UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

TOPICOS EN MATEMATICA

TRABAJO DE GRADUACION PRESENTADO POR:

ROLANDO LEMUS GOMEZ

PREVIO A LA OPCION DEL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICA

JULIO DE 1979

SAN SALVADOR, EL SALVADOR - CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR a.i.: Lic. JOSE LUIS ARGUETA ANTILLON

SECRETARIO a.i.: Lic. OSCAR ARMANDO ACEVEDO VELASQUEZ

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO a.i.: Ing. JOSE FRANCISCO AGUIRRE TOVAR

SECRETARIO a.i.: Ing. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE DEL DPTO. Ing. GABRIEL MELENDEZ MAYORGA

TRABAJO DESARROLLADO POR :

ROLANDO LEMUS GOMEZ

PREVIO A LA OPCION DE SU TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICA

TRABAJO DE GRADUACION

ASESOR : LICENCIADO ADAN MAGAÑA MIRA

INDICE GENERAL

Página

INTRODUCCION

El presente trabajo surgió como una ncesidad de conocimiento de los elementos necesarios para el estudio de la Estadística Matemática. Mi aporte se limita únicamente a la recopilación bibliográfica, ordenamiento del contenido, traducción e interpretación.

Espero que este trabajo sea útil, como texto de consulta a los compañeros estudiantes y docentes, que se relacionan con esta área del conocimiento, así también; motivarlos para que se impulse el desarrollo de ésta, en nuestra Universidad.

Es de hacer notar que el contexto teórico tratado, incluye únicamente la parte correspondiente a probabilidades; lo que permite el estudio posterior de la Inferencia Estadística, lo que es motivo de otro trabajo.

Rindo agradecimientos por su ayuda y cooperación a las personas que en una u otra forma permitieron la finalización de este trabajo.

UNIDAD I

METODOS DE CONTEO

En este capítulo estudiaremos algunas definiciones y fórmulas de análisis combinatorio que son fundamentales para la solución de problemas de probabilidades en conjuntos finitos.

1.1 PERMUTACIONES

Por generaciones, las personas han estado intrigadas por problemas que, para su solución, requieren encontrar el número de maneras de arreglar un conjunto de objetos.

A menudo necesitamos responder, en el estudio de probabilidades, a preguntas tales como : Se tiene un cierto número de cartas y sus correspondientes sobres. Se mezclan unas y otros, y se va metiendo una carta cualquiera dentro de cada sobre. ¿Cuál es la probabilidad de que una carta por lo menos se haya metido en su correspondiente sobre?

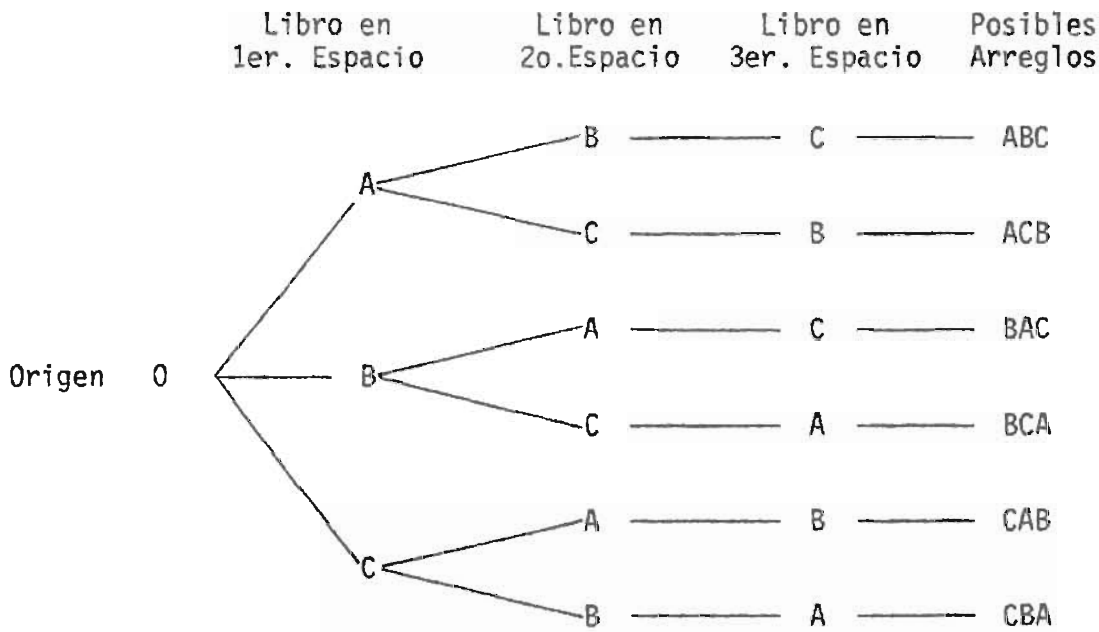
Deseamos descubrir un principio general que nos indique como encontrar el número de arreglos posibles de un conjunto de objetos. Para este fin consideremos un ejemplo.

Ejemplo 1 :

¿De cuántas maneras pueden tres libros A, B y C ser arreglados en orden en una librera?

Solución 1 :

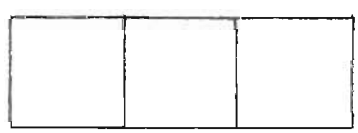
Una manera de resolver este problema es dando la lista de posibles arreglos y contarlos.
Un diagrama arborescente provee una manera organizada de listar los arreglos de tal manera que ninguno falte.



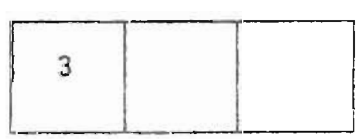
El orden es lo esencial en cada arreglo; un cambio en el orden conlleva a arreglo diferente.

<u>Solución 2</u> :

El problema plantea llenar tres espacios, los cuales pueden ser representados así



El primer espacio puede ser llenado de tres maneras



para cada una de las tres maneras de llenar el primer espacio, tenemos dos maneras de llenar el segundo espacio, ya que cualesquiera de los dos libros restantes puede ser usado

3	2	

Para cada una de las seis maneras de llenar los dos primeros espacios, tenemos una manera de llenar el tercer espacio, ya que solamente un libro resta.

Así el número de maneras de llenar cada uno de los tres espacios es :

3	2	1

Obtenemos el número de arreglos efectuando la multiplicación

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

Definición 1 : PERMUTACION

Una permutación de un número de objetos es cualquier arreglo de estos objetos en un orden definido.

Así decimos que hay seis permutaciones de los tres libros tomados todos a la vez (juntos).

El método de razonamiento seguido en el diagrama arborescente, puede extenderse y usarse para proveer un método general de tratar con problemas de permutaciones.

1.1.1 PRINCIPIO DE LA MULTIPLICACION

Si una operación puede ser presentada de N_1 maneras y, después de esta presentación de una cualquiera de estas maneras, una segunda operación puede ser presentada de N_2 maneras y, después de ésta presentación de una cualquiera de estas maneras, una tercera operación puede ser presentada de N_3 maneras, y así sucesivamente para k operaciones, entonces las k operaciones pueden ser presentadas juntas en

$$N_1 \times N_2 \times N_3 \times \ldots\ldots \times N_k \qquad \text{maneras}$$

Ejemplo 2 :

¿Cuántas licencias pueden hacerse usando dos letras, seguidas de un número de tres dígitos?

$$\underline{28} \times \underline{28} \times \underline{9} \times \underline{10} \times \underline{10}$$

Ejemplo 3 :

Dado los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 encuentre, cuántos números de cuatro dígitos pueden formarse con ellos si :

a) Si ningún dígito puede repetirse.

Solución :

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2}$$

b) Si la repetición de un dígito es permitida.

Solución :

$$\underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5}$$

c) Si el número debe de ser impar, sin repetir ningún dígito.

Solución :

$$\underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{3}$$

1.1.2 PRINCIPIO DE ADICION

Si dos operaciones son mutuamente excluyentes y la primera puede ser hecha de n maneras y la segunda en m maneras, entonces una operación ó la otra puede ser hecha de n + m maneras.

N O T A : Este principio es generalizado al extenderse a cualquier número finito de operaciones.

Ejemplo 4 :

Tres banderas diferentes están disponibles. ¿En cuántas maneras puede una señal con al menos dos banderas ser arregladas en un asta, si el orden de las banderas en el asta cuenta?

Solución : 1a. operación 2 banderas en el asta $3 \times 2 = 6$ maneras

2a. operación 3 banderas en el asta $3\times2\times1 = 6$ maneras

Ahora tenemos solamente una señal de arreglo y esta señal puede ser una de dos banderas ó una señal de tres banderas, pero no ambas juntas.

Es una cuestión de presentar la primera operación o la segunda, no la primera operación y entonces la segunda.

Las operaciones son excluyentes. Ellas no pueden ocurrir juntas.

Así el número de señales es $6 + 6 = 12$.

1.1.3 FORMULAS PARA PERMUTACIONES

El principio de la multiplicación proporciona un método general para encontrar el número de permutaciones de conjuntos de objetos.

Para algunos tipos importantes de problemas, este método puede abreviarse conociendo algunos símbolos y fórmulas que ahora introducimos :

El Símbolo Factorial

Como hemos visto anteriormente, el principio de la multiplicación nos lleva a establecer productos tales como los siguientes :

(i) Siete personas pueden arreglarse en una línea en

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad \text{maneras}$$

(ii) Veinte libros pueden arreglarse en una librera en

$$20 \times 19 \times 18 \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1 \quad \text{maneras}$$

(iii) n objetos pueden arreglarse en una línea en

$$n(n - 1)(n - 2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1 \quad \text{maneras}$$

y así sucesivamente. Los puntos suspensivos no implican que n es más grande que tres.

