UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

PROGRAMACION LINEAL: TEORIA Y APLICACION

FEBRERO DE 1969

Joaquín Eduardo Rodas Beltrán

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR

Dr. José María Méndez

SECRETARIO GENERAL

Dr. José Ricardo Martínez

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO

Ing. Guillermo Imery

SECRETARIO

Ing. Rodolfo Jenkins

DIRECTOR

ESCUELA INGENIERIA INDUSTRIAL

Ing. Carlos Alonsó Hernández

PROGRAMACION LINEAL

TEORIA Y APLICACION

ASESOR ACADEMICO	Ing. Ricardo Flores Cena
CONSULTOR	Ing. José Juan Interiano
CONSULTOR	Ing. Daniel Absalón Aguilar

JURADO DEL EXAMEN GENERAL DE GRADO

PRESIDENTE	Ing. Ricardo Flores Cena
PRIMER VOCAL	Ing. José Juan Interiano
SEGUNDO VOCAL	Ing. Daniel Absalón Aguilar

Al alcanzar un peldaño más en la meta deseada rindo un sincero reconocimiento

A DIOS TODOPODEROSO:

Por permitir mi superación

A MIS PADRES:

Joaquín Rodas Carrera y
Martha Beltrán de Rodas

Por el esfuerzo realizado

A MIS HERMANOS:

Selim Arturo
Gladys Elena
César Armando y
Martha Cecilia

Por su Apoyo Moral y amor fraternal

A MI NOVIA:

Cándida Elena Quezada

Por sus estímulos e incentivos

A MIS PROFESORES Y AMIGOS:

Por sus consejos y orientaciones

JOAQUIN EDUARDO RODAS.

INDICE

		Pag
I	INTRODUCCION	1
II	ELEMENTOS BASICOS	2
III	METODO GRAFICO	7
IV	METODO SIMPLEX	22
V	EL PROBLEMA DE TRANSPORTE	47
VI	EL PROBLEMA DE ASIGNACION	74
VII	EL PROBLEMA DUAL	85
VIII	PROGRAMACION LINEAL PARAMETRICA	90
IX	APLICACION PRACTICA - Problema de Mezcla para Fertilizantes. N.P.K....	100

INTRODUCCION

La programación lineal, consiste en modernas técnicas y procedimientos matemáticos para la optimización de funciones lineales. La base matemática para estos procedimientos data aproximadamente desde 1920 y no fue sino hasta en 1947 en que el Dr. George B. Dantzig hizo su primera publicación acerca del método Simplex y de ese tiempo para acá los progresos han ido sucediéndose rápidamente.

Las primeras aplicaciones de la programación lineal se realizaron en el campo militar y hoy en día tienen su mayor aplicación en el desarrollo de la industria, el comerción y aún en el ordenamiento de los hospitales de países desarrollados como los Estados Unidos. Este proyecto lleva como finalidad exponer las técnicas, desarrollar ejemplos teóricos y prácticos de tal manera que queden evidenciados la utilidad y el beneficio que puede traer a nuestras industrias y al desarrollo del país en general el conocimiento de estos procedimientos y de sus aplicaciones. Existen problemas de programación lineal (la mayoría de problemas de producción) en que se hace necesario el uso de computadores electrónicos, ya que de lo contrario resultaría demasiado trabajoso resolver un sistema de ecuaciones con 18 o más variables.

Es pues de gran valor para el desarrollo de la industria moderna el conocimiento de la programación lineal.

SECCION I

ELEMENTOS BASICOS

SECCION I

ELEMENTOS BASICOS

El problema básico de la programación lineal es propiamente el de minimizar o maximizar una función lineal de la forma.

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots\ldots + C_n X_n \text{ (función objetiva)}$$

Es claro que si nosotros asumimos que las variables tienen un valor dado, el problema se hace trivial ya que se convierte - una simple operación aritmética.

Si los valores que asumimos son positivos, la función será -- también positiva, y si los valores que asumimos son cada vez - más grandes, la función será cada vez mayor. Por el contrario si nosotros damos a las variables valores negativos la función será negativa; Pero poer ¿qué sucedería si X_1 representara por ejemplo el número de artículos de cierto tipo a elaborar por una - fábrica? Un valor de $-X_1$ significaría la destrucción de X_1 artículos, o la conversión de éstos en materia prima y mano de obra no utilizada, por tanto debemos asumir que:

$$X_j \geq 0 \text{ en donde } j = 1, 2, 3, \text{-----} n$$

En los problemas lineales existen restricciones que nos condicionan la función objetiva. Los tipos de restricciones con que tropezamos son ilustrados en los siguientes ejemplos:

a) $X_1 \leq 3$ Esto significa que X_1 es una variable pero condicionada a ciertos límites; para el caso X_1 puede tener valo~~x~~res entre cero y tres.

b) $X_1 \geq 3$ Esta restricción nos dice que X_1 es una variable que puede tomar cualquier valor, toda vez que éste no sea menor que 3.

c) $2X_1-4X_2+9X_3= 4$ Significa una restricción combinada de 3 variables, en la que a X_1 , X_2, X_3 se les permite tomar valores tales que multiplicados por sus coeficientes suman 4.

d) $X_1 - X_2 - X_3 \leq 5$ Significa que X_1, X_2, X_3 tendrán valores tales que sumados algebráicamente, se obtengan valores menores o iguales a 5.

e) $4X_1-X_2+6X_3 \geq 9$ Este se interpreta como el ejemplo anterior excepto que los valores obtenidos deben ser mayores o iguales a 9.

f) $X_1 = X_2$ Significa que para cualquier valor que tome X_1 tendremos un valor igual de X_2 y viceversa o sea que $X_1 - X_2 = 0$

g) $0 \leq X_1 \leq 50$ Esta restricción nos indica que X_1 puede tomar valores condicionales entre cero y 50 inclusive.

ECUACIONES SIMULTANEAS

El desarrollo de los problemas de programación lineal nos llevan a la resolución de ecuaciones lineales simultáneas. Estas ecuaciones son las restricciones de las variables.

Las restricciones pueden presentarse como igualdades y como desigualdades por ejemplo:

a) $K_1 X_1 + K_2 X_2 + K_3 X_3 \leq b$

donde K_1, K_2, K_3 son constantes. Este tipo de inecuación es convertido en ecuación, mediante la adición de una variable de holgura no negativa y la función queda:

$$K_1 X_1 + K_2 X_2 + K_3 X_3 + X_4 = b$$

La variable X_4 deberá asumir el valor necesario para que la ecuación sea satisfecha. Por ejemplo si $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ entonces X_4 será igual a b.

b) $K_1 X_1 + K_2 X_2 + K_3 X_3 \geq b$

Esta desigualdad puede convertirse en igualdad, sustrayendo una variable no negativa $K_1 X_1 + K_2 X_2 + K_3 X_3 - X_4 = b$

Por ejemplo

$$2 X_1 - X_2 + 2 X_3 \geq 15$$

se convierte en $2X_1 - X_2 + 2X_3 - X_4 = 15$

Si $X_1 = 3$, $X_2 = 5$ $X_3 = 15$ entonces $X_4 = 16$

Lo anterior está condicionado a la resolución por ecuaciones simultáneas; más adelante introduciremos lo que llamaremos variables artificiales.

Para la resolución de ecuaciones lineales simultáneas es aplicable la teoría de las matrices.

Si por ejemplo tenemos el sistema.

$$\begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 &= b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 &= b_2 \\ a_{31} X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Las incógnitas a encontrar son (X_1), (X_2) y (X_3)

Llamemos A a la matriz de los coeficientes

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{Sea } X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad \text{Llamemos } b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Operamos de la siguiente manera:

$AX=b$ (realizando la multiplicación matricial se comprueba)

$A^{-1}AX = A^{-1}b$ (una matriz multiplicada por su inversa es igual a su matriz identidad)

$IX= A^{-1}b$ (llamemos I a la matriz Identidad).

$X= A^{-1}b$ (Una matriz multiplicada por su Identidad da por resultado ella misma).

De aquí podemos encontrar las incógnitas X_1, X_2, X_3 por el teorema que dice: Si dos matrices son iguales sus términos correspondientes en fila y columna son iguales.

<u>EJEMPLO</u>

Resolver
$$3X_1 + X_2 = 2$$
$$2X_1 + 3X_2 = 1$$

Sea $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ $\quad b=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$X= A^{-1}b$$

a) Encontramos la matriz cofactor $\overline{A} = \begin{matrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{matrix}$

b) Econtramos la matriz adjunta que es la transpuesta de la matriz cofactor, o sea $\overline{A}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

c) Hallar el valor del determinante A

$$|A| = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 3x3 - 2x1 = 9-2 = 7$$ Det

$$A^{-1} = \frac{A^{-T}}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}{7}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & -1/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

Recordando la fórmula $X = A^{-1}b$

Sustituyendo $\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 3/7 & -1/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Realizada la multiplicación queda

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/7 \\ -1/7 \end{bmatrix}$$

Por tanto $X_1 = 5/7$

$X_2 = -1/7$

METODO GRAFICO

Conceptos Básicos

El método gráfico para la resolución de problemas de programación lineal es de gran valor únicamente cuando éstos tienen a lo sumo dos variables.

Antes de entrar en el procedimiento a seguir para la solución de estos problemas es necesario exponer un poco acerca de la representación e interpretación gráfica de las ecuaciones e inecuaciones.

Las ecuaciones lineales como ya se expuso anteriormente son del tipo: $Ax + By = C$

Las inecuaciones correspondientes a este tipo son:

$Ax + By > C$ (semiplano abierto)

$Ax + By < C$ (semiplano abierto)

$Ax + By \geq C$ (semiplano cerrado)

$Ax + By \leq C$ (semiplano cerrado)

Gráficamente y por ejemplos se explicarán las condiciones de semiplano abierto y semiplano cerrado.

Ejemplo:

Si tenemos la inecuación $4X + 3Y > 12$ y queremos graficarla, seguimos el siguiente procedimiento: hacemos de la desigualdad una igualdad y luego encontramos los interceptos de la recta

$$4X + 3Y = 12$$

Si $X = 0$		Si $Y = 0$
$0 + 3Y = 12$		$4X + 0 = 12$
$Y = 12/3$	$Y = 12$	$4X = 12$
$Y = 4$	$Y = 12/3$	$X = 12/4$
	$Y = 4$	$X = 3$

De donde, el intercepto en el eje de las Y-Y está determinado por el punto (0.4) y el intercepto en el eje X-X está determinado por el punto (3.0).

Con los puntos de intersección graficamos

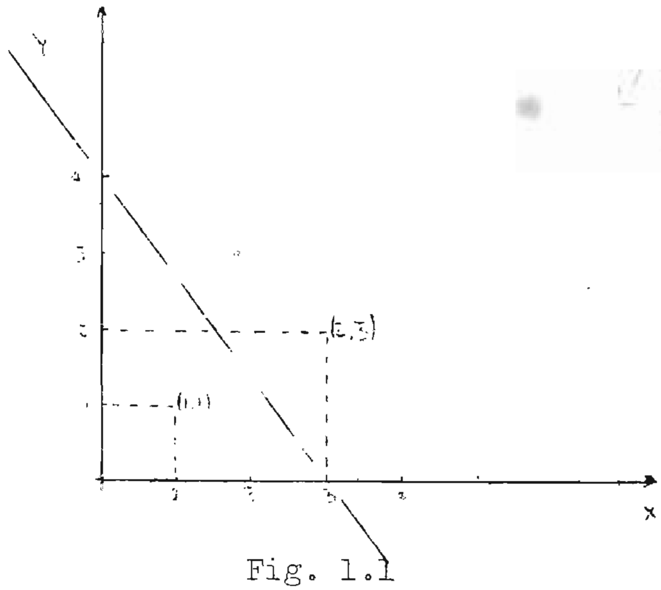

Fig. 1.1

En la gráfica puede verse que el punto (1.1) está por debajo de la línea seccionada (que se ha trazado así para indicar - que sus puntos no satisfacen la inecuación), y el punto (2,3) está sobre esta línea. Por la regla de prueba y error demostraremos que los puntos que están bajo la línea seccionada, ni los puntos contenidos en ella satisfacen la inecuación, sino únicamente los que están por encima de ella.

Sustituyendo el punto (1,1).

$$4X + 3Y \geq 12$$

$$4\,(1) + 3\,(1) > 12$$

$$4 + 3 > 12$$

$7 \not> 12$ Siete no es mayor que doce por tanto el punto (1,1) no satisface la inecuación.

Sustituyendo el punto (2,3)

$$4(2) + 3(3) > 12$$

$$8 + 9 > 12$$

$17 > 12$ diecisiete sí es mayor que doce, entonces satisface la inecuación.

Concluyendo: Se le llama semiplano abierto, porque los puntos de la recta (la ecuación) no satisfacen la inecuación.

Ejemplo: Gráfico de semiplano abierto:

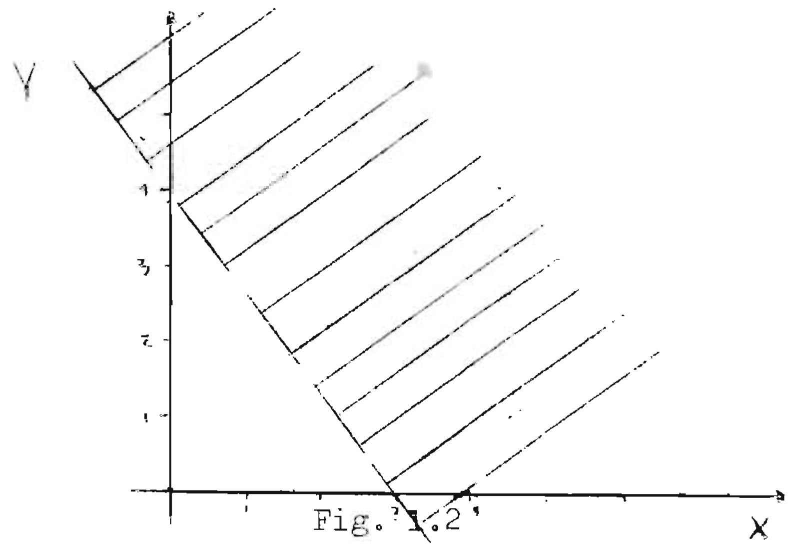

Fig. 1.2

Si la inecuación del ejemplo anterior hubiera sido $4X + 3Y \geq 12$ este tipo de inecuación es un poco más amplia e incluye a los valores de la recta (la ecuación) como satisfactorios para ella. En este caso la gráfica quedaría:

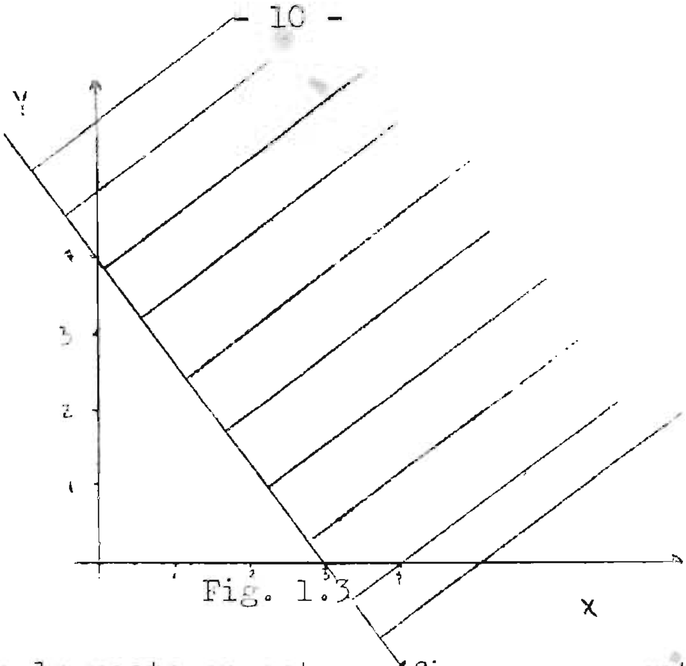

Fig. 1.3

Nótese que la recta en esta gráfica no va punteada, sino llena; es entonces la gráfica de un semiplano cerrado.

Así como existen las ecuaciones simultáneas, hay también las inecuaciones simultáneas, que tiene su solución en el conjunto de puntos que satisfacen a todas las inecuaciones incluídas. O bien que están incluídas en un determinado conjunto convexo-poligonal, que no es más que la intersección de varios semiplanos.

