector $\vec{v}_2$ que pertenece a R^2 Def. 2.2: Si $(x_1, y_1) \varepsilon R^2$ y $(x_2, y_2) \varepsilon R^2$ entonces, $(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ Luego: $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ son las coordenadas de $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$

COMENTARIO:

Ventaja simbólica que se tiene con la operación recta de vectores, cuando se conocen: el punto de origen y el punto de extremo de cada vector; la ilustración se da en la Fig. 2.26

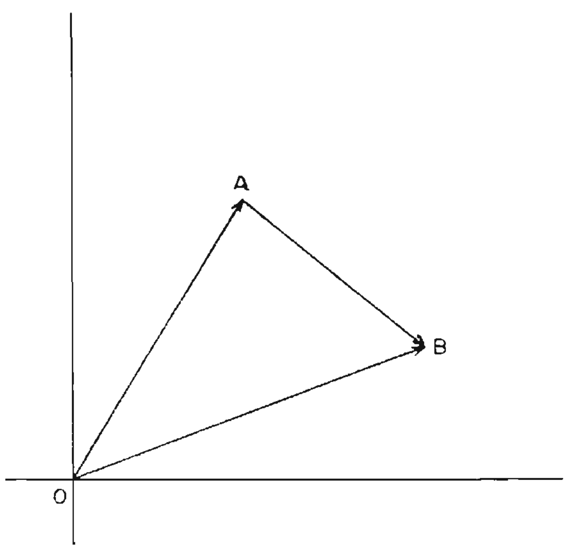


FIG. No. 2.26

De la Fig. 2.26

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

Sumando $(-\overrightarrow{OA})$ a ambos miembros, tenemos:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ó

$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$

En general:
$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P_2P_1}$ (*)
Para dos puntos P_1, P_2 de R^2

* Mas adelante se utilizará mucho; le rogamos tenerlo presente.

EXPOSICION; *ALGEBRA DE VECTORES*

Algebra de Vectores:

1) El vector cero ($\vec{0}$) es neutro para la adición de vectores - del Sistema R^2, en efecto para todo $\vec{v} \varepsilon R^2$; se tiene que:

$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ y que $\vec{o} + \vec{v} = \vec{v}$ ya que si $\vec{v} = (x,y)$ entonces:

$(x,y) + (o,o) = (x + o,\ y + o) = (x,y)$ y

$(o,o) + (x,y) = (o + x,\ o + y) = (x,y)$

2) Para todo $\vec{v}$ de R^2, el vector $-\vec{v} = (-x,\ -y)$ es el opuesto de $\vec{v} = (x,y)$

En efecto:

$\vec{v} + (-\vec{v}) = (x,y) + (-x,-y) = (x-x,\ y-y) = (o,o)$ y que

$-\vec{v} + \vec{v} = (-x,-y) + (x,\ y) = (-x + x,\ -y + y) = (o,o)$

3) Para todo vector $\vec{u}$, $\vec{v} \varepsilon R^2$ la adición es CONMUTATIVA; es - decir que: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; si $\vec{u} = (x_1,y_1)$ y $\vec{v} = (x_2,y_2)$ se tiene : $\vec{u} + \vec{v} = (x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2,y_2) + (x_1,y_1) = \vec{v} + \vec{u}$

4) Para todo vector $\vec{u} = (x_1,y_1)$, $\vec{v} = (x_2,y_2)$ y $\vec{w} = (x_3,y_3)$ de R^2 la adición es ASOCIATI VA: es decir que:

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ en efecto:

$$\begin{aligned}
[(x_1,y_1) + (x_2,y_2)] + (x_3,y_3) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3,y_3) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \\
&= (x_1,y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
&= (x_1,y_1) + [(x_2,y_2) + (x_3,y_3)]
\end{aligned}$$

Por tanto: R^2 y la operación Suma es un grupo Conmutativo.

EXPOSICION: *PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR*

El producto de un escalar por un vector se representa como lo indica la Fig. 2.27

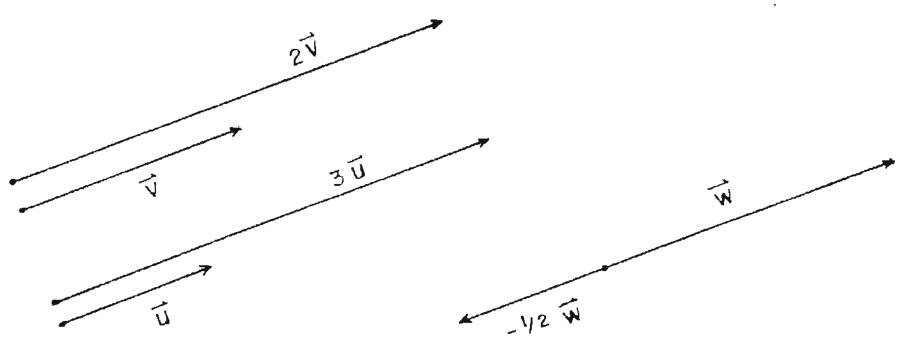


FIG. No. 2.27

Para todo vector $\vec{v}$ de R^2 y $\lambda \in R$ se define: $\lambda\vec{v}$, como el vector cuya longitud es λ veces la longitud de $\vec{v}$ y su dirección es la misma que la de $\vec{v}$; el sentido de $\lambda\vec{v}$ es el mismo que el de $\vec{v}$, si $\lambda > 0$ y opuesto si $\lambda < 0$

Además $o\vec{v} = \vec{o}$

Def. *2.3* si $\vec{v} = (x,y) \in R^2$ y $\lambda \in R$ entonces:

$$\lambda\vec{v} = \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Multiplicación de un escalar por un vector = Multiplicación de un escalar por coordenadas

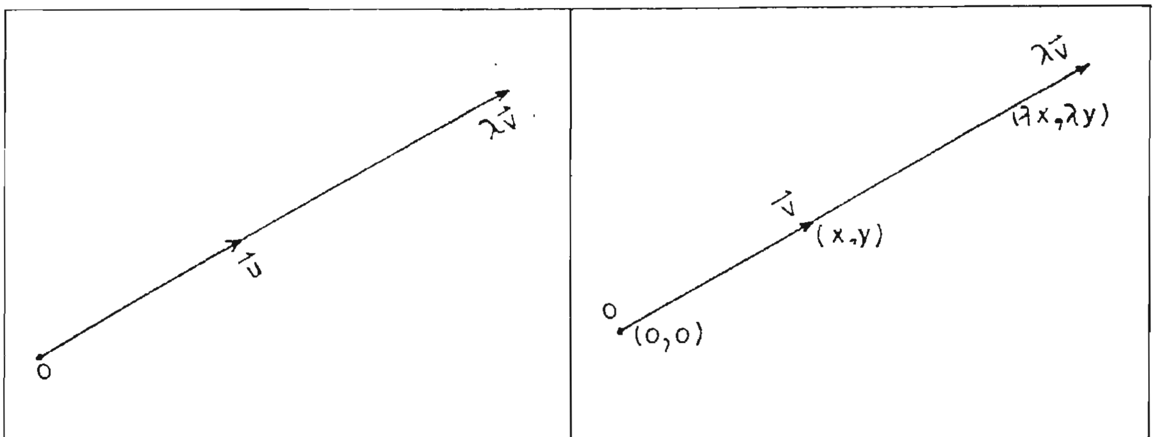


FIG. No. 2.28

APLICACION DEL PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

Hemos afirmado que si tenemos un vector $\vec{v}$ entonces $\vec{v}'$ lo podemos escribir como: $\vec{v}' = \lambda\vec{v}$; si $\vec{v}$ paralelo a $\vec{v}'$ (ver Fig. 2.29)

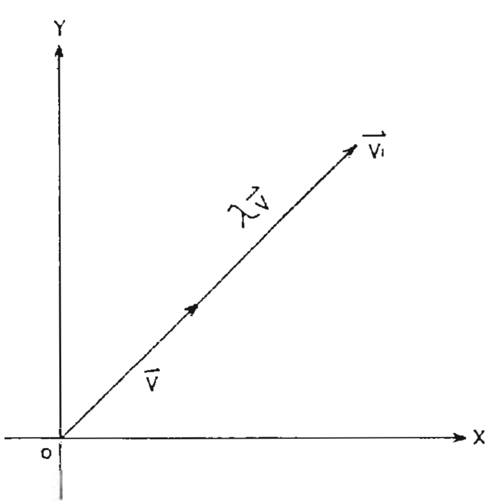


FIG. No. 2.29

Llamaremos *homotecia* de razón λ y de centro 0 a la aplicación h de $\vec{\pi}$ en $\vec{\pi}$ definida así:

Para todo $\vec{v}$ de R^2 se tiene que $h(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$; en la Fig. 2.29 $\vec{v}' = h(\vec{v})$

Hay que tener presente que $\vec{v}$ y $h(\vec{v})$ tienen el mismo origen

$[h: \vec{\pi} \to \vec{\pi}$ tq.: $\vec{v} \rightsquigarrow h(\vec{v}) = \lambda\vec{v}]$

Consecuencia de las Homotecias: (Fig. 2.30)

1) si $\lambda = 1$ entonces $h(\vec{v}) = \vec{v}$

2) si $\lambda = -1$ entonces $h(\vec{v}) = -\vec{v}$

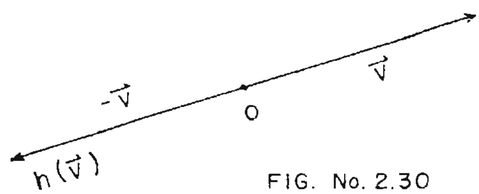


FIG. No. 2.30

3) La imágen de una Homotecia de la suma de dos vectores, - es la suma de las imágenes de estos dos vectores; ver - Fig. 2.31

$$h(\vec{u} + \vec{v}) = h(\vec{u}) + h(\vec{v})$$

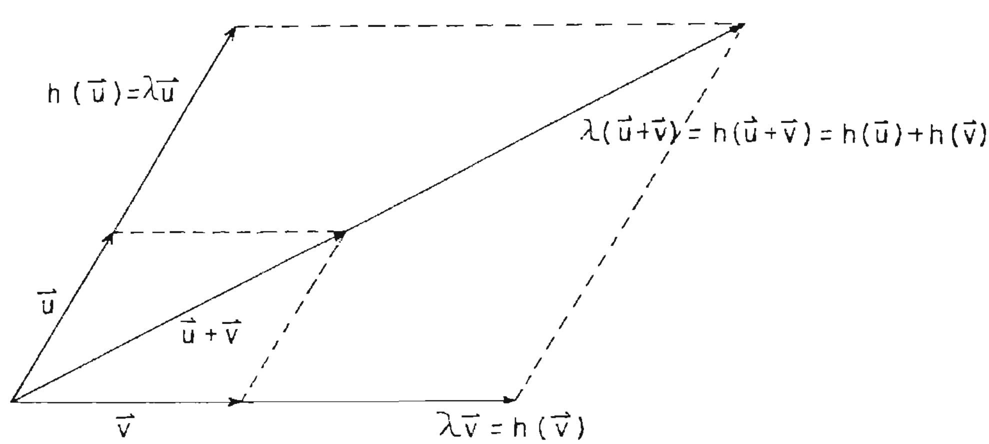


FIG. No. 2.31

COORDENADAS EN UN VECTOR LIBRE

ACTIVIDAD 2.6

Obejetivos

Que el estudiante:

Descubra cómo se encuentran las coordenadas de un vector, - conociendo su punto de orígen y su extremo.

PROCEDIMIENTO:

- Toma un plano π (cuadriculado)
- Determina un SCCR (R^2)
- Defina su referecnia $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ y una escala adecuada
- Ubíca los puntos A(2,3) y B(5,7)
- Determina el vector $\overrightarrow{AB}$ (graficamente)
- Determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$
- Busca alguna relación entre las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ y las coordenadas de los puntos A y B.
- ¿Se podrá establecer la relación (5-2, 7-3) = (3,4)? --
  ___ sí ___ no
- Ubica otros dos puntos K(-4,1) y L(1,5)
- Grafíca el vector $\overrightarrow{KL}$ y determina sus coordenadas
- Se podrá establecer la relación (1-(-4), 5-1) = (5,4)?
  ___ si ___ no
- Qué conluyes? ________________________________

EXPOSICION: *COORDENADAS DE UN VECTOR LIBRE*

Si fijamos una referencia $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en R^2 y si $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ son puntos del plano π entonces las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son: $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.
ver gráfico. (2.32)

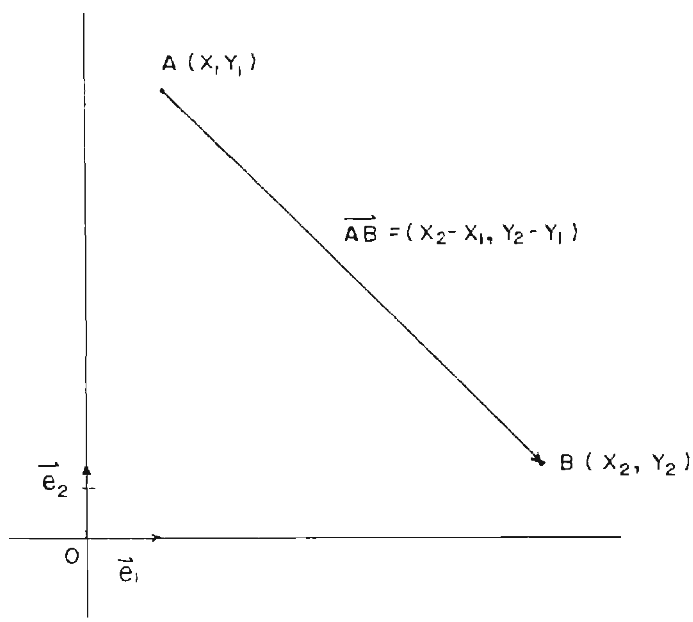


FIG. No. 2.32

EXPOSICION: *MODULO DE UN VECTOR EN R^2*

Fijemos la referencia $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en R^2

Sean (a,b) las coordenadas del vector $\vec{v}$; aplicando el Teorema de Pitágoras, en la siguiente Fig.; se tiene que la longitud de $\vec{v}$ es: $\sqrt{a^2 + b^2}$ y se denota: $|\vec{v}|$ o simplemente v.

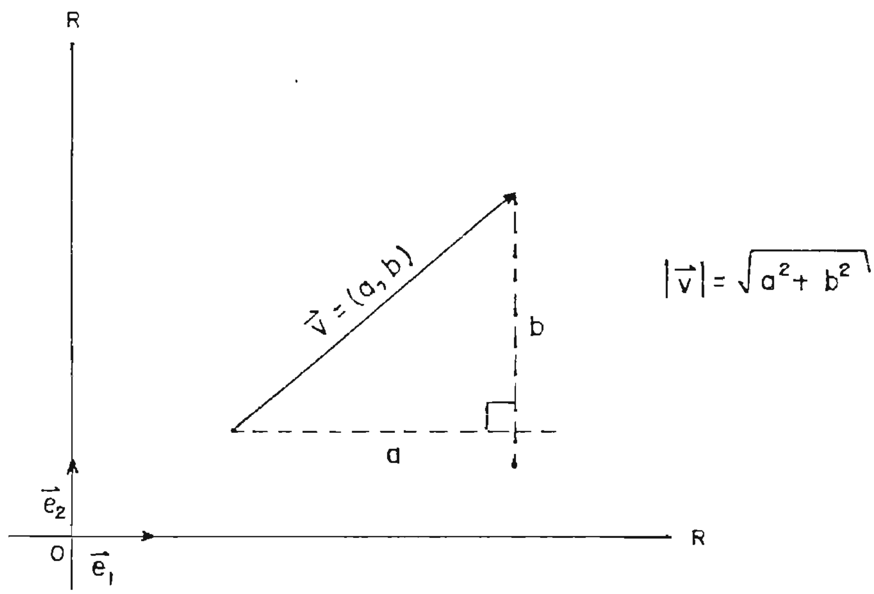


FIG. No. 2.33

Es claro que: i) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$

ii) $|\overrightarrow{AA}| = |\vec{O}| = 0$

Note que si $\vec{u} \neq 0$ el módulo de $\vec{u}$ es un número real estrictamente positivo.

Def.: 2.4

Sean (x,y) las coordenadas del vector $\vec{v}$ que pertenece a R^2; el módulo $\vec{v}$ lo denotamos: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

EXPOSICION: *NORMA DE UN VECTOR*

Sea $\vec{v}$ un vector como se presenta en la Fig. *2.34*; llamaremos norma del vector $\vec{v}$ y se denota $\|\vec{v}\|$ a la distancia del origen al extremo de $\vec{v}$. Utilizando el Teorema de Pitágoras; vemos que si $\vec{v} = (x,y)$ en R^2, entonces: $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

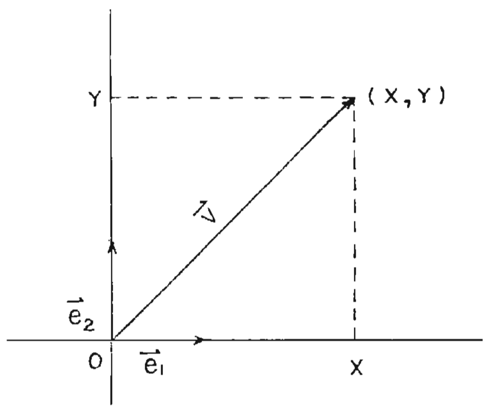


FIG. No. 2.34

Se tiene que:

i) $\forall\, \vec{u} \in R^2;\ \|\vec{u}\| \geq 0$

ii) $\forall\, \vec{u} \in R^2;\ \|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

iii) $\forall\, \vec{u} \in R^2,\ \forall \lambda \in R;\ \|\lambda\vec{u}\| \quad |\lambda|\,\|\vec{u}\|$

iv) $\forall\, \vec{u} \in R^2;\ \|\vec{u}\| = \|-\vec{u}\|$

Por otra parte, resulta de la definición de distancia entre dos puntos que:

$\forall\, A,\ B \in R^2 \qquad \|\overrightarrow{AB}\| = d(A,B)$

DEFINICION 2.5

Sean A y B dos puntos del plano R^2 con coordenadas respectivas (x_1,y_1) y (x_2,y_2) en una referencia ortogonal $(0,\vec{i},\vec{j})$.

El vector $\overrightarrow{AB}$ con coordenadas (x_2-x_1, y_2-y_1) en la base ortogonal $(\vec{i},\vec{j})$, resulta que: $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ $\qquad (*)$

VECTOR UNITARIO

ACTIVIDAD 2.7

Objetivos

Que el estudiante:

a) Deduzca la forma de obtener el vector unitario

b) Obtenga conclusiones del gráfico

PROCEDIMIENTO:

- Toma un SCCR en R^2 (papel milimetrado)
- Define su referencia $(O, \vec{i}, \vec{j})$ y una escala 1: 2 cm.
- Ubica los puntos A(2,1) y B(5,5)
- Traza el vector $\overrightarrow{AB}$
- Mide la longitud del vector $\overrightarrow{AB}$ e identifícala como ℓ
- Determina la norma de $\|\overrightarrow{AB}\|$
- Es $\|\overrightarrow{AB}\| = \ell$? ___ si ___ no
- Es $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$? ___ si ___ no
- Divide el vector $\overrightarrow{AB}$ en 5 partes iguales
- Traza el vector de longitud igual a 1 (5a. parte del vector $\overrightarrow{AB}$) a partir de A e identifícalo $\overrightarrow{AB}'$
- Determina las coordenadas de $\overrightarrow{AB}'$
- Calcula la norma de $\|\overrightarrow{AB}'\|$
- Es $\|\overrightarrow{AB}'\| = 1$? ___ si ___ no

  * Si tu respuesta es NO; las coordenadas no son las correctas.

⋆ Si tu respuesta es Sí; las coordenadas son las correctas

- Determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$
- Multiplica 1/5 $\overrightarrow{AB}$ e identifícalo como $\vec{e}$
- Determina la norma de $\|\vec{e}\|$
- Es $\|\vec{e}\| = 1$? ___ si ___ no
- Debe ser $\overrightarrow{AB}' = \vec{e}$? ___ si ___ no
- Que concluyes? ______________________________

COMENTARIO:

El vector $\overrightarrow{AB}$ es de longitud 5; luego una quinta parte - del vector, es de longitud 1; el vector de longitud 1 se da en llamar vector unitario.

EXPOSICION: *VECTOR UNITARIO*

Sea $\vec{u}$ un vector no nulo.

La norma del vector $\vec{u}$ es estrictamente positivo; consideremos entonces, el vector (Fig. 2.35) $\vec{u}' = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\,\vec{u}$. Se tiene que $\|\vec{u}'\| = 1$

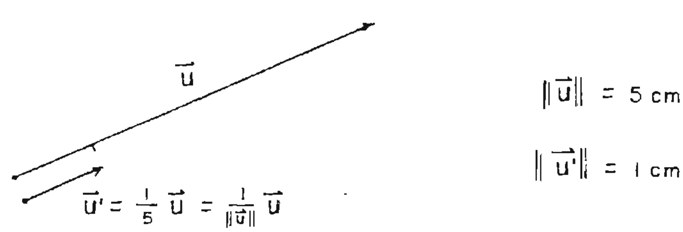


FIG. No. 2.35

DEFINICION 2.6

Se dice que un vector es unitario (Versor) sí y solamente si su norma es igual a 1.

APLICACION DE NORMA DE UN VECTOR

ACTIVIDAD 2.8

Objetivos

Que el estudiante:

a) Descubra algunas propiedades de la Norma

b) Determine algunas aplicaciones de la Norma

c) Obtenga conclusiones de los gráficos

PROCEDIMIENTO:

<u>Primera Parte</u>

- Toma un SCCR en R^2 (papel milimetrado)
- Define una referencia en $(O, \vec{i}, \vec{j})$ con una escala de 1: 1 cm.
- Ubica los puntos $O(0,0)$, $A(4,0)$ y $B(2,2\sqrt{3})$.
- Traza el triángulo OAB
- Mide las longitudes OA, OB, AB
- ¿Son las longitudes anteriores iguales? ___ si ___ no
- Determina (usando la fórmula (*)) la distancia: OA, OB y AB.
- ¿Es $d(A,B) = d(O,A)$? ___ si ___ no
- ¿Es $d(A,B) = d(O,B)$? ___ si ___ no
- ¿Es $d(O,A) = d(O,B)$? ___ si ___ no
- ¿Son las 3 distancias iguales? ___ si ___ no
- ¿Que tipo de triángulo es? ______________________

- Toma otro SCCR en R^2.
- Define su referencia $(O, \vec{i}, \vec{j})$ y la misma escala
- Ubica los puntos A(1, -1), B(-2,2) y C(3,4)
- Traza el triángulo ABC
- Mide las longitudes AB, AC y BC e identifícalas como ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 respectivamente.
- ¿Es $\ell_1 = \ell_2$? ___ si ___ no
- ¿Es $\ell_1 = \ell_3$? ___ si ___ no
- ¿Es $\ell_2 = \ell_3$? ___ si ___ no
- ¿Cuántos lados iguales tiene el triángulo? _______________
- Usando (*) determina las distancias de: AB, AC, BC.
- ¿Es d(A,B) = d(A,C)? ___ si ___ no
- ¿Es d(A,B) = d(B,C)? ___ si ___ no
- ¿Es d(A,C) = d(B,C)? ___ si ___ no
- ¿Qué tipo de triángulo es? ________________________________
- Toma otro SCCR en R^2
- Define su referencia en $(O, \vec{i}, \vec{j})$ y la misma escala
- Ubica los puntos A(2,0), B(-3,2) y C(5,2)
- Traza el triángulo ABC
- Mide las longitudes AB, BC, AC e identifícalas como ℓ_1, - ℓ_2, ℓ_3 respectivamente.
- ¿Es $\ell_1 = \ell_2$? ___ si ___ no
- ¿Es $\ell_1 = \ell_2$? ___ si ___ no
- ¿Es $\ell_2 = \ell_3$? ___ si ___ no

- ¿Cuántos lados iguales tiene el triángulo? ______________
- Usando (*) determina las distancias de: AB, BC, AC
- ¿Es d(A,B) = d(A,C)? ___ si ___ no
- ¿Es d(A,B) = d(B,C)? ___ si ___ no
- ¿Es d(A,C) = d(B,C)? ___ si ___ no
- ¿Qué tipo de triángulo es? ______________________________
- ¿Qué concluyes de los 3 gráficos? _______________________

COMENTARIO:

Si se tienen tres puntos A,B,C en R^2, se dice que el triángulo formado por los 3 puntos es:

i) Equilatero: Si tiene los 3 lados iguales (AB = AC = BC) Fig. 2.36

ii) Isosceles: si tiene 2 lados iguales (AB = AC) Fig. 2.37

iii) Escaleno: si sus 3 lados son desiguales (ab $\neq$ ac $\neq$ BC) Fig. 2.38

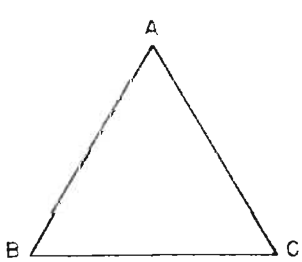


FIG. No. 2.36

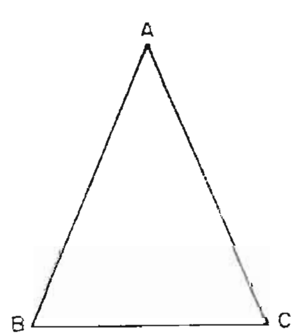


FIG. No. 2.37

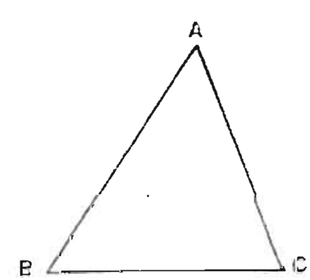


FIG. No. 2.38

Segunda Parte

- Toma un SCCR en R^2
- Define su referencia $(O, \vec{i}, \vec{j})$ y una escala de 1: 1 cm.
- Ubica los puntos A(1,1), B(5,3) y C(4,5)
- Identifica a los vectores: $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ y $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$
- Traza los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} + \vec{v}$
- Calcula $\|\vec{u}\|^2$, $\|\vec{v}\|^2$ y $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$
- Efectúa $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ e identifícalo como ℓ_1
- ¿Es $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \ell_1$? ___ si ___ no
- Mide el ángulo formado por el extremo de $\vec{u}$ y el origen de $\vec{v}$: $\theta \genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow \vec{u}}{\searrow \vec{v}}$
- ¿Es $\theta = 90°$? ___ si ___ no
- Toma otro SCCR en R^2
- Define su referencia $(O, \vec{i}, \vec{j})$ y una escala de 1: 1 cm.
- Ubica los puntos A(1,1), B(4,2) y C(4,4)
- Identifica los vectores $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ y $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$
- Traza los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} + \vec{v}$
- Calcula $\|\vec{u}\|^2$, $\|\vec{v}\|^2$ y $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$
- Efectúa $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ e identifícalo como ℓ_2
- ¿Es $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ menor, igual o mayor que ℓ_2? ________________
- Mide el ángulo formado por el extremo de $\vec{u}$ y el origen de $\vec{v}$: $\alpha \genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow \vec{u}}{\searrow \vec{v}}$
- ¿Es α menor, igual o mayor de 90°? ________________

EJERCICIOS 2.2

1) Verifica que:

$$\text{i) } \forall\, A,B \in R^2 \quad d(A,B) = 0 \iff A = B$$

$$\text{ii) } \forall\, A,B \in R^2 \quad d(A,B) = d(B,A)$$

2) Verifica que los vectores $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$, $-\vec{i} = (-1,0)$, $-\vec{j} = (0,-1)$, son unitarios

3) Sean A,B dos puntos de R^2, verifica que existe un punto M, talque: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 0$ y que $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$

4) Sea un triángulo ABC y M, N los puntos medios de A,B y A,C; respectivamente, verificar que:

$$MN = \frac{1}{2}\, BC$$

5) Sean A(-1,1) B(4,3) C(5,0) D(0,-2), los puntos de un paralelogramo; verificar que:

$$AB = CD \quad y \quad AD = BC$$

6) Sean tres puntos A(-1,2); B(-2,1) y C(2,-1) en R^2 en $(O,\vec{i},\vec{j})$; verificar que: $\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2$; es decir que el triángulo ABC, es rectángulo en A.

7) Sean A(3,2) y B(-1,1) dos puntos del plano R^2 y su referencia $(O,\vec{i},\vec{j})$, determinar el conjunto L de puntos M tales que: $d(A,M) = d(B,M)$

8) Verifica que si el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es de 90°, entonces: $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$

9) Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores de R^2, verifica que:

i) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

ii) $\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$

EXPOSICION: *VECTORES IGUALES EN R^2*

La igualdad de vectores se ilustra en la siguiente fig. en donde la dirección, sentido y magnitud es la misma - en cada vector:

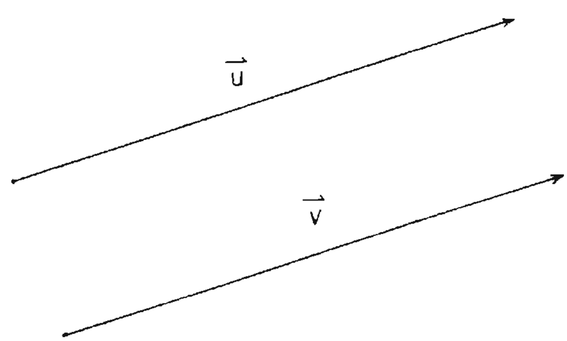


FIG. No 2.42

$\vec{u} = \vec{v}$ si $\vec{u}$ es paralelo a $\vec{v}$, tienen el mismo sentido y - el módulo de $\vec{u}$ es igual al módulo de $\vec{v}$ ($|\vec{u}| = |\vec{v}|$).

Fijemos la referencia $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en un plano R^2;

Sean (x_1, y_1) las coordenadas del vector $\vec{v}$ que pertenece a R^2.

Sean (x_2, y_2) las coordenadas del vector $\vec{u}$ que pertenece a R^2

Definición: 2.7

Si $(x_1, y_1) \varepsilon R^2$ y $(x_2, y_2) \varepsilon R^2$ entonces: $\vec{v} = \vec{u}$

$(x_1\ y_1) = (x_2, y_2)$ sí y solamente si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$

EJERCICIOS 2.3

1) Si $\vec{u} = (3,4)$ $\vec{v} = (-1,5)$ encuentre las coordenadas del vector $\vec{w}$, si

i) $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$

ii) $\vec{u} - \vec{w} = \vec{v}$

iii) $2\vec{u} - \vec{w} = \vec{v}$

2) Si $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (-3,3)$ y $\vec{w} = (2,-1)$ obtenga en forma gráfica y algebraica

i) $-\vec{u}$

ii) $\vec{u} - \vec{v}$

iii) $-3\vec{w}$

iv) $2\vec{u}$

v) $-5/3\ \vec{v}$

vi) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

vii) $3\vec{v} - 2\vec{w}$

3) Encuentre el valor de a y b si $a\vec{w} + b\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ (usando 2)

4) Sin usar diagrama defina las respuestas:

i) $\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OL} =$

ii) $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} =$

iii) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} =$

iv) $\overrightarrow{SU} - \overrightarrow{ST} =$

PROPIEDADES DE LOS VECTORES Y LOS NÚMEROS REALES

ACTIVIDAD 2.9

Objetivos

Que el estudiante:

a) Descubra ciertas propiedades de los vectores, con números reales

b) Identifique que el producto de un número real se distribuye sobre la suma vectorial

c) Determine que el producto de un vector se distribuye sobre la suma de números reales.