Los puntos indican que tenemos que comenzar con el entero n y continuar multiplicando factores, cada uno de los cuales es menor que su predecesor, hasta que uno es alcanzado. Problemas tales como los tres anteriores pueden resultar números muy largos o secuencias muy largas de factores. Por conveniencia, entonces introducimos un símbolo especial.

Definición 2. n Factorial

El producto de todos los números enteros desde 1 a n es llamado n factorial, y se denota por $n!$

Así $\quad n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$

$= n \times (n-1)!$

$= n \times (n-1) \times (n-2)!$

$= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!$

etc.

En particular tenemos :

$1! = 1$

$2! = 2 \times 1 = 2 \times 1! = 2$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times 2! = 6$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times 3! = 24$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 4! = 120$

Procediendo de esta manera, podemos hacer la tabla de n! como sigue :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n!	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

El símbolo factorial proporciona una notación usual para representar número largos de el tipo encontrado en el estudio de permutaciones y tópicos relativos.

Note que :

$$20! = 20 \times 19!$$

$$100! = 100 \times 99!$$

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

TEOREMA 1 :

Permutaciones de n cosas, todas juntas. El número de permutaciones de un conjunto de n objetos diferentes, tomados todos a la vez, es $n!$

Notación : $nPn = n!$

Consideraremos permutaciones de n objetos diferentes en los cuales algunos pero no todos necesariamente, de los objetos son usados.

Ejemplo 5 :

En cuantas maneras pueden tres libros escogerse de siete libros diferentes y arreglarlos en tres espacios en una librera.

Solución :

Por el principio de la multiplicación, los tres espacios pueden llenarse de

$$7 \times 6 \times 5 \qquad \text{maneras}$$

Los símbolos factorial pueden también usarse para denotar el producto $7 \times 6 \times 5$.

Para

$$7 \times 6 \times 5 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7!}{4!}$$

El número de permutaciones de siete objetos, tomados tres a la vez, es denotado por $7P3$, y su valor es $7 \times 6 \times 5$.

Así

$$7P3 = 7 \times 6 \times 5 = \frac{7!}{4!}$$

Definición 3 :

Un arreglo de r objetos, tomados de un conjunto de n objetos, es llamado una permutación de los n objetos, tomados r a la vez. El número total de permutaciones es denotado por

$$nPr \ , \quad r \leq n$$

TEOREMA 2 :

Permutaciones de n cosas, r a la vez. El número de permutaciones de un conjunto de n objetos diferentes, tomados r a la vez, sin repetición, es

$$nPr = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Demostración :

$$nPr = n(n - 1)(n - 2) \ldots . (n - r + 1) \quad \text{maneras}$$

El miembro derecho de la fórmula anterior consiste en r factores; y toma otra conveniente forma si multiplicamos por

$\frac{(n - r)!}{(n - r)!}$ porque entonces podemos escribir

$$nPr = \frac{n!}{(n - r)!}$$

N O T A :

Si $\quad r = n$

$$nPr = \frac{n!}{0!}$$

Si $n = 1$ la fórmula $n! = n \times (n - 1)!$

llega a ser $1! = 1(0!)$

luego por definición $0! = 1$

Ejemplo 6 :

(i) ¿Cuántas palabras pueden formarse con las letras de la palabra "hipérbola", tomadas todas a la vez?

(ii) ¿En cuántas de estas palabras ocurrirán las letras "h" e "i" juntas?

(iii) ¿En cuántas no ocurrirán las letras "h" e "i" juntas?

Solución :

(i) El número de maneras de arreglar 9 diferentes letras, todas juntas es $9! = 362,880$.

Por lo tanto el número requerido es $9!$ si no hay restricciones.

(ii) Si las letras "h" e "i" deben ocurrir juntas, es una buena idea considerarlas como una letra, "hi".

Tenemos ahora 8 diferentes letras para ser arregladas todas juntas.

Esto dá $8!$ arreglos. Sin embargo, en cada uno de estos arreglos, el orden de "hi" puede ser cambiado a "ih", así que cada uno de los $8!$ arreglos puede referirse a dos arreglos diferentes que satisfacen las restricciones dadas.

Entonces el número total de palabras en las cuales las letras "h" e "i" ocurren juntas es $2(8!) = 80640$.

(iii) El número de palabras en las cuales las letras "h" e "i" no ocurren juntas es la diferencia

$$362880 - 80640 = 282240$$

1.2 COMBINACIONES

En el orden para estudiar la distinción entre una permutación y una combinación consideremos un ejemplo.

Ejemplo 7 :

¿De cuántas maneras puede un lector seleccionar tres libros. Sin interesarle el orden, de un grupo de cuatro libros diferentes denotados A, B, C y D?

Solución :

Hemos visto que el número de permutaciones de cuatro libros diferentes tomando tres a la vez, es

$$4P3 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

En estas permutaciones o arreglos, el orden de los libros cuenta.

Un problema diferente aparece si deseamos hacer una selección de tres libros de A, B, C y D sin tomar un orden en cuenta.

Entonces hay solamente cuatro posibles selecciones :

ABC , ABD , ACD , BCD

Por ejemplo no podemos mencionar ACB, porque la selección ACB es la misma selección que ABC, dado que el orden no cuenta.

Cada selección de la lista es llamada una combinación de cuatro libros tomados tres a la vez. El número total de tales combinaciones es denotado por :

$$4C3 \text{ , o por } \binom{4}{3}$$

cada una de las cuales se lee "número de combinaciones de cuatro cosas tomadas tres a la vez".

Así podemos ver que

$$4C3 = \binom{4}{3} = 4$$

Del ejemplo anterior notamos la diferencia entre una permutación y una combinación :

En una permutación, cuenta el orden ;

En una combinación, no cuenta el orden.

Definición 4 . Combinación.

Una combinación es una selección de objetos considerados sin que interese su orden. Un conjunto de r objetos seleccionados, sin que interese su orden, de un conjunto de n objetos diferentes es llamada una combinación de los n objetos, tomados r a la vez. El número total de estas combinaciones es denotado por :

$$nCr \text{ , o } \binom{n}{r} \text{ , donde } r \leq n$$

Encontraremos ahora como evaluar estos símbolos.

Es evidente que de todas las 24 permutaciones de los 4 libros, tomados 3 a la vez, son obtenidas las combinaciones por un rearreglo. En otras palabras

Número de combinaciones × 3! = Número de permutaciones

En símbolos

$$4C3 \times 3! = 4P3$$

$$\binom{4}{3} \quad 3! = 4 \times 3 \times 2$$

$$4C3 = \binom{4}{3} = 4$$

TEOREMA 3 :

Combinaciones de n cosas, r a la vez.

El número de combinaciones de un conjunto de n objetos diferentes, tomados r a la vez, es

$$nCr = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

COROLARIO :

El número de combinaciones de n cosas tomadas n-r a la vez es el mismo que el número tomado r a la vez :

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$$

Ejemplo 8 :

De cuántas maneras puede escogerse un Comité de 3 personas tomadas de 4 matrimonios :

(a) Si todos son igualmente elegibles

(b) Si el Comité debe estar formado de dos mujeres y un hombre.

(c) Si un esposo y esposa no pueden ambos servir en el mismo Comité.

Solución :

(a) En un Comité el orden no interesa, así que el problema está en seleccionar tres personas de ocho en to -

das las maneras posibles.

El número total es

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\ 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56$$

(b) Las dos mujeres pueden seleccionarse de $\binom{4}{2}$ ó 6 maneras y después que ellas han sido seleccionadas en cualquiera de estas maneras; el hombre puede seleccionarse de $\binom{4}{1}$ ó 4 maneras. De donde por el principio de la multiplicación, el número de maneras de seleccionar dos mujeres y un hombre es

$$\binom{4}{2} \times \binom{4}{1} = 6 \times 4 = 24$$

(c) Si un esposo y esposa no pueden ambos servir en el Comité, entonces tres parejas pueden estar representadas en el Comité. Tres parejas pueden seleccionarse de cuatro, de $\binom{4}{3}$ maneras.

Después que se han seleccionado las tres parejas, dos escogencias pueden hacerse de la primera pareja (esposo ó esposa), dos de la segunda pareja y dos de la tercera pareja. Por el principio de la multiplicación, el número total de Comités es :

$$\binom{4}{3} \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

Alternativamente hay 4 maneras de seleccionar una pareja, y 6 maneras de seleccionar el miembro restante, así hay 6 × 4 = 24 maneras de seleccionar un Comité con una pareja; luego restando las 24 del total de 56 maneras, tenemos 32 Comités sin una pareja.

TEOREMA 4 : Regla de Pascal

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} \qquad \text{para } 1 \leq r \leq n$$

Demostración :

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{n!r + n!(n+1-r)}{r!(n+1-r)!}$$

$$= \frac{n!(r+n+1-r)}{r!(n+1-r)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}$$

De donde

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

1.2.1 PERMUTACIONES DE COSAS QUE NO SON TODAS DIFERENTES

En las secciones anteriores, consideramos arreglos de objetos que eran diferentes uno de otro. ¿Cuál será el número de permutaciones posibles afectadas si algunos objetos en el conjunto dado son parecidos?

