Universidad de El Salvador

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

GEOMETRIA DE UNA FORMA BILINEAL SIMETRICA

Trabajo de Graduación
Presentado por:

JOSE LUIS PREZA RAMOS

Para Optar al Título de:

LICENCIADO EN MATEMATICA

SEPTIEMBRE DE 1991

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR : Dr. FABIO CASTILLO FIGUEROA

SECRETARIO GENERAL : Lic. MIGUEL ANGEL AZUCENA

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO : ING. JOSE FRANCISCO MARROQUIN

SECRETARIO : Ing. JOSE RIGOBERTO MURILLO CAMPOS

ESCUELA DE MATEMATICA

DIRECTOR : Lic. ALBA LILA RICO de TEJADA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

TRABAJO DE GRADUACION

GEOMETRIA DE UNA FORMA BILINEAL SIMETRICA

COORDINADOR : Lic. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

ASESOR : Lic. JOSE JAVIER RIVERA LAZO.

DEDICATORIA.

Deseo dedicar este esfuerzo a la lucha porla justicia social y el progreso y que dia a dia libra con heroico sacrificio mi pueblo Salvadoreño.

Particularmente demando de mis hijos Tania Primavera, Claudia Xochilt, Vladimir Ernesto y José Luis sus propios esfuerzos para que den continuidad a mi especial dedicatoria por lo cual ofrezco este trabajo a ellos. También a mi padre José Preza Marroquín y a todos aquellos que me estimularon de una u otra forma.

AGRADECIMIENTOS.

Quiero dar testimonio de mi profunda gratitud por la solidaridad desinteresada manifestada por las compañeras *Simonetta Rossi* y *Diana Chomsky* quienes me auxiliaron en la versión gráfica de la presente investigación.

I N D I C E

INTRODUCCION

El trabajo aquí presentado se inspira en la crítica de la Enseñanza de la Matemática aparecida en nuestro pais a raiz del crecimiento de la Escuela de Matemática insertada en un movimiento renovador suscitado por una polémica interna entre ingenieros y los primeros matemáticos profesionales. Por otra parte, quiero asegurar la intención de vincularlo a la enseñanza de la física moderna que al pasar de Newton a Einstein requieren de una geometria no Euclideana. Como es nuestra intención no seguir la discusión de Lobachebsky, Gauss y otros sino mas bien tomar los trabajos ya elaborados por matemáticos de primer orden que han orientado ese rumbo . Es así que , en su globalidad, esta monografía se basa en el apéndice III del libro *Algèbre Lineaire et Geometrie Elementaire* de *Jean Dieudonne*; y trata de dar un seguimiento a la investigación sugerida por tal científico.

Subespacios Vectoriales. Homomorfismos

En todo este parágrafe las letras E, F denotarán espacios vectoriales sobre el campo de los números reales.

DEFINICION 1. Un subconjunto V de F es un subespacio vectorial de E si para cualquier par de vectores x, y de V y para cualquier par de escalares α, β se verifica que el vector $\alpha x + \beta y$ pertenece a V.

Denotamos por $P(E)$ al conjunto de todos los subespacios vectoriales de E. Indiscutiblemente E es el más grande y $\{0\}$ el más pequeño. ¿Cuáles son los otros?

PROPOSICION 1. Si V y W son dos subespacios de E, entonces

(1) la intersección $V \cap W$ también lo es;

(2) la suma $V + W$ formada por el conjunto de las sumas $x + y$, donde $x \in V, y \in W$ es el subespacio más pequeño que contiene a la vez a V y a W.

DEMOSTRACION.

(1) Sean a y b dos vectores arbitrarios de $V \cap W$ α, β dos escalares cualesquiera. Por ser elementos de espacios vectoriales en V y en W se tiene que $\alpha a + \beta b$ es un vector de V y de W.
Por consiguiente $V \cap W$ contiene todos los vectores $\alpha a + \beta b$.
(2) Consideremos dos sumas cualesquiera $x + y, z + t$ con x, z en V; y, t en W. Sean α, β dos escalares cualesquiera. Entonces

$$\alpha(x + y) + \beta(z + t) = \alpha x + \beta z + \alpha y + \beta t$$

Usando las propiedades de la estructura de espacio vectorial tenemos

$$\alpha(x + y) + \beta(z + t) = (\alpha a + \beta z) + (\alpha y + \beta t) \text{ es un vector de } V + W$$

Pues $\alpha x + \beta z \in V, \alpha y + \beta t \in W$. Ahora bien, como cualquier vector x de V se puede escribir $x + x + 0$, considerando $0 \in W$ tenemos que $x \in V + W$. Analogamente con cualquier $y \in W$. Así que V y W están contenidos en $V + W$.

Supongamos un subespacio $S \neq V + W$ que cumpla las condiciones: S contiene a V y a W; además S está totalmente incluido en $V + W$.

Esto conduce al absurdo siguiente: por las condiciones de S todo elemento de V está en S, lo mismo que todo elemento de W, pero existen al menos un elemento $x \in V$ y un elemento $y \in W$ tal que la suma $x + y$ es un vector de $V + W$ pero no lo es de S puesto que $S \neq V + W$ solamente $S \subset V + W$. Por consiguiente $V + W$ es el más pequeño subespacio que contiene a la vez a V y a W.

PROPOSICION 2. Las siguientes propiedades entre subespacios vectoriales V, W de E son equivalentes:

(1) $V \cap W = \{0\}$.

(2) Todo vector de $V + W$ se escribe de forma única como suma $x + y$ de un elemento $x \in V$ y otro $y \in W$.

DEMOSTRACION. (2) implica (1). Considerando $z \in V \cap W$. Al escribirse z de manera única se tiene $z + 0 = 0 + z$ ya que z pertenece tanto a V como a W. Si $z \neq 0$ $z + 0 = z$ implica $z \in V$ y $z \notin W$ lo cual contradice la hipotesis $z \in V \cap W$. Luego $z = 0$.

(1) implica (2). Consideremos dos sumas iguales $a + b = x + y$ donde a, x están en V; b, y están en W. Por tanto $a - x = y - b$ pero $a - x \in V, y - b \in W$. Así que, por hipotesis, $a - x = y - b = 0$, pues $V \cap W = \{0\}$ de lo cual se deduce que $a = x, y = b$, que significa la escritura única.

DEFINICION 2. Cuando se verifican las propiedades equivalentes de la proposición 2 se dice que $V + W$ es *suma directa*. Si además $V + W = E$ se dice que V y W son subespacios *suplementarios* en E.

PROPOSICION 3. La imagen $u(V)$ de un subespacio V de E bajo un homomorfismo u de E en F es un subespacio de F. Lo mismo, para cada subespacio W de F, $u^{-1}(W)$ es subespacio de E.

DEMOSTRACION. Como para cualquier par de vectores x, y de V; y cualquier par de escalares α, β: $\alpha x + \beta y \in V$ se tiene $u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$ está en $u(V)$. Ahora, si $x, y \in u^{-1}(W)$ para todo par de escalares $\alpha, \beta, \alpha u(x), \beta u(y), \alpha u(x) + \beta u(y) \in W$; luego $u(\alpha x + \beta y) \in W$.

PROPOSICION 4. Para cada vector $e \neq 0$ de E, la aplicación de $\mathbb{R}$ en E que asigna a cada escalar ξ un único vector ξe de E es un homomorfismo lineal inyectivo.

DEMOSTRACION. Como para cualquier par de escalares α, β se verifica $(\alpha + \beta)e = \alpha e + \beta e$ en virtud de la estructura vectorial de E y **R** la aplicación es lineal. Por otra parte si se tiene $\xi e = \lambda e$ entonces $(\xi - \lambda)e = 0$. Pero $e \neq 0$, por tanto $\xi = \lambda$. De donde la inyectividad.

DEFINICION 3. Para cada vector $e \neq 0$ de E, a la imagen del homomorfismo inyectivo de la proposición 4 se denomina *Recta vectorial* que pasa por e. A todo subespacio H de E que junto a una recta D sean suplementarios de E se denomina *Hiperplano vectorial* en E.

PROPOSICION 5. Una recta vectorial que pasa por e tiene las propiedades siguientes:

(1) es el menor subespacio de E que contiene a e.

(2) no contiene otros subespacios más que el mismo y $\{0\}$.

DEMOSTRACION.

(1) Sea D la recta que pasa por e. Por definición D es el conjunto de los vectores ξe; si V es un subespacio cualquiera, que contiene a e también contiene todos los ξe para todo escalar ξ. Luego D es el más pequeño subespacio de E que contiene al vector e.

(2) Todo vector $z \neq 0$ de D es de la forma $z = \lambda e$ con $\lambda \neq 0$. Así que $e = \lambda^{-1} z$. Para cualquier escalar $\xi : \xi \lambda^{-1} z$ es siempre un vector de D. Si A y B son subespacios suplementarios de D:$A + B = D$ y $A \cap B = \{0\}$. Todo vector de D se escribe de manera única $x + y$ con $x \in A, y \in B$, pero como A y B son subespacios de D existen escalares α, β tales que $\alpha e + \beta e = x + y$. Pero si $x \neq 0 \alpha \neq 0$, luego todos los elementos de A son de la forma $\xi x = (x i \lambda) e$. O sea es la misma recta D. Así que el otro vector $y = \beta e$ no puede ser más que 0 para $x \neq 0$ Luego $B = \{0\}$.

DEFINICION 4. Dado un vector $a \neq 0$. se llama semirrecta vectorial $\Delta°$ abierta (resp. cerrada Δ) que pasa por tales que $\xi > 0$ (resp $\xi \geq 0$). La recta D vectorial que contiene a Δ contiene a la semirrecta abierta complementaria de $\Delta°$, θ sea, los $x \in D$ tales que $-x \in \Delta$.

PROPOSICION 6. Un hiperplano de E está contenido sólo en E y en él mismo.

DEMOSTRACION. Si H es un hiperplano, H está incluido en él mismo, en vitrud de la teoria de los conjuntos. Por otra parte, hay una recta D tal que H y D son suplementarios de E. Todo vector x de E se escribe en la forma $\xi a + y$, con $y \in H$. Ahora si V es un subespacio que contiene a H y $x + \xi a + y \in V$ tal que $x \notin H$

necesariamente $\xi \neq 0$. Esto conduce a la expresión $a=\xi^{-1}x-\xi y$, o sea $a \in V$, significa que la recta que pasa por a y el hiperplano H son suplementarios de V. Pero V es parte de E. Por consiguiente $V=E$.

DEFINICION 5. Dado un endomorfismo u de E, se dice que un vecor x de E es un *vector propio* de u si $x \neq 0$ y si $u(x)=\lambda x$, para un cierto escalar λ. Los escalares λ para los cuales existe un vector propio x tal que $u(x)=\lambda x$ se llaman *valores propios* de u.

PROPOSICION 7. El conjunto $E(\lambda;u)$ formado por todos los vectores $x \in e$ tales que $u(x)=\lambda x$ es un subespacio vectorial de E.

DEMOSTRACION. Sean a, b dos vectores cualesquiera de $E(\lambda;u)$ y α, β dos escalares arbitrarios. Entonces, en virtud del endomorfismo $u(\alpha a + \beta b)=\alpha u(a) + \beta u(b)$ pero $u(a)=\lambda a$, $u(b)=\lambda b$.
Así que $u(\alpha a + \beta b)=\lambda(\alpha a + \beta b)$, lo que significa $\alpha a + \beta b \in E(\lambda;u)$.

Los elementos de $E(\lambda;u)$ son 0 y los vectores propios correspondientes al valor propio λ.

PROPOSICION 8. Para todo escalar λ, $E(\lambda;u)$ es el núcleo del endomorfismo de $u-\lambda \cdot 1_E$

DEMOSTRACION. El núcleo u_0^{-1} de u coincide con $E(0;u)$ como los vectores propios x correspondientes al valor propio λ de u verifican $u(x)=\lambda x$. De donde $u(x)-\lambda x=0$.

Como para la aplicación identidad $1_e(x)=x$, se puede escribir $u(x)-\lambda 1_E(x)=0$. O sea $[u-\lambda 1_E](x)=0$ que significa $E(0;u-\lambda 1_E)=(u-\lambda 1_E)^{-1}(0)$.

PROPOSICION 9. Si u es un endomorfismo de E y g es un isomorfismo de E sobre F entonces todo endomorfismo de F se escribe de manera única en la forma $g \circ u \circ g^{-1}$.

DEMOSTRACION. El diagrama sagital nos muestra como se forman endomorfismo de F

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & F \arrow[d, "g^{-1}"] \\ E \arrow[u, "g"] & E \arrow[l, "u"] \end{tikzcd} \qquad g \circ u \circ g^{-1}$$

pues la composición de homomorfismo es un homomorfismo.

Supongamos dos endomorfismos de F $g \circ u \circ g^{-1} = g \circ v \circ g^{-1}$.

Por caracterización de los isomorfismos se llega $u = v$.

PROPOSICION 10. Para que un endomorfismo u de E sea tal que $u^2 = 1_E$ *es necesario y suficiente que E sea suma directa de los subespacios* $E(1;u)$ *y* $e(-1;u)$.

DEMOSTRACION. Supongamos $u^2 = 1_E$. Para todo $x \in E$ se puede escribir

$$x = \frac{1}{2}\left[x + u(x)\right] + \frac{1}{2}\left[x - u(x)\right]$$

Ahora bien si $y = (1/2)[x + u(x)]$ se tiene

$$u(y) = \frac{1}{2}\left[u(x) - u^2(x)\right] = \frac{1}{2}\left[x - u(x)\right] = y$$

También si $z = (1/2)[x - u(x)]$ se tiene

$$u(z) = \frac{1}{2}\left[u(x) - u^2(x)\right] = -\frac{1}{2}\left[x - ux\right] = -z$$

Con lo que se prueba que $y \in E(1;u)$, $z \in E(-1;u)$ donde $x = y + z$.

Además $E(1;u) \cap E(-1, u) = \{0\}$.

Pues todo $b \in E(1;u) \cap E(-1;u)$ es tal que $u(b) = b = -b$, lo cual nos lleva a fuerza $b = 0$. Concluimos que E es suma directa de $E(1;u)$ y $E(-1;u)$. Por otra parte, si es verdad que E es suma directa de $E(1;u)$ y $E(-1;u)$: para todo $x \in E$ $x = y + z$ con $y \in E(1;u)$,$z \in E(-1;u)$ se tiene

$$u(x) = u(y) + u(z) = y - z$$

$$u^2(x) = u(y) - u(z) = y + z = x$$

Así que

$$u^2(x) = 1_E(x) \text{ para todo } u \in E.$$

Bases

DEFINICION 1. Sea A una parte cualquiera de E y $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ la familia de todos los subespacios de E que contienen a A. Se dice que el subespacio $M = \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha$ formado por la intersección de todos los miembros de la familia (M_α) es *generado* por A.

EJEMPLO. Una recta vectorial se puede formar con la intersección de todos los hiperplanos que la contienen y contienen un punto donde pasa la recta. Toda recta es generada por un vector $\neq 0$.

PROPOSICION 1. El subespacio generado M por un conjunto A es el conjunto de todas las conbinaciones lineales formadas con familias finitas de elementos de A.

Demostración. Sea (x_i) una familia finita de vectores de A. Por definición de A los x_i pertenecen a todos los subespacios que contienen a A; en consecuencia toda combinación lineal de ellos es vector de cada subespacio M_α de donde, toda combinación lineal de tales vectores es de M. Por otra parte si

$$x = \sum_i \gamma_i x_i, \quad y = \sum_j \delta_j y_j$$

son dos combinaciones lineales de elementos de A, el vector

$$\lambda x + \mu y = \sum_i (\lambda \gamma_i) x_i + \sum_j \mu(\delta_j) y_j$$

también es otra combinación lineal de elementos de A. Por consiguiente, el conjunto de estas combinaciones lineales es un subespacio de E que contiene a A y por lo tanto $A = M$.

EJEMPLO. Si (x_i) es una familia cualquiera de vectores, un subespacio generado por sus miembros es la suma de las rectas que pasan los x_i.

DEFINICION 2. Una familia $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ de vectores de E se dice que es *libre* o que sus miembros son linealmente independientes si para cualquier parte finita J de I, la relación

$$\sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha x_\alpha = 0 \text{ implica } \lambda_\alpha = 0, \quad \text{para todo } \alpha \in J$$

Una *Base* del espacio vectorial E es una familia libre cuyos miembros generan E.

PROPOSICION 2. Toda familia libre de vectores de E es base de un subespacio de E.

Demostración. Sea (e_i) una familia libre de vectores $e_i \in E$. Para cada i se tiene una recta vectorial que pasa por e_i formando una familia de rectas (D_i); como $D_i \cap D_j = \{0\}$ si $i \neq j$, la suma $\sum D_i$ es un subespacio de E generado por el conjunto de los miembros de la familia. Como la suma es directa los miembros de la familia generan tal suma directa.

PROPOSICION 3. Si E es generado por un conjunto finito de sus vectores entonces E tiene una base formada por los vectores de ese conjunto.

DEMOSTRACION. Sea $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$ un conjunto que genera el espacio E. Basta que al menos un elemento de A sea $\neq 0$ para garantizar que el conjunto de las partes libres de $A \neq \varnothing$. Consideremos la parte libre más grande y denotémosle por B. $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_s\}$ con $s \leq r$. Examinando el conjunto $B' = B \cup \{x\}$ donde $x \in A$ pero $x \notin B$. La relación $\sum_1^s \lambda_i b_i + \alpha x = 0$ con $\alpha \neq 0$ implica $\lambda_i \neq 0$ para algún $i = 1, 2, ..., s$. Puesto que si $\alpha = 0$ la relación $\sum_1^s \lambda_i b_i = 0$ implica $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., s$ ya que los vectores de B' son linealmente independientes. De aquí resulta $x = \sum_{i=1}^s \alpha^{-1} \lambda_i b_i$ para cualquier $x \in A$.

En virtud que A genera a E y A está constituido por los b_i de B y por los vectores de $A - B$ resulta que para cada $z \in E$

$$z = \sum_1^r \mu_j a_j$$

Como todo $a_j \notin B$ $\quad a_j = \sum_1^s \lambda_i b_i$.

$$z = \sum_1^s \xi_i b_i$$

Luego la familia $(b_i)_{1 \leq i \leq s}$ de vectores de B es libre y genera a E.

PROPOSICION 4. Si E admite una base finita entonces toda otra base tiene exactamente el mismo número de vectores que la primera.

DEMOSTRACION. Basta hacerlo para dos bases, dada una y supuesta otra. Supongamos que E admite una base de n vectores . Por la proposición 3, cualquier otra base tiene a lo sumo n elementos. Razonando por recurrencia sobre n. Cuando $n=0$, $E=\{0\}$, cualquier otra base no tiene elementos. Consideremos la base $(b'_\alpha)_{\alpha\in I}$, un miembro de esa base b'_γ al subespacio V de E generado por b'_γ, o sea la recta que pasa por b'_γ. Luega, el subespacio W formado por las suma directa de las rectas que pasan por los b'_α con $\alpha\neq j$, $\alpha\in I$. También tenemos al espacio E generado por los b_i de la base dada de E con $1\leq i<=m$ y la recta que pasa por b'_γ. Hay una subfamilia $(b_{i_k})_{1\leq k\leq r}$ de la base (b_i) con los i_k distintos tal que el subespacio formado por la suma de las rectas que pasan por los b_{i_k}, V', es suplementario a V en E. O sea $V+V'=E$. Es absurdo afirmar $r=n$ pues resultaría $E=V'$, luego V' tiene una base de r elementos con $r\geq n-1$. Como V y W son suplementarios en E entonces W y V' son isomorfos, en única posibilidad. Así que la familia $(b'_\alpha)_{\alpha\in I-\{\gamma\}}$ base de W tiene a lo sumo $n-1$ vectores.

Por consiguiente el conjunto de índices I tiene a los sumo n elementos que corresponden los vectores de la supuesta base $(b'_\alpha)_{\alpha\in I}$ de E.

PROPOSICION 5. Si $(b_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una base finita de E y σ un endomorfismo de E, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(1) σ es inyectiva.

(2) σ es sobreyectiva.

(3) σ es biyectiva.

(4) $(\sigma(b_\alpha))_{\alpha\in I}$ es base finita de E.

DEMOSTRACION.

(1) implica (4).

Si $\sum\lambda_\alpha\sigma(b_\alpha)=0$, es porque $\sigma(\sum\lambda_\alpha b_\alpha)=0$ por ser un endomorfismo inyectivo, necesariamente $\sum\lambda_\alpha b_\alpha=0$, que implica $\lambda_\alpha=0$ para todo $\alpha\in I$ debido a que los b_i son linealmente independiente de donde los $\sigma(b_\alpha)$ son linealmente independientes. Como cada $y\in E$ se escribe de una única forma $y=\sum\xi_\alpha b_\alpha$ con la base (b_α) por inyectividad $x=\sigma(y)=\sum\xi_\alpha\sigma(b_\alpha)$. Cada x de E se escribe de una única forma con la base $(\sigma(b_\alpha))$.

(4) implica (3)

Para cada $x=\sum\xi_\alpha\sigma(b_\alpha)$ se tiene

$$\sum\xi_\alpha\sigma(b_\alpha)=\sigma\left(\sum\xi_\alpha b_\alpha\right)$$

de donde, existe un $y\in E$ tal que $y=\sum\xi_\alpha b_\alpha$. Por tanto, para cada x, existe y tal que

$$x=\sigma(y).$$

Luego σ es sobreyectiva.

Ahora

$$\sum\xi_\alpha\sigma(b_\alpha)=0 \quad \text{implica} \quad \xi_\alpha=0, \text{ paratodo } \alpha$$

pero como $\sum\xi_\alpha\sigma(b_\alpha)=\sigma(\sum\xi_\alpha b_\alpha)=\sigma(x)$, con $x=\sum\xi_\alpha b_\alpha$ se obtiene $\sigma(x)=0$ implica $x=0$. O sea $\sigma^{-1}(0)=0$.

(3) implica (2)

Obviamente si σ es biyección, σ es sobreyección.

(2) implica (1).

Si σ no fuera inyectiva, $\sigma^{-1}(0)\neq\{0\}$. Sea W el subespacio suplementario de $V=\sigma^{-1}(0)$ en E. Luego $\sigma(V+W)=\sigma(V)+\sigma(W)$ es suma directa pero como $\sigma(V)=\{0\}$, ya que $V=\sigma^{-1}(0)$ de donde

$$\sigma(E)=\sigma(W)$$

Si consideramos $0\neq z\in E$ pero $z\notin\sigma(E)$. Como $\sigma(E)=\sigma(W)$, no existe $y\in W$ tal que $z=\sigma(y)$. Además, como para todo $x\in\sigma^{-1}(0)$: $\sigma(x)=0$. Así que $E\neq\sigma(E)$. Concluyendo la demostración.