Ejemplos:

1) $2X + 3Y \geq 6$

2) $-X + Y \leq 2$

3) $X + Y \leq 3$

Atendiendo al sistema de hacer ecuaciones, las inecuaciones y hallar los interceptos, grafiquemos:

1) $2X + 3Y \geq 6$	2) $-X + Y \leq 2$	3) $X + Y \leq 3$
$2X + 3Y = 6$	$-X + Y = 2$	$X + Y = 3$
Si $X = 0$	Si $X = 0$	Si $X = 0$
$Y = 2$	$Y = 2$	$Y = 3$
Si $Y = 0$	Si $Y = 0$	Si $Y = 0$
$X = 3$	$X = 2$	$X = 3$

de (1)

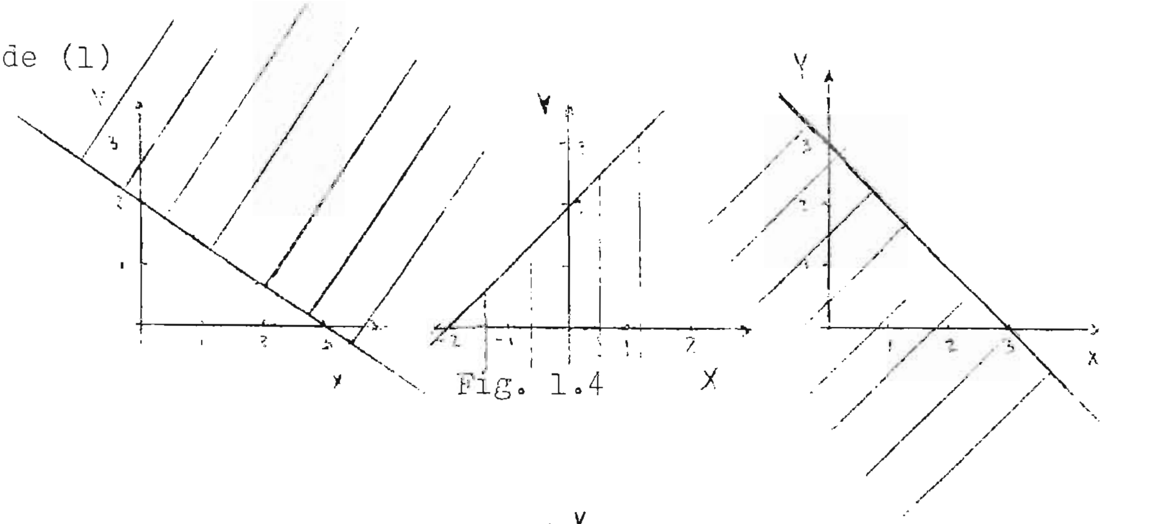

Fig. 1.4

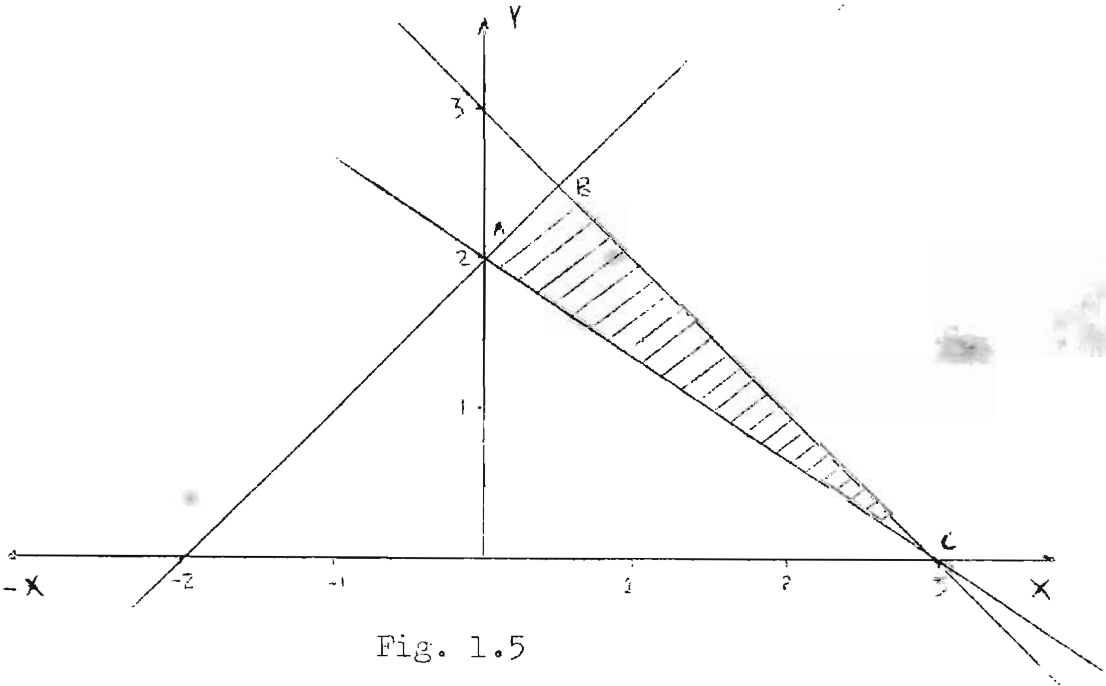

Fig. 1.5

La solución al sistema de inecuaciones está dada por los puntos dentro del conjunto, poligonal convexo ABC de la gráfica.

Explicación del Método

Los pasos a seguir para la resolución de problemas lineales por el método gráfico son los siguientes:

1) Lectura y análisis del problema
2) Planteo de las ecuaciones lineales (restricciones) que nos condicionan al problema de acuerdo a los resultados que --

pretendamos obtener y la disposición de los elementos con que contemos para obtenerlos (análisis de recursos y disposiciones).

3) Plantear la función objetiva con base a las mismas variables incluídas en el numeral anterior. Llamaremos Z a esta función la cual trataremos de maximizar o minimizar según el caso.

4) Plotear cada una de las inecuaciones, en ejes de coordenadas. Todas las ecuaciones ya graficadas determinarán un área que llamaremos polígono de soluciones factibles. Los puntos contenidos en este polígono satisfarán las restricciones y los vértices de éste nos darán lo que más adelante conoceremos con el nombre de soluciones básicas. Una de esas soluciones básicas será la solución óptima.

5) Para determinar cuál vértice es el que nos da la solución óptima determinamos la familia de rectas de la función objetiva de la siguiente manera:

Si la función objetiva es:

$$Z = 2X_1 + 3X_2$$

La ecuación de la recta es: $Y = a + mx$.

Determinamos la pendiente de la siguiente manera:

$$3X_2 = Z - 2X_1 \qquad \text{Sea } X_1 = X$$

$$Y = X_2$$

$$X_2 = Z/3 \; -2/3 \; X_1$$

de donde la pendiente es de $-2/3$

Luego sobre el Polígono de soluciones factibles trazamos una -

recta con pendiente -2/3.

Si la solución que buscamos es un máximo, éste estará en el - vértice más alejado del origen; si es un ~~máximo~~ Mínimo estará dado - por el vértice más cercano al origen, siempre que no sea el - mismo.

Más adelante con la resolución de ejemplos por el método gráfico y la explicación del modelo analítico del Simplex, observaremos las ventajas que tienen el método gráfico para problenas de dos variables y las ventajas del método Simplex para - problemas de 3 ó más variables.

Por medio de ejemplos desarrollaremos el proceso para la obtención de máximos y mínimos, por el método de gráficos.

Es conveniente, por razones de órden y para tener un conocimiento global y relacionado de los datos del problema, hacer antes de plantear las restricciones, un cuadro de recursos y disponibilidades.

Ejemplo de Maximización.

Una compañía fabrica dos clases de cinturones de piel. El cinturón A es de alta calidad y el B es de baja calidad. La ganancia respectiva por cinturón es de ₡0.40 y ₡0.30. Cada cinturón del Tipo A requiere el doble del tiempo que que usa el del tipo B, y si todos los cinturones fueran del tipo B, la - compañía podría fabricar 1000 al día. El abastecimiento de -- piel es suficiente únicamente para 800 cinturones diarios (A y B combinados). El cinturón A requiere una hebilla elegante, de las que solamente se dispone de 400 diarias. Se tienen únicamente 700 hebillas al día para el cinturón B. ¿Cuántos cinchos del Tipo A y del ti o B deberán fabricarse diariamente para obtener ganancias óptimas?

Llamemos X_1 al número de cinchos tipo A fabricados diariamente.
X_2 al número de cinchos tipo B fabricados diariamente.

El cuadro de recursos y disponibilidades queda como sigue:

	X_1 Cincho A	X_2 Cincho B	Disponibilidad de recursos
Hebilla elegante	1	0	400
Hebilla corriente	0	1	700
Piel	1	1	800
Tiempo	2	1	1000
Ganancias	0.40	0.30	

Tabla 1-4.

Las restricciones quedan como sigue:

1) $X_1 \leq 400$

Para fabricar un cincho tipo A necesitamos una hebilla elegante, pero para fabricar X_1 cinchos tipo A necesitamos X_1 hebillas, pero este número no puede ser mayor que 400 ya que únicamente contamos con 400 hebillas de este tipo, o sea que X_1 puede ser menor, incluso igual, pero no mayor que 400.

2) $X_2 \leq 700$ se interpreta de igual manera

3) $X_1 + X_2 \leq 800$. La proveedora de piel únicamente nos puede proporcionar a lo sumo 800 tiras para cincho (de A y B combinados)

4) $2X_1 + X_2 \leq 1000$. Cada vez que gastamos una unidad de tiempo en hacer un cincho B, gastamos 2 unidades en hacer un cincho A.

5) Además las restricciones

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

Lo que indica que el número de cinchos de A ó B no puede ser negativo, porque no podemos destruir cinchos ya fabricados y obtener la materia prima y los gastos en que se ha incurrido para fabricarlos.

6) La función objetiva está dada por:

$$Z \text{ max. } 0.40\ X_1 + 0.30\ X_2$$

La ganancia total será lo que ganamos por cada cincho A multiplicado por el número de cinchos de este tipo (X_1) más lo que ganamos por cada cincho B multiplicado por el número de cinchos tipo B que se fabrican (X_2).

1) $X_1 = 400$	4) $2X_1 + X_2 = 1000$
2) $X_2 = 700$	5) $X_1 = 0$
3) $X_1 + X_2 = 800$	6) $X_2 = 0$

Graficando:

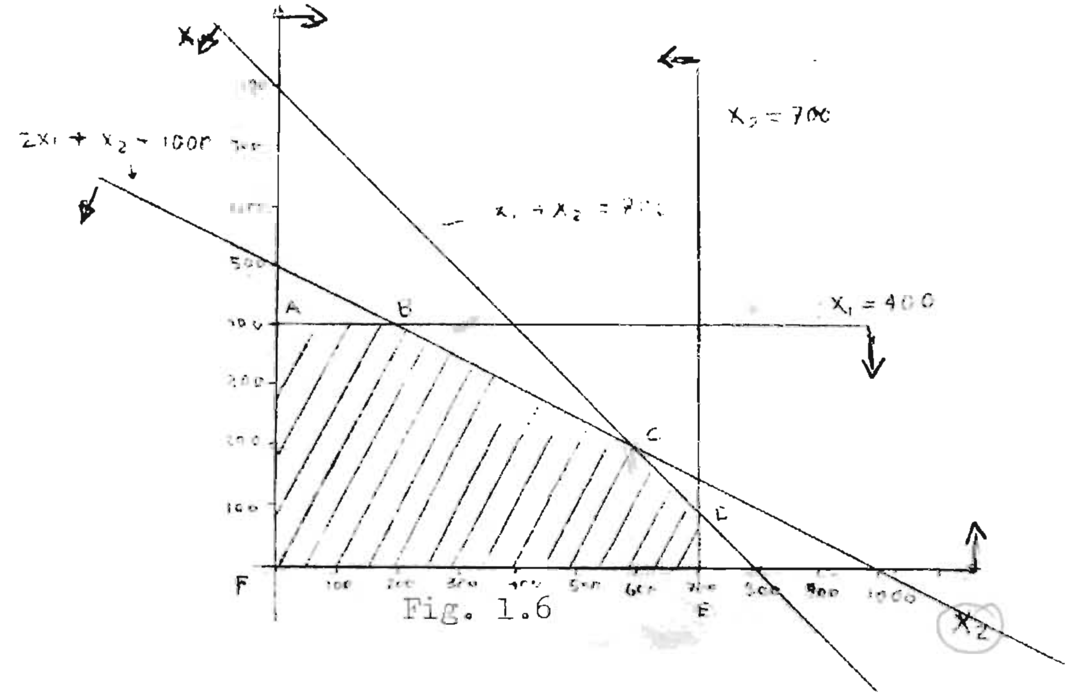

Fig. 1.6

NOTA: Se tomó X_1 en el eje vertical y X_2 en el horizontal (se acostumbra al inverso) con el objeto de hacer notar que es posible resolver el problema con cualquier ordenamiento de ejes.

Interceptos

Para 3)

$$X_1 + X_2 = 800$$

Si $X_1 = 0$
$X_2 = 800$

Si $X_2 = 0$
$X_1 = 800$

Para 4)

$$2X_1 + X_2 = 1000$$

Si $X_1 = 0$
$X_2 = 1000$

Si $X_2 = 0$
$X_1 = 500$

Trabajando con la función objetiva

$$Z = 0.4X_1 + 0.3X_2$$

Encontramos la pendiente

$$0.4X_1 = Z - 0.3X_2$$

$$X_1' = \frac{Z}{0.4} - \frac{0.3X_2}{0.4}$$

El polígono de soluciones factibles está determinado por los puntos A,B,C,D,E y F.

Al desplazar la recta de la función objetiva (con pendiente m= -3/4) resulta que es el punto C el último que toca, sin tocar a ninguno más (se cumple, que todos los puntos del área de soluciones factibles están bajo la función objetiva) proyectando hacia los ejes obtendremos las coordenadas punto C, - X_1=200 y X_2= 600, de donde el número de cinchos que debemos - producir para obtener ganancias óptimas es 200 del tipo A y -

6CC del tipo B.

Las ganancias máximas serán

$Z = 0.4 \times 200 + C.3 \times 6CC$

$Z = 80 + 180$

$Z = ¢\ 260$

Todos los demás puntos darán soluciones con menores ganancias.

<u>Comprobación analítica</u>

Se dijo anteriormente que únicamente los vértices del polígono dan soluciones básicas, sustituyendo estos puntos en la función objetiva demostraremos que el punto C es el que dá mayores ganancias.

1) Sustituyendo A; ($X_1 = 400$; $X_2 = 0$)

$$Z_A = C.4 \times 400 + 0.3 \times 0 =$$

$$Z_A = = 16C + C$$

$$16C < 260$$

2) Sustituyendo B; ($X_1 = 400$) ($X_2 = 200$)

$$Z_B = C.4 \times 400 + 0.3 \times 200$$

$$Z_B = 160 + 60$$

$$Z_B = 220 < 260$$

3) Sustituyendo D; ($X_1 = 100$) ($X_2 = 700$)

$$Z_D = C.4 \times 100 + 0.3 \times 700 = 0$$

$$Z_D = 250 < 260$$

4) Sustituyendo E; ($X_1 = 0$) ($X_2 = 700$)

$$Z_E = 200 < 260$$

5) Sustituyendo F; $Z_F = 0$ ya que este punto está en el origen

Ejemplo de Minimización

1) Una compañía tiene dos tipos de inspectores: Clase I y Clase II, dependiendo de la rapidez y exactitud del inspector. El inspector de la Clase I revisa 15 piezas por hora y el de la Clase II 20 piezas por hora. Se deben revisar 1600 piezas como mo mínimo diariamente. Si solamente disponemos de 8 inspectores de la Clase I y 10 inspectores de la Clase II como máximo. La tarifa de los inspectores de Clase I es de ₡2.00 por hora y la Clase II gana ₡ 1.75 hora. El trabajador de la Clase I - trabaja con una exactitud del 98% y el de Clase II tiene una - exactitud del 95%. Cada error de inspección cuesta ₡ 1.00. --- ¿Cuál debe ser el número de trabajadores de la Clase I y Clase II para minimizar los costos y cumplir los requisitos de ins-- pección.?

Cuadro de Recursos y disponibilidades

Tabla 1-2

Restricciones	Trabaj. Clase I	Trabaj. Clase II	Disponibilidad
Nº diario de piezas revisadas	120	160	1600
Límite en disposición Inspec.Clase I	1		8
Límite en disposición Inspec.Clase II		1	10
Costos diarios	2x8+2.4x1	1.75x8+ 1x8	Mínimo

El cuadro quedará explicado con el desarrollo del problema

- Un trabajadro de Clase I revisa 15 x 8 = 120 piezas diarias con un 98% de eficiencia, por lo tanto en 120 piezas dia--- rias yerra en 2.4.

- Un trabajador de Clase II revisa 20 x 8 = 160 piezas diarias con el 95% de eficiencia, por lo tanto en 160 piezas - yerra 8 piezas.
- Sean X_1 los trabajadores de Clase I

  X_2 " " " " II

La restricción de que se deben revisar como mínimo 1600 piezas se expresará:

$$120\ X_1 + 160\ X_2 \geq 1600$$

y las restricciones de que el máximo de trabajadores de la Clase I es 8 y de Clase II es 10 se expresan como

$$X_1 \leq 8$$
$$X_2 \leq 10$$

Si cada pieza mal revisada cuenta ₡ 1.00 y el salario por cada trabajador son ₡ 2.00 y ₡ 1.75 para la Clase I y II, esta condición diariamente nos representará

$Z = (₡2.00 \times 8 + 1.00 \times 2.4)\ X_1 + (₡1.75 \times 8 + ₡1.00 \times 8)\ X_2$ que es la función que nos interesa minimizar, resumiendo:

Hallar

$$Z\ min = (16 + 2.4)\ X_1 + (14.00 + 8)\ X_2 = 18.4\ X_1 + 22\ X_2$$

sujeto a:

$$120\ X_1 + 160\ X_2 \geq 1600$$
$$X_1 \leq 8$$
$$X_2 \leq 10$$

y $X_1 \geq 0$ y $X_2 \geq 0$

Graficando las restricciones tenemos:

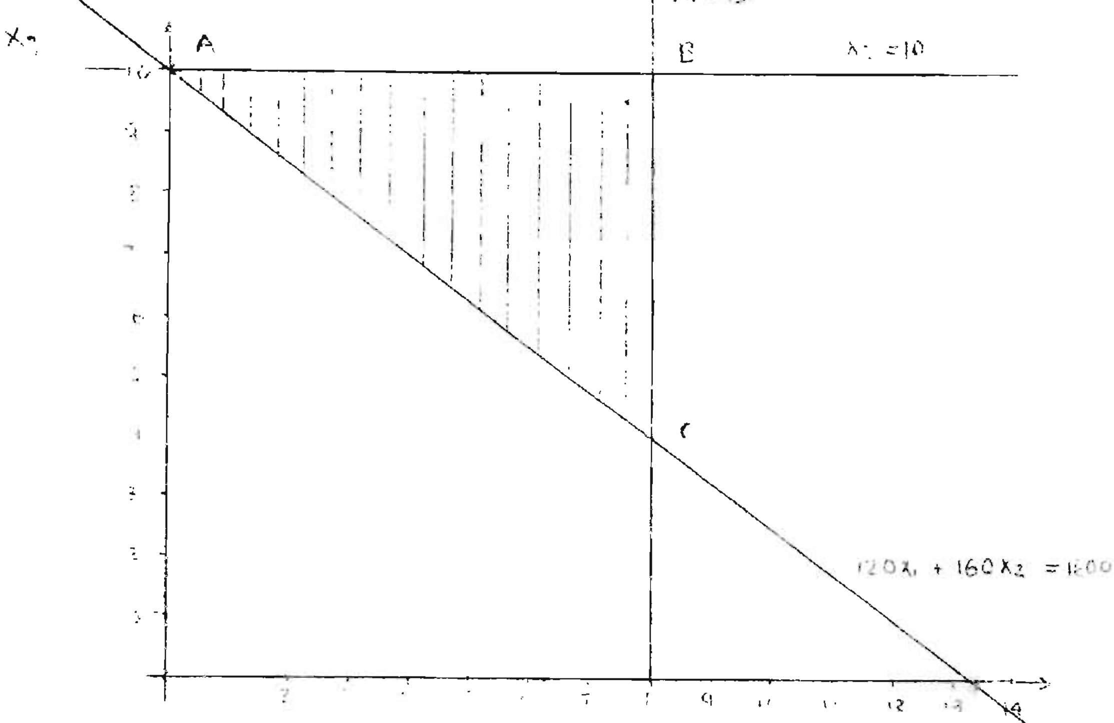

Fig. 1.7

Por lo tanto el conjunto convexo poligonal cerrado ABC es el área de solución factible del problema.

Grafiquemos la función objetiva; recordando que una línea recta tiene como ecuación Y= a + mx, encontremos m= pendiente de dicha función así:

$$22X_2 = Z - 18.4X_1$$

$$X_2 = Z/22 - \frac{18.4}{22}X_1$$

La pendiente es entonces negativa: $-\frac{18.4}{22}$

Como el objeto del problema es minimizar la función Costos, el área de solución factible estará dada sobre la función objetiva. Graficando la función objetiva Z=18.4X + 22X_2, ó lo que es igual $X_2 = \frac{Z}{22} - 18.4\ X_1$ o sea graficar una recta con su pendiente negativa y desplazarla hasta el punto del polígono A,B,C en que todo ésto quede sobre la recta de la Función Objetiva.