Una pequeña idea te convencerá sin duda que si alguno de los objetos en un conjunto, no puede ser distinguido de los otros, entonces el número de posibles permutaciones ha decrecido.

Por ejemplo, las letras A, B y C producen 3! ó seis palabras de 3 letras; pero las letras A, A y A producen solamente una palabra de 3 letras.

Ejemplo 9 :

¿De cuántas maneras pueden las letras de la palabra ASSESS arreglarse al mismo tiempo?

Solución :

Sea x el número total desconocido de permutaciones de las letras de la palabra ASSESS. Ahora consideremos cualquiera de estas permutaciones, por ejemplo :

S S S S A E

En este arreglo, si reemplazamos las cuatro S por S_1, S_2, S_3, S_4.

El arreglo original dá como resultado 4! arreglos permu - tando las cuatro S con subíndice sin perturbar las otras letras. De la misma manera, cada una de las x originales permutaciones dá como resultado 4! permutaciones.

Así el número total de permutaciones es x(4!). Puesto que las seis letras

$$S_1, S_2, S_3, S_4, A , E$$

Son ahora todas diferentes, x(4!) es el número de permutaciones de 6 letras diferentes, tomadas todas a la vez. - Por lo tanto

$$x(4!) = 6!$$
$$x = \frac{6!}{4!}$$

Recordando que un tipo similar de razonamiento fué usado para evaluar $\binom{n}{r}$.

Podemos generalizar de una vez este razonamiento para mostrar que el número de permutaciones de un conjunto de n objetos, tomados todos a la vez, donde r de los objetos son iguales y el resto son diferentes es $\frac{n!}{r!}$.

Aplicando repetidas veces este principio tenemos que : Dado un conjunto de n objetos teniendo n_1 elementos iguales de una clase, n_2 elementos iguales de otra clase, n_3 elementos iguales de una tercera clase y así sucesivamente k clases de objetos; entonces el número de permutaciones de n objetos, tomados a la vez es

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \,\ldots\ldots\, n_k!}, \quad \text{donde } n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k = n$$

<u>N O T A</u> :

Si un conjunto de n objetos consiste en r elementos de una clase y n - r elementos de otra, entonces el número de permutaciones de los n objetos tomados todos a la vez es

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

<u>Ejemplo 10</u> :

Dadas n + r letras, de las cuales n son A'_s y r son B'_s, ¿Cuántas secuencias diferentes pueden formarse de las A'_s

y B'_s, si cada secuencia debe contener todas las n A'_s?

<u>Solución</u> :

Hay r + 1 casos mutuamente exclusivos, podemos tener - n A'_s y $n_0 B'_s$, ó n A'_s y una B, ó n A'_s y dos B'_s y así sucesivamente.

Los r + 1 casos alternativos son calculados cada uno mediante la nota anterior. Puesto que los casos son mutuamente excluyentes, determinamos el número total de secuencias aplicando el principio de la adición. El número es

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots\ldots + \binom{n+r}{r}$$

<u>Observación</u> :

Esta suma es igual a $\binom{n+r+1}{r}$, como puede ser mostrada por aplicaciones de la Regla de Pascal.

Por lo que tenemos

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+2}{1}$$

$$\binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{2}$$

$$\binom{n+3}{2} + \binom{n+3}{3} = \binom{n+4}{3}$$

y así sucesivamente. Finalmente, el r-iesimo será dado

$$\binom{n+r}{r-1} + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}$$

UNIDAD II

ELEMENTOS DE PROBABILIDAD

2.1 INTRODUCCION

Todas las aplicaciones de las estadísticas tienen algo en común: la posibilidad real o conceptual de repetir un experimento o proceso bajo esencialmente las mismas condiciones. Por eso el estadístico se interesa por desarrollar métodos para elaborar y analizar datos provenientes de operaciones repetitivas.

El lanzar una moneda o el tirar unos dados, son experiencias en las cuales se nota su carácter repetitivo; también se puede decir lo mismo de la medición del peso ó la longitud de un cierto objeto manufacturado en gran escala. En otras situaciones aunque no parezca tan evidente es posible considerar los resultados como repetitivos, tal - sería el caso de un experimento agrícola con un fertilizante cuyo resultado puede considerarse como uno de todos los posibles resultados que se obtendrían si el experimento se repitiera sucesivamente bajo - condiciones similares.

Igualmente cuando se estudia la edad a que mueren las personas de la comunidad, aunque individualmente el evento muerte de una persona, es imposible de repetir, pueden considerarse las defunciones de - los individuos de las diferentes edades como distintos resultados de un mismo proceso repetitivo.

Cuando un experimento o proceso se repite los resultados presentan variaciones. En gran mayoría de los casos no es posible predecir el resultado de una repetición particular. Si se rueda un dado, por ejemplo no puede saberse con exactitud cual de sus caras va a quedar hacia arriba : esto es algo que depende del azar y que resulta imposible establecer previamente. Sin embargo, cuando el número de repeticiones es suficientemente grande, si es posible determinar regularidades que son válidad y permiten hacer predicciones. Así, cuando el dado es rodado un número elevado de veces, puede esperarse que cada una de sus caras aparezca hacia arriba aproximadamente un sexto de las veces.

Aunque el resultado de una repetición u observación específica depende del azar y es prácticamente impredecible, el conjunto de repeticiones si presenta regularidades que pueden identificarse y analizarse utilizando los modelos probabilístico.

El uso de las probabilidades permite tener un Modelo Matemático para el estudio de esas fluctuaciones aleatorias que se presentan en los procesos repetitivos.

"La idea de acudir a un Modelo Matemático como ayuda para la solución de los problemas de la vida real, no es privativa de la estadística; sino que se aplica en las diversas ciencias. Por ejemplo, un físico al estudiar el movimiento de un proyectil; a manudo supone que las leyes elementales de la mecánica le brindan un modelo satisfactorio a pesar de complejidad del problema real. Para un trabajo más refinado introduce un modelo más complejo. Puesto que un modelo es tan solo una abstracción de la situación verdadera, las conclusiones deri vadas de él serán ciertas en el grado en que ese modelo escogido sea- una aproximación suficientemente buena del problema concreto que se - estudia. Para un problema dado es necesario, por lo tanto, estar familiarizado con el campo de aplicación, a fin de saber que modelos se ajustan más a la realidad. Esto es tan cierto para los modelos estadísticos como para los modelos de las distintas ramas de la ciencia". (Hoel, Paul G. Introduction to Mathematical Statistics).

El estadístico o investigador escoge un modelo que le permita - representar el evento repetitivo, estudiar sus características y hacer predicciones o inferencias acerca de lo que podría suceder en determinadas circunstancias. Las conclusiones o inferencias que se hagan con base en el modelo deben ir acompañadas de una medida de grado de confianza que se puede tener en ellas. La medida se dá en términos de - probabilidades. Por eso son corrientes en estadística las afirmaciones de este tipo : "concluimos, con probabilidades de 0.05 de equivocarnos, que ...."

Es evidente que la precisión de las inferencias depende de varios factores, principalmente, de los satisfactorio o adecuado que resulte el modelo usado para explicar el comportamiento real del fenómeno, por ello es que a este aspecto se le debe dar gran importancia.

En general todas las personas tienen alguna idea de lo que es - probabilidad. La palabra probabilidad o algunas similares se emplea - con gran frecuencia en la vida diaria en relación con acontecimientos o eventos cuya verificación es cierta. En realidad básicamente la probabilidad no es más que una medida de la incertidumbre asociada con -

la ocurrencia de cierto hecho. Sin embargo, es evidente que una teoría de probabilidades no puede descansar en apreciaciones de tipo subjetiva, hace falta una definición rigurosa y objetiva de probabilidad.

Desde el punto de vista matemático la probabilidad se concibe como un valor numérico que debe llenar ciertas condiciones, el cual se asocia a un evento dado para expresar el grado de confianza que se tiene en la verificación futura de dicho evento. Respecto a la definición se han presentado muchas discusiones y se han propuesto diferentes formas de hacerlo. Sin embargo, antes de hacerlo parece conveniente hacer referencia a algunos conceptos.

Cada vez que utilizamos las matemáticas con el objeto de estudiar fenómenos observables es indispensable empezar por construir un modelo matemático (Determinístico o Probabilístico) para estos fenómenos o procesos.

<u>Definición 1</u> :

> Modelo determinístico es aquel que estipula que las condiciones bajo las cuales se verifica un experimento determina el resultado del mismo.

<u>Ejemplo 1</u> :

(a) Las Leyes Gravitacionales describen muy exactamente lo que sucede a un cuerpo que cae bajo ciertas condiciones.

(b) Las Leyes de Kepler nos indican el comportamiento de los planetas.

En cada caso, el modelo señala que las condiciones en las cuales se verifican ciertos fenómenos determinan el valor de ciertas variables observables. Sin embargo, hay también muchos fenómenos que necesitan un modelo matemático distinto para su investigación.

<u>Definición 2</u> :

Modelo Prababilístico es aquel que considera que las condiciones experimentales determinan solamente el comportamiento probabilístico de los resultados observables.

<u>Ejemplo 2</u> :

(a) Medir la resistencia a la tensión de una barra de acero.

(b) Se fabrican artículos hasta producir 10 no defectuosos. Se cuenta el número total de artículos manufacturados.