Dimensión. Matrices

DEFINICION 1. Un espacio vectorial con base finita se dice que es de dimensión finita. El número de miembros de la base se llama dimensión de E; se denota $dim(E)$. En caso contrario se habla de dimensión infinita.

PROPOSICION 1. Si $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ es base de E, entonces la aplicación $(\xi_i)\to\sum_1^n\xi_i b_i$ que asigna a cada vector de E un vector del espacio $\mathbf{R}^n$ es un isomorfismo de $\mathbf{R}^n$ sobre E. $dim\mathbf{R}^n=dimE$.

DEMOSTRACION. Como cada $x\in E$ se escribe como una única combinación lineal de los vectores de la base, resulta la unicidad de la n-ada de escalares asociada a cada combinación lineal y la exhaustividad de la aplicación. Falta probar la linealidad.

Sean (ξ_i), (λ_i) dos n-adas de escalares, o sea dos vectores de $\mathbf{R}^n$.

Su suma $(\xi_i)+(\lambda_i)=(\xi_i+\lambda_i)$ está asociada univocamente con el vector de E $\sum(\xi_i+\lambda_i)b_i=\sum\xi_i b_i+\sum\lambda_i b_i$ por la estructura vectorial de E; luego nos falta $\alpha(\xi_i)=(\alpha\xi_i)$ implica $\sum(\alpha\xi_i)b_i=\alpha\sum\xi_i b_i$. Con lo que concluimos nuestra demostración.

PROPOSICION 2. Todo subespacio V de un espacio de dimensión finita admite un espacio suplementario W en E.

DEMOSTRACION. Supongamos que E es generado por la reunión de V y los vectores de la familia $(x_i)1im$. Al extraer todas las subfamilias y distinguir a $(x_{i_k})_{1\leq k\leq r}$ donde r es el mayor entero para el cual se cumple que E' sea la suma directa de V y la suma de las rectas que pasan por los x_{i_k}. Vamos a probar que $E=E'$.

Suponer que $E\neq E'$, implica la existencia de un índice j con $1\leq j\leq m$ tal que $x_j\notin E'$. Luego la relacion

$$\lambda x_j+y+\sum_{k=1}^{r}\mu_k x_{i_k}=0,\quad \text{con } y\in V$$

conduce a una contradicción. Veamos el análisis lógico. Si $\lambda\neq 0$, entonces $x_j=-\lambda^{-1}y-\sum\lambda^{-1}\mu_k x_{i_k}$, luego $x_j\in E'$ por definición de E'.

Esto significa $x_j \in E'$ y $x_j \notin E'$; absurdo. En consecuencia $\lambda=0$.

Entonces la relación $y+\sum \mu_k x_{i_k}=0$, que proviene de una suma directa, implica $y=0$. O sea $\sum \mu_k x_{i_k}=0$ lo que a su vez implica para todo $k=1,2,...,r$ $\mu_k=0$, $y=0$. Por lo tanto, para cualquier índice j con $1 \leq j \leq m$ el vector $x_j \in E'$ y por consiguiente $E=E'$. Además como E es la suma directa de V y la suma de las rectas que pasan por los x_{i_k} con $k=1,2,...,r$, la suma de estas rectas es el subespacio suplementario de V en E.

PROPOSICION 3. Para toda descomposición de E en suma directa de dos subespacios V y W se tiene

$$dim(E)=dim(V)+dim(W).$$

DEMOSTRACION. Por ser suma directa de V y W, el espacio E es generado por los vectores de la base de V reunido con los de la base de W; los que a su vez son linealmente independientes. Así que forman una base de E.

Si $dim(V)=p$, $dim(W)=q$, resulta $dim(E)=p+q$.

PROPOSICION 4. Para dos subespacios cualesquiera V y W de E se verifica la relación (de Grassmann)

$$dim(V)+dim(W)=dim(V+W)+dim(V\cap W).$$

DEMOSTRACION. Debido a que $V\cap W$ es subespacio de V y W, la proposición 2 de ésta sección asegura la existencia de los suplementarios de $V\cap W$ en V y W. Sean P, Q los suplementarios de $V\cap W$ en V y en W, respectivamente. De aquí, V es suma directa de $V\cap W$ y P; W es suma directa de $V\cap W$ y Q. Por lo tanto en virtud de la Proposición 3:

$$di(V)=dim(V\cap W)+dim(P)$$

$$dim(W)=dim(V\cap W)+dim(Q).$$

Es claro que $V+W$ es suma directa $V\cap W+P+Q$. Luego, por la proposición 3,

$$dim(V+W)=dim(V\cap W+P)+dim(Q)$$

$$=dim(V\cap W)+dim(P)+dim(Q)$$

Por consiguiente $dim(V+W)=dim(V)+dim(W)-dim(V\cap W)$.

PROPOSICION 5. Si V y W son dos subespacios de E tales que V está incluido en W y ambos tienen igual dimensión entonces V=W.

DEMOSTRACION. Por estar V incluido en W, V admite un subespacio V' de W suplementario de V en W. Por lo tanto $dim(W)=dim(V)+dim(V')$

pero como, por hipótesis, $dim(W)=dim(V)$, entonces $dim(V')=0$, lo cual significa $V'=\{0\}$. En consecuencia $W=V+V'=V$.

DEFINICION 2. Para cada homomorfismo u de E en F, ambos de dimensión finita, se llama *rango de u a la dimensión de la imagen u(E). Se denota por rg(u).* $rg(u)=dim(u(E))$.

PROPOSICION 6. Para cada homomorfismo u de E en F se tiene $rg(u)+dim(u^{-1}(0))=dim(E)$.

DEMOSTRACION. Sea $(b_j)_{1\leq j\leq r}$ una base de $u(E)$. Entonces exite en E una familia $(a_j)_{1\leq j\leq r}$ libre tal que $u(a_j)=b_j$, para cada $j=1,2,...,r$. Se sabe que la suma de las rectas que pasan por cada vector a_j de la familia es un subespacio V de E; con (a_j) como base.

V admite un suplementario W en E. Como $dim W=dim(E)-dim(V)$ supongamos $(c_i)_{1\leq i\leq p}$ base de W.
Cada $z\in E$ puede escribirse de manera única $z=x+y$ donde $x\in V, y\in W$; además $V\cap W=\{0\}$. Consideremos $y\in W$ con $y\neq 0$, asumiendo $u(y)$ verificamos que si $u(y)\neq 0$ entonces

$$u(y)=\sum_1^p \xi_i u(c_i)=\sum_1^r \lambda_j b_j\neq 0,$$

ya que $u(y)\in u(E)$. Llegamos a una contradicción. Esto significa que $y\in V, y\in W; y\in V\cap W$ implica $y=0$, pero esto es absurdo pues se supone $y\neq 0$. Por tanto, si $y\neq 0$, $u(y)=0$ cuando $y\in W$. En este caso se obtiene, todo $y\in W, y\in u^{-1}(0)$. Luego $dim(u^{-1}(0))+dim(u(E))=dim(E)$.

COROLARIO 1. Si u es inyectiva entonces $dim(E)=rg(u)$.

DEMOSTRACION. Usando resultado de la proposición 5, sabiendo que $u^{-1}(0)=\{0\}$ debido a la inyectividad de u, se tiene $rg(u)=dim(E)$.

PROPOSICION 7. Sean $(b_i)_{1\leq i\leq p}$, $(a_j)_{1\leq i\leq q}$ bases de E y F respecivamente. Todo homomorfismo de E en F está determinado completamente por la matriz $M(u)=(\alpha_{ij})$ donde

$$u(b_i)=\sum_{j=1}^{1}\alpha_{ij}a_j,\quad \text{para cada } i.$$

DEMOSTRACION. Consideremos un vector $x=\xi_1b_1+\cdots+\xi_pb_p$ en E y su imagen en F

$$u(x)=\delta_1a_1+\cdots+\delta_qa_q.$$

Pero

$$u(x)=u\left(\sum_1^p\xi_ib_i\right)=\sum_1^p\xi_iu(b_i)$$

Escribiendo las coordenadas de en función de las coordenadas de x respecto a la base de E. Para cada $i=1,2,\ldots,p$

$$u(b_i)=c_i=\sum_{j=1}^{q}\alpha_{ij}a_j.$$

Luego

$$u(x)=\sum_{i=1}^{p}c_i\xi_i=\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_{ij}\xi_i\right)a_j=\sum_{j=1}^{q}\delta_ja_j.$$

En virtud de la proposición 1 de esta sección los $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_q$ son únicos y determinan internamente la imagen $u(x)$ en F.

Es claro que las coordenadas δ_j escritas en función de las coordenadas ξ_i de x se determinan completamente por los coeficientes α_{ij}.

DEFINICION 3. A la matriz (α_{ij}) de la proposición 7 se le llama matriz del homomorfismo u respecto a la base (b_i) de E y a la base (a_j) de F. Se denota por $M(u)$.

Cuando u es un endomorfismo de E sólo se dice la matriz del endomorfismo u respecto a la base (b_i) de E. En este caso $M(u)$ es cuadrada.

Espacios Duales. Ortogonales.

DEFINICION 1. Al espacio vectorial formado por todos los homomorfismos de E en $\mathbf{R}$ se llama *espacio dual de* E (o brevemente el *dual*). Se designa por E^*. A los elementos de este espacio dual se les llama *formas* o *funcionales lineales* sobre E.

PROPOSICION 1. Para toda base $(e_i)_{1 \le i \le n}$ *de* E *existe una, y solamente una, base* $(e_i^*)_{1 \le i \le n}$ *de* E^* *tal que*

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i != j \\ 1, & \text{si } i = j \end{cases}, \text{ para } 1 \le i \le n.$$

DEMOSTRACION. Como $dim(E)=n$ y probamos que E es isomorfo a $\mathbf{R}^n$. Si probamos que E^* y $\mathbf{R}^n$ son isomorfos demostraremos que E y E^* son isomorfos. Para tal efecto definamos la aplicación θ de E^* en $\mathbf{R}^n$ así para cada forma lineal u sobre E $\theta(u)=(u(e_1),...,u(e_n))$donde los $e_1,e_2,...,e_n$ son los vectores de la base de E. Pasemos a verificar que θ es un isomorfismo.

(1) linealidad

Para cada par de formas lineales sobre E : u,v y cada par de escalares α,β

$$\theta(\alpha u+\beta v)=((\alpha u+\beta v)(e_i))_{1 \le i \le n}$$

por definición de suma puntual tiene

$$(\alpha u+\beta v)(e_i)=\alpha u(e_i)+\beta v(e_i)$$

y por ser $\mathbf{R}^n$ un espacio vectorial

$$((\alpha u+\beta v)(e_i))=(\alpha u(e_i))+(\beta v(e_i)) \quad \text{para cada } i=1,2,...,n$$

luego

$$\theta(\alpha u+\beta v)=\alpha(u(e_i))+\beta(v(e_i))$$

$$\theta(\alpha u+\beta v)=\alpha\theta(u)+\beta\theta(v).$$

(2) inyectividad.

Si F es una forma lineal sobre E tal que $F(e_i)=0$, para $1 \leq i \leq n$.

Entonces para todo $x \in E$: $F(x)=0$; F es la aplicación nula. esta es la única forma lineal que satisface

$\theta(f)=(0,0,...,0)$, $\theta^{-1}(0)=f$. De donde, θ es inyectiva.

(3) Sobreyectividad.

Para cada vector $(\xi_i,...,\xi_n)$ de $\mathbb{R}^n$ asociado biunivocamente a un vector $x \in E$ respecto a la base (e_i), $x=\sum \beta_i e_i$.

Pues la escritura única de x conduce a una forma lineal sobre E única

$$u(x)=\beta_1 u(e_1)+ \cdot \cdot \cdot +\beta_n u(e_n).$$

Esta forma lineal existe gracias a la existencia única de los escalares β_i, tal que

$$x=\beta_1 e_1+\beta_2 e_2+ \cdot \cdot \cdot +\beta_n e_n.$$

Así que, para cada $(\xi_1,...,\xi_n)$ en $\mathbb{R}^n$ existe una forma lineal u sobre E tal que

$$u(e_1)=\xi_1, u(e_2)=\xi_2,..., u(e_n)=\xi_n.$$

O sea

$$\theta(u)=(\xi_1,...,\xi_n).$$

Concluimos que E^* es isomorfo a $\mathbb{R}^n$, por lo tanto $dim(E)=dim E^*$.

Este isomorfismo permite pensar que para la base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$(1,0,...,0), (0,1,0,...,0),...,(0,0,...,1)$$

existe una única base (e_i^*) de E tal que

$$\theta(e_i^*) \quad \text{es tal que } e_i^*(e_j)=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

DEFINICION 2. A la base (e_i^*) de E^* de la anterior proposición se denomina base dual de la base (e_i).

PROPOSICION 2. La aplicación que asigna un número real a cada forma lineal, para cada vector $x \in E$ fijo es una forma lineal sobre el dual E^* de E, denotémosla por T_x. Demostrar que la aplicación que asigne a cada $x \in E$ un T_x es un isomorfismo de E sobre el dual de E^*.

DEMOSTRACION. Definiendo $T_x(u)=u(x)$, para cada $u \in E^*$ tenemos

$$T_{x+y}(u)=u(x+y)=u(x)+u(y)=T_x(u)+T_y(u).$$

O sea,

$$T_{x+y}=T_x+T_y.$$

Además

$$T_{\alpha x}(u)=u(\alpha x)=\alpha u(x)=\alpha T_x(u).$$

Luego

$$T_{\alpha x}=\alpha T_x.$$

Esto demuestra que la aplicación $x \to T_x$ es lineal.

Verificando la biyectividad sea $T_x=T_y$. Entonces para cada $u \in E^*$ se tiene $T_x(u)$ implica $u(x)=u(y)$. Luego, para cada forma lineal u : $u(x-y)=0$ implica necesariamente $x-y=0$. Por tanto u es inyectiva.

Ahora bien, sean (e_i) una base de E y (e_i^*) su base dual. Escribamos T_{ei} elementos del dual de E^*. Probemos que forman base de E^{**}. O sea (T_{ei}) es base dual de (e_i^*).

Por definición, para todo $u \in E^*$,

$$T_{e_i}(u)=u(e_i).$$

Luego $T_{ei}(e_j^*)+e_j^*(e_i)$. Pero como las e_j^* forman la base dual de la base (e_i)de E se obtiene

$$e_j^*(e_i)=\begin{cases}0, \text{ si } i\neq j\\ 1, \text{ si } i=j\end{cases} \quad \text{para } 1\leq i\leq n$$

donde $T_{ci}(e_j^*)=0$ si $i \neq j$; $T_{ei}(e_i^*)=1$, (T_{ci}) es base dual de (e_i^*). Así que la aplicación $x \to T_x$ de E en el dual de E^*.

DEFINICION 3. Al dual de E^* se llama bidual de E y se denota por E^{**}.

DEFINICION 4. Se dice que un vector $x \in E$ y un vector u del dual de E son *ortogonales* si $u(x)=0$. Si M es un subconjunto del dual de E, se dice que M y N son ortogonales si todo vector de M es ortogonal a todo vector de N.

PROPOSICION 3. El conjunto ortogonal de un subespacio V de E es subespacio de dual de E.

DEMOSTRACION. Para cualquier par de formas lineales sobre E u,v tales que $u(x)=v(x)=0$ para todo $x \in V$ se satisface

$$\alpha u(x)+\beta v(x)=0, \text{ para cualquier par de escalares } \alpha,\beta.$$

Notación. Se designa por V° al subespacio ortogonal de V.

PROPOSICION 4. Para cada subespacio V de E se tiene $dim(V)+dim(V^{\circ})=dim(E)$.

DEMOSTRACION. Si $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ es una base de V que puede extenderse para obtener una base de E, sea $(e_1,e_2,\ldots,e_p,e_{p+1},\ldots,e_n)$ base de E consecuentemente $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ es su base dual. Cualquier forma lineal u, particularmente las ortogonales a los vectores de V satisfacen

$$u=\sum_{i}^{n}\xi_i e_i^*.$$

Si suponemos $u \in V^{\circ}$, para cualquier $e_1,\ldots,e_p$, $u(e_1)=u(e_2)= \cdot \cdot \cdot =u(e_p)=0$.

Esto significa

$$u(e_j)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i^*(e_j)=\xi_j=0, \text{ para } 1 \leq j \leq p.$$

En consecuencia V° es generado por los $e_{p+1}^*,\ldots,e_n^*$. Luego $dim(V^{\circ})=n-p$, donde $p=dim(V)$.

PROPOSICION 5. Para todo subespacio V de E se tiene

$$(V^{\circ})^{\circ}=V.$$

DEMOSTRACION. Utilizando los resultados de la proposición 2, si identificamos los T_x tales que para los $u \in V^{\circ}$ se tiene $T_x(u)=u(x)=0$, cuando $x \in V$, $T_x \in (V^{\circ})^{\circ}$.

Luego $dim(V^{\circ})+dim(V^{\circ})^{\circ}=dim(E^*)$, pero $dim(E^*)=dim(E)=dim(V)+dim(V^{\circ})$. En consecuencia $dim(V^{\circ})^{\circ}=dim(V)$.

Por otro lado $x \in V$ implica $u(x)=0$, para $u \in V^{\circ}$, luego $x \in (V^{\circ})^{\circ}$ pues $u(x)=0$ para cualquier $u \in V^{\circ}$.

Resulta que

$$V \subset (V^{\circ})^{\circ} \text{ y } dim(V)=dim(V^{\circ})^{\circ}$$

por un teorema anterior

$$V=(V^{\circ})^{\circ}.$$

PROPOSICION 6. Para dos subespacios cualesquiera V, W,

(1) $(V+W)^{\circ}=V^{\circ}\cap W^{\circ}$

(2) $(V\cap W)^{\circ}=V^{\circ}+W^{\circ}$.

DEMOSTRACION. (1). Para cualquier suma $x+y$ con $x \in V$, $y \in W$, $u(x+y)=0$ si y sólo si $u(x)=u(y)=0$, pues todo $x \in V$ $x=x+0$, lo mismo con $y \in W: y=0+y$.

Por lo tanto $u \in V^{\circ}$, $u \in W^{\circ}$ o sea $u \in (V+W)^{\circ}$ equivalente $u \in V^{\circ}\cap W^{\circ}$.

(2) Aplicando el resultado anterior (1) a $V^{\circ}+W^{\circ}$,

$$(V^{\circ}+W^{\circ})^{\circ}=(V^{\circ})^{\circ}\cap(W^{\circ})^{\circ}=V\cap W$$

$$V^{\circ}+W^{\circ}=((V^{\circ}+W^{\circ})^{\circ})^{\circ}=(V\cap W)^{\circ}$$

de donde se obtiene el resultado requerido.

La traspuesta

DEFINICION 1. Para todo homomorfismo u de E in F se llama traspuesta de u al homomorfismo ${}^t u$ de F^* en E^* tal que para cada forma lineal sobre F

$$ {}^t u(f) = f \circ u. $$

PROPOSICION 1. La aplicación que asigna a cada homomorfismo u de E en F su traspuesta ${}^t u$ es un isomorfismo.

DEMOSTRACION. Sean u, v dos homomorfismos de E en F cualesquiera y sean α, β dos escalares arbitrarios. Por definición de traspuesta

$$ {}^t(\alpha u + \beta v)(f) = f \circ (\alpha u + \beta v) $$

para cada forma lineal sobre F.

Siendo x un vector cualquiera de E la imagen

$$ f \circ (\alpha u + \beta v)(x) = f(\alpha u(x) + \beta v(x)) $$

$$ = \alpha f(u(x)) + \beta f(v(x)) = [\, \alpha(fu) + \beta(fv)] \,(x) $$

O sea

$$ f \circ (\alpha u + \beta v) = \alpha(f \circ u) + \beta(f \circ v) $$

$$ {}^t(\alpha u + \beta v) = \alpha {}^t u + \beta {}^t v. $$

De donde la linealidad.

Suponiendo, ahora, ${}^t u = {}^t v$; para toda forma lineal f, ${}^t u(f) = {}^t v(f)$; luego $f \circ u = f \circ v$ para toda f. De donde, para cada $x \in E$,

$$ fu(x) = fv(x) \text{ implica } f(u(x) - v(x)) = 0. $$

O sea, $f((u-v)(x))=0$ para toda f.

La única posibilidad es $u-v=0$. Luego $u=v$. Ahora bien, si γ es un homomorfismo de F^* en E^*, para cualquier forma lineal f sobre F:$\gamma(f)$ es una forma lineal sobre E. De donde existe un homomorfismo u de E en F tal que $f \circ u=\gamma(f)$. En consecuencia γ es la traspuesta de algún homomorfismo u, ${}^t u=\gamma$.

Concluimos $\mathrm{Hom}(F^*,E^*)$ es isomórfico a $\mathrm{Hom}(E,F)$ por lo tanto dim $\mathrm{Hom}F^*,E^*)=\dim(E,F)$.

PROPOSICION 2. Si E, F, G son tres espacios vectoriales de dimensión finita y si $u \in \mathrm{Hom}(E,F)$ *y* $v \in \mathrm{Hom}(F,G)$ *entonces*

$${}^t(v \circ u)={}^t u \circ {}^t v$$

DEMOSTRACION. Por definición de traspuesta, para cada $g \in G^*$, se tiene

$${}^t(v \circ u)(g)=g \circ (v \circ u)=(g \circ v) \circ u$$

pero

$$g \circ v \in F^*, \text{ así que } g \circ v) \circ v={}^t u(g \circ v)$$

Además $g \circ v={}^t v(g)$; luego ${}^t(v \circ u)(g)={}^t u({}^t v(g))$. Por consiguiente

$${}^t(v \circ u)={}^t u \circ {}^t v.$$

PROPOSICION 3. La traspuesta de un automorfosmo de E es un automorfismo de e^*.

DEMOSTRACION. Primero, mostramos que si ι_E es la aplicación identidad en E, su traspuesta es la identidad en E^*.

Sea ${}^t\iota_E$ la traspuesta de ι_E. Para toda forma lineal sobre E, se tiene

$${}^t\iota_E f=f \circ \iota_E=f$$

luego ${}^t\iota_E=\iota_{E^*}$.

Siendo los automorfismos inversibles, se tiene que para cada automorfismo u existe otro automorfismo v tal que $u \circ v = v \circ u = \iota_E$.

Luego ${}^t(u \circ v) = {}^t(v \circ u) = {}^t\iota_E$; de donde ${}^tv \circ {}^tu = {}^tu \circ {}^tv = \iota_{E^*}$. Esto significa ${}^t(u^{-1}) = ({}^tu)^{-1}$.