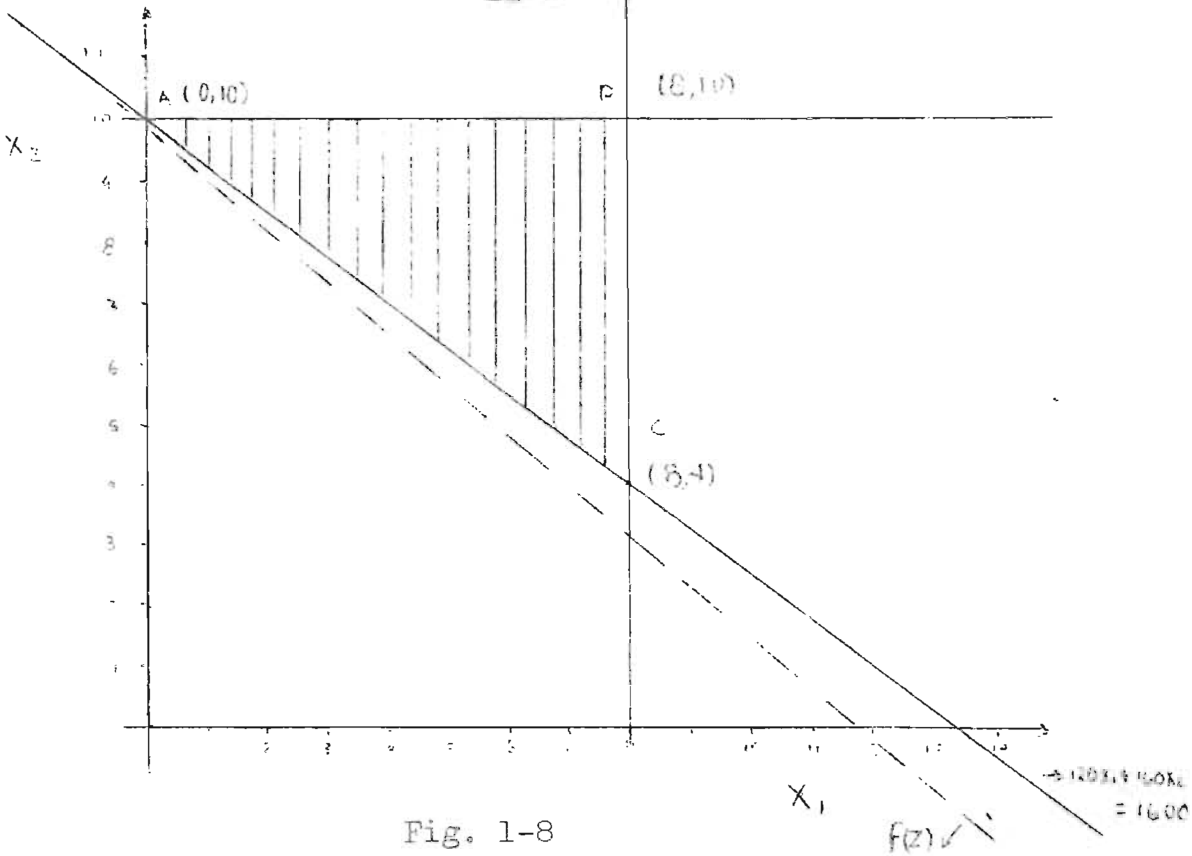

Fig. 1-8

Desplazando F(Z), solo cuando pasa por (A), tiene toda el área de solución factible sobre ella. Entonces el punto (A)= (0.10) da los costos mínimos.

Comprobando a) sustituyendo (A) = (0.10)

$Z= 18.4X_1 + 22X_2$

$Z= 0 + 22 \times 10 = 220$

b) sustituyendo (C) = (8.4)

$Z= 18.4 \times 8 + 22 \times 4$

$= 14.92 + 88 = 237.2$

c) sustituyendo (B) = (8.10)

$Z= 18.4 \times 8 + 22 \times 10$

$Z= =47.2 + 220 = 367.2$

Por tanto (A) dá el mínimo

SECCION II

METODO SIMPLEX

METODO SIMPLEX

Algoritmo

Desarrollamos el algoritmo del método Simplex para resolver un problema de maximización; en exposiciones posteriores se harán las consideraciones necesarias para aplicarlo a otros tipos de problemas.

Propiedades de la Solución

En general los problemas de programación lineal se presentan como sigue: Encontrar los valores de X_1, X_2, $X_3 \ldots X_n$ que satisfagan las siguientes restricciones:

1) $a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots\ldots + a_{1n} X_n = b_1$

$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots\ldots + a_{2n} X_n = b_2$

$a_{n1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots\ldots + a_{mn} X_n = bm.$

2) y que maximize

$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots\ldots + Cn\ Xn$

3) y que además las variables $X_j \geq 0$ $(J=1,2,3, \ldots n)$

o lo que es lo mismo

4) $AX=b$

5) $Z= CX$

$X \geq 0$

En los numerales 1 y 4 debemos hacer las siguientes suposiciones:

1) Las restricciones que eran inecuaciones han sido ya convertidas en ecuaciones mediante la adición o sustracción de variables de holgura.

¿?

2) Todos los $bi \geq 0$ lo cual ya ha requerido la transformación correspondiente si fuere necesario (multiplicar por -1 toda la ecuación).

Para la comprensión del procedimiento del Simplex es necesario establecer ciertas definiciones:

Definiciones Básicas

1) Una solución posible del problema de la programación lineal es un vector $\bar{X} = (X_1 , X_2, X_3 \ldots X_n)$ en el cual debe satisfacer a las restricciones, y la condición de no negatividad $X_j \geq 0$.

2) Una solución posible básica es una solución posible con no más de mX_i positivas (siendo m el número de restricciones).

3) Una solución posible básica no degenerada es una solución posible con exactamente m X_i positivas.

4) Una solución posible óptima es una solución posible que maximiza o minimiza la función objetiva.

5) En un espacio vectorial K decimos que vectores son linealmente independientes si la única combinación lineal $\sum_{i=1}^{r} \alpha i\ Xi$ que esta sea igual vector nulo, es que todos los i sean igual a cero.

6) Conjunto Convexo: un conjunto convexo K es convexo si para cualquier combinación de dos de sus puntos X_1, X_2, el segmento de línea que une a estos dos puntos está totalmente incluído en el conjunto. Lo anterior significa que si X_1, X_2 son CK - (subconjuntos de K) todos los puntos de $K = \lambda X_2 + (1-\lambda) X_1$ $0 \leq \lambda \leq 1$ (combinación convexa) deberán estar dentro del conjunto.

La expresión matemática anterior condicionada en esos límites expresa todos los puntos del segmento que une a los puntos X_1 y X_2 ya que por definición la suma de los coeficientes de cualquier combinación de elementos de un conjunto convexo debe ser igual a 1.

Ejemplo (gráfico) del Conjunto Convexo.

Fig. 2-1

Ejemplo gráfico de Conjunto no Convexo

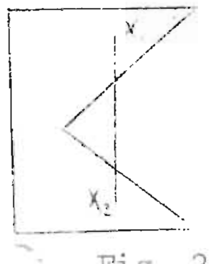

Fig. 2-2

7) Punto Extremo: Un punto X es punto extremo de un conjunto convexo si y sólo si, no existe una combinación de puntos cualesquiera de X_1, X_2 ($X_1 \neq X_2$) tal que $\overline{X} = (1-\lambda)\, X_1 + \lambda X_2$ $0<\lambda<1$.

La expresión indica que un punto extremo no puede estar "en--tre" otros dos puntos cualesquiera del conjunto

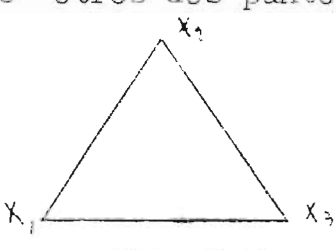

Fig. 2-3

X_1, X_2, X_3 son Puntos Extremos

X_4 no es punto extremo

8) Una combinación convexa es una combinación tal que la suma de los coeficientes de los elementos combinados resulte igual a 1.

Tal es $\alpha_1 \bar{X}_1 + \alpha_2 \bar{X}_2 + \alpha_3 \bar{X}_3$ ------ $\alpha_n X_n$

tal que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

Teoremas Básicos

Teorema 1). El conjunto de todas las soluciones posibles al -- problema de programación lineal es un conjunto convexo.

Demostración. Para la demostración supondremos que tenemos dos soluciones cualesquiera de un problema lineal y haremos con e- llas una combinación convexa, y esta combinación deberá ser -- también una solución posible. Supongamos que las soluciones son:

$$A\ (X_1) = b$$

$$A\ (X_2) = b$$

S= es la matriz de los coeficientes

X_1 puede ser $X_1 = (X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots . X_n)$

X_2 " " $X_2 = (X'_1\ ,\ X'_2,\ X'_3\ \ldots . x'_n)$

Se supone la no negatividad de las soluciones

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

Haciendo una combinación convexa con los dos vectores y llamando X a la combinación resulta: $X = \alpha X_1 + (1-\alpha)\ X_2,\quad 0 \leq \alpha \leq 1$

multiplicando a ambos miembros por la matriz coeficientes

$$AX = A\left[\alpha X_1 + (1-\alpha)\ X_2\right]$$

$$AX = \alpha AX_1 + (1-\alpha)\ AX_2$$

$$AX = \alpha AX_1 + AX_2 - \alpha AX_2$$

pero $AX_1 = b$

y $AX_2 = b$

$$AX = b + b - b$$
$$AX = b$$

La combinación multiplicada por la matriz coeficiente resulta ser también una solución posible, por tanto el conjunto de soluciones es un conjunto convexo.

<u>Teorema 2</u> La función objetiva, presenta su punto óptimo (máximo ó mínimo) en un punto extremo del conjunto convexo formado por las soluciones posibles (llamémoslo K) Si alcanza el óptimo es más de un punto extremo, entonces toma el mismo valor óptimo, para toda combinación convexa de todos esos puntos.

<u>Demostración</u> . El conjunto convexo K tiene un número finito de puntos extremos. Puede representarse como aparece en la figura

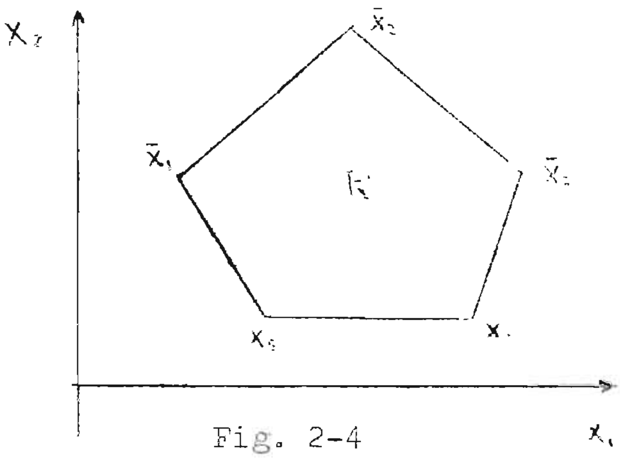

Fig. 2-4

La demostración se hará para un mínimo:

Los puntos $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{X}_3$, $\bar{X}_4$, ...$\bar{X}_p$ son puntos extremos.

Llamemos X_0 a la solución mínima posible, de donde

$F\,\bar{X}o \quad F\bar{X} \leq$ Cualquier combinación de los elementos de $\bar{X}o$ deberá ser menor que cualquier combinación de cualquier otro punto.

Partamos del supuesto que $\bar{X}o$ no es punto extremo y que es la solución mínima (ver gráfico; 2-4)

Representemos $\bar{X}o$ como una combinación convexa de los puntos extremos de K.

$$Xo = \sum_{i=1}^{p} \alpha i\, \bar{X}_i \quad \text{para } \alpha i \geq 0 \quad y \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha i = 1$$

1) desarrollando Xo como una función lineal

$$F(\bar{X}o) = F \sum_{i=1}^{p} \alpha i\ \bar{X}_i$$

$$F(\bar{X}o) = F(\alpha_1\ \bar{X}_1 + \alpha_2\, \bar{X}_2 + \alpha_3 \bar{X}_3 \ \ldots\ldots + \alpha_p\, \bar{X}_p).$$

Llamaremos m (mínimo) a esta función por que para cualquier - combinación de α_i X_i no disminuirá el valor de ella.

$$m = \alpha_1 F\bar{X}_1 + \alpha_2\ F\bar{X}_2 + \ \ldots\ldots + \alpha_p F\bar{X}_p = m.$$

Dado que los vectores Xi son linealmente independientes.
Y forman un conjunto convexo $\alpha_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{p} \alpha i = 1$

Supongamos ahora $F(\bar{X}m)$ es la mínima $F\bar{X}i$ y sustituyamos los valores en la $F(\bar{X}o) = m$, entonces el valor $F(\bar{X}o)$ disminuirá si esta no es mínima, pero: $F(\bar{X}o) \leq F\bar{X}$ para todas las X del conjunto, entonces si $F(\bar{X}o)$ es mínima tendrá que resultar $F(\bar{X}o) = (\bar{X}m) = m$. Luego siempre hay un punto extremo $\bar{X}m$ donde la función objetiva tiene su mínimo valor.

<u>Probando la Segunda parte del teorema</u>

Supongamos que $F(\bar{X})$ es mínima en más de un punto extremo, por ejemplo X_1, X_2, $\ldots\ldots X_q$ en este caso: $F(\bar{X}_1) = F\bar{X}_2 = F(\bar{X}_3)\ldots\ldots$

$F(\overline{X}_q) = m$

Si un X cualquiera es combinación de las demás Xi puntos extremos tendremos: $X = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \overline{X}_i$

para $\alpha_i \geq 0$ y $\sum_{i=1} \alpha_i = 1$

entonces $F(X) = F(\alpha_1 \overline{X}_1 + \alpha_2 \overline{X}_2 + \ldots\ldots + \alpha_q \overline{X}_q)$

$$F(X) = \alpha_1 F(\overline{X}_1) + \alpha_2 F(\overline{X}_2) + \ldots\ldots + \alpha_q F\overline{X}_q$$

pero $F(\overline{X}_1) = F(\overline{X}_2) = F(\overline{X}_3) \ldots\ldots = F(\overline{X}_q) = m$

$$F(X) = m(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots \alpha_q)$$

Pero además $FX = \sum_{i=1} m\alpha_i$

$$\sum_{i=1} \alpha_i = 1 \quad \text{(por ser combinación convexa)}$$

Por tanto $F(X) = m$

Entonces la combinación convexa de todos los puntos extremos que presentan solución mínima es también una solución mínima en cualquier punto (X) de la combinación.

Teorema Si $X = (X_1\ X_2, X_3 \ldots X_n)$ es un punto extremo del conjunto convexo de soluciones (K) entonces los vectores asociados de las X positivas, forman un conjunto linealmente independiente. De aquí que al menos, m de las X_i son positivas: (m igual numero de ecuaciones lineales).

Demostración.

Supongamos los primeros K coeficientes diferentes de cero, en tal forma que:

$$\sum_{i=1}^{K} X_i P_i = P_o$$

La prueba será por contradicción.

Sean P_1, P_2 , ...P_k linealmente dependientes, si estos vectores son linealmente dependientes, podemos hacer con ellos una combinación lineal igual a cero (definición de dependencia lineal)

Sea d_i la variable

$$d_1 P_1 + d_2 P_2 + \ldots + d_k P_k = 0 \qquad (1)$$

Por la definición de dependencia lineal al menos una d_i no es igual a cero.

Desarrollando $\sum_{i=1}^{k} X_i P_i = Po$

Tenemos $X_1 P_1 + X_2 P_2 + X_3 P_3 + \ldots X_k P_k = Po \qquad (2)$

Supongamos una $d > 0$, multipliquémosla por (1), sumémosla y restémosla de (2) y obtengamos dos ecuaciones.

$$\sum_{i=1}^{k} Xi\ Pi + d \sum_{i=1}^{k} di\ Pi = Po \text{ (Solución } X_1)$$

$$\sum_{i=1}^{k} Xi\ Pi - d \sum_{i=1}^{k} di\ Pi = Po \text{ (Solución } X_2)$$

Desarrollando ambas ecuaciones:

3) $X_1 = \sum_{i=1}^{k} Pi\ (X_1 + d\ d_1,\ X_2 + d\ d_2,\ \ldots X_k + dd_k,\ 0\ldots 0)$

4) $X_2 = \sum_{i=1}^{k} Pi\ (X_1 - dd_1,\ X_2 - dd_2,\ \ldots X_k - dd_k,\ 0\ldots 0)$

Sumando (3) y (4)

$$X_1 + X_2 = 2 \sum_{i=1}^{k} Pi\ (2X_1 + 2X_2 + 2X_3 \ldots 2\ X_k)$$

$$X_1 + X_2 = 2 \sum_{i=1}^{k} Pi\ (X_1 + X_2 + X_3 \ldots X_k)$$

$$X_1 + X_2 = 2 \sum_{i=1}^{k} Pi\ Xi$$

$$1/2\ X_1 + 1/2\ X_2 = \sum_{i=1}^{k} Pi\ Xi$$

Pero $\sum_{i=1}^{k} P_i \, X_i = X$

$1/2 \, X_1 + 1/2 \, X_2 = X$

Lo cual contradice la hipótesis de que X es punto extremo porque $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ por tanto, la suposición de independencia lineal es falsa para los vectores $P_1, P_2, P_3 \ldots . P_k$.

Con la demostración de los tres teoremas anteriores, tenemos suficiente base científica para entrar a la obtención de la tabla del Simplex.

OBTENCION DE LA TABLA DEL SIMPLEX

Para comprender con mayor claridad la deducción de esta tabla, lo haremos con un ejemplo sencillo de tres variables en un problema de maximización, y también con el objeto de trabajar directamente con números y no literalmente, para poder hacer así la simplificación del caso.

PROBLEMA: Encontrar el vector X que satisfaga al sistema:

3

$$2X_1 + 2X_2 \leq 8$$

$$2X_2 + 5X_3 \leq 10$$

$$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 15$$

y que maximiza la función objetiva

$$Z = 3X_1 + 5\,X_2 + 4X_3$$

1) Agregaremos las variables de holgura, con el objeto de convertir las desigualdades en igualdades y tener así una matriz identidad y con ella la primera solución básica, la cual trataremos de mejorar hasta encontrar la óptima.

$$2X_1 + 3X_2 + 0X_3 + X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 8$$
$$0X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 = 10$$
$$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 = 15$$

Tabla 2-1

dejemos por fuer a las variables y escribamos la matriz coefi cientes:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
2	3	0	1	0	0	= 8
0	2	5	0	1	0	=10
3	2	4	0	0	1	=15

Tabla 2-2

Una primera solución sería

$X_4 = 8 \quad X_1 = 0$

$X_5 = 10 \quad X_2 = 0$

$X_6 = 15 \quad X_3 = 0$

Esta solución no puede ser óptima, ya que está dada para va riables no reales; trataremos ahora de que la próxima solución esté dada en valores para variables reales.