Los siguientes aspectos son comunes a los experimentos probabilísticos :

i) Es posible repetir cada experimento indefinidamente sin cambiar esencialmente las condiciones.

ii) Aunque en general no podemos indicar cual será un resultado particular, podemos describir el conjunto de todos los resultados posibles del experimento.

iii) A medida que el experimento se repite, los resultados particulares parecen ocurrir en forma caprichosa. Sin embargo, -

como el experimento se repite un gran número de veces, aparece un modelo definido de regularidad. Esta regularidad hace posible la construcción de un modelo matemático preciso con el cual analizamos el experimento.

Definición 3 :

A cada experimento E asociamos un conjunto que llamaremos espacio muestral S, el cual tiene como elementos - todos los resultados posibles de E.

Cada resultado imaginable de un experimento conceptual, que puede repetirse bajo condiciones similares, será llamado punto muestral.

Ejemplo 3 :

Supongamos que se desea determinar el número de tiradas de una moneda que deberá hacerse hasta que aparezca la primera cara. Esta puede aparecer en la tirada 1a, 2a, ..., n-ésima, ...

$$S = \{1, 2, \ldots\ldots, n, \ldots.\}$$

Definición 4 :

Un suceso o evento A está definido en el espacio muestral S como un subconjunto de puntos de S.

Ejemplo 4 :

Utilizando el espacio muestral del ejemplo anterior se tiene que :

$S = \{1, 2, \ldots\ldots, n, \ldots.\}$

$A_1 = \{1\}$ Evento simple, constituido por un punto muestral.

$A_2 = \{1, 2, \ldots., n\}$ <u>Evento compuesto</u>

Clasificaremos el espacio muestral en discreto ó continuo.

<u>Definición 5</u> :

Un espacio muestral S se dice que es discreto si contiene :

i) Un número finito de puntos, ó

ii) Un número infinito de puntos (infinito numerable) que puede ponerse con correspondencia uno a uno - con los números naturales.

<u>Ejemplo 5</u> :

a) E : lanzamiento de un dado

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Espacio discreto finito

b) E : número de tiradas de una moneda que deberá hacerse hasta que aparezca la primera cara.

$S = \{1, 2, \ldots\ldots, n, \ldots\}$ Espacio discreto infinito.

<u>Definición 6</u> :

Un espacio muestral S se llama espacio muestral continuo, si contiene un continuo de puntos.

<u>Ejemplo 6</u> :

E : observar la duración de la vida de tubos electrónicos.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ el resultado puede ser cual - quier número positivo.

Examinaremos en primer lugar la teoría clásica de la probabilidad o a priori; luego se expondrá la teoría frecuencial y, finalmente, desarrollaremos un modelo axiomático este es el orden del desarrollo - histórico de la teoría.

2.2 PROBABILIDAD CLASICA O A PRIORI

(Supone que el espacio muestral es finito)

En sus principios la teoría de probabilidad estuvo íntimamente - relacionada con los juegos de azar. Esta relación sugirió la defini - ción clásica.

Ejemplo 7 :

Supongamos que queremos hallar la probabilidad del suceso obtener cara al lanzar una moneda ideal. Razonamos de esta forma : puesto que sólo existen dos resultados, cara ó cruz, y dado que la moneda está bien equilibrada, - cabe esperar tener cara y cruz con la misma frecuencia,- aproximadamente; por tanto, en un gran número de pruebas, es de esperar que se obtendrá cara alrededor de la mitad de las veces, y así, la probabilidad del evento obtener cara estará dado por $\frac{1}{2}$. Esta clase de razonamiento originó la siguiente definición clásica de probabilidad.

Definición 7 :

Si un suceso puede ocurrir de n maneras mutuamente excluyentes e igualmente posibles, y si n(A) de éstas po seen un atributo A, la probabilidad de A es la fracción

$$\frac{n(A)}{n}$$

Simbolicamente

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Corrientemente esto se expresa diciendo que la probabilidad de A viene dada por el cociente de los casos favorables entre los casos posibles.

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables al evento A}}{\text{Casos posibles}}$$

Es conveniente dejar claro el significado de mutuamente excluyentes y de igualmente posibles.

Definición 8 :

Los eventos son mutuamente excluyentes cuando no pueden suceder en forma simultánea.

Ejemplo 8 :

Cuando se lanza una moneda, es claro que sólo puede ocurrir uno de los dos eventos posibles.

Definición 9 :

En un evento se dice que sus puntos muestrales son igualmente posibles si todos tienen la misma oportunidad de suceder.

Ejemplo 9 :

Si se lanzan al aire dos monedas pueden presentarse -

cuatro resultados y no tres

$$S = \{cc, +c , c+ , ++\}$$

La definición clásica de probabilidad no requiere la ayuda de la experiencia. Para la determinación de los casos posibles y de los casos favorables se sigue un proceso de razonamiento deductivo, basado en las propiedades geométricas del objeto ó en las características del proceso considerado.

<u>Ejemplo 10</u> :

Se desea hallar :

a) La probabilidad de sacar por lo menos una vez el 6 al arrojar un dado cuatro veces ;

b) La probabilidad de sacar dos 6 por lo menos una vez al lanzar dos dados 24 veces.

<u>Solución</u> :

a) La probabilidad de no sacar el 6 en una jugada es $\frac{5}{6}$ y la de no sacarlo vez alguna en 4 jugadas será $\left(\frac{5}{6}\right)^4$, puesto que cada jugada es independiente de las demás. Por lo tanto la probabilidad buscada es

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} = 0.517 \ldots.$$

b) La probabilidad de no sacar el 6 dos veces en una jugada es $\frac{35}{36}$, y la de no sacarlo vez alguna en 24 jugadas será $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$.

Luego la probabilidad de sacar el 6 dos veces por lo menos una vez será

$$P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36} \right)^{24} = 0.49 \quad .....$$

Ejemplo 11 :

Cuatro personas planean reunirse en una ciudad en donde hay 5 hoteles. ¿Cuál es la probabilidad de que esas personas se hospeden en diferentes hoteles?

Solución :

Cada una de las cuatro personas, se pueden hospedar en cualquiera de los 5 hoteles, luego los casos posibles serán 5^4 (Principio de la Multiplicación). Los casos favorables se obtienen mediante la permutación de 5 hoteles tomando 4 a la vez $({}_5P_4)$. Así la probabilidad de las cuatro personas se hospeden en hoteles diferentes es

$$\frac{{}_5P_4}{5^4} = \frac{120}{625} = 0.192$$

Observemos que la probabilidad es siempre un número compendido entre 0 y 1 inclusives.

La razón $\frac{n(A)}{n}$ debe ser una fracción propia, ya que el total de resultados posibles no pueden ser menor que el número de resultados con un determinado atributo. Si un suceso ha de ocurrir con seguridad, su probabilidad es 1. Si es seguro que no ha de ocurrir, la probabilidad es 0.

2.2.1 LIMITACIONES DE LA DEFINICION CLASICA

La Definición Clásica presenta la dificultad ya mencionada de que define la probabilidad en términos de eventos igualmente probables, estableciendo una suerte de círculo vicioso. Además presenta limitaciones, el cálculo de la probabilidad de un evento mediante el cociente de casos favorables sobre casos posibles. Estas dificultades fueron evidentes desde que se dieron los primeros pasos en el desarrollo de la teoría de la probabilidades.

Entre las situaciones en que no puede usarse la definición, pueden citarse :

i) El número de casos favorables y aún el de posibles es desconocido. En esta situación resulta imposible calcular el cociente y por lo tanto no puede lograrse un valor para la probabilidad del evento que interesa.

ii) El total de resultados posibles es infinito.

iii) Se sabe que los resultados no son igualmente posibles o por lo menos no se está seguro de que lo sean. Esta situación es muy corriente en la práctica y para la cual la definición clásica resulta inútil.

Las limitaciones mencionadas hacen que una teoría de probabilidades basada en la definición clásica resulte de muy poca utilidad práctica, para ello buscando una definición más general que satisfaga las necesidades teóricas y aplicadas se han propuesto otras formas de definir la probabilidad. Entre ellas se encuentra el enfoque empírico o frecuencial que toma en cuenta los resultados obtenidos en la experiencia que es, de todas maneras, de donde en esencia nacen todas las definiciones de probabilidad, inclusive la clásica comentada.

2.3 PROBABILIDAD FRECUENCIAL O ESTADISTICA

El enfoque estadístico se basa en los resultados empíricos y por ello, antes de discutir la definición estadística de probabilidad, es necesario revisar el concepto de frecuencia relativa.

Definición 10 :

Si se hace un número n de observaciones de una misma clase y se encuentra que el evento A ocurre en n(A) - de ellas, el cociente $\frac{n(A)}{n}$ se denomina frecuencia relativa del evento A.

Notación :

$$f(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Ejemplo 12 :

a) Considérese un experimento que consiste en observar 1000 lanzamientos de una moneda y el evento - que interesa anotar es el número de caras. Se repite el experimento 10 veces y se obtienen los resultados siguientes :

Experimento	No. de Caras	Frec.Relativa
1	502	0.502
2	511	0.511
3	497	0.497
4	529	0.529
5	504	0.504
6	476	0.476
7	507	0.507
8	528	0.528
9	504	0.504
10	529	0.529

Podemos observar que las frecuencias relativas tienden a concentrarse alrededor de 0.5 valor teórico.

b) Considérese un experimento que consiste en el muestreo de 100 transistores y el evento que interesa anotar es si es defectuoso ó no el transistor. Si de los 100 transistores tomados 10 son defectuosos el cociente $\frac{10}{100} = 0.1$ constituye la frecuencia relativa del efento "defectuosidad del transistor".
El investigador diría entonces que un 10% de los - transistores muestreados son defectuosos.
Si la experiencia anterior se repite, es decir, si se toman otras muestras de 100 transistores, se observan y se calcula la frecuencia relativa del evento "defectuosidad del transistor", podrá notarse que las frecuencias relativas no son iguales sino que -

muestran fluctuaciones, aunque la gran mayoría tien de concentrarse alrededor de un cierto valor.