PROPOSICION 4. Si V es un subespacio cualquiera de E y u es un homomorfismo de E en F, entonces

$$\left[U(V)\right]^\circ = ({}^tu)^{-1}(V^\circ).$$

En particular

$$(u(E))^\circ = ({}^tu)^{-1}(0).$$

DEMOSTRACION. La relación $f \in [u(V)]^\circ$ equivale $fu(x)=0$ para todo $u(x)$ de $u(V)$. Equivalente a decir $f \circ u \in V^\circ$. Esto equivale a escribir ${}^tu(f) \in V^\circ$, que es lo mismo que $f \in ({}^tu)^{-1}(V^\circ)$.

Particularmente, si $V=E$, $E^\circ = \{0\}$; de donde se obtiene la fórmula $(u(E))^\circ = ({}^tu)^{-1}(0)$.

PROPOSICION 5. Para cada homomorfismo u de E en F se tiene $rg({}^tu) = rg(u)$.

DEMOSTRACION. Por una parte se sabe $\dim F = \dim(u(E)) + \dim(u(E))^\circ$. Pero, también se sabe $(u(E))^\circ = ({}^tu)^{-1}(0)$ entonces

$$\dim F = rg(u) + \dim({}^tu)^{-1}(0).$$

Trabajando en el dual de F, se tiene

$$\dim F^* = rg({}^tu) + \dim({}^tu)^{-1}(0)$$

pero $\dim F = \dim F^*$. Por consiguiente $rg(u) = rg({}^tu)$.

PROPOSICION 6. Para todo homomorfismo u de E en F se tiene ${}^t({}^tu) = u$.

Particularmente $(u^{-1}(0))^\circ = {}^tu(F^*)$.

DEMOSTRACION. Trabajando con los duales de E y F. La definición de traspuesta sería: Para cada homomorfismo ${}^tu$ de F^* en E^*, la traspuesta de ${}^tu$ es un homomorfismo del bidual de E en el bidual de F, pero siendo idénticos por identificación isomórfica,

$$ {}^t({}^tu)(T_x)=T_x{}^tu, \quad \text{identificando } x \text{ con } T_x. $$

Pero para cualquier forma lineal sobre F, f se tiene

$$ T_x{}^tu(f)=T_x({}^tu(f))={}^tu(f)(x)=(f\circ u)x)=f(u(x)), $$

lo que sería bajo la identificación $u(x)$ con $T_{u(x)}$ en F_yF^{**}. Así que

$$ T_x{}^tu(f)=T_{u(x)(f)}. $$

Por lo tanto $T_x\circ{}^tu=T_{u(x)}$; en consecuencia se identifica

$$ {}^t({}^tu)=u. $$

Particularmente, sabemos ${}^tu^{-1}(0)=(u(E))^\circ$.

Utilizando la dualidad ${}^t({}^t(u^{-1}))(0)=({}^tu(F^*))^\circ$ resulta $u^{-1}(0)=({}^tu(F^{*}))^\circ$; pero $(({}^tu(F^{*}))^\circ)^\circ={}^tu(F^*)$ de donde $(u^{-1}(0))^\circ={}^tu(F^*)$.

Aplicaciones Multilineales. Determinantes.

DEFINICION 1. Sean $E_1, E_2, \ldots, E_q, F$ $q+1$ espacios vectoriales. Una aplicación q-lineal de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_q$ en F es una aplicación u que es lineal en cada uno de los argumentos. Cuando $F = \mathbf{R}$ se dice forma q-lineal.

DEFINICION 2. Una forma q-lineal u de E^q en $\mathbf{R}$ se dice *alternada* cuando

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0$$

cada vez que haya dos indices distintos $i<j$ tales que $x_i = x_j$.

PROPOSICION 1. Si u es una forma q-lineal alternada sobre E^q entonces

$$U(x_1 x_2, \ldots x_i \ldots x_j, \ldots, x_q) = -U(x_1, \ldots x_j, \ldots x_i \ldots x_q).$$

Tomemos $u(x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_j + x_i, \ldots, x_q) = 0$ pues $x_i + x_j = x_j + x_i$ por ser multilineal se tiene $u(x_1, \ldots x_i, \ldots, x_j, \ldots x_q) + u(x_1, \ldots x_j, \ldots, x_i, \ldots x_q) = 0$, ya que

$$u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots x_q) = 0$$

$$u(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_j, \ldots x_q) = 0.$$

COROLARIO 1. S Ψ es una forma lineal alternada sobre E^2 entonces $\Psi(x,y) = -\Psi(y,x)$.

DEMOSTRACION. $\Psi(x+y, x+y) = 0$ implica $\Psi(x,x) + \Psi(y,y) + PSI(x,y) + \Psi(y,x) = 0$

de donde $\Psi(x,y) + \Psi(y,x) = 0$.

DEFINICION 3. Si u es un endomorfismo de E. Para toda forma q-lineal alternada sobre E^q, Ψ, se verifica

$\Psi(u(x_1), \ldots, u(x_q)) = \det(u) \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ donde $\det(u)$ es un escalar llamado determinante de u.

PROPOSICION 2. El determinante del endomorfismo identidad de E es 1.

DEMOSTRACION. Sea ι_E la identidad de E. Luego, debido a que $\Psi(iota_E(x_1),...,\iota_E(x_q))=\Psi(x_1,...,x_q)$.

Por consiguiente $\det(\iota_E)=1$.

PROPOSICION 3. Si u y v son dos endomorfismos de E entonces $\det(u\circ v)=\det(u)\cdot\det(v)$.

DEMOSTRACION. Por definición 3 tenemos $\Psi(u(v(x_1)),...,u(v(x_q)))=\det(u\circ v)\Psi(x_1,...,x_q)$. Pero

$$\Psi(u(v(x_1)),...,u(v(x_q)))=\det(u)\Psi(v(x_1),...,v(x_q))$$

$$=\det(u)\det(v)\Psi(x_1,...,x_q)$$

luego

$$\det(u)\det(v)\Psi(x_1,...,x_q)=\det(u\circ v)\Psi(x_1,...,x_q).$$

Simplificando llegamos al resultado buscado.

PROPOSICION 4. Para que $\det(u)\neq 0$ *es necesario y suficiente que u sea biyectivo.*

DEMOSTRACION. Si u es biyectivo entonces u^{-1} lo es también. Además $uu^{-1}=u^{-1}u=1_E$. Luego $det(u^{-1}\circ u)=\det(u^{-1})\det(u)=\det(1_E)=1$. A fortiori $\det(u)\neq 0$.

Por otra parte, si u no fuera biyectivo, entonces u nosería inyectivo pues si así fuera $u^{-1}(0)=0$ y la relación $\dim E=\dim u^{-1}(0)+rg(u)$ implicaría $rg(u)=\dim E$, lo cual equivale afirmar que u es sobreyectiva pues $u(E)\subset E$ y $\dim E=rg(u)$ implican $E=u(E)$ produciendose una contradicción al suponer que u no es biyectiva y deduciendo que lo es si u fuera inyectiva.
Consideremos ahora un vector $b_1\neq 0$ tal que $u(b_1)=0$. Hay una base (b_i) de E de la cual b_1 es uno de sus miembros. Supongamos $q\leq n$. Para cualquier forma q-lineal alternada sobre E^q se tiene

$$\Psi(u(b_1),...,u(b_q))=\det(u)\Psi(b_1,...,b_q).$$

Como $b_1\neq b_j$ para $j>1$, entonces $\Psi(b_1,...,b_q)\neq 0$. Pero como $u(b_1)=0$, por linealidad de Ψ

$$\Psi(0,u(b_2),...,u(b_q))=0.$$

La relación $\det(u)\Psi(b_1,...,b_q))=0$ implica $\det(u)=0$.

DEFINICION 4. El $\det(u)$ es el determinante de la matriz de u, $M(u)$, respecto a la base (e_i) de E.

PROPOSICION 5. Para cada endomorfismo u:$\det(u)=\det({}^tu)$.

DEMOSTRACION. Sea α_{ij} la matriz $M(u)$ de u respecto a la base (e_i). La traspuesta de u, ${}^tu$, está determinada totalmente por la matriz $M({}^tu)$ de ${}^tu$ respecto a la base dual (e_j^*) de E^*.

Para cada $i=1,2,...,n$ $u(e_i)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j$.

Para cada $j=1,2,...,n$ ${}^tu(e_j^*)=\sum_{i=1}\beta_{ji}e_i^*$.

Vamos a calcular los coeficientes β_{ij} de $M({}^tu)$ en función de los coeficientes α_{ij} de $M(u)$. En tal efecto

$${}^tu(e_j^*)=e_j^*\cdot u=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ji}e_i^*$$

lo que significa que para todo $x\in E$ es tiene $e_j^*(u(x))=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ji}e_i^*(x)$.

Pero $x=\sum_1^n\xi_ie_i$. Luego $u(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ie_i$ donde $\xi_i=e_i^*(x)=\sum\xi_ie_i^*(e_i)$, pues $e_i^*(e_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

Por lo cual

$$e_j^*u(x)=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ji}\xi_i;\quad e_j^*u(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ie_j^*(e_i)$$

donde

$e_j^*(e_i)=0$ si $i\neq j$

$e_j^*(e_i)=1$, si $i=j$.

Por lo cual $e_j^* u(x)=\lambda_j$, para cada $j=1,2,...,n$. Así que la relación ${}^t u(e_j^*)(x)=\sum \beta_{ji} e_i^* = e_j^*(u(x))$ equivale a la relación $\sum \beta_{ji}\xi_i=\lambda_j$.

Pero como por la definición de la matriz (α_{ij}) de u se tienen las relaciones

$$e_j^*(u(e_i))=\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_j^*(e_k)=\alpha_{ij},$$

$$e_j^* u(x)=\sum \xi_i e_j u(e_k))$$

Debido a que

$$\lambda_j=e_j^* u(x)=\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i \qquad \text{para } 1\le i\le n,\ \ 1\le j\le n..$$

Comparando

$$\sum_{i=i}^{n} \alpha_{ij}\xi_i=\sum_{i=1}^{n} \beta_{ji}\xi_i$$

resulta $\beta_{ji}=\alpha_{ij}$ para cada $i,j=1,2,...,n$.

Como en este caso $M(u)$ y $M({}^t u)$ son matrices cuadradas.

Por cálculo de matrices resulta $\det(u)=\det M(u)=\det M({}^t u)=\det({}^t u)$.

DEFINICION 5. $\det(u-x1_E)=0$ se llama ecuación característica del endomorfismo u; polinomio característico de u : $\det(u-\lambda 1_E)$.

Forma bilineal simétrica

DEFINICION 1. Una formal bilineal φ sobre E^2 es una aplicación que satisface las dos condiciones siguientes:

1) la aplicación parcial asociada a φ por la izquierda, denotada por $S_\varphi(x)$, y definida así:

para todo vector y de E:$S_\varphi(x)(y)=\varphi(x,y)$ es una forma lineal sobre E.

2) la aplicación parcial asociada a φ por la derecha, denotada por $d_\varphi(y)$ definida así

Para todo vector $x \in E$:$d_\varphi(y)(x)=\varphi(x,y)$ es una forma lineal sobre E.

PROPOSICION 1. Las aplicaciones que asocian a cada vector z de E las formas lineales sobre E $S_\varphi(z)$, $d_\varphi(z)$ son homomorfismos de E en E^*.

DEMOSTRACION. Sean x,y vectores cualesquiera de E, y sean α,β escalares arbitrarios. Entonces, por definición, para todo $a \in E$,

$$S_\varphi(\alpha x+\beta y)(a)=\varphi(\alpha x+\beta y,a)$$

$$=\alpha\varphi(x,a)+\beta\varphi(y,a)$$

$$=\alpha S_\varphi(x)(a)+\beta S_{hpi}(y)(a)$$

$$=[\alpha S_\varphi(x)+\beta S^\varphi(y)](a)$$

Por consiguiente $S_\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha S_\varphi(x)+\beta S_\varphi(y)$.

Procediendo por analogia para d_φ

$$d\varphi(\alpha x+\beta y)(a)=\varphi(a,\alpha x+\beta y)$$

$$=\alpha\varphi(a,x)+\beta\varphi(a,y)$$

$$=\alpha d_\varphi(x)(a)+\beta d_\varphi(y)(a)$$

$$=[\alpha d_\varphi(x)+\beta d_\varphi(y)](a)$$

Luego $d_\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha d_\varphi(x)+\beta d_\varphi(y)$.

De aquí se concluye, por definición 1, $\varphi(x,y)=S_\varphi(x)(y)=d_\varphi(y)(x)$.

PROPOSICION 2. ${}^t d_\varphi=S_\varphi$; ${}^t S_\varphi=d_\varphi$; $rg(S_\varphi)=rg(d_\varphi)$.

DEMOSTRACION. Utilizando los duales y los biduales, como la identificación isomórfica de E con su bidual

$d_\varphi \in \mathrm{Hom}(E,E^{*})$; ${}^t d_\varphi \in \mathrm{Hom}(E^{**},E^{*})$.

Para cada $x \in E$, $T_x \in E^{**}$, T_x idéntico a x.

${}^t d_\varphi(T_x)$ es un vector del dual de E.

Para todo $y \in E$; por definición de traspuesta,

$${}^t d_\varphi(T_x)=T_x d\varphi=d_\varphi(x);\text{ luego}$$

por definición de los T_x resulta

$${}^t d_\varphi(T_x)(y)=T_x(d_\varphi(y))=(d_\varphi(y)(x)=(S_\varphi(x))(y)$$

luego ${}^t d_\varphi(T_x)=S_\varphi(x)$

por identidad isomórfica ${}^t d_\varphi=S_\varphi$.

Analogamente, $S_\varphi \in \mathrm{Hom}(E,E^{*})$, ${}^t S_\varphi \in \mathrm{Hom}(E^{**},E^{*})$.

Para todo $x \in E$,

$${}^t S_\varphi(T_y)(x)=(T_y \circ S_\varphi)(x)=T_y(S_\varphi(x))=S_\varphi(x)(y)=d_\varphi(y)(x)$$

de donde ${}^t S_\varphi(T_y)=d_\varphi(y)$.

Como T_y identico isomórfico de y por le isomorfismo canónico, resulta ${}^t S_\varphi=d_\varphi$.

Finalmente, se sabe $rg(u)=rg({}^t u)$. En nuestro caso $rg(S_\varphi)=rg({}^t S_\varphi)+RG(d_\varphi)$.

DEFINICION 2. La forma bilineal φ sobre E^2 es *no degenerada* si S_φ y d_φ son ambos biyectivas.

PROPOSICION 3. La relación $d_\varphi = S_\varphi$ equivale a la relación $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$ cualesquiera sean x,y.

DEMOSTRACION. Sabemos $\varphi(x,y)=d_\varphi(y)(x)=S_\varphi(x)(y)$. Si suponemos $S_\varphi=d_\varphi$, entonces $\varphi(x,y)=S_\varphi(x)(y)=d_\varphi(x)(y)=\varphi(y,x)$.

Ahora bien si $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$, tenemos $d_\varphi(y)(x)=\varphi(x,y)=\varphi(y,x)=d_\varphi(x)(y)=S_\varphi(y)(x)$ de donde $d^\varphi=S_\varphi$.

DEFINICION 3. La forma bilineal φ se dice *simétrica* si para cualquier par de vectores x,y de E

$$\varphi(x,y)=\varphi(y,x); \quad M(\varphi)={}^tM(\varphi).$$

PROPOSICION 4. Si φ es una forma bilineal simétrica no degenerada entonces S_φ y d_φ son isomorfismos de E sobre E^*.

DEMOSTRACION. S_φ, d_φ son homomorfismos biyectivos porque φ es no degenerado.

En lo sucesivo φ será forma bilineal simétrica no degenerada, si no se dice otra cosa.

DEFINICION 4. Dos vectores $x,y \in E$ son *ortogonales* respecto a φ si x y $S^\varphi(y)$ lo son. O sea, si

$$S_\varphi(x)(y)=\varphi(x,y)=0.$$

PROPOSICION 5. Para todo subespacio V de E su ortogonal respecto a φ es el subespacio $S_\varphi^{-1}(V^\circ)$ de E.

DEMOSTRACION. V° es subespacio de E^*: ortogonal de V, $S_\varphi \in \mathrm{Hom}(E,E^*)$; luego $S_\varphi^{-1}V^\circ$ es subespacio de E, isomórfico a V° puesto que φ no es degenerado, S_φ^{-1} es isomorfismo de E^* sobre E. Toda forma lineal sobre E ortogonal a un vector x de V se identifica con un vector de $S_\varphi^{-1}(V^\circ)$ por la intervención de φ.

DEFINICION 5. Al subespacio de E ortogonal (respecto a φ) del subespacio V de E se denote por $V^\perp$.

PROPOSICION 6. Para cualquier par de subespacios de E V, W se verifican las propiedades

(1) $\dim(V)+\dim(V^\perp)=\dim E$

(2) $(V+W)^\perp=V^\perp \cap W^\perp$

(3) $(V \cap W)^{\perp} = V^{\perp} + W^{\perp}$

(4) $(V^{\perp})^{\perp} = V$.

DEMOSTRACION.

(1) Como S_{φ} es un isomorfismo tenemos $S_{\varphi}(V)$ isomórfico a V; de donde $\dim V = \dim S_{\varphi}(V)$. Sabemos

$$V^{\perp} = S_{\varphi}^{-1}(V^{\circ})$$

por definición, pero como

$$(S_{\varphi}(V))^{\circ} = {}^{t}S_{\varphi}^{-1}(V^{\circ}) = d_{\varphi}^{-1}(V^{\circ}) = S_{\varphi}^{-1}(V^{\circ}),$$

$$V^{\perp} = S_{\varphi}^{-1}(V^{\circ}) = S_{\varphi}(V))^{\circ},$$

luego la relación

$$\dim E = \dim S_{\varphi}(V) + \dim(S_{\varphi}(V))^{\circ}$$

implica

$$\dim E = \dim V + \dim V^{\perp}$$

(2) La relación $(V+W)^{\perp} = (S_{\varphi}(V+W))^{\circ}$ implica

$$(V+W)^{\perp} = \left[S_{\varphi}(V) + S_{\varphi}(W)\right]^{\circ} = (S_{\varphi}(V))^{\circ} \cap (S_{\varphi}(W))^{\circ}$$

$$= V^{\perp} \cap W^{\perp}$$

(3) $(V \cap W)^{\perp} = (S_{\varphi}(V \cap W))^{\circ} = (S_{\varphi}(V) \cap S_{\varphi}(W))^{\circ}$ por biyectividad de S_{φ}.

Como $(S_{\varphi}(V) \cap S_{\varphi}(W))^{\circ} = (S_0(V))^{\circ} + (S_0(W))^{\circ}$ se llega al resultado.

(4) $(V^{\perp})^{\perp} = (S_{\varphi}(V^{\perp}))^{\circ} = (S_{\varphi}(S_{\varphi}^{-1}(V^{\circ})))^{\circ} = (V^{\circ})^{\circ} = V$.

PROPOSICION 7. Si u y u^* son dos endomorfismos de E tales que $\varphi(u(x),y) = \varphi(x, u^*(y))$ para todo x,y entonces

$$u^*=S_\varphi^{-1t}uS_\varphi=d_\varphi^{-1t}ud_\varphi.$$

DEMOSTRACION. Como

$$\varphi(u(x)y)=S_\varphi(y)(u(x))$$

$$\varphi(x,u^*(y))=S_\varphi(u^*(y))(x)$$

se tiene $S_\varphi(y)(u(x))={}^tS_\varphi(y)(u(x))={}^tu(S_\varphi(y))(x)$ implica $S_\varphi(u^*(y))$ para cada $y\in E$, de donde $S_\varphi\circ u^*={}^tuS_\varphi$; luego aplicando $S_\varphi^{-1},u^*=S_\varphi^{-1}\circ{}^tu\circ S_\varphi$.

Además, como $S_\varphi=d_\varphi$, pues φ es simétrica, entonces

$$u^*=d_\varphi^{-1}\circ{}^tu\circ{}^td_\varphi.$$

DEFINICION 6. Al endomorfismo u^* de la proposición 7 se llama *adjunto* de u respecto a , se llama *autoadjunto* o hermítico. Cuando u es automorfismo tal que $u^*=u^{-1}$, se dice que u es *normal*.

PROPOSICION 8. $\det u^*=\det{}^tu$.

DEMOSTRACION. $u^*=d_\varphi^{-1}\circ{}^tu\circ d_\varphi$ implica

$$\det(u^*)=\det(d_\varphi^{-1}\det({}^tu)\det d_\varphi)$$

$$=\det(d_\varphi)^{-1}\det({}^tu)\det(d_\varphi)$$

$$=\det({}^tu)\quad.$$

DEFINICION 7. Toda forma bilineal, sea alternada como simétrica, sobre $E\times E$ está determinada por una matriz respecto a un base dada de E.

Para las formas bilineales simétricas se denota por $M(\varphi)$. Para las alternadas $M(\Psi)$.

$M(\Psi)=(\alpha_{ij})$ significa $\Psi(e_i,e_j)=\alpha_{ij}$.

PROPOSICION 9. El conjunto $A(E,E;\mathbf{R})$ de todas las formas bilineales alternadas al igual que el conjunto $F(E,E;\mathbf{R})$ de todas las formas bilineales simétricas sobre $E\times E$ son subespacios vectoriales del espacio vectorial de todas las formas bilineales sobre $E\times E$.

DEMOSTRACION. Sólo lo haremos para las alternadas, pues el procedimiento para las bilineales simétricas es análago.

Sean Ψ_1,Ψ_2 dos formas bilineales alternadas cualquiera, α,β dos escalares arbitrarios. Para todo $x\in E$

$$[\alpha\Psi_1+\beta\Psi_2](x,x)=(\alpha\Psi_1)(x,x)+(\beta\Psi_2)(x,x)$$

$$=\Psi_1(\alpha x,x)+\Psi_2(\beta x,x)=\alpha\Psi_1(x,x)+\beta\Psi_2(x,x)$$

Por lo tanto $\alpha\Psi_1+\beta\Psi_2$ es alternada.

PROPOSICION 10. El espacio vectorial de las formas n-lineales $A(E^n;\mathbf{R})$ es una recta vectorial.

DEMOSTRACION. Definamos la aplicación de $A(E^n;\mathbf{R})$ en $\mathbf{R}$ asignando a cada forma alternada Ψ el número real $\Psi(e_1, e_2, ..., e_n)$ donde los e_i son miembros de la base de E. La linealidad de $\Psi\to\Psi(e_1,...,e_n)$ la asegura la estructura de espacio vectorial de A.