Probemos ahora cuál de estas variables nos va a producir un mayor aumento en la función objetiva, al introducirla a la - solución. Si introducimos X_1, expresemos las variables de la solución actual en función de X_1

1) $X_4 = 8 - 2X_1$

2) $X_5 = 10 - 0X_1$

3) $X_6 = 15 - 3X_1$

La función objetiva es. $Z = 3X_1 + 5X_2 + 4X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6$

Por cada unidad de X_1 que introduzcamos, Z aumenta en 3x1, pero además de (1) podemos deducir que el valor de X_4 disminuye en dos unidades por cada X_1 que introduzcamos, así:

$$X_4 = 8 - 2x1$$

$$X'_4 = 8 - 2x2 \quad \text{etc...}$$

de aquí que debido a X_4, Z disminuirá en 2x0 al introducir X_1. Debido a X_5, Z disminuirá en 0x0 al introducir X_1. Debido a X_6, Z disminuirá en 3x0 al introducir X_1.

El aumento neto de Z al introducir X_1 será de:

$$\Delta Z = \quad 3 - 2x0 - 0x0 - 3x0 = 3$$

Si introducimos ahora X_2, tendremos que expresar las variables de la solución en función de X_2

5) $X_4 = 8 - 3X_2$

6) $X_5 = 10 - 2X_2$

7) $X_6 = 15 - 2X_2$

4) $Z = 3X_1 + 5X_2 + 4X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6$

Por cada unidad de X_2 que introduzcamos Z aumentará en 5x1
De (5) se deduce que el valor de X_4 disminuirá en 3 unidades. por cada unidad de X_2 que introduzcamos y Z disminuirá debido a X_4 en 3x0.

Debido a X_5 Z disminuirá en 2x0 al introducir X_2

Debido a X_6 Z disminuirá en 2x0 al introducir X_2

El aumento neto de Z al introducir X_2 será de:

$$5x1 - 3x0 - 2x0 - 2x0 = 5$$

Si introducimos ahora X_3, tendremos que expresar las variables de la solución actual en función de X_3.

8) $X_4 = 8 - 0X_3$

9) $X_5 = 10 - 5X_3$

10) $X_6 = 15 - 4X_3$

La función objetiva Z aumenta en 4x1 por cada unidad de X_3 que introduzcamos.

Debido a X_4 Z disminuirá en 0x0 al introducir X_3

Debido a X_5 Z disminuirá en 5x0 al introducir X_3

Debido a X_6 Z disminuirá en 4x0 al introducir X_3

El aumento neto de Z será de:

$$4x1 - 0x0 - 5x0 - 4x0 = 4$$

De lo anterior deducimos que la variable que nos conviene introducir en la solución es X_2 ya que es la que nos produce un mayor aumento en la función objetiva.

Llamemos Δ_j a los aumentos netos al introducir cualesquiera variables y observemos que la variable que nos aumenta más la -- función objetiva y que por lo tanto introducimos es la que ocasiona un mayor Δ_j. Observemos también que para encontrar Δ_j lo que mecánicamente se hizo fue:

Al coeficiente en la función objetiva de cada variable (llamemos C_j a estos coeficientes) le restamos la sumatoria de las - multiplicaciones de los coeficientes de las variables en la solución actual (llamemos C_i a estos coeficientes) por los coeficientes del vector que pretendemos introducir (llamemos X_i a estos coeficientes). Lo que expresado en fórmula es: $\Delta_j = C_j - \sum Ci\ Xi$.

Ya se ha encontrado cuál es la variable que entrará a la nueva solución, tratemos de encontrar ahora cuál variable es la que conviene eliminar de la solución para lograr nuestro objetivo, para eso debemos recordar las ecuaciones (5), (6), (7), asociadas con la introducción de X_2 a la solución

5) $X_4 = 8 - 3X_2$

6) $X_5 = 10 - 2X_2$

7) $X_6 = 15 - 2X_2$

Recordemos además la no negatividad de las soluciones y observemos que en la ecuación (5) el mayor valor que puede tomar X_2 sin que X_4 se haga negativa es 8/3; en la ecuación (6) el mayor valor de X_2 sin que X_5 se haga negativa es 5 y este mayor valor para la ecuación (7) es 15/2, pero entre estos tres valores sólo hay uno que satisface la condición de no negatividad para todo el sistema este valor es el menor de los tres o sea 8/3 que corresponde a la variable X_4. Lo que quiere decir que al eliminar X_4, X_2 puede tomar su mayor valor, por tanto eliminamos X_4 de la solución e introducimos a X_2 en la misma.

Si observamos el proceso seguido para obtener la variable de salida notaremos que lo que mecánicamente se ha hecho es dividir los términos independientes (llamemos b_i a estos términos) entre los correspondientes coeficientes del vector entrando -- (a_i) y el menor de estos cocientes nos indica por correspondencia cuál es la variable que sale. La variable de salida es la asociada al menor cociente b_i/a_i. Habiendo encontrado ya las -

variables de entrada y salida escribamos de nuevo la matriz -- coeficientes señalando en ella el pivote, el cual está determinado por la intersección de la columna de entrada y la fila asociada a la variable de salida.

X_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_4	2	$\boxed{3}$	0	1	0	0	= 8
X_5	0	2	5	0	1	0	= 10
X_6	3	2	4	0	0	1	= 15

Tabla 2-3

En el extremo izquierdo ha sido situada la columna X_i, para indicar cuáles son las variables que están en la solución, además, el pivote ha sido señalado encerrándolo en un cuadrito. Sustituyamos ahora a X_4 por X_2, pero para que X_2 esté dentro de la solución posible, sus coeficientes deberán estar incluídos en la matriz identidad, lo cual vamos a lograr mediante operaciones matriciales.

Multiplicamos la primera fila por 1/3, después esta misma fila ya alterada la multiplicamos por -2 y se la sumamos a la - segunda y tercera filas, de tal suerte que la nueva matriz coeficientes será:

X_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_2	2/3	1	0	1/3	0	0	= 8/3
X_5	-4/3	0	5	-2/3	1	0	= 14/3
X_6	5/3	0	4	-2/3	0	1	= 29/3

Tabla 2-4

de donde la nueva solución será:

$X_2 = 8/3 \qquad X_1 = 0$

$X_5 = 14/3 \qquad X_3 = 0$

$X_6 = 29/3 \qquad X_4 = 0$

Trataremos como en el caso anterior, de mejorar la solución actual, lo que lograremos mediante la aplicación del mismo proceso y habremos llegado a la solución óptima cuando todos los aumentos netos (Δ_j) calculados sean negativos o nulos, lo que quiere decir que ya no es posible mejorar la función objetiva, ya que no sería posible lograr aumentos.

Una vez comprendida la rutina del proceso continuaremos con el desarrollo del problema, aplicando el proceso en una forma mecánica. Ya obtenida la solución, el siguiente paso es determinar la nueva variable de entrada valiéndose para eso del cálculo de los Δ_j.

Para X_1 $\Delta_{j1} = 5x2/3 - 0x4/3 - 0x5/3$

$\Delta_{j1} = -1/3$

Para X_2 $\Delta_{j2} = 5 - 5x1 - 0x0 - 0x0$

$\Delta_{j2} = 0$

Para X_3 $\Delta_{j3} = 4 - 5x0 - 0x5 - 0x4$

$\Delta_{j3} = 4$

Para X_4 $\Delta_{j4} = 0 - 5x1/3 - 0x2/3 - 0x2/3$

$\Delta_{j4} = -5/3$

Para X_5 $\Delta_{j5} = 0 - 5x0 - 0x1 - 0x0$

$\Delta_{j5} = 0$

Para X_6 $\Delta_{j6} = 0 - 5x0 - 0x0 - 0x1$

$\Delta_{j6} = 0$

La variable que nos produce el mayor (Δ_j) será la variable entrando, para el caso X_3.

Una vez encontrada la variable entrando determinaremos el mayor valor de ésta que nos conserve la no negatividad de las soluciones o sea el menor valor de b_i/a_i, encontremos pues estos términos:

$\frac{8/3}{0} = \infty$ que corresponde a X_2

$14/3 \times 1/5 = 14/15$ que corresponde a X_5

$29/3 \times 1/4 = 29/12$ que corresponde a X_6

El menor es el que corresponde a X_5, entonces esta será sustituida por X_3.

Seguidamente ordenaremos los datos de tal manera que podamos verlos todos claramente señalando las variables de entrada y salida.

PRIMERA TABLA

C_i	X_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b_i
5	X_2	2/3	1	0	1/3	0	0	8/3
0	X_5	-4/3	0	5	-2/3	1	0	14/3
0	X_6	5/3	0	$\boxed{4}$	-2/3	0	1	29/3
	C_j	3	5	4	0	0	0	
Solución		0	8/3	0	0	14/3	29/3	
	Δ_j	-1/3	-	4	-5/3	-	-	
	$\frac{b_i}{a_i}$	-		-	-	14/15	29/12	
				entra ↑		↓ sale		

El nuevo valor de la función objetiva sería

$Z = 3 \times 0 + 5 \times 8/3 + 4x0 + 0x0 + 0x14/3 + 0x29/3$

$Z = 40/3$

O sea que Z aumentó de 0 a 40/3

Introducimos X_3 en la solución y operando ya mecánicamente la tabla queda como sigue

Ci		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	bi
5	X_2	2/3	1	0	1/3	0	0	8/3
4	X_3	-4/15	0	1	-2/15	1/5	0	14/15
0	X_6	41/15	0	0	-2/15	-4/5	1	89/15
	C_j	3	5	4	0	0	0	
Solución		0	8/3	$\frac{14}{15}$	0	0	89/15	
	Δ_j	$\frac{11}{15}$	-	-	$\frac{-17}{15}$	$\frac{-4}{5}$	-	
	$\frac{bi}{a_i}$	-	4	$\frac{-7}{2}$	-	-	89/41	
		entra					sale	

El nuevo valor de Z es $\frac{765}{41}$

La nueva solución es:

$X_2 = 8/3 \qquad X_1 = 0$

$X_3 = 14/15 \qquad X_4 = 0$

$X_6 = 89/15 \qquad X_5 = 0$

Y el nuevo valor de la función objetiva es:

$$Z = \frac{256}{15}$$

Como aun tenemos posibilidad de aumentar el valor de Z ya - que con X_1 todavía tenemos aumentos positivos continuamos - con la siguiente tabla la cual queda:

Ci		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	bi
5	X_2	0	1	0	15/41	8/41	-10/41	50/41
4	X_3	0	0	1	- 6/41	5/41	4/41	62/41
3	X_1	1	0	0	- 2/41	-12/41	15/41	89/41
	C_j	3	5	4	0	0	0	
Solución		89/41	$\frac{50}{41}$	$\frac{62}{41}$	0	0	0	
	Δj	-	-	-	$-\frac{45}{41}$	$-\frac{24}{41}$	$-\frac{11}{41}$	

Los términos $\frac{bi}{ai}$ ya no es necesario obtenerlos ya que la solución es óptima porque no pueden haber aumentos en la función objetiva debido a que todos los aumentos netos son negativos o nulos.

La solución óptima es $X_1 = 89/41$ $X_2 = 50/41$

$X_4 = 0$ $X_3 = 62/41$

$X_5 = 0$ $X_6 = 0$

CASOS ESPECIALES

1. Existen valores negativos entre los términos independientes.

Si tuviéramos que maximizar una función (Z) de (X_1, X_2, y X_3) que está sujeta a las siguientes restricciones

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 8$$

$$-X_1 - 2X_2 + X_3 \leq -2$$

Introducimos las variables de holgura y el sistema queda

1) $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 0X_5 = 8$

2) $-X_1 - 2X_2 + X_3 + 0X_4 + X_5 = -2$

La solución sería:

$$X_4 = 8$$
$$X_5 = -2$$

Lo cual no es posible ya que las soluciones nunca deben ser negativas.

Para solucionar el problema agreguemos una variable artificial X_6 que deberá ser menor o igual que su correspondiente variable de holgura (X_5) y además deberá ir con signo negativo. Este es solo un artificio y el sistema queda:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 8$$

$$3)\ -X_1 - 2X_2 + X_3 + 0X_4 + X_5 + X_6 = -2$$

Multiplicando por (-1) a ambos lados de la ecuación (3)

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 8$$

$$X_1 + 2X_2 - X_3 - X_5 + X_6 = 2$$

La primera tabla resulta ser:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	bi
X_4	1	1	1	1	0	0	8
X_6	1	$\boxed{2}$	-1	0	-1	1	2
Solución	0	0	0	8	0	2	

La solución cumple la no negatividad, pero no cumple la condición $X_6 \leq X_5$ por tanto todavía no es solución básica. Introduzcamos ahora una de las variables reales y hagamos salir a X_6, pero de tal manera que al hacer las operaciones matriciales, los bi siempre queden no negativos.

La variable escogida fue X_2, quedando la tabla como sigue:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	bi
X_4	1/2	0	3/2	1	1/2	-1/2	7
X_2	1/2	1	-1/2	0	-1/2	1/2	1
Solución	0	1	0	7	0	0	

Esta solución ya es factible, porque consta de coordenadas no negativas, además $X_5 = X_6 = 0$ o sea cumple que $X_6 \leq X_5$. Una vez que la variable artificial ha cumplido con su cometido, puede ser eliminada del problema, y continuar con el desarrollo normal del problema Simplex.

Eliminada la variable artificial X_6, tabla queda así:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	bi
	1/2	0	3/2	1	1/2	7
	1/2	1	-1/2	0	-1/2	1
Soluc.	0	1	0	7	0	

y continuamos con el proceso Simplex.

En el ejemplo anterior había unicamente un bi negativo, pero en caso de que hubiera más de uno, se agregarían tantas variables de holgura como términos bi haya negativos; los cuales irán siendo eliminados una a una cuando hayan cumplido su objetivo y en cada caso serán reemplazados por variables originales. Lo anterior se comprenderá mejor con un ejemplo más adelante.

Es necesario mencionar, que cuando se va a maximizar una función las desigualdades se deberán ser del tipo $X + Y \leq B$, pero si acaso tuvieramos una restricción del tipo $X+Y \geq B$, la podríamos convertir, multiplicando a ambos lados de la desigualdad por (-1) y quedaría $-X - Y \leq -B$; entonces el signo negativo -- del término independiente sería tratado mediante una variable artificial según el proceso descrito anteriormente.

Hemos tratado el problema en el caso en que tenemos términos independientes con signo negativo.

MINIMIZACION

Los problemas de Minimización se resuelven de la misma manera que los problemas de Maximización, con la única diferencia que a la F (Z) que se pretende minimizar, se le cambia signo, y lo que se hace es maximizar -F(Z). Aprovecharemos también, para resolver un problema, en el que vayan involucrados los tres tipos de restricciones ($\leq$, $=$, $\geq$).

El problema se desarrollará mediante un método, en el cual en vez de eliminar las Variables artificiales, cuando en la solución da un valor menor o igual a su correspondiente variable de holgura, en la función objetiva se acompaña a las variables artificiales de un coeficiente -M, en donde M es una cantidad tan grande que nos garantiza que las variables artificiales no aparecerán en la Solución.

Ejemplo

Minimizar

$$Z = 2X_1 + 4X_2 + X_3$$

sujeto a

$$X_1 + 2X_2 - X_3 \leq 5 \qquad =$$

$$2X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 2 \qquad \geq$$

$$-X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 1$$

Primer paso Agregamos las variables de holgura y artificiales correspondientes para obtener la Matriz Identidad y con ella la primera solución básica.

$$X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 = 5$$
$$2X_1 - X_2 + 2X_3 + X_5 = 2$$
$$-X_1 + 2X_2 + 2X_3 - X_6 + X_7 = 1$$

en donde X_4 y X_6 son Variables de holgura y X_5 y X_7 son variables artificiales.

La función objetiva queda:

Maximizar $X' = -2X_1 - 4X_2 - X_3 - MX_5 - MX_7$

PRIMERA TABLA

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	bi	Chequeo
0	X_4	1	2	-1	1	0	0	0	5	8
-M	X_5	2	-1	2	0	1	0	0	2	6
-M	X_7	-1	2	$\boxed{2}$	0	0	-1	1	1	4
	C_j	-2	-4	-1	0	-M	0	-M		
	Soluc.	-	-	-	5	2	-	1		
	Δ_j	-2+M	-4+M	-1+4M	0	0	-M	0		
	$\frac{bi}{ai}$	-	-	-	-5	1	-	1/2		
				↑				↓		

$Z_j = \sum_{i=1}^{\ell} C_i a_{ij}$

$\Delta_j = C_j - Z_j$

Aproevecharemos para explicar la columna chequco. Esta columna se obtiene sumando los coeficientes de cada fila, incluyendo los bi. A esta columna, se le incluye en las operaciones matriciales y si al volver a realizar la sumatoria por fila, coincide con la cantidad transformada, no nos hemos equivocado en las operaciones.

SEGUNDA TABLA

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	bi	Chequeo
0	X_4	1/2	3	0	1	0	-1/2	1/2	$1\frac{1}{2}$	10
-M	X_5	$\boxed{3}$	-3	0	0	1	1	-1	1	2
-1	X_3	1/2	1	1	0	0	-1/2	1/2	$\frac{1}{2}$	2
	Δj	$-\frac{5}{2}+3M$	-3-3M	0	0	0	$-\frac{1}{2}+M$	$\frac{1}{2}+2M$		
	$\frac{bi}{ai}$	-	-	-1	11	1/3	-	-		
		↑				↓				

Como puede verse, en esta segunda tabla ya no hemos colocado la fila C_j debido a que es constante, y la fila solución ya que se sobreentiende que los bi son las soluciones a sus variables asociadas que están en la columna Xi

TERCERA TABLA

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	bi	Chequeo
0	X_4	0	7/2	0	1	-1/6	-2/3	2/3	16/3	29/3
-2	X_1	1	-1	0	0	1/3	$\boxed{1/3}$	-1/3	1/3	2/3
-1	X_3	0	1/2	1	0	1/6	-1/3	1/3	2/3	7/3
	Δj	0	$-\frac{11}{2}$	0	0	5/6-M	1/3	$-\frac{1}{3}-M$		
	$\frac{bi}{ai}$	1		-2	-8					
		↓					↑			

CUARTA TABLA

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	bi	Chequeo
0	X_4	2	3/2	0	1	1/2	0	0	6	11
0	X_6	3	-3	0	0	1	1	-1	1	2
-1	X_3	1	-1/2	1	0	1/2	0	0	1	3
	Δj	-1	-9/2	0	0	1/2-M	0	-M		

Como puede apreciarse todos los Δj son negativos o ceros, por lo tanto la cuarta tabla nos da la solución óptima que es:

$X_4 = 6$

$X_6 = 1$

$X_3 = 1$

Podemos observar también que en nuestra solución final nos han resultado valores para las variables de holgura X_4 y X_6, pero esto no implica que la solución no sea óptima.