PROCEDIMIENTO:

- Toma un plano π (cuadriculado)
- Determina un sistema de Coordenadas Cartesianas (SCCR) de R^2
- Define su referencia $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$
- Utiliza una escala adecuada
- Partiendo del orígen, grafíca el vector $\vec{u} = (4,2)$
- A continuación suma el vector $\vec{v} = (-2,3)$
- Representa gráficamente el vector $\vec{u} + \vec{v}$ y determina su resultado como par ordenado; e identifícalo con el vector $\vec{w}$ (es decir: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$)
- Representa gráfica y numéricamente el vector $2\vec{w}$
- Grafica el vector $2\vec{u}$

- A continuación del vector $2\vec{u}$ súmale el vector $2\vec{v}$
- Representa gráficamente con otro color el vector $2\vec{u} + 2\vec{v}$ e identifícalo con el vector $\vec{s}$
- Determina el resultado de $\vec{s}$ como par ordenado
- ¿Son los vectores: $2\vec{w}$ y $\vec{s}$ iguales? ___ si ___ no
- ¿Se podrá escribir la relación $2(\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________
- Determina otro sistema de coordenadas rectagulares (SCCR) en R^2
- Defina su referencia $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$
- Utiliza una escala adecuada
- Partiendo del origen, grafica el vector $2\vec{u}$ si $\vec{u} = (2,4)$
- A continuación súmale el vector $3/2\vec{u}$ (gráficamente y como pares)
- Identifica la suma de $2\vec{u} + 3/2\vec{u}$ con el vector $\vec{w}$
- Suma 2 + 3/2 e identifícalo con la letra "a"
- Representa (con otro color) el vector $a\vec{u}$ y determina sus coordenadas como par
- ¿Son los vectores $\vec{w}$ y $a\vec{u}$ iguales? ___ si ___ no
- ¿Se podrá establecer la relación $2\vec{u} + 3/2\vec{u} = (2 + 3/2)\vec{u}$? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________
- En otro sistema de coordenadas rectangulares (SCCR) en - R^2

- Determina su referencia $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ y su escala adecuada
- Partiendo del origen, grafica el vector $4\vec{v}$; si $\vec{v} = (2,-1)$
- Identifícalo con el vector $\vec{w}$ (es decir $4\vec{v} = \vec{w}$)
- A continuación representa el vector $\frac{1}{2}\vec{w}$ gráficamente y como par e identifícalo con el vector $\vec{a}$
- Efectúa el producto $(\frac{1}{2})(4)$
- Representa gráficamente el vector $2\vec{v}$ (especifíca sus coordenadas como par)
- ¿Son los vectores $2\vec{v}$ y $\vec{a}$ iguales? ___ si ___ no
- ¿Se podrá establecer la relación $\frac{1}{2}(4\vec{v}) = (\frac{1}{2} \cdot 4)\vec{v}$? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________________

EXPOSICION: *PROPIEDADES DE LOS VECTORES Y LOS NUMEROS REALES*

Para todo $\vec{v}$, $\vec{u}$ de R^2 y $\lambda \in R$, se tiene:

1) De la figura *2.43* y por semejanza de triángulos de lados $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{u}+\vec{v}$ y $\lambda\vec{v}$, $\lambda\vec{u}$, $\lambda(\vec{u}+\vec{v})$ resulta que la relación: $\lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} = \lambda(\vec{u}+\vec{v})$ expresa la propiedad distributiva del producto de vectores por un escalar respecto a la suma

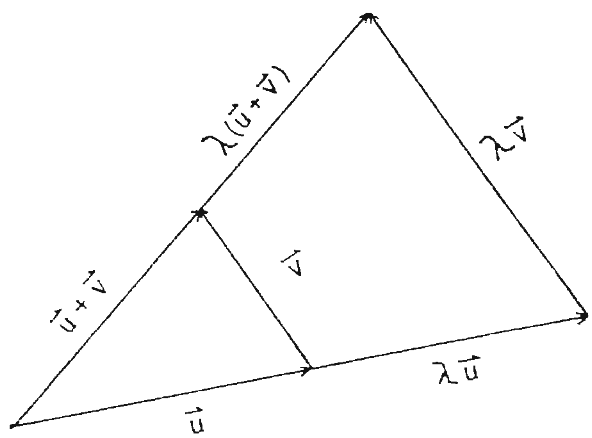


FIG. No. 2.43

Si $\vec{u} = (x_1, x_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2)$ entonces:

$$
\begin{aligned}
\lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} &= \lambda(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2) \\
&= (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\lambda x_2, \lambda y_2) \\
&= (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda y_1 + \lambda y_2) \\
&= (\lambda(x_1 + x_2), \lambda(y_1 + y_2)) \\
&= \lambda(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= \lambda[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] \\
&= \lambda(\vec{u} + \vec{v})
\end{aligned}
$$

2) Para todo $\vec{u} \in R^2$ y $\alpha, \lambda \in R$ se tiene: $(\alpha + \lambda)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \lambda\vec{u}$

3) Para todo $\vec{u} \in R^2$ y $\alpha, \lambda \in R$ se tiene: $(\lambda\alpha)\vec{u} = \lambda(\alpha\vec{u})$

4) Es evidente que $1\vec{u} = \vec{u}$; con $\vec{u} \in R^2$

EJERCICIOS 2.4

1) Sean $\vec{u} = (4,2)$ y $\vec{v} = (-2,4)$ efectúa gráficamente y como pares

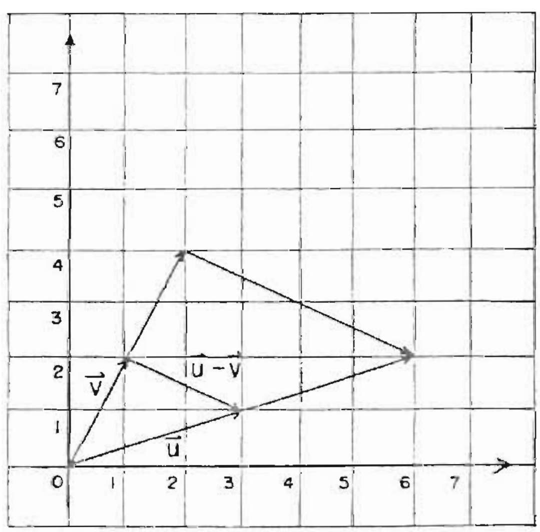
a) $2(\vec{u} - \vec{v})$ y $2\vec{u} - 2\vec{v}$

b) $3(\vec{u} + \vec{v})$ y $3\vec{u} + 3\vec{v}$

c) $-\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$ y $-\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$

Nota: Compara resultados en cada literal.

2) Obtiene una relación específica del gráfico siguiente:



3) Sea $\vec{w} = (2,-4)$ efectúa graficamente y como pares ordenados

i) $(2 - \frac{1}{2})\vec{w}$ y $2\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{w}$

ii) $(\frac{1}{2} + 2)\vec{w}$ y $\frac{1}{2}\vec{w} + 2\vec{w}$

Nota: Compara resultados en cada literal.

4) Si $\vec{u} = (-1,2)$ desarrolla gráficamente y como pares:

i) $2(3\vec{u})$ y $6\vec{u}$

ii) $-4(2\vec{u})$ y $-8\vec{u}$

iii) $-\frac{1}{2}(3\vec{u})$ y $-3/2\vec{u}$

iv) $2(\frac{1}{2}\vec{u})$ y $1\vec{u}$

Nota: Compara resultados en cada literal

5) Si $\vec{v}$ es un vector arbitrario, verifica graficamente que:

i) $(3/2 + 3)\vec{v} = 3/2\ \vec{v} + 3\vec{v}$

ii) $-3(2\vec{v}) = -6\vec{v}$

6) Si $\vec{u} = (2,-1)$; $\vec{v} = (-3,2)$ y $\vec{w} = (1,3)$ determina los valores de a y b, de manera que: $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$

7) Encuentra las coordenadas del punto A si $\overrightarrow{AB} = (2,4)$ y B(3,5)

8) Determina las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la relación $4\vec{v} + (5,-1) = \vec{v} - (2,4)$

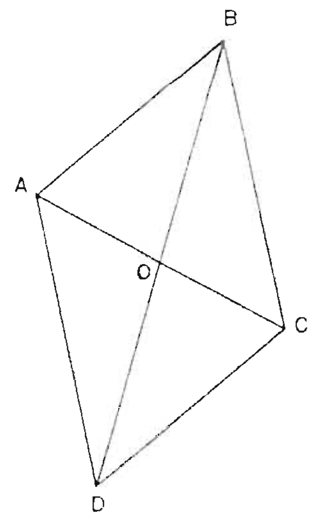
9) Si $\overrightarrow{OA} = (2,7)$ y $\overrightarrow{OB} = (-1,3)$ obtenga las coordenadas del punto:

i) C tq: $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$

ii) D tq: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

EJERCICIOS 2.5

1) Tenemos un paralelograma: ABCD



a) Encuentra un sólo vector equivalente:

i) $\vec{AB} + \vec{AD}$

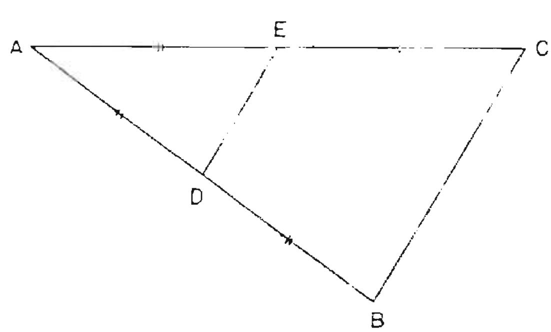
ii) $\vec{AB} - \vec{BC}$

b) Encuentra i) $\vec{BD} + \vec{AC}$

ii) $\vec{BD} - \vec{AC}$ como múltiplo de un sólo vector

Sugerencia: O es el centro de AC y BD

2) En el siguiente diagrama D y E son los puntos medios de AB y AC, respectivamente.



Sean $\vec{AD} = \vec{u}$ y $\vec{AE} = \vec{v}$

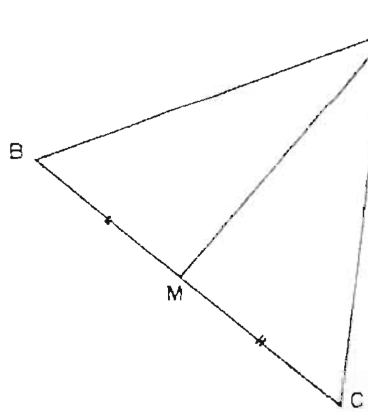
a) Escribe en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

i) $\vec{AB}$ ii) $\vec{AC}$ iii) $\vec{DE}$ - iv) $\vec{BC}$

b) Compara los resultados de a) iii) y iv) escribe una relación entre $\vec{AC}$ y $\vec{DE}$

¿Qué significa tu resultado?

3) En este triángulo, M es el punto medio de BC



i) Escribe $\overrightarrow{AB}$ en términos de $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CB}$

ii) Escribe $\overrightarrow{CB}$ en términos de $\overrightarrow{CM}$

iii) Usando i) y ii), escribe $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ en términos de $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CM}$

iv) Verifica que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{2AM}$

EXPOSICION: *ESPACIO VECTORIAL* $\vec{V}$

1) Una adición que a todo par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del plano R^2 le corresponde un elemento de R^2 denotado por $\vec{u} + \vec{v}$; posee las propiedades siguientes:

1.1 $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^2$ se cumple: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

1.2 $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in R^2$ se cumple: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

1.3 $\forall\, \vec{u} \in R^2;\ \exists\, \vec{0} \in R^2$ se cumple: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

1.4 $\forall\, \vec{u} \in R^2;\ \exists\, -\vec{u} \in R^2$ se cumple: $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$

2) A todo número real α y a todo elemento $\vec{u}$ de R^2, le corresponde un elemento de R^2 denotado por $\alpha\vec{u}$; esta multiplicación, posee las propiedades siguientes:

2.1 $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in R^2;\ \forall \alpha \in R$ se cumple: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

2.2 $\forall\, \vec{u} \in R^2;\ \forall \alpha, \beta \in R$ se cumple: $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

2.3 $\forall\, \vec{u} \in R^2;\ \forall \alpha, \beta \in R$ se cumple: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

2.4 $\forall\, \vec{u} \in R^2$ se cumple: $1\vec{u} = \vec{u}$

En conclusión:

DEFINICION 2.8

Un conjunto de vectores $\vec{V}$ de R^2 y un conjunto de números Reales ($\mathbb{R}$) con los numerales 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 en la suma y 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 en el producto de un escalar por un vector define lo que se llama: UN ESPACIO VECTORIAL de $\vec{V}$ sobre $\mathbb{R}$

COMBINACION LINEAL

ACTIVIDAD 2.10

Objetivos

Que el estudiante:

a) Descubra lo que es una combinación lineal.

b) Descubra que un vector se puede escribir en función de otros dos vectores.

c) Utilice un método algebraico en la busqueda de los escalares a, b en una combinación lineal.

PROCEDIMIENTO:

* En la busqueda de los escalares a, b talque $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$

- Toma un SCCR de R^2 con su referencia $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ y una escala de 1: 1 cm.

- Traza los vectores $\vec{u} = (0,2)$; $\vec{v} = (1,0)$ y $\vec{w} = (5,4)$ (a partir del origen)
- A partir del extremo de $\vec{w}$ traza rectas (punteadas) paralelas a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ hasta cortar los ejes cartesianos (X e Y)
- Identifica con la letra P_1 el intersecto en X y con P_2 el intersecto de Y.
- Traza los vectores $\overrightarrow{OP}_1$ y $\overrightarrow{OP}_2$
- Escribe $\overrightarrow{OP}_1$ en términos de $\vec{v}$; es decir $\overrightarrow{OP}_1 = b\vec{v}$; (del gráfico)
- Escribe $\overrightarrow{OP}_2$ en términos de $\vec{u}$; es decir $\overrightarrow{OP}_2 = a\vec{u}$, (del gráfico)
- Escribe $\vec{w}$ en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$; es decir: $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ (del gráfico)

- Toma otro SCCR en R^2 con su referencia $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ y la misma escala.
- Traza los vectores $\vec{u} = (2,1)$; $\vec{v} = (1,3)$ y $\vec{w} = (8,9)$ (a partir del origen)
- Prolonga con lineas punteadas las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ e identificalas con D y D', respectivamente.
- A partir del extremo de $\vec{w}$ traza rectas (punteadas) paralelas a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ hasta cortar las rectas punteadas D y D'

- Identifica con la letra P_1 el intersecto en D y con P_2 el intersecto de D'
- Traza los vectores $\overrightarrow{OP}_1$ y $\overrightarrow{OP}_2$
- Mide las longitudes de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{OP}_1$ y $\overrightarrow{OP}_2$
- Escribe $\overrightarrow{OP}_1$ en términos de $\vec{u}$; es decir $\overrightarrow{OP}_1 = a\vec{u}$
- Escribe $\overrightarrow{OP}_2$ en términos de $\vec{v}$; es decir $\overrightarrow{OP}_2 = b\vec{v}$
- Escribe w en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$; es decir: $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

COMENTARIO:

Gráficamente la forma de buscar los escalares a y b de la expresión: $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$; se logra, trazando a partir del extremo de $\vec{w}$ rectas paralelas a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, talque se corten en las prolongaciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ hasta construir un paralelogramo en donde $\vec{w}$ es la diagonal de dicho paralelogramo (ver Fig. 2.44)

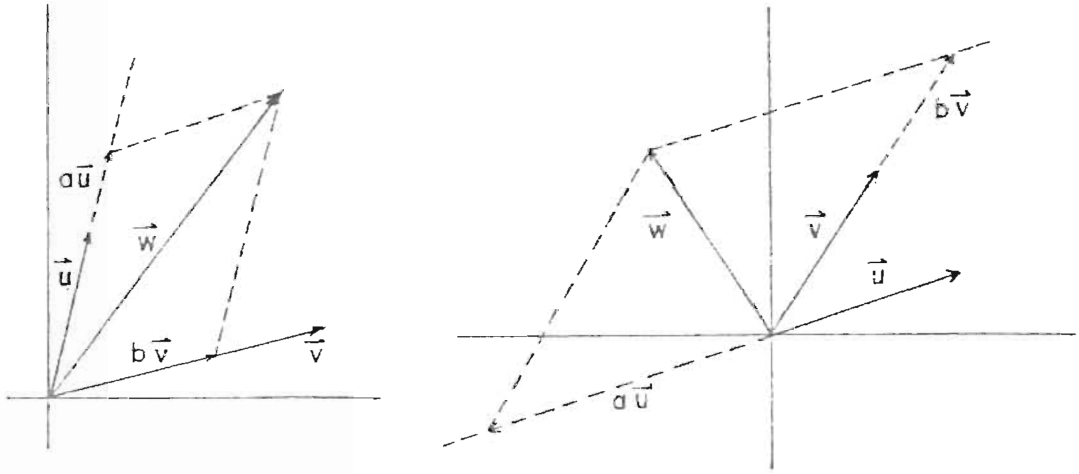


FIG. No. 2.44

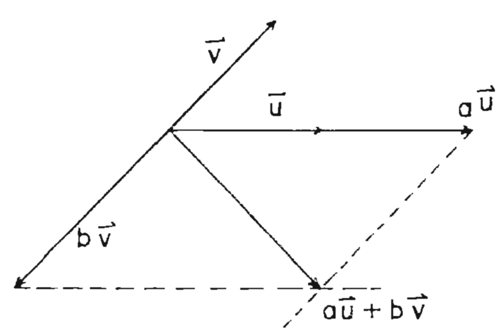
- Dados los vectores $\vec{u} = (2,1)$; $\vec{v} = (1,3)$ y $\vec{w} = (8,9)$; encuentra algebraicamente los valores de a y b que satisfacen la expresión: $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$
- Compara estos resultados con los que obtuviste en forma gráfica
- ¿Son los mismos resultados? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________
- Dados los vectores $\vec{v}_1 = (2,3)$; $\vec{v}_2 = (4,-2)$ y $\vec{v}_3 = (-2,13)$; encuentra algebraicamente los valores de a y b que satisfacen la expresión: $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 = \vec{v}_3$
- Trata de resolverlo gráficamente
- Compara resultados
- ¿Qué concluyes? ______________________________

COMENTARIO:

Algebraicamente los valores de a y b se encuentran simultaneando ecuaciones

EXPOSICION: *COMBINACION LINEAL*

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que pertenecen a un espacio vectorial $\vec{V}$ y sea a,b dos escalares (Fig. 2.45)



a = 2

b = - 3/2

FIG. No. 2.45

Por definición de $\vec{V}$; el vector $a\vec{u}$, el vector $b\vec{v}$ y el vector $a\vec{u} + b\vec{v}$, pertenecen a $\vec{V}$

Def.: 2.9 Se dice que un vector $\vec{w}$ es una combinación lineal de dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ sí y solamente si, existe al menos dos escalares a, b tales que:

$$\boxed{\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}}$$

De acá en adelante; el Espacio vectorial $\vec{V}$ es el conjunto de combinaciones lineales de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{V} = \{\vec{w} \in \vec{V} \ / \ \exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}; \ \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}\}$$

VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

ACTIVIDAD 2.11

Objetivos

Que el estudiante:

a) Identifique vectores linealmente dependientes e independientes.

b) Diferencie los vectores linealmente dependientes con independientes

c) De los gráficos realizados, obtengan conclusiones.

PROCEDIMIENTO:

<u>Primera Parte</u>

- Toma un plano (cuadriculado)

- Determina un SCCR de R^2 con su referencia $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en una escala adecuada
- Traza los vectores $\vec{u} = (2,-3)$ y $\vec{v} = (-4,6)$
- ¿Estan los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ en una misma dirección? ___ si - ___ no
- Mide las longitudes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- Escribe el vector $\vec{v}$ en terminos de $\vec{u}$
- Escribe el vector $\vec{u}$ en terminos de $\vec{v}$
- Efectúa gráficamente o con pares ordenados: $2\vec{u} + \vec{v}$
- ¿Cuál es el resultado? ______________________________
- Efectúa gráficamente o con pares ordenados: $3\vec{u} + 3/2\vec{v}$ y $2\vec{u} + (-2\vec{u})$
- ¿Cuál es el resultado? ______________________________
- ¿Qué concluyes? ____________________________________

ESPOSICION: *VECTORES LINEALMENTE DEPENDIENTES*

Si dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ tienen una misma dirección; uno de ellos se puede escribir en términos del otro; es decir $\vec{u} = \lambda\vec{v}$; con λ un número real (escalar)

DEFINICION 2.10

Se dice que dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ de un Espacio Vectorial $\vec{V}$ son Linealmente Dependientes (L.D.) sí y solamente si

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$$

puede lograrse con escalares en donde al menos uno es no nulo.

Segunda Parte

- Toma otro SCCR (R^2) con su referencia (O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$) y la misma escala anterior.
- Traza los vectores $\vec{u} = (4,2)$ y $\vec{v} = (3,7)$
- Estan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en la misma dirección? ___ si ___ no
- Puede escribir el vector $\vec{u}$ en terminos de $\vec{v}$? ___ si ___ no
  * Si tu respuesta es si; ¿cómo la representas? __________
- ¿Será posible encontrar dos números reales cualesquiera a, b diferentes de cero, para que $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$? ____ si ___ no
  * Si tu respuesta es si; cuales son esos números? _______
- Para que valores de a, b se puede dar la relación $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$? ______________________________

EXPOSICION: *VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES*

DEFINICION 2.11

Se dice que dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ de un Espacio vectorial $\vec{V}$ son Linealmente Independientes (L.I) sí y solamente si, toda igualdad:

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$$

en la que a y b son dos escalares; implica que: $a = b = 0$

EJEMPLO:

Consideremos dos vectores del espacio R^2: $\vec{e}_1 = (1,0)$ y $\vec{e}_2 = (0,1)$

Sean a y b dos escalares tales que: $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \vec{0}$

Luego: $a(1,0) + b(0,1) = (0,0)$;

$(a,0) + (0, b) = (0,0)$

Entonces: $(a, b) = (0,0)$ y resulta que:

$a = 0$ y $b = 0$

$\therefore$ $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ son linealmente independiente

ESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES

ACTIVIDAD 2.12

Objetivos

Que el estudiante:

a) Identifique que los vectores $\vec{e}_1 = (1,0)$ y $\vec{e}_2 = (0,1)$ - generan el espacio $\vec{V}$.

b) Descubra que son infinitos los vectores que generan $\vec{V}$

PROCEDIMIENTO:

- Toma un SCCR en R^2 con su referencia $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
- Traza los vectores $\vec{e}_1 = (1,0)$; $\vec{e}_2 = (0,1)$ y $\vec{v} = (4,5)$ -- (a partir del origen).
- Representa gráficamente la combinación de $\vec{v}$ en términos

de $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$.

- Escribe $\vec{v}$ en términos de $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$.
- A partir del origen traza otro vector $\vec{w} = (-3,4)$
- Escribe $\vec{w}$ en términos de $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$.
- Haz la representación gráfica.
- ¿Qué concluyes? ____

____

- Toma un nuevo SCCR en R^2 con su referencia $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ y la misma escala.
- Traza los vectores $\vec{e}_1 = (1,0)$ y $\vec{e}_2 = (0,1)$
- A partir del origen traza un vector $\vec{v}$ cualquiera y asignale componentes a y b; es decir $\vec{v} = (a,b)$
- Escriba $\vec{v}$ en términos de $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$.
- Haz la representación gráfica.
- ¿Qué concluyes? ____

____

- ¿Llegó a la expresión: $\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$? ___ si ___ no
- Crees que cualquier vector $\vec{v}$ de R^2 se puede escribir como combinación lineal de $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ____

____

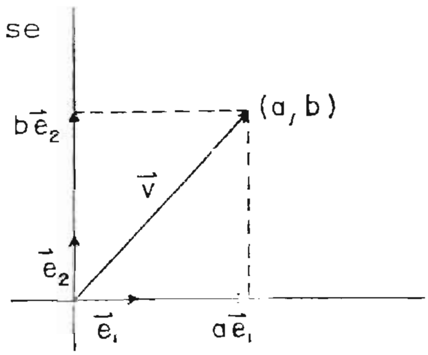
EXPOSICION: *ESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES*

Consideremos los dos vectores del Espacio Vectorial $\vec{V}$

$$\vec{e}_1 = (1,0) \quad y \quad \vec{e}_2 = (0,1)$$

Para todo vector $\vec{v} = (a,b)$ de $\vec{V}$ se tiene:

$$\vec{v} = (a,b)$$
$$= (a,0) + (0,b)$$
$$= a(1,0) + b(0,1)$$
$$\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$$



Como $\vec{v}$ es una combinación lineal de $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ entonces los vectores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ engendran el Espacio Vectorial $\vec{V}$.

DEFINICION 2.12

Si todo vector de $\vec{V}$ es una combinación lineal de los -- vectores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ se dice que estos vectores ENGENDRAN $\overline{V}$

EXPOSICION: *BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL $\vec{V}$*

Sean $\vec{i}$, $\vec{j}$ dos vectores pertenecientes a un espacio vectorial $\vec{V}$

DEFINICION 2.13

Se dice que los vectores $(\vec{i},\vec{j})$ forman una base de $\vec{V}$ sí y solamente si los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ "engengran" $\vec{V}$ y son linealmente independientes.

Para simplificar la escritura, una base $(\vec{i}, \vec{j})$ se designa por la letra β; los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son respectivamente llamados: primero y segundo vector de la base β.

EJEMPLO:

Se verificó que $\vec{e}_1 = (1,0)$ y $\vec{e}_2 = (0,1)$ del espacio vectorial R^2 engendran R^2 y que son linealmente independientes; entonces resulta que el par de vectores $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ forman una base del espacio vectorial R^2, esta base es llamada: "Base Canónica" de R^2.

EXPOSICION: *DESCOMPOSICION DE UN VECTOR EN UNA BASE* $\beta = (\vec{i},\vec{j})$

Sean $\vec{i}$, $\vec{j}$ dos vectores fijos que no tengan igual dirección (Fig. 2.46).

Todo vector $\vec{v}$ del plano se puede escribir: $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$

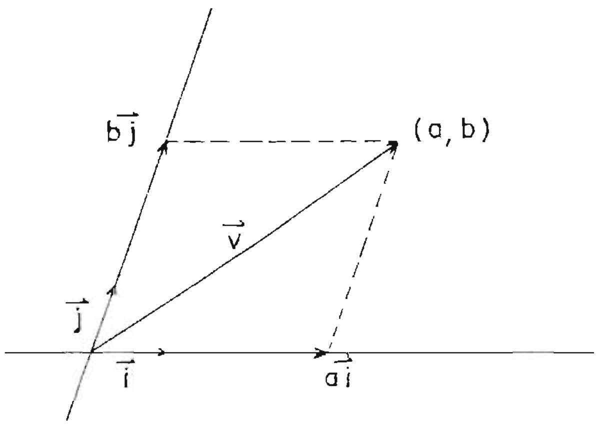


FIG. No. 2.46

EJERCICIOS 2.6

1. Se dan tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ del Espacio Vect. R^2, decir dentro de los casos siguientes si el vector $\vec{u}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

   i) $\vec{u} = (2,3)$ $\quad$ $\vec{v} = (1,-2)$ $\quad$ y $\quad$ $\vec{w} = (2,1)$

   ii) $\vec{u} = (2,-5)$ $\quad$ $\vec{v} = (1,1)$ $\quad$ y $\quad$ $\vec{w} = (-3,2)$

   iii) $\vec{u} = (3,2)$ $\quad$ $\vec{v} = (\sqrt{5} - 2,1)$ $\quad$ y $\quad$ $\vec{w} = (1,\sqrt{5} + 2)$

2. Sea $\vec{E}$ un Espacio Vect. con una base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$; demostrar que para todo escalar $\underline{a}$ el vector $(\vec{e}_1, a\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ es una base de $\vec{E}$.

3. Probar que los dos vectores del Espacio Vect. R^2: $\vec{u} = (1,-2)$ y $\vec{v} = (-3,4)$ engendran R^2.

4. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ son dos vectores linealmente independientes de un Espacio Vect. $\vec{E}$ probar que:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{i)} & \vec{u}' = \vec{u} + \vec{v} & \text{y} & \vec{v}' = \vec{u} - \vec{v} \\ \text{ii)} & \vec{u}' = 2\vec{u} + 3\vec{v} & \text{y} & \vec{v}' = \vec{u} + 2\vec{v} \end{array}\right\} \text{son linealmente independientes.}$$

5. Probar que los dos vectores del Esp. Vect. R^2; forman una base en R^2

   a) $\vec{i} = (1,3)$ $\quad$ y $\quad$ $\vec{j} = (-3,1)$

   b) $\vec{i} = (1,1)$ $\quad$ y $\quad$ $\vec{j} = (1,-1)$

   c) $\vec{i} = (2,-1)$ $\quad$ y $\quad$ $\vec{j} = (-2,3)$

BARICENTRO

ACTIVIDAD 2.13

Objetivos

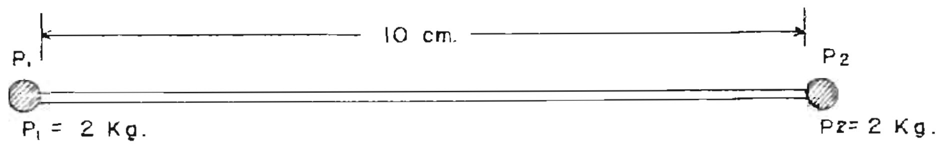
Que el estudiante:

1) Descubra el centro de masa de un cuerpo
2) Identifique el centro de masa de un sistema formado por una barra con dos pesos en sus extremos (gráficamente)
3) Identifique el centro de masa (gravedad) algebraicamente de dos puntos.

PROCEDIMIENTO:

Primera Parte

i) En el siguiente diagrama se muestra una barra de 10 cm. de longitud con pesos en sus extremos de 2 kg.