La relación $\Psi(e_1,...,e_n)=0$, implica $\Psi=0$ puesto que $e_i\neq e_j$ para $i<j$. Ya que sería imposible para otra forma alternada que $\Psi(e_1,\ldots,e_n)=0$, por su propia definición. Así que en núcleo de esta transformación es $\{0\}$; por consiguiente, es inyectiva.
Como no es posible que para algún escalar ξ no exista una forma alternada Ψ tal que $\Psi(e_1, e_2, ..., e_n)\neq\xi$, por contradecir la estructura de espacio vectorial de $A(E^n;\mathbf{R})$ es una recta vectorial para cada $n=2$.

PROPOSICION 11. (1) Para cada endomorfismo u de E se tiene $(u^*)^*=u$.
(2) Para toda forma bilineal φ

$$d_\varphi^*=S_\varphi\ ;\ S_\varphi^*=d_\varphi.$$

DEMOSTRACION. (1) $\varphi(u(x),y)=\varphi(x,u^*(y))=\varphi(u^*(y),x)=\varphi(y,(u^*)^*(x))$.

Luego como φ es simétrica $\varphi(y,u(x))=\varphi(y,(u^*)^*(x))$ de donde $S_\varphi(u(x))(y)=S_\varphi((u^*)^*(x))(y)$, para todo y $S_\varphi(u(x))=S_\varphi(u^*)^*(x)$ como S_φ es biyectiva $u(x)=(u^*)^*(x)$ para todo $x \in E$.

(2)

$$d_\varphi^*=S_\varphi^{-1}\,{}^t d_\varphi S_\varphi=S_\varphi^{-1}S_\varphi S_\varphi=S_\varphi$$

$$S_\varphi^*=D_\varphi^{-1}\,{}^t S_\varphi d_\varphi=d_\varphi^{-1}d_\varphi d_\varphi=d_\varphi.$$

Ley de Inercia. Signatura

PROPOSICION 1. Si E es de dimensión y φ una forma bilineal simétrica no degenerada sobre $E\times E$, entonces existe en E^{-} una base $(e_i)_{1\le i\le n}$ tal que para $i\neq j$ $\varphi(e_i,e_j)=0$, $\varphi(e_i,e_i=\pm 1$ para $1\le i\le n$.

Además, si $(e'_i)_{1\le i\le n}$ es otra base de E con las mismas propiedades, entonces el número de índices i para los cuales $\varphi(e_i,e_i)=1$ es el mismo número para los cuáles $\varphi(e'_i,e'_i)=1$.

DEMOSTRACION. Para la primera aseveración utilizaremos la inducción sobre la dimensión de E:$\dim E=n$ cuando $n=0$, $E=\{0\}$ obviamente se satisface la condición pues las bases son vacias. No hay base. Ahora para $n=1$

Hay por los menos un vector x tal que $\varphi(x,x)\neq 0$. En caso contrario. Para todo $x\in E$:$\varphi(x,x)=0$ lo cual es absurdo ya que φ es simétrica y no degenerada y no puede ser φ identicamente nula pues la relación $\varphi(x+y,x+y)=\varphi(x,x)+\varphi(y,x)+\varphi(x,y)+\varphi(y,y)$ para cualquier par de vectores $x,y\in E$ implica $2\varphi(x,y)=0$, equivalente a $\varphi(x,y)=0$.

Así que hay un x tal que $\varphi(x,x)\neq 0$. Supongamos $|\varphi(x,x)|=\beta^2$ o sea $\varphi(x,x)$ puede ser $\pm\beta^2$. Entonces el vector $e_1=\beta^{-1}x$ satisface la condición $\varphi(e_1,e_1)=\beta^{-2}\varphi(x,x)=\pm 1$. Si H es el ortogonal de la recta vectorial D que pasa por e_1 entonces $\dim H+\dim H^{\perp}=\dim E$ pero $H^{\perp}=D$; luego $\dim H=n-1$, pues $\dim D=1$. Así que H es suplementario de la recta D en E, por lo tanto H es un hiperplano. La elección del vector e_1 implica $e_1\notin H$.

Continuando la construcción de una base donde e_1 sea un miembro, consideramos la restricción de φ a $H\times H$, la cual es no degenerada; de no ser así existiría un vector no nulo $z\in H$ ortogonal a cualquier vector de $H:\varphi(z,x)=0$. Además, z sería ortogonal a la propia recta D que pasa por e_1 y como D es ortogonal de H y son suplementarios $E=D+H$ resultaría que z es ortogonal a todo el espacio E, lo cual es absurdo pues $\dim E+\dim E^{\perp}=\dim E$ implica $\dim E^{\perp}=0$, lo cual implica $E^{\perp}=\{0\}$. Así que $z=0$ y $z\neq 0$ se produce si suponemos φ es no degenerada.

Al finalizar la hipótesis de inducción se tendrá una base $(e_i)_{1\le i\le n}$ tal que $\varphi(e_i,e_j)=0$ si $i\neq j$ $\varphi(e_i,e_i)=\pm 1$ para $i\le i\le n$.

Por ahora, el siguiente paso la hipótesis de inducción al hiperplano H: Existe en H una base $(e_i)_{2\leq i\leq n}$ tal que $\varphi(e_i,e_j)=0$ si $i\neq j$; $\varphi(e_i,e_i=\pm 1$ para $2\leq i\leq n$.

Demostrando la segunda implicación. Sabiendo que existe una base de acuerdo a la anterior aseveración, designemos por E^+ y E^- los subespacios de formados por las sumas directas de las rectas que pasan por los e_i tales que

$$E^+=\sum D_{e_i} \text{ si } \varphi(e_i,e_i)=\pm 1$$

$$E^-=\sum D_{e_i} \text{si } \varphi(e_i,e_i)=-1.$$

Vamos a demostrar que $dim E^+$ es independiente de la elección de la base (e_i) que verifica las condiciones del enunciado.

Para todo $x\in E^+$ no nulo, $x=\sum_i \xi_i e_i$ con $\varphi(e_i,e_i)=\pm 1$. Así que $\varphi(x,x)=\sum \xi_i^2>0$.

Sea $(e'_i)_{1\leq i\leq n}$ otra base de E que responde a las condiciones del teorema. Designemos por E'^+ y E'^- los subespacios de E definidos de forma análoga a E^+ y E^-, con la diferencia que hay que tomar en consideración a la nueva base.

Para comprobar $E^+\cap E'^-=\{0\}$ suponemos lo contrario: si existe $x\neq 0$ en $E^+\cap E^-$ se verificaría $\varphi(x,x)>0$ ya que $x\in E^+$, también se verificaría $\varphi(x,x)<0$ ya que $x\in E'^-$. Lo cual produce una contradicción. Por tanto

$$E^+\cap E'^-=\{0\}.$$

En virtud de la relación de Grassmann

$$\dim(E^+)+\dim(E'^-)=\dim(E^++E'^-)\leq \dim E$$

Pero $E=E'^++E'^-$ y $\dim E=\dim(E'^++E'^-)$. Entonces tenemos $\dim(E^++E'^-)\leq\dim(E'^++E'^-)$. O sea $\dim(E^+)+\dim(E'^-)\leq\dim(E'^+)+\dim(E'^-)$, luego $\dim(E^+)\leq\dim(E'^+)$. Intercambiando los papeles de las bases, $\dim(E'^+)+\dim(E^-)\leq\dim(E^++E^-)$ implica $\dim(E'^+)\leq\dim(E^+)$.

Por consiguiente $\dim E'^+=dim E^+$, lo cual equivale afirmar que el número de índices i para los cuales $\varphi(e_i,e_i)=+1$ es el mismo número de índices i para los cuales $\varphi(e'_i,e'_i)=+1$.

DEFINICION 1. Si p es el número de índices para los cuales $hpi(e_i,e_i) = +1$ y si q es el número de índices tales que $\varphi(e_i,e_i) = -1$ se dice que el par (p,q) es la *signatura* de φ. Cuando se tiene la signatura $(n,0)$ se dice que φ es positiva; cuando $(0,n)$, φ es negativa.

Geometria Afin

§1. Las Traslaciones

DEFINICION 1. Sea $\underline{a}$ un vector de E; la aplicación de E en E que asigna a cada $x \in E$ el vector $a+x$ se llama *traslación* de a y se designa por t_a.

PROPOSICION 1. Toda traslación es una biyección de E sobre si mismo.

DEMOSTRACION. Sea t_{x_0} una traslación cualquiera. Supongamos $t_{x_0}(a)=t_{x_0}(b)$. Entonces $x_0+a=x_0+b$. Esto implica $a=b$. Así que t_{x_0} es inyectiva. Ahora bien, para todo $z \in E : z=x_0+(z-x_0)$ existe $y \in E$, con $y=z-x_0$ tal que $z=t_{x_0}(y)$.

PROPOSICION 2. Las traslaciones forman un grupo isomorfo al grupo aditivo del espacio E.

DEMOSTRACION. Sean t_a, t_b dos traslaciones cualesquiera. Para todo $x \in E : t_a \circ t_b(x)=t_a(b+x)=a+b+x$. Se ve que $t_a \circ t_b(x)=t_{a+b}(x)$. Además como $a+b=b+a : t_a \circ t_b=t_b \circ t_a$. La aplicación idéntica es $t_0 : t_0(x)=0+x=x$ es una traslación de $0 : t_0 t_a=t_{0+a}=t_a$. Como $t_0=t_{a+(-a)}$ y $t_{a+(-a)}=t_a \circ t_{-a}$. Para cada traslación t_a existe una traslación t_{-a} tal que $t_a \circ t_{-a}=t_0$.

Se ha mostrado que las traslaciones forman un grupo conmutativo.

Definamos la aplicación del grupo aditivo E al grupo T de las traslaciones, asignando a cada $x \in E$ la traslación t_x. Probaremos que esta aplicación es un isomorfismo de grupo.

Ya se comprobó que para cada par de elementos $a,b \in E$, $t_{a+b}=t_a \circ t_b$ es la traslación asignada a la suma $a+b$. O sea, la traslación de una *suma* es la *composición* de dos traslaciones.

Falta probar la biyectividad de $x \to t_x$. Si $t_x=t_y$, para cualquier $z \in E$ se tiene $t_x(z)=t_y(z)$; luego como las traslaciones son biyectivas $x+z=y+z$ implica $x=y$.

Si t es una traslación, entonces para todo $z \in E$ $t(z)=x_0+z$ para algún $x_0 \in E$. Luego existe $x_0 \in E$ tal que mal tal que $t=t_{x_0}$. Probada la suryección.

§2. Variedades lineales

DEFINICION 2. Se llama variedad lineal afín (o simplemente, variedad lineal) a la imagen directa de un subespacio vectorial V de E por una traslación t_a. se escribe $t_a(V)=a+V$. Es el conjunto de las sumas $a+x$, donde $x \in V$.

PROPOSICION 3. Si $a \in V$ entonces $a+V=V$. Además los subespacios vectoriales son variedades lineales que contiene al vector 0.

DEMOSTRACION. $a+V \subset V$. Si $a+x \in a+V$ entonces $a+x \in V$ pues a y x son vectores de V. Por otra parte, cualquier $y \in V$ puede escribirse $y=a+(y-a)$, donde $y-a \in V$, pues $a \in V$. Así que $y \in a+V$.

Finalmente si consideramos la traslación t_0 identidad, para cualquier subespacio V de E se tiene $t_0(V)=0+V=V$, pues $0 \in V$.

PROPOSICION 4. Par a que la variedades lineal $a+V$ esté contenida en $b+W$ es necesario y suficiente que V este incluida en W y $a-b \in W$.

DEMOSTRACION. Decir que $a+V$ está incluida en $b+W$ equivale a decir que para todo $x \in V$ $a+x=b+y$ para algún $y \in W$. O sea $x=(b-a)+y$; particularmente $x=0$ es de esta forma y, por tanto, para $x=0$ $y=-(b-a) \in W$. Entonces para todo $x \in V$ se tiene $x \in (b-a)+W=W$. Luego $V \subset W$. Reciprocamente $W \supset V$ y $b-a \in W$ implican $a+V \subset a+W=a+(b-a)+W=b+W$, ya que $b-a+W=W$, si $b-a \in W$.

PROPOSICION 5. Si L es una variedad lineal entonces existe un único subespacio V de E tal que $L=A+V$.

DEMOSTRACION. Por definición, para L existe una traslación t_a tal que $t_a^{-1}(L)$ es el subespacio V con $t_a(V)=L$. Supongamos otro subespacio W con $t_a(W)=L$. La relación $a+V=a+W$ equivale, por proposoción anterior, $a+V \subset a+W \cap a+W \subset a+V$ si y solo si $V \subset W$ y $W \subset W$ y $0=a-a \in W$ y $0=a-a \in V$.

De donde $V+W$.

DEFINICION 3. Al subespacio V de la variedad lineal $a+V$ se llama *dirección* de la variedad lineal. Si $V=\{0\}$ la variedad lineal es un punto solitario.

PROPOSICION 6. Para que dos variedades lineales $a+V$ y $b+W$ tengan un punto común es necesario y suficiente que $a-b \in V+W$. Además,la intersección de estas dos variedades es una variedad lineal de dirección $V \cap W$.

DEMOSTRACION. Si x pertenece simultaneamente a $a+V$ y $b+W$ entonces $x=a+y=b+z$ para algún $y \in V$, $z \in W$. De aquí resulta $a+y=b+z$ implica $a-b=y-z$, por consiguiente $a-b \in V+W$. Ahora bien, si x es común a $a+V$ y $b+W$ $x+V=a+V$, $x+W=b+W$.

Luego $(x+V) \cap (x+W)=t_x(V) \cap t_x(W)=t_x(V \cap W)=x+V \cap W$.

DEFINICION 4. Las variedades lineales $a+V$, $b+W$ se dice que son *paralelas* si $V \subset W$.

DEFINICION 5. Una variedad lineal cuyo dirección es una recta vectorial se llama recta afin. Si la dirección es un hiperplano vectorial, se llama hiperplano afín. Todo vector $\neq 0$ de la dirección de una recta D se llama vector director de D.

PROPOSICION 7. Si dos rectas son paralelas entonces tienen la misma dirección. Además por todo punto de E pasa una sola recta paralela a una recta dada.

DEMOSTRACION. Sean D y D' las direcciones respectivas de dos rectas dadas. Si son paralelas las rectas, por definición 4, D incluida en D' pero como D y D' son rectas vectoriales y estas on incluyen otros subespacios que no sean ellos mismos y a $\{0\}$. Como ninguna es $\{0\}$ la única posibilidad $D=D'$.

Si D' es la dirección de una recta dada y si x es un punto tal que x no pertenece a esta recta y $x+D$ es una recta paralela que pasa por x, $D=D'$ significa que son paralelas. Suponiendo $x+D'$ la recta paralela a la recta dada. La intersección de las rectas $(x+D') \cap (x+D)=X+D' \cap D$ es una recta pues $D' \cap D \neq \{0\}$; $D' \cap D=D=D'$.

PROPOSICION 8. (1) Si f una forma lineal sobre E no identicamente nula, entonces para todo escalar α, el conjunto H_α de los $x \in E$ tales que $f(x)=\alpha$ es un hiperplano. Además, todos los H_α son paralelos.
(2) Reciprocamente. Si H es un hiperplano en E entonces existe una forma lineal g sobre E y un escalar β, tales que H es el conjunto de las $x \in E$ que verifican la relación $g(x)=\beta$. Además, si h es una forma lineal sobre E y γ un escalar tales que H es el conjunto de las $x \in E$ que satisfacen $h(x)=\gamma$, entonces existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $h=\lambda g$ y $\gamma=\lambda\beta$.

DEMOSTRACION. (1) Como f no es nula, existe $x_0 \in E$ tal que $f(x_0)=\beta\neq 0$. Al escrbir $=\beta^{-1}x_0$ se tiene $f(a)=1$ lo que implica $a\neq 0$. Las relaciones $f(x)=\alpha\, f(x-\alpha a)=0$ son equivalentes, pues $f(a)=1$. Lo que significa $H_\alpha=a+H_0$ yq auc H_α está formado por los $x\in E$, con $f(x)=\alpha$.

Vamos a mostrar que H_0 es un hiperplano vectorial. Como para todo $x\in E$ ocurre $f(x=f(x)a)=0$ entonces $y=x=f(x)a$ pertenece a H_0.

Si D es la recta vectorial que pasa por a, entonces $H_0+E=E$ puesto que $f(a)=1\neq 0$. Lo mismo para todo escalar $\alpha : f(\alpha a)=\alpha$. Precisamente los vectores de la recta D son los αa. Puesto que D no está incluida en H_0; si $H_0\subset H_0+D$ y $H_0\neq H_0+D$ forzozamente $H_0+D=E$. Y si $D\cap H_-\subset D$ y $D\cap H_0\neq D$ forzozamente $D\cap H_0=\{0\}$. Así que H_0 y D son suplementarios en E. Por otra parte decir $\xi a\in D$ y $\xi a\in H_0$ significa $f(\xi a)=0$, o sea que $\xi=0$. Por consiguiente $D\cap H_0=\{0\}$.

(2) Primero suponemos que H pasa por 0. Entonces existe, por definición, una recta vectorial D suplementaria de H en E. Siendo p la proyección de E sobre D correspondiente a la descomposición $E=H+D$, puede escribirse $p(x)=g(x)a$ para un vector no nulo $a\in D$; esta es una manera única, donde $g(x)$ es un escalar. Además las relaciones $p(x+y)=p(x)+p(y)$ y $p(\xi x)=\xi g(x)$, en virtrud de la unicidad ya mencionada. En consecuencia, g es forma lineal sobre E.

Como para cualquier $y\in H : p(y)=0$, lo interpretamos $g(y)=0$ para todo $y\in H$. Así que $H=g^{-1}(0)$, H es en núcleo de g. Ahora bien, debido a que $p(a)=a, g(a)=1$. Si $h(a)=\lambda$, donde h es una segunda forma lineal de la que H es su núcleo; se deduce que $\lambda\neq 0$, ya que $a\notin H$; por lo tanto, la forma lineal $u=h-\lambda g$ es tal que para todo $y\in H$, $u(y)=h(y)-\lambda g(y)=0$. Además $u(a)=h(a)-\lambda g(a)=\lambda-\lambda=0$. Pero como todo $x\in E$ se escribe bajo la única forma $y+\xi a$ con $y\in H$, se tiene $u(x)=0$. Así que u es identicamente nula, lo que significa $h=\lambda g$. Pasando al caso general. Sea b un punto de H. $H'=-b+H$ es un hiperplano vectorial, por tanto es núcleo de una forma lineal g. Así que también, $g(x)=\beta$, con $\beta=g(b)$. Si ahora decimos que H es también el conjunto de los $x\in E$ tales que $h(x)=\gamma$, entonces $h(b)=\gamma$ pues $b\in H$. Esto implica la existencia de $\lambda\neq 0$ tal que para todo $y\in H$, la forma lineal $v=h-\lambda g$, $v(y)=h(y)-\lambda g(y)=\gamma-\lambda\beta=0$. Así que $h=\lambda g$ y $\gamma=\lambda\beta$. Como se quería mostrar.

DEFINICION 6. Si para la forma lineal sobre E,g, la relación $g(x)=\beta$ se cumple para todo x del hiperplano H, se llaman semiespacios cerrados F^+ y F^- determinados por H a los conjuntos de los x que satisfacen $g(x)\geq\beta$ y

$g(x) \leq \beta$ respectivamente. A los complementos de H en F^+ y F^- se les llama semiespacios abiertos determinados por H; o sea los que cumplen la condición $g(x) > \beta$ ó $g(x) < \beta$.

§3. El anillo de los operadores.

DEFINICION 7. Toda aplicación lineal de E en si mismo se llama *Endomorfismo* de E (u *operador* en E) .

PROPOSICION 9. El conjunto End(E) *de los endomorfismos de E provisto de las aplicaciones* $(u,v)\to u+v$ *(suma de endomorfismos) y* $(u,v)\to uv$ *(producto o composición de endomorfismo) es un anillo.*

DEMOSTRACION.

Bien definidas:

$[u+v](x)=u(x)+v(x),\ u\circ v(x)=u(v(x))$.

Asociatividad:

$$((u+v)+w)(x)=(u+v)(x)+w(x)=ux)+v(x)+w(x)$$

$$=u(x)+(v(x)+w(x))=(u+(v+w))(x)$$

$$(u(vw))(x)=u(v(x(x)))=(uv)(w(x))$$

Elemento neutro:

$0(x)=0$ para todo x. $0+u=u$.

Elemento unidad:

la aplicación identica $v1_E=v$, para todo v.

Elementos inversos:

Para cada $u\in$ End(E) existe $v\in$ End(E), con $v(x)=-u(x)$ para todo x tal que $u+v=0$.

La ley distributiva:

$$u(v+w)(x)=u(v+w)(x))=u(v(x)+w(x))$$

$$=u(v(x))+u(w(x))=uv(x)+uw(x)$$

Luego, $u(v+w)=uv+uw$.

Por otra parte,

$$[(u+v)w](x)=(u+v)(w(x))=u(w(x))+v(w(x))$$

de donde $(u+v)w=uw+vw$.

§4. El grupo lineal.

PROPOSICION 10. El producto o composición de endomorfismos biyectivos o automorfismos define una estructura de grupo.

DEMOSTRACION. Si u,v son dos automorfismos de E su composición uv es un automorfismo de E. Suponiendo $uv(x)=uv(y)$, se tiene $v(x)=v(y)$ ya que u es un automorfismo de E. suponiendo $uv(x)=uv(y)$, se tiene $v(x)=v(y)$ ya que u es biyectiva. Por igual razon $v(x)=v(y)$ implica $x=y$. Por otra parte, $v(E)=E$ por ser sobreyectivo, igualmente $u(E)=E$. Así que $uv(E)=E$.

En el anillo End(E) se probó que el producto es asociativo. También que el elemento unidad era 1_E.
Falta saber cuales son los inversibles en el producto.
Como cada automorfismo es un endomorfismo biyectivo su inverso es también un automorfismo. Pues son aquellos u para los cuales existe v tal que $uv=vu=1_E$. O sea, para todo $x \in E$ $uv(x)=x=vu(x)$. La relación: para todo $x \in E$ $u(v(x))=x$ prueba que u es sobreyectiva.
La relación: para todo $x \in E$: $vu(x)=x$ muestra que u es inyectiva.

DEFINICION 8. Al grupo de los automorfismos se le llama grupo lineal de E y se denota por $GL(E)$. Los automorfismos de E son isomorfismos de E.

PROPOSICION 11. El grupo lineal de E es isomorfo al grupo multiplicativo de las matrices inversibles.