Es imposible obtener valores para las Variables artificiales, por que de resultar así, el problema estaría mal planteado, los datos estarían mal tomados o hay error en el procesamiento de los datos.

La solución óptima es entonces:

$Z' = -2x0 - 4x0 - 1x1 - Mx0 - Mx0$

o sea $Z' = -1$

Tenemos una respuesta negativa, pero recordemos que le habíamos cambiado el signo a Z y lo que hemos encontrado es Z', entonces cambiamos de nuevo el signo y tenemos:

Z=1

SECCION III

EL PROBLEMA DE TRANSPORTE

SECCION III

EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

TEORIA DE INFORMACION

El problema de transporte, representa un caso especial de la teoría general de la Programación Lineal.

Los problemas de transporte son del tipo, aunque se tienen - varios lugares de origen, en donde existe algo que es necesario distribuir, de la mejor manera, a ciertos lugares de destinos y podría representarse así

Destinos

	1	2		n	
1	C_{11}	C_{12}	....	C_{1n}	a_1
2	C_{21}	C_{22}	....	C_{2n}	a_2
.	....				.
m	C_{m1}	C_{m2}	....	C_{mn}	a_m
	b_1	b_2	....	b_n	

Tabla 3-1

El problema de la gráfica 3-1 puede describirse así.

Existen m lugares de origen, y n lugares de destino; cada lugar de origen tiene a_i unidades por distribuir y cada lugar de destino, necesita recibir b_1 unidades como requerimiento.

Asumiremos que C_{ij} es el costo de trasladar una unidad de un lugar de origen a su lugar de destino y que el número de unidades necesitadas (b_i) es igual al número de unidades por - distribuirse (a_i).

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

La solución al problema está dado por la solución a una matriz del tipo

X_{11}	X_{12}	....	X_{1n}
X_{21}	X_{22}	......	X_{2n}
X_{31}	X_{32}	.....	X_{3n}
---	----	---	---
X_{m1}	X_{m2}	....	X_{mn}

Tabla 3-2

en donde X_{ij} son las cantidades a distribuir de un lugar a otro.

Las restricciones están dadas por:

31 $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i$

3-2 $\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_i$

3-3 X_{ij} 0

La función objetiva es la función costos

$$Z= C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + \ldots\ldots + C_{mn} X_{mn}$$

lo que es $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$

Hagamos ahora un ejemplo para evidenciar el establecimiento de las restricciones y exponer la teoría del proceso.

<u>Problema</u> Una compañía tiene tres plantas que producen un cierto tipo de artículo. La primera tiene 500 unidades de producto en inventario, la segunda planta, tiene 1000 y la tercera 1400. El producto se tiene que distribuir a dos agencias, las cuales demandan 1250 artículos la primera y 1650 la segunda.

Los costos unitarios están dados por la matriz de la gráfica 3-3

	Agencias 1	Agencias 2	
Plantas 1	20	10	500
2	5	8	1000
3	6	19	1400
	1250	1650	

Tabla 3-3

Los requerimientos han sido incluidos en la gráfica 3-3

La solución está en optimizar los valores de una matriz del tipo

	1	2	
1	X_{11}	X_{12}	500
2	X_{21}	X_{22}	1000
3	X_{31}	X_{32}	1400
	1250	1650	

Tabla 3-4

Escribamos las restricciones

$$
\begin{aligned}
X_{11} + X_{12} &= 500 \\
+X_{21} + X_{22} &= 1000 \\
X_{31} + X_{32} &= 1400 \\
X_{11} + X_{21} + X_{31} &= 1250 \\
X_{12} + X_{22} + X_{32} &= 1650
\end{aligned}
$$

En un problema de transporte siempre tendremos: m ecuaciones debido a las filas de la matriz y n ecuaciones debido a las columnas de la misma; tendremos además mn incógnitas.

Debido a que la suma de las m ecuaciones de las filas es igual a la suma de las n ecuaciones de las columnas, puede decirse que cualquiera de las m+n ecuaciones es una combinación de las demás m + n-1 ecuaciones.

En base a lo anterior, podemos eliminar una fila (la tercera) y las restricciones quedan

$$\begin{array}{lllllll}
X_{11} & + X_{12} & & & & & = 500 \\
 & & + X_{21} & + X_{22} & & & = 1000 \\
X_{11} & + & + X_{21} & & + X_{31} & & = 1250 \\
 & X_{12} & & + X_{22} & & + X_{32} & = 1650
\end{array}$$

3-5A

En (3-5A) sin embargo, tenemos 4 ecuaciones y 6 incognitas y para que el sistema pueda ser resuelto debemos anular dos de las incógnitas, las cuales deberán ser escogidas de tal manera que al anularlas no nos quede una ecuación sin variables y que además quede el sistema de ecuaciones convertido en un sistema triangular . Un sistema de ecuaciones es triangular cuando sus variables pueden arreglarse de tal manera que todos queden arriba o abajo de la diagonal.

Volviendo al problema y eliminando X_{12} y $X_{\cancel{13}}$ 31

$$\begin{array}{llll}
\text{3-6)} & X_{11} & & = 500 \\
 & X_{21} + X_{22} & & = 1000 \\
 & X_{11} + X_{21} & & = 1250 \\
 & X_{22} + X_{32} & & = 1650
\end{array}$$

(3-6) es triangular, ya que se puede hacer el siguiente arreglo:

$$
\begin{array}{llr}
 & X_{32} + X_{22} & = 1650 \text{ (A)} \\
 & \quad X_{22} + X_{21} & = 1000 \text{ (B)} \\
(3\text{-}7) & \qquad X_{21} + X_{11} & = 1250 \text{ (C)} \\
 & \qquad\quad X_{11} & = 500 \text{ (D)}
\end{array}
$$

Como puede verse en 3-7 las variables están en la diágo---nal o por encima de ella, por tanto 3-7 es un sistema de - Ecuaciones Triangular

de 3-7 podemos obtener los valores de las variables, mediante operaciones algebráicas

En D $\boxed{X_{11} = 500}$

En C $X_{21} = 1250 - 500$

$\boxed{X_{21} = 750}$

En B $X_{22} = 1000 - 750$

$X_{22} = 250$

En A $X_{32} = 1650 - 250$

$X_{32} = 1400$

Hemos obtenido así una solución

$$
X = \begin{array}{|c|c|}
\hline
X_{11} & X_{12} \\
\hline
X_{21} & X_{22} \\
\hline
X_{31} & X_{32} \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|c}
\hline
500 & 0 & 500 \\
\hline
750 & 250 & 1000 \\
\hline
0 & 1400 & 1400 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{1250} & \multicolumn{1}{c}{1650} &
\end{array}
\qquad \text{Tabla 3-8}
$$

Observaremos que para llegar a la solución planteada podríamos haberlo hecho de la siguiente manera:

		500
		1000
		1400
1250	1650	

Tabla 3-9

a) observamos la posición (1,1) sus requerimientos en fila son de 500 y en columna de 1250, tomamos el menor de estos dos valores y lo anotamos en esa posición, entonces los requerimientos en fila bajan de 500 a cero y en columna a 750.

500	0	500
		1000
0		1400
1250 750	1650	

Tabla 3-10

Luego en la posición (1,2) debemos escoger entre 0 y 1650; tomamos 0.

De la misma manera, para cada posición escogemos el menor valor de requerimientos entre fila y columna, haciendo los ajustes necesarios después de cada asignación hasta llegar a obtener la solución factible básica.

500	
750	250
	1400

Tabla 3-11

A este procedimiento mecánico se le llama método de la "esquina noroeste" y en páginas posteriores se dará el proceso para su optimización.

Lo anterior es una solución factible básica, lo cual se comprenderá con las siguientes definiciones.

DEFINICIONES

Solución factible= es aquella en que todas las variables tienen valor positivo.

Solución Básica= es la solución de un sistema triangular formado por las restricciones del problema.

Solución factible básica= es una solución básica, en que todos los valores de las variables son positivos.

Las soluciones factibles básicas tienen exactamente m+n valores (todos positivos).

Solución factible básica degenerada= es una solución factible en que tiene valores positivos para un número de variables menor que m+n-1

Una solución factible básica degenerada, es perfectamente válida y puede ser la óptima dependiendo del problema. Ejemplo de una solución degenerada sería:

Supongamos que han sido dados los requerimientos de fila y columna para la siguiente matriz

10	12	0	0	22
0	3	0	0	3
0	0	14	0	14
0	0	16	19	35
10	15	30	19	

Tabla 3-12

Aplicando la distribución por la "esquina noroeste" tenemos:

10	12			22
	3			3
		14		14
		16	19	35
10	15	30	19	

Tabla 3-13

En el problema

$m= 4 \quad n= 4$

de donde $m+n-1 = 4+4 - 1 = 7$

y la solución tiene valores solamente para 6 variables X_{11}, X_{12}, X_{22}, X_{33}, X_{43}, X_{44}; luego es una solución factible básica degenerada.

TEOREMAS BASICOS PARA LA TEORIA DEL TRANSPORTE

Teorema 1) Una solución factible básica degenerada solo puede ocurrir cuando los requerimientos ajustados de una fila, son iguales a los requerimientos ajustados de una columna.

Demostración: la demostración en este caso es en parte evidente, porque cuando aplicamos el método de la "esquina noroeste" se observa claramente que cuando en un paso intermedio y para una cierta posición los requerimientos en fila y columna son iguales, se satisface a ambas condiciones simultáneamente y una de las casillas vecinas, se queda sin asignación.

Supongamos ahora que los requerimientos en fila de un problema son a_1, a_2 -----a_r ------a_q ------a_n y los requerimientos en columna son b_1, b_2 ------b_r-------b_n y que la condición de requerimientos iguales para fila y columna se cumple en las posiciones (r,s), (qv) y (m,n) entonces tendremos una solución degenerada múltiple en donde:

$$\sum_{i=1}^{r} ai = \sum_{j=1}^{s} b_j$$

$$\sum_{i=r+1}^{q} ai = \sum_{j=s+1}^{v} b_j$$

$$\sum_{i=q+1}^{m} ai = \sum_{j=v+1}^{n} b_j$$

y la solución de la esquina Noroeste, nos dará valores para m+n-3 variables.

Teorema 2) Para cada problema en el cual está involucrada una solución básica factible, degenerada, hay un problema equivalente, en el cual la solución básica degenerada es imposible.

Demostración: La solución degenerada puede existir solo en los casos en que la suma de una fila sea igual a la suma de una columna, pero si nosotros hacemos imposible esta igualdad será también imposible la solución degenerada.

La no degeneración se puede lograr modificando la solución mediante una perturbación consistente en agregar una cantidad la cual es positiva y muy pequeña a la fila o columna de requerimientos (a cada valor de ella).

Una vez hecho este ajuste la suma de los requerimientos de una cierta fila contendrá la cantidad infinitesimal r , y la suma de los requerimientos de columna contendrá el infinitesimal q ó m dependiendo de qué columna haya sido perturbada.

Suponiendo un de 0.001 agregado a los requerimientos de columnas, nos modificará la tabla 3-13 a la tabla 3-14

Tabla 3-14

10	12.001			22.001
	2.999	0.002		3.001
		14.001		14.001
		15.997	19.004	35.001
10	15	30	19.004	

que no es una solución degenerada.

Teorema 3) Dado un problema de transporte en el cual la solución factible básica degenerada es imposible asumir que se ha encontrado una solución factible básica. Una segunda solución factible básica será construida de la primera mediante la introducción de una nueva variable y la anulación de una variable de la primera solución; además la nueva solución es única.

Demostración: Supongamos la primera solución básica como:

	X_{12}			a_1
	X_{22}	X_{23}		a_2
X_{31}		X_{33}		a_3
	X_{42}		X_{44}	a_4
b_1	b_2	b_3	b_4	

Tabla 3-15

Supondremos también que queramos introducir la variable X_{11}. Colocamos en el lugar de X_{11} un pequeño valor positivo θ , pero para conservar la igualdad en las restricciones si lo restamos a X_{31}, lo sumamos a X_{33} lo restamos a X_{23}, se lo agregamos a X_{22} y se lo restamos a X_{12}.

La matriz queda

θ	$X_{12}-\theta$			a_1
	$X_{22}+\theta$	$X_{23}-\theta$		a_2
$X_{31}-\theta$		$X_{33}+\theta$		a_3
	X_{42}		X_{44}	a_4
b_1	b_2	b_3	b_4	

Tabla 3-16

Si nosotros incrementamos cada vez más el valor de θ llegará un momento en que uno de los valores de la solución anterior haría cero y X_{11} tomará el valor θ

La solución se dice que es única en el sentido que si agregamos y sustraemos un θ que nos haga exactamente una de las variables igual a cero y que conserve la no negatividad podríamos tener una solución que no es factible básica.

Por ejemplo que una solución a un problema fuera

10	
15	5
	22

Tabla 3-17

y quisiéramos introducir X_{12} con un θ = 5 tendríamos

Tabla 3-18

10-	+
15+	5-
	22

=

5	5
20	
	22

Tabla 3-19

X_{22} se hace cero

En cambio si suponemos un θ = 10, introduciendo siempre X_{21} tendríamos en X_{22} un valor de -5, lo cual nos indica una - solución no factible.

Teorema 4) En un problema de transportes la solución óptima es una solución factible básica, si se tiene una solución óptima única.

Supongamos que tenemos una solución factible básica cualquiera

C_{11}	C_{12}
C_{21}	C_{22}
C_{31}	C_{32}

Tabla 3-20

y cuyos costos nos dan un valor igual a Z.

Si nosotros introdujéramos en la casilla de C_{12} un valor de $\theta = 1$, para conservar la compensación entre demandas y ofertas, tendríamos que restar este valor a X_{22}, sumarlo a X_{21} y restarlo de X_{11}. Multiplicando esta perturbación por sus correspondientes costos unitarios tendríamos un valor D_{12} igual a:

$$D_{12} = C_{12} - C_{22} + C_{21} - C_{11}$$

si este valor es negativo, quiere decir que por cada unidad - que introduzcamos a la casilla de X_2, la ecuación de costos - totales (Z_1) disminuirá en D_{12}. y el nuevo valor de la solución (Z_2) será de

$$Z_2 = Z_1 + \theta D_{12}$$

Si θ es pequeño (menor que todos los valores en la solución anterior) la solución se degeneraría, tendría más de (m+n-1) ecuaciones.

Si θ es grande (mayor que alguno de los valores en la solución anterior) la solución deja de ser factible (tendría valores negativos)

Si θ es exactamente igual al menor de los valores afectados por la perturbación, la solución sigue siendo factible y básica.

Si el valor de D_{ij} es positivo, para una perturbación exactamente igual al menor de los valores afectados por ella, la solución es óptima por que ya no pueden disminuir los costos sino que aumentarían en θD_{ij} por cada unidad que se pretenda introducir en cualquier casilla vacía.

La solución óptima encontrada sería demás factible (sólo términos positivos) y básica (se podrá hacer un arreglo desistema triangular) y tendrá (m+n-1) asignaciones de solución.

a) PRUEBA DE OPTIMALIDAD

Vamos a suponer que hemos obtenido una solución factible básica por la distribución de la esquina Noroeste.

	V_1	V_2	V_3
U_1	X_{11}	X_{12}	
U_2		X_{22}	
U_3		X_{32}	X_{33}
U_4			X_{43}

Tabla 3-21

Probaremos que las evaluaciones en las casillas vacías (D_{ij}) son iguales a:

$$D_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_i).$$

En primer lugar llamaremos Ui a las filas (U_1 U_2 U_3 U_4) y Vi a las columnas (V_1 V_2 V_3).

Vamos a suponer un $\theta = 1$ y obtengamos las evaluaciones para cada casilla vacía (D_{ij})

A) $D_{13} = C_{13} - C_{33} + C_{32} - C_{12}$

B) $D_{21} = C_{21} - C_{22} + C_{12} - C_{11}$

C) $D_{23} = C_{23} - C_{33} + C_{32} - C_{22}$

D) $D_{31} = C_{31} - C_{32} + C_{12} - C_{11}$

E) $D_{41} = C_{41} - C_{11} + C_{12} - C_{32} + C_{33} - C_{43}$

F) $D_{42} = C_{42} - C_{43} + C_{33} - C_{32}$

Recordemos que $C_{ij} = Ui + V_j$

Expresemos ahora los Costos Unitarios (C_{ij}) en función de Ui y de Vi.

$C_{11} = Ui + V_1$
$C_{12} = U_1 + V_2$
$C_{22} = U_2 + V_2$.
$C_{32} = U_3 + V_2$
$C_{33} = U_3 + V_3$
$C_{43} = U_4 + V_3$

Sustituyendo

$D_{13} = C_{13} - U_3 - V_3 + U_3 + V_2 - U_1 - V_2 = C_{13} - (U_1 + V_3)$

$D_{21} = C_{21} - U_2 - V_2 + U_1 + V_2 - U_1 + V_1 = C_{23} - (U_2 + V_1)$

$D_{23} = C_{23} - U_3 - V_3 + U_3 + V_2 - U_2 - V_2 = C_{23} - (U_2 + V_3)$

$D_{31} = C_{31} - U_3 - V_2 + U_1 + V_2 - U_1 - V_1 = C_{31} - (U_3 + V_1)$

$D_{41} = C_{41} - U_1 - V_1 + U_1 + V_2 - U_3 - V_2 + U_3 + V_3 - U_4 - V_3 = C_{41} - (U_4 + V_1$

$D_{42} = C_{42} - U_4 - V_3 + U_3 + V_3 - U_3 - U_2 = C_{42} - (U_4 + V_2)$

de donde queda evidenciado que

$$D_{ij} = C_{ij} - (Ui + V_1).$$

MODELO

El modelo se explicará mediante un ejemplo

Una empresa cuenta con tres fábricas A, B, C cuyas capacidades de producción son de 100, 120 y 120 unidades respectivamente, las cuales son vendidas a 5 regiones (1, 2, 3, 4 y 5) cuyas demandas son de 40, 50, 70, 90 y 90 respectivamente.

Los costos unitarios de transporte están dados por la siguiente tabla

	1	2	3	4	5	Oferta
A	4	1	2	6	9	100
B	6	4	3	5	7	120
C	5	2	6	4	8	120
Demanda	40	50	70	90	90	

(Tabla 3-22)

Repartir las 340 unidades en las 5 regiones, de tal manera que los costos sean mínimos.