De los casos que se muestran a continuación:

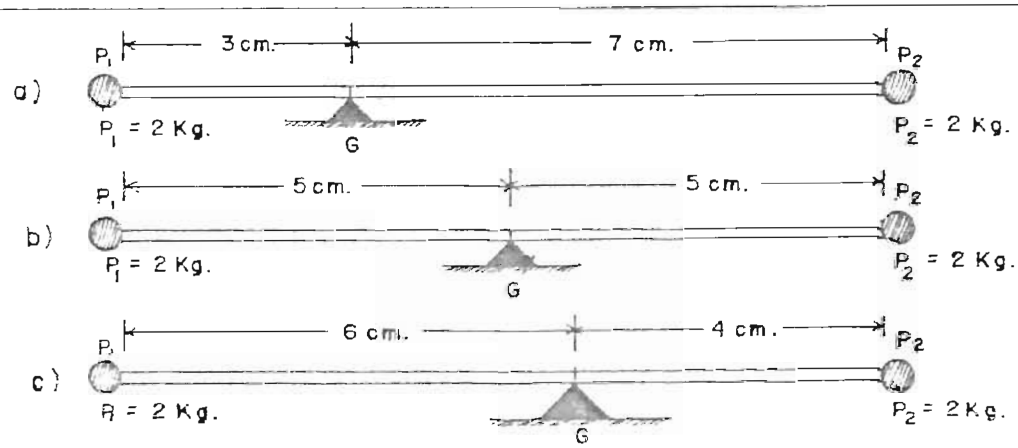
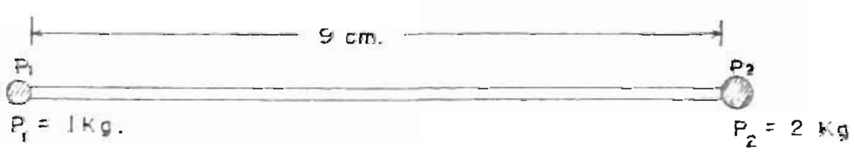


FIG. No. 2.47

- Cuál debe ser la adecuada colocación del punto de Apoyo G para que la barra no se mueva? ______________________
- Identifica mo ℓ_1, la longitud de P_1 a G y como ℓ_2 la longitud de G a P_2
- Efectúa en los casos dados: a) b) c); los productos de los pesos p_i con las distancias ℓ_i de los extremos al punto de apoyo G. ¿Qué concluyes? (1) ______________________
- Para cada caso realiza la suma vectorial de $p_1 \overrightarrow{GP}_1$ con $p_2 \overrightarrow{GP}_2$; Qué concluyes? (2) ______________________
- Relaciona los resultados obtenidos en (1) y en (2) del literal b) -¿Qué concluyes? ______________________
- ¿Cómo es el vector $\overrightarrow{GP}_1$ con respecto al vector $\overrightarrow{GP}_2$ en el literal b)? ______________________
- A qué es igual el resultado de la suma $p_1 \overrightarrow{GP}_1 + p_2 \overrightarrow{GP}_2$ del literal b)? ______________________

COMENTARIO: En la Fig. 2.47 el punto de apoyo que se localiza para que la barra no se mueva, se le denomina: BARRICENTRO. (Físicamente se le llama: centro de masa).

ii) En el siguiente diagrama se muestra una barra de 9 cm de longitud, con pesos en sus extremos de 1 kg y 2 kg.



De los casos que se muestra a continuación:

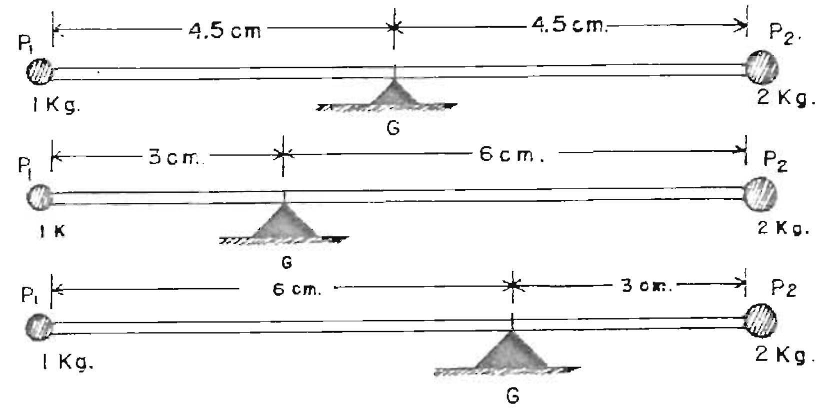


FIG. No 2.48

- Cuál debe ser la adecuada colocación del punto de apoyo G para que la barra no se mueva? ______________________

- Identifica como ℓ_1 la longitud de P_1 a G y como ℓ_2 la longitud de G a P_2

- Efectúa en los casos dados a), b), c); los productos de los pesos p_i con las longitudes ℓ_i de los extremos al punto de apoyo G.

- ¿En qué literal a) b) ó c) los resultados fueron iguales? ______________________________ (1)

- ¿Qué concluyes? ______________________

- Para cada caso a), b) y c) realiza la suma vectorial de $p_1 \overrightarrow{GP}_1$ con $p_2 \overrightarrow{GP}_2$

- ¿En qué caso tu resultado es el vector cero? ________ (2)

- ¿Qué concluyes? ______________________

- Relaciona el resultado obtenido en (1) y en (2) ; -¿Qué concluyes? ______________________

- De ① en que caso $p_1\ell_1 - p_2\ell_2 = 0$? ________________________

* Las siguientes instrucciones son para el literal c)

- ¿Es la longitud de P_1 a G dos tercios (2/3) de la longi-- tud de la barra? _____ si ___ no
- ¿Es la longitud de P_2 a G un tercio (1/3) de la longitud de la barra? ___ si ___ no
- ¿Existe relación entre las sumas de los pesos (1 + 2 = 3) y las partes en que se divide la barra (3 partes = 2/3 + 1/3), para encontrar G? ___ si ___ no
- Determina esa relación para cualquier peso _______________

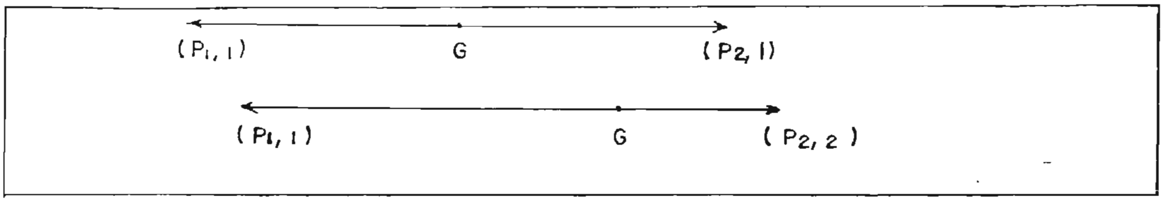
COMENTARIO:

En general el punto G entre dos puntos p_1 y P_2 con pesos p_1 y p_2, respectivamente; se encuentra al establecer la relación $p_1\overrightarrow{GP}_1 + p_2\overrightarrow{GP}_2 = \vec{0}$.

Para no confundir peso (p) con Punto (P), se usan minúsculas y mayúsculas, respectivamente; además cada punto tiene su peso; por lo tanto se asocian como pares ordenados así: (P, p)

Ejemplo: (con vectores)

i) Si $P_1 = P_2 = 1$ ii) Si $P_1 = 1$ y $P_2 = 2$



Segunda Parte

- Toma un plano (cuadriculado)
- Define un sistema de coordenadas rectangulares (R^2)
- Determina su referencia (O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$)
- Ubica los puntos $P_1(2,6)$ y $P_2(8,2)$
- Traza un segmento de recta de P_1 a P_2
- Asíngale a cada punto un mismo paso ($p = 1$); es decir (P_1, 1) y (P_2, 1).
- Encuentra el Baricentro G de los puntos P_1 y P_2 (punto medio en este caso).
- Determina las coordenadas de G.
- Verifica con pares ordenados que $\vec{GP}_1 + \vec{GP}_2 = \vec{0}$

  Si se le asigna a los puntos P_1 y P_2 el mismo peso ($p = 5$); es decir (P_1, 5) y (P_2, 5).
- Encuentra el Baricentro G' de los puntos P_1 y P_2
- Determina las coordenadas de G'
- Verifica que $5\overrightarrow{G'P}_1 + 5\overrightarrow{G'P}_2 = \vec{0}$
- Son las coordenadas de G igual a las de G'? ______________
- Qué concluyes? ______________________________________

COMENTARIO:

En el plano cartesiano la notación simbólica (Punto, Peso) es decir (P,p) puede dar lugar a confusión; por lo tanto esta notación se especifica así; por ejemplo:

$(P_1, 5) = ((2,6),5)$ y $(P_2,1) = ((8,2),1)$. En general para un punto $P(x,y)$ y un pero p se tiene que:

$$(P,p) = ((x,y),p)$$

- En el mismo plano ubica los puntos A(5,1) y B(3,5)
- Asíngnale a cada punto peso uno (p = 1)
- Encuentra algebraicamente el baricentro G de los puntos A y B.

Ayuda: Supóne que G(x,y) y a través de la expresión
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ encuentra las coordenadas x e y

- Verifícalo gráficamente.
- El Baricentro encontrado, ¿tiene las coordenadas (4,3)?
  ___ si ___ no
- En el mismo plano o en otro ubíca los puntos C(-4,7) y D(5,1).
- Asígnale al punto C peso 1 y al punto D peso 2; es decir (C,1) y (D,2)

- Encuentra algebraicamente el baricentro G de los puntos C y D.

Ayuda: usa la expresión $1\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = 0$

- Verifícalo gráficamente.

EXPOSICION: *BARICENTRO ENTRE DOS PUNTOS PONDERADOS*

Sea R^2 el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares (SCCR) en un plano π, con su referencia $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$; se llamará punto "ponderado" al par (P,α) en donde P es un punto de R^2 y α un número real, llamado coeficiente o "peso" de P.

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO P_1P_2

Sean P_1 y P_2 dos puntos de R^2 que tienen la misma ponderación. El punto medio del segmento P_1P_2 es el baricentro G de los puntos P_1 y P_2 que se define así:

$$\alpha\overrightarrow{GP}_1 + \alpha\overrightarrow{GP}_2 = \vec{0};\ \alpha \neq 0 \quad (3)$$

$$\overrightarrow{GP}_1 + \overrightarrow{GP}_2 = \vec{0};\ \text{si } \alpha = 1$$

Aún más, al escoger un origen 0 arbitrario se tiene que:

$$\overrightarrow{OG} = 1/2(\overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2)\ \text{Ver Fig. 2.49}$$

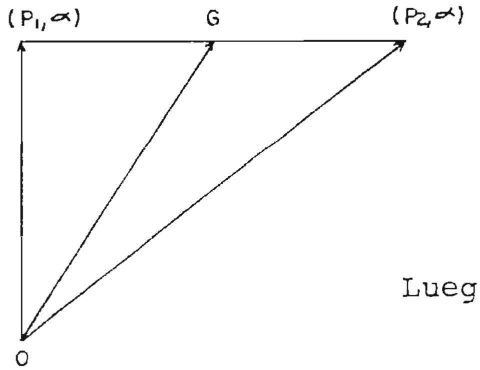


FIG. No. 2.49

De la figura se tiene:

$$\overrightarrow{GP}_1 = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}_1 \quad y$$

$$\overrightarrow{GP}_2 = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}_2$$

Ademas de ③ se tiene:

$$\alpha\overrightarrow{GP}_1 + \alpha\overrightarrow{GP}_2 = \vec{0}$$

Luego: $\alpha(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}_1) + \alpha(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}_2) = \vec{0}$

$$2\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2 = \vec{0}$$

$$\therefore \overrightarrow{OG} = 1/2(\overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2)$$

En particular si 0 se ubica en la posición de P_1 se tiene:

$$\boxed{\overrightarrow{P_1G} = 1/2\ \overrightarrow{P_1P_2}}$$

CENTRO DE GRAVEDAD DE DOS PUNTOS CON DIFERENTE PONDERACION

Sean (P_1,α) y (P_2,β) dos puntos ponderados. P_1 y P_2 son de R^2 y α,β son números reales.

Si $\alpha + \beta \neq 0$, entonces existe un único punto G tal que:

$$\alpha\overrightarrow{GP}_1 + \beta\overrightarrow{GP}_2 = \vec{0}$$

Este punto G es llamado "Baricentro" de los puntos P_1 y P_2.

Aún más, al escoger un origen 0 arbitrario se tiene:

i) $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OP}_1 + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OP}_2$

ii) $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}(\alpha\overrightarrow{OP}_1 + \beta\overrightarrow{OP}_2)$ ó iii) $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{P_1P_2}$

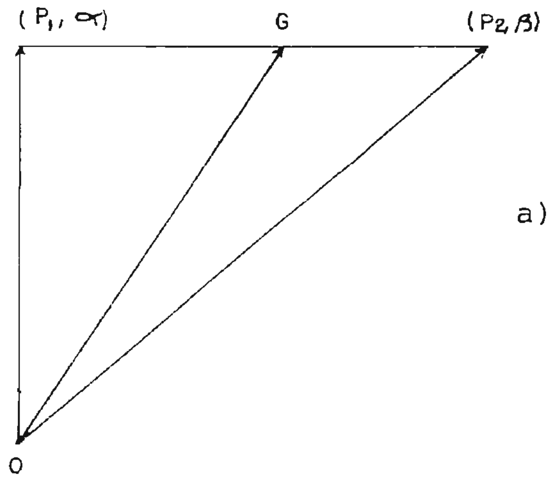


FIG. No. 2.50

De la figura se tiene:

$\overrightarrow{GP_1} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP_1}$

$\overrightarrow{GP_2} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP_2}$

a) Si $\alpha + \beta = 1$ entonces:

$\overrightarrow{OG} = \alpha\overrightarrow{OP_1} + \beta\overrightarrow{OP_2}$

En particular si 0 se ubica en la posición de P_1 se tiene:

$$\boxed{\overrightarrow{P_1G} = \beta\overrightarrow{P_1P_2}}$$

b) Además para todo, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tq: $\alpha + \beta \neq 0$ prueba que:

$\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\alpha + \beta}(\alpha\overrightarrow{OP_1} + \beta\overrightarrow{OP_2})$ y que: $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OP_1} + \beta\overrightarrow{P_1P_2}$

BARICENTRO ENTRE TRES PUNTOS

ACTIVIDAD 2.14

Objetivos

Que el estudiante:

a) Localice el baricentro entre 3 puntos en forma gráfica

b) Obtenga conclusiones de los gráficos realizados

c) Descubra un procedimiento algebraico, para encontrar el baricentro de 3 puntos ponderados

PROCEDIMIENTO:

Primera Parte

- Toma un plano (cuadriculado)
- Determina un sistema de coordenadas cartesianas (R^2)
- Determina su referencia $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ y una escala adecuada
- Ubica los puntos A(-3,3); B(3,6) y C(6,0)
- Traza segmentos de rectas de A a B, de B a C y de C a A.
- Asigna a cada punto un mismo peso (p = 1) es decir (A,1), (B,1); (C,1)
- Encuentra el baricentro de los puntos:

  i) A y B e identifícalo con la letra G_1

  ii) B y C e identifícalo con la letra G_2

  iii) C y A e identifícalo con la letra G_3
- Traza segmentos de rectas desde: G_1 al punto C; G_2 al punto A y G_3 al punto B.
- ¿Se cortan los 3 segmentos: G_1A; G_2A, G_3B en un mismo punto? ___ si ___ no
- Identifíca el punto de intersección con la letra G.
- Representa con otro color los vectores: $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$
- Determina las coordenadas de G.
- Suma los vectores $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ y $\overrightarrow{GC}$ (gráficamente o con pares ordenados)

- ¿Cuál es el resultado? ______________________________

- ¿Qué concluyes? ______________________________

COMENTARIO:
Si se tienen 3 puntos no colineales con un mismo peso cada punto, su centro de gravedad es el punto donde se cortan los segmentos de rectas que se trazan desde cada punto medio de los lados del triángulo a su vértice opuesto.

- Ubica en un nuevo SCCR (con la misma escala del gráfico anterior) los puntos: A, B, C, G, G_1, G_2 y G_3.
- Traza los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OG}$
- Traza el segmento de recta de A a B.
- Mide la longitud G_1C e identifícala como ℓ_1
- Mide la longitud GC y G_1G
- Identifica el gráfico con la letra T
- ¿Es el segmento GC igual a dos tercios (2/3) de ℓ_1? ___ si ___ no
- ¿Es el segmento G_1G igual a un tercio (1/3) de ℓ_1? ___ si ___ no
- Según gráfico T ¿el vector $\overrightarrow{OG}_1 = 1/2\ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$? ___ si ___ no
- Del gráfico T ¿el vector $\overrightarrow{G_1C} = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG_1})$? ___ si ___no

- Del gráfico Ⓣ ¿será la relación $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG_1} + 1/3\overrightarrow{G_1C}$ ④ ?

  ___ si ___ no

- Sustituye en ④ las relaciones anteriores y simplifica.
- ¿Lograste llegar a la relación $\overrightarrow{OG} = 1/3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$? -

  ___ si ___ no

  * Si tu respuesta es sí, ¡felicidades! lo lograste!
  * Si tu respuesta es no, sigue trabajando hasta lograrlo.
- ¿Qué concluyes? ____

Segunda Parte

- Determina un nuevo SCCR, con la misma escala
- Repite nuevamente el procedimiento anterior hasta la instrucción:

  "Asigna a cada punto un mismo peso (p = 1) ---"
- Determina el baricentro de los puntos B y C e identifícalo con la letra G_2.
- Asígnale al punto G_2 un peso igual a la suma de los pesos de B y C.
- Calcula el baricentro de los puntos G_2 y A e identifícalo con la letra G.
- ¿Es el segmento G_2G un tercio (1/3) de G_2A? ___ si ___ no
- ¿Es el segmento GA dos tercios (2/3) de G_2A? ___ si ___ no
- Escribe la relación vectorial de los puntos G_2, G y A, de tal manera que la suma sea el vector cero (recordar Actividad 2.11)

- ¿Qué concluyes? ______________________________

- Si A tiene peso 1 y G_2 peso 2, se podrá establecer la relación:

  ¿$1/3\overrightarrow{G_2G} + 2/3\overrightarrow{GA} = \vec{0}$ ó $1/3(\overrightarrow{G_2G} + 2\overrightarrow{GA}) = \vec{0}$? ___ si ___ no

- De manera similar encuentra el baricentro de los puntos C y A e identifícalo con la letra G_3, el baricentro de los puntos A y B e identifícalo con la letra G_1.

- Calcúla el baricentro de los puntos:

  i) G_3 y B e identifícalo con la letra G

  ii) G_1 y C e identifícalo con la letra G

- Compara resultados

- ¿El punto G es el mismo en los 3 casos? ___ si ___ no

- ¿Qué concluyes? ______________________________

- Para cada caso escribe la relación vectorial, de tal manera que su resultado sea el vector cero.

COMENTARIO:

El baricentro G de tres puntos ponderados, puede obtenerse sustituyendo dos de ellos por su baricentro G', con peso igual a la suma de los pesos de dichos puntos (siempre y cuando sea no nula) y calculando enseguida el baricentro de G' con el tercer punto. Por ejemplo, para calcular el baricentro del sistema de puntos: (A,1), (B,3) y (C,5); podemos calcular el baricentro G' de (A,1) y (B,3) y enseguida el baricentro de (G',4) y (C,5).

- Determina otro SCCR (R^2) y defina su referencia $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$
- Ubica los puntos $P_1(-2,-2)$; $P_2(1,7)$ y $P_3(5,1)$.
- Une los puntos con segmentos de rectas.
- Asígnale a cada punto un peso igual ($p = 1$)
- Encuentra algebraicamente el baricentro G de los puntos - P_1, P_2 y P_3

(Recuerda: $\overrightarrow{GP}_1 + \overrightarrow{GP}_2 + \overrightarrow{GP}_3 = \vec{0}$)

- ¿Tiene el punto G las coordenadas (1,2)? ___ si ___ no
- Gráficamente encuentra el baricentro de P_1,P_2 y P_3 e identifícalo como G'
- Determina el par ordenado de G'
- ¿Tiene G' y G las mismas coordenadas? ___ si ___ no
- Qué concluyes? ____
- Ubica los puntos $P_1(-2,-2)$; $P_2(1,7)$ y $P_3(5,1)$ en otro - SCCR, con la misma escala
- Une los puntos con segmentos de rectas
- Asígnale al punto P_1 peso 2; al punto P_2 peso 1 y al punto P_3 peso 2
- Encuentra algebraicamente el baricentro G de los puntos ponderados (P_1, 2); (P_2, 1) y (P_3, 2)

Ayuda: $2\overrightarrow{GP}_1 + 1\overrightarrow{GP}_2 + 2\overrightarrow{GP}_3 = \vec{0}$

- ¿Tiene el punto G las coordenadas (1,1)? ___ si ___ no
- Gráficamente encuentra el baricentro entre P_1 y P_2 e identifícalo G_1

- Gráficamente encuentra el baricentro G' entre G_1 y P_3
- Determina las coordenadas de G'
- ¿Tienen G' y G las mismas coordenadas? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________

EXPOSICION: *BARICENTRO ENTRE TRES PUNTOS PONDERADOS*

CENTRO DE GRAVEDAD DE UN TRIANGULO ABC

i) Sean tres puntos A,B,C no alineados de R^2 que tienen la misma ponderación (α) se llamará centro de gravedad G del triángulo ABC al baricentro de los puntos A,B y C; que se define por:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

(Si P_1, P_2, P_3 son los 3 puntos no alineados, entonces:

$$\sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{GP}_i = \vec{0} \quad \text{si } \alpha = 1 \quad \text{ó} \quad \sum_{i=1}^{3} \alpha\overrightarrow{GP}_i = \vec{0} \quad \text{si } \alpha \neq 0)$$

Aún más, al escoger un orígen 0 arbitrario, se tiene:

$\overrightarrow{OG} = 1/3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ Ver Fig. 2.51

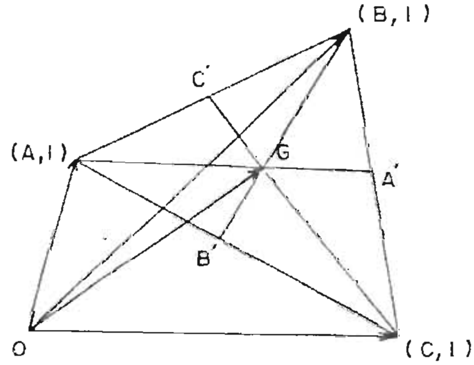


FIG. No. 2.51

De la figura 2.51 A' es el punto medio de B y C, es decir se puede reemplazar (B,1) y (C,1) por (A',2) luego G es el baricentro entre (A',2) y (A,1); en donde

$\overrightarrow{OG} = 1/3(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'})$

En particular si O se ubica en la posición de A, se tiene

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = 2/3\overrightarrow{AA'}}$$

ii) Sean (A,α); (B,β) y (C,θ) tres puntos ponderados - tal que: $\alpha \neq \beta \neq \theta$ en donde: $A,B,C \in R^2$ y α,β,θ son números reales

Si $\alpha + \beta + \theta \neq 0$; entonces existe un único punto G tal que:

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \theta\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Aún más, al escoger un orígen 0 arbitrario, se tiene que:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha + \beta + \theta} (\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \theta\overrightarrow{OC})$$

Si se hace $\alpha + \beta + \theta = 1$ se tiene que:

$$\overrightarrow{OG} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \theta\overrightarrow{OC}$$

Además, si A' es el baricentro entre (B,β) y (C,θ), entonces A' es el punto ponderado:

$$(A',(\beta + \theta))$$

Luego: $\overrightarrow{OG} = \alpha\overrightarrow{OA} + (\beta + \theta)\ \overrightarrow{OA'}$

En particular si 0 se ubica en la posición de A; se tiene:

$$\overrightarrow{AG} = (\beta + \theta)\ \overrightarrow{AA'}$$

BARICENTRO DE 4 PUNTOS

ACTIVIDAD 2.15

Objetivos

Que el estudiante:

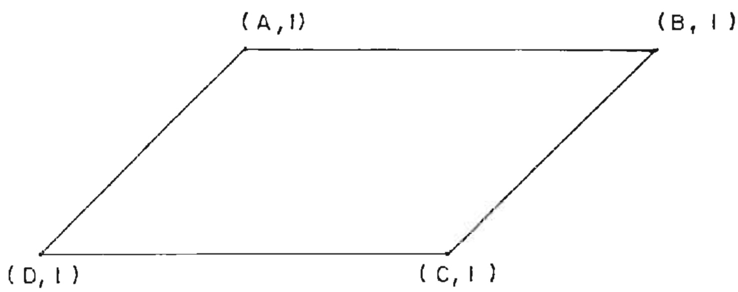
a) Determine en forma gráfica el baricentro de 4 puntos ponderados.

b) Trate de generalizar el concepto de baricentro para n - puntos ponderados

c) Obtenga conclusiones de los gráficos.

PROCEDIMIENTO:

- El siguiente diagrama muestra 4 puntos A,B,C,D; con peso 1 cada uno.



- Calcula gráficamente el baricentro de G de los puntos A, B,C y D

Ayuda: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

- Encuentra el baricentro de los puntos A y B e identifícalo con la letra G_1
- Encuentra el baricentro de los puntos C y D e identifícalo con la letra G_2
- ¿Qué pesos se les asigna a G_1 y a G_2? ____________________
- Determina el baricentro de los puntos $(G_1, 2)$ y $(G_2, 2)$ e identifícalo con la letra G'
- ¿Es el punto G' el mismo G? ___ si ___ no

  Si tu respuesta es si; tienes buen cálculo
- Traza diagonales en el diagrama; ¿es el punto de intersección el mismo punto G'? ___ si ___ no
- ¿Crees que ya encontrate una forma sencilla de ubicar el baricentro? ___ si ___ no

COMENTARIO:

Siempre que sean paralelos dos a dos los segmentos de un cuadrilatero y los pesos sean iguales en sus 4 puntos, el baricentro se ubicará al intersectar las diagonales del cuadrilatero.

- Algebraica y gráficamente, encuentra el baricentro de los puntos: A(2,4); B(-2,-2); C(6,-2) y D(10,4); compara resultados.

PROPIEDADES DEL BARICENTRO

i) Invarianza del baricentro si los pesos se multiplican por un escalar:

El baricentro G de n puntos ponderados no cambia si a los pesos de dichos puntos lo multiplicamos por un escalar no nulo; de tal manera que se puede establecer la siguiente propiedad:

* Si λ es un número real no nulo, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GP}_i = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^{n} (\lambda\alpha_i)\overrightarrow{GP}_i = \vec{0}$$

Observemos, en particular que si escogemos λ de tal manera que la suma de los nuevos coeficientes, sea igual a 1:

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Se puede probar que: $\mathrm{Bar}\,((P_i,\alpha_i))i \in [1,n] =$

$\mathrm{Bar}\,((P_i,\lambda\alpha_i))i \in [1,n]$ si $\lambda \neq 0$

ii) Asociatividad del Baricentro

El baricentro G de n puntos ponderados puede obtenerse sustituyendo varios de ellos, por su baricentro G' con peso igual a la suma de los pesos de dichos puntos; en donde la suma de éstos pesos es no nula, y calculando al final el baricentro G con los demás puntos restantes

EXPOSICION: *BARICENTRO PARA n PUNTOS*

Llamaremos punto ponderado al par (P,α) formado por un punto P de R^2 y un real α llamado coeficiente o peso de P.

Consideremos una familia finita $((P_1,\alpha_1),(P_2,\alpha_2),\dots(P_n,\alpha_n))$ de n puntos ponderados $(n \geq 1)$; denotemos a la familia $((P_i,\alpha_i))\ i \in [1,n]$ como la familia de pares.

DEFINICION DE BARICENTRO PARA n PUNTOS:

Sea $((P_i,\alpha_i))\ i \in [1,n]$ una familia de puntos ponderados;

* Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, existe un único punto G talque

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$$

Aún más, siendo 0 un punto cualesquiera de R^2, se tiene:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} (\alpha_1\overrightarrow{OP_1} + \alpha_2\overrightarrow{OP_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{OP_n}) \quad \text{ó}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OP_i}\right) \qquad (1)$$

Este punto G es llamado baricentro de la familia $((P_i,\alpha_i))\ i \in [1,n]$ o simplemente baricentro de los puntos $P_1, P_2 \dots, P_n$; afectados de los coeficientes $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$

Se denota:

$$G = \mathrm{Bar}((P_i,\alpha_i))\ i \in [1,n]$$

y el baricentro G'.

Esta propiedad es llamada la Asociatividad del baricentro, y se define así:

* Sea $((P_i,\alpha_i))i \in [1,n]$ una familia de puntos ponderados

Supongamos que existe una parte J de $[1,n]$ ($J \neq \phi$ y $J \neq [1,n]$) tal que:

$\sum_{i \in j} \alpha_i \neq 0$. Tomando $K = [1,n] - J$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GP}_i = \vec{0} \iff \sum_{i \in J} \alpha_i \overrightarrow{GP}_i + \sum_{i \in K} \alpha_i \overrightarrow{GP}_i = \vec{0}$$

de la expresión 1 si se reemplaza 0 por G y G por G' en - donde $G' = Bar((P_i,\alpha_i))i \in J$; se tiene:

$$\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{\sum_{i \in J} \alpha_i} \left(\sum_{i \in J} \alpha_i \overrightarrow{GP}_i \right)$$

entonces:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GP}_i = \vec{0} \iff \left(\sum_{i \in J} \alpha_i \right) \overrightarrow{GG'} + \sum_{i \in K} \alpha_i \overrightarrow{GP}_i = \vec{0}}$$

llamada: Asociatividad de Baricentro para n puntos.

EJERCICIOS: 2.7

1) Encuentra el baricentro de los puntos: (Algebraica y gráficamente)

a) C(-3,1) y D(y,6) con sus pesos 2 y 3, respectivamente

b) E(9,0) y F(1,8) con sus pesos 3 y 1, respectivamente

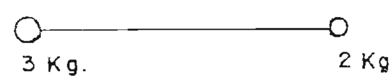
c) H(3,2) e I(7,4) con pesos iguales de 2.