Las fluctuaciones de las frecuencias relativas en experiencias sucesivas se pueden reducir si se aumentan el número de observaciones.

Es natural, que cuanto mayor sea el número de observaciones que se tomen en cuenta para el cálculo de las frecuencias relativas, menores serán las diferencias que muestran entre sí y por lo tanto estarán más concentradas. En el ejemplo considerado, si en lugar de tomarse muestras de 100 transistores, se utilizan muestras de 200 transistores, - la proporción del número de defectuosos va a variar mucho menos de una experiencia a otra. Esta circunstancia de que el ser mayor el número de observaciones mayor es la estabilidad de las frecuencias relativas en experiencias sucesivas, ha llevado a que los estadísticos conciban la probabilidad como el valor al cual tienden las frecuencias - relativas de una cierta experiencia al aumentar n número de observa - ciones.

Definición 11 :

Definimos entonces un número P como la probabilidad - de que ocurra el suceso A, y P puede ser aproximado - por la frecuencia relativa del evento A en experien - cias sucesivas.

La definición estadística de probabilidad tiene sus limitaciones y sus críticas. Por ejemplo, se ha indicado que gran cantidad de even - tos no son realmente repetibles, ni siquiera en condiciones esencialmente iguales (experimento agrícola).

Modernamente se ha tratado de superar esas limitaciones de la definición frecuencial, acudiendo al punto de vista axiomático, es decir concibiendo la probabilidad como una función de eventos que satisface determinados axiomas.

2.4 DESARROLLO AXIOMATICO DE LA PROBABILIDAD

Anteriormente hemos dado los conceptos de probabilidad clásica y frecuencial que pueden ayudarnos a resolver importantes problemas de la ciencia experimental. Para coadyuvar a la solución de estos problemas, desarrollaremos una teoría matemática de la probabilidad y mostraremos luego como puede utilizarse este modelo idealizado en los problemas de la realidad objetiva.

En primer lugar enunciaremos los axiomas que se emplearán para desarrollar la teoría.

Sea S un espacio muestral, y A, cualquier suceso de S, es decir, A es cualquier subconjunto de S. Diremos que P es una función de probabilidad en el espacio muestral S si se satisfacen los tres axiomas siguientes :

AXIOMA 1 :

$P(A)$ es un número real tal que $P(A) \geq 0$ para todo suceso A de S.

AXIOMA 2 :

$P(S) = 1$

AXIOMA 3 :

Si A_1, A_2, ... es una sucesión de sucesos mutuamente excluyentes de S, es decir, si $A_i \cap A_j = \Phi$ para $i \neq j = 1, 2, \ldots$.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

Estos axiomas que se utilizarán para desarrollar un modelo idealizado, están motivados por las definiciones de probabilidad clásica y frecuencial.

Demostraremos ahora algunos teoremas que son resultados directos de los axiomas.

TEOREMA 1 :

Sea S un espacio muestral y P una función en S; la probabilidad de que no ocurra el suceso A es $1 - P(A)$.

Con la notación de los conjuntos de puntos, esto se escribe en la forma $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Demostración :

Por ser mutuamente excluyentes $A \cap \overline{A} = \Phi$; también $A \cup \overline{A} = S$ y por el axioma 2, se tiene

$$1 = P(S) = P(A \cup \overline{A})$$

Por el axioma 3,

$$1 = P(S) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

con lo que queda demostrado.

TEOREMA 2 :

Sea S un espacio muestral con función de probabilidad P;

en tal caso, $0 \leq P(A) \leq 1$ para cualquier A de S.

Demostración :

Por axioma 1, $P(A) \geq 0$ sólo queda por demostrar $P(A) \leq 1$. Por el teorema anterior $P(A) + P(\overline{A}) = 1$; pero $P(\overline{A}) \geq 0$ - por el axioma 1, luego $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \leq 1$.

TEOREMA 3 :

Sea S un espacio muestral con una función de probabilidad P. Si A_o es el conjunto nulo $P(A_o) = 0$.

Demostración :

$A_o = \Phi$ luego $\overline{A}_o = S$ por axioma 3

$P(A_o \cup \overline{A}_o) = P(A_o \cup S) = P(A_o) + P(S)$

Pero $P(S) = 1$ luego $P(A_o) = 0$

Si estos axiomas y los teoremas de ellos resultantes han de ayudarnos a desarrollar un modelo útil, debemos tener una regla o función - que nos permita calcular la probabilidad de cada suceso A (subconjunto) del espacio muestral S. Se explicará como se constituye tal función para tres espacios muestrales diferentes :

1. Un espacio muestral discreto con un número finito de puntos, donde cada uno de ellos tiene la misma probabilidad.

2. Un espacio muestral discreto general.

3. Un espacio muestral continuo.

2.5 ESPACIO DISCRETO CON UN NUMERO FINITO DE PUNTOS

En ciertos tipos de problemas, entre los cuales los juegos de azar constituyen ejemplos notables, el espacio muestral contiene un número finito n de puntos, y la probabilidad asignada a cada punto es $\frac{1}{n}$.

En otras palabras, existen problemas con un número finito de ordenaciones (n) y es totalmente realista suponer que la probabilidad de cada ordenación es $\frac{1}{n}$. En general es suficiente para estos problemas la definición clásica y pueden emplearse los métodos de enumeración. Veremos cómo este espacio muestral especial (número finito de puntos con igual probabilidad para cada uno de ellos) encaja en la teoría general.

Definición 12 :

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los n puntos muestrales de un espacio muestral discreto S; se dice que la función P es una función de probabilidad de sucesos igualmente posibles si satisface las condiciones siguientes :

i) $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = \frac{1}{n}$

$A_i = \{a_i\}$ evento de S, $i = 1, 2, \ldots, n$

ii) Si es A un suceso que contiene n(A) cualquiera de los puntos muestrales a_i, entonces $P(A) = \frac{n(A)}{n}$

Es fácil comprobar que esta función satisface los axiomas 1, 2 y 3 y es, por tanto una función de probabilidad.

Ejemplo 13 :

Supongamos que un experimento aleatorio consiste en lanzar una moneda simétrica equilibrado dos veces. El espacio muestral S está formado por los puntos :

$$S = \{(c, c), (c, x), (x, c), (x, x)\}$$

donde (c, x) significa cara en la primera tirada y sello en la segunda, etc. Parece totalmente razonable asignar a cada punto muestral la probabilidad $\frac{1}{4}$. Definamos el suceso B aparezca al menos una cara :

$$B = \{(c, c), (c, x), (x, c)\}$$

B tiene tres puntos luego $P(B) = \frac{3}{4}$.

Supongamos ahora, que se desea la probabilidad de que no suceda B, es decir $P(\overline{B})$, por el teorema 1

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{1}{4}$$

Definición 13 :

Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral S tal que $P(B) > 0$. La probabilidad condicional del suceso A cuando ha ocurrido el suceso B, y que se designa por $P(A|B)$, es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo 14 :

Una urna contiene 6 bolas rojas y 4 bolas negras. Se extraen dos bolas sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja, si se sabe que la primera es roja?

Solución :

Sea B, "la primera bola es roja" y A, "la segunda bola es roja".

Por tanto $P(A \cap B)$ es la probabilidad de que tanto la primera como la segunda bola sean rojas. Hay $\binom{10}{2}$ maneras de extraer dos bolas de la urna; luego el espacio muestral contiene $\binom{10}{2}$ puntos, cada uno de ellos con probabilidad $\dfrac{1}{\binom{10}{2}}$. El número de maneras de sacar dos bolas rojas es $\binom{6}{2}$ y, por tanto,

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{3}$$

P(B) es la probabilidad de que la primera bola extraida sea roja, la cual es $\frac{6}{10}$, luego

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{6}{10}} = \frac{5}{9}$$

Esta probabilidad podría haberse calculado directamente, puesto que si la primera bola es roja, quedan en la urna cinco rojas, y cuatro negras, por lo que

$$P(A|B) = \frac{5}{9}$$

2.6 PROBABILIDAD TOTAL

Si A y B son dos subconjuntos mutuamente excluyentes (lo que significa que $A \cap B = \Phi$), el axioma 3 establece que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Podemos obtener una fórmula análoga para sucesos cualesquiera A y B que sean ó no mutuamente excluyentes.

TEOREMA 4 :

Sea S un espacio muestral con función de probabilidad P. Si A y B son dos sucesos cualesquiera de S,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

es decir la probabilidad de que ocurra A o B, o ambos, es igual a la probabilidad de que se produzca el suceso A, más la probabilidad de que ocurra el suceso B, menos la probabilidad de que ocurra A y B simultáneamente.