1) Hacer una distribución inicial por el procedimiento de la esquina Noroeste.

	1	2	3	4	5
A	40	50	10		
B			60	60	
C				30	90

Costo Z= 1550

Tabla 3-23

lo que nos da una solución factible básica la cual trataremos de mejorar, hasta encontrar la óptima (positiva) m+n-1 términos y arreglo triangular.

2) Encontrar las Evaluaciones para probar si esta solución es óptima. costos marginales.

Las evaluaciones se encuentran para las casillas vacías, mediante la fórmula $D_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$ es decir se encontrarán todas las evaluaciones a la vez.

Antes hay que encontrar los valores de U_i y V_j. Llamaremos U_1, U_2, U_3 a las filas y V_1, V_2, V_3, V_4. V_5 a las columnas en su orden

de $C_{11} = U_1 + V_1$

Resulta (1) $4 = U_1 + V_1$ (5) $5 = U_2 + V_4$

(2) $1 = U_1 + V_2$ (6) $4 = U_3 + V_4$

(3) $2 = U_1 + V_3$ (7) $8 = U_3 + V_5$

(4) $3 = U_2 + V_3$

Asignamos a la fila U_1 el valor cero y obtendremos

1) $V_1 = 4$

2) $V_2 = 1$

3) $V_3 = 2$

4) $U_2 = 1$

5) $V_4 = 4$

6) $U_3 = 0$

7) $V_5 = 8$

$V_1 + U_1 = 4$
$V_2 + U_2 = 5$
$V_3 + U_3 = 2$

Escribamos la matriz Costos para las casillas vacíás unicamente

C_{ij} =

	1	2	3	4	5
A	.	.	.	6	9
B	6	4	.	.	7
C	5	2	6	.	.

Tabla 3-24

Escribamos la matriz $U_i + V_j$ para las casillas vacías únicamente.

		(4)	(1)	(2)	(4)	(8)
		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
	(0) U_1	.	.	.	4	8
	(1) U_2	5	2	.	.	9
$U_i+V_j=$	(0) U_3	4	1	2	.	.

Tabla 3-25

Restamos ahora $C_{ij} - (U_i + V_j)$

.	.	.	2	1
1	2	1	1	-2
I	1	4	.	.

Tabla 3-26

Tenemos ahora una evaluación negativa $D_{25} = -2$ que nos está indicando que por cada unidad que asignemos a esa casilla el costo disminuirá en 2 unidades.

3) Debemos asignar unidades a la casilla (2,5) pero es necesario conservar la negatividad y además que siempre existan m+n-1 casillas asignadas, para eso asignemos a la casilla -- mencionada un $\theta=1$ a manera de prueba.

Para aumentar 1 en la casilla (2,5) debemos restarlo a la - casilla (2,4), sumarlo a (3,4) y restarlo a (3,5) para compensar el equilibrio. La perturbación afecta de la siguiente manera:

$$X_{25} - X_{24} + X_{34} - X_{35}$$

de lo anterior observamos que tenemos dos asignaciones afectadas por signo negativo X_{24} y X_{35} de las cuales la menor es $X_{24} = 60$. Entonces la mayor cantidad que es posible asignar a la casilla (2,5) es 60, la asignamos, compensamos y la nueva solución queda:

40	50	10		
		60		60
			90	30

Z= 1430

Tabla 3-27

NOTA: Si al evaluar hubieran salida más de un elemento de la solución con signo negativo, hubiéramos escogido para asignar la casilla correspondiente al elemento más negativo.

4) Una vez encontrada la nueva solución aplicamos de nuevo los pasos 2 y 3 hasta que todos los elementos de la matriz evaluación se hagan no negativos y será entonces cuando habremos encontrado la solución óptima.

La matriz costos unitarios para las casillas vacías quedan

°	•	°	6	9
6	4	°	5	°
5	2	6	°	°

Tabla 3-28

Hacemos de nuevo las ecuaciones de costos en función de U_i y V_j del tipo $C_{11} = U_1 + V_1$

Para encontrar los nuevos valores de U_i y V_j, hacemos $U_1 = 0$ y los valores obtenidos son

$U_1 = 0 \qquad V_1 = 4 \qquad V_4 = 2$

$U_2 = 1 \qquad V_2 = 1 \qquad V_5 = 6$

$U_3 = 2 \qquad V_3 = 2$

y la matriz $U_i + V_j$ para las casillas vacías queda:

$U_i + V_j =$

°	°	°	2	6
5	2	°	3	°
6	3	4	°	°

Tabla 3-29

Aplicando de nuevo $D_{ij} = C_{ij} - (Ui + V_j)$ la matriz Evalua-- ción queda:

$D_{ij}=$

°	°	°	4	3
1	2	°	2	°
-1	-1	2	°	°

Tabla 3-30

Para asignar debemos escoger entre las casillas (3,I) y ~~(3,3)~~. (3,2)
Si escogemos la casilla (3,2) asignaríamos así:

40	20	40		
		30		90
	30		90	

Tabla 3-31

en dode Z = 40 x 4 + 20 x 1 + 40 x 2 + 30 x 3 + 90 x 7+30x2+90x4

Z = 1400

Si escogemos la casilla (3,1) la solución es:

	1	2	3	4	5
A	10	50	40		
B			30		90
C	30			90	

Tabla 3-32

y Z= 10 x 4+ 50 x 1 + 40 x 2 + 30 x 3 + 90 x 7 + 30 x5 + 90 x 4
Z = 1400

O sea que obtenemos la misma respuesta, podemos decidirnos en tonces por cualquiera y nos decidimos por tomar la casilla (3,1). Aplicamos de nuevo los pasos 2 y 3 del proceso y obtenemos una matriz evaluación

°	°	°	3	3
1	2	°	1	°
°	0	3	°	1

Tabla 3-33

en donde ya no existen evaluaciones negativas, o sea que estamos en la respuesta óptima Z = 1400

de donde

La fábrica A enviará 10 unidades a la Región 1
50 " " " " 2
y 40 " " " " 3

La fábrica B enviará 30 unidades a la región 3
y 90 " " " " 5

La fábrica C enviará 30 unidades a la Región 1
y 90 " " " " 4

CASOS ESPECIALES

1) Supongamos que existen 4 fábricas de artículos plásticos - distribuidos en el País en las siguientes ciudades: San Salvador, Santa Ana, San Miguel y Sonsonate, las cuales tienen una producción semanal de 1100, 800 y 700 artículos respectivamente, los cuales son vendidos en San Salvador, San Vicente, La Libertad y Usulután. Estas ciudades tienen una demanda de -- 1500, 800, 850 y 600 respectivamente.

Repartir los artículos de la manera más económica si los costos de transporte son proporcionales como dice la matriz.

Fuentes

DESTINOS		S.S.	S.A.	S.M.	Son.	DEMANDA
	S.S	0	150	300	120	1500
	S.V	100	250	125	260	800
	L.L	60	70	200	90	850
	U	130	160	75	270	600
		1100	800	900	700	

OFERTA

Tabla 3-34

Observemos que la demanda total sobrepasa en 250 unidades a la oferta total. Lo que se hace es crear una columna más para oferta en la que incluimos como números proporcionales a los costos ceros en cada casilla y las ofertas para esta columna será la diferencia entre oferta y demanda. La matriz costos quedaría como sigue

Fuentes

		S.S.	S.A.	S.M.	Son.	Fuente ficticia	DEMANDA
DESTINOS	S.S.	0	150	300	120	0	1500
	S.V	100	250	125	260	0	800
	L.L	60	70	200	90	0	850
	U	130	160	75	270	0	600
	OFERTA	1100	800	900	700	250	

Tabla 3-35

La primera solución por la esquina Noroeste sería

1100	400			
	400	400		
		500	350	
			350	250

Tabla 3-36

La cual se mejoraría de acuerdo al método descrito anteriormente y la asignación ficticia será deducida de la región a donde los costos salgan más elevados.

2) Si en el mismo problema anterior suponemos que durante un tiempo no habrá comunicación entre San Salvador y Sonsonate porque se ha arrunnado la carretera.

El problema se resuelve colocando en la casilla San Salvador Sonsonate, un costo bastante elevado de tal manera que no obtengamos asignación en esta casilla, si el valor fuera 10.000 la matriz quedaría

	SS.	S.A.	S.M.	Sons.	Fuente Falsa
S.S.	0	150	300	10.000	0
S.V.	100	250	125	260	0
L.L.	60	70	200	90	0
U	130	160	75	270	0

Tabla 3-37

METODO APROXIMADO DE VOGEL

Este método nos lleva a ahorrar pasos en la aplicación del algoritmo de transporte, ya que nos dá una distribución bastante aproximada a la óptima y muchas veces la propia solución óptima.

Se explicará el método mediante un ejemplo sencillo.

Si tenemos nuestra Matriz Costos, con su respectiva Demanda y Oferta de la siguiente manera:

	1	2	3	4	5		
A	7	6	9	8	3	20	
B	2	10	7	16	8	22	OFERTA
C	9	2	1	7	4	38	
	15	17	18	17	13		
			DEMANDA				

Tabla 3-38

1) En cada fila y columna se resta el menor costo del segundo menor costo.

	1	2	3	4	5		
A	7	6	9	8	3	20	(3)
B	2	10	7	16	8	22	(5)
C	9	2	1	7	4	38	(1)
	15	17	18	17	13		
	(5)	(4)	(6)	(1)	(1)		

OFERTA

DEMANDA

Tabla 3-39

Las diferencias son los números entre paréntesis.

2) Entre estas diferencias se escoge la mayor y atendiendo a eso se selecciona una fila o columna.

3) En la fila o columna seleccionada, se observa cuál es el menor costo, y a la casilla correspondiente se hace la asignación.

4) La cantidad asignada está dada por la menor cantidad entre la oferta y la demanda asociadas a la casilla seleccionada.
Si la demanda es menor se elimina la columna de demanda correspondiente, y se ajustan los requerimientos de la fila (oferta).
Si es menor la oferta, se hace lo contrario.
Eliminada una fila o una columna y hecho el ajuste correspondiente, se vuelve a comenzar el proceso hasta eliminar todas las filas y columnas.
Las cantidades asignadas en cada vez se dejan en su casilla correspondiente, como elementos para una solución básica.

Desarrollando el problema

Primera Asignación.

La mayor diferencia es 6 que corresponde a la columna (3) se selec ciona esta columna, y la casilla de ésta que tenga menor costo, será la casilla de asignación. (Para el caso la casilla (C,3), cuyo costo es (1) y la cantidad a asignar es la menor entre su oferta y demanda correspondiente, (para el caso la demanda que es igual a 18), se asigna esta cantidad y se elimina la columna (3), haciendo el ajuste necesario en los requerimientos de demanda y oferta así:

	1	2	4	5		
A	7	6	8	3	20	(3)
B	2	10	16	8	22	(6)
C	9	2	7	4	20	(2)
	15	17	17	13		
	(5)	(4)	(1)	(1)		

Tabla 3-40

Se ha asignado 18 a la casilla (C,3)

El proceso vuelve a repetirse, hasta que hayamos repartido todas las unidades.

2a. Asignación

La mayor diferencia es (6) que corresponde a la fila B, el menor costo de esta fila es (2) que pertenece a la casilla (B,1) (casilla de asignación). La oferta para esta casilla es 22, la demanda 15, asignamos entonces 15 a la casilla (B,1) y eliminamos la columna 1 y ajustamos la oferta y la demandaa afectadas

	2	4	5		
A	6	8	3	20	(3)
B	10	16	8	7	(2)
C	2	7	4	20	(2)
	17	17	13		
	(4)	(1)	(1)		

Tabla 3-41

Se ha asignado 15 a la casilla (B,1)

3a. Asignación

La mayor diferencia es (4) que corresponde a la columna 2, el menor costo de esta columna es 2 que pertenece a la casilla (C,2). La oferta para esta casilla es 20 y la demanda 17, asignamos 17 y ajustamos los requerimientos de oferta y demanda y eliminamos la columna 2.

Se ha asignado 17 a la casilla (C,2)

	4	5		
A	8	3	20	(5)
B	16	8	7	(8)
C	7	4	3	(3)
	17	13		
	(1)	(1)		

Tabla 3-42

4a. Asignación

La mayor diferencia es 8 que pertenece a la fila B, el menor costo de esta fila es 8, que corresponde a la casilla (B,5). La oferta para esta casilla es 7 y la demanda 13, asignamos 7 y eliminamos la fila B.

	4	5	
A	8	3	20
C	7	4	3

Tabla 3-43

Se ha asignado 7 a la casilla (B,5)

5a. Asignación

La mayor diferencia corresponde a la fila A y es (5), el menor costo de esta fila es 3 que pertenece a la casilla (A,5), a la que asignaremos 6, ya que esta demanda es menor que su oferta asociada 20. Eliminamos la columna (5).

	4		
A	8	14	(8)
C	7	3	(7)
	17		
	(1)		

Tabla 3-44

Se ha asignado 6 a la casilla (A,5)

6a. Asignación

La mayor diferencia (8) corresponde a la fila A, y su costo es 8 (casilla (A,4)) a la que asignamos 14 (oferta) que es menor que (17) (demanda). Eliminamos la fila A.

	4	
C	7	3

Tabla 3-45

Se ha asignado 14 a la casilla A,4

7a. Asignación

La 7a. asignación es obvia, 3 a la casilla (C,4)

La solución básica queda entonces

	1	2	3	4	5	
A				14	6	20
B	15				7	22
C		17	18	3		38
	15	17	18	17	13	

Tabla 3-46

Esta solución se evalúa, para probar si es óptima, mediante método descrito anteriormente.

El desarrollo se hizo parcialmente (una tabla para cada asignación) por razones de explicación, sin embargo, todas las asignaciones pueden hacerse en una sola tabla, rayando las filas o columnas que hayan sido eliminadas, y restando y colocan do las nuevas ofertas, demandas y diferencias, entre los menores costos de fila o columna.

Casos de Empate.

a) Cuando existen 2 ó más "mayores diferencias" iguales, lo que se hace es revisar los costos para cada una de las filas ó columnas incluídas en el empate, y se selecciona la que tenga el costo mínimo.

b) Si aun persiste el empate, se hace una segunda mayor diferencia entre el segundo menor y el tercer menor costo .

SECCION IV

EL PROBLEMA DE ASIGNACION

EL PROBLEMA DE ASIGNACION

El problema de asignación es un caso particular del problema de transporte, es el caso más sencillo de la programación lineal. En este caso se tienen igual número de orígenes e igual número de destinos, por tanto la matriz costos (llamada en este caso matriz efectividad) es una matriz cuadrada.

Los requerimientos de oferta y demanda para cada fila o columna son igual a 1.

Supongamos ahora el problema de un jefe administrativo que tiene cuatro personas disponibles, para cuatro tareas distintas. Se ha hecho una estimación de los tiempos que llevarían en realizar cada persona una tarea, los tiempos son proporcionales a los costos y están dados por la matriz efectividad.

Tabla 4-1

	Tarea 1	2	3	4	
Personal	8	26	17	11	1
	13	28	4	26	1
	38	19	18	15	1
	19	26	24	10	1
	1	1	1	1	

Una solución al problema anterior podría ser (tomando en cuenta que un obrero puede hacer solo una tarea a la vez)

Tabla 4-2

	Tarea 1	2	3	4
A	1	0	0	0
B	0	0	1	0
C	0	1	0	0
D	0	0	0	1

La función objetiva Z sería igual a:

$$Z = 8 + 4 + 19 + 10 = 41$$

El caso es que una persona i ejecute una tarea j a un costo C_{ij}. Dada una solución con elementos X_{ij} con valores entre 0 y 1.

De donde la función económica obedece a:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} C_{ij} \quad C_{ij} \geq 0$$

en donde n es el número de filas (o columnas) en la matriz.

Las restricciones son del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} = 1$$

en donde i, j = 1, 2, ----n.

Para el ejemplo planteado anteriormente las restricciones serían

$$\sum_{i=1}^{4} X_{ij} = X_{1j} + X_{2j} + X_{3j} + X_{4j} = \sum_{j=1}^{4} = X_{i1} + X_{i2} + X_{i3} + X_{i4}$$

La función objetiva Z sería

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} X_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^{4} (X_{1j}C_{1j} + X_{2j}C_{2j} + X_{3j}C_{3j} + X_{4j}C_{4j})$$

$$\begin{aligned} &= X_{11}C_{11} + X_{12}C_{12} + X_{13}C_{13} + X_{14}C_{14} \\ &+ X_{21}C_{21} + X_{22}C_{22} + X_{23}C_{23} + X_{24}C_{24} \\ &\quad X_{31}C_{31} + X_{32}C_{32} + X_{33}C_{33} + X_{34}C_{34} \\ &\quad + X_{41}C_{41} + X_{42}C_{42} + X_{43}C_{43} + X_{44}C_{44} \end{aligned}$$

Esta función considera todas las posibilidades de asignar en cualquier casilla y trataremos de minimizarla

Teorema Si en un problema de asignación sumamos una constante para cada elemento de una fila o columna en la matriz efectividad, entonces una asignación que hace mínima la efectividad - total de una matriz, también minimiza la efectividad total de la otra matriz.

Demostración

Para la demostración nos basaremos en un ejemplo numérico. Supongamos que tenemos los destinos 1, 2, 3 y los orígenes A, B, C con una matriz efectividad como sigue.

	A	B	C
1	1	2	4
2	6	3	7
3	5	3	2

Tabla 4-3

Para este caso existen 6 maneras (3!) distintas de distribución que son:

1) 1A; 2B; 3C
2) 1B; 2A; 3C
3) 1C; 2A; 3B
4) 2C; 1A; 3B
5) 2B; 1C; 3A
6) 2C; 1B; 3A

Los costos para cada uno son:

1) 1+3+2 = 6
2) 2+6+3 =10
3) 4+6+3 =13
4) 7+1+3 =11

5) 3+4+5 = 12

6) 7+2+5 = 14

La solución de menor costo es la solución (1), ahora agreguemos a la fila (1) una constante (3).

	A	B	C
1	4	5	7
2	6	3	7
3	5	3	2

Tabla 4-4

Saquemos ahora el costo para cada una de las selecciones

1') 4 + 3 + 2 = 9
2') 5 + 6 + 2 =13
3') 7 + 6 + 3 =16
4') 7 + 4 + 3 =14
5') 3 + 7 + 5 =15
6') 7 + 5 + 5 =17

Como puede verse, cada una de las soluciones aumentó en la cantidad que se agregó a la fila uno (3), pero la solución mínima fue siempre la misma solución 1, y así podríamos ir probando con cualquier constante que agregaramos a cualesquiera fila o columna, pero resultaría por demás evidente la demostración. Demostrado lo anterior, podemos aplicarlo en el proceso de obtención de la solución óptima.

<u>El modelo matemático</u>

El proceso a seguir para la optimización de una matriz efectividad se hará mediante un ejemplo.