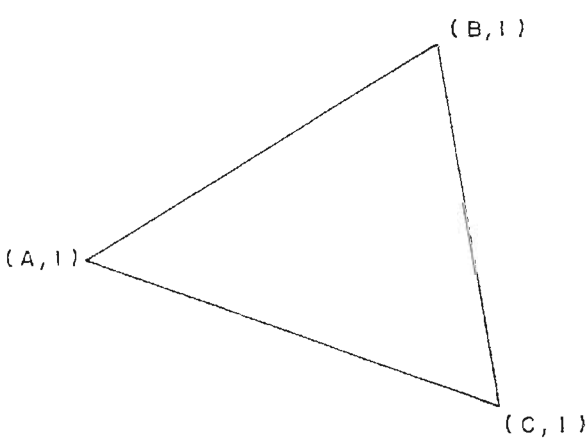
2) Encuentra el baricentro de los puntos: (Algebraica y gráricamente)

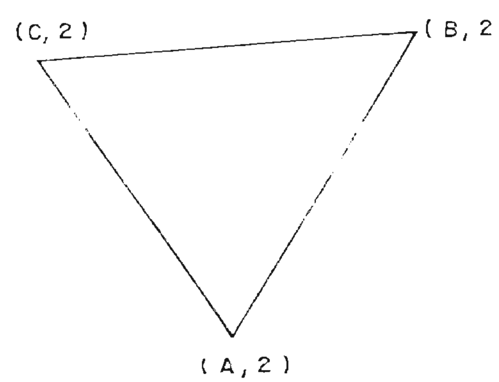
a) A(6,-3); B(-3,0) y C(3,3); con P = 1 cada punto

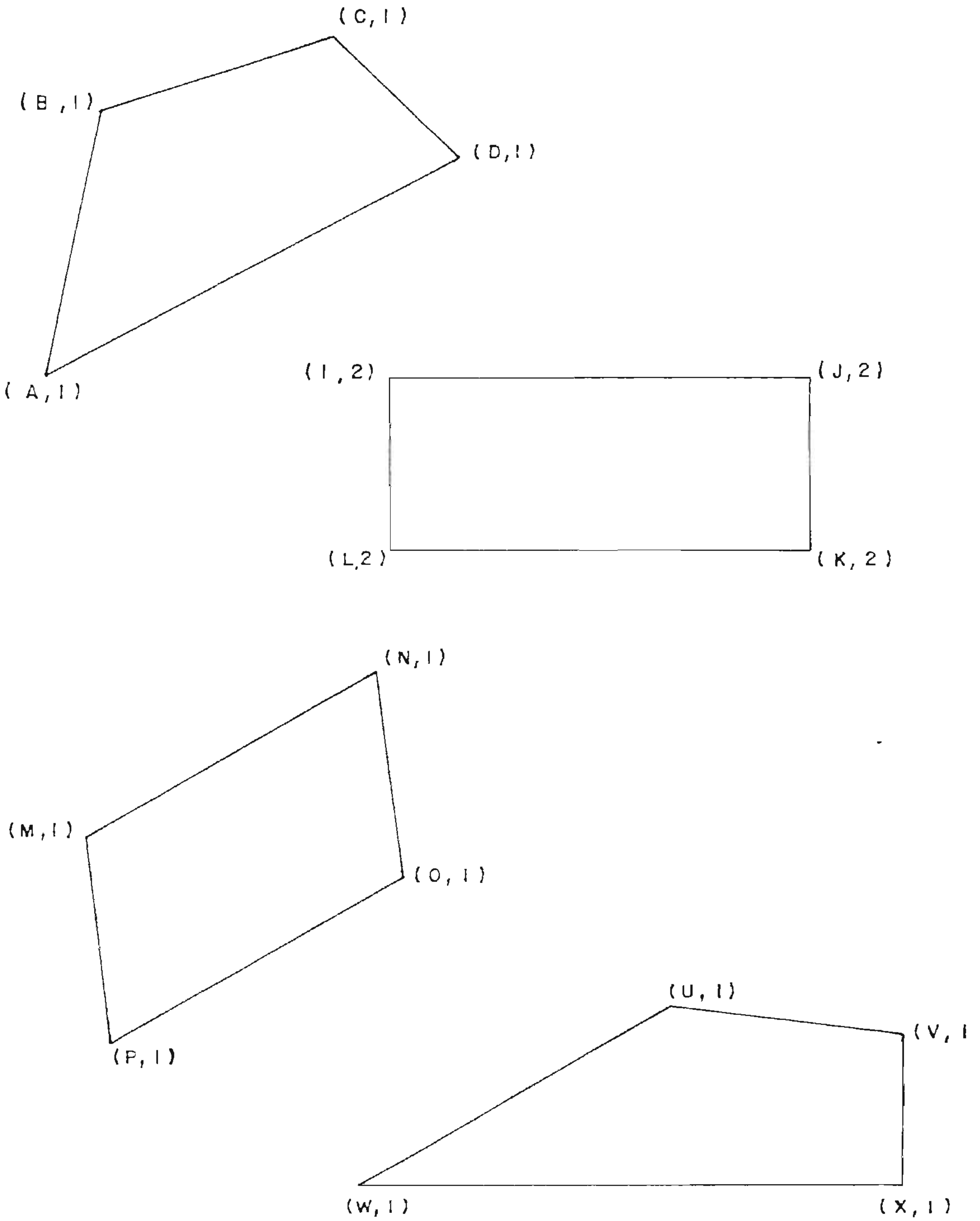
b) D(4,2); E(-1,5) y F(3,8); con P = 2 cada punto

3) Encuentra el baricentro (gráficamente) de los siguientes diagramas:








(C, 1)
(B, 1)
(D, 1)
(A, 1)
(I, 2)
(J, 2)
(L, 2)
(K, 2)
(N, 1)
(M, 1)
(O, 1)
(P, 1)
(U, 1)
(V, 1)
(W, 1)
(X, 1)

C A P I T U L O   I I I

PRODUCTO ESCALAR

INTRODUCCIÓN AL PRODUCTO ESCALAR

ACTIVIDAD 3.1

Objetivos

Que el estudiante:

a) Descubra el procedimiento de multiplicar escalarmente dos vectores.

b) Descubra que el producto escalar de dos vectores, es un número real.

c) Obtenga conclusiones de los gráficos

PROCEDIMIENTO:

<u>Primera Parte</u>

En la Figura 3.1 se muestra un SCCR con una escala de: 1:10 cm y una semicircunferencia con radio uno (1)

- Determina los pares ordenados de los puntos A,C,F y H
- Traza los vecotes $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OF}$ y $\overrightarrow{OH}$
- Proyecta los vectores $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OH}$ sobre el vector $\overrightarrow{OA}$

COMENTARIO: Proyectar un vector $\vec{v}$ sobre el vector $\overrightarrow{OA}$; significa trazar una perpendicular desde el extremo del vector $\vec{v}$; sobre el vector - $\overrightarrow{OA}$ o su prolongación $(-\overrightarrow{OA})$ y se identifica: $\text{Proy}_{\overrightarrow{OA}}\vec{v}$ (la proyección del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\overrightarrow{OA}$)

- Traza los vectores proyectados: $Proy_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OC}$, $Proy_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OF}$, $Proy_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OH}$ (todos en el eje x). Identifica el extremo del vector $Proy_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OC}$, con la letra K.

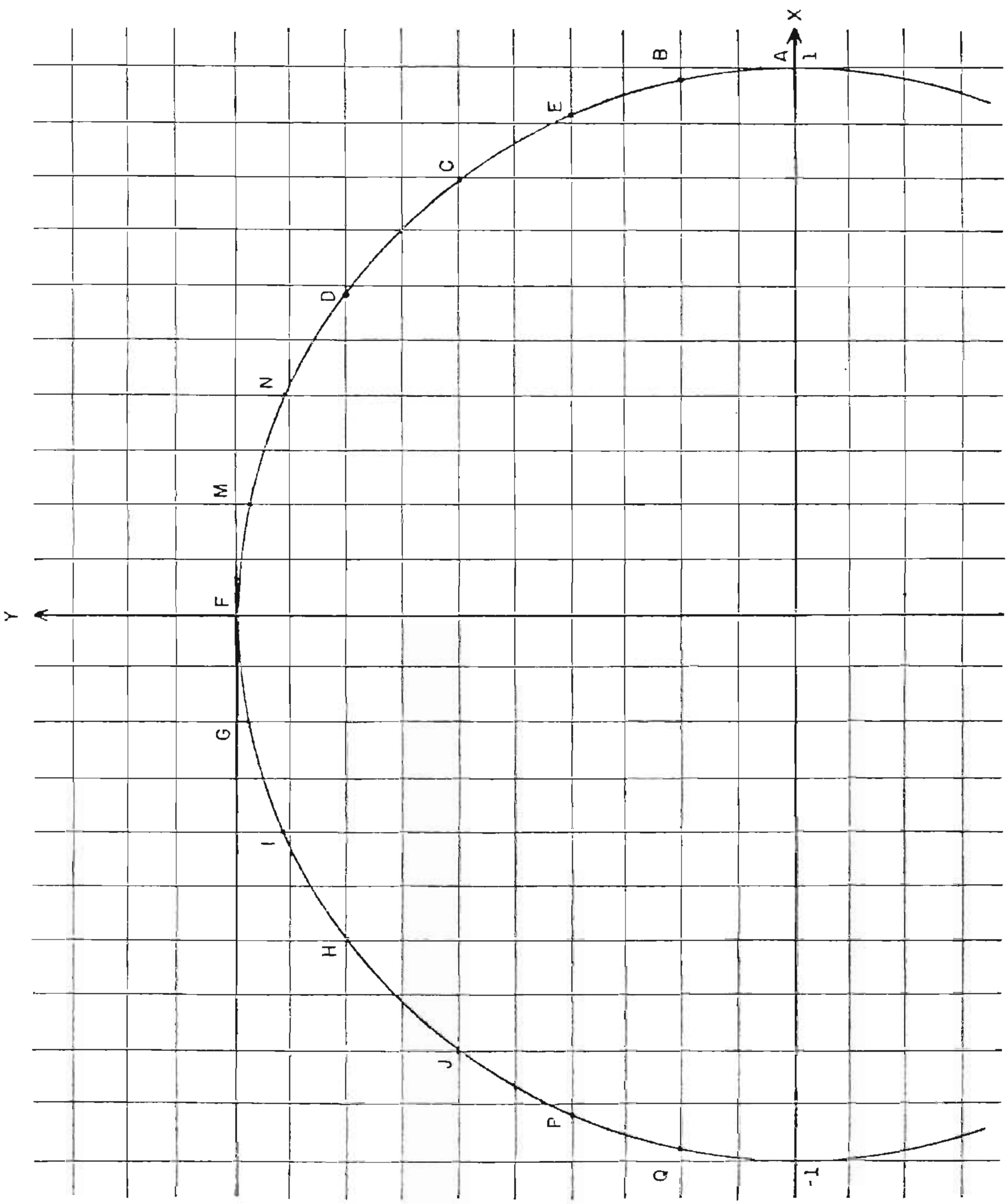


FIG. No.3.1

- Determina la longitud de cada vector proyectado (de acuerdo a la escala) por ejemplo, si la longitud de un vector proyectado es 8 cm., entonces su longitud es 0.8 de acuerdo a la escala.
- Efectúa el producto de la Norma del vector $\overrightarrow{OA}$ ($\|\overrightarrow{OA}\| = 1$) por la norma del vector $proy_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OC}$; es decir:

$$\|\overrightarrow{OA}\| \, \|Proy_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OC}\| = P_1 \quad (1)$$

- Mide el ángulo entre el vector $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ e identifícalo como θ

COMENTARIO: Según el gráfico la figura OCK es un triángulo rectángulo y por trigonomometría el lado OK se define también: $\|\overrightarrow{OC}\| \cdot \cos\theta$

- ¿Es el vector $\overrightarrow{OK}$ igual al vector $Proy_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OC}$? ___ si ___ no
- Si $\|Proy_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OC}\| \cos\theta$; ¿de que otra manera puedes escribir (1) ? ______________________
- Desarrolla $\|\overrightarrow{OA}\| \; \|\overrightarrow{OC}\| \cos\theta$ e identifícalo como P_2
- ¿Es igual P_1 con P_2? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________
- Efectúa el producto de la norma del vector $\overrightarrow{OA}$ por la norma del vector $Proy_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OH}$; e identifícalo como P_3 (este va-- lor se tomará negativo, porque el vector $Proy_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OH}$ está so

bre el vector $-\overrightarrow{OA}$ o su prolongación)

- Mide el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OH}$ e identifícalo como α
- Desarrolla: $\|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OH}\|$ Cos α e identifícalo como P_4
- ¿Es igual P_3 con P_4? ___ sí ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________
- Traza los vectores $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ y haz lo mismo que se hizo con el vector $\overrightarrow{OC}$
- Que relación encuentras en los resultados de los productos de la norma del vector $\overrightarrow{OA}$ ($\|\overrightarrow{OA}\| = 1$) con los vectores $\text{Proy}_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OB}$, $\text{Proy}_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OD}$, ..., $\text{Proy}_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{ON}$
- ¿Qué concluyes? ______________________________
- Traza los vectores $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OQ}$ y haz lo mismo que se hizo con el vector $\overrightarrow{OH}$
- ¿Qué relación encuentras en estos resultados?
- ¿Qué concluyes? ______________________________

<u>Segunda Parte</u>

- Toma un plano cuadriculado (milimetrado)
- Determina un SCCR en R^2
- Determina su referencia $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ con una escala de 1: 1 cm.
- A partir del punto (0,1) traza los vectores $\vec{u} = (4,2)$ y $\vec{v} = (6,0)$
- Mide el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ e identifícalo como θ

- Proyecta el vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$
- Traza el vector $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$
- Mide la longitud de los vectores $\vec{v}$ y $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$
- Efectúa el producto de la norma de $\vec{v}$ por la norma de $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$ e identifícalo como ℓ_1
- Mide la longitud del vector $\vec{u}$
- Desarrolla $\|\vec{v}\|\ \|\vec{u}\|$ Cos θ e identifícalo como ℓ_2
- ¿Es ℓ_1 igual a ℓ_2? ___ si ___ no
- ¿Fue tu resultado en los dos casos 24? ___ si ___ no
- Si utilizamos las componentes de los vectores $\vec{u} = (4,2)$ y $\vec{v} = (6,0)$ ¿de qué manera podemos relacionar las componentes, para obtener 24?
- Descubre otra operación que relacione las primeras y las segundas componentes; insiste y lo lograrás
- Determina otro SCCR en R^2
- Define su referencia $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ con una escala de 1: 1 cm
- A partir del punto (3,1) traza los vectores $\vec{v} = (4,0)$ y $\vec{u} = (-2,4)$
- Mide el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ e identifícalo como α
- Proyecta el vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$ (prolongación del vector $-\vec{v}$)
- Traza el vector $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$
- Mide las longitudes de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$
- Efectúa el producto: $\|\vec{v}\|\ \|Proy_{\vec{v}}\vec{u}\|$ e identifícalo con la letra ℓ_3 (valor negativo)

- Desarrolla: $\|\vec{v}\|$ $\|\vec{u}\|$ Cos α e identifícalo como ℓ_4
- ¿Es ℓ_3 igual a ℓ_4? ___ si ___ no
- ¿Fue tu resultado -8? ___ si ___ no
- Relacionando las componentes de los pares de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, obtiene el valor de -8.
- Es lógico que suma y resta no pueden ser, porque su resultado es otro vector; probemos con la multiplicación:

  (4,0) y (-2,4) $4 \times 0 + (-2 \times 4) = 0 + (-8) = -8$ bien

  $4 \times (-2) + (0 \times 4) = -8 + 0 = -8$ que pasa?

  $(4 \times 4) + (0 \times -2) = 16 + 0 = 16$ No

  Analicemos el caso anterior

  (4,2) y (6,0) $(4 \times 2) + (6 \times 0) = 8 + 0 = 8$; No

  $(4 \times 6) + (2 \times 0) = 24 + 0 = 24$; Si

  $(4 \times 0) + (2 \times 6) = 0 + 12 = 12$; No

- ¿Qué concluyes? ______________________________

En la Fig. 3.2, se tienen 3 gráficos; efectúa en cada uno de ellos el producto escalar:

a) Usando normas

b) Usando pares ordenados

Nota: compara resultados.

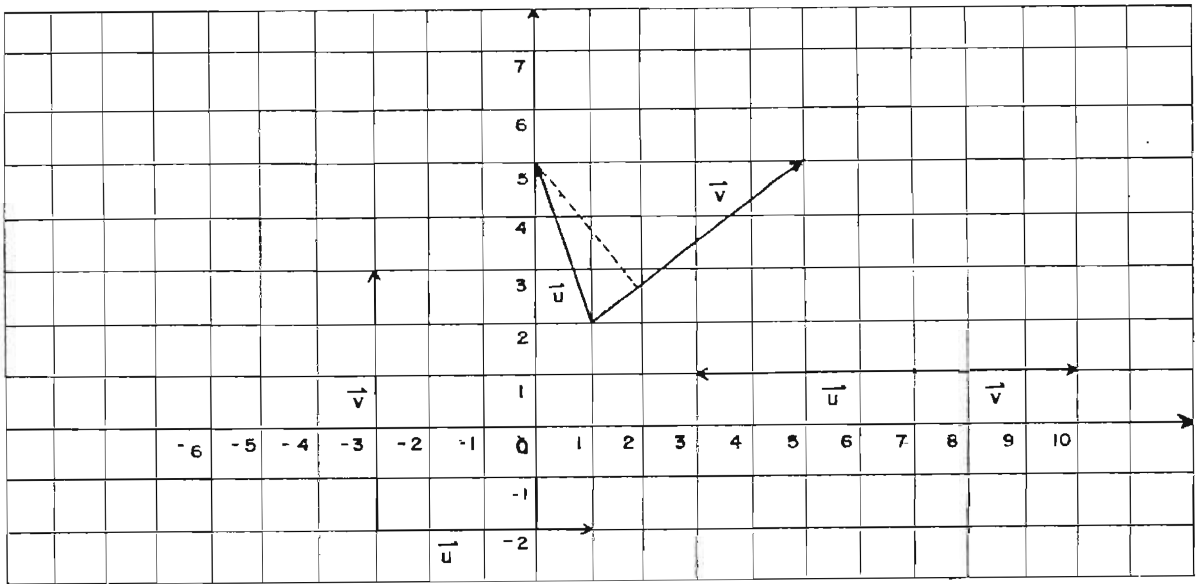


FIG. No. 3.2

Comentario:

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores, según Fig. 3.3 el producto escalar (llamado asi, porque su resultado es un escalar) de dos vectores $\vec{u}.\vec{v}$ lo denotamos: $\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|$ Cos θ (en este orden) si θ es el ángulo entre el vector $\vec{u}$ y $\vec{v}$; por el momento tienes una idea de como realizar esta operación, utilizando pares ordenados; mas adelante se te confirmará.

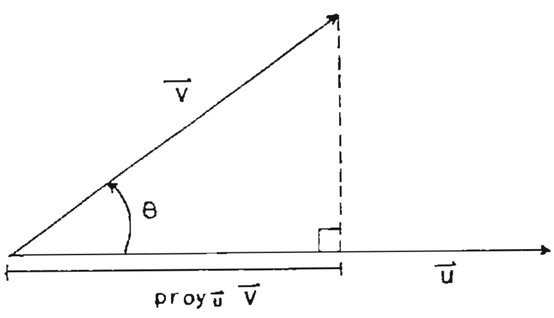


FIG. No. 3.3

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|$ Cos θ; este orden es importante .

EXPOSICION: *PRODUCTO ESCALAR O PRODUCTO PUNTO*

Sea R^2 un SCCR en un plano π, con su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y sea $\vec{V}$ el espacio vectorial definido sobre R;

Definición 3.1:

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores no nulos del Espacio Vectorial $\vec{V}$; el producto de dos vectores $\vec{u}$ por $\vec{v}$ llamado producto PUNTO o producto escalar, es un escalar denotado por $\vec{u}.\vec{v}$ y definido por:

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \; \|\vec{v}\| \text{ Cos } \theta \quad \text{ó} \quad \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \; \|\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}\|$$

Donde θ es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, además $0° \leq \theta \leq \pi$

Podemos recordar que $\|\vec{u}\|$ es la longitud del vector $\vec{u}$

Note que el resultado de multiplicar escalarmente dos vectores no resulta otro vector; sino un número real.

Como $\|\vec{u}\|$ escalar, $\|\vec{v}\|$ escalar y Cos θ es un escalar, entonces:

$$\|\vec{u}\| \; \|\vec{v}\| \text{ Cos } \theta \text{, es un escalar}$$

Observaciones directas:

1) Si $\theta = 0°$ el producto escalar es: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \text{ Cos } 0°$

Pero Cos 0° = 1 luego $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ o simplemente

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = uv}$$

2) Si $\theta = 90°$ el producto escalar es: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \text{ Cos } 90°$

Pero Cos 90° = 0 luego: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| (0)$

es decir:

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = 0}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

ACTIVIDAD 3.2

Objetivos

Que el estudiante:

a) Descubra la propiedad conmutativa en el producto punto - de dos vectores, algebraicamente

b) Descubra la propiedad distribuitiva del producto escalar sobre la suma de dos vectores

c) Obtenga conclusiones de los gráficos

PROCEDIMIENTO:

Primera Parte

* En la siguiente Figura, se ilustran dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$; si proyectamos $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ ($\vec{v}$ es el lado fijo), entonces el ángulo es θ; si proyectamos $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ ($\vec{u}$ es el lado fijo), entonces el ángulo es $(-\theta)$. Ver Fig. 3.4

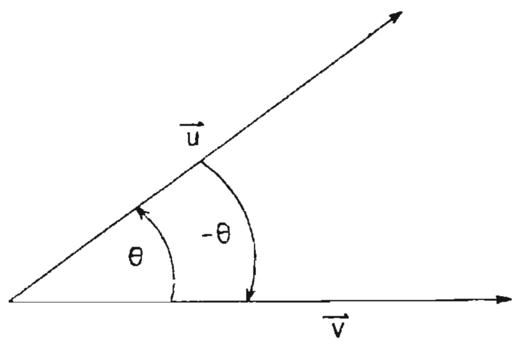


FIG. No. 3.4

- Proyecta $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$
- Traza el vector $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$
- Determina el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$, e identifícalo como θ
- Efectúa el producto escalar de $\vec{u}.\vec{v}$
- ¿Es $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ Cos θ ? ___ si ___ no
- Proyecta $\vec{v}$ sobre u
- Traza el vector $Proy_{\vec{u}}\vec{v}$
- Determina el ángulo formado por $\vec{v}$ y $\vec{u}$, e identifícalo como $-\theta$

- Efectúa el producto de $\vec{v}.\vec{u}$
- ¿Es $\vec{v}.\vec{u} = \|\vec{v}\|\|\vec{u}\| \text{ Cos } (-\theta)$? ___ si ___ no

COMENTARIO:

En trigonometría se te demostrará que: $\text{Cos } \theta = \text{Cos } (-\theta)$

Se tiene: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \text{ Cos } \theta$ ①

y: $\vec{v}.\vec{u} = \|\vec{v}\|\|\vec{u}\| \text{ Cos } (-\theta)$

Además:

$\|\vec{v}\|\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ Conmutatividad en los números reales

y $\text{Cos } \theta = \text{Cos } (-\theta)$

Luego: $\vec{v}.\vec{u} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \text{ Cos } \theta$ ②

de ① y ② concluimos que: $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}}$

Esta propiedad se dice que el producto escalar es conmutativo.

Ilustración geométrica de la propiedad conmutativa del producto escalar.

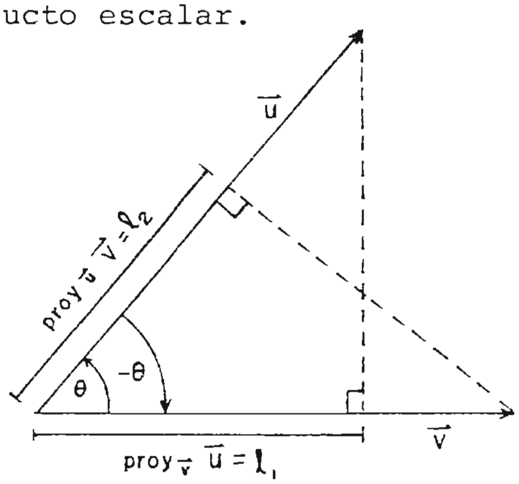


FIG. No. 3.5

Si $\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u} = \ell_1$

$\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \ell_2$ y

$\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}$ entonces:

$\|\vec{v}\|\|\ell_1\| = \|\vec{u}\|\|\ell_2\|$ ó

Simplemente:

$\boxed{v\ell_1 = v\ell_2}$

Segunda Parte

- Determina otro SCCR en R^2
- Define su referencia $(O,\vec{i},\vec{j})$ con una escala de 1: 1 cm.
- Ubica los puntos P(1,1), Q(3,4), R(7,5), K(3,1) y T(7,1) S(9,1) (solo las letras)
- Traza los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{QR}$
- Traza el vector $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$
- Identifica los vectores: $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$, $\overrightarrow{QR} = \vec{w}$, $\overrightarrow{PS} = \vec{v}$, $\overrightarrow{PR} = \vec{u} + \vec{w}$
- Proyecta el vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$
- Traza el vector Proyectado $\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u}$
- ¿Es el vector $\overrightarrow{PK} = \text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u}$? ___ si ___ no
- Mide la longitud del vector $\overrightarrow{PK}$ y $\overrightarrow{PS}$
- Efectúa el producto de las normas de los vectores $\overrightarrow{PK}$ y $\overrightarrow{PS}$ $(\|\overrightarrow{PK}\| \, \|\overrightarrow{PS}\|)$
- Identifica este resultado como ℓ_1
- Proyecta el vector $\vec{w}$ sobre el vector $\vec{v}$
- ¿Es el vector $\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{w} = \overrightarrow{KT}$? ___ si ___ no
- Traza el vector Proyectado $\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{w}$
- Mide la longitud del vector $\overrightarrow{KT}$ y $\overrightarrow{PS}$
- Efectúa el producto de las normas de los vectores $\overrightarrow{KT}$ y $\overrightarrow{PS}$ $(\|\overrightarrow{KT}\| \, \|\overrightarrow{PS}\|)$
- Identifica este resultado como ℓ_2
- Efectúa la suma de ℓ_1 con ℓ_2
- Proyecta el vector $\overrightarrow{PR}$ sobre el vector $\vec{v}$

- Traza el vector Proyectado $Proy_{\vec{v}}\overrightarrow{PR}$
- ¿Es el vector $Proye_{\vec{v}}\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PT}$? ___ si ___ no
- Mide la longitud de los vectores $\overrightarrow{PT}$ y $\overrightarrow{PS}$
- Efectúa el producto de las normas de los vectores $\overrightarrow{PT}$ y $\overrightarrow{PS}$ $(\|\overrightarrow{PT}\| \, \|\overrightarrow{PS}\|)$
- Identifica este resultado como ℓ_3
- ¿Es $\ell_3 = \ell_1 = \ell_2$? ___ si ___ no
- ¿Se puede escribir: $\vec{v}.(\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{w}$? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________
- Verifica la relación anterior, utilizando pares ordenados para efectuar el producto punto.

COMENTARIO:

Se establece del gráfico anterior que el producto punto se distribuye sobre la suma de vectores.

EXPOSICION: *PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTO ESCALAR*

Para todo $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ del espacio vectorial $\vec{V}$ y analizando - la Fig. *3.6* se tiene:

$$\overrightarrow{OU} = \vec{u},\ \overrightarrow{OV} = \vec{v},\ \overrightarrow{UW} = \vec{w}$$

entonces:

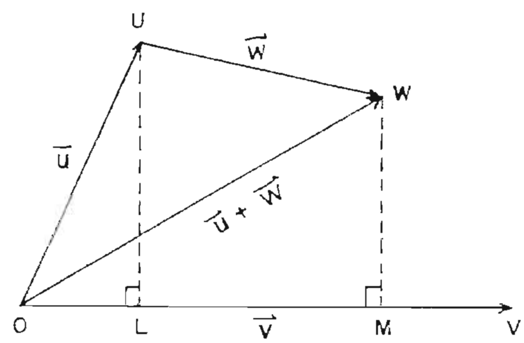


FIG. No. 3.6

$$\vec{v}.(\vec{u} + \vec{w}) = \overrightarrow{OV}.(\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{UW})$$

$$= \overrightarrow{OV}.\overrightarrow{OW}$$

$$= \|\overrightarrow{OV}\|\,\|Proy_{\vec{v}}\overrightarrow{OW}\|$$

$$= OV.OM$$

$$= OV(OL + LM)$$

$$= OV.OL + OV.LM$$ (distributividad en los números reales)

$$= \|\overrightarrow{OV}\|\,\|Proy_{\vec{v}}\overrightarrow{OU}\| + \|\overrightarrow{OV}\|\,\|Proy_{\vec{v}}\overrightarrow{UW}\|$$

$$= \overrightarrow{OV}.\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV}.\overrightarrow{UW}$$

$$\vec{v}.(\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{w}$$

$$\boxed{\therefore\ \vec{v}.(\vec{u}+\vec{w}) = \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{w}}$$

POSICIONES RELATIVAS DE LOS VECTORES Y EL PRODUCTO ESCALAR

ACTIVIDAD 3.3

Objetivos

Que el estudiante:

a) Descubra algunas propiedades del producto escalar

b) Descubra que estas propiedades se relacionan con las distintas posiciones que pueden tener dos vectores

c) Obtengan conclusiones de los gráficos

PROCEDIMIENTO:

- Toma un plano cuadriculado (milimetrado)
- Determina un SCCR en R^2
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ con una escala 1: 1 cm
- Ubica los puntos A(2,1), B(7,1), C(2,5), D(-1,4) y E(5,3)
- Traza los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$
- A partir de A traza el vector $\overrightarrow{AT} = (4,1)$
- Efectúa el producto $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AT}$
- ¿Cuál es el ángulo entre el vector $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AT}$? ______________
- Proyecta el vector $\overrightarrow{AE}$ sobre el vector $\overrightarrow{AB}$
- Traza el vector $\text{Proy}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AE}$
- Efectúa el producto escalar de los vectores: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$
- ¿Es este resultado positivo? ___ si ___ no
- Mide el ángulo entre el vector $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AB}$
- ¿Es este ángulo menor que 90° y mayor que 0°? ___si ___no

- Proyecta el vector $\overrightarrow{AC}$ sobre el vector $\overrightarrow{AB}$
- ¿Cuál es la norma del vector $Proy_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}$? ____________________
- Efectúa el producto escalar de $\overrightarrow{AB}$ con $\overrightarrow{AC}$
- ¿Cuál es tu resultado? ________________________________
- Mide el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$
- ¿Es este ángulo igual a 90°? ___ si ___ no
- Proyecta el vector $\overrightarrow{AD}$ sobre el vector $\overrightarrow{AB}$
- Traza el vector $Proy_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AD}$
- Efectúa el producto escalar de $\overrightarrow{AB}$ con $\overrightarrow{AD}$
- ¿Es este resultado negativo? ___ si ___ no
- Mide el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$
- ¿Es este ángulo mayor de 90° y menor de 180°? ___ si ___ no

COMENTARIO:

Dependiendo de las posiciones relativas de los vectores; el producto escalar tiene características específicas, así:

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no nulos de un Espacio Vectorial $\vec{V}$ y sea θ el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$; se tienen las siguientes propiedades:

1) Si $\theta = 0°$ entonces $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

2) Si $0 < \theta < 90°$ entonces $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta$; (positivo)

3) Si $\theta = 90°$ entonces $\vec{u}.\vec{v} = 0$

4) Si $90° < \theta < 180°$ entonces $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$; (negativo)

En general

$$\vec{u}.\vec{v} > 0 \quad \text{si } 0 \leq \theta < 90°$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \quad \text{si } \theta = 90°$$

$$\vec{u}.\vec{v} < 0 \quad \text{si } 90° < \theta < 180°$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

ACTIVIDAD 3.4

Objetivos

Que el estudiante:

a) Descubra algunas propiedades del producto punto entre -- dos vectores

b) Obtenga conclusiones preliminares

PROCEDIMIENTO:

- Determina un SCCR en R^2
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ con una escala de 1: 1 cm
- A partir del punto (2,1) traza los vectores $\vec{u} = (3.0)$ y $\vec{v} = (0,4)$
- Efectúa el producto $\vec{u}.\vec{v}$
- ¿Cuál es el resultado? ______________________________

- ¿Qué concluyes? ____________________

- Efectúa el producto $\vec{u}.\vec{u}$

- Cuál es el resultado? ____________________

- ¿Se podrá escribir $\vec{u}.\vec{u} = u^2$? ___ si ___ no

- ¿Qué concluyes? ____________________

- ¿Qué ángulo forma $\vec{u}$ con $\vec{v}$? ____________________

- ¿Qué ángulo forma $\vec{u}$ con $\vec{u}$? ____________________

- ¿Existirá algún caso que $\vec{u}.\vec{u}$ sea negativo? ___ si ___ no

- ¿Cuándo es que $\vec{u}.\vec{u}$ es cero? ____________________

PRODUCTO ESCALAR CON PARES ORDENADOS

ACTIVIDAD 3.5

Objetivos

Que el estudiante:

a) Deduzca el resultado del producto escalar de dos vectores, usando pares ordenados

b) Compare resultados obtenidos anteriormente

PROCEDIMIENTO :

En la siguiente Figura, se tiene dos gráficos con los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en cada caso.