DEMOSTRACION. Sabemos que si $(e_i)_{1\le i\le n}$ es una base de E, todo endomorfismo u está determinado totalmente por la matriz $(\alpha_{ij})=M(u)$ respecto a la base dada. También sabemos que el determinante de la matriz (α_{ij}) es el determinante del endomorfismo. Y éste $\neq 0$ siempre que el endomorfismo sea biyectivo. Considerando otro automorfismo v, asociado su matriz (β_{ij}) respecto a la base dada. La composición $u \circ v$ está determinada por su matriz $M(u \circ v)$ respecto a la misma base.

Probaremos $M(u \circ v)=M(u)M(v)$.

Denotamos por (γ_{ij}) la matriz de $u \circ v$ para $1 <= i,j \leq n$.

Sea $x = \sum \xi_i e_i$; $u(x) = \sum \lambda_i e_i$, $u(v(x)) = \sum \delta_j e_i$.

Sabemos

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} \xi_i,$$

$$\delta_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \; i <= j, 1 \leq j, k \leq n$$

En consecuencia, en función de $(\alpha_{ij}),(\beta_{ij})$,

$$\delta_j = \sum_{i,k} \alpha_{ij} (\beta_{ki} \xi_k) = \sum_{k,j} \alpha_{kj} (\beta_{ik} \xi_i)$$

Pero la matriz (γ_{ij}) de $u \circ v$ viene dada también por la fórmula

$$\delta_j = \sum \xi_i \gamma_{ij}$$

Comparando los resultados obtenidos

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \beta_{ik}.$$

Por consiguiente $(\gamma_{ij}) = (\alpha_{ij})(\beta_{ij})$.

El automorfismo 1_E esta determinado por la matriz identidad (α_{ij}) donde $\alpha_{ij} = 1$, $\alpha_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

El elemento inverso u^{-1} de u esta determinado unicamente por su matriz $M(u^{-1})$ respecto a la base dada.

Como $uu^{-1} = 1_E$

$$M(uu^{-1}) = M(u) M(u^{-1}) = M(1_E)$$

$$M(u^{-1}) = M(u)^{-1}.$$

§5. Homotecias

DEFINICION 9. Para todo escalar α el endomorfismo de E que asigna a cada $x \in E$ el vector αx se llama homotecia lineal (o simplemente, homotecia) de razón α. Se denote por h_α. Para todo $x \in E : h_\alpha(x)=\alpha x$.

PROPOSICION 12. Las homotecias forman un subcuerpo $\mathbf{Z}$ *de los operadores en E.* End(E) *isomorfo a* $\mathbf{R}$

DEMOSTRACION. Designando con $\mathbf{Z}$ a las homotecias. Evidentemente son una parte de End(E). Verificaremos que satisface las condiciones:

(1) $\mathbf{Z}$ es un subanillo del End(E)

(2) Para cada homotecia no identicamente nula su inversa es una homotecia.

Se sabe que, en general, End(E) es un espacio vectorial al estudiarlo con las operaciones

(1) suma de endomorfismos

(2) producto de un endomorfismo por un escalar

Vamos a mostrar que toda homotecia no identicamente nula es biyectiva. Para $\alpha\neq 0$, $h_\alpha(x)=h_\alpha(y)$ implica $\alpha x=\alpha y$, simplificando $\alpha\neq 0$ se tiene $x=y$.

Por estructura de espacio vectorial para cada $z \in E$ existe $x \in E$ tal que $z=\alpha x$; i.e. $x=\alpha^{-1}z$.

La identidad 1_E es una homotecia de razón 1

Para la suma de homotecias de razón α,β respectivo

$$(h_\alpha+h_\beta)(x)=\alpha x+\beta x=h_{\alpha+\beta}(x)$$

es homotecia de razón $\alpha+\beta$.

La composición a producto de homotecias de razón $\alpha,\beta : h_\alpha \circ h_\beta(x)=\alpha\beta x=h_{\alpha\beta}(x)$

es la homotecia de razón $\alpha\beta$.

La homotecia inversa de h_α es aquella que $h_\beta h_\alpha=h_\alpha h_\beta=1_E=h_1, \beta\alpha x=x$, de donde $\beta=\alpha^{-1}$.

O sea, es la homotecia de razón $\alpha^{-1} : h_{1/\alpha}$.

La aplicación identicamente nula es una homotecia de razón $= 0$. Siendo el elemento neutro de la suma de hometicias.

La homotecia opuesta a h_α es $h_{-\alpha}$ pues $h_\alpha+h_{-\alpha}=h_0$.

La distributividad $h_\alpha(h_\beta+h_\gamma$

$$h_\alpha(h_\beta+h_\gamma)=h_{alpa}h_{\beta+\gamma}=h_{\alpha+(\beta+\gamma)}=h_{\alpha\beta}+h_{\alpha\gamma}$$

$$(h_\alpha+h_\beta)h_\gamma=h_{\alpha+\beta}h_\gamma=h_{(\alpha+\beta)\gamma}=h_{\alpha\gamma}+h_{\beta\gamma}.$$

La conmutatividad

$$h_\alpha h_\beta=h_{\alpha\beta}=h_{\beta\alpha}=h_\beta h_\alpha$$

Por último, la aplicación de **R** en **Z** que asigna a cada real α la homotecia de razón α es isomorfismo de cuerpo. Pues a cada suma de reales $\alpha+\beta$ le correxponde una suma de homotecias $h_\alpha+h_\beta$. Lo mismo a cada producto de reales $\alpha\beta$ le corresponde un producto de homotecias $h_\alpha h_\beta$. La biyección está asegurada porque los homotecias son biyecciones.

Si $h_\alpha=h_\beta$; para todo $x\in E$ se tiene $h_\alpha(x)=h_\beta(x)$ implica $\alpha x=\beta x$, o sea $(\alpha-\beta)x=0$, para todo x. Esto es verdad siempre que $\alpha-\beta=0$; de donde $\alpha=\beta$.

PROPOSICION 13. Todo operador en **R** *es una homotecia.*

DEMOSTRACION. Sea u un endomorfismo de **R** cualquiera. Para todo $x\in\mathbf{R}$ se cumple $u(x)=u(x\cdot 1)=xu(1)$. Si fijamos $\alpha=u(1)$ tenemos $u=h_\alpha$.

§6. Grupo afín

DEFINICION 10. Una *aplicación afín* (o aplicación lineal afín) de E en si mismo es toda composición $u=t_b v$ donde v es un endomorfismo y t_b una traslación en E del vector b.

PROPOSICION 14. La descomposición de toda aplicación afín en una traslación y un homomorfismo es única.

DEMOSTRACION. Sea u una aplicación afín en E. Existen t_b, v tales que $u=t_b v$ por definición. Supongamos, otra descomposición $u=t_a w$. Eximenemos cuando $x=0$ $u(0)=b=a$. De aquí resulta $u=t_a v$; $u=t_a w$. Como toda traslación es biyectiva se tiene $v=t_{-a}\, u$; $w=t_{-a}\, u$, concluyendo la unicidad de la descomposición.

PROPOSICION 15. La homotecia de centro a y razón λ $h_{a\lambda}=a+\lambda(x-a)$ es una aplicación afín biyectiva de E sobre si mismo para todo vector a y todo escalar $\lambda\neq 0$.

DEMOSTRACION. Procedamos a descomponer $h_{a\lambda}$ en una composición de traslación y endomorfismo

$$h_{a\lambda}(x)=a+lahmda(x-a)$$

$$x-a=t_{-a}(x)\ ;\ \lambda(x-a\_=h_\lambda t_{-a}(x)$$

$$a+\lambda(x-a)=t_a h_\lambda t_{-a}(x)$$

Pero $h_\lambda t_{-a}(x)$ no es lineal aunque h_λ lo sea. Busquemos otra $h_{a\lambda}(x)=(1-\lambda)a+\lambda x$

$$(1-\lambda)a+\lambda x=t_{(1-\lambda)a}(\lambda x)=t_{(1-\lambda)a}\circ h_\lambda(x)$$

Ahora sí $h_{a\lambda}=t_{\mu a}h_\lambda$, donde $\mu=1-\lambda$.

Evidentemente es biyectiva por ser compuesta de dos biyecciones: una traslación y una homotecia de razón $\lambda\neq 0$.

PROPOSICION 16. La composición de aplicaciones afines es una aplicación afín.

DEMOSTRACION. Sean u,v dos aplicaciones afines en E. Existen sus dos composiciones únicas $u=t_a u'$: $v=t_b v'$.

Hagamos la composición $u \circ v$, para todo x

$$u(v(x))=u(b+v'(x))=a+u'(b+v'(x)))$$

$$uv(x)=a+u'(b)+u'v'(x)$$

$$uv=t_{a+u'(b)}(u'v').$$

PROPOSICION 17. Si u es una aplicación afín biyectiva entonces su inversa u^{-1} es una aplicación afín.

DEMOSTRACION. Si $u=t_a v$ es biyectiva, por fuerza v es biyectiva, pues t_a ya lo es. $u^{-1}=v^{-1}\,t_{-a}$. Pero $v^{-1}t_{-a}(x)=v^{-1}(x-a)$, $v^{-1}t_{-a}(x)=v^{-1}(x)-v^{-1}(a)$. Así que $u^{-1}=t_{-v^{-1}(a)} \circ v^{-1}$.

DEFINICION 11. Las aplicaciones afines biyectivas de E en si mismo forman un grupo cuyo nombre es *Grupo Afín* de E y se denota por $GA(E)$.

PROPOSICION 18. Las aplicaciones afines de E en E que dejan invariante el punto a son de la forma $t_a v t_{-a}$ donde $v \in \mathrm{End}(E)$.

DEMOSTRACION. $t_a v t_{-a}(x)=t_a v(x-a)=a+v(x)-v(a)$. Cuando $x=a$, $t_a v t_{-a}(a)=a$.

$t_a v t_{-a}=t_a \circ t_{-v(a)} \circ v=t_{a-v(a)} \circ v$.

§7. Teorema fundamental de la geometria afín

Sea u una aplicación inyectiva de E en si mismo con la siguiente propiedad: Si tres puntos de E están sobre una misma recta ocurre lo mismo con sus correspondientes imágenes y la variedad lineal afín engendrada por $u(E)$ es E.

PROPOSICION 19. Si a,b,c no están sobre una misma recta entonces $u(a), u(b), u(c)$ no están sobre una misma recta.

DEMOSTRACION. Supongamos a,b,c no pertenecen a la misma recta y que $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ están en la recta Δ. Sea x un punto cualquiera de E. Considerando las rectas que pasan por (x,a), (x,b), (x,c) resulta que $u(x)$, $u(a)$ están en la misma recta; $u(x)$, $u(b)$ están en la misma recta; $u(x)$, $u(c)$ están en la misma recta. Pero como $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ están en la recta Δ, también $u(x)$ está en Δ, para cualquier $x \in E$. Por consiguiente $u(E)$ no engendra E, lo cual es una contradicción con la propiedad que posee u.

PROPOSICION 20. Para toda recta D existe una recta única D' tal que $u(D) \subset D'$. Si u es biyectiva necesariamente $u(D)=D'$; además, si D_1 y D_2 son paralelas enconces $u(D_1)$ y $u(D_2)$ también lo son.

DEMOSTRACION. Para cada tres puntos a,b,c de la recta D se tiene $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ están en la misma recta. Para todo $x \in D : u(x) \in u(D)$ implica que los $u(x)$ están en una misma recta D'. Esta es única ya que por dos puntos distintos pasa una única recta.

Ahora bien si u fuera biyectiva, todo punto $y \in D'$ es de la forma $u(x)$ y en virtud de la proposición 19 no es posible que $x \notin D$. Luego $D' \subset u(D)$. Pero por unicidad de D' se tiene $u(D) \subset D'$. En consecuencia . Si $D_1 \neq D_2$, y si suponemos que $u(D_1)$ y $u(D_2)$ tienen puntos comunes $z=u(x_1)=u(x_2)$ donde $x_1 \in D_1$ $exub2 \in D_2$. Pero, u es inyectiva así que $x_1=x_2$.
De donde D_1 y D_2 tienen puntos comunes, lo cual es absurdo ya que son paralelas.

§8. La razón doble

Sean D_1, D_2, D_3 tres rectas vectoriales distintas en E. Existen tres vectores $\neq 0$ $x_1 \in D_1, x_2 \in D_2, x_3 \in D_3$ tales que $x_3=x_1+x_2$, determinados salvo un factor común escalar $\neq 0$.

DEFINICION 12. Para toda recta vectorial D distinta de D_1, d_2 y D_3 existe un único escalar ρ tal que $x_1+\rho x_2 \in D$. Se dice que ρ es la razón doble del cuarteto (D_1,D_2,D_3,D) y se denota por

$$\rho=\begin{bmatrix} D_1 \, D_2 \\ D \, D_3 \end{bmatrix}$$

PROPOSICION 21. La razón doble de (D_1,D_2,D_3,D) no es cero ni uno.

DEMOSTRACION. Si $\rho=0$, entonces $X_1+\rho x_2 \in D$ significa $x_1 \in D \cap D_1\{0\}$ así $x_1=0$ contradictorio con la definición de $x_1 \neq 0$. Así que $\rho \neq 0$. Si $\rho=1$, entonces $x_1+\rho x_2=x_1+x_2 \in D$ pero, por definición $x_1+x_2 \in D_3$. Así que $x_1+x_2 \in D_3 \cap D = \{0\}$. Luego $x_1+x_2=0$, contradicción con la definición de $x_1 \neq 0 \neq x_2$. Además si $x_1=-x_2$ se tendría $x_1 \in D_1 \cap D_2$. O sea $x_1=0$, absurdo. Por consiguiente $\rho \neq 1$.

DEFINICION 13. Sean P_1, P_2, P_3, P_4 cuatro planes vectoriales distintos con una recta común D. Sean D_1, D_2, D_3, D_4 los intersecciones de un plano Q que no contiene a D, con P_1, P_2, P_3, P_4 respectivamente.

Se llama razón doble del cuarteto de planos (P_1,P_2,P_3,P_4) a la razón doble de (D_1,D_2,D_3,D_4). Se denota por $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_4 & P_3 \end{bmatrix}$.

§9. Orientación

Sea $A(E^n;\mathbf{R})$ espacio vectorial de las formas n-lineales alternadas que es una recta vectorial. $A(E^n;\mathbf{R})$ es la unión de $\{0\}$ y dos semirrectas abiertas A', A''.

DEFINICION 14. Se dice que A' y A'' son las orientaciones del espacio E n-dimensional y las parejas (E,A'), (E,A'') son los espacios n-dimensionales orientados con E como espacios subyacente.

Una familia $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de n vectores libres se dice que es *positiva* o *directa* en el espacio orientado (E,A') si para una forma Ψ de A' se tiene $\Psi(a_1,a_2,...,a_n)>0$ y se dice negativa o retrógrada en (E,A') si $\Psi(a_1,...,a_n)<0$.

DEFINICION 15. Sea $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq n}$ una familia de n-semirrectas vectoriales distintas y $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ una familia de vectores $\neq 0$ tal que $a_i \in \Delta_i$ para cada $i=1,2,...,n$.

Se dice que la familia (Δ_i) es directa (respectivamente, retógrada) si la familia de vectores (a_i) es directa (resp. retrógrada).

§10. Sector angular

DEFINICION 16. Sean Δ_1,Δ_2 dos semirrectas vectoriales abiertas en E. Se llama *sector angular abierto* de origen Δ_1 y de extremo Δ_2. denotado por $S^\circ(\Delta_1,\Delta_2)$ a la unión de las semirrectas vectoriales abiertas Δ tales que la terna $(\Delta_1,\Delta,\Delta_2)$ es directa o positiva. También se dice sector angular de vértice 0.

Cuando $\Delta_1=\Delta_2$ se tiene el sector nulo.

Cuando $\Delta_1=-\Delta_2$ se dice que los sectores $S^\circ(\Delta_1,\Delta_2)$ y $S^\circ(\Delta_2,\Delta_1)$ son *llanos*.

Designado por F al conjunto de las semirrectas vectoriales abiertas distintas de la semirrecta Δ_0.

PROPOSICION 22. La relación en F "Para cada par de elementos Δ_1,Δ_2 de F la terna $(\Delta_0,\Delta_1,\Delta_2)$ es directa o bien $\Delta_1=\Delta_2$ " denotada por $R(\Delta_1,\Delta_2)$ es una relación de orden total en F.

DEMOSTRACION. $R(\Delta_1,\Delta_1)$ es cierto pues $\Delta_1=\Delta_2$. Siempre se verifica o $R(\Delta_1,\Delta_2)$ o bien $R(\Delta_2,\Delta_3)$ pero no ambas simultaneamente sólo a condición de $\Delta_1=\Delta_2$.

Finalmente, la transitividad.

Sean Δ_1, Δ_2, Δ_3 tres semirrectas abiertas de F tales que se verifica $R(\Delta_1,\Delta_2)$ y $R(\Delta_2,\Delta_3)$. Sea un vector $\neq 0$, a_i sobre Δ_i, para $i=0,1,2,3$ y escribamos $\Psi(a_i,a_j)=\alpha_{ij}$ de forma que $\alpha_{ji}=-\alpha_{ij}$. Sea b un vector de E tal que $\Psi(a_0,b)=1$, de forma que $\{a_0,\}$ sea una base de E y escribamos

$$a_i=\lambda_i a_0+\mu_i b, \text{ para } i=1,2,3.$$

Se tiene entonces

$$\alpha_{0i}=\mu_i \quad \text{para } i=1,2,3$$

$$\alpha_{ij}=\lambda_i\mu_j-\lambda_j\mu_i, \quad \text{para } i,j \text{ igual a } 1,2,3$$

de donde

$$\alpha_{01}\,\alpha_{23}+\alpha_{02}\,\alpha_{31}+\alpha_{03}\,\alpha_{12}=0.$$

Varios casos distinguidos:

1. $\alpha_{01}\leq 0$. Como $(\Delta_0,\Delta_1,\Delta_2)$ es directa, entonces $\alpha_{12}>0$ y $\alpha_{20}>0$, de donde $\alpha_{02}<0$. Como $(\Delta_0,\Delta_2,\Delta_3)$ es directa, se tiene $\alpha_{23}<0$ y $\alpha_{30}<0$. Luego $\alpha_{20}\alpha_{13}=-\alpha_{01}\alpha_{23}=\alpha_{03}\alpha_{12}<0$ y como $\alpha_{20}<0$, se tiene $\alpha_{13}<0$. Lo que demuestra $R(\Delta_1,\Delta_3)$.
2. $\alpha_{01}<0$, $\alpha_{30}\leq 0$. Como $(\Delta_0,\Delta_2,\Delta_3)$ es directa, se tiene $\alpha_{02}>0$ y $\alpha_{23}>0$. Como $\alpha_{20}<0$ y $(\Delta_0,\Delta_1,\Delta_2)$ es directa se tiene $\alpha_{12}>0$. En virtud de $\alpha_{01}\alpha_{23}+\alpha_{02}\alpha_{31}+\alpha_{03}\alpha_{12}=0$ se deduce también $\alpha_{12}>0$.
3. Suponer $\alpha_{01}>0$, $\alpha_{30}>0$ implica $R(\Delta_1,\Delta_3)$ por definición.

Geometria euclideana

§1. Longitud. Ortogonalidad.

DEFINICION 1. Si E es un espacio vectorial de n dimensiones y φ es una forma bilineal simétrica positiva y no degenerada, entonces al par (E,φ) se llama espacio euclideano n dimensional.

DEFINICION 2. Para cualquier par de vectores a,b en el espacio euclideano E llamamos *norma* ó *longitud* del vector a al número

$$||a||=\sqrt{\varphi(a,a)};$$

llamamos *distancia* de a a b o longitud del segmento ab al número $d(a,b)=||a-b||$.

PROPOSICION 1. La longitud de un segmento es invariante por traslación.

DEMOSTRACION. Sean x,y dos vectores cualesquiera del espacio euclideano E. Sea t_a una traslación definida en E. Es facil verificar

$$||t_a(x)-t_a(y)||=||a+x-(a+y)||=||x-y||.$$

DEFINICION 3. Un vector a es *unitario* si $||a||=1$.

PROPOSICION 2. Para todo vector $x\neq 0$ existe un único vector z unitario tal que $x=\rho z$ con $\rho>0$.

DEMOSTRACION. Debido que $x\neq 0$, $||x||\neq 0$.

Si tomamos un vector

$$z=\frac{x}{||x||}=||x||^{-1}x$$

tenemos $||z||=1$, pues $\varphi(z,z)=||x||^{-2}\varphi(x,x)$. Podemos escribir $x=||x||z$.

PROPOSICION 3. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Para cualquier par de vectores $x,y \in E$ *se tiene* $|\varphi(x,y)| \leq ||x|| \, ||y||$.

DEMOSTRACION. Consideremos una combinación lineal de x,y con los escalares α,β. Calculamos

$$\varphi(\alpha x,\beta y,\alpha x+\beta y)=\varphi(\alpha x,\alpha x)+\varphi(\beta y,\beta y)+2\varphi(\alpha x,\beta y).$$

Utilizando definición de norma

$$||\alpha x+\beta y||^2=\alpha^2||\alpha||^2+\beta^2||y||^2 2\alpha\beta\varphi(x,y).$$

Escribiendo una forma equivalente la primera fórmula

$$||\alpha x+\beta y||^2\geq 0$$

$$(\alpha||x||+\beta||y||)^2-2||x||\,||y||\alpha\beta+2\alpha\beta\varphi(x,y)\geq 0$$

$$(\alpha||x||+\beta||y||)^2+2\alpha\beta(\varphi(x,y)=||x||\,||y||)\geq 0.$$

Si $x=0 \vee y=0 : \varphi(0,y), \varphi(x,0)=0$.

Con otros casos. Haciendo $\alpha=||y||, \beta=-||x||$ en la |ultima desigualdad se obtiene

$$-2||x||\,||y||(\varphi(x,y)-||x||\,||y||)\geq 0$$

de donde $\varphi(x,y)\leq ||x||\,||y||$.

Ahora bien, si sustituimos y por $-y$.

Como $||y||=||-y||$, pero $\varphi(x,-y)=-\varphi(x,y)$

resultará

$$\varphi(x,-y)-||x||\,||-y||\geq 0$$

implica $-||x||\,||y||\leq\varphi(x,y)$.

Ahora si x,y son linealmente dependientes $y=\lambda x$. Luego, resulta de

$$\varphi(x,y)\leq ||x||\,||y||$$

$$\lambda\varphi(x,x)\leq|\lambda|\,||x||^2$$

Si $\lambda<0$

$$\varphi(x,x)\geq -||x||\;||x||$$

Si $\lambda>0$

$$\varphi(x,x)\leq ||x||\;||x||$$

O sea $|\varphi(x,x)|=||x||^2$.

PROPOSICION 4. Desigualdad de Minkowski.