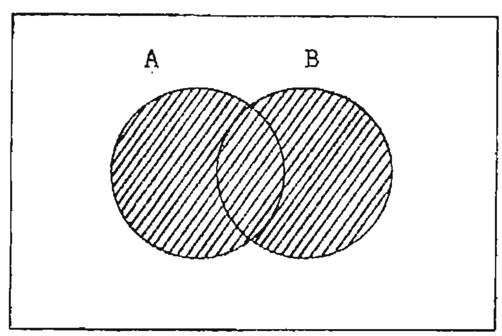


FIGURA 2.1

Demostración :

El algebra de conjuntos permite establecer que :

i) $A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$, los conjuntos A y $\overline{A} \cap B$ son disjuntos.

ii) $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, los conjuntos $(A \cap B)$ y $(\overline{A} \cap B)$ son disjuntos.

aplicando el axioma 3 a (i) y (ii), en

i) $P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$ y en

ii) $P(B) = P|(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)| = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

o bien

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Sustituyendo $P(\overline{A} \cap B)$ en la ecuación anterior, se obtiene

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo 15 :

Considérese ahora el caso del cuadro (1), donde A significa ser hombre y B ser profesional. Se pregunta por la probabilidad de elegir al azar un miembro del club, que sea hombre y profesional. La probabilidad de hombre es 0.7 y la de profesional es 0.4. Pero debe considerarse que ambas propiedades son compatibles, de modo que en cada uno de ambos sucesos (hombre o profesional), se ha incluido al mismo subconjunto de "hombres y profesionales".

Para no cometer duplicaciomes, es necesario contar dicho grupo sólo una vez. Por lo tanto, la probabilidad pedida se logra mediante la fórmula :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

CUADRO 1

DISTRIBUCION DE SOCIOS DE UN CLUB

Actividad / Sexo	PROFESIONALES (B)	NO PROFESIONALES ($\overline{B}$)	TOTAL ($B \cup \overline{B}$)
Hombres (A)	26	44	70
Mujeres ($\overline{A}$)	14	16	30
TOTAL ($A \cup \overline{A}$)	40	60	100

En este caso se habla de $P(A \cup B)$, como de una probabilidad total, en donde sólo se pide que se posea al menos una propiedad (lo que no excluye poseer ambas). En cambio, se dice que $P(A \cap B)$ es una probabilidad conjunta, ya que se pide poseer una y otra propiedad simultáneamente (se hombre y profesional).

En cifras :

$$P(A \cup B) = 0.7 + 0.4 - 0.26 = 0.84$$

Ejemplo 16 :

Si se rueda un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener 3 ó 5?

Solución :

Evento A obtener 3 , $P(A) = \frac{1}{6}$

Evento B obtener 5 , $P(B) = \frac{1}{6}$

$$P(A \cap B) = 0$$

luego $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{3}$$

2.7 INDEPENDENCIA

Si $P(A|B)$ no depende del suceso B, diremos que los sucesos A y B son independientes.

Definición 14 :

Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral S. se dice que estos dos sucesos son independientes si se satisface cualquiera de las siguientes igualdades :

a) $P(A|B) = P(A)$

b) $P(B|A) = P(B)$

c) $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

Ejemplo 17 :

Supongamos que se lanza un dado dos veces y que desea mos hallar la probabilidad de que los resultados sean dos y tres en este orden.

Solución :

Suceso A, que el resultado sea dos, $P(A) = \frac{1}{6}$

Suceso B, que el resultado sea tres, $P(B) = \frac{1}{6}$

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{36}$$

de modo que los dos sucesos son independientes.

2.8 FORMULA DE BAYES

Sean A_1, A_2, ..., A_n n sucesos que se excluyen mutuamente y cuya unión es todo el espacio muestral E, o sea $A_1 \cup A_2 \cup$ .... $\cup A_n = E$.

Sea B un suceso tal que $P(B) \neq 0$, y supongamos que se conocen tanto las probabilidades condicionales $P(B|A_i)$ como las probabilidades $P(A_i)$.

El problema de Bayes consiste en calcular, con los datos anteriores, las probabilidades $P(A_i|B)$. Según definición de probabilidad condicional, se deriva que

$$P(B \cap A_i) = P(A_i)\, P(B|A_i) = P(B)\, P(A_i|B) \qquad (8.1)$$

además

$$P(B) = P(B \cap E) = P(B \cap (\cup A_i)) = P(\cup (B \cap A_i)) \qquad (8.2)$$

$$= \sum_1^n P(B \cap A_i) \quad \text{según axioma 3}$$

De (8.1) y (8.2) se deduce

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{\sum_1^n P(A_i \cap B)} = \frac{P(A_i)\, P(B|A_i)}{\sum_1^n P(A_i)\, P(B|A_i)}$$

Esta es la fórmula conocida con el nombre de fórmula de Bayes, la cual expresa la llamada "Probabilidad de las Causas", pues resuelve el siguiente problema : Suponiendo que un suceso B puede producirse como consecuencia de cualquiera de los sucesos A_i y sabiendo que B - puede producirse como consecuencia de cualquiera de los sucesos A_i y sabiendo que B se ha producido, averiguar la probabilidad de que haya sido debido a la causa A_i. Se suponen conocidas las probabilida - des $P(A_i)$ y $P(B|A_i)$.

Ejemplo 18 :

En una región del país el 80% son campesinos y el 20% - son obreros o se sabe que el 15% de campesinos y el 10% de los obreros viven en casa de bahareque.

i) Si se selecciona una persona, al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que viva en casa de bahareque?

ii) Si una persona seleccionada vive en casa de bahareque, ¿cuál es la probabilidad de que sea obrero?

Solución :

Sean los eventos

C : que sea campesino

O : que sea obrero

B : que vive en casa de bahareque

Nuestra primera pregunta es :

i) $P(B) = ?$ Por el denominador de la fórmula de Bayes

$$P(B) = P(B|C).P(C) + P(B|O).P(O) \qquad (1)$$

$P(B|C) = 0.15$

$P(C) \quad = 0.80$

$P(B|O) = 0.10$

$P(O) \quad = 0.20$

Sustituyendo en (1)

$$P(B) = (0.15 \times 0.80) + (0.10 \times 0.20)$$

$$= 0.14$$

ii) $P(O|B) = ?$ Por la fórmula de Bayes

$$P(O|B) = \frac{P(O \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|O)P(O)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.10 \times 0.20}{0.14}$$

$$= 0.142857$$

UNIDAD III

VARIABLES ALEATORIAS

3.1 VARIABLE ALEATORIA

En la lectura anterior hemos dado los axiomas para una función de probabilidad y explicado como se construye ésta para un espacio muestral con un número finito de puntos, cada uno de los cuales tiene una misma probabilidad.

En nuestro caso nos ocuparemos de una variable aleatoria discreta.

Los elementos del espacio muestral S que hemos llamado sucesos elementales (simples), son elementos abstractos y, en consecuencia, también lo son los sucesos de S. La probabilidad P, por otra parte, es una función cuyo dominio es el conjunto de los sucesos y cuyo codominio es el intervalo $[0, 1]$ de los números reales. Para poder aplicar el cálculo matemático, es conveniente que el dominio de la función P pertenezca también al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, a fin de que P sea una función de números reales en números reales.

Ejemplo 1 :

Supongamos, el experimento aleatorio de lanzar dos monedas y ver si estas salen cara C o cruz F.

El espacio muestral S es el conjunto

$$S = \{(C, C), (C, F), (F, C), (F, F)\}$$

si sólo interesa el número de caras, de manera que los -

dos pares intermedios puedan considerarse equivalentes, podemos introducir la función $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por X : número de caras, o sea $X(C, C) = 2$, $X(C, F) = X(F, C) = 1$, $X(F, F) = 0$ tenemos así un nuevo conjunto $\{2, 1, 0\}$, ahora formado por números reales, a cada uno de los cuales corresponde una probabilidad.

Así

$$P(2) = P(C, C) = \frac{1}{4}$$

$$P(1) = P(C, F) + P(F, C) = \frac{1}{2}$$

$$P(0) = P(F, F) = \frac{1}{4}$$

vemos, pues, que la función X hace corresponder a cada elemento de S un número real y que, además, el conjunto de elementos de S, cuya imagen es uno de estos números reales, es un sucesc, y tiene, por tanto, una determinada probabilidad.

Definición 1:

Se llama variable aleatoria a toda función $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$ en donde el conjunto de elementos de S, cuya imagen es uno de estos números reales, es un suceso, y tiene, por tanto, una determinada probabilidad.

3.2 VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Definición 2 :

Se llama variable aleatoria discreta a toda función $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$ que pueda tomar un número finito o infinito numerable de valores $X = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ con la condición de que, para cualquiera de ellos, por ejemplo x_i, el conjunto $X^{-1}(x_i)$ sea un suceso de S. Puesto que el conjunto $X^{-1}(x_i)$ (elemento de S cuya imagen por X es el número x_i) es un suceso de S tendrá una cierta probabilidad, que se representa por

$$P(X^{-1}(x_i) = P(X = x_i)$$

Definición 3 :

La función f definida por

$$f(x_i) = P(X^{-1}(x_i)) = P(X = x_i)$$

se llama función de probabilidad de la variable aleatoria X. La cual debe cumplir :

i) $f(x_i) \geq 0$ para todo x_i

$\qquad i = 1, 2, \ldots$

ii) $\sum f(x_i) = 1$

Se dice abreviadamente, que $f(x_i)$ es la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor x_i.

Ejemplo 2 :

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los valores de X y pongamos

$$A_i = X^{-1}(x_i) = \{a \in S \mid X(a) = x_i\}$$

Por la definición de función de probabilidad y los axiomas de la definición de probabilidad, tendremos

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

$= P(S)$

$= 1$

Por otra parte, dado que los valores de f son probabilidades, es siempre $f \geq 0$.