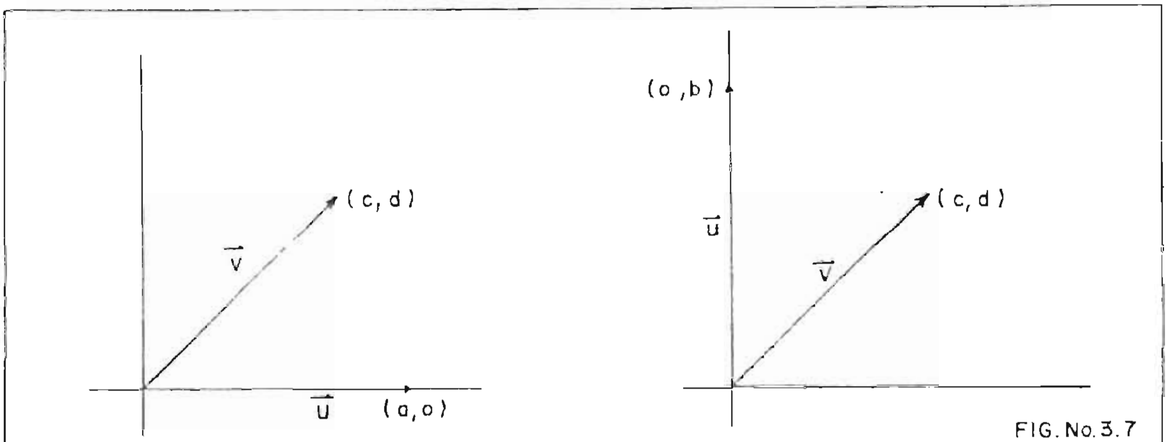


FIG. No. 3.7

- En el primer gráfico proyecta el vector $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$
- Traza el vector $Proy_{\vec{u}}\vec{v}$
- Determina las coordenadas del vector $Proy_{\vec{u}}\vec{v}$
- ¿Es $Proy_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{c}$? ___ si ___ no
- ¿Es $\|\vec{u}\| = a$? ___ si ___ no
- Efectúa el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ $(\vec{u}.\vec{v})$
- ¿Es el resultado, ac? ___ si ___ no
- Se puede decir que: ¿$\vec{u}.\vec{v} = (a,o).(c,d) = ac$? ___ si ___ no
- En el segundo gráfico proyecta el vector $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$
- Traza el vector $Proy_{\vec{u}}\vec{v}$
- Determina las coordenadas del vector $Proy_{\vec{u}}\vec{v}$
- ¿Es $Proy_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{d}$? ___ si ___ no
- ¿Es $\|\vec{u}\| = b$? ___ si ___ no
- Efectúa el producto escalar de $\vec{u}.\vec{v}$
- ¿Es el resultado, bd? ___ si ___ no
- Se puede decir que: ¿$\vec{u}.\vec{v} = (o,b).(c,d) = bd$? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________

COMENTARIO:

En la siguiente Figura, se tienen a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$; definidos de tal manera que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ y $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$; en donde $\vec{u}_1$ es la proyección de $\vec{u}$ sobre el eje x y $\vec{u}_2$ es la proyección de $\vec{u}$ sobre el eje y; lo mismo con $\vec{v}$

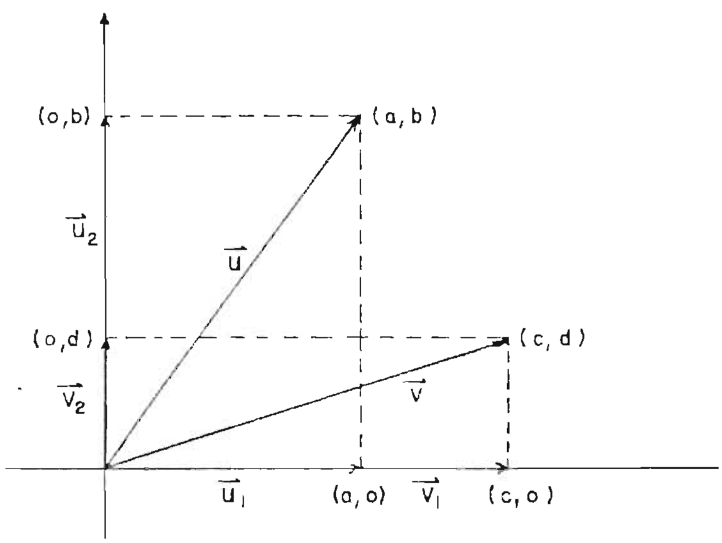


FIG. No. 3.8

Al efectuar $\vec{u}.\vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2).(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ y como el producto escalar se distribuye sobre la suma, se tiene:

$$\vec{u}.\vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$
$$= \vec{u}_1\vec{v}_1 + \vec{u}_1\vec{v}_2 + \vec{u}_2\vec{v}_1 + \vec{u}_2\vec{v}_2$$

De la Fig. 3.8 se tiene que:

$\vec{u}_1 . \vec{v}_1 = ac$ (por gráfico 1; fig. 3.7)

$\vec{u}_1 . \vec{v}_2 = 0$ (por ser perpendiculares)

$\vec{u}_2 . \vec{v}_1 = 0$ (por ser perpendiculares)

$\vec{u}_2 . \vec{v}_2 = bd$ (por gráfico 2; fig. 3.7)

$$\boxed{\therefore \quad \vec{u} . \vec{v} = ac + bd}$$

EXPOSICION: *PRODUCTO ESCALAR CON PARES ORDENADOS*

DEFINICION 3.2

Llamaremos producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de coordenadas respectivas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en una base $\beta = (\vec{i}, \vec{j})$ del plano vectorial R^2 al número real $\vec{u}.\vec{v}$, así

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

PROPIEDADES:

1) Se tiene que si el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es de 90° entonces: $\vec{u}.\vec{v} = 0$; es decir: $\vec{u} \perp \vec{v}$ sí y solamente si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ y resulta que:

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \quad \text{sí y solo si: } x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0}$$

2) Además: $\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 = \vec{v}.\vec{u}$

lo que implica que; $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Esta propiedad nos dice que el producto escalar es *conmu tativo*.

3) Sean $\vec{u}_1 = (x_1,y_1)$; $\vec{u}_2 = (x_2,y_2)$ y $\vec{w} = (x',y')$ en una base $\beta = (\vec{i},\vec{j})$

$\vec{u}_1.\vec{w} = x_1x' + y_1y'$ y $\vec{u}_2\vec{w} = x_2x' + y_2y'$ lo que implica que:

$$\vec{u}_1.\vec{w} + \vec{u}_2.\vec{w} = (x_1 + x_2)x' + (y_1 + y_2)y' \quad (1)$$

También: $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2).\vec{w} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2).(x',y')$

$$= (x_1 + x_2)x' + (y_1 + y_2)y' \quad (2)$$

de (1) y (2) se tiene: $\boxed{(\vec{u}_1 + \vec{u}_2).\vec{w} = \vec{u}_1\vec{w} + \vec{u}_2\vec{w}}$

Propiedad distribuitiva del producto escalar sobre la suma de vectores.

4) Para todo vector $\vec{u}$ de coordenadas (x,y) en una base $\beta = (\vec{i},\vec{j})$ se tiene:

$$(\vec{u})^2 = \vec{u}.\vec{u} = (xx + yy) = x^2 + y^2$$

Lo que implica que: $(\vec{u})^2 = \|\vec{u}\|^2$ (recordar Def. de norma) y resulta entonces, de las propiedades de la norma de un vector, que:

1) $\forall \vec{u} \in \vec{V};\ (\vec{u})^2 \geq 0$

2) $(\vec{u})^2 = 0$ sí y solo si $\vec{u} = 0$

DEFINICION 3.3

Llamaremos cuadrado escalar de un vector $\vec{u}$ y se denota $(\vec{u})^2$ al producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}$:

$$\boxed{(\vec{u})^2 = \vec{u}.\vec{u}}$$

Recordar que:

La distancia de AB de dos puntos A y B del plano R^2 es tal que:

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Por consiguiente:

$$\boxed{(\overrightarrow{AB})^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2}$$

APLICACIONES DEL PRODUCTO ESCALAR

ACTIVIDAD 3.6

Objetivos

Que el estudiante

a) Verifique las distintas aplicaciones que tiene el producto escalar

b) Deduzca sobre su utilidad en geometría

PROCEDIMIENTO:

Esta actividad se caracteriza por la construcción de una serie de gráficos; para cada uno de ellos, utiliza un SCCR en R^2 a una escala de 1: 1 cm y una referencia de $(0,\vec{i},\vec{j})$

- En un SCCR ubica los puntos A(1,4), B(5,0) y C(6,5)
- Une los puntos A,B,C con segmentos de rectas
- Determina el punto medio del segmento AB e identifícalo como M
- Traza el vector $\overrightarrow{MC}$
- Multiplica escalarmente el vector $\overrightarrow{MC}$ por $\overrightarrow{AB}$
- ¿Cuál es tu resultado? ______________________________
- ¿Mide los lados del triángulo
- ¿Qué tipo de triángulo es? __________________________
- ¿Qué concluyes? _________________________________
- En otro SCCR, ubica los puntos A(1,1); B(5,2) y C(3,5)
- Traza el triángulo ABC
- Determina el punto medio del segmento AC e identifícalo como M
- Traza el vector $\overrightarrow{MB}$
- Multiplica escalarmente el vector $\overrightarrow{MB}$ por $\overrightarrow{AC}$
- ¿Es tu resultado diferente de cero? ___ si ___ no
- Mide los lados del triángulo
- ¿Qué tipo de triángulo es? __________________________

- ¿Qué concluyes? ______________________________
- En otro SCCR, ubica los puntos A(1,3), B(3,1), C(7,3) y D(5,5)
- Traza el paralelogramo ABCD
- Traza las diagonales del paralelogramo e identifica su intersecto con la letra P
- Traza los vectores $\overrightarrow{PD}$ y $\overrightarrow{PC}$
- Efectúa el producto escalar $\overrightarrow{PD}.\overrightarrow{PC}$
- ¿Es el resultado diferente de cero? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________
- En otro SCCR, ubica los puntos A(2,1), B(5,2), C(4,5) y D(1,4)
- Traza los segmentos de rectas de A a B, de B a C, de C a D y de D a A
- ¿Qué tipo de figura es? ______________________________
- Traza las diagonales e identifica su intersecto con la letra O
- Traza los vectores $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OB}$
- Efectúa el producto escalar $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}$
- ¿Es el resultado diferente de cero? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________
- En otro SCCR, ubica los puntos E(1,1), F(4,2), G(5,5) y H(2,4)
- Traza los segmentos de rectas de E a F, de F a G, de G a H y de H a E

- ¿Qué tipo de figura es? ______________________
- Traza las diagonales e identifica su intersecto con la letra P
- Traza los vectores $\overrightarrow{PG}$ y $\overrightarrow{PF}$
- Efectúa $\overrightarrow{PG}.\overrightarrow{PF}$
- ¿Es el resultado diferente de cero? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________
- En otro SCCR, ubica el punto C(2,1)
- Traza una circunferencia con centro en el punto C y radio 5.
- Ubica los puntos A(-3,1), B(7,1), D(6,4), E(-1,5), F(2,-4)
- Traza el segmento de recta AB
- Traza los vectores $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FB}$
- Determina las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FA}$ y $\overrightarrow{FB}$
- Efectúa el producto escalar $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BD}$
- ¿Es el resultado diferente de cero? ___ si ___ no
- Mide el ángulo entre el vector $\overrightarrow{DA}$ y $\overrightarrow{DB}$
- ¿Qué tipo de triángulo es la figura ADB? ______________
- Efectúa el producto escalar $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$
- ¿Es el resultado diferente de cero? ___ si ___ no
- Mide el ángulo entre el vector $\overrightarrow{EA}$ y $\overrightarrow{EB}$
- ¿Qué tipo de triángulo es la figura AEB? ______________
- Efectúa el producto escalar de $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{FB}$
- ¿Es el resultado diferente de cero? ___ si ___ no

- Mide el ángulo entre el vector $\vec{FA}$ y $\vec{FB}$
- ¿Qué tipo de triángulo es la figura AFB? ________________
- ¿Son los puntos A y B los extremos de un diámetro? ___ si ___ no
- ¿Existe alguna relación común en los 3 casos? ___ si ___ no
- ¿Crees que si tomas otro punto P cualquiera de la circunferencia y trazas los vectores $\vec{PA}$, $\vec{PB}$, éstos forman ángulo recto ? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ________________________________

COMENTARIO:

I- En un triángulo ABC, si trazamos un segmento de recta desde el punto A al punto medio (M) del segmento BC, se tiene:

1) Si $\vec{MA}.\vec{BC} = 0$, entonces el triángulo es Equilatero o Isosceles, si los lados iguales son AB y AC
2) Si $\vec{MA}.\vec{BC} \neq 0$, entonces es un triángulo con 3 lados desiguales

II- En un cuadrilátero ABCD con AB// CD y BC// AD en donde se trazan diagonales AC y BD, se tiene:

1) Si $\vec{AC}.\vec{BD} = 0$ entonces el cuadrilátero es un cuadrado o un rombo

2) Si $\vec{AC}.\vec{BD} \neq 0$ entonces el cuadrilátero es un paralelogramo o un rectángulo

III- En una circunferencia, los vectores que se trazan de un punto P cualquiera a los extremos del diámetro A y B forman un ángulo recto; es decir:

$$\vec{PA}.\vec{PB} = 0 \qquad \text{(Ver Fig. 3.9)}$$

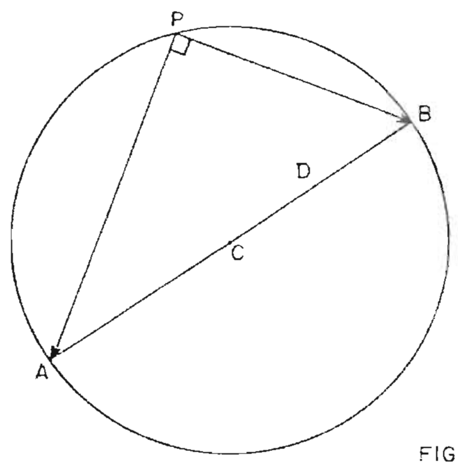


FIG. No. 3.9

CARACTERISTICAS DEL PRODUCTO ESCALAR

ACTIVIDAD 3.7

Objetivos

Que el estudiante:

a) Descubra algunas características del producto escalar

b) Obtenga conclusiones de los gráficos

c) Infiera sobre otras características

PROCEDIMIENTO:

- Determina un SCCR en R^2
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ con una escala de 1: 1 cm
- A partir del punto (1,1) traza los vectores $\vec{u} = (4,0)$, - $\vec{v} = (3,4)$ y $2\vec{u} = (8,0)$
- Proyecta el vector $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ (o sobre $2\vec{u}$)
- Traza el vector proyectado $Proy_{\vec{u}}\vec{v}$
- Efectúa $\vec{u}.\vec{v}$ e identifícalo como ℓ_1
- Multiplica 2 x ℓ_1 e identifícalo como ℓ_2
- ¿Se puede representar $2(\vec{u}.\vec{v}) = \ell_2$? ___ si ___ no
- Efectúa $(2\vec{u}).\vec{v}$ e identifícalo como ℓ_3
- ¿Es $\ell_3 = \ell_2$? ___ si ___ no
- ¿SE puede representar $2(\vec{u}.\vec{v}) = (2\vec{u}).\vec{v}$? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________

COMENTARIO:

Del gráfico se interpreta la propiedad del producto escalar de dos vectores asociados a un número real, así:

$$a(\vec{u}.\vec{v}) = (a\,\vec{u}).\vec{v}$$

EXPOSICION: *PROPIEDAD ASOCIATIVA DEL PRODUCTO ESCALAR*

Para todo $\vec{u},\vec{v}$ del espacio vectorial $\vec{V}$ y para todo "a" que pertenece a los números reales y analizando la figura siguiente, se tiene:

1º) $(a\vec{u}).\vec{v} = \|a\vec{u}\| \|\text{Proy}_{a\vec{u}}\vec{v}\|$

$= \|a\vec{u}\| \|\ell\|$

$(a\vec{u}).\vec{v} = au\ell$ ①

2º) $a(\vec{u}.\vec{v}) = a\|\vec{u}\| \|\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}\|$

$= a\|\vec{u}\| \|\ell\|$

$a(\vec{u}.\vec{v}) = au\ell$ ②

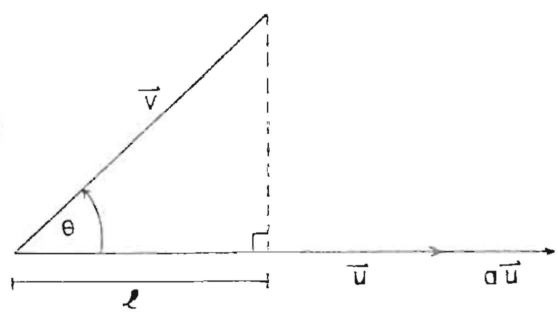


FIG. No. 3.10

de ① y ② se tiene que:

$$\boxed{(a\vec{u}).\vec{v} = a(\vec{u}.\vec{v})}$$

CONSECUENCIAS:

Como el producto escalar es conmutativo , entoces:

1) $\forall a \in R,\ \forall\vec{u} \in R^2,\ \forall\vec{v} \in R^2\quad \vec{u}.(a\vec{v}) = a(\vec{u}.\vec{v})$

2) $\forall a,b \in R,\ \forall\vec{u} \in R^2,\ \forall\vec{v} \in R^2\quad (a\vec{u}).(b\vec{v}) = ab(\vec{u}.\vec{v})$

en donde:

i) Si $a = 0$ y $b = 0$: $\vec{0}.\vec{0} = 0$

ii) Si $a = 1$ y $b = 0$: $\vec{u}.\vec{0} = 0$

iii) Si $a = 0$ y $b = 1$: $\vec{0}.\vec{v} = 0$

iv) Si $a = -1$ y $b = 1$: $(-\vec{u}).\vec{v} = -(\vec{u}.\vec{v})$

v) Si $a = 1$ y $b = -1$: $\vec{u}.(-\vec{v}) = -(\vec{u}.\vec{v})$

vi) Si $a = -1$ y $b = -1$: $(-\vec{u}).(-\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$

EXPOSICION: *PLANO VECTORIAL EUCLIDIANO*

PLANO Y PLANO VECTORIAL EUCLIDIANO

El producto escalar:

$$\cdot : (\vec{u},\vec{v}) \rightsquigarrow \vec{u}.\vec{v}$$

Es una aplicación del producto cartesiano R^2 sobre R que posee las propiedades siguientes, en donde a y b son dos reales cualquiera y $\vec{u}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ vectores cualquiera:

1ª) $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2).\vec{v} = \vec{u}_1.\vec{v} + \vec{u}_2.\vec{v}$

$$(a\vec{u}).\vec{v} = a(\vec{u}.\vec{v})$$

$$\vec{u}.(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u}.\vec{v}_1 + \vec{u}.\vec{v}_2$$

$$\vec{u}.(b\vec{v}) = b(\vec{u}.\vec{v})$$

2ª) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

3ª) $(\vec{u})^2 = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

4ª) $(\vec{u})^2 \geq 0$

Generalmente llamamos producto escalar de R^2 a toda aplicación de R^2 sobre R que posee estas propiedades.

Un plano R^2 y un plano vectorial $\vec{R}^2$ asociados, se dice que es EUCLIDIANO sí y solamente si el plano vectorial R^2 está dotado de un producto escalar

(Un espacio Vectorial $\vec{V}$ se dice que es EUCLIDIANO si entre sus vectores está definido una operación llamada: *producto escalar*; que cumple las propiedades: 1ª., 2ª., 3ª., 4ª.)

DEFINICION 3.4

Dos vectores (no nulos), se dice que son ORTOGONALES sí y solo si, su producto escalar es igual a cero, o sea $\vec{u}.\vec{v} = 0$

DEFINICION 3.5

Se llama MODULO de un vector $\vec{u}$ al número real:

$$u = |\vec{u}| = \sqrt{(\vec{u})^2}$$

que es real y positivo; (Prop. 4a.) y unicamente es cero para el vector nulo. Los vectores de módulo unidad se llaman VERSORES

BASES ORTONORMALES

Consideremos un espacio vectorial Euclidiano de R^2; todo vector $\vec{v}$ es de la forma: $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ siendo $(\vec{i},\vec{j})$ una base del espacio vectorial.

(Anteriormente hemos visto que se tienen infinitas bases)

Por lo tanto escojamos una $\mathcal{E} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ talque se cumplan las condiciones:

$$(\vec{e}_1)^2 = 1, (\vec{e}_2)^2 = 1 \quad y \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$$

Las bases que cumplen estas condiciones, se llaman: ORTONORMALES (ver Fig. 3.11)

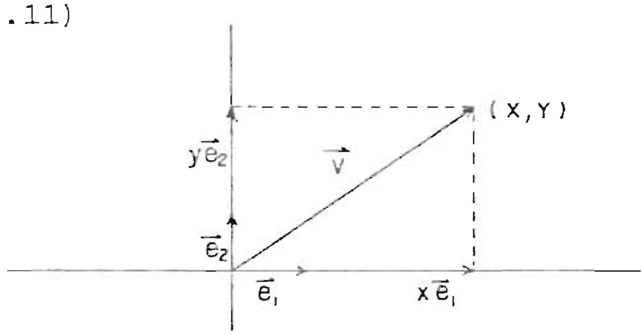


FIG. No. 3.11

NOTA: Un sistema de Coordenadas cartesianas, se llama ortogonal si $(\vec{i},\vec{j})$ forman una base ortonormal.

EJERCICIOS 3.1

1) Sea $\vec{u} = (x,y)$ en la base $\beta = (\vec{i},\vec{j})$ del plano vectorial - R^2 (Fig. 3.1.1)

i) Calcular el producto escalar $\vec{u}.\vec{i}$ y $\vec{u}.\vec{j}$

ii) Determinar el conjunto D de vectores de $\vec{u}$, tales que; $\vec{u}.\vec{i} = \vec{u}.\vec{j}$

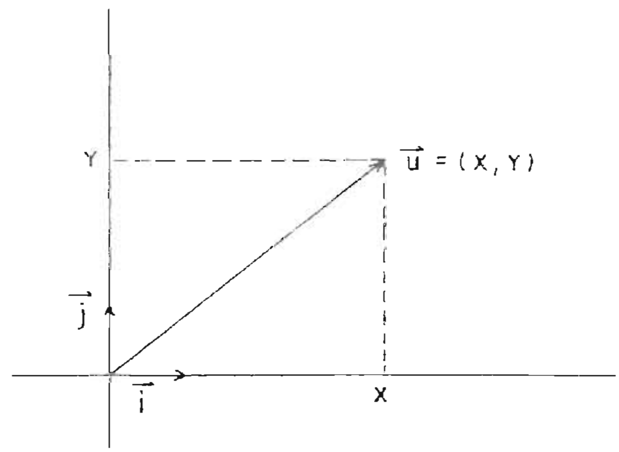


FIG. No. 3.1.1

2) Demostrar la relación de Lagrange, en donde para cuatro números reales cualesquiera: x,y,x',y':

$$(xx' + yy')^2 + (xy' - yx')^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$$

3) Sean $\vec{u},\vec{v}$ dos vectores del plano vectorial $\vec{R}^2$ en una base $\beta = (\vec{i},\vec{j})$

Demostrar que: $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ (utilice el ejercicio 2 - de 3.1)

Llamaremos desigualdad de Cauchy-Schwarz

4) Demostrar que $|\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ sí y solamente si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes

5) Sean $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{v}$ tres vectores, demostrar que:

$$(\vec{u}_1-\vec{u}_2).\vec{v} = \vec{u}_1.\vec{y} - \vec{u}_2.\vec{v}$$

C A P I T U L O IV

APLICACIONES DEL PRODUCTO ESCALAR

CUADRADO ESCALAR DE LA SUMA Y LA DIFERENCIA DE DOS VECTORES Y APLICACIONES

ACTIVIDAD 4.1

Objetivos

Que el estudiante:

a) Descubra ciertas características del producto escalar de dos vectores, para el cuadrado escalar de la suma y diferencia.

b) Obtenga conclusiones de los gráficos trazados.

c) Verifique algunas aplicaciones del producto escalar.

d) Induzca el procedimiento para concluir en Teoremas.

PROCEDIMIENTO:

Primera Parte

Cuadrado escalar de la suma o la diferencia de dos vectores

En la siguiente Figura se tienen los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con sus coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente; además el - vector $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ con sus coordenadas $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

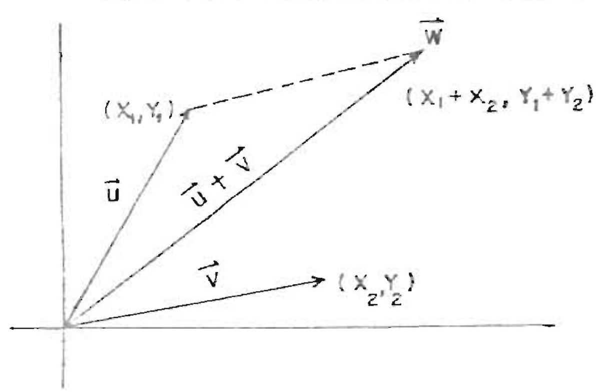


FIG. No. 4.1

- Utilizando pares ordenados calcula:

  i) $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$

  ii) $\vec{v}^2 = \vec{v}.\vec{v}$

  iii) $\vec{u}.\vec{v}$

- Utilizando pares ordenados calcula:

  $\vec{w}^2 = (\vec{v} + \vec{u})^2 = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$

- Simplifica y reordena
- Compara con los resultados anteriores
- ¿Crees establecer alguna relación de $\vec{w}^2$ en función de $\vec{u}^2$, $\vec{v}^2$ y $\vec{u}.\vec{v}$? ___ si ___ no
- ¿Cual es esa relacion? ______________________
- ¿Tiene algun parecido con los números reales este resultado? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________

EXPOSICION: *CUADRADO ESCALAR DE LA SUMA (DIFERENCIA)*

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de un plano vectorial R^2 (Fig. 4.2) y $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

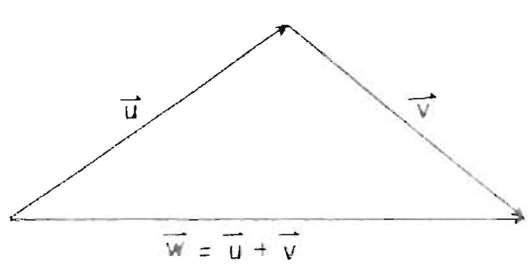


FIG. No. 4.2

Se tiene que: $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$

Aplicando ley distributiva en el producto sobre la suma se tiene:

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v})\vec{u} + (\vec{u} + \vec{v})\vec{v}$$

$$= (\vec{u})^2 + \vec{v}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + (\vec{v})^2$$

Por la ley conmutativa en el producto escalar: $\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}$

Luego: $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u})^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + (\vec{v})^2$ (1)

Consecuencias:

De la igualdad (1) resulta:

1) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[(\vec{u} + \vec{v})^2 - (\vec{u})^2 - (\vec{v})^2\right]$

Sea aún $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$

2) Y como $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ Cos θ ; $\theta \sphericalangle \begin{matrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{matrix}$

luego $\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ Cos θ (llamada ley de los cosenos)

3) Para los vectores $\vec{u}$ y $-\vec{v}$ se verifica:

$$\left[\vec{u} + (-\vec{v})\right]^2 = (\vec{u})^2 + 2\vec{u}.(-\vec{v}) + (-\vec{v})^2 = (\vec{u})^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$

de donde: $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ (2)

Segunda Parte:

Teorema I

- Toma un SCCR en R^2 (papel cuadriculado)
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala de 1: 1 cm
- Ubica los puntos A(1,5), B(2,1) y C(6,1)

- Traza los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, y el segmento de recta BC
- Determina el punto medio de BC e identifícalo como I, traza el vector $\overrightarrow{AI}$
- Realiza $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2$ e identifícalo como ℓ_1
- Mide $\|\overrightarrow{BC}\|$ y calcula $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \ell_2$
- ¿Son ℓ_1 y ℓ_2 iguales? ___ si ___ no; ¿porqué? ____________
- Realiza $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2$ e identifícalo como ℓ_3
- Mide $\|\overrightarrow{AI}\|$ y calcula $4\|\overrightarrow{AI}\|^2$ e identifícalo como ℓ_4
- ¿Son ℓ_3 y ℓ_4 iguales? ___ si ___ no; ¿por qué? ___________
- ¿Es $\ell_1 + \ell_3 = \ell_2 + \ell_4$? ___ si ___ no; ¿por qué? __________
- Mide $\|\overrightarrow{AB}\|^2$ e identifícalo como ℓ_5
- Mide $\|\overrightarrow{AC}\|^2$ e identifícalo como ℓ_6
- ¿Es $\ell_5 + \ell_6 = \frac{1}{2}(\ell_2 + \ell_4)$? ____ si ___ no
- Expresa con vectores (Norma) la expresión anterior
- ¿Qué concluyes? ____

EXPOSICION: *TEOREMA I:* $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}CB^2$

Sean A,B,C tres puntos de un plano R^2, y sea I el punto medio de los puntos B,C (Fig. 4.3)

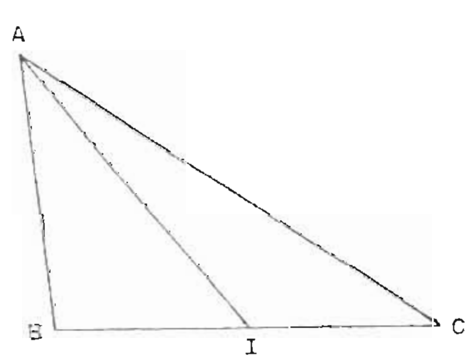


FIG. No. 4.3

De la figura se tiene:

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ y

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$

Lo que implica que:

$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{CB})^2$ y $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = (2\overrightarrow{AI})^2$ (3)

Pero:

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{AC})^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (1) y

$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{AC})^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (2)

Si sumamos (1) con (2) y usando (3) tenemos:

$2(\overrightarrow{AB})^2 + 2(\overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{CB})^2 + (2\overrightarrow{AI})^2$

Es decir:

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \frac{\|\overrightarrow{CB}\|}{2} + 2\|\overrightarrow{AI}\|^2$$

o simplemente:

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}CB^2 \quad (4)$$

TEOREMA I:

A, B, C son tres puntos del plano R^2 e I es el punto medio de los dos puntos B y C, entonces se da la igualdad:

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}CB^2}$$

Tercera Parte

Aplicación del teorema I

Una aplicación muy importante es la siguiente:

* Sea ABC un triángulo y sea I el punto medio del segmento AC se demostrará que el triángulo ABC es rectángulo en A,

sí y solamente si: AI = $\frac{1}{2}$BC; primero plantearemos un caso - específico, para después generalizar.

- Toma un SCCR en R^2 (papel cuadriculado)
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala de 1: 1 cm
- Ubica los puntos A(3,6) B(1,2) y C(11,2)
- Traza los segmentos AB, BC y CA
- Determina el punto medio (I) de B y C
- Traza el segmento AI
- Mide el ángulo $\angle_{AC}^{AB}$ e identifícalo como θ
- ¿Es θ = 90°? ____ si ___ no
- Mide el segmento BC
- Mide el segmento AI
- ¿Es AI = $\frac{1}{2}$BC?
- ¿Qué tipo de triángulo es? ______________________________
- Ubica el punto D(9,-2)
- Traza punteados los segmentos BD, CD, ID
- ¿Qué tipo de figura es? ______________________________
- ¿Es BC una diagonal? ___ si ____ no
- ¿Es AD otra diagonal? ___ si ___ no
- ¿Es BC = AD? _____ si ___ no
- ¿Se puede afirmar que AI = $\frac{1}{2}$BC? ___ si ____ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________
- ¿Será exclusivo este resultado solo para triángulos rectán gulos?___ si __ no

EXPOSICION: *APLICACION DEL TEOREMA I*

Sea un triángulo ABC y sea I el punto medio de BC (Fig. 4.4) se dice que el triángulo ABC es rectángulo en A sí y solamente si:

$$AI = \frac{1}{2} BC \quad (5)$$

Del Teorema I se tiene que:

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2} BC^2$$

y que el triángulo ABC es rectángulo en A sí y solamente si:

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ (Teorema de Pitágoras)

Luego:

$2AI^2 + \frac{1}{2} BC^2 = BC^2$

y asi: $AI^2 = \frac{1}{4} BC^2$

Finalmente:

$$AI = \frac{1}{2} BC$$

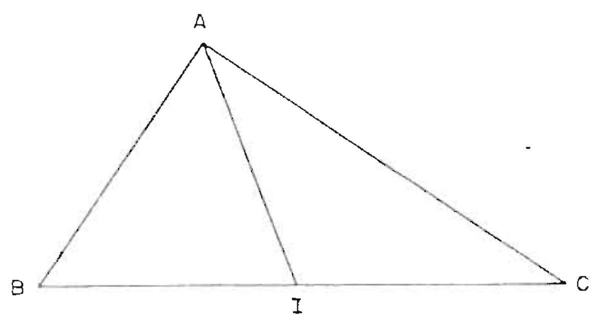


FIG. No. 4.4

Por otra parte, si $AI = \frac{1}{2} BC$, entonces

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 2AI^2 + \frac{1}{2} BC^2 \quad \text{(Teorema I)} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} BC^2 + \frac{1}{2} BC^2 \\ &= BC^2 \end{aligned}$$

O sea, el triángulo, satisface el Teorema de Pitágoras y en consecuencia es rectángulo.