<u>Problema</u>

Se tienen 5 vendedores (1,2,3,4,5), los cuales tienen más o menos habilidad en cuanto a la venta de un producto en 5 regiones distintos (A,B,C,D,E). Se les impuso que no regresaran mientras no vendieran cierta cantidad igual de producto cada uno. En cada una de las regiones, todos ganaban igual sueldo base más viáticos. Los costos por viáticos ocasionados en la prueba fueron:

Vendedores

Ciudades		1	2	3	4	5
	A	7	2	10	12	13
	B	1	7	16	1	5
	C	12	9	4	3	4
	D	1	7	5	3	8
	E	5	7	8	2	10

Tabla 4-5

1er. paso

Restar a cada fila su menor valor

	1	2	3	4	5
A	5	0	8	10	11
B	0	6	15	0	4
C	9	6	1	0	1
D	0	6	4	2	7
E	3	5	6	0	8

Tabla 4-6

2do. paso

Restar cada columna su menor valor

	1	2	3	4	5
A	5	0	7	10	10
B	0	6	14	0	3
C	9	6	0	0	0
D	0	6	3	2	6
E	3	5	5	0	7

Tabla 4-7

<u>3er. paso</u>

Para asignar se comienza a revisar fila por fila, y en las filas donde haya un cero y solo uno, se enmarca éste en un cuadrito, si en la columna asociada a este cero existen otros ceros, deberán ser testados con una X.

	1	2	3	4	5
A	5	$\boxed{0}$	7	10	10
B	$\cancel{0}$	6	14	$\cancel{0}$	3
C	9	6	0	$\cancel{0}$	0
D	$\boxed{0}$	6	3	2	6
E	3	5	5	$\boxed{0}$	7

Tabla 4-8

<u>4to. paso</u>

Se observa las columnas que tengan un solo cero sin testar y se enmarca éste cero en un cuadrito, si existen otros ceros en la fila asociada al cero enmarcado, se testan mediante una X.

	1	2	3	4	5
A	5	$\boxed{0}$	7	10	10
B	0	6	14	Ø	3
C	9	6	Ø	Ø	$\boxed{0}$
D	0	6	3	2	6
E	3	5	5	$\boxed{0}$	7

Tabla 4-9

5to. paso

Repetir los pasos 3o. y 4o. hasta que todos los ceros estén enmarcados o testados.

	1	2	3	4	5
A	5	$\boxed{0}$	7	10	10
B	$\boxed{0}$	6	14	Ø	3
C	9	6	Ø	Ø	$\boxed{0}$
D	Ø	6	3	2	6
E	3	5	5	$\boxed{0}$	7

Tabla 4-10

NOTA: los pasos 1 y 2 podrían asociarse en un solo paso, lo mismo que los pasos 3, 4 y 5

El problema estará resuelto cuando cada fila y cada columna - tengan cada una un cero enmarcado (cero de asignación), para lograr este objetivo, proseguiremos con el desarrollo del proceso.

6to. paso

Marcamos con un cheque (✓) las filas que no tengan cero de asignación y las columnas que tengan ceros tachados en la fila marcada. Después de haber hecho lo anterior, se marcan con cheque las filas que tengan cero de asignación en las columnas marcadas con cheque.

	1	2	3	4	5	
A	5	$\boxed{0}$	7	10	10	
B	$\boxed{0}$	6	14	Ø	3	✓
C	9	6	Ø	Ø	$\boxed{0}$	
D	Ø	6	3	2	6	✓
E	3	5	5	$\boxed{0}$	7	✓
	✓			✓		

Tabla 4-11

NOTA: se marcó la fila (4), (no tenía asignación), después se marcó la columna 1, tenía cero tachado en la fila 4, que estaba marcada. Se marcó la fila (2), tenía cero asignado en la columna 1 que está marcada; se marcó la columna 2, tenía cero tachado en la fila (2) que estaba marcada y se marcó la fila (5), tenía cero asignado en la columna (4) que estaba marcada.

7o. paso

Se rayan las filas no marcadas y las columnas marcadas. El elemento menor de la submatriz (que no está rayada) se resta a todos los elementos de esta submatriz y se suma a los elementos situados en la intersección de líneas. Los elementos que solo están rayados no son afectados en su valor.

	1	2	3	4	5
A	5	$\boxed{0}$	7	10	10
B	$\boxed{0}$	6	14	0	3
C	9	6	0	0	$\boxed{0}$
D	0	6	3	2	6
E	3	5	5	$\boxed{0}$	7

Tabla 4-12

8o. paso

Se asigna

5	$\boxed{0}$	7	10	10
$\cancel{0}$	6	14	0	3
9	6	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$
$\boxed{0}$	6	3	2	6
3	5	5	0	7

Tabla 4-13

9o. paso. Si todavía no se resuelve el problema volvemos a aplicar los pasos 6, 7 y 8, hasta que se resuelve o que ya no se puedan crear más ceros.

5	$\boxed{0}$	7	10	10	
0	6	14	0	3	✓
9	6	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	
$\boxed{0}$	6	3	2	6	✓
3	5	5	0	7	✓
✓			✓		

Tabla 4-14

8	$\boxed{0}$	7	13	10	
0	3	11	$\cancel{0}$	0	✓
12	6	0	$\cancel{0}$	0	✓
0	3	0	2	3	✓
3	2	2	$\boxed{0}$	4	✓
			✓		

Tabla 4-15

De la tabla anterior se ve que ya no es posible crear más ceros, ya que el menor valor de la submatriz es cero.

Como último recurso nos decidiremos a asignar uno de los dos
Columna
ceros incluídos en la fila Uno. Para tomar esta decisión nos vamos a la matriz inicial para ver cuál de los dos tiene menor - costo, y resulta que el empate persiste, ambos tienen un valor cada uno. Si nos decidimos por el cero en la Posición (B,1) al vendedor 5 le tocaría la Región D. cuya proporción al costo es de 8. Si nos decidimos por el cero en la posición (D,1) al vendedor 5 le tocaría la tarea B cuya proporción al costo es 5. Entonces 5<8 nos decidimos por asignar el cero en la posición D,1. Se sigue asignando y la distribución queda

	1	2	3	4	5
A	8	$\boxed{0}$	7	13	10
B	0	3	11	0	$\boxed{0}$
C	12	6	$\boxed{0}$	0	0
D	$\boxed{0}$	3	0	2	3
E	3	2	2	$\boxed{0}$	4

Tabla 4-16

Solución

Vendedor	1	Región	D
"	2	"	A
"	3	"	C
"	4	"	E
"	5	"	B

Se ha aplicado el algoritmo del problema de asignación de tal manera que tuviéramos que llegar hasta el último paso. Es posible terminar el problema en cualquiera de los pasos intermedios.

El proceso dado anteriormente es para obtener un máximo, en el caso que fuera un mínimo lo que haríamos multiplicar la matriz efectividad por -1 y operar de la misma manera.
En el caso en que tuviéramos más orígenes que destinos o viceversa, lo que haríamos sería crear una columna o una fila artificial de tal suerte que en la matriz efectividad le colocaríamos a esta fila o columna una efectividad tan pequeña que fuera imposible que hubiera una asignación a esa fila o columna.

SECCION V

EL PROBLEMA DUAL

EL PROBLEMA DUAL

Para cada problema de Programación Lineal existe otro, que le corresponde, llamado Problema Dual.

Los problemas duales pueden ser asimétricos o simétricos. Son asimétricos si en el problema original (lo llamaremos Primitivo) el número de filas en las restricciones es menor que el número de columnas.

La solución al problema primitivo es un vector columnar, para el problema dual es un vector fila.

Por ejemplo si tenemos un problema primitivo.

Encontrar un vector columna $X = (X_1, X_2, X_3 --- Xn)$ que minimiza la función lineal

$$Z = XC \quad (1)$$

Sujeta a las condiciones

$$AX \geq b$$

y

$$X \geq C$$

El problema dual correspondiente sería:

Encontrar el vector fila $W = (w_1, w_2, w_3 \ldots\ldots Wm)$.

que maximice la función lineal

$$g = Wb$$

Sujeta a las condiciones

$$WA \leq C$$

Para el problema dual no existe la restricción $w \geq 0$.

La matriz A es la matriz coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{Tabla 5-1}$$

W = es el vector fila $(w_1\ w_2\ w_3\ \ldots\ldots w_n)$

y C es el vector columna $\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_n \end{bmatrix}$

de donde $WA = C$

$$\begin{aligned} a_{11}\ w_1 + a_{21}\ w_2 + \text{--------} a_{m1}\ w_m &= C_1 \\ a_{12}\ w_1 + a_{22}\ w_2 + \text{---------} a_{m2}\ w_m &= C_2 \\ a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \text{-----} a_{mn} W_n &= C_n \end{aligned}$$

Tabla 5-2

Si observamos la matriz coeficientes de este sistema de restricciones es la transpuestas de la matriz coeficientes del problema original.

La matriz de los términos independientes es la transpuesta de la matriz de coeficientes de la función objetiva en el problema primitivo.

La nueva función objetiva es Wb

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \ldots\ldots W_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$g = b_1 w_1 + b_2\ w_2 + b_3\ w_3 \text{ ------} b_m W_m$$

Tabla 5-3

Ejemplo

El problema primitivo es:

<u>Minimizar</u>

$Z = X_2 - 3X_3 + 2X_5$

sujeto a

$$
\begin{aligned}
X_1 + 3X_2 - X_3 \quad\quad + 2X_5 \quad\quad &= 7 \\
- 2X_2 + 4X_3 + X_4 \quad\quad\quad\quad &= 12 \\
- 4X_2 + 3X_3 \quad\quad + 8X_5 + X_6 &= 10
\end{aligned}
$$

$$X_j \geq 0$$

Tabla 5-4

en donde

$$C = (0\ 1\ -3\ 0\ 2\ 0\ )$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$ Tabla 5-5

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ Tabla 5-6

El problema dual será entonces

Maximizar

$$g = 7w_1 + 12w_2 + 10w_3$$

sujeto a

$$
\begin{aligned}
w_1 &= 0w_2 + 0w_3 \leq 0 \\
3w_1 &- 2w_2 - 4w_3 \leq 1 \\
-w_1 &+ w_2 + 3w_3 \leq -3 \\
0w_1 &+ w_2 + 0w_3 \leq 0 \qquad \text{Tabla 5-7} \\
2w_1 &+ 0w_2 + 8w_3 \leq 2 \\
& \qquad\quad w_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

Tenemos entonces un problema de Programación Lineal por resolver. El Problema Dual puede usarse para resolver el problema primitivo, y las soluciones a las variables de holgura o artificiales (que están positivas en la primera tabla) del problema dual, serán las soluciones a las variables originales del problema primitivo, sin importar el signo.

La correspondencia entre estas variables se hará de la manera siguiente.

Cuando plantiemos el problema original llamaremos con el menor subíndice a la variable de holgura correspondiente a la primera fila y así sucesivamente, entonces a la variable del problema primitivo que tenga menor subíndice, corresponderá el valor de la variable de holgura de menor subíndice en el problema dual.

SECCION VI

PROGRAMACION LINEAL PARAMETRICA

PROGRAMACION LINEAL PARAMETRICA

Existen situaciones en los problemas de Programación Lineal en que resulta difícil determinar con exactitud los coeficientes de las variables, en las restricciones del problema, como también en los coeficientes de la función objetiva y más que todo en el establecimiento exacto de las limitaciones (términos independientes)

Un instrumento de gran importancia para solucionar en parte esta situación es la Programación Lineal paramétrica, en la cual se obtienen parámetros que hacen posibles obtener una solución cuando las condiciones consideradas inicialmente tienen cierta variación. La obtención de parámetros para las restricciones no han sido estudiadas muy a fondo, por lo que en nuestra exposición hablaremos únicamente del parámetro en la función objetiva y en los términos independientes.

PROGRAMACION PARAMETRICA DE LAS LIMITACIONES

Llamaremos con la letra griega λ los parámetros. Las situaciones típicas para el vector independiente son del tipo:

a) $$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ 7 \end{bmatrix}$$ Tabla 6-1

b) $$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+\lambda \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$ Tabla 6-2

c) $$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1+\lambda) \\ 2(1-\lambda) \\ 7 \end{bmatrix}$$ Tabla 6-3

etc....

El proceso de computación de Parámetros que se hará mediante un ejemplo: Encontrar el vector para los valores reales de - que satisfaga:

$$\begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 - X_3 &\leq 3 + \ell \\ -X_1 - X_2 + 2X_3 &\geq 2 - \ell \\ X_1 + X_2 + X_3 &= 3 \end{aligned}$$

Tabla 6-4

y que maximice $Z = 2X_1 + 3X_2 - X_3$

Planteando el problema para $\ell = C$

Restricciones

$$\begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 - X_3 + X_4 &= 3 \\ -X_1 - X_2 + 2X_3 + X_5 - X_7 &= 2 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_6 &= 3 \end{aligned}$$

en donde X_5 y X_6 son variables artificiales

La función objetiva queda entonces:

$$Z = 2X_1 + 3X_2 - X_3 - 100X_5 - 100X_6$$

En donde se ha puesto un coeficiente elevado las variables artificiales, con el objeto de que no aparezcan en la solución final.

Resolviendo

La primera tabla queda:

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	bi
0	X_4	2	3	-1	1	0	0	0	3
-100	X_5	-1	-1	2	0	1	0	-1	2
-100	X_6	1	1	1	0	0	1	0	3

Tabla 6-5

Observemos que la matriz identidad corresponde a las variables X_4, X_5 y X_6

Si seguimos desarrollando Iteraciones hasta llegar a la última tabla en que todos los Δ_j fueran negativos, ésta quedaría así:

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	bi
0	X_4	-1	0	0	1	4/3	-5/3	-4/3	2/3
-1	X_3	0	0	1	0	1/3	1/3	-1/3	5/3
3	X_2	1	1	0	0	-1/3	2/3	1/3	4/3
		3	3	-1	0	-4/3	5/3	4/3	
	Δ_j	-1	0	0	0	$\frac{-296}{3}$	$\frac{-305}{3}$	-4/3	

Tabla 6-6
Solución

Llamaremos B^{-1} a la matriz formada por los coeficientes de los vectores X_4, X_5 y X_6 en la tabla anterior. (debido a que la tabla original estos constituian la matriz identidad)

entonces

$$B^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 4/3 & -5/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{vmatrix} \quad \text{Tabla 6-7}$$

Sabemos además que:

$$b= \begin{vmatrix} 3 + \ell \\ 2 - \ell \\ 3 \end{vmatrix} \quad \text{Tabla 6-8}$$

ahora multiplicamos $B^{-1}b$ y resulta:

$$B^{-1}b= \begin{vmatrix} 2/3 - 1/3\,\ell \\ 5/3 - 1/3\,\ell \\ 4/3 + 1/3\,\ell \end{vmatrix} \quad \text{Tabla 6-9}$$

Investigamos ahora el rango positivo del parámetro: para valores de $\ell \leq 2$ el sistema se conserva no negativo. Para este valor del Parámetro, nosotros podemos obtener otra solución, por medio de otra iteración.

En nuestra última solución están incluídas X_4 X_2 y X_3, sacamos arbitrariamente una de las variables, en este caso nos - decidimos por X_4. La variable que entrará será la que tenga el menor a α_j, en donde α_j es:

$$\alpha_j = \frac{\Delta_j}{arj} \qquad arj < 0$$

En donde **arj**, son los coeficientes de las variables que están en la fila asociada la variable de salida (X_4), que sean - negativos para el caso:

Xi	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_4	$\boxed{-1}$	0	0	1	4/3	$\boxed{-5/3}$	$\boxed{-4/3}$
X_3							
X_2							
$\Delta_j =$	-1					$\frac{-305}{3}$	- 4/3
$\alpha_j =$	1					61	1

Tabla 6-10

El nuevo vector b dando a ℓ su máximo valor= Z y buscando ob tener otro parámetro sería

$$b = \begin{vmatrix} 3 + 2 + \ell' \\ 2 - 2 \quad \ell' \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 + \ell' \\ - \ell' \\ 3 \end{vmatrix}$$

Tabla 6-11

El menor α_j está empatado entre X_1 y X_7, como X_7 es variable artificial nos dedicimos por entrar a X_1, hacemos los cambios correspondientes en las coeficientes y la tabla queda:

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
2	X_1	1	0	0	-1	-4/3	5/3	4/3
-1	X_3	0	0	1	0	1/3	1/3	$\boxed{-1/3}$
3	X_2	0	1	0	1	1	-1	-1
	Soluc.	2	3	-1	1	0	0	0
	Δ_j	0	0	0	-1	-100	-100	0
	α_j							0

Tabla 6-12

Ahora sacamos a X_3 y la variable entrando tendrá que ser X_7 ya que solo ésta tiene un valor α_j.

Para la tabla anterior B^{-1} es igual

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} -1 & -4/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$ Tabla 6-13

y el nuevo vector b es igual a:

$$b = \begin{vmatrix} 5+ & \ell' \\ - & \ell' \\ 3 & \end{vmatrix}$$ Tabla 6-14

de donde

$$B^{-1}b = \begin{vmatrix} 1/3\ \ell' \\ 1 - 1/3\ \ell' \\ 2 \end{vmatrix}$$ Tabla 6-15

Investigamos el rango positivo del parámetro y resulta que el sistema conserva la no negatividad para valores de $\ell' \leq 3$, o sea que la solución es aplicable en un rango de ℓ entre 2 y 5 y que el valor máximo del primer parámetro era 2.

de donde el nuevo vector b será:

$$b = \begin{vmatrix} 5 + 3 + \ell'' \\ -3 - \ell'' \\ 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 + \ell'' \\ -3 - \ell'' \\ 3 \end{vmatrix} \quad \text{Tabla 6-16}$$

Después de sacar X_3 y entrar X_7 la tabla queda:

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
2	X_1	1	0	4	-1	0	3	0
0	X_7	0	0	-3	0	-1	-1	1
3	X_2	0	1	-3	1	0	-2	0
	Soluc.	2	3	-1	1	0	0	0
	Δ_j	0	0	0	-1	-100	-100	0
	αj				1			

Tabla 6-17

Sacamos X_1 y entra X_4 que es la única que tiene un valor para α_j

la matriz B^{-1} es ahora

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{Tabla 6-18}$$

de donde:

$$B^{-1}b = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} X \begin{vmatrix} 8 + \ell'' \\ -3 - \ell'' \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{vmatrix} 1 - \ell'' \\ \ell'' \\ 2 + \ '' \end{vmatrix} \quad \text{Tabl 6-19}$$

El rango positivo para el sistema será con valores de $\ell'' \leq 1$

Entonces esta solución es aplicable para valores de entre 5 y 6.