Cualesquiera que sean los vectores x,y se tiene $||x+y||\leq||x||+||y||$.

DEMOSTRACION. Debido $||x+y||^2=\varphi(x+y,x+y)$

$$\varphi(x+y,x+y)=\varphi(x,x)+\varphi(y,y)+2\varphi(x,y)$$

$$||x+y||^2=||x||^2+||y||^2+2\varphi(x,y)$$

pero por desigualdad de Cauchy Schwarz

$$||x||^2+||y||^2+2\varphi(x,y)\leq||x||^2||y||^2+2||x||\,||y||.$$

Luego $||x+y||^2\leq(||x||+||y||)^2$.

Como la función "cuadrado de un número ≥ 0" es creciente, resulta

$$||x+y||\leq||x||+||y||$$

Cuando $x=0$ ó $y=0$, se da la igualdad cuando son linealmente dependientes. $y=\alpha x$ con $x\neq 0$.

$$(\varphi(x,y))=|\alpha|\;||x||^2$$

$$\varphi(x,y)=\alpha\varphi(x,x)$$

Para que x cumpla $\varphi(x,y)=||x||\,||y||$

$$\alpha=|\alpha| \quad \text{o sea } \alpha\geq 0.$$

PROPOSICION 5. (Teorema de Pitágoras)

Si x, y son vectores ortogonales en el espacio euclidean E entonces

$$||x+y||^2=||x||^2+||y||^2.$$

DEMOSTRACION. Sabemos que

$$||x+y||^2=||x||^2+||y||^2+2\varphi(x,y),$$

pero como x,y son ortogonales $\varphi(x,y)=0$ de donde se concluye la demostración.

PROPOSICION 6. Sean D una recta vectorial en el espacio euclideo E y $a\neq 0$ un vector de D. Entonces

(1) El subespacio vectorial H de los vectores ortogonales a D es un hiperplano suplementario de D en E.

(2) El subespacio de los vectres ortogonales a H es D.

(3) Para todo $x \in E$, las proyecciones ,z en D y H, respectivamente, correspondiente a la descomposición de E en la suma directa D+H vienen dadas por las fórmulas

$$y=\frac{\varphi(x,a)}{||a||^2}a; \quad [d_{(x,y)}]^2=||x||^2-\frac{\varphi^2(a,x)}{||a||^2}.$$

DEMOSTRACION.

(1) Los puntos de H son los que satisfacen la condición $\varphi(a,x)=0$. Sabemos que la aplicación $S_\varphi(a)$ es una forma lineal sobre E. Luego la relación $S_\varphi(a)(x)=\varphi(a,x)=0$ determina totalmente a H. De aquí resulta que H es un hiperplano vectorial de ecuación $\varphi(a;x)=0$. Como $\varphi(a,a)\neq 0$, la recta D no está incluida en H; por lo tanto H y D son suplementarios.

(2) Como H y D son suplementarios y ortogonales, por la descomposición única en suma directa $H+D$, D es el ortogonal de H.

(3) La proyección de x en d es un único vector de la forma ξa tal que $x-\xi a \in H$. Luego $\varphi(a,x-\xi a)=0$. De donde resulta $\varphi(a,x)=\xi\varphi(a,a)=0$. O sea $\varphi(a,x)=\xi||a||^2$.

Como ξ es único, pues determina la proyección de x en D: ξa. Entonces

$$\xi = \frac{\varphi(a,x)}{||a||^2}$$

luego si $x=y+z$ donde $y \in D, z \in H$

$$y = \frac{\varphi(a,x)}{||a||^2}a; \quad z = x - \frac{\varphi(a,x)}{||a||^2}$$

$$d(x,z) = ||x-z|| \frac{|\varphi(a,x)|}{||a||^2}$$

$$d(x,y) = ||x-y|| = ||z||$$

$||x-y||^2 = ||z||^2$ pero $||z+y||^2 = ||z||^2 + ||y||^2$ por el teorema de pitágoras. Así que

$$||x-y||^2 = ||z+y||^2 - ||y||^2 = ||x||^2 - ||y||^2$$

luego

$$(d(x,y))^2 = ||x||^2 - \frac{\varphi^2(a,x)}{||a||^2}$$

DEFINICION 3. Se dice que una base $(e_i)_{1 i \leq n}$ en E es ortogonal si se verifica $\varphi(e_i,e_j)=0$ cuando $i \neq j$. Se dice que es una base *ortonormal* si es ortogonal y, además,

$$\varphi(e_i,e_i)=1.$$

O lo que es lo mismo: la matriz de φ, $M(\varphi)$ es la matriz unidad (α_{ij}) tal que $\alpha_{ii}=1$; $\alpha_{ij}=0$, $i \neq j$.

§2. El grupo de las semejanzas

DEFINICION 4. Se dice que un endomorfismo u de E es una semejanza de multiplicador α si se verifica para cualquier par de vectores x,y

$$\varphi(u(x),u(y))=\alpha\varphi(x,y).$$

PROPOSICION 7. Toda semejanza u de multiplicador $\alpha\neq 0$ es biyectiva. Además $u^*=\alpha u^{-1}$.

DEMOSTRACION. Por definición $\varphi(u(x),u(y))=\alpha\varphi(x,y)$. Utilizando el adjunto u^* de u

$$\varphi(u(x),u(y))=\varphi(x,u^*u(y))$$

Como $\alpha\neq 0$: $\alpha\varphi(x,y)=\varphi(x,\alpha y)$ se tiene $\varphi(x,u^*u(y))=\varphi(x,\alpha y)$.

Utilizando las formas lineales asociados a φ

$$d_\varphi(x)(u^*u(y))=d_\varphi(x)(\alpha y)$$

como φ es no degenerada y simétrica $d_\varphi=S_\varphi$ y además son biyectivas.

Luego $u^*u(y)=\alpha y$ para todo y de donde $u^*u=\alpha\cdot 1_E$.

Como u^*u es inyectiva, u también lo es. Si no fuera así existieran a,b con $a\neq b$ tal que $u(a)=u(b)$ pero como $u^*u(a)=u^*u(b)$ así que $\alpha a=\alpha b$ nos lleva al absurdo $a=b$ y $a\neq b$.

Ahora tenemos $u^{-1}(0)=\{0\}$, entonces $\dim u^{-1}(0)+rg(u)=\dim E$ de donde $rg(u)=\dim E$. Como $u(E)\subset E$, se deduce $u(E)=E$.

Por tanto u es biyectiva; además $u^*u=\alpha 1_E$.

Existe la inversa u^{-1} de u; luego $u^*=\alpha u^{-1}$.

u^* también es biyectivo.

COROLARIO 0. Las homotecias de razón $\lambda\neq 0$ son semejanzas biyectivas.

DEMOSTRACION. Sea h_λ una homotecia.

$$\varphi(h_\lambda(x),h_\lambda(y))=\varphi(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2\varphi(x,y) \text{son homotecias de multiplicador } \lambda^2.$$

PROPOSICION 8. La composición de semejanzas biyectivas es una semejanza biyectiva. Además la inversa de una semejanza biyectiva también es una semejanza.

DEMOSTRACION. Sean u,v dos semejanzas de multiplicador α,β respectivamente. Para todo par de vectores $x,y \in E$

$$\varphi(u(v(x),u(v(y)))=\alpha\varphi(v(x),v(y))=\alpha\beta\varphi(x,y)$$

de donde $u \circ v$ es semejanza de multiplicador $\alpha\beta\neq 0$.

La semejanza de multiplicador 1 es la identidad 1_E.

Luego, si u es la semejanza de multiplicador α entonces para su inversa u^{-1}

$$\varphi(uu^{-1}(x),uu^{-1}(y))=\varphi(x,y)$$

pues $uu^{-1}=1_E$

pero $\varphi(uu^{-1}(x),uu^{-1}(y))=\alpha\varphi(u^{-1}(x),u^{-1}(y))$ de donde $\alpha\varphi(u^{-1}(x),u^{-1}(y))=\varphi(x,y)$.

Como $\alpha\neq 0$, $\varphi(u^{-1}(x),u^{-1}(y))=\alpha^{-1}\varphi(x,y)$ para todo par $x,y \in E$.

por consiguiente u^{-1} es una semejanza de multiplicador α^{-1}.

PROPOSICION 9. Las semejanzas biyectivas son un subgrupo del grupo lineal $GL(E)$.

DEMOSTRACION. Como las semejanzas de multiplicador $\alpha\neq 0$ son automorfismos de E pertenecen al grupo lineal $GL(E)$.

Como ya se ha probado que la inversa de una semejanza biyectiva también es una semejanza biyectiva, lo mismo que la compuesta de dos de tales semejanzas.

Concluimos que si u,v son semejanzas biyectivas v^{-1} también lo es.

Por consiguiente forman un subgrupo de $GL(E)$.

DEFINICION 5. Al grupo de las semejanzas de multiplicador $\neq 0$ se denota por $GO(\varphi)$.

PROPOSICION 10. La aplicación que asigna a cada semejanza biyectiva u su multiplicador $\mu(u)$ es un homomorfismo de $GO(\varphi)$ en el grupo multiplicativo $\mathbf{R}_*^+$ de los reales > 0

DEMOSTRACION. Como $\varphi(u(x),\mu(x)) = \|u(x)\|^2 = \alpha\varphi(x,x) = \alpha\|x\|^2$, a fuerza $\alpha > 0$. Sea x un vector unitario de E la aplicación $u \to \varphi(u(x),\mu(x)) = \mu(u)$ es un homomorfismo, pues para todo $u,v \in GO(\varphi)$

$$\mu(u \circ v) = \varphi(uv(x),\mu v(x)) = \mu(u)\varphi(v(x),v(x))$$

$$= \mu(u)\mu(v)\varphi(x,x) = \mu(u)\mu(v).$$

DEFINICION 6. Al núcleo del homomorfismo de la proposición 10 se denomina Grupo Ortogonal y se deonta por $O(\varphi)$. A los elementos de $O(\varphi)$. A los elementos de $O(\varphi)$ se las denomina *Transformaciones ortogonales* o *isometrias lineales*, tambien les llaman desplazamiento.

PROPOSICION 11. Las isometrias dejan invariante la distancia entre dos puntos.

DEMOSTRACION. . En efecto, si u es una isometría, para cualquier $x,y \in E$

$$\|u(x) = u(y)\|^2 = \|u(x-y)\|^2 = \varphi(u(x-y),u(x-y))$$

de donde $\|u(x)-u(y)\|^2 = \varphi(x-y,x-y) = \|x-y\|^2$. Luego $\|u(x)-u(y)\| = \|x-y\|$.

PROPOSICION 12. Toda semenanza biyectiva u puede escribirse de una manera única como la compuesta de una homotecia h_β y una isometria v, $u = h_\beta v$.

DEMOSTRACION. Si h_λ es una homotecia de razón λ ya se ha probado que es semejanza de multiplicador λ^2. Si hacemos la compuesta de h_λ con la semejanza u de multiplicador $\alpha \neq 0$ se tendría la semejanza $h_\lambda u$ de multiplicador $\lambda^2\alpha$. Si queremos formar uuna isometria, construyamos $\lambda^2\alpha = 1$.

Lo cual exige que $\lambda^{-1} = \pm\sqrt{\alpha}$ considerando $\lambda > 0$. Siendo así $v = h_\lambda u$ es una isometria. Aplicando la homotecia inversa

$$u = h_\lambda^{-1} v = h_{\lambda^{-1}} v.$$

La semejanza u se puede escribir $h_\beta v$ donde $\beta=\sqrt{\alpha}$; y α es el multiplicador de u.

Examinemos la unicidad de la escritura. Supongamos $h_\beta v=h_\gamma w$ donde $v,w \in O(\varphi)$, $\beta>0$, $\gamma>0$. Como $h_\beta v=h_\gamma w$ implica $vw^{-1}=h_\beta^{-1}h_\gamma$ $vw^{-1}=h_\beta^{-1}\gamma$; de donde $\delta=\beta^{-1}\gamma$ es tal que $\delta^2=1$, pues $h_\beta^{-1}\gamma \in O(\varphi)$. Como $\delta>0$, entonces $\delta=1$. Lo cual equivale $\beta^{-1}\gamma=1$ implica $\beta=\gamma$. Luego $vw^{-1}=1_E$ por lo tanto $v=w$.

PROPOSICION 13. Si u es una semejanza de multiplicador $\alpha\neq 0$ del espacio euclideo n-dimensional. Entonces $(\det(u))^2=\alpha^n$.

DEMOSTRACION. La ley de inercia garantiza la existencia de una base ortonormal para φ. Para la semejanza u se tiene

$$\varphi(u(e_i),u(e_j))=\begin{cases}0, \text{ si } i\neq j\\ \alpha, \text{ si } i=j\end{cases}.$$

u determina una base ortogonal $(u(e_i))_{1\leq i\leq n}$. La matriz $M(\varphi)$ de φ respecto a esta base es (β_{ij}) donde $\beta_{ij}=\varphi(u(e_i),u(e_j))$. O sea $\beta_{ij}=0$ si $i\neq j$; $\beta_{ii}=1$. Su determinante es $\det M(\varphi)=1$. Si la matriz de u respecto a la base (e_i) es U, la matriz de u^* respecto de la base respecto a φ es de la forma

$$M_\varphi(u^*)=M^{-1}(\varphi)U^*\,M(\varphi).$$

Como $M(phi)$ es la identidad, escogiendo la base ortogonal $M_\varphi(u^*)=U^*$

En cualquier caso

$$\det M_\varphi(u^*)=\det U^*.$$

Ya anteriormente probamos $\det{}^t u=\det U^*$ donde ${}^tU$ es la matriz de la traspuesta de u respecto a la base dual; puesto que

$$u^*=d_\varphi^{-1}{}^t u\ d_\varphi$$

dado que $\det(d_\varphi)=\det M(\varphi)$.

Pero como $\det U=\det{}^tU$ resulta $\det(uu^*)=\det U\det U^*$ de donde $\det(uu^*)=\det U\det U$. Luego $(\det(u))^2=\det(uu^*)$

Debido que $uu^* = \alpha \cdot 1_E$

$$M(\alpha 1_E) = (\alpha_{ij}) \text{ donde } \alpha_{ii} = \alpha,\ 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{ij} = 0, \text{ para } i \neq j$$

Así que $\det M(\alpha 1_E) = \alpha^n$.

Por consiguiente, obtenemos el resultado que se quería.

COROLARIO. Si $u \in O(\varphi)$ entonces $\det(u) = \pm 1$.

DEMOSTRACION. Como toda isometria es una semejanza de multiplicador $= 1$, en virtud de la fórmula de la proposición 13 anterior se tiene $(\det(u))^2 = 1$. Por lo tanto $\det(u) = \pm 1$.

PROPOSICION 14. Las transformaciones ortogonales cuyo determinante $= 1$ forman un subgrupo invariante de $O(\varphi)$.

DEMOSTRACION. Sean $u,v \in O(\varphi)$ tales que $\det(v) = \det(u) = 1$; luego $uv \in O(\varphi)$ por estructura de grupo. Además

$$\det(u \circ v) = \det(u)\det(v) = 1.$$

Ahora bien si $uu^{-1} = 1_E$ entonces

$$\det(uu^{-1}) = \det(u)\det(u^{-1}) = \det(1_E) = 1$$

Como $\det(u) = 1$, resulta $\det(u^{-1}) = 1$. Por consiguiente, si u,v son transformaciones ortogonales con determinante -1, también la compuesta uu^{-1} es similar.

DEFINICION 7. Al grupo de las isometrias cuyo determinante $= 1$ se denomina Grupo de las Rotaciones y se denota por $O^+(\varphi)$. A los elementos de $O^+(\varphi)$ se les llamará *rotaciones* de E.

PROPOSICION 15. Si la dimensión de E es impar y $u \in GO(\varphi)$ entonces el $\det(u)$ *y el* $\det(v)$, *donde v esl a isometria de la descomposición única de u, tienen el mismo signo.*

DEMOSTRACION. Por la proposición 15 el multiplicador de u, $\mu(u)>0$. Si escribimos la descomposición única de u: existe una homotecia h_λ y una isometría v tal que $u=h_\lambda v$. Tomando $\lambda=\sqrt{\mu(u)}$, como $\det(u)=\det(h_\lambda)\det(v)$ resulta, debido a que $\lambda>0$, que si $\det(v)<0$, también $\det(u)<0$. Igualmente $\det(v)>0$, también $\det(u)>0$.

DEFINICION 8. Una semejanza $u \in GO(\varphi)$ se dice que es *directa* si $\det(u)>0$. Se dirá *inversa* si $\det(u)<0$.

PROPOSICION 16. Las rotaciones son semejanzas directas.

DEMOSTRACION. Obvio; pues por definición de las rotaciones son precisamente aquellas cuyo determinante = 1.

DEFINICION 9. Si V y W son ortogonales y suplementarios una simetría ortogonal (o simplemente, simetría) respecto a V es una involución $u \in GL(E)$ tal que $u(x)=x$ para $x \in V$; $u(x)=-x$ cuando $x \in W$.

PROPOSICION 17. Si u es una simetria respecto a V, entonces las únicas rectas vectoriales invariantes por las contenidas en V ó en W; además, $-u$ es la simetría respecto a W.

DEMOSTRACION. Para cada $x \in V$, las rectas vectoriales que pasan por x son los vectores de la forma ξx que satisfacen $u(\xi x)=\xi x$. Lo mismo para un vector $a \in W$. Ahora, si $x \in V$, $u(x)=x$, pero $-u(x)=-x$. Si $x \in W$: $u(x)=-x$, pero $-u(x)=x$.

PROPOSICION 18. Si u es una simetria respecto a V, entonces u es una isometria lineal.

DEMOSTRACION. Por definición de simetria, para todo $x \in V$,

$$\varphi(x,x)=\left|\left|x\right|\right|^2=\varphi(u^2(x),u^2(x))=\varphi(u(x),u(x)).$$

De donde $\left|\left|x\right|\right|^2=\left|\left|u(x)\right|\right|^2$, pues $u(x)=x$. Así que $\left|\left|x\right|\right|=\left|\left|u(x)\right|\right|$, deja invariante la longitud. Cuando $y \in W$, W el ortogonal y suplmentario de V en E, $u(y)=-y$,

$$\varphi(y,y)=||y||^2=\varphi(u^2(y),u^2(y))=\varphi(-u(y),-u(y))$$

de donde $||y||^2=||u(y)||^2$.

Cuando $x\in V, y\in W$ $\varphi(x,y)=0$.

Por teorema de pitágoras

$$||x+y||^2=||x||^2+||y||^2.$$

Pero como para cualquier par de vectores x,y

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}\left(||x+y||^2-||x||^2-||y||^2\right).$$

Cuando x,y están en V y W respectivamente

$$\varphi(x,y)=0=\varphi(u(x),u(y)).$$

PROPOSICION 19. Las isometrías lineales se caracterizan como los automorfismos u de E tales que $u^*=u^{-1}$.

DEMOSTRACION. Por definición de adjunto de una semejanza u : $u^*u-\alpha 1_E$ donde α es el multiplicador de u. Cuando u es una transformación ortogonal $\alpha=1$, luego $u^*u=1_E$ por tanto $u^*=u^{-1}$ (normal).

PROPOSICION 20. Si V y W son dos subespacios de E de la misma dimensión, entonces existe al menos una isometría u tal que $u(V)=W$.

DEMOSTRACION. Toda semejanza biyectiva es isomorfismo de E sobre si mismo.

Supongamos que toda isometria u es tal que $u(V)\neq W$.

Particularmente, aquella de la descomposición única de v : $v=h\lambda u$.

Esto nos lleva a la disyunción $u(V)\not\subset$ ó $\dim W\neq \dim u(V)$.

Como $\dim W\neq \dim u(V)$ es falso pues nos lleva a la contradicción $\dim u(V)=\dim(V)$ por ser u isomorfismo de E, restringido a V, y $\dim V=\dim W$ por hipótesis. Así que $\dim W=\dim u(V)$.

Ahora, si $u(V)$ no está incluido en W existe $x\in V, x\neq 0$, tal que $u(x)\notin W$. Lo cual equivale a afirmar que los puntos de la recta distintos de 0 contenida en V que pasa por x su imagen $u(D)$ que es una recta vectorial no está contenida en W. Pero (D) está contenida en $u(V)$ y $\dim V=\dim u(V)$. Deducimos $\dim W\neq\dim V$, lo cual contradice la hipótesis.

En consecuencia, existe una transformación ortogonal u tal que $u(V)=W$.

DEFINICION 10. La propiedad de las isometrias dada en la proposición 10 se expresa diciendo que el grupo ortogonal $O(\varphi)$ opera transitivamente en el conjunto de los subespacios de una dimensión dada. Lo mismo $O^+(\varphi)$.

DEFINICION 11. Un subespacio V de E se dice *estable* o *invariante* por el endomorfismo u si $u(V)\subset V$.

DEFINICION 12. El cuerpo de los números complejos es algebraicamente cerrado; es decir, todo polinomio en una indeterminada con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja.

PROPOSICION 21. Si u es un endomorfismo autodjunto (ó Hermítico) entonces existe una base ortonormal de E formado por los vectores propios de u.

DEMOSTRACION. Consideremos al espacio euclideo E definido sobre el cuerpo **C** de los números complejos. Para cualquier endomorfismo u de E la ecuación $\det((u-\lambda 1_E)=0$ tiene al menos una raíz compleja, ya que **C** es algebraicamente cerrado.

Si suponemos los valores propios de u $\lambda_1\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ tenemos los correspondientes subespacios V_k para cada $k=1,2,\ldots,r$. Estos espacios son dos a dos ortogonales; si $x\in V_k, y\in V_i : \varphi(u(x),y)=\varphi(x,u^*(y))=0$ implica $\lambda_k\varphi(x,y)=-\varphi(x,u(y))=\lambda_i\varphi(x,y)$ pues $u=u^*$. Luego $(\lambda_k-\lambda_i)\varphi(x,y)=0$. Cuando $k\neq i$, se tiene $\lambda_k\neq\lambda_i$; por lo tanto $\varphi(x,y)=0$ y V_k,V_i-ortogonales. Si formamos la suma directa $V=V_1+V_2+\cdots+V_k$. Este subespacio de E es estable por u pues si $y\in u(V), y=u(x)$ para algún $x\in V; x=x_1+x_2+\cdots+x_r$ es su escritura única por ser elemento de la suma directa. Luego $u(x)=u(x_1)+\cdots+u(x_r)$. O sea $u(x)=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_rx_r$.
De donde $y=u(x)\in V$.