Cuarta Parte

Conjunto de puntos M tales que: $MA^2 + MB^2 = k$

- Toma otro SCCR en R^2 (papel milimetrado)
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala 1: 1 cm
- Ubica los puntos A(0,1), B(4,1) y M(5,5) (solo las letras)
- Traza el triángulo AMB
- Determina el punto Medio de AB e identifícalo como I
- Traza el segmento MI
- Haciendo uso del papel milimetrado y del Teorema de Pitágoras, determina el valor de MA^2, MB^2
- Desarrolla $MA^2 + MB^2$ e identifícalo como k_1
- Traza una circunferencia con centro en I y radio MI
- Ubica el punto $M_1(-3,4)$
- Traza el triángulo AM_1B
- Determina el valor de M_1A^2, M_1B^2
- Efectúa $M_1A^2 + M_1B^2$ e identifícalo como k_2
- ¿Es k_1 igual a k_2? ___ si ___ no
- Ubica el punto $M_2(2,-4)$
- Traza el triángulo AM_2B
- Determina el valor de M_2A^2 y M_2B^2
- Efectúa $M_2A^2 + M_2B^2$ e identifícalo como k_3
- ¿Es $k_3 = k_2 = k_1$? ___ si ___ no
- ¿Son M, M_1, M_2 puntos de la circunferencia? ___ si ___ no
- Identifica el conjunto de puntos M de la circunferencia -

Con la letra C

- ¿Qué concluyes? ____
- Identifica como k los valores k_1, k_2, k_3, etc.
- Identifica como M todos los puntos de la circunferencia
- ¿Se podrá establecer la relación $MA^2 + MB^2 = k$, ___ si ___ no
- Determina los valores AB^2, MI^2, M_1I^2, M_2I^2
- Efectúa:

  i) $2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ e identifícalo como k_4

  ii) $2M_1I^2 + \frac{1}{2}AB^2$ e identifícalo como k_5

  iii) $2M_2I^2 + \frac{1}{2}AB^2$ e identifícalo como k_6

- ¿Es $k_4 = k_5 = k_6$? ___ si ___ no
- Si M es cualquier punto de la circunferencia; ¿se podrá escribir:

$$2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = k, \text{ ___ si ___ no}$$

- ¿Qué concluyes? ____
- ¿Cómo escribirías MI^2 en función del segmento AB y el valor de k? ____
- Si M = I; ¿Cómo sería la circunferencia? ____________________

EXPOSICION: *CONJUNTO DE PUNTOS M TALES QUE:* $MA^2 + MB^2 = k$

Sean A, B dos puntos del plano R^2, k un número real y C el conjunto de puntos M del plano R^2 talque:

$$MB^2 + MA^2 = k \qquad (6)$$

Y sea I el punto medio de los puntos A y B (Fig. 4.5) se verifica que para todo punto M del plano R^2

(Ecuación (4))

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$ (Teorema I)

en donde resulta que si $M \in C$

entonces $2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2 = k$ (ver (6))

luego:

$$\boxed{MI^2 = \frac{1}{2} (k - \frac{1}{2} AB^2)} \qquad (7)$$

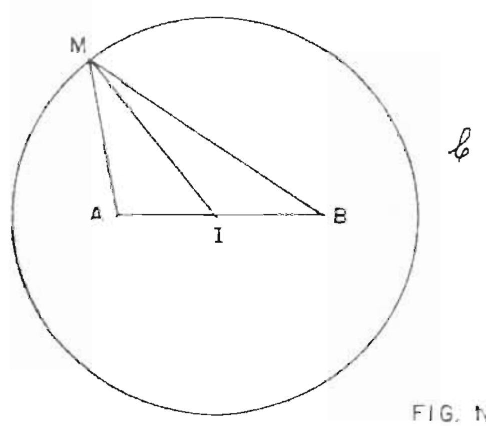


FIG. No. 4.5

Si hacemos $K = \frac{1}{2}(k - \frac{1}{2}AB^2)$ entonces: M es el elemento del conjunto C sí y solamente si: $MI^2 = K$

Tres casos son entonces posibles para K:

1º) $K < 0$

La igualdad $MI^2 = K$ no se verifica para ningún punto M y por lo tanto el conjunto es vació $[C = \phi]$

2º) $K = 0$

La igualdad $MI^2 = K$ se verifica para un solo punto I; es decir $C = \{I\}$ (se conviene en llamar circunferencia de centro I y radio nulo).

3º) $K > 0$

La igualdad $MI^2 = K$ es entonces verificable para un punto M sí y solamente si $MI = \sqrt{K}$ (el conjunto C - es una circunferencia de centro I y radio $\sqrt{K}$)

TEOREMA II

A y B son dos puntos del plano R^2 y k es un número real, el conjunto de puntos M del plano R^2 talque:

$$MA^2 + MB^2 = k$$

Si es no vacío, es la circunferencia cuyo centro es el punto medio de A y B cuyo radio r está definido por:

$$r^2 = \frac{1}{2}(k - \frac{1}{2}AB^2)$$

Quinta Parte

Conjuntos de puntos M talque $\vec{MA}.\vec{MB} = k$

Una aplicación muy importante se tiene:

"Sean A y B dos puntos del plano R^2, determina el número - real k de manera que el conjunto de puntos M talque

$$MA^2 + MB^2 = k$$

sea la circunferencia de diametro $[A,B]$

- Toma un SCCR en R^2 (papel cuadriculado)
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ con una escala de 1: 1 cm.
- Ubica los puntos I (3, -1), M(6,3)
- Traza una circunferencia de centro I y radio MI(5 cm)
- Ubica los puntos C(0,-1) y D(6,-1)
- Traza el segmento CD
- Traza los vectores $\vec{MC}$ y $\vec{MD}$
- Efectúa el producto escalar $\vec{MC}.\vec{MD}$
- ¿Es el resultado mayor que cero? ___ si ___ no; ¿cómo es?

  ____
- Ubica los puntos A(-2,-1) y B(8,-1)
- Traza el segmento AB.
- Traza los vectores $\vec{MA}$ y $\vec{MB}$
- Efectúa el producto escalar $\vec{MA}.\vec{MB}$
- ¿Es este resultado mayor que cero? ___ si ___ no; ¿cómo - es? ______________________________________
- Ubica los puntos E(-5,-1) y F(11,-1)

- Traza el segmento EF
- Traza los vectores $\overrightarrow{ME}$ y $\overrightarrow{MF}$
- Efectúa el producto escalar $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}$
- ¿Es este resultado mayor que cero? ___ sí ___ no; ¿cómo - es? ______________________________
- ¿Qué concluyes? ______________________________
- Para el siguiente análisis, toma el triángulo AMB
- Identifica el producto $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \ell$ (8)
- Del gráfico será: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$? ___ si ___ no
- Verifícalo con pares que $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$
- Desarrolla el cuadrado de cada miembro de la igualdad anterior.
- Escribe $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ en función de los otros términos
- ¿Llegó a la expresión $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 1/2(MA^2 + MB^2 - AB^2)$? (9)

  ___ si ___ no

  * Si tu respuesta es NO, sigue, hasta lograrlo.
- Sustituye (8) en la expresion (9) , es decir: ℓ en vez de $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$
- Luego multiplica la igualdad por 2.
- Seguidamente suma en ambos miembros AB^2
- ¿Es tu resultado $MA^2 + MB^2 = 2\ell + AB^2$? ___ si ___ no
- Haciendo uso del Teorema II, será cierto: ¿$K = 2\ell + AB^2$? - ___ sí ___ no
- ¿Es $\ell = 0$? ___ si ___ no (ver (8))
- ¿Quiere decir que $K = AB^2$? (10) ___ si ___ no

- En el mismo Teorema II es el radio: ¿$r^2 = 1/2(k - 1/2\ AB^2)$?

 ___ si ___ no

- Sustituye (10) en la expresión anterior y simplifica
- ¿Fue tu resultado final $r = 1/2\ AB$? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________

COMENTARIO:

Es lógico pensar que el K que se busca es AB^2 ya que - AMB forma un triángulo rectángulo en M($\vec{MA}.\vec{MB} = 0$) y apli cando el Teorema de Pitágoras se tiene que llegar a:

$$MA^2 + MB^2 = AB^2$$

EXPOSICION: *CONJUNTO DE PUNTOS M TALQUE* $\vec{MA}.\vec{MB} = k$

Sean A y B dos puntos del Plano R^2, ℓ un número real y C el conjunto de puntos M del plano, talque:

$$\vec{MA}.\vec{MB} = \ell$$

Para todo punto M del plano R^2 se tiene: $\vec{BA} = \vec{MA} - \vec{MB}$ -- luego:

$$(\vec{BA})^2 = (\vec{MA} - \vec{MB})^2$$
$$= (\vec{MA})^2 + (\vec{MB})^2 - 2\vec{AM}.\vec{MB}$$

lo que implica que: $\vec{MA}.\vec{MB} = 1/2(MA^2 + MB^2 - AB^2)$

Y resulta que si $M \varepsilon C$ entonces $MA^2 + MB^2 = 2\ell + AB^2$; si C es un conjunto no vacío, se puede afirmar que es la -

circunferencia de centro I (punto medio de A y B) y de radio positivo r definido por:

$$r^2 = \ell + 1/4\ AB^2 \quad \text{(Fig. 4.6)}$$

Un caso particular es, si $\ell = 0$; el conjunto $\mathcal{C}$ es la circunferencia de centro I (punto medio de A y B) y de radio:

$$r = 1/2\ AB \quad \text{(Fig. 4.7)}$$

que es la circunferencia de diámetro $[A,B]$

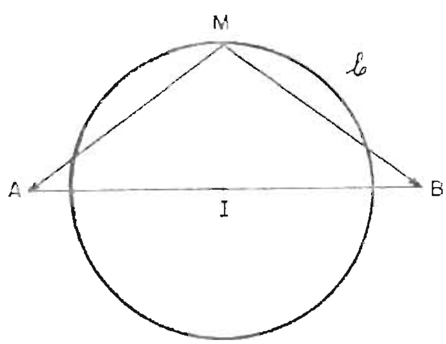


FIG. No. 4.6

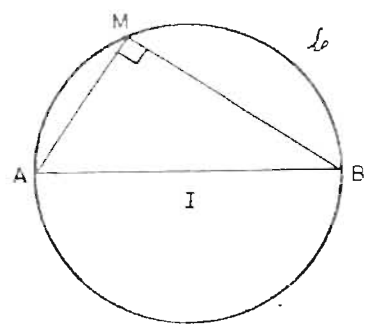


FIG. No. 4.7

TEOREMA III

A y B son dos puntos del plano R^2, el conjunto de puntos M de un plano R^2 talque:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ es la circunferencia de diámetro $[A,B]$

Sexta Parte

Aplicación de Teorema III y la propiedad conmutativa del producto escalar

- Toma un plano (papel cuadriculado)
- Determina un SCCR en R^2
- Determina su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ con una escala de 1: 1 cm.
- Ubica los puntos A(-3,2), B(7,2) y C(3,10).
- Traza los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$
- Proyecta el vector $\overrightarrow{AC}$ sobre el vector $\overrightarrow{AB}$.
- Mide el ángulo entre $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ e identifícalo como θ
- Traza el vector $Proy_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}$
- Mide las longitudes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $Proy_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}$
- Efectúa el producto $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = ______________________________
- Proyecta el vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el vector $\overrightarrow{AC}$
- Mide el ángulo entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ e identifícalo como α
- Traza el vector $Proy_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$
- Mide las longitudes de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $Proy_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$
- Efectúa el producto $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ = ______________________________
- ¿Son los resultados: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ iguales? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ____
- Determina el punto medio entre los puntos B y C e identifícalo como I
- Traza el segmento de recta BC

- Traza una circunferencia con centro en I y radio IB
- ¿Qué puntos toca la circunferencia? ______________________
- ¿Cómo garantizas que la circunferencia pasa por los puntos extremos de los vectores $\text{Proy}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}$ y $\text{Proy}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$?
- ¿Qué elementos de la circunferencia observas en el gráfico? ______________________

EXPOSICION: *TEOREMA IV*

En la siguiente figura se ilustra un Teorema muy importante de cuerdas y secantes, de una circunferencia utilizando la propiedad conmutativa del producto escalar y el Teorema III.

1ª) Por el Teorema III:

M y N son puntos de la circunferencia, porque:

$\overrightarrow{NU}.\overrightarrow{NV} = 0$ y $\overrightarrow{MU}.\overrightarrow{MV} = 0$

con diámetro $[U,V]$

2ª) Por la propiedad conmutativa $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$, es decir

$\|\vec{u}\|\,\|\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}\| = \|\vec{v}\|\,\|\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u}\|$

ó $\underline{OU.ON = OV.OM}$

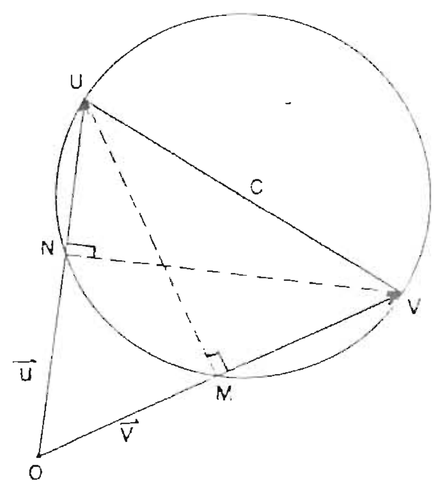


FIG. No. 4.8

En consecuencia:

TEOREMA IV "El producto de la secante OU por ON es igual al producto de la secanto OV por OM".
En donde O: punto común de las secantes OU y OV [U,V]: Diámetro NU y MV: cuerdas de la circunferencia C: centro de la circunferencia

Septima Parte

Aplicación del Teorema III

- Toma un SCCR en R^2
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ en una escala 1: 1 cm
- Ubica los puntos A(1,6), B(2,2), C(8,2)
- Traza los segmentos AB, BC y CA
- Determina el punto medio del segmento BC, e identifícalo como A'
- Traza el segmento AA' (de otro color*)
- Traza los vectores $\vec{MA}$, $\vec{MA'}$ (en el mismo color *)
- Mide el ángulo $\theta < \frac{\vec{MA}}{\vec{MA'}}$
- ¿Es $\theta = 90°$? ___ si ___ no
- Calcula $\vec{MA}.\vec{MA'}$
- ¿Es $\vec{MA}.\vec{MA'} = 0$? ___ si ___ no

- De acuerdo al Teorema III; ¿será A y A' extremos del diámetro de una circunferencia? ___ si ___ no
- Determina el punto medio entre A y A' e identifícalo como I
- Traza la circunferencia de centro en I y radio IA (color *)
- ¿Pasa la circunferencia por M? ___ si ___ no
- La figura con color (*); ¿tiene parecido con la figura (4.7) anterior? ___ si ___ no
- ¿Se aplica el Teorema III en esta actividad? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________

EXPOSICION: *APLICACION DEL TEOREMA III*

Sea un triángulo ABC, determinar el conjunto $\mathcal{C}$ de puntos de M de un plano R^2 talque:

$$\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$$

Para todo punto M del plano R^2 y si A' es el punto medio de BC (Fig. 4.9)

Se tiene:

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA'}$$

lo que implica que:

$$\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MA}.(2\overrightarrow{MA'}) \quad (11)$$

pero $\overrightarrow{MA}.(2\overrightarrow{MA'}) = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$

y resulta que un punto M

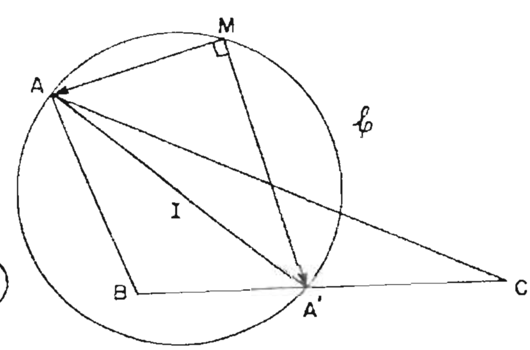


FIG. No. 4.9

pertenece al conjunto C

sí y solamente si:

$2(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}) = 0$ (de la figura)

Es decir:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = 0$; el cual es el conjunto

de la circunferencia de diámetro $[A,A']$

$\therefore$ por 11 se tiene que: $\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

PRODUCTO ESCALAR DE LA SUMA DE DOS VECTORES POR SU DIFERENCIA: APLICACIONES

ACTIVIDAD 4.2

Objetivos

Que el estudiante:

a) Usando el producto escalar por pares, descubra la relación $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u})^2 - (\vec{v})^2$

b) Obtenga conclusiones de los gráficos

c) Descubra la utilidad que presta el producto escalar en geometría

d) Analice algunas aplicaciones del producto escalar

PROCEDIMIENTO:

Primera Parte

Producto escalar de la suma de dos vectores por su diferencia

En la siguiente Figura se ilustran los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, con sus respectivas coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) y las operacio-nes $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$

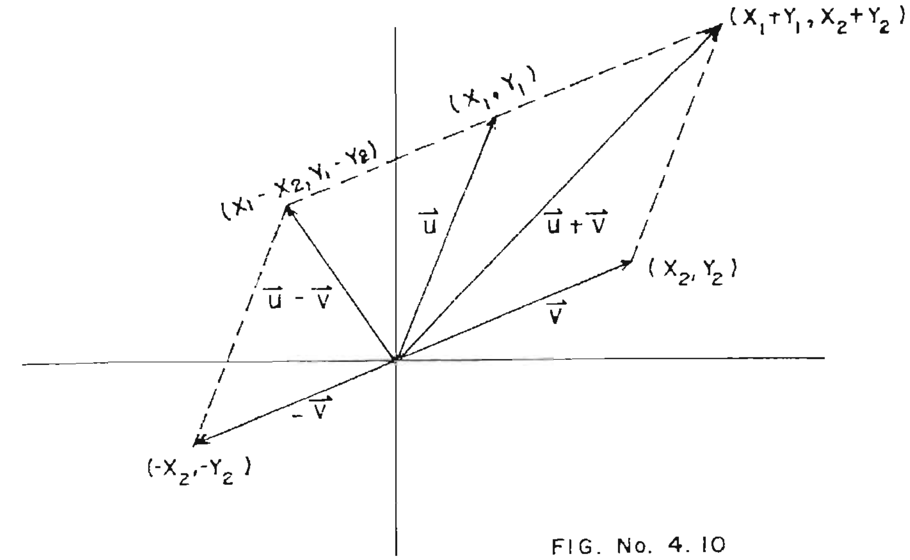


FIG. No. 4. 10

- Utilizando pares ordenados calcula:

  i) $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$

  ii) $\vec{v}^2 = \vec{v}.\vec{v}$

- Utilizando pares ordenados calcula:

  $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \ell_1$

- Simplifica y reordena

- Relaciona estos resultados con los anteriores

- ¿Existirá alguna relación entre ℓ_1 y $\vec{u}^2$, $\vec{v}^2$? ___ si ___ no

- ¿Cuál es la relación? ______________________________

- ¿Tiene el resultado, algún parecido con los números reales? ___ si ___ no

- ¿Qué concluyes? ______________________________

EXPOSICION: *PRODUCTO ESCALAR DE LA SUMA POR SU DIFERENCIA*

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores del plano $\vec{R}^2$; efectuando el producto escalar:

$(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$ se tiene:

Por la ley distributiva del producto escalar sobre la resta $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v})\vec{u} - (\vec{u} + \vec{v})\vec{v}$

$$= (\vec{u})^2 + \vec{v}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - (\vec{v})^2$$

por la conmutatividad del producto escalar implica que:

$\vec{v}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} = 0$

en donde finalmente:

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u})^2 - (\vec{v})^2} \quad (12)$$

Segunda Parte

Consecuencia de: $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

- Toma un SCCR en R^2 (papel milimetrado)
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala de 1: 1 cm
- Ubica los puntos A(1,5), B(2,1) y C(6,1)
- Traza los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$
- Traza el segmento de recta BC
- Determina el punto medio de BC e identifícalo como I
- Traza el vector $\overrightarrow{AI}$

- Del diagrama ¿$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$? ___ si __ no
- Del diagrama ¿$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$? ___ si ___ no
- Calcula $2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB}$ e identifícalo como ℓ_1
- Mide $\|AB\|^2$ e identifícalo como ℓ_2
- Mide $\|AC\|^2$ e identifícalo como ℓ_3
- ¿Es $\ell_2 - \ell_3 = \ell_1$? ___ si ___ no
- Expresa con vectores la expresión anterior
- ¿Qué concluyes ______________________________

EXPOSIC… …CUENCIA DE: $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u})^2 - (\vec{v})^2$

Es una conse… …ia de (12)

Sean A …,C tres puntos del plano R^2 y sean I el punto medio …e BC (Fig. 4.11)

Entonces por (12) se tiene:

$AB^2 - AC^2 = (\overrightarrow{AB})^2 - (\overrightarrow{AC})^2$

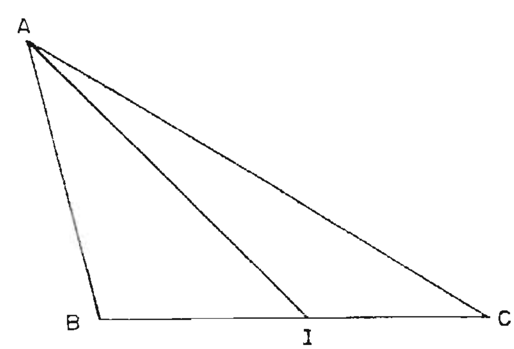
$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

Pero … …ig. 4.11

se tiene …

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ y que:

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$



Por lo tanto: $\boxed{AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB}}$ (13)

FIG. No. 4.11

Tercera Parte

Aplicaciones de: $(\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = u^2 - v^2$

Una aplicación muy importante es la siguiente:

Sean A y B puntos del plano R^2 y sea I el punto medio de AB; para todo punto M del plano R^2 entonces:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

- Toma un SCCR en R^2 (papel cuadriculado)
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala de 1: 1 cm
- Ubica los puntos: A(2,1), M(1,5) y B(6,1)
- Traza los vectores $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ y el segmento de AB
- Determina el punto medio de AB e identifícalo como I
- Traza el vector $\overrightarrow{MI}$
- Traza los vectores $\overrightarrow{IA}$ e $\overrightarrow{IB}$
- Escribe los vectores $\overrightarrow{IA}$ e $\overrightarrow{IB}$ en términos de $\overrightarrow{AB}$ (ver dia-grama)
- Calcula $\overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e identifícalo como $\vec{v}_1$
- ¿Es $\overrightarrow{MA} = \vec{v}_1$? ___ si ___ no
- Calcula $\overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e identifícalo como $\vec{v}_2$
- ¿Es $\overrightarrow{MB} = \vec{v}_2$? ___ si ___ no
- Calcula $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ e identifícalo como ℓ_3
- Calcula $(\overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$ e identifícalo como ℓ_4
- ¿Es $\ell_3 = \ell_4$? ___ si ___ no

- Calcula MI^2, AB^2
- Desarrolla $MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ e identifícalo como ℓ_5
- ¿Es $\ell_3 = \ell_4 = \ell_5$? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ____________________

EXPOSICION: *APLICACIONES DE:* $(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) = u^2 - v^2$

"Sean A y B dos puntos del plano R^2 y sea I el punto medio de los puntos A,B (Fig. 4.12) Para todo punto M del plano R^2, se tiene:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

* Como I es el punto medio de AB

entonces:

$\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

(ver Fig. 4.12)

Ademas:

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Lo que implica que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{MI} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}) \\ &= (\overrightarrow{MI})^2 - (\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB})^2 \\ &= MI^2 - \tfrac{1}{4}AB^2\end{aligned}$$

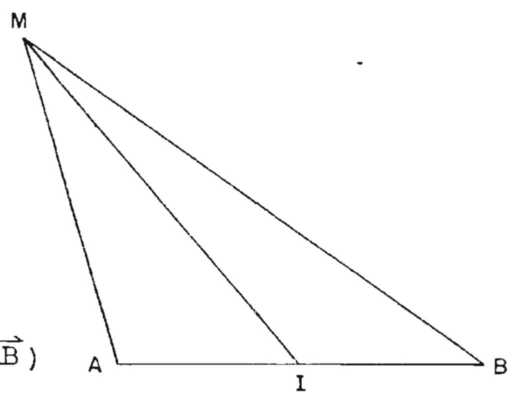


FIG. No. 4. 12

$$\boxed{\therefore\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2} \quad (14)$$

Cuarta Parte

Conjunto de puntos M tales que: $MA^2 - MB^2 = k$

- Toma un SCCR en R^2 (papel cuadriculado)
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala de 1: 1 cm
- Ubica los puntos A(-2,2), B(2,2), M(5,6), I(0,2)
- Traza el triángulo ABM, y el segmento IM
- Calcula $\|\overrightarrow{MA}\|^2 = MA^2$ y $\|\overrightarrow{MB}\|^2 = MB^2$
- Efectúa $MA^2 - MB^2$ e identifícalo como ℓ_1
- Ubica el punto $M_1(5,3)$
- Traza el triángulo ABM_1
- Calcula $\|\overrightarrow{M_1A}\|^2 = M_1A^2$ y $\|\overrightarrow{M_1B}\|^2 = M_1B^2$
- Efectúa $M_1A^2 - M_1B^2$ e identifícalo como ℓ_2
- ¿Es $\ell_1 = \ell_2$? ___ si ___ no
- Ubica el punto $M_2(5,2)$
- Traza los segmentos AB, AM_2, BM_2
- Calcula $\|\overrightarrow{M_2A}\|^2 = M_2A^2$ y $\|\overrightarrow{M_2B}\|^2 = M_2B^2$
- Efectúa $M_2A^2 - M_2B^2$ e identifícalo con ℓ_3
- ¿Es $\ell_2 = \ell_3$? ___ si ___ no
- Ubica el punto $M_3(5,-2)$
- Traza el triángulo ABM_3
- Calcula $\|\overrightarrow{M_3A}\|^2 = M_3A^2$ y $\|\overrightarrow{M_3B}\|^2 = M_3B^2$
- Efectúa $M_3A^2 - M_3B^2$ e identifícalo como ℓ_4
- ¿Es $\ell_3 = \ell_4$? ___ si ___ no
- Traza una recta que pase por los puntos M, M_1, M_2, M_3 e -

identifícala como L_1 (de otro color)

- Traza una recta que pase por los puntos AB e identifícala como L_2
- ¿Cómo es la recta L_1 con respecto a la recta L_2? ________
- ¿Qué concluyes? ______________________________
- Identifica con la letra k los resultados ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4
- Identifica con M cualquier punto de la recta L_1
- ¿Se podrá escribir: $MA^2 - MB^2 = k$? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________

EXPOSICION: *CONJUNTO DE PUNTOS M TALES QUE:* $MA^2 - MB^2 = k$

Sean A, B dos puntos distintos del plano R^2, k un número real y L el conjunto de puntos M del plano R^2 talque:

$$MA^2 - MB^2 = k$$

Sea I el punto medio de A,B (Fig. 4.13) por la ecuación (13) se tiene que todo punto M del plano:

$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

y resulta que:

$M \varepsilon L \iff 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = k$

Es decir: $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}. = \frac{1}{2}k$

(refiriéndose a la recta AB y con "a" un real no nulo, entonces el vector $\overrightarrow{AB} = a\vec{i}$

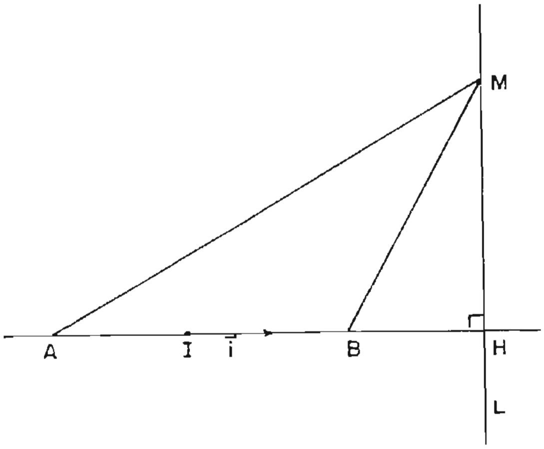


FIG. No. 4.13

Un punto H de la recta AB

talque: $\overrightarrow{IH} = t\vec{i}$, (t un real no nulo)

$H \varepsilon L \iff \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}k$; pero $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = (a\vec{i})(t\vec{i}) = at(\vec{i})^2$

es decir: $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = at$; de donde: $at = \frac{1}{2}k$ finalmente $t = \frac{k}{2a}$

y resulta que existe un punto H de la recta AB y solo uno que pertenece al conjunto L talque: $\overrightarrow{IH} = \frac{k}{2a}\vec{i}$)

- Para todo punto M del plano R^2 se tiene: $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM}$;

  en donde:
$$\begin{aligned}\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM}).\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{AB} \quad \text{pero} \quad \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}k \\ &= \frac{1}{2}k + \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{AB} \quad \text{ademas} \quad \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}k\end{aligned}$$

Luego: $\frac{1}{2}k = \frac{1}{2}k + \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{AB}$ de donde

$$\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{AB} = 0$$

Finalmente $M \varepsilon L \iff \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{AB} = 0$

$$\iff \overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{AB}$$

Si un punto M del plano R^2 pertenece al conjunto L los vectores $\overrightarrow{HM}$ y $\overrightarrow{AB}$ son ortogonales; de acá proviene que el punto M que pertenece a la recta que contiene H es ortogonal a la recta AB

Reciprocamente: si un punto M pertenece a la recta que contiene a H y es ortogonal a la recta AB; los vectores $\overrightarrow{HM}$ y $\overrightarrow{AB}$ son ortogonales y el punto M pertenece al conjunto L.

Se puede entonces enunciar:

TEOREMA V

A y B son dos puntos distintos del plano R^2 y k es un número real; el conjunto de puntos M del plano R^2 talque:

$$MA^2 - MB^2 = k$$

es una recta ortogonal a la recta AB

Quinta Parte

Aplicación del Teorema V

Una aplicación muy importante es determinar analíticamente el enunciado anterior.