Muchas veces interesa la probabilidad de que X tome un valor igual o menor que x_i, lo cual da lugar a la siguiente definición.

Definición 4 :

La función F definida por

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{x_h \leq x_i} f(x_h)$$

se llama función de distribución.

Obsérvese que :

i) $F(x_n) = 1$ (cuando X es una variable aleatoria - discreta finita).

ii) $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$

Ejemplo 3 :

Se lanzan tres monedas. Analícese la variable aleatoria X : número de caras.

Solución :

El espacio muestral consta de ocho elementos

$$S = \{(C, C, C),(C,C,F),(C,F,C),(F,C,C),(C,F,F),(F,C,F),(F,F,C),(F,F,F)\}$$

cada uno de los cuales tiene la misma probabilidad $\frac{1}{8}$.

Los números posibles de cara son

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$

Los valores de la función de probabilidad y de la función de distribución están dados en la siguiente tabla :

X	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
F(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	1

3.3 ESPERANZA MATEMATICA

Definición 4 :

Se llama esperanza matemática o valor medio de la variable aleatoria discreta X, con función de probabilidad f(x) a la expresión

$$= E(X) = \sum_{x} x\, f(x)$$

Mas generalmente, se establece la siguiente definición.

Definición 5 :

Se llama esperanza matemática o valor medio de una -- función G(X) de la variable aleatoria discreta X, a - la expresión

$$E(G(X)) = \sum_{x} G(x)\, f(x)$$

Ejemplo 4 :

La esperanza matemática de la variable aleatoria X:nú mero que resulta al lanzar un dado, será

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= 3.5$$

3.4 MOMENTOS DE UNA VARIABLE ALEATORIA

La esperanza matemática de una variable aleatoria es un dato muy importante de la misma, pero no dice nada acerca de la dispersión de sus valores alrededor de esta esperanza o valor medio. Por ejemplo en el caso que X representa el caudal de las aguas de un río durante las 52 semanas del año. Del conocimiento de su valor medio no se puede deducir si se trata de un río de caudal aproximadamente constante durante todo el año, o bien de un río muy caudaloso en invierno y casi seco en verano.

Por este motivo se han introducido más datos que, en cierta medida permiten medir esta dispersión de los valores de X alrededor de su valor medio E(X). Estos datos suelen ser la esperanza matemática de ciertas funciones G(X). Por ejemplo se puede tomar

$$G(X) = |X - E(X)| = \text{valor absoluto de la diferencia } X - E(X)$$

Evidentemente esta esperanza nos dará una idea de la mayor o menor concentración de los valores de X en torno de E(X). Sin embargo como los valores absolutos son de incómodo manejo matemáticamente, se han preferido otras funciones. Las más importantes son las potencias de

X, que dan lugar a los llamados momentos, que pasamos a definir.

<u>Definición 6</u> :

Se llama momento de orden k de la variable aleatoria X a la esperanza matemática de X^k, o sea,

$$\mu_k = E(X^k) = \sum_x x^k f(x)$$

En particular $\mu_1 = E(X) = \mu$. Los momentos centrados se definen - por la ecuación

$$\mu_k^1 = E((x - \mu)^k) = \sum_x (x - \mu)^k f(x)$$

Es particularmente importante el momento centrado de segundo or - den, que da lugar a la siguiente definición.

<u>Definición 7</u> :

Se llama varianza o variancia de una variable aleatoria X al momento centrado de segundo orden, se representa por σ^2 o por $\sigma^2(X)$, o sea

$$Var(X) = \sigma^2 = \sigma^2(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_x (x - \mu)^2 f(x)$$

<u>Definición 8</u> :

El número no negativo σ, raiz cuadrada de la varianza, se llama desviación típica o desviación "standard" de la variable aleatoria X.

La idea que se debe tener de σ^2 es que si tiene un valor pequeño se trata de una variable aleatoria X cuyos valores difieren poco de su valor medio y, se tiene un valor grande, significa que hay valores de X alejados de su valor medio.

Las siguientes relaciones en las cuales a, b son constantes son importantes y su demostración, en cada caso, es una consecuencia inmediata de las definiciones anteriores, por lo que nos limitaremos a enunciarlas :

i) $E(aX + b) = a\,E(X) + b$

ii) $E(X - \mu) = 0$

iii) $\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

iv) $\sigma^2(aX + b) = a^2\sigma^2(X)$

3.5 FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS

Definición 9 :

Se llama función generatriz de momentos o simplemente, función generatriz de la variable aleatoria X, a la esperanza matemática de la función e^{Xt}, o sea, a la función de t definida por

$$\psi(t) = E(e^{Xt}) = \sum_x e^{xt}\, f(x)$$

El nombre proviene de que, conocida la función $\Psi(t)$, sus derivadas sucesivas en el punto $t = 0$, son los momentos de X.

En efecto, se tiene

$$\psi(0) = \sum_x f(x) = 1$$

$$\psi'(0) = \sum_x x\, f(x) = E(X) = \mu_1$$

$$\psi''(0) = \sum_x x^2 f(x) = E(X\ ) = \mu_2$$

y, en general $$\psi^{(k)}(0) = \sum_x x^k f(x) = E(X^k) = \mu_k$$

3.6 VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Ya se ha mencionado la variable aleatoria discreta y se discutió ciertas características de ellas. Ahora se prestará atención al caso de la variable aleatoria continua.

Definición 10 :

> Una variable es continua en un intervalo si dados dos valores en ese intervalo, tan cercanos como se quiera siempre hay otro valor, entre esos dos, que podrá ser tomado por la variable.

Igualmente se podría definir diciendo que

Definición 11 :

> Una variable es continua en un intervalo si puede tomar cualquiera de todo el infinito número de valores en ese intervalo.

El peso, la estatura, la velocidad, el tiempo son ejemplos. En el caso de las variables discretas se dijo que existía una probabilidad para cada uno de los valores posibles de la variable.

Este tipo de razonamiento no se puede seguir para el caso de las variables continuas, en ella debe tomarse la idea de intervalo, ya que no es posible definir la probabilidad para un valor o punto específico de la variable: La probabilidad para un punto en una variable aleatoria continua es igual a cero. Intuitivamente se ve que hay un número infinito de puntos y por lo tanto, por más pequeño que sea un intervalo siempre se tendrá un caso favorable, que debería dividirse entre un número infinito de casos posibles.

<u>Definición 12</u> :

Se dice que X es una variable aleatoria continua si existe una función f llamada función de densidad de probabilidad de X, que satisface las siguientes condiciones :

i) $f(x) \geq 0$ para todo x

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

iii) Para cualquier a, b, tal que $-\infty < a < b < \infty$ tenemos

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

<u>Ejemplo 5</u> :

Supóngase que la variable aleatoria X es continua. Sea la función de densidad de probabilidad f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

claramente $f(x) \geq 0$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 2x\, dx = 1$$

para calcular $P(X \leq \frac{1}{2})$, debemos evaluar simplemente la integral

$$\int_0^{1/2} 2x\, dx = \frac{1}{4} \quad \text{(Figura 3.1)}$$

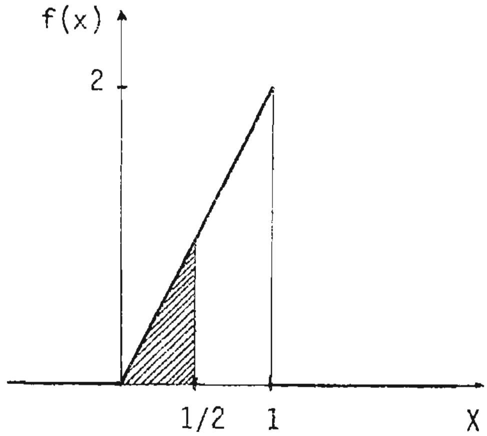


FIGURA 3.1

<u>Definición 13</u> :

Sea X una variable aleatoria continua. Definimos que F es la función de distribución de la variable aleatoria X como

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

PROPIEDADES DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION

1. $F(x)$ es monótona no decreciente
2. $F(-\infty) = 0$ (probabilidad del conjunto vacio)

   $F(\infty) = 1$ (probabilidad de S)
3. $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$

   además $\quad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

La probabilidad de que X tome un valor dado x_0 es siempre nula. - Donde la probabilidad nula no significa imposibilidad.

Esto hace que sea lo mismo considerar la probabilidad

$$P(a \leq X \leq b) \quad \text{que la} \quad P(a < X < b)$$

Ejemplo 6 :

Supongamos que X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Por lo tanto la función de distribución está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \int_0^x 2t\, dt = x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

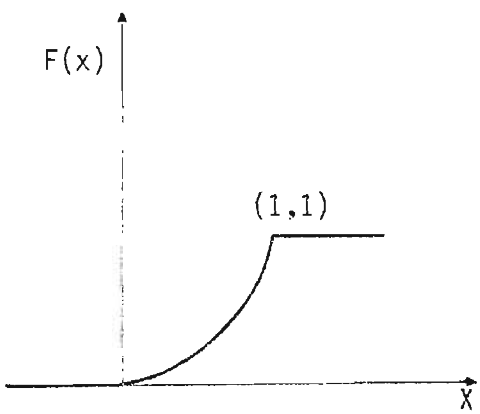


FIGURA 3.2

__Ejemplo 7__ :

Supongamos que una variable aleatoria continua tiene función de distribución F dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Entonces $F'(x) = e^{-x}$ para $x > 0$ y así la función de densidad de probabilidad es dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Las definiciones de esperanza matemática, variancia y momentos de una variable aleatoria continua son análogas a las dadas para variables aleatorias discretas, sólo que se debe sustituir las sumas por integrales, es decir :

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$$

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} ((x - E(X))^2\, f(x)dx$$ y análogamente se definen los momentos de orden superior.