El nuevo vector b será

$$b = \begin{vmatrix} 8 + 1 + \ell''' \\ -3 - 1 - \ell''' \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 + \ell''' \\ -4 - \ell''' \\ 3 \end{vmatrix}$$

Tabla 6-20

después de introducir X_4 y sacar X_1 la tabla queda:

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
0	X_4	1	0	-4	1	0	-3	0
0	X_7	0	0	-3	0	-1	-1	1
3	X_2	1	1	1	0	0	1	0
	Soluc.	3	3	3	0	0	3	0
	Δ_j	-1	0	4	0	-100	-103	0

Tabla 6-21

La matriz B^{-1} es ahora

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Tabla 6-22

entonces

$$B^{-1}b = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} X \begin{vmatrix} 9 + \ell''' \\ -4 - \ell''' \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{vmatrix} \ell''' \\ 1 + \ell''' \\ 3 \end{vmatrix}$$

Tabla 6-23

En donde el sistema no es negativo, para cualquier valor no negativo de λ"'.

Esta solución es aplicable por cualquier $\ell > 6$, entonces, ya tenemos todo el rango positivo del parámetro y hasta aquí terminan las Iteraciones.

RESUMEN

1) Para $\ell < -4$ no hay solución factible.
2) Para $-4 \leq \ell \leq 2$ la solución está en función de las variables X_4, X_3 y X_2.
3) Para $2 \leq \ell \leq 5$ la solución está para X_1, X_3 y X_2
4) Para $5 \leq \ell \leq 6$ " " " " X_1, X_7 y X_2
5) Para $\ell > 6$ la solución está para X_4, X_7 y X_2.

Para obtener una solución particular damos el valor que queremos (dentro de su rango), seleccionamos la B^{-1} correspondiente y multiplicamos para $\ell = 1$.

$$B^{-1}b = \begin{vmatrix} -1 & -4/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{vmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_2 \end{vmatrix} \quad \text{Tabla 6-2;}$$

PROGRAMACION PARAMETRICA EN LA FUNCION OBJETIVA

En la sección anterior se trató unicamente con parámetros que tienen una función lineal, lo mismo haremos en este caso. Un ejemplo de este tipo podría ser:

$$Z= 2X_1 + (3 - \ell) X_2 + (4 + 3\ell) X_3$$

El proceso a seguir para el cómputo de estos parámetros es el siguiente:

1) Resolvemos el problema, suponiendo que el parámetro vale cero.
2) Incluimos el parámetro en la fila C_j (coeficientes de la función objetiva) y en la columna Ci y computamos los Δ_j.
3) Investigamos el rango positivo del parámetro.
   a) Si para todos los términos de la fila C_j y para todos los valores positivos de ℓ, $\Delta_j \leq 0$, la solución permanece óptima para este rango.
   b) Si algún $\Delta_j > C$ para un $\ell > 0$, determinamos el valor mínimo de ℓ para el cual Δ_j sea cero. A la correspondiente variable la llamamos X_k y la hacemos entrar en la solución mediante una iteración normal, haciendo ver que una variable artificial no puede reentrar en la solución.
   c) La función objetiva paramétrica deberá ser modificada sustituyendo a ℓ por ℓ' + ℓmax, en donde ℓ' es el nuevo parámetro y ℓ max es el límite del valor para el parátro original. Calculamos de nuevo los Δ_j y podría resultar el caso 3 o el caso 3b y se trataran como tal.
   d) Supongamos un Δ_j positivo para un $\ell > 0$ pero teniendo determinada una Xk artificial, es imposible calcular otra iteración. Esto podría suceder solo si todas las aiK son

no positivos. La ocurrencia de una a_{iK} no positiva junto con un Δ_j positivo, sería la condición requerida. Al ocurrir esto, concluimos en que la función objetiva es óptima para todos los valores sobre el límite identificado, y no necesitamos investigar la región positiva del parámetro.

d) La primera solución óptima se reexamina para una nueva solución sobre el rango negativo del parámetro. El procedimiento a seguir es el mismo, solo que es aplicado al rango negativo del Parámetro.

PROBLEMA PRACTICO

RESOLUCION MEDIANTE EL METODO SIMPLEX.

La fábrica de fertilizantes ABC, que se encuentra instalada en el País, produce varios tipos de fórmulas, las cuales son mezcla química de varios productos primarios.

Actualmente la empresa, en la mayoría de sus productos, sufre pérdidas, que en gran parte se deben a la alta depreciación de la maquinaria, por lo cual sus ejecutivos confían que dentro de algún tiempo obtendrán ganancias. Además de lo anterior, existe el costo de las materias primas (productos primarios) - que es bastante elevado, por lo que un desperdicio o mala aplicación de éstos, implica una disminución considerable en las posibles ganancias que pudieran obtenerse.

Para obviar el problema de una aplicación no adecuada de los productos primarios y obtener las fórmulas con la misma efectividad, pero de una manera más económica, se tomarán en cuenta las limitaciones de las fórmulas en cuanto a los porcentajes de materias primas que cada una lleva incluídas.

Las fórmulas que se producen son las siguientes:

N P K

1) 0-20-0
2) 12-24-12
3) 13-13-20
4) 14-14-14
5) 15-15-6-4
6) 16-20-0
7) 20-20-0

Materias primas que se ocupan, junto con sus precios por tonelada métrica, puestas en la fábrica son las siguientes:

MATERIAS PRIMAS	PRECIO POR T.M. en Miles de $
Solución de Nitrógeno	500
Acido Sulfúrico	444
Superfosfato	542
Potasa	247
Magox	210
D.A.P. (Difosfato de Amonio)	866
Urea	250

Para cada fórmula se hacen combinaciones con todas o algunas de las materias primas, en las que mediante reacciones químicas se obtiene el producto deseado y se obtienen además otros productos llamados exipientes, que no tienen aplicación en el mercado, por lo que no se considerarán.
Las materias primas son traídas del extranjero, por lo que no se pueden obtener con facilidad. Se estima que para un año normal se dispondrá de las siguientes cantidades de materias primas las cuales se han solicitado en esas cantidades de acuerdo a la demanda.

MATERIAS PRIMAS	CANTIDAD ANUAL DISPONIBLE EN T.M
Solución de Nitrógeno	11,790
Acido Sulfúrico	4,111
Superfosfato	12,815
Potasa	1,324
Magox	264
D.A.P.	8,582
Urea	231

Cada una de las mezclas está sujeta a ciertas restricciones dentro de la combinación de las materias primas. Estas limitaciones son las siguientes:

Fórmula 0-20-0

Está compuesta exclusivamente de Superfosfato, por lo que se considerará eliminada del problema ya que no nos podemos ahorrar nada mediante una combinación óptima de elementos debido a que no existe tal combinación.

Fórmula 12-24-12

Lleva incluídas en su composición las siguientes materias primas:

Acido Sulfúrico no menos del 5%

Solución de Nitrógeno no menos del 15%

Superfosfato no menos del 25%

D.A.P. no más del 40%

Potasa -----el resto.

Fórmula 13-13-20

Acido Sulfúrico no menos del 16%

Superfosfato exactamente el 15%

Potasa no más del 27%

D.A.P. el resto.

Fórmula 14-14-14

Acido Sulfúrico no menos del 18%

Solución de Nitrógeno no más del 30%

Superfosfato no menos del 16%

D.A.P. no menos del 19%

Potasa el resto.

Fórmula 15-15-6-4

Acido Sulfúrico al menos el 19%

Solución de Nitrógeno no más del 25%

Superfosfato al menos el 21%

D.A.P. al menos el 21%

Potasa al menos el 9%

Magox el resto.

Fórmula 16-20-0

Solución de Nitrógeno al menos el 25%

Superfosfato no más del 43%

D.A.P. no menos del 21%

Acido Sulfúrico el resto.

Fórula 20-20-0

Acido Sulfúrico exactamente el 12%

Solución de Nitrógeno no más del 36%

Superfosfato no menos del 24%

D.A.P. no menos del 26%

Urea el resto

Tenemos las limitaciones en cuanto a cantidades, porcentajes y precios de las materias primas para cada fórmula y en general para todo el sistema de producción, procedamos ahora al planteo de las restricciones lineales y de la función objetiva, que en este caso es la función costos que ha de minimizarse.

Llamemos:

X_1 la cantidad de ácido Sulfúrico en 12-24-12

X_2 " " " " " " 13-13-20

X_3 " " " " " " 14-14-14

X_4 " " " " " " 15-15-6-4

X_5 " " " " " " 16-20-0

X_6 " " " " " " 20-20-0

X_7 la cantidad de Solución de Nitrógeno en 12-24-12

X_8 " " " " " " " 13-13-20

X_9 " " " " " " " 14-14-14

X_{10} " " " " " " " 15-15-6-4

X_{11} " " " " " " " 16-20-0

X_{12} " " " " " " " 20-20-0

X_{13} La cantidad de Superfosfato en 11-12-24

X_{14} " " " " " 13-13-20

X_{15} " " " " " 14-14-14

X_{16} " " " " " 15-15-6-4

X_{17} " " " " " 16-20-0

X_{18} " " " " " 20-20-0

X_{19} La cantidad de D.A.P. en 12-12-24

X_{20} " " " " " 13-13-20

X_{21} " " " " " 14-14-14

X_{22} " " " " " 15-15-6-4

X_{23} " " " " " 16-20-0

X_{24} " " " " " 20-20-0

X_{25} La cantidad de Potasa en 12-24-12

X_{26} " " " " " 13-13-20

X_{27} " " " " " 14-14-14

X_{28} " " " " " 15-15-6-4

X_{29} La cantidad de Magox en 15-15-6-4

X_{30} La cantidad de Urea en 20-20-0

Las restricciones serán:

A partir de las cantidades Disponibles

1) $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \leq 4111$

2) $X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} \leq 11790$

3) $X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{17} + X_{18} \leq 12815$

4) $X_{19} + X_{20} + X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 8582$

5) $X_{25} + X_{26} + X_{27} + X_{28} \leq 1324$

6) $X_{29} \leq 264$

7) $X_{30} \leq 231$

A partir de las Especificaciones

<u>Para 12-24-12</u>

8) $X_1 \geq 0.05 (X_1 + X_7 + X_{13} + X_{19} + X_{25})$

$$0 \geq -95X_1 + 5X_7 + 5X_{13} + 5X_{19} + 5X_{25}$$

$$-19X_1 + X_7 + X_{13} + X_{19} + X_{25} \leq 0$$

9) $X_7 \geq 0,15\ (X_1 + X_7 + X_{13} + X_{19} + X_{25})$

$$-3X_1 + 17X_7 - 3X_{13} - 3X_{19} - 3X_{25} \geq 0$$

10) $X_{13} \geq 0.25\ (X_1 + X_7 + X_{13} + X_{19} + X_{25})$

$$+X_1 + X_7 - 3X_{13} + X_{19} + X_{25} \leq 0$$

11) $X_{19} \leq 0.4\ (X_1 + X_7 + X_{13} + X_{19} + X_{25})$

$$-2X_1 + 2X_7 - 2X_{13} + 3X_{19} - 2X_{25} \leq 0$$

<u>Para 13-13-20</u>

12) $X_2 \geq 0.16\ (X_2 + X_8 + X_{14} + X_{20} + X_{26})$

$$-21X_2 + 4X_8 + 4X_{14} + 4X_{20} + 4X_{26} \leq 0$$

13) $X_8 \leq 0.25\ (X_2 + X_8 + X_{14} + X_{20} + X_{26})$

$$-X_2 + 3X_8 - X_{14} - X_{20} - X_{26} \leq 0$$

14) $X_{14} = 0.15\ (X_2 + X_8 + X_{14} + X_{20} + X_{26})$

$$3X_2 + 3X_8 - 17X_{14} + 3X_{20} + 3X_{26} = 0$$

15) $X_{26} \leq 0.27\ (X_2 + X_8 + X_{14} + X_{20} + X_{26})$

$$-27X_2 - 27X_8 - 27X_{14} - 27X_{20} - 73X_{26} \leq 0$$

<u>Para 14-14-14</u>

16) $X_3 \geq 0.18\ (X_3 + X_9 + X_{15} + X_{21} + X_{27})$

$$-41X_3 + 9X_9 + 9X_{15} + 9X_{21} + 9X_{27} \leq 0$$

17) $X_9 \leq 0.30\ (X_3 + X_9 + X_{15} + X_{21} + X_{27})$

$$2X_3 + 5X_9 + 2X_{15} - 2X_{21} - 2X_{27} \leq 0$$

18) $X_{15} \geq 0.16\ (X_3 + X_9 + X_{15} + X_{21} + X_{27})$

$$+4X_3 + 4X_9 - 21X_{15} + 4X_{21} + 4X_{27} \leq 0$$

19) $X_{21} \geq 0.19\ (X_3 + X_4 + X_{15} + X_{21} + X_{27})$

$$+19X_3 + 19X_4 + 19X_{15} - 81X_{21} + 19X_{27} \leq 0$$

Para 15-16-64

20) $X_4 \geq 0.19\ (X_4 + X_{10} + X_{16} + X_{22} + X_{28} + X_{29})$

$-81X_4 + 19X_{10} + 19X_{16} + 19X_{22} + 19X_{28} + 19X_{29} \leq 0$

21) $X_{10} \leq 0.25\ (X_4 + X_{10} + X_{16} + X_{22} + X_{28} + X_{29})$

$-X_4 + 3X_{10} - X_{16} - X_{22} - X_{28} - X_{29} \leq 0$

22) $X_{16} \geq 0.21\ (X_4 + X_{10} + X_{16} + X_{22} + X_{28} + X_{29}$

$+21X_4 + 21X_{10} - 79X_{16} + 21X_{22} + 21X_{28} + 21X_{29} \leq 0$

23) $X_{22} \geq 0.21\ (X_4 + X_{10} + X_{16} + X_{22} + X_{28} + X_{29})$

$+21X_4 + 21X_{10} + 21X_{16} - 79X_{22} + 21X_{28} + 21X_{29} \leq 0$

24) $X_{28} \geq 0.09\ (X_4 + X_{10} + X_{16} + X_{22} + X_{28} + X_{29})$

$+9X_4 + 9X_{10} + 9X_{16} + 9X_{22} - 91X_{28} + 9X_{29} \leq 0$

Fórmula 16-20-0

25) $X_{11} \geq 0.25\ (X_{11} + X_{17} + X_{23} + X_5)$

$+X_5 - 3X_{11} + X_{17} + X_{23} \leq 0$

26) $X_{17} \geq 0.43\ (X_{11} + X_{17} + X_{23} + X_5)$

$-43X_5 - 43X_{11} + 57X_{17} - 43X_{23} \leq 0$

27) $X_{23} \geq 0.21\ (X_5 + X_{11} + X_{17} + X_{23})$

$+21X_5 + 21X_{11} + 21X_{17} - 79X_{23} \leq 0$

Fórmula 20-20-0

28) $X_6 = 0.12\ (X_6 + X_{12} + X_{18} + X_{24} + X_{30})$

$-22X_6 + 3X_{12} + 3X_{18} + 3X_{24} + 3X_{30} = 0$

29) $X_{12} \leq 0.36\ (X_6 + X_{12} + X_{18} + X_{24} + X_{30})$

$-9X_6 + 16X_{12} - 9X_{18} - 9X_{24} - 9X_{30} \leq 0$

30) $X_{18} \geq 0.24\ (X_6 + X_{12} + X_{18} + X_{24} + X_{30})$

$+X_6 + 6X_{12} - 19X_{18} + 6X_{24} + 6X_{30} \leq 0$

31) $X_{24} \geq 0.26\ (X_6 + X_{12} + X_{18} + X_{24} + X_{30})$

$+13X_6 + 13X_{12} + 13X_{18} - 37X_{24} + 13X_{30} \leq 0$

Una vez planteadas las restricciones, procederemos a la obtención de la función objetiva (Costos)

$$Z = 444 (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6) + 500 (X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12}) + 542 (X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{17} + X_{18}) - 866 (X_{19} + X_{20} + X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) + 247 (X_{25} + X_{26} + X_{27} + X_{28}) + 210X_{29} + 250X_{30}.$$

Se han planteado las restricciones y la función objetiva, el siguiente paso es añadir a las restricciones sus correspondientes variables de holgura y artificiales, de tal suerte que quede elaborada la primera tabla, o sea el programa lineal inicial.

En la primera tabla del Programa Lineal a los ejemplos se les ha cambiado signo ya que se trata de una función Costos - que debe minimizarse, entonces, vamos a maximizar la función menos Costos.

Dado el problema implica un número muy grande de variables, es imposible resolverlo operando "mano a mano", por lo que será programado para resolver por computadoras.

Para resolver el problema por computadoras es necesario hacer primero un diagrama de bloques, en el que se establece de una manera gráfica el proceso del modelo matemático con todas sus variantes, luego esta información es pasada a las tarjetas por medio de perforaciones, luego éstas pasan a una rectificadora que detecta errores en la perforación; una vez perforadas, pasan al cerebro, para las pruebas, si el programa está mal, se reforma el programa, revisando el diagrama de bloques nuevamente, sino únicamente lee la respuesta.

Para nuestro caso particular la respuesta estará dada en toneladas de cada material que se mezclará para todo el año, pero como la planta es de proceso continuo, las cantidades resultantes se dividirán entre los trescientos sesenticinco días y esa sería la cantidad a mezclar diariamente, podría sacarse la cantidad por hora de materia prima a mezclar de cada material, para cada producto químico.

Las respuestas en nuestro problema no han podido ser obtenidas debido a que la máquina con más capacidad a la que se pudo tener acceso es la I.B.M. 14:01 de la Dirección General de

Cartografía que tiene en su memoria 12.000 posiciones, las - cuales no dieron abasto para la resolución del problema, sin-embargo el programa será probado para un problema pequeño que ya ha sido resuelto, [illegible])

Para los modelos de Asignación y Transporte no fue posible encontrar una aplicación práctica debido a que no se disponía de datos y para obtenerlos costaría alrededor de 6 u 8 meses estableciendo costos, distancias, standares de tiempo, etc.

CONCLUSION

La conclusión a que podemos llegar es que la programación lineal es aplicable, únicamente cuando los sistemas están ordenados. En nuestro País apenas comienza el desarrollo de la industria ordenadamente, pero su avance es a pasos agigantados, por lo que el conocimiento de las técnicas de programación lineal se hace necesario para acelerar el progreso en la programación de la producción o de cualquier sistema.

BIBLIOGRAFIA

1) INVESTIGACION DE OPERACIONES

M. Sasieni; A. Yaspan; L. Friedman

2) INVITACION A LA INVESTIGACION DE OPERACIONES

A. Kaufmann y R. Faure

3) METODOS Y MODELOS DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES

A. Kaufmann.

4) LINEAR ALGEBRA

G. Hadley

5) ALGEBRA LINEAL Y PROGRAMACION LINEAL

J. Acher.

6) PROGRAMACION LINEAL

Saul I. Gass.

7) PROGRAMACION LINEAL

Espinoza L. Berrier

8) LINEAR PROGRAMING

Robert W. Llewellyn.