- Toma un SCCR en R^2 (papel cuadriculado)
- Determina una referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$, escala 1: 1 cm
- Ubica los puntos A(3,0) y B(-3,0), M(1,5)
- Traza el triángulo ABM
- ¿Es el punto 0(0,0) el punto medio de AB? ___ si ___ no
- Usando pares ordenados, calcula MA^2 y MB^2
- Calcula $MA^2 - MB^2$ e identifícalo como k
- Determina la ecuación de la recta que pasa por M y que es perpendicular (ortogonal) a la recta AB y trázala con otro color
- Identifica con "a" el valor de la primera componente del punto A(a = 3)
- Calcula $4ax + k = 0$ y determina una ecuación en función

de x

- ¿Es esta ecuación igual a la ecuación que pasa por M y es ortogonal a la recta AB? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________

EXPOSICION: *APLICACION DEL TEOREMA V*

Sean A y B dos puntos distintos del plano R^2 y sea k un número real del plano R^2 con referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y sea 0 el punto medio de los puntos A y B (Fig. 4.14)

Para todo punto M(x,y) se tiene:

$MA^2 = (a-x)^2 + y^2$

$MB^2 = (-a-x)^2 + y^2$

lo que implica que:

$MA^2 - MB^2 = -4ax$

pero: $MA^2 - MB^2 = k$; luego:

$-4ax = k \iff 4ax + k = 0$

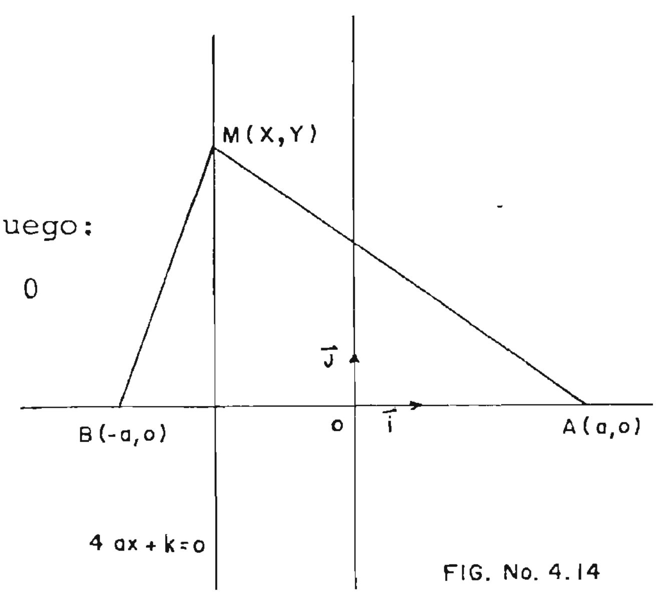


FIG. No. 4.14

* El conjunto de puntos M del plano R^2 talque:

$MA^2 - MB^2 = k$ es entonces la recta de la ecuación

$4ax + k = 0$

Es inmediato que esta recta es ortogonal a la recta AB

Sexta Parte

Conjunto de puntos M tales que: $\vec{MA} = \ell\vec{MB}$

Caso I

- Toma un SCCR en R^2 (papel cuadriculado)
- Define su referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala 1: 1 cm
- Ubica los puntos A(-2,3) y B(4,3), M(1,5)
- Traza el triángulo ABM
- Calcula MA^2 y MB^2
- Calcula $MA^2 - MB^2$ e identifícalo como k
- ¿Es k = 0? ___ si ___ no
- Determina el punto medio de AB e identifícalo como I
- Calcula IA^2 y IB^2
- Calcula $IA^2 - IB^2$ e identifícalo como t
- ¿Es t = 0? ___ si ___ no
- Traza la recta (de otro color) que pasa por los puntos I y M
- ¿Son ortogonales las rectas AB con IM? ___ si ___ no
- Como son ortogonales las rectas AB e IM; ¿entonces cual-quier punto M de la recta IM, se podrá escribir: $MA^2 - MB^2 = 0$? ___ si ___ no
- De la relación anterior, ¿se podrá escribir: $MA^2 = MB^2$? ___ si ___ no
- De la relación anterior, ¿se podrá escribir MA = MB? ___ si ___ no

- ¿Pasa la recta IM por la mitad del segmento AB? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________

EXPOSICION: *CONJUNTO DE PUNTOS M TALES QUE:* $\overrightarrow{MA} = \ell\overrightarrow{MB}$

Sean A y B dos puntos distintos del plano R^2, ℓ un número real positivo y R el conjunto de puntos M tales que:

$$\overrightarrow{MA} = \ell\overrightarrow{MB} \qquad (15)$$

implica que R es el conjunto de puntos M tales que:

$MA^2 = \ell^2 MB^2$ es decir: $MA^2 - \ell^2 MB^2 = 0$ (16)

CASO I

Si $\ell = 1$, del Teorema V el conjunto R es una recta ortogonal a la recta AB ($MA^2 - MB^2 = 0$)

Como I es el punto medio de AB es talque: IA = IB, e I pertenece al conjunto R que es entonces la recta que contiene a I y es ortogonal a la recta AB (Fig. 415)

Recordemos que A y B son dos puntos distintos, llamaremos Mediatriz del segmento AB a la recta que contiene al punto medio de A y B y es ortogonal a la recta AB

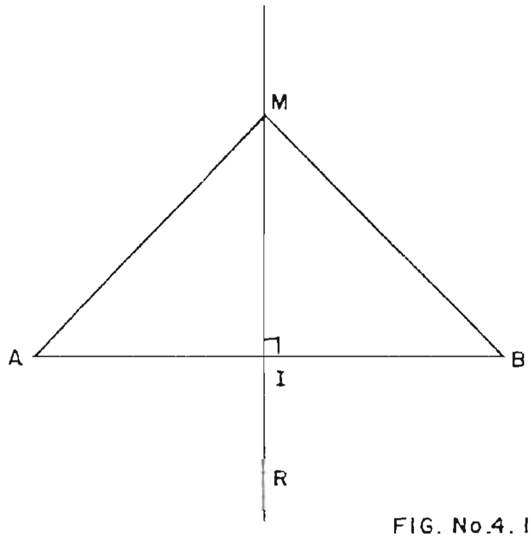


FIG. No.4. 15

Se puede entonces enunciar:

> TEOREMA VI
>
> A y B son dos puntos distintos del plano R^2, el conjunto de puntos M del plano R^2 tales que: MA = MB es la Mediatriz del segmento AB

CASO II

- Toma SCCR en R^2 (papel cuadricualado)
- Define una referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala de 1: 1 cm
- Ubica los puntos: A(-5,1), B(3,1), U(7,1), M(4,4)
- Traza el triángulo ABM y el segmento BU
- Son los vectores $\overrightarrow{UA} = 3\overrightarrow{UB}$? ___ si ___ no; (identifica $\ell = 3$)
- Encuentra $\|\overrightarrow{UA}\|$ y $\|\overrightarrow{UB}\|$
- ¿Se puede escribir $\overrightarrow{UA} = 3\overrightarrow{UB}$? ___ si ___ no $(\overrightarrow{UA} = \ell\overrightarrow{UB})$
- Ubica el punto I(1,1)
- ¿Son los vectores $\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IB}$? ___ si ___ no $(\overrightarrow{IA} = -\ell\overrightarrow{IB})$
- Calcula $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ e identifícalo como ℓ_1 ... $(\overrightarrow{MA} + \ell\overrightarrow{MB})$
- Calcula $4\overrightarrow{MI}$ ... $[(1 + \ell)\overrightarrow{MI}]$
- ¿Es $4\overrightarrow{MI} = \ell_1$? ___ si ___ no

  * (Recuerda que: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$) ver diagrama
- Calcula $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$ e identifícalo como ℓ_2 ... $(\overrightarrow{MA} - \ell\overrightarrow{MB})$
- Calcula $-2\overrightarrow{MU}$ ... $[(1 - \ell)\overrightarrow{MU}]$

- ¿Es $-2\overrightarrow{MU} = \ell_2$? ___ si ___ no
- Calcula MA^2 y MB^2
- Calcula $MA^2 - 9MB^2$ e identifícalo como ℓ_3 ... $(MA^2 - \ell^2 MB^2)$
- ¿Es $\ell_3 = 0$? ___ si ___ no
- Calcula $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MU}$
- Calcula $-8\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MU}$ e identifícalo como ℓ_4 ...$[(1 - \ell^2)\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MU}]$
- ¿Es $\ell_4 = 0$? ___ si ___ no
- ¿Es $\ell_3 = \ell_4$? ___ si ___ no
- Determina el punto medio de I y U e identifícalo como C
- Traza una circunferencia con centro c y radio CI
- ¿Pasa la circunferencia por el punto M? ___ si ___ no
- ¿Crees que todos los puntos M son de la circunferencia?
  ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ________________________________

EXPOSICION: *CASO II*

Si $\ell \neq 1$, se dice que existe un punto U de la recta AB y solo uno talque:

$$\overrightarrow{UA} = \ell\overrightarrow{UB} \quad (17)$$

implica que: $\overrightarrow{UA} = \ell\overrightarrow{UB}$; de (15) proviene que U pertenece al conjunto R.

Asi mismo, existe un punto I de la recta AB y solo uno talque:

$$\overrightarrow{IA} = -\ell\overrightarrow{IB} \quad (18)$$

Este punto I pertenece al conjunto $\mathcal{R}$ (Fig. 4.16)

Por otra parte, para todo punto M

del plano R^2, se tiene:

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ y $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$

(ver Fig. 4.16); luego:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} + \ell\overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + \ell(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\
&= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \ell\overrightarrow{MI} + \ell\overrightarrow{IB} \\
&= (1+\ell)\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \ell\overrightarrow{IB}}_{0\ (18)} \\
&= (1+\ell)\overrightarrow{MI}
\end{aligned}$$

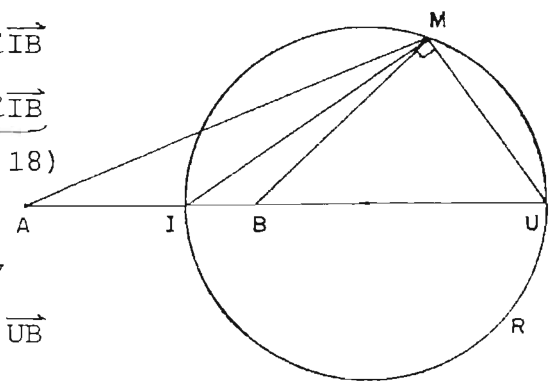


FIG. No. 4.16

$\therefore$ $\underline{\overrightarrow{MA} + \ell\overrightarrow{MB} = (1+\ell)\overrightarrow{MI}}$ y

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{UA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{UB}$

(ver Fig. 4.16); luego:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} - \ell\overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{UA}) - \ell(\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MB}) \\
&= \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{UA} - \ell\overrightarrow{MU} - \ell\overrightarrow{MB} \\
&= (1-\ell)\overrightarrow{MU} + \underbrace{\overrightarrow{UA} - \ell\overrightarrow{UB}}_{0\ (17)} \\
&= (1-\ell)\overrightarrow{MU}
\end{aligned}$$

$\therefore$ $\underline{\overrightarrow{MA} - \ell\overrightarrow{MB} = (1-\ell)\overrightarrow{MU}}$ y resulta que:

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{MA} + \ell\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - \ell\overrightarrow{MB}) &= (1+\ell)\overrightarrow{MI}\ \ (1-\ell)\overrightarrow{MU} \\
(MA)^2 - (\ell MB)^2 &= (1+\ell)(1-\ell)\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MU} \\
MA^2 - \ell^2 MB^2 &= (1-\ell^2)\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MU}
\end{aligned}$$

pero $MA^2 - \ell^2 MB^2 = 0$

(ver 16)

Luego: $(1-\ell^2)\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MU} = 0$ como $(1-\ell^2) \neq 0$

Se tiene que: $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MU} = 0$

Por lo tanto $\mathcal{R}$ es la circunferencia de diametro $[I,U]$

Se puede enunciar entonces:

> TEOREMA VII
>
> A y B son dos puntos distintos del plano R^2 y ℓ un real positivo diferente de 1, el conjunto de puntos M tales que: $\overrightarrow{MA} = \ell\overrightarrow{MB}$ es la circunferencia de diametro $[I,U]$; I y U son los puntos de la recta AB definidos por:
>
> $$\overrightarrow{IA} = \ell\overrightarrow{IB} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{UA} = \ell\overrightarrow{UB}$$

Septima Parte

Aplicación del Teorema VII

Una aplicación es:

"Sean A y B dos puntos distintos de un plano R^2; el conjunto de puntos M del plano R^2, tales que:

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = MA$$

es una circunferencia que contiene el punto B

- Toma un SCCR en R^2 (papel milimetrado)
- Define una referencia $(0,\vec{i},\vec{j})$ y una escala 1: 1 cm
- Ubica los puntos A(-1,2), B(5,2) y M(3,4)
- Traza el triángulo ABM
- Calcula $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ e identifícalo como $\vec{w}$
- Determina $\|\vec{w}\|$ e identifícalo como ℓ_1
- Calcula $\|\overrightarrow{MA}\| = MA$

- ¿Es $MA = \ell_1$? ___ si ___ no
- Ubica el punto medio de A y B e identifícalo como I
- Determina el vector $\overrightarrow{MI}$ (analítica y gráficamente)
- Calcula $2\overrightarrow{MI}$
- ¿Es $2\overrightarrow{MI} = \vec{w}$? ___ si ___ no
- Calcula $\|\overrightarrow{MI}\|$ y después $2\|\overrightarrow{MI}\| = 2MI$
- ¿Es $2MI = \ell_1$? ___ si ___ no
- Se puede escribir: ¿$MA = 2MI$? ___ si ___ no
- ¿De la relación anterior que deduces? (ver Teorema VII)

  ____

- Ubica el punto C(3,2)
- Traza la circunferencia con centro en C y radio CB
- ¿Tiene alguna relación con el gráfico anterior? ___ si ___ no
- ¿Pasa la circunferencia por M y B? ___ si ___ no
- ¿Es $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BI}$? ____ si ___ no
- ¿Es $BA = 2BI$? ___ si ___ no
- ¿Qué concluyes? ______________________________

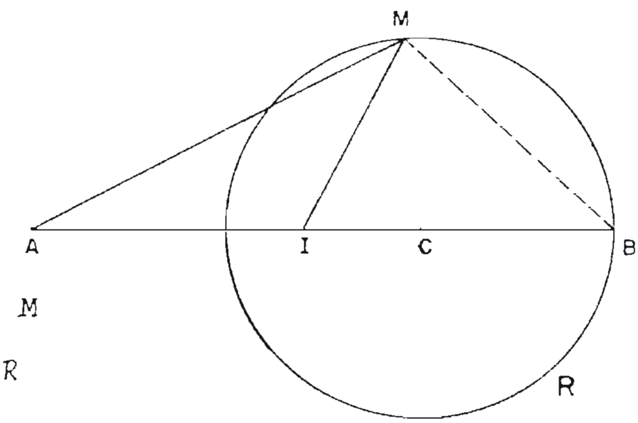
EXPOSICION: *APLICACION DEL TEOREMA VII*

Sea $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = MA$ y sea I el punto medio de AB (Fig. - 4.17); para todo punto M del plano R^2, se tiene:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

lo que implica que:

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MI}\|$$
$$= 2\|\overrightarrow{MI}\|$$
$$= 2MI$$



y resulta que un punto M pertenece al conjunto *R* sí y solamente si:

$$\boxed{MA = 2MI}$$

FIG. No. 4.17

El conjunto *R* es entonces una circunferencia (ver Teorema VII)

Por otra parte, como I es el punto medio de los puntos A y B, se tiene:

$$\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BI}$$

lo que implica que: $\|\overrightarrow{BA}\| = \|2\overrightarrow{BI}\|$

es decir: $BA = 2BI$

y resulta que el punto B pertenece a la circunferencia *R*.

C A P I T U L O   V

PLANIFICACION, EJECUCION, DE UN CURSO EXPERIMENTAL Y COLECCION DE DATOS

5.1 PLANIFICACION DEL CURSO

Para lograr los objetivos propuestos en este trabajo, se desarrollaron las actividades siguientes:

5.1.1 Análisis del plan:

Su función fue determinar que aspectos se analizarían en el curso, tales como: pruebas de diagnósticos, desarrollo de actividades, evaluación y cuestionario.

5.1.2 Formulación de Objetivos:

Su función fue determinar lo que esperabamos que el alumno hiciera, como consecuencia de sus experiencias en el desarrollo de cada actividad.

5.1.3 Selección de estrategias de aprendizaje:

Su función fue determinar que material utilizaría el estudiante: regla compás, transportador, etc., así como material impreso: actividades, cuestionario, etc.

5.1.4 Método de enseñanza:

La sugerida en el presente trabajo.

5.2 EJECUCION DEL CURSO

5.2.1 Capítulo de aplicación:

El Capítulo que fue desarrollado, fue el número I, sobre: -

SISTEMA DE COORDEMADAS CARTESIANAS.

5.2.2 Area de aplicación:

El curso fue aplicado a una población estudiantil de 23 jóvenes - aproximadamente, que se inscribieron para estudiar Bachillerato - en la Escuela Nacional de Comercio, ENCO.

5.2.3 Período de aplicación:

El tiempo que duró el curso fue:

i) Primer Grupo: del 9 al 19 de diciembre de 1985

ii) Segundo Grupo: del 6 al 15 de enero de 1986

iii) Hora: de 8:00 a 9:30 (de lunes a viernes)

Se dieron los siguientes pasos para cada Grupo:

a) Prueba de diagnóstico.

b) Desarrollo (ejecución) de las actividades

c) Evaluación sobre las actividades.

d) Cuestionario sobre todo lo anterior.

Resumen presentado en el siguiente cuadro:

	PRIMER GRUPO									SEGUNDO GRUPO							
Fechas	Diciembre de 1985									Enero de 1986							
Actividades	9	10	11	12	13	16	17	18	19	6	7	8	9	10	13	14	15
Información General																	
Prueba de Diagnóstico																	
Expo. sobre trazos																	
Desarrollo de actividad.																	
Evaluación Final																	
Cuestionario																	

5.2.4 Forma de aplicación:

El curso fue aplicado en forma directa; la función del Profesor fue de orientar o servir de guía en el desarrollo de las actividades y como expositor, despues de cada actividad.

5.3 COLECCION DE DATOS:

5.3.1 Instrumentos:

Los instrumentos que fueron utilizados en la recolección de datos, en el curso desarrollado, se describen a continuación:

a) Prueba de Diagnóstico: Su función fue determinar si los alumnos tenían algún conocimiento de Geometría y si les gusta la Matemática.
b) Actividades: Su función fue que los estudiantes desarrollaran nuevas experiencias en la metodología del aprendizaje.
c) Evaluación: Su objetivo fue determinar el grado de aprendizaje, sobre las actividades desarrolladas.
d) Cuestionario: Su función fue investigar sobre: grado de dificultad del tema (Sistema de Coordenadas), Metodología, Evaluación estudiante-Matemática, Evaluación de las actividades y sugerencias.

5.3.2 Tabulación y análisis de los resultados:

La tabulación y análisis de cada resultado, se presenta a continuación, en forma separada para mayor comprensión del lector.

PRUEBA DE DIAGNOSTICO

1- ¿Crees que la matemática es sólo para inteligentes?

___ si ___ no, Por qué?

2- ¿Cómo te pareció la enseñanza de la matemática en 3er. ciclo? ___ Fácil ___ Difícil ___ Aburrida

___ Interesante

3- ¿Te gusta la matemática?

___ si ___ no, Por qué?

4- ¿Has tenido alguna experiencia "amarga" en el aprendizaje de la matemática?

___ si ___ no, Cuál?

5- ¿Qué experiencia has tenido en el uso de Instrumentos de geometría?

___ nada ___ poco ___ bastante ___ mucho

6- ¿Recibió usted conocimientos sobre geometría?

___ nada ___ poco ___ bastante ___ mucho

7- ¿Qué conoces de geometría?

8- ¿Crees que la matemática es necesaria para el ser humano?

___ si ___ no, por qué?

9- ¿Cómo quisieras que fueran las clases de matemática?

10- Cómo quisieras la clase de matemática?

___ Con participación del estudiante

___ Expositiva ___ Dictada

C U A D R O 5.1

Respuesta a la prueba de Diagnóstico para los dos Grupos de Con-- trol. (Primer grupo: 22 Alumnos, Segundo Grupo: 24 Alumnos).

Pregunta Nº	R E S P U E S T A	GRUPO Nº 1		GRUPO Nº 2	
		TOTAL	%	TOTAL	%
1	Si	0	0	0	0
	No	22	100	24	100
	Por qué? A				
2	Facil	1	4.5	3	13
	Dificil	3	13.6	2	7
	Aburrida	0	0	0	0
	Interesante	18	81.9	19	80
3	Si	21	95.5	22	93
	No	1	4.5	2	7
	Por qué? B				
4	Si	13	59.	6	26
	No	9	41.	18	74
	Cual? C				
5	Nada	6	27.3	2	7
	Poco	11	50.	20	86
	Bastante	4	18.2	2	7
	Mucho	1	4.5	0	0
6	Nada	2	9.0	3	13
	Poco	15	68.3	19	80
	Bastante	4	18.2	2	7
	Mucho	1	4.5	0	0
7	D				
8	Si	21	95.5	24	100
	No	1	4.5	0	0
	Por qué? E				
9	F				
10	Participación	19	86.4	18	74
	Expositiva	3	13.6	5	20
	Dictado	0	0	1	6

P R I M E R G R U P O	S E G U N D O G R U P O
D:-Sólo rectas, circunferencias. -Algo sobre triángulos, rectángulos y polígonos, cuadrados. -Muy poco.	-Trazos de ángulos y rectas. -Nada. -Poco. -Triángulo, circunferencia, Elipse, Prisma.
E:-Sí, porque es estimulante. -Sí, es necesario para cualquier trabajo -Sin la matemática no se puede salir adelante. -La matemática nos da la vida. -Nos sirve para hacer cuentas. -Se usa mucho en la vida y por medio de la cual, a minguna persona se puede engañar.	-Nos ayuda en la vida -La matemática se usa en todo -Sin la matemática no se puede hacer nada. -Nos ayuda a resolver problemas -Aumenta los conocimientos.
F:-Bastante explicadas por el Profesor. -Fáciles, interesantes, alegres. -Que exista seguridad en la explicación. -Muy organizadas. -Un poco menos complicadas. -Que el Profesor sea comunicativo y alegre.	-Que nos eduquen para la vida. -Dinámicas, que expliquen bién. -Activa, no sean aburridas. -Estrictas, fáciles

C U A D R O 5.3

ANALISIS SOBRE "ALGUNAS" PREGUNTAS FUNDAMENTALES; DESARROLLADAS EN UN CUESTIONARIO DIAGNOSTICO A UN GRUPO DE JOVENES ASPIRANTES DE BACHILLERATO.

P R E G U N T A S	RESPUESTAS RESUMIDAS (1er. grupo)	RESPUESTAS RESUMIDAS (2do. grupo)
1- La Matemática es solo para inteligentes?	- El 100% contestó que NO, la razón: todas la pueden aprender.	- El 100% contestó que NO, la razón: Todos pueden aprender Matemática.
2- Le gusta la Matemática?	- Un 95% dijo que SI, la razón: * Nos ayuda a pensar. * Hay mucas cosas que aprender. * Nos ayuda en la vida. * Es interesante y necesaria.	- Un 93% contestó que SI, la razón: * Les ayuda apensar * Se aprende más. * Enseña cosas importantes * Es base de otras materias.
3- Qué conoces de Geometría?	- El 60% dijo que poco, el 18% bastante, el 9% nada y el 5% mucho.	- Un 80% respondió poco, 13% nada y 7% bastante.
4- Qué experiencia tienes sobre el uso de instrumentos de geometría?	- El 50% dijo que poco, 27% ninguna, 18% bastante y 5% mucho.	- Un 86% respondió poco, 7% bastante.

P R E G U N T A S	RESPUESTAS RESUMIDAS (1er. grupo)	RESPUESTAS RESUMIDAS (2do. grupo)
5- Es necesaria la Matemática?	- El 95% dijo que si, la razón: * Es estimulante * Es necesario para cualquier trabajo * Sin la matemática no se puede seguir adelante * Se usa mucho en la vida * La Matemática sirve para que ninguna persona pueda ser engañada.	- El 100% contestó que si la razón: * Nos ayuda en la vida * Se usa en todo * Sin la Matemática no se puede hacer nada. * Aumenta los conocimientos * Nos ayuda a resolver problemas.
6- Cómo quisieras que fueran las clases de Matemática?	- 85% con participación del estudiante, 15% expositiva (bien explicada por el profesor, que sea comunicativo organizado y seguro).	- El 74% dijo con participación del estudiante - 20% expositiva (bien explicadas, no aburridas), 7% dictadas (que sean claras y fáciles).

ANALISIS SOBRE LAS ACTIVIDADES DESARROLLADAS POR EL 1er. - GRUPO.

1- Lo relacionada a trazos de rectas paralelas, perpendiculares, ángulos, escalas numéricas; fue desarrollado en - forma expositiva; supuestamente bien explicadas (con interrogatorio para asegurarse de que todo estaba claro).

RESULTADOS

- Un 70% no pudo realizar rectas paralelas y perpendiculares.
- Con respecto a las escalas numéricas:
  * Un 10% no comprendio en la orientación de la recta.
  * Un 20% no pudo graduar usando rectas paralelas.
- No se hizo experiencia sobre subdivisión de la recta; solo se mencionó como ubicar coordenadas fraccionarias.

Los demás efectos veamoslo en otros aspectos.

2- Actividad sobre llenar un plano con rectas:

- Un 10% no lo comprendio.
- Un 50% buenos
- Un 40% magníficos trazos.

Sobre la pregunta: El Nº de rectas para llenar el plano es infinito? Las respuestas no fueron muy claras; la mayoría contestó que *no*; pero sin ningún análisis.

3- Act. 1.1 y 1.2

Ubicación de puntos en el plano con rectas L_1, L_2 de familias de rectas.

Ubicación de puntos en el plano con circunferencias y rectas.

Solo el 17% le entendió el resto no lo comprendio, no llegó a nada.

4- Act. 1.3. y 1.4

Ubicación de puntos con rectas graduadas (más específico). Aquí el 93% no comprendió, no entendió nada.

5- 1.5, 1.6, 1.7

Actividad dirigida a planos transparentes para detectar:

i) Un mismo punto y distinta coordenada.

ii) Una misma coordenada y distinto punto.

El 35% no pudieron ubicar puntos en el plano. (les gustó la actividad)

ANALISIS SOBRE LAS ACTIVIDADES DESARROLLADAS POR EL SEGUNDO GRUPO DE JOVENES ASPIRANTES A BACHILLERATO.

1- ACTIVIDADES SOBRE TRAZOS:

1.0 Trazo de paralelas (rectas).

1.1 Trazo de perpendiculares (rectas)

1.2 Trazo de ángulos y medición.

1.3 Trazo de escalas numéricas en una recta.

1.4 Trazo de escalas numéricas y subdivisión de la recta.

1.5 Trazo de diferentes escalas numéricas en una recta.

2- RESULTADO SOBRE LAS ACTIVIDADES 1.0 AL 1.5

1.0 Sobre rectas paralelas el 100% las realizó corecta--mente.

1.1 Sobre rectas paralelas el 90% las realizó correcta--mente.

1.2 Sobre ángulos (su medición) el 100% midió ángulo de 0° a 180°, pero el 30% falló en medición de ángulos - mayores de 180° y menores de 360°.

1.3 Sobre la construcción de escalas numéricas (15% lo - hizo mal).

1.4 Sobre la subdivisión de la recta; los trazos fueron realizados satisfactoriamente en un 80%, se plantea-ron 2 preguntas:

i) Se puede seguir obteniendo más puntos medios?
El 100% dijo que si.

ii) Tiene fin este proceso?

El 60% manifestó que no, el resto (40%) dijo que si.

1.5 Sobre graduar rectas con diferentes escalas; el 82% lo hizo bien, 11% se equivocó en alguna recta y el - 7% se equivocó todo.

3- ACTIVIDADES SOBRE UBICACION DE UN PUNTO EN EL PLANO

1.6 Cómo llenar un plano con rectas.

1.7 Ubicación de puntos a través de Familia de rectas.

1.8 Ubicación de un punto en Sistema de Coordenadas.

1.9 - 1.10 Ubicación de un punto en distintos Sistemas - de Coordenadas.

1.11 Ubicación de un punto en Sistema de Coordenadas con rectas *no* perpendiculares.

1.12 Otros sistemas de coordenadas.

4- RESULTADO SOBRE LAS ACTIVIDADES 1.6 AL 1.12

1.6 sobre la pregunta: Si es infinito el número de rec-- tas para llenar el cuadro el 100% dijo que era infi- nito; su gráfico en un 90% estuvo correcto.

1.7 Sobre la ubicación de un punto P en el plano en for- ma única el 65% hizo adecuadamente el gráfico. (ha-- ciendo trazos de rectas paralelas).

Sobre la pregunta si a cada punto le corresponde un solo par, el 100% dijo que si, pero que acada par le corresponde un punto P, (quizás la pregunta no fue - muy clara, ya que un 65% dijo que si, el resto dijo no existe).

1.8 Aquí se p día la ubicación de puntos en un plano con rectas a escala (1 cm.) la ubicación lo hizo correcto un 90%.

1.9 Esta actividad estaba dirigida a planos transparentes; para determinar las coordenadas de un mismo punto P a distintas escalas y el 80% distinguió la diferencia de coordenadas.

1.10 Sobre esta actividad se pedía usar 3 planos transparentes la ubicación de un punto P(a,b) en 3 planos - con diferentes escalas; observaban que tenían diferentes posiciones; el 100% detectó el por qué de los fenómenos.

Al final de la actividad 1.9 y 1.10 se preguntaba: De qué depende la ubicación de un punto P en forma - única en un plano? y el 100% contestó que del Sistema de Coordenadas.

1.11 En esta actividad se pidió la ubicación de un punto con Familia de Rectas que no son perpendiculares entre si y creo que no fue muy clara por que gráficamente el 65% lo hizo bien, el resto se equivocó.

1.12 Por último se pidió la ubicación del punto en el pla no usando otros sistemas; se pidió construir y ubicar el punto P en el Sistema Polar; el 85% lo hizo correctamente - el resto creo que no lo entendió.

Además, si no hubo confusión en la ubicación de puntos en sistema de curvas.

EVALUACION FINAL DEL CURSO DE GEOMETRIA

PRIMER GRUPO

1) Crees que una recta se puede "llenar" con puntos que representan a los números reales?

___ si ___ no

Por qué? ______________________________

2) Crees que a cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa?

___ si ___ no

Por qué? ______________________________

3) Se puede *llenar* un plano con rectas o curvas?

___ si ___ no

Por qué? ______________________________

4) Que entiendes por familia de curvas o rectas?

____

5) Cuántas familias de curvas o rectas se necesitan para ubicar un punto en el plano en forma única? __________

6) Además de rectas y circunferencias; que otros tipos de curvas existen para identificar un punto en el plano? __

____

7) Te pareció difícil la construcción de escalas numéricas?

___ si ___ no

Por qué? ______________________________

8) Que es un *sistema de coordenadas*? ______________________________

9) Cómo identificar un sistema de coordenadas cartesianas rentangulares? ______________________________

10) De qué depende la ubicación de un punto en el plano? ___

RESPUESTAS AL EXAMEN REALIZADO AL FINALIZAR EL CURSO (Primer Grupo)

1) Si ___ 83%

No ___ 17%

Por qué? Las respuestas fueron muy pobres; en algunos casos se perdieron, solo (2) respondieron un poco acertadamente.