Este hecho implica que el ortogonal de V, $V^\perp$ también es estable por u, porque la relación $\varphi(x,y)=0$ para todo $y\in V$ implica $\varphi(u(x),y)=\varphi(x,u^*(y))$ pero como $u^*=u$, $u(y)\in V$ por la estabilidad de V por u, se tiene $\varphi(u(x),y)=0$ y como V y $V^\perp$ son suplementarios E es la suma directa $V+V^\perp$ con $V\cap V^\perp=\{0\}$.

Si $V^{\perp} \neq \{0\}$, existiría un vector no nulo x en $V^{\perp}$ tal que $u(x)=\beta x$. O sea $x \in V$, produciendo una contradicción pues $\varphi(x,x)>0$ ya que su signatura es $(n,0)$ y el suponer $x \in V^{\perp}$ se tiene $\varphi(x,x)=0$. En consecuencia $V^{\perp}=\{0\}$ y por lo tanto $V=E$.

Consideremos la restricción de φ a $V_k \times V_k$ y la restricción u_k de u para cada V_k. Vamos a construir la base ortogonal con los valores propios de u.

En virtud que φ es definida positiva en V_k por el teorema de Sylvester o ley de inercia existe en V_k una base ortonormal formada por vectores propios de u_k. Como se extraen de cada V_k, sea $\dim V_k=\alpha_k$, entonces

$$\dim E=n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r=\sum_{k=1}^{r} V_k.$$

TEOREMA 1. Si E es un espacio euclídeo de n dimensiones, entonces toda tranformación ortogonal u es producto de a lo sumo n simetrias respecto a hiperplanos.

DEMOSTRACION. Procediendo por inducción sobre $n=\dim E$.

Tomando en cuenta que un hiperplano vectorial es el suplementario de una recta vectoral. El espacio de dimensión 0 no tiene simetrias. O sea se puede escribir toda isometría como producto de cero simetrias. El espácio de dimensión 1 es una recta, y la simetría se define respecto al origen, se considere solo la única involución $=1_E$ distinta de 1_E.

Suponiendo $n=2$, o sea el plano euclideano E, considerando u una transformación ortogonal y un vector $a\neq 0$. Sea $b=u(a)$. Si $a=b$, entonces todos los puntos de la recta D que pasa por a son invariantes por u, pues son de la forma ξa; $u(\xi a)=\xi u(a)=\xi a$. Luego la recta D' ortogonal a D es tal que $u(D')=D'$ ya que $E=D+D'$, $E=u(D)+u(D')$. La restricción de u a D' sólo puede ser la identidad de D' o bien la homotecia de razón $\lambda=-1$. Concluimos que u es o la identidad de E o bien la simetría respecto a D.

Ahora bien, cuando se tiene $u(a)=b\neq a$. Considerando la simetría s_1 respecto a la recta D ortogonal a $c=a-b$. Se tiene $s_1(c)=-c$, para cualquier punto $z=\xi c$ de la recta D' que pasa por c que sea la ortogonal a D ocurre $s_1(z)=-z$.

Cuando examinamos las proyecciones de b a las rectas D y D' : $b=y+z$, $s_1(b)=y-z$. Luego $b+s_1(b)=2y$, donde $y\in D$, $z\in D'$. Pero como $\varphi(c,b-y)=\varphi(c,y)=0$ $0=\varphi(c,b-z)=\varphi(c,b)-\varphi(c,z)=\varphi(c,b)-\xi\varphi(c,c)$ de donde $\xi\varphi(c,c)=\varphi(c,b)$.

Como $z=\xi c$, $z=\dfrac{\varphi(c,b)}{||c||^2}c$.

Así que

$$b+s_1(b)=2y$$

$$b+s_1(b)=2b-2z$$

de donde

$$s_1(b)=b-2z=b-\frac{2\varphi(c,b)}{||c||^2}c.$$

Calculando $s_1(b)$

Sabemos que $\varphi(c+b,c+b)=||c||^2+||b||^2+2\varphi(c,b)$, así que

$$2\varphi(c,b)=||c+b||^2-(||c||^2+||b||^2)$$

o sea

$$2\varphi(c,b)=||a||^2-||c||^2-||b||^2$$

pero por ser u isometria tal que $u(a)=b$

$$||u(a)||=||a||=||b||.$$

Por lo tanto $2\varphi(c,b)=-||c||^2$

$S_1(b)=b+c=a$, pues $c=a-b$. Ahora bien, si escribimos la compuesta S_1u observamos $v(a)=S_1(b)=a$. Como u es una isometría resulta que v también lo es, ya que toda simetría es isometría. Además como $S_1^2=1_E$, por definición

$$u=S_1v.$$

Así que, como $v(a)=a$ resulta, al igual que al inicio: o bien es la identidad 1_E o bien es simetria respecto a una recta.

En consecuencia u es a lo sumo producto de 2 simetrias respecto a rectas.

Ahora cuando $n=3$. Sea $u\in O(\varphi)$. Supongamos que existe un plano euclideo P tal que todos sus puntos son invariantes por $u: u(x)=x$. Entonces la recta D ortogonal a P es globalmente invariante $(D)=D$; luego la restricción de u a D no puede ser más que la identidad o la homotecia de razón -1. Concluimos que u es entonces o la identidad 1_E ó simetria respecto a P.

En seguida, supongamos que existe una recta vectorial D cuyos puntos son invariantes por u; entonces el plano vectorial P ortogonal a D es globalmente invariante por $u: u(P)=P$.

Consideremos la restricción de u al plano P. Denotémosla por v. Tomando una base $\{a,b,c\}$ uno de cuyos vectores $a\in D$ y los otros dos a P. Calculando los determinantes tenemos $\det(w)=\det(v)$. Si $\det(v)=-1$, v es

una simetría respecto a una recta $D_1 \subset P$. Si se toma $b \in D_1$ y c ortogonal a D_1 en P, resulta $u(a)=a$, $v(b)=u(b)=b$, $v(c)=u(c)=-c$. Entonces u es una simetría respecto al plano $D+D_1=Q$.
Si, por el contrario, $\det(v)=1$, v es una rotación. Como ya lo estudiamos cuando $n=2$, se tiene v es producto de dos simetrías S_1S_2 respecto a dos rectas D_1,D_2 en P. Siendo t_1,t_2 dos simetrías respecto a los planos $Q_1=D_1+D$, $Q_2=D_2+D$ evidentemente se tiene que $t_1t_2=u$ pues para $x \in D$, $u(x)=t_1t_2(x)=x$ y para $x \in P$, $u(x)=t_1t_2(x)$ puesto que entonces

$$u(x)=v(x) \quad \text{y} \quad t_1t_2(x)=S_1S_2(x).$$

Abordando el caso general. Sea $a \neq 0$ un vector de E. Escribamos $b=u(a)$. Si $b=a$, todos los puntos de la recta que pasa por a son invariantes por u y por lo tanto estamos en el caso precedente ya analizado. Supongamos ahora, $b \neq a$ y sea $c=a-b$. Sea s la simetría respecto al plano ortogonal a c; como ya se examinó cuando $n=2$ se prueba que si se tiene $u'=su$, se tiene $u'(a)=a$; además $\det(u')=\det(s)\det(u)=-\det(u)$.
En conclusión, si $\det(u)=1$, u' es una simetría respecto a un plano pues $\det(u')=-1$. Si $\det(u)=-1$ u' es producto de dos simetrías respecto a planos.

COROLARIO 1. Toda rotación es producto de un número par de simetrías respecto a hiperplanos.

DEMOSTRACION. Como el determinante de una simetría respecto a un hiperplano, y el de una rotación es 1. El teorema 1 demuestra que una rotación es producto de un número par $k \leq n$ de simetrías respecto a un hiperplano.

COROLARIO 2. Si $n=\dim E$ es impar toda rotación deja invariante un vector $\neq 0$.

DEMOSTRACION. Por corolario anterior el número par de simetrías $k \leq n-1$ cuyo producto es una rotación, la relación de Grassmann muestra que al vector que pertenece a la intersección de los k hiperplanos de las simetrías de las cuales la rotación es producto es invariante.

DEFINICION 13. Una *trasposición* es una simetría respecto a un subespacio V de dimensión $n-2$.

Dos rotaciones u,v son conjugados en el grupo de las rotaciones $O^+(\varphi)$ si existe una rotación w tal que

$$u=wvw^{-1}.$$

PROPOSICION 22. Todo trasposición es una rotación. Además, dos trasposiciones cualesquiera son conjugadas en $O^{+}(\varphi)$.

DEMOSTRACION. Sea u una trasposición, u es una simetría respecto a V, con $\dim V=n-2$. Si $E=V+V^{\perp}$, la restricción de u a $V^{\perp}$, el cual es un plano, la simetría $x\to -x$.

Por otra parte, como $O^{+}(\varphi)$ opera transitivamente sobre los planos vectoriales.
Si u es una simetría respecto a V, con $\dim V=n-2$, y v es una simetría respecto a W, con $\dim W=n-2$, luego $\dim V^{\perp}=\dim W^{\perp}$.
Existe una rotación r tal que $r(V^{\perp})=W^{\perp}$. O sea $r^{-1}(W^{\perp})=V^{\perp}$.
Así que

$$vr(V^{\perp})=v(W^{\perp})=W^{\perp}$$

$$r^{-1}u(V^{\perp})=r^{-1}(V^{\perp})=W^{\perp}$$

pues las simetrías dejan invariantes globalmente a $v^{\perp}$ y $W^{\perp}$.
Por consiguiente

$$v(W^{\perp})=W^{\perp} rur^{-1}(W^{\perp})=ru(V^{\perp})=r(V^{\perp}).$$

TEOREMA 2. En un espacio euclideano E de dimensión $n\geq 3$ toda rotación u es producto de a lo sumo n trasposiciones.

DEMOSTRACION. La rotación u es el producto de un número par $\leq n$ de simetrías respecto a hiperplanos. $u=s_1 s_2 \ldots s_k$.

Basta probar que todo producto de dos de dichas simetrías es producto de a lo sumo dos trasposiciones.
El producto $s_1 s_2$ deja invariantes los puntos de la intersección V de los hiperplanos H_1 y H_2 de tales simetrías. Limitándonos al caso $s_1\neq s_2$ se observa que $\dim V=n-2\geq 1$.

La rotación u estará completamente determinada por su restricción v al plano $P=V^{\perp}$ ortogonal a V. v es entonces producto de las simetrías $t_1 t_2$ respecto a las rectas $D_1=H_1\cap P$; $D_2=H_2\cap P$. Considerando una recta D

en V y el subespacio W ortogonal en V a D, de dimensión $n-3$. Sea r_1 (respectivamente r_2) la trasposición igual a t_1 (respectivamente a t_2) en P, a la simetría respecto a W en V; como esta simetría es involutiva por definición, entonces también $u=r_1r_2$ se obtiene.

§3. Angulos

Consideremos un grupo aditivo U isomorfo a $O^+(\varphi)$, denominado Grupo de los ángulos. Se designa por r a un isomorfismo de U sobre $O^+(\varphi)$. se designa por $r(\theta)$ a la rotación correspondiente al ángulo $\theta \in U$ por el isomorfismo r. Se dice que $r(\theta)$ es la rotación del ángulo θ. Luego, por definición,

$$r(0)=1_E;\ r(-\theta)=r(\theta))^{-1};$$

$$r(\theta_1+\theta_2)=r(\theta_1)r(\theta_2).$$

Como -1_E es la única involución $\neq +1_E$ en $O^+(\varphi)$ es una simetría respecto al origen. Se ve que hay un único ángulo $\neq 0$, denotado por $\overline{w}$, tal que $\overline{w}+\overline{w}=0$.

Luego: $r(\overline{w}+\overline{w})=r(0)$ implica $r(\overline{w})r(\overline{w})=1_E$.

Se escribe $r(\overline{w})=-1_E$.

Se llama ángulo llano a $\overline{w}$.

Los ángulos θ que satisfacen $r(\theta)r(\theta)=-1_E$ son aquellos de la ecuación $\theta+\theta=\overline{w}$ que admite dos soluciones opuestas $\delta,-\delta$ en el grupo U. se denominan ángulos rectos

$$r(\theta)^2=-1_E.$$

Pero se sabe que toda isometría u se caracteriza por $u^*=u^{-1}$. Trasladando este hecho a nuestro estudio, tenemos $r(\theta)^*r(\theta)^2=-1_E(r(\theta))^{-1}$ pero $r(\theta)^*r(\theta)=-1_E$; luego se tiene $r(\theta)=-r(\theta)^*$ de donde $r(\theta)^*=-r(\theta)$. Esto implica $\varphi(x,r(\theta)^*(x))=\varphi(r(\theta)(x),x)=-\varphi(x,r(\theta)(x))$.

Por lo tanto, para cualquier x

$$2\varphi(x,r(\theta)(x))=0.$$

En este caso, las rotaciones $r(\theta)(x)$ son ortogonales a x para todo $x \in E$. Estas rotaciones de los ángulos rectos son las únicas que poseen tal propiedad.

PROPOSICION 23. Si u es una rotación y x,y dos vectores unitarios entonces

$$\varphi(x,u(x))=\varphi(u(y),y).$$

Además para las orientaciones (E,Ψ'), (E,Ψ''), positiva y negativa, respectivamente se tiene

$\Psi'(x,\mu(x))=\Psi'(y,\mu(y))$, $\Psi''(x,\mu(x))=\Psi''(y,\mu(y))$

DEMOSTRACION. Existe una única rotación v tal que $y=v(x)$; luego, utilizando la conmutatividad en O^+

$$\varphi(v,\mu(v))=\varphi(v(x),\mu v(x))=\varphi(v(x),v\mu(x))$$

$$=\alpha\varphi(x,\mu(x)) \quad .$$

donde $\alpha=1$, es multiplicador de v

Analogamente

$$\Psi'(y,\mu(y))=\Psi'(v(x),\mu(v)))=PSI'(v(x),v(\mu(x)))$$

$$=\det(v)\Psi'(x,\mu(x)$$

pero como $\det(v)=1$, ya que es una rotación.

DEFINICION 14. Si $u=r(\theta)$, al número $\varphi(x,\mu(x))$, independientemente del vector unitario elegido x, se llama coseno del ángulo θ, denotado por $\cos\theta$. El número $\Psi'(x,\mu(X))$ se denomina seno del ángulo θ para la orientación Ψ', se denota $\sin\theta$ cuando se ha fijado la orientación.

Como existe una correspondencia biunívoca canónica entre semirrectas vectoriales cerradas (abiertas) y los vectores unitarios (puntos de la circunferencia unidad) que dichas semirrectas contienen.

DEFINICION 15. Dada dos semirrectas Δ_1,Δ_2 existe una sola rotación única tal que $u(\Delta_1)=\Delta_2$. Al ángulo de esta rotación se llama el ángulo que forma Δ_2 con Δ_1, se denota por $(\widehat{\Delta_1,\Delta_2})$.

Dadas las rectas vectorials D,D' en E, sean Δ,Δ' dos semirrectas vectoriales abiertas contenidas, respectivamente, en D y D'. Sea $\theta=(\Delta,\Delta'$. Al cambiar una u otra semirrecta Δ,Δ' por su opuesta se obtiene para el ángulo correspondiente uno de los dos valores θ, $\theta+\overline{w}$.

DEFINICION 16. Se llama ángulo del par de rectas (D,D'), y se denota por $(\widehat{D,D'})$ al conjunto $\{\theta,\theta+\overline{w}\}$.

De aquí resulta

$$(D\widehat{,}D)=0;\ (D'\widehat{,}D)=-(D\widehat{,}D')$$

$$(D\widehat{,}D')+(D'\widehat{,}D'')=(D\widehat{,}D'').$$

§4. Estructura de $O^+(\varphi)$

Axioma de Arquímedes: "Para todo ángulo $\theta\neq 0$ en el grupo de ángulos existe un entero n tal que $\cos(n\theta)<0$."

DEFINICION 17. Al conjunto de puntos invariantes por una rotación $\neq 1_E$ cuando $\dim E$ es impar, es una recta llamada eje de rotación.

PROPOSICION 24. Toda rotación u de eje D y ángulo θ es producto de dos simetrías t_1,t_2 respecto a dos rectas D_1,D_2 en el plano P ortogonal a D tales que $(D_1\widehat{,}D_2)=\theta/2$.

DEMOSTRACION. Sea v la restricción de u a P. Sabemos que v se descompone en dos simetrías respecto a dos rectas D_1,D_2 en P. Consideremos estas simetrías s_1,s_2 como las restricciones de las simetrías t_1,t_2 en E respecto a las rectas D_1,D_2. Como para todo vector $a\in D$ se tiene $t_1(a)=t_2(a)=-a$, resulta que $t_1t_2(a)=a$. Luego la rotación u es el producto de dos simetrías ya que $\dim E=3$ y como t_1t_2 conincide con u en D, resulta $=t_1t_2$. Por otra parte, como t_1 y t_2 son rotaciones de igual ángulo, el ángulo de la rotación t_1,t_2 es el doble de θ.

Si θ_1,θ_2 es los ángulos de las rotaciones t_1 y t_2 respectivamente, entonces $\theta_1=\theta_2$.
Como $u=r(\theta)$, $u=t_1t_2$,

$$r(\theta)=r(\theta_1)r(\theta_2)=r(\theta_1+\theta_2)$$

$2\theta_1=\theta$; por cuanto $\theta_1=\theta/2$.

PROPOSICION 25. Si u es una rotación de ángulo θ tal que $\cos\theta<0$, entonces para E de 3 dimensiones:
(1) existen en E dos rectas vectoriales D',D'' ortogonales y tales que $u(D')=D''$.
(2) Si t' es una simetría respecto a D' entonces $t'ut'u^{-1}=t'ut'^{-1}u^{-1}$ es una simetría respecto a una recta
(3) Si Γ es un subgrupo invariante de $O^+(\varphi)$ que no se reduce a 1_E entonces necesariamente $\Gamma=O^+(\varphi)$.

DEMOSTRACION.

(1) Sea $\{e_1,e_2,e_3\}$ una base ortonormal de E tal que para la rotación u:

$$u(e_3)=e_3;\quad u(e_1)=e_1\cos\theta+e_2\sin\theta.$$

Vamos a determinar la recta D' mediante un vector $z=e_1+\lambda e_3$ tal que $\varphi(z,u(z))=0$.

Como $u(z)=u(e_1)+\lambda u(e_3)=e_1\cos\theta+e_2\sin\theta+\lambda e_3$, $\varphi(z,u(z))=0$ implica $\cos\theta+\lambda^2=0$.

Como $\cos\theta<0$, por hipotesis, la ecuación $\cos\theta+\lambda^2=0$ tiene una solución en **R**.

Como los vectores $\xi u(z)$ son los de la recta D'' ortogonal a D' y que además $u(D')=D''$.

(2) Si Γ es un subgrupo invariante de $O^+(\varphi)$ no reducido a 1_E, entonces contiene una rotación u de ángulo $\theta\neq 0$.

Luego u^n es también una rotación de ángulo $n\,\theta$, considerando n de acuerdo al axioma de arquímedes: Para θ existe n tal que $\cos n\theta<0$.

Entonces cuando se tiene t' simetría respecto a recta D'

$$a\neq 0,\ u(a)=b$$

$$v(b)=t'ut'u^{-1}(b)=t'ut'(a)=t't'u(a)=t'^2(b)=b$$

$$v(b)=t'ut'^{-1}u^{-1}(b)=t'ut'^{-1}(a)=t't'^{-1}u(a)=1_E(b)=b$$

Luego $t'ut'u^{-1}=t'ut'^{-1}=v\in\Gamma$.

(3) Como Γ es invariante, contiene a todas las simetrías wuw^{-1} con $w\in O^+(\varphi)$ en virtud que toda rotación de eje D y ángulo θ es producto de 2 simetrías respecto a 2 rectas del plano ortogonal al eje.

TEOREMA 3. Si E es un espacio euclídeo de dimensión n igual a 3 ó mayor ó igual a 5; entonces si n es impar, el Grupo $O^+(\psi)$ es simple; si n es par, el único subgrupo invariante no trivial de $O^+(\psi)$ es su centro formado por las rotaciones 1_E y -1_E.

DEMOSTRACION. Para $n=3$. En la proposición 25 demostramos que si Γ es un subgrupo invariante $\neq \{1_E\}$, necesariamente $\Gamma = O^+(\psi)$. De aquí deducimos que para $n=3$ los únicos subgrupos invariantes de $O^+(\psi)$ son $\{1_E\}$ y , o sea que $O^+(\psi)$ es simple.

Utilizando este resultado para los casos $n \geq 5$. Sea Γ un subgrupo invariante de $O^+(\psi)$ que contiene una rotación $u \neq \pm 1_E$. Distinguiendo los siguientes casos posibles:

(1) u deja invariantes todos los puntos de un subespacio V de dimensión $n-3$. En consecuencia está determinada por su restricción u' al subespacio $V^\perp = F$ de dimensión 3. Como Γ contiene todas las rotaciones vuv^{-1} donde $v \in O^+(\psi)$ entonces Γ contiene, en particular, a las rotaciones que dejan invariantes los puntos de V y cuya restricción a F es de la forma $u'u'v'^{-1}$, donde $v' \in O^+(F)$. Pero como $O^+(F)$ pues $\dim F=3$ toda rotación de $O^+(F)$ es producto de un número finito de rotaciones de la forma $v'_k u' v'^{-1}_k$. En particular, una trasposición $r' \in O^+(F)$ es de esta forma. Si r es la trasposición $=r'$ en F y que deja invariantes los puntos de V, se tiene en consecuencia que $r \in \Gamma$. Pero toda otra trasposición en $O^+(E)$ es conjugado de r, por consiguiente también pertenece a Γ. En virtud del teorema 2 $\Gamma = O^+(\psi)$..

(2) u deja invariante todos los puntos de un subespacio W de dimensión $n-4 \geq 1$, y su restricción al subespacio $F = W^\perp$ de dimensión 4 no es -1_F, o sea que u no es la simetría respecto a W. Existe entonces en F al menos una recta D tal que $u(D)=D$ ya que en caso contrario la restricción de u a F sería una homotecia y por tanto igual a $\pm 1_E$, en contradicción con la hipótesis.