2) Si ___ 78%

No ___ 22%

Por qué? Hay que hacer una escala en la recta siempre que se quiera asociar puntos

- La escala es a base de puntos
- Cada punto tiene una posición única

3) Si ___ 78%

No ___ 22%

Por qué? Respuestas vagas

Son finitas ya que no se pueden juntar

4) Aquí se dieron respuestas sin sentido

Solo (3) respondieron: es una agrupación directa que tienen algo en común

5) La mayoría (%) dijo que *dos* familias son suficiente para ubicar un punto en el plano

6) Contestaron que si pueden utilizar lineas onduladas, cua

dradas, triángulos, circunferencias, etc.

7) Si ___ 17%

No ___ 83% por qué? Con el uso de regla se pueden hacer escalas, según sea la unidad de medida.

8) Respuestas pobres, solo algunos contestaron:

Conjunto de rectas o curvas.

9) Con familias de rectas paralelas (Un 50% lo dijo así)

10) Depende del centro del plano

- Depende de la unidad de medida
- Depende de la escala
- Y algunas respuestas sin sentido.

EN CONCLUSION: Los resultados de esta evaluación no fueron muy satisfactorios; hubo confusión en las respuestas por que se dieron respuestas pobres o sin sentido.

EVALUACION FINAL DEL CURSO DE GEOMETRIA

SEGUNDO GRUPO

1) Traza una recta D y otra paralela D'

2) Traza dos rectas perpendicualres D y D'

3) Traza 3 rectas graduadas con escalas de 1: 1 cm, 1: 3 cm, 1: 1.5 cm.

4) Mide los ángulos: A, B, C, D. de la fig. 1

5) Crees que una recta se puede "llenar" con puntos que representan a los números reales? ___ si ___ no Por qué?

6) Que función puedes definir entre los puntos de una recta y los números reales ________________________

7) Se puede llenar un cuadro (plano, con rectas o curvas? ___ si ___ no; por qué: ________________________

8) Que entiendes por familia de rectas? ________________

9) Con cuantas rectas (que no sean de la misma familia) puedes ubicar un punto en el plano de forma única? ________

10) Además de rectas; que otros tipos de curvas existen para identificar un punto en el plano? ________________

11) De que depende la ubicación de un punto en el plano? ___

12) Te pareció difícil la construcción de escalas numéricas?

13) Qué es un Sistema de Coordenadas? ________________

14) A que se le llama S.C.C. rectangulares? ________________

15) Ubica los puntos: (2,4), (-3,5), (0,6) y (-2,-5)

RESPUESTAS SOBRE EL EXAMEN REALIZADO AL FINALIZAR EL CURSO

(2ª Grupo)

1: Trazo de rectas paralelas el 100% lo hizo bien

2: Trazo de rectas perpendiculares: solo un alumno de 24 no lo hizo bien

3: Trazo de rectas graduadas a escala:

a 1:1 cm el 100% lo hizo bien

a 1:1 3cm el 75% lo hizo bien

a 1:1.5 cm. (hubo error se escribió 1:1.15 cm.)

4: Sobre medición de ángulos un 95% lo hizo correctamente

5: Sobre la pregunta: se puede llenar una recta con puntos que representan a los números reales?

el 50% dijo que si y el 50% dijo que no.

El resultado pareciera no muy claro; pero en la misma pregunta se plantea por qué? y si se tuvieron respuestas tales como:

Si: porque son infinitos los números y los puntos (para cada punto hay un número)

No: porque son infinitos siempre quedan espacios

Yo creo que se tiene claridad de lo que se pregunta; el porque uno dice si y otro no se debe quizas en que uno ve la dificultad real de "llenar" con puntos a una recta y el otro lo ve desde la idea de números infinitos.

6: La función entre puntos de una recta y los números reales es: Biyectiva. La mayoría lo contestó correctamente.

7; Sobre la pregunta: Se puede "llenar" un plano con rectas o curvas? el 25% dijo Sí el 75% dijo No

alqunas respuestas:

Si; pero se necesitan un número infinito de rectas

No; porque por mucho que se tracen jamás se llenará (son infinitos)(Es decir como són infinitos las rectas a trazar nunca se llenará el plano)

Yo creo que lo de infinito lo tienen claro que es lo importante.

8: Que se entiende por familia de rectas? sobre esta pregunta contestaron (en su mayoría) Es un conjunto de rectas horizontales o verticales

9: Sobre la pregunta de que, con cuantas rectas de diferente familia pueden identificar a un punto en el plano: 1 alumno respondió con una, otro con 6 y el resto dijo que con 2.

10: La mayoría contestó que además de rectas para ubicar un punto en el plano se pueden usar: circunferencias, parábolas etc.

11: Sobre la pregunta de que depende la ubicación de un punto en el plano Contestaron: del punto P

de la escala a usar

de la forma en que se graduan las rectas de las coordenadas usadas

del Sistema de Coordenadas

12: Un 90% dijo que no le pareció difícil la construcción de escalas numéricas

13: Sobre la pregunta que es un S.C.

La mayoría contestó correctamente

14: Sobre la pregunta que es un S.C.C.R.

la mayoría contestó correctamente

15: En la ubicación de algunos puntos: (2,4), (-3,5), (0,6) y (-2,5)

la mayoría lo hizo bien.

En conclusión: El resultado de esta evaluación fué mejor que el grupo 1ª al menos hubo claridad y unicidad en las respuestas y no divagación como en el 1er. grupo, aunque el examen fué diferente en algunos tópicos porque el curso también fué diferente.

PROFESOR ENCARGADO: ROLANDO AMILCAR QUINTANILLA

ESCUELA NACIONAL DE COMERCIO

SAN SALVADOR.

Nombre del Alumno: ______________________________

Edad: ______________________________

Lugar de la Escuela donde procede: ______________________________

Fecha: ______________________________

C U E S T I O N A R I O

INSTRUCCION GENERAL

1- El presente cuestionario tiene la finalidad de detectar si el alumno es capaz de asimilar con facilidad los conocimientos de matemática a través de un aprendizaje en base a actividades que el alumno desarrolla.

2- Se ruega al estudiante responder con toda seriedad y honestidad el presente cuestionario; sin dejarse llevar por sus sentimientos.

3- Marque con una X en la hoja de respuestas la que considere más adecuada para cada pregunta.

4- Al final del cuestionario haga las sugerencias que estime necesarias para las preguntas abiertas.

5- Se ha clasificado el cuestionario en cuatro partes; para facilitar su desarrollo.

6- Las preguntas del presente cuestionario se fundamentan en el curso de geometría previamente desarrollado.

I- GRADO DE DIFICULTAD DEL TEMA

1- En geometría (3er. ciclo) tratastes rectas paralelas y perpendiculares en un plano?

___ Nada ___ Poco ___ Bastante ____ Mucho

2- Te eran conocidos los términos (rectas, circunferencias, familia, plano, paralelos, etc.) antes de recibir el curso?

___ Nada ____ Poco ___ Bastante ___ Mucho

3- Cómo te pareció el curso de geometría que tú recibiste?

___ Aburrido ___ Interesante ___ Difícil ___ Fácil

___ Activo

4- Asimilaste con facilidad los conocimientos dados en el curso?

___ NInguno ____ Poca ____ Bastante ____ Demasiada

5- Crees que los trazos que realizastes son complejos?

___ Nada ____ Poco ___ Bastante ____ Demasiado

6- Qué dificultades hubo en el uso de instrumento de geometría?

___ Ninguno ___ Poca ___ Bastante ____ Mucho

7- Cres que este tipo de conocimientos está muy "elevado" para tí?

____ si, mucho ___ si, un poco ___ Definitivamente no

8- Crees que el tipo de conocimiento que recibiste en el curso es diferente al de 3er. ciclo?

___ si, mucho ___ si, un poco ___ Definitivamente no

9- Cómo te pareció el tema de: SISTEMA DE COORDENADOS que tú recibiste?

___ de Fácil comprensión ___ De difícil comprensión

___ Inentendible

10- Crees que este tipo de enseñanza (el del curso) está - adecuado para jóvenes que han terminado 3er. ciclo?

___ Si ___ No Por qué? ________________

11- Te parece que la exposición que se dá después de las actividades trata sobre cosas nuevas, diferentes a las - tratadas en las actividades?

___ si ___ no. Por qué? ________________

12- Cuando en la exposición se hacen planteamientos formales te parecen difíciles (después de haber realizado - las actividades)

___ Si ___ No Por qué? ________________

II- METODOLOGIA

13- Crees que este tipo de aprendizaje que se dió en el curso por actividades es sencillo?

___ Muy sencillo ___ Bastante sencillo ___ Poco sencillo ___ Nada sencillo

14- La enseñanza por actividades del curso comparada con la tradicional tú crees que exige?

___ Mayor participación del alumno

___ Menor participación del alumno

___ Igual participación del alumno

15- Se aprende mucho más con la enseñanza por actividades del curso que con la enseñanza tradicional?

___ Mucho más que la enseñanza tradicional

___ Más que la enseñanza tradicional

___ Igual que la enseñanza tradicional

___ Menos que con la enseñanza tradicional

16- Para el aprendizaje por actividades (las del curso), - crees que el conocimiento que traes de 3er. ciclo es:

___ Suficiente ___ Normal ___ Poco

17- Se aprende más rápido por actividades (las del curso) - que por la forma tradicional?

___ Si ___ No Por qué? ______________________________

18- El desarrollo de las actividades del curso es:

___ Poco lento ___ Bastante lento ___ Muy lento

19- Crees que existe mejor calidad en la enseñanza tradicio nal que en la enseñanza que se dió en el curso por acti vidades?

___ Si ___ No Por qué? ______________________________

III- EVALUACION ESTUDIANTE - MATEMATICA

20- Crees que la matemática es solo para inteligentes?

___ Si ___ No Por qué? ______________________

21- Te gusta el aprendizaje de la matemática por activida-- des como en las del curso?

___ Nada ___ Poco ___ Bastante ___ Mucho

22- Te brinda confianza y seguridad este aprendizaje (el - del curso)?

___ Nada Poco ___ Bastante ___ Mucho

23- En relación al desarrollo del curso; tú siempre estuvis te?

___ Ansioso ___ Nervioso ___ Con poca ansiedad

___ Sin ansiedad

24- Te pareción fácil el aprendizaje de los conocimientos - de geometría?

___ Nada ___ Poco ___ Bastante ___ Mucho

IV - EVALUACION DE LAS ACTIVIDADES

25- En relación a la claridad del lenguaje en las actívides tú la consideraste?

___ Muy buena ___ Buena ___ Regular ___ Mala

26- Existe coherencia (conexión) en los pasos de las activi dades?

___ No, nada ___ Alguna coherencia ___ Si, mucha

27- Crees que es confuso el aprendizaje por actividades (las del curso)

___ Poco ___ Nada ___ Bastante ___ Mucho

28- Cuál de las actividades te pareció más interesante?

____

Por qué? ______________________________

29- La utilización de actividades (del curso) en el aprendizaje de matemática, tú la encontraste?

___ Interesante ___ Muy interesante ___ Sin interés

30- Cómo consideras el tiempo destinado para cada actividad?

___ Poco ___ Normal ___ Demasiado

V - SUGERENCIAS

Qué sugerencia harías con relación a las actividades desarrolladas:

1- En cuanto al tiempo para cada actividad: ______________

2- En cuanto a la actividad del profesor en el desarrollo de las actividades: ______________________________

3- En cuanto a la metodología (forma de enseñanza por actividades) ______________________________

4- En cuanto al grado de dificultad del tema: ______________

5- Otros: ______________________________

C U A D R O 5,4

Respuesta al Cuestionario final que fue realizado por los dos Grupos de Control (Primer Grupo: 18 alumnos, Segundo Grupo: 24 alumnos)

PARTE	PREGUNTA Nº	RESPUESTA	Grupo Nº 1		Grupo Nº 2	
			Total	%	Total	%
I	1	Nada	4	22	8	33
		Poco	14	78	14	58
		Bastante	0	0	2	8
		Mucho	0	0	0	0
	2	Nada	4	22	6	25
		Poco	9	50	12	50
		Bastante	3	17	4	17
		Mucho	2	11	2	8
	3	Aburrido	0	0	0	0
		Interesante	14	78	20	83
		Dificil	2	11	0	0
		Facil	0	0	0	0
		Activo	2	11	4	17
	4	Ninguno	0	0	0	0
		Poco	13	72	10	42
		Bastante	5	28	12	50
		Demasiado	0	0	2	8
	5	Nada	1	6	4	17
		Poco	11	61	6	25
		Bastante	6	33	8	33
		Demasiado	0	0	2	8

PARTE	PREGUNTA Nº	RESPUESTA	Grupo Nº 1		Grupo Nº 2	
			Total	%	Total	%
I	6	Ninguna	4	22	8	25
		Poca	12	67	18	75
		Bastante	2	11	0	0
		Mucha	0	0	0	0
	7	Si, mucho	0	0	2	8
		Si, un poco	10	56	2	8
		Definitivamente	8	44	20	83
	8	Si, mucho	6	33	8	33
		Si, un poco	12	67	10	42
		Definitivamente no	0	0	6	25
	9	De facil comprensión	8	44	24	100
		De dificil compren.	8	44	0	0
		Inentendible	2	22	0	0
	10	Si	17	88	22	91
		No	1	11	2	8
		Por qué? A				
	11	Si	3	27	2	8
		No	15	83	22	91
		Por qué? B				
	12	Si	7	39	2	8
		No	11	61	22	91
		Por qué? C				
II	13	Muy sencillo	1	6	10	42
		Bastante sencillo	2	11	4	17
		Poco sencillo	11	61	6	25
		Nada sencillo	4	22	4	17

PARTE	PREGUNTA Nº	RESPUESTA	Grupo Nº 1		Grupo Nº 2	
			Total	%	Total	%
II	14	Mayor Part. del almo.	10	56	16	67
		Igual Part. del almo.	6	33	8	33
		Menor part. del almo.	2	22	0	0
	15	Mucho más que la Ens. Trad.	9	50	10	42
		Más que la Ens. Tradicional	8	44	4	17
		Igual que con la Ens. Trad.	1	6	10	42
		Menos que con la Ens. Trad.	0	0	0	0
	16	Suficiente	4	22	0	0
		Normal	7	39	16	67
		Poco	7	39	8	33
	17	Si	14	78	20	83
		No	4	22	4	17
		Por qué? D				
	18	Poco lento	18	100	18	75
		Bastante lento	0	0	4	17
		Muy lento	0	0	0	0
	19	Si	3	28	10	42
		No	15	72	10	42
		Por qué? E				
III	20	Si	0	0	0	0
		No	18	100	24	100
		Por qué? F				

PARTE	PREGUNTA Nº	RESPUESTA	Grupo Nº 1		Grupo Nº 2	
			Total	%	Total	%
III	21	Nada	0	0	0	0
		Poco	4	22	2	8
		Bastante	8	44	8	33
		Mucho	6	33	14	58
	22	Nada	0	0	0	0
		Poco	3	17	2	8
		Bastante	10	56	12	50
		Mucho	5	28	10	42
	23	Ansioso	10	56	22	91
		Nervioso	7	39	0	0
		Con poca ansiedad	1	6	0	0
		Sin ansiedad	0	0	2	8
	24	Nada	0	0	0	0
		Poco	11	61	14	58
		Bastante	6	33	6	33
		Mucho	1	6	2	8
IV	25	Muy buena	10	56	16	67
		Buena	5	28	8	33
		Regular	3	17	0	0
		Mala	0	0	0	0
	26	No, nada	4	22	6	25
		Alguna coherencia	10	56	6	25
		Sí, mucha	4	22	12	50
	27	Poco	11	61	8	33
		Nada	6	33	14	58
		Bastante	1	6	2	8
		Mucho	0	0	0	0

PARTE	Pregunta Nº	R E S P U E S T A	Grupo Nº 1		Grupo Nº 2	
			Total	%	Total	%
IV	28	Por qué? G				
	29	Interesante	12	67	14	58
		Muy interesante	6	33	10	42
		Sin interes	0	0	0	0
	30	Poco	4	22	0	0
		Normal	14	78	24	100
		Demasiado	0	0	0	0

C U A D R O 5.5

RESPUESTAS A, B, C, D, E, F, G DE LAS PREGUNTAS 10, 11, 12, 17, 19, 20, 28 DEL CUESTIONARIO FINAL

R	PRIMER GRUPO	SEGUNDO GRUPO
A:	- Las dudas que el estudiante trae, se aclaran - Ya se tiene una idea de Geometría	- Ya se trae conocimiento - Es facil de aprender - Se puede aprender sin ningún concepto de Geometría
B:	- La exposición se basaba sobre lo visto en actividades. - Todo está relacionado con la actividad anterior - Se habla sobre lo mismo que en la actividad	- Se trata de lo mismo - No hay nada nuevo
C:	- Ya se tiene nociones, ideas de lo que se ha trabajado en las actividades - A veces no se entiende la actividad - Se entiende con facilidad	- Cuando se realizan las actividades, esto es fácil - Se ha comprendido en las actividades. - Ya se tiene una idea.

<table>
<tr><th>P</th><th>PRIMER GRUPO</th><th>SEGUNDO GRUPO</th></tr>
<tr><td>D:</td><td>- Se aprende más por la mayor participación en las actividades
- En las actividades se equivoca mucho
- El trabajo es igual para todos
- Si se comete un error en la actividad, en la exposición se corrige
- Nos introduce la idea de lo que se verá en forma
- Hay mayor comunicación</td><td>- Sí hay duda, se consulta con facilidad
- Se piensa y con la orientación del Maestro, es fácil
- Se forma hábitos de trabajo en grupo, pero más individual
- Hay más participación
- Se aprende más rápido y se desarrolla el sentido común</td></tr>
<tr><td>E:</td><td>- En lo tradicional, la explicación no es suficiente
- La enseñanza por actividad, ayuda más
- Se da mayor participación y se ve lo fundamental</td><td>- Se explica bien después de las actividades
- Se aprende en grupos, hay más comunicación.</td></tr>
<tr><td>F:</td><td>- Todos somos capaces
- Todos la usamos en la vida</td><td>- La matemática es para todos</td></tr>
<tr><td>G:</td><td>- En todos encontré algo que me llamaba la atención.
- La actividad 1.6 y 1.7
- La de rotación de planos al ubicar un punto
- Todos por la variedad de actividades</td><td>- Todas porque son interesantes
- Las actividades 1.2 y 1.12
- La actividad sobre trazos de paralelas y perpendiculares
- La actividad sobre familias</td></tr>
</table>

C U A D R O 5.6

S U G E R E N C I A S

P	PRIMER GRUPO	SEGUNDO GRUPO
1	- El tiempo es muy poco y la actividad muy rápida - Para mi el tiempo es normal - Se debe dar el tiempo suficiente a cada actividad.	- El tiempo tiene que ser adecuado a cada actividad - Una actividad diaria, para comprenderla mejor - Muy poco tiempo se dá - Que se termine cada actividad empezada
2	- Debe conocer bien la materia y dar una buena explicación - Debe exigir, pero deber ser comunicativo - Debe tener mucha paciencia y ser buena persona.	- Debe ser un Profesor que explique bien - Que sea dinámico y que se le tenga confianza - Debe estar siempre atento al desarrollo de las actividades
3	- Es muy buena, el estudiante aprende más - Que se dé oportunidad de que cuando el estudiante, no entiende, se pregunte con facilidad. - Que auxilie individualmente sin interrumpir el desarrollo de la actividad	- Que se haga un resumen después que se desarrollen todas las actividades de cierta Unidad - Todo va de acuerdo a los objetivos - Es mejor para aprender - Es muy interesante

P	PRIMER GRUPO	SEGUNDO GRUPO
3	- Hay mayor atención y se mantiene el entusiasmo - Es interesante la enseñanza	
4	- Un poco defícil al principio, pero después se entendió - No hubo dificultad	- Que sea siempre un poco más difícil que lo normal - No era difícil - Normal, un poco confuso al principio
5	- Me gustaría participar en mas concursos similares - Que las actividades se realicen en grupos - Que se dé mayor orientación al principio.	- Que se dejen actividades exaula - Que dejen que el estudiante investigue por si solo - Al principio se confunde uno, debe de haber mayor ayuda

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

- El presente cuestionario tiene la finalidad de mejorar en lo posible los programas de Matemática a Nivel de Bachillerato, fundamentándose en los programas de Matemática a nivel Básico. Los datos que se obtengan en esta encuesta serán de carácter absolutamente confidencial y con fines de estudio.

- DATOS GENERALES:

1 Institución Educativa: Oficial Privada

2 Zona: Oriental Central Occidental

3 Fecha: Día ______________ mes ____________ año ________

4 Sexo: M F

- Le pido su valiosa colaboración contestando a las preguntas de éste cuestionario. La entrevista es anónima y no tiene que poner su nombre. Las preguntas son específicamente en la materia de Matemática.

1- Tiempo de trabajo en básica ___________ años.

2- Nivel de trabajo _______________ ciclo.

3- Termina su programa de Matemática? ______________.

4- Si su respuesta anterior es NO; hasta que área llega? _____

5- El Area: "Conozcamos cuerpos Geométricos" es indispensable - si ___ no ___ Por qué? ________________________________

6- Algunas sugerencias sobre los programas de Matemática?

____

Resultados de la encuesta realizada en los meses de septiembre y octubre del año 1985 a 60 Docentes.

- De los 60 Docentes, el 53% labora con la parte Oficial, - el resto en Instituciones privadas.
- El tiempo de trabajo en Básica, oscila de 15 a 33 años.
- Sobre el nivel de trabajo; el 42% lo hace en 1er. ciclo; 42% en 2do. ciclo y 16% en 3er. ciclo.
- El 32% dijo que terminaba el programa de Matemática; el - resto llegaba a la penúltima Area o empezaba la última Area.
- En la pregunta: el Area "conozcamos cuerpos Geométricos" es indispensable en la enseñanza de la Matemática?
  El 100% contesto que sí; razonando el por qué?, de la siguiente manera:
  * Conocer los elementos de geometría ayuda a desarrollar el pensamiento.
  * Los trazos de las distintas figuras ayuda al aspecto de órden, limpieza, precisión, etc.
  * Se distinguen la forma, el tamaño, y otros aspectos geométricos.
  * Desarrolla ciertas habilidades y destrezas en el estudiante.
  * Consideran que es básica para estudios superiores.
- Al final de la encuesta se piden algunas sugerencias sobre los programas, me limitaré a dar algunas más importan

tes para el tema:

* Hacer una mejor distribución de Areas.
* Eliminar el Area #1 y algunos contenidos considerados no adecuados al nivel, para poder enseñar Geometría.
* Que se enseñe Geometría integrada en las demás Areas.

5.4 CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

En el desarrollo del primer curso experimental (22 jóvenes) en diciembre de 1985, los resultados obtenidos fueron muy significativos y de enorme valor; de tal manera que con ciertos ajustes y revisión sobre las actividades a desarrollar, se llevó a cabo la realización del segundo curso experimental (24 jóvenes) en enero de 1986, sobre la misma unidad: SISTEMA DE COORDENADAS; y los resultados fueron mejores que en el primer grupo (diferentes estudiantes en cada grupo escogidos al azar)

5.4.1 Conclusiones:

a) Se logró desarrollar experimentalmente, a base de actividades, la Unidad I.
b) El Método es muy eficaz en la enseñanza de la Matemática.
c) El Método permite la máxima participación del estudiante
d) En términos generales, el curso tuvo enorme aceptación

5.4.2 Sugerencias:

a) Desarrollar las demas Unidades del presente trabajo, con estudiantes de primer año, para confirmar su validez, ya que no se pudo probar experimentalmente.

b) Continuar con esta Metodología para 2do. y 3er. Año de - Bachillerato, en la enseñanza de la Geometría (lo mismo a nivel Universitario).

c) Impulsar la enseñanza de la Matemática en forma integrada.

Finalmente queremos dejar constancia que la validez de esta Metodología, no tiene caracter generalizador; aun-- que la experiencia que se tuvo con la Unidad I, haya mostrado resultados satisfactorios.

B I B L I O G R A F I A

1. Frédérique Papy, Matemática Moderna. Tomo II. Editorial Universitaria de Buenos Aires. 1970.

2. C. Gautier, D. Gerll, G. Girard, C. Thircé et A. Warusfel, ALEPH, Algébre/Géométrie 2^{e} Act. Classiques Hachette, 79 Boulevard Saint Germaín, Paris.

3. Mina S. de Carakushansky, Guilherme de la Penha, Algebra Lineal. Junio de 1976.

4. Luis A. Santaló, Espacios Vectoriales y Geometría Analítica, Monografía Nº 2. Serie de Matemática. Organización de los Estados Americanos. Washington, D.C. 1974.

5. Manuel Alberto Yánez Doño, Estrategia Modular para la Enseñanza de la Matemática, Campinas, SP., Brasil. 1980.

6. UNESCO, Nuevas tendencias en la Enseñanza de la Matemática, Vol. III, preparado por la Comisión Internacional de Enseñanza de la Matemática, ICMI. 1973. París. Impreso en las Oficinas de la UNESCO, Montevideo.

7. Jean Dieudonné, Algébre Linéaire et Géométrie Elémentaire París (hermann)

A N E X O S

CONTENIDOS PROGRAMATICOS DE 1er. CICLO DE LA ULTIMA AREA DE MATEMATICA

1er. Grado Area #4: Conozcamos figuras y cuerpos Geométricos	2do. Grado Area #5: Conozcamos figuras y cuerpos Geométricos	3er. Grado Area #5: Conozcamos figuras y cuerpos Geométricos
Líneas Rectas y Curvas Segmentos de Rectas y Curvas Segmentos Paralelos y Perpendiculares Angulos: i) Concepto y Trazo ii) Igualdad y Desigualdad Paralelogramos (cuadrilatero) Triángulos, Círculos, Circunferencias La esfera, el cilindro, el cono.	Líneas: i) Curvas, rectas y quebradas. ii) Horizontales, verticales e inclinadas. Angulos Triángulos: i) Trazos ii) Clases de triángulos, Figuras de 4 lados (cuadrilatero, trapecio y trapezoide) Círculo: Construcción Sus elementos. La esfera, el cilindro, el cubo, el cono (Def. sencilla)	Trazos de rectas, curvas y quebradas. Elemento de un ángulo. Elemento de un triángulo. Cuadriláteros: i) El cuadrado ii) El rectángulo. Circunferencia y Círculo: i) Sus elementos ii) Mediatrices. El cilindro, el cono, la esfera, el cubo (volúmen) Relación entre el volúmen del cono y el cilindro.
Obetivos: Diferenciar líneas rectas de curvas Diferenciar líneas de segmentos. Combinar segmentos para armar figuras. Diferenciar figuras geométricas.	Objetivos: Capacitar para: Apreciar forma, tamaño y otras cualidades de figuras y cuerpos. Conocer líneas, ángulos, figuras y cuerpos geométricos. Desarrollar habilidades para: Distinguir y trazar rectas, Comparar longitudes, áreas y volúmenes.	Objetivos: Capacitar para: Apreciar Cualit. y cuantitativamente forma, tamaño, perímetro y volúmen. Comprobar apreciaciones. Desarrollar habilidades para: Distinguir y trazar diferentes clases de rectas, ángulos y figuras geométricas. Recolectar materiales Recortar, colorear y pegar.

CONTENIDOS PROGRAMATICOS DE 2° CICLO DE LA ULTIMA AREA DE MATEMATICA

4° Grado Area #6: Conozcamos Figuras y Cuerpos Geométricos	5° Grado Area # 6: Conozacamos Figuras y Cuerpos Geométricos	6° Grado Area # 6: Conozcamos Figuras y Cuerpos Geométricos
Líneas rectas y Segmentos de rectas: i) Líneas paralelas ii) Concurrentes iii) Perpendiculares Angulos: i) Elementos y Clases ii) Complementario y Suple mentario. Triángulos: i) Elementos y Clases Cuadriláteros: i) Elementos y cla-- ses: a) Paralelo b) Trapecio c) Trapezoide Perímetros y Areas de: i) Cuadra- dos. ii) Rectán- gulos iii) Triángu los.	Puntos, Rectas y Planos. Trazos de paralelos y perpendicula- res Congruencia de segmentos. Angulos, clases y medidas. Bizectriz de un ángulo Angulos congruentes. Clases de polígonos (dominio inte-- rior y exterior) Clases de triángulos (trazos) Trazos de cuadriláteros Elementos de Círculo y Circunferen cia. Perímetro y Areas de polígonos. El prisma y sus elementos Superficies del cubo y del paralele pipedo. Volúmen del cubo y del paralelepípe- do.	Determinación de Rectas y Planos. (intersección) Posición de Rectas y Planos. Angulos adyacentes (Trazos, com-- plemento y suplemento) Angulos opuestos por el vértice Polígonos regulares e irregulares (trazos) Areas de polígonos regulares. Longitud de la circunferencia. Area del círculo. Area y volúmen del prisma y cilin- dros. Area lateral y otal de la pirámide Volúmen de la pirámide Volúmen y área del cono. Area de la esfera. Poliedros regulares Interpretación de datos estadísti- ticos Gráficos estadísticos.
Objetivos: Capacitar para: Apreciar cuant. y Cualit. forma, ta maño, perímetro, áreas y volúmenes, Comprobar apreciaciones, * Desarrollar habilidades para: Distinguir construir diferentes - clases de ángulos, figuras y cuer pos Geom. Comprobar perímetros, áreas y vo- lúmenes.	Objetivos: Capacitar para: Lo mismo que 4° Grado. Desarrollar habilidad para: Hacer trazos y construcciones de line as, ángulos, polígonos y sólidos geo- metricos. Calcular perímetros, áreas y volúmenes	Objetivos: Los mismos del 5° Grado.

3er. CICLO: ULTIMA AREA DE MATEMATICA: CONTENIDOS

7° Grado Area # 5 Conozcamos Figuras Geométricas	8° Grado Area # 5: Conozcamos Figuras Geométricas	9° Grado Area # 5: Conozcamos Figuras Geométricas
El punto, la recta y el plano (semirecta, semiplano, rayo, segmento) Angulos: i) Determinar puntos y regiones ii) Comparación iii) Clases Polígonos: i) Triángulo (Const. y Clasif.) ii) Congruencia de triángulos iii) Propiedades que satsifacen los elementos de un triángulo iv) Relación de los lados de un triángulo. v) Teorema de Pitágoras vi) Relaciones trigonométricas vii) Construir polígonos. viii) Angulos internos de un polígono. - Error y precisión de las medidas. - Perímetros y Areas. - Angulos en el Círculos	- Poliedros: Características y Clases. - Volúmenes de sólidos (Areas, laterales y totales). i) Prisma y paralelepípedo - Area lateral, total y volúmen de: i) Cilindro ii) Cono iii) Pirámide iv) Tronco de la pirámide v) Tronco del cono - La esfera: Area y Volúmen.	- Interpretación de gráfica - Pendiente de una recta. - Gráfica de Ecuaciones.

NIVEL MEDIO: BACHILLERATO AREA DE GEOMETRIA: CONTENIDOS (MATEMATICA COMUN)

1er. Año Area #4: Geometría Analítica, Vectores	2º Año	3er. Año
- Geometría Analítica: i) Sistema de referencias en el plano ii) Distancia entre dos puntos. iii) Pendiente de un segmento. - Vectores: i) Definición. ii) Vectores de posición y libre iii) Suma y resta de vectores iv) Producto de un escalar por - un vector. v) Vectores: igualdad, nulo y opuesto.	Aplicación en el áres de Trigonometría.	- Geometría: i) Repaso de 1er. año iii) Ecuaciones de la - recta. iii) Ecuaciones de la - circunferencia. - Vectores: i) Repaso de 1er. Año.