Esto permite suponer $x \in F$ tal que $u(x) \neq \pm x$. Sea $y \neq 0$ un vector de W y sea P el plano que contiene a x, y. Consideremos en P una rotación $w' \neq 1_P$, y sea w la rotación en E igual a w' en P y que deja invariantes los puntos de $P^\perp$. Entonces $uw^{-1}u^{-1}$ deja invariantes los puntos de $P^\perp \cap u(P^\perp)$. Como Γ es invariante se tiene $u_1 = (wuw^{-1})u^{-1} \in \Gamma$, vamos a demostrar que u_1 verifica las hipótesis del caso (1) antes tratado, con lo que concluimos el caso (2). Como u es una transformación ortogonal se tiene $u(P^\perp) = (u(P))^\perp$ en el subespacio ortogonal a $P+u(P)$ es $P^\perp \cap u(P^\perp)$ ya que

$$(P+u(P))^{\perp}=P^{\perp}\cap(u(P))^{\perp}.$$

Pero P está engendrado por x,y; $u(P)$ engendrado por $u(x)$, $u(y)=y$. Por lo tanto, $\dim(P+u(P))\geq 3$ concluyendo que $\dim P^{\perp}\cap(P^{\perp})\geq n-3$. Es suficiente comprobar que $u_1\neq\pm 1_E$; como existen vectores $\neq 0$ invariantes por u_1, no puede ocurrir que $u_1=-1_E$, quedando por excluir el caso $u_1=1_E$.

Si $1_E=(wuw^{-1})u^{-1}$ se obtendría entonces $w=uwu^{-1}$ y como $P^{\perp}$ (respectivamente $u(P^{\perp})$) es el conjunto de los puntos invariantes por w (respectivamente, uwu^{-1}). Esto implica $P=u(P)$ y por consiguiente x y $u(x)$ pertenecen a la misma recta $P\cap F$ lo cual está en contradicción con la hipótesis.

(3) u es la simetría respecto a un subespacio W de dimensión -4. Sea $F=W^{\perp}$, de dimensión 4. Consideremos en F una recta D y el subespacio U de dimensión 3 ortogonal a D en F. Por otra parte, consideremos D' una recta de W, esta recta existe pues estudiamos $n\geq 5$ y como $\dim W=n-4$ $\dim W\geq 1$. Escribamos $F'=U+D'$. Existe una rotación v que transforma F en F' y vuv^{-1} es la simetría respecto a $W'=F'^{\perp}$; como $F'\neq F$ se tiene, además, $u\neq vuv^{-1}$; luego $u_2=u^{-1}vuv^{-1}=uvuv^{-1}$ pertenece a Γ y $u_2\neq 1_E$. Además u_2 deja invariantes los puntos de $F\cap F'=U$ y a los de $W\cap W'=-(F+F')^{\perp}$. En virtud de la relación de Grassmann $\dim W\cap W'=n-5$ pues $\dim(F+F')+\dim F\cap F'=\dim F+\dim F'$, $\dim(F+F')=5$; luego $\dim(F+F')^{\perp}=n-5$.

Además $W\cap W'$ está contenido en $U^{\perp}$. Por tanto, la suma $U+(W\cap W')$ es directa y de dimensión $n-2$, cayendo nuevamente en el caso (1).

(4) Caso general. Existe en E al menos un plano Q tal que $u(Q)\neq Q$ puesto que si u dejase invariantes (globalmente) todos los planos también dejaría invariantes todas las rectas globalmente. Pero como toda recta de E es intersección de dos planos distintos resultaría que u sería una homotecia, lo cuál contradice la hipótesis. Procediendo como en el caso (2) formemos una rotación $w\neq 1_E$ que deje invariantes los puntos de $Q^{\perp}$ y, luego, $u_3=wuw^{-1}u^{-1}$ pertenece a Γ y deja invariantes los puntos de $Q^{\perp}\cap u(Q^{\perp})=W$. Pero en virtud de la relación de Grassmann se tiene $\dim W\geq n-4$; por otra parte, se tiene que $u_3\neq 1_E$ ya que si no fuera así se tendrá $w=uwu^{-1}$, de donde $u(Q^{\perp})=Q^{\perp}$ contrario a la elección de Q. Llegando así a uno de los casos (2) ó (3). Con esto concluye la demostración.

Geometria no Euclideana

Hiperbólica

§1. El absoluto

Consideremos un espacio vectorial E de dimensión n, y ψ una forma bilineal simétrica no degenerada sobre $E\times E$ de signatura $(n-1,\ 1)$.

DEFINICION 1. Un vector $x\in E$ es *isotrópico* si $x\neq 0$ y $\psi(x,x)=0$.

Un subespacio V de E es *isotrópico* si existe un vector $z\in V$ tal que $z\neq 0$ y $\psi(x,z)=0$, para todo $x\in V$. Un subespacio W de E es *totalmente isotrópico* si para todo $z\in W$ se tiene $\psi(z,z)=0$; o sea, $z\in W^{\perp}$.

PROPOSICION 1. Para todo subespacio M de E ocurre $M\cap M^{\perp}$ es totalmente isotrópico.

DEMOSTRACION. Efectivamente, como $(M\cap M^{\perp})^{\perp}=M^{\perp}+M$ resulta de $M\cap M^{\perp}\subset M\subset M^{\perp}+M$ que $M\cap M^{\perp}\subset (M\cap M^{\perp})^{\perp}$.

PROPOSICION 2. Toda recta isotrópica es totalmente isotrópica.

DEMOSTRACION. Sea D una recta isotrópica de E. Existe $z\neq 0$ en D tal que $\psi(z,x)=0$, para todo $x\in D$. Como todo $x\in D$ puede escribirse $x=\lambda z$, para algún escalar λ. Entonces $\psi(z,x)=\psi(\lambda^{-1}x,x)=\lambda^{-1}\psi(x,x)=0$. Como $\lambda\neq 0$, $\psi(x,x)=0$, para cada $x\in D$ tal como se quería probar.

DEFINICION 2. El conjunto L de todos los vectores isotrópicos se denomina *Cono isotrópico* o *absoluto* de E.

PROPOSICION 3. El absoluto de E es invariante por todas las homotecias.

DEMOSTRACION. Sea x un vector isotrópico cualquiera para cualquier escalar λ se obtiene

$$\psi(\lambda x,\lambda x)=\lambda^2\psi(x,x)=0$$

Luego, la imagen de L bajo cualquier homotecia H_λ:$h_\lambda(L)=L$.

§2. El plan hiperbólico

DEFINICION 3. Al espacio vectorial e de dimensión 2 provisto de una forma bilineal simétrica no degenerada ψ de signatura (1,1) se denomina Plano Hiperbólico.

PROPOSICION 4. En el plano hiperbólico existen exactamente dos rectas isotrópicas distintas.

DEMOSTRACION. Siendo $\{e_1,e_2\}$ existe base de E con $\psi(e_i,e_j)=0,\ i\neq j;\ \psi(e_1,e_1=1;\psi(e_2,e_2)=-1$.

Para que un vector $x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2$ sea isotrópico debe resultar que $\alpha_1^2\alpha_2^2=0$. Consideremos una nuevo base formado con vectores isotrópicos $\{a_1ma_2\}$. Esto implica $\psi(a_1,a_2)\neq 0$ pues de lo contrario ψ sería degenerada, contradiciendo la hipótesis. Se puede suponer $\psi(a_1,a_2)=1$. Sea $y\neq 0$, con $y=\beta_1a_1+\beta_2a_2$. El vector y' ortogonal a y es de la forma $\beta_1a_1-\beta_2a_2$. Así que todo vector ortogonal a y, será de la forma $\lambda y'$, para cualquier escalar λ.

Como no ocurre $\psi(y,y)=0$, pues tendríamos el absurdo $\beta_1\beta_2=0, \beta_1\beta_2\neq 0$.

Si y no pertenece a las rectas que pasan por a_1, a_2.

PROPOSICION 5. Si D_1,D_2 son dos rectas isotrópicas del plano hiperbólico entonces la razón doble del cuarteto de rectas (D_1,D_2,D,D') es -1; donde D' es ortogonal a D.

DEMOSTRACION. Por definición. Sea $x\in D$ tal que $x=\alpha a_1+\beta a_2$ con $\alpha\neq 0,\beta\neq 0$. Para toda recta vectorial D' distinta de D_1, D_2 y D existe un único escalar ρ tal que el vector $\alpha a_1+\rho\beta a_2$ pertenece a D' pero como D' es ortogonal a D, entonces $\psi(x,\alpha a_1+\rho\beta a_2)=\alpha\beta+\rho\alpha\beta=0$ de donde $\rho=-1$.

Así que

$$\rho=-1=\begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D' & D \end{bmatrix}.$$

PROPOSICION 6. S Ψ es una forma bilineal alternada no identicamente nula, y W es una transformación ortogonal de E, entonces $\Psi(x,y)=\psi(w(x),y)$.

DEMOSTRACION. Como $w*=-w$,

$$\psi(w(x),y)=\psi(x,w*(y))=-\psi(x,w(y))$$

$$=-\psi(w(y),x)=-\Psi(y,x).$$

PROPOSICION Para dos rectas isótropas D_1,D_1 y u una semejanza directa en el plano hiperbólico, si tiene que u deja invariantes globalmente cada una de las rectas isotrópicas.

DEMOSTRACION. Sea $\{a_1,a_2\}$ una base isotrópica si para esta base tomamos

$$M(\Psi)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Un endomorfismo de la proposición 6 tiene una matriz determinada por las condiciones

$$\psi(w(a_1),a_1)=0 \qquad \psi(w(a_1),a_2)=1$$

$$\psi(w(a_2),a_1)=-1 \qquad \psi(w(a_2),a_2)=0$$

de donde

$$M(w)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Los espacios propios $E(1;w)$ y $E(-1;w)$ son precisamente las rectas isotrópicas que pasan por a_1 y por a_2 respectivamente. Siendo u una semejanza directa

$$\Psi(u(x),u(y))=\det(u)\Psi(x,y)$$

pero $\Psi(x,y)=\psi(w(x),y)$ de donde

$$\psi(w(u(x)),u(y))=\det(u)\psi(w(x),y).$$

Luego

$$\psi(u*wu(x),y)=\det(u)\psi(w(x)y)$$

implica

$$u*wu=\det(u)w$$

O sea $u*=\det(u)wu^{-1}w^{-1}$

por tanto se tiene $wu=uw$

$$0=\psi(w(u(a_1)),\mu(a_1))=\psi(u(w(a_1)),\mu(a_1))=\mu(u)\psi(w(a_1),a_1)$$

$$\psi(w(a_2),a_1)=-1$$

$$\psi(u(w(a_2)),\mu(a_1))=\det(u)\psi(w(a_2),a_1)=-\mu(u)$$

de igual forma

$$\psi(u(w(a_1)),\mu(a_2))=\mu(u);\quad \psi(u(w(a_2)),\mu(a_2))=0$$

La matriz de u respecto a la base isotropia es

$$M(u)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$$

Luego, obviamente deja invariantes cada recta isotrópica.

COROLARIO. El grupo de las rotaciones en el plano hiperbólico está formado por los automorfismos cuya matriz respecto a la base isotrópica es de la forma $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda_{-1}\end{pmatrix}$ *con* $\lambda\neq 0$.

DEFINICION 4. Las rotaciones u para los cuales sus dos valores propios λ y λ^{-1} son positivos forma un subgrupo de $O^{+}(\psi)$ llamado grupo de las rotaciones ortocronas de E y se denota por $O^{++}(E)$.

§3. Propiedades

LEMA 1. Sean V y W dos subespacios vectoriales ortogonales y tales que $V\cap W=\{0\}$. Para que $V+W$ sea totalmente isotrópico (respectivamente no isótropo) es necesario y suficiente que V y W lo sean también.

DEMOSTRACION. Supongamos que $V+W$ es totalmente isótropo y sea $x\in V$ un vector ortogonal a $V+W$ $y+z\in V+W$ con y,z vectores $\neq 0$, con $y\in V$, $z\in W$, $0=\psi(x,y+z)=\psi(x,y)+\psi(x,z)$.

Por hipótesis $\psi(x,z)=0$, pues V ortogonal a W. De donde, para cualquier $y\in V$ se tiene $\psi(x,y)=0$. Por consiguiente x es ortogonal a V. Analogamente con W.

Recíprocamente. Si W y V son totalmente isótropos y si $y \in V, z \in W$, se tiene

$$\psi(y+z,y+z)=\psi(y,y)+\psi)(z,z)+2\psi(y,z)$$

por hipótesis $\psi(y+z,y+z)=0$.

Luego $V+W$ es totalmente isótropo. Cuando V y W no son isótropos, si $x+z$ es ortogonal a $V+W$ con $x \in V, z \in W$, como z es ortogonal a V, deducimos que $x \in V$ debe ser ortogonal a V, por hipótesis . Luego $x+z=0$, y por lo tanto $V+W$ es no isótropo.

LEMA 2. Sean D una recta isótropa en E, $H=D^{\perp}$ que incluye a D el hiperplano (isótropo) ortogonal a D. Todo plano P que contiene a D y no contenido en H es un plano hiperbólico (no isótropo); E es, por consiguiente, suma directa de P y $P^{\perp}$ y la restricción de ψ a $P^{\perp}\times P^{\perp}$ es una forma no degenerada de signatura $(n-2,0)$.

DEMOSTRACION. Sea $a \in D$; $b \in P$ tal que $b \notin H$ y $\psi(a,b)\neq 0$; $P^{\perp}$ es la intersección de H y del hiperplano H' ortogonal a b; como $P^{\perp} \subset H$, $D\cap P^{\perp}=\{0\}$ y $P\cap H=D$, se tiene $P\cap P^{\perp}=\{0\}$ por lo cual P es no isótropo. Como P contiene una recta isótropa es un plano hiperbólico. Por consiguiente, existe una base $\{e_1,e_2\}$ de P tal que $\psi(e_1,e_1)=1$, $\psi(e_2,e_2)=-1$.

Esto induce aplicar la ley de inercia al subespacio no isótropo P para obtener una base ortogonal $(e_i)_{1\geq i\geq n}$ de E tal que las e_i de indice≥ 3 formen base de $P^{\perp}$ y que $\psi(e_i,e_i)=\pm 1$ para todo i.

El cono isótropo no está contenido en un hiperplano H, pues si D está contenida en H es una recta isótropa existen planos que contienen a D no contenidos ni en H ni en $D^{\perp}$.

PROPOSICION 8. En el espacio E, los únicos subespacios totalmente isótropos no nulos son las rectas isótropas.

Considerando al conjunto $P(E)$ de todas las rectas vectoriales de E, o sea la Geometria Proyectiva sobre E, hacemos la siguiente

DEFINICION 5. Los puntos de $P(E)$ correspondientes a las rectas vectoriales sobre las cuales se verifica $\psi(x,x)<0$ para los vectores x no nulos de estas rectas vectoriales forman lo que se llama Espacio no euclideo de dimensión $n-1$, para $\dim E=n$.

PROPOSICION 9. Sean V un subespacio de E de dimensión m y U la recta isótropa obtenida por la intersección de V y $V^{\perp}$. Para todo subespacio W de V suplementario de U en V, la restricción de Φ a W es no degenerada y su signatura (r,s) con $r+s=m-1$, $r\leq n-2$ y $S=0$, es independiente del suplementario elegido W. La clase de intransitividad de V para el grupo $O(E)$ está formada por todos los subespacios vectoriales para los cuales los tres números $r,s,1$ son los mismos.

DEMOSTRACION. Si un vector $x \in W$ es ortogonal a todo W también lo será para $V=U+W$; luego $u \in U$ y en consecuencia $x=0$, probando que restricción de ψ a W es no degenerada. Ahora, si suponemos W' es otro subespacio de V suplementario de U en V y si p es la proyección sobre W paralelamente a U, se tiene que $x-p(x),y)=0$ para todo $x \in W'$, luego $\psi(x-p(x),y)=0$ para todo $y \in V$, por consiguiente $\psi(x,y)=\psi(p(x),p(y))$ para todo par de vectores $x,y \in W'$; de donde obtenemos que la signatura de la restricción es independiente del suplementario elegido. Consideremos entonces en W una base ortogonal (e_i) para $1\leq i\leq m-1$ tal que $\psi(e_i,e_i)=1$ para $1\leq i\leq r=m-1$.

Consideremos también al subespacio ortogonal $W^{\perp}$ de dimensión $n-(m-1)$, suplementario de W en E y que, además, contiene a U. $W^{\perp}$ no contiene pues un segundo subespacio totalmente isotrópico, o sea otra recta isótropa U' tal que $U+U'$ no es isótropa.

Sea T el ortogonal a U en $W^{\perp}$ no isótropo tal que la restricción de ψ a $T\times T$ es de signatura $(n-1-(m-1),0)=(n-m,1-0-1)$. Se puede completar la base (e_i) de W hasta una base de E tal que $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ sea base de V y la matriz de ψ respecto a la base de E sea

$$\begin{pmatrix} I_{m-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Como esta matriz está enteramente determinada por los números $m-1=r$, $s=0$, $\dim U=1$, y la signatura $(n-1,1)$ de ψ, se completa la demostración.

DEFINICION 6. Se llama variedad lineal proyectiva de $m-1$ dimensiones a todo subespacio vectorial V de E de m dimensiones.

PROPOSICION 10. La variedad lineal proyectiva correspondiente al subespacio vectorial V^- de E isótropo en E no corta al espacio no euclideo.

DEMOSTRACION. Como los únicos subespacios isótropos totalmente en E son rectas vectoriales U, según la proposición anterior si V es isótropo en E y es tal que $V \cap V^{\perp} = u$. En tal subespacio $\psi(x,x)$ necesariamente tiene que tomar solo valores ≤ 0. Esto indica que "no corta al espacio no euclideo." Por lo tanto toda variedad lineal proyectiva de dimensión $m-1$ que corte al espacio no euclideo es siempre no degenerada y tiene como signatura $(m-1,1)$.

PROPOSICION 11. Si D es una recta no euclidea y A un punto del espacio no euclideo que contiene tanto a la recta D como al punto A. Entonces existen en P una infinidad de rectas no euclideas D' que contienen a A pero que no cortan a D.

DEMOSTRACION. Sea V el plano vectorial subespacio de E correspondiente a D. En V existen una infinidad de rectas vectoriales L sobre las cuales $\psi(x,x) < 0$ para $x \neq 0$. Consideremos otro plano vectorial que contenga a una de tales rectas vectoriales (que son puntos de la geometría proyectiva). Los planos vectoriales son rectas proyectivas, las rectas no euclideas son planos vectoriales, formados por vectores $x \neq 0$ tales que $\psi(x,x) < 0$.

Basta tomar para D' una recta no euclidea cuya recta proyectiva que la contiene pase por uno de los puntos del espacio proyectivo correspondiente a las rectas vectoriales L mencionadas arriba.

Bibliografía consultada

1. Dieudonné J. *Algébre Linéaire el Geométrie Elementaire.* Hermann - Paris 1964.

2. Dieudonné J. *Fondaments de l'Analyse Moderne.* Gauther Villars - Paris 1969.

3. Godement R. *Algebra.* Tecnos - Madrid 1974.

4. Herstein I.N. *Algebra Moderna.* Trillas - México 1973.

5. Gruenberg K. y Weir J. *Linear Geometry.* Van Nostrand 1967.

6. Bourbaki N. *Algébre Cap. IX.* Hermann - Paris 1959.

7. Bourbaki N. *General Topology. Part II.* Hermann Addison-Wesley 1966.

8. Bourbaki N. *Elementos de Historia de las Matemáticas.* Alianza Universidad - Madrid 1976.

9. Dieudonné J., Choquet G., Thom R., Stone M., Godement R., Piaget J., otros. *La enseñanza de las Matemáticas Modernas.* Alianza Universidad. Madrid 1977.

Las Geometrías No Euclideanas

Nota histórica

De la posibilidad lógica de desarrollar una geometría en la que el quinto postulado de Euclides no se verificase (además de la imposibilidad de su demostración) Gauss (1816) tenía pleno convencimiento, pero no publicó sus ideas y resultados; siendo redescubiertos independientemente por Lobatschevski en 1829 y por Bolyaj en 1832. En esta nueva geometría desaparece la noción de paralela única, lo cual la aparta y aleja de la dominación de la geometría proyectiva que estudiaba las propiedades métricas y proyectivas en la geometría clásica. Se llamó Geometría hiperbólica.

En 1870 cambian las condiciones científicas luego de la difusión de las obras de Lobatschevski, la publicación de las obras de Gauss y la lección inaugural de Riemann. Cayley (1860) señalaba que la idea de reemplazar los puntos cíclicos (considerados como cónica "degenerada tangencialmente") por una cónica cualquiera que denominó "absoluto", conduce a nuevas expresiones para la distancia entre dos puntos y sus relaciones la geometría esférica. Beltrami (1868) encuentra independientemente las expresiones de distancia de Cayley pero en otro contexto que considera el interior de un círculo como una imagen de una superficie de curvatura constante en las que las geodésicas vendrían representadas por las rectas. La influencia de la Geometría Esférica había establecido por cierto tiempo que en un espacio de curvatura constante 0 siempre existen pares de puntos por los que pasan más de una geodésica. Félix Klein (1870) en su Programa de Erlangen independiente de Beltrami sintetiza estos dos puntos de vista descubriendo y produciendo el espacio no euclideo elíptico.

Es desde mediados del siglo XIX, cuando las ideas de grupo y de invariante se hallan consolidadas, que se pone de manifiesto que los teoremas de la Geometría Clásica no son otra cosa que la expresión de relaciones idénticas entre invariantes o covariantes del grupo de las semejanzas. Del mismo modo que los teoremas de la Geometría Proyectiva expresan las identidades (o zigzags) entre covariantes del grupo proyectivo. Con el Programa de Erlangen se llega a una clasificación racional y "estructural" de los teoremas de la geometría moderna según el grupo del cual procedan: grupo lineal para la geometría proyectiva, grupo ortogonal para cuestiones métricas, ...

Desde el punto de vista nuevamente algebraico, después del Programa de Erlangen, las geometrías euclideas y no euclideas se han convertido en *simples lenguajes*, más o menos cómodos, para expresar los resultados de la teoría de las formas bilineales cuyos progresos van a la par con los de la teoría de los invariantes.
Sin embargo, el interés atribuido a la geometría no euclideana no proviene de este aspecto algebraico banal, sino más bien de sus relaciones con la Geometría Diferencial y la teoría de funciones de variables complejas.
También con el Programa de Erlangen la geometría clásica se marchita repentinamente y pierde su esplendor por lo que el capítulo de la teoría de grupos y de los invariantes relativo a la geometría se considera cerrado pues ya no hay problemas de estructura susceptibles de repercutir sobre otras ramas matemáticas.
Las excepciones constituyen las ciencias autónomas Geometría Algebraica actualmente en actividad y la Geometría Diferencial. Esta última cuando parecía que se esclerotizaba los trabajos contemporáneos (originados por Emile Cartan) sobre los espacios fibrados le han devuelto toda su vitalidad.
En la actualidad se dispone de un camino real para apropiarse de la Geometría y es mediante los trabajos realizados desde insignes matemáticos Cayley y Grassmann, hasta el Programa de Erlangen de Klein. Este método lo ofrece una mismo disciplina: el álgebra lineal, que abarca sus aplicaciones al análisis, la topología y la Física Teórica.