La función generatriz de momentos se define también como la esperanza matemática de la función e^{Xt}, o sea

$$\psi(t) = E(e^{Xt}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\, f(x)dx$$

3.7 TEOREMA DE BIENAYME-CHEBYCHEV

El siguiente teorema, que proporciona una relación entre la desviación estandar y la distribución de probabilidad de X, es notable, ya que es válido para toda variable aleatoria, discreta o continua. Se debe a Bienaymé y en forma más general, a Chebychev.

TEOREMA 1 :

Sea X una variable aleatoria continua y f(x) su función de densidad con media μ y variancia σ^2.

Para cualquier k número positivo se tiene que

$$P(|x - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Demostración :

$$\sigma^2(X) = E(X - \mu)^2 = \int_{\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} (x - \mu)^2 f(x)dx + \int_{\mu - k\sigma}^{\mu + k\sigma} (x - \mu)^2 f(x)dx + \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx \qquad (7\text{-}1)$$

El argumento requiere que se reemplace la igualdad (7-1) por la - desigualdad ($\geq$). Esto se consigue reemplazando la primera y tercera integrales por cantidades más pequeñas, y eliminando completamente la integral intermedia, que es positiva.

En la primera de las tres integrales de (7-1), con $k > 0$, $x \leq \mu - k\sigma$ implica $x - \mu \leq - k\sigma$ implica $(x - \mu)^2 \geq k^2\sigma^2$, mientras que en - la tercera integral de (7-1), $x \geq \mu + k\sigma$ implica $x - \mu \geq k\sigma$ implica $(x - \mu)^2 \geq k^2\sigma^2$.

Por tanto, si en la primera y tercera integrales reemplazamos los integrales variables $(x - \mu)^2$ por el integrando constante $k^2\sigma^2$ y no hacemos nada en la segunda integral, la igualdad (7-1) se puede sustituir :

$$\sigma^2(X) \geq \left[\int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} k^2\sigma^2 f(x)dx + \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} (x-\mu)^2 f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} k^2\sigma^2 f(x)dx\right] \qquad (7\text{-}2)$$

Pero si la variancia σ^2 es igual o mayor que la suma de tres términos positivos, seguramente es igual o mayor que la suma del primero y el tercero. Si omitimos la segunda integral en (7-2) y expresamos la primera y tercera integrales en términos de probabilidades, obtenemos

$$\sigma^2(X) \geq \{k^2\sigma^2 P[X \leq (\mu-k\sigma)] + k^2\sigma^2\, P[X \geq (\mu+k\sigma)]\}$$

$$\geq k^2\sigma^2\{P[X \leq (\mu-k\sigma)] + P[X \geq (\mu+k\sigma)]\}$$

$$\geq k^2\sigma^2\, P(|x - \mu| \geq k\sigma)$$

o, finalmente,

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \qquad (7\text{-}3)$$

Este resultado relaciona las probabilidades de desviaciones de X con la desviación estándar, si ambas existen; es válido para toda - $k > 0$, aunque es de más interés para $k > 1$, y, lo que es muy notable, señala que sin importar cual sea la forma de $f(x)$, la probabilidad - de tener valores por fuera del intervalo $\mu \pm k\sigma$ está limitada, pues es menor o igual a $\frac{1}{k^2}$

Por ejemplo no más del 25% de probabilidad puede estar por fuera del intervalo $[\mu - 2\sigma , \mu + 2\sigma]$ de una distribución de probabilidad.

La desigualdad de Bienaymé-Chebychev tiene gran utilidad en la teoría moderna de la probabilidad, debido a su generalidad. Esta desigualdad es útil en control de calidad industrial moderno, en donde la proporción de producción que queda por fuera de $\pm k\sigma$ de la calidad media μ, es de interes.

UNIDAD IV

MODELOS PROBABILISTICOS DE VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

4.1 INTRODUCCION

La investigación científica de nuestros días recurre con frecuencia al método de los modelos o de la modelación.

El método de los modelos permite estudiar el objeto del conocimiento en un modelo artificial del objeto y no en el objeto mismo. A la vez aparece como medio de conocimiento, pues el modelo constituye un instrumento peculiar del que nos valemos para estudiar el objeto que se investiga. Usar modelos significa crear material o idealmente (mentalmente) sistemas artificiales (analogías, modelos) que reproducen las leyes de la organización estructural y del funcionamiento de los objetos que se estudian, o bien utilizar en calidad de tales objetos sistemas naturales. Generalmente se da el nombre de original o muestra al objeto que se estudia. Hay pues modelos materiales y modelos ideales.

El modelo material puede construirse con elementos de la misma naturaleza física y de la misma forma geométrica que el original, pero cuando es necesario, puede construirse asimismo con elementos que posean otra naturaleza física y otra forma geométrica. Cuando, por las razones que sean, no resulta posible o conveniente crear un modelo material, se utilizan modelos matemáticos. En la modelación ideal (lógico-matemática), se imita mentalmente el sistema que se estudia.

El modelo ideal se halla indisolublemente ligado al modelo material, pues un modelo siempre se crea primero, en la mente del hombre, y sólo después se plasma en determinados componentes materiales. Ahora bien, no siempre es necesario que un modelo se plasme forzosamente en componentes materiales. Eran de esta clase, por ejemplo, los modelos ideales de la estructura del átomo debidos a Thomson y a Rutherford. Imaginario era también el líquido especial de los tubos de sección variable con el que Maxwell representa las líneas de fuerza en el modelo del campo electromagnético.

Cuando se emplean modelos matemáticos, los procesos en el original y los modelos se describen mediante ecuaciones matemáticas análogas. En esencia, la modelación matemática se reduce a resolver ecuaciones matemáticas por medio de las cuales se describen determinados procesos materiales. En el caso más simple, el hombre puede resolver dichas ecuaciones directamente.

La modelación matemática puede realizarse mediante la corriente eléctrica cuando las magnitudes iniciales se sustituyen por tensiones de determinada magnitud entre las cuales se establecen las mismas relaciones que entre los miembros de la ecuación. En este caso, lo que se modela no es el proceso estudiado directamente, sino una determinada dependencia matemática.

En nuestro caso nos interesa el estudio de modelos probabilísticos, los que consideran, que las condiciones experimentales determinan solamente el comportamiento probabilístico de los resultados observables.

En esta oportunidad estudiaremos algunos modelos probabilísticos de variable aleatoria discreta.

4.2 DISTRIBUCION BINOMIAL

En ciertos tipos de experimentos o procesos repetitivos interesa anotar la presencia o ausencia de ciertas características. Así, por ejemplo, al lanzar una moneda repetidamente, interesa el número de caras y coronas obtenidas; al tomarse una muestra de tornillos producidos por una máquina, el número de defectuosos y de buenos. Un aspecto común a todas las experiencias, es que sus resultados pueden clasificarse en dos categorías según presente o no la característica que interesa.

Más específicamente, al considerar este tipo de problemas se plantean preguntas como las siguientes : ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 20 tornillos aparezcan 2 defectuosos, si la máquina produce normalmente un 3% de defectuosos?
¿Cuál es la probabilidad de obtener el número cuatro 200 veces al rodar un dado perfecto 500 veces?

Estas preguntas pueden contestarse definiendo el espacio muestral del experimento, contando los casos posibles y los casos favorables y calculando finalmente la probabilidad correspondiente. Sin embargo, hay un método más directo y apropiado que se basa en la distribución binomial.

Consideremos una experiencia repetitiva en la que se dan las siguientes condiciones :

a) Existe un número fijo n, de pruebas, intentos o repeticiones.

b) En cada una de las pruebas el evento que interesa puede ocurrir (éxito) o no ocurrir (fracaso), donde P representa la probabilidad de éxito y q la probabilidad de fracaso en un intento; $P + q = 1$.

c) Las pruebas son independientes, es decir la ocurrencia del evento en una prueba no afecta la probabilidad de ocurrencia en la siguiente.

d) Interesa el número x de éxitos en las n pruebas.

Definición 1 :

Una experiencia que reune las condiciones anteriores es una experiencia binomial.

Un ejemplo típico de experiencia binomial, es el caso en que interesa la probabilidad de 4 caras en 10 lanzamientos, ya que cumple las condiciones citadas.

Definición 2 :

Sea una variable aleatoria X con función de probabilidad dada por

$$f(x) = \binom{n}{x} P^{x} q^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

llamada distribución binomial.

Esta función de probabilidad se obtiene así :

La probabilidad de éxito en un intento es P, y como los intentos son independientes y P es constante, la probabilidad de éxito en cada uno de los primeros x intentos será :

$$\underbrace{P \,.\, P \,.\, P \,\ldots\ldots\ldots\, P}_{\text{x veces}} = P^{x}$$

y la de fracaso en cada uno de los siguientes n - x intentos

$$\underbrace{q \,.\, q \,.\, q \,\ldots\ldots\ldots\, q}_{\text{n-x veces}} = q^{n-x}$$

$P^x\, q^{n-x}$ representa entonces la probabilidad de x éxito, y n-x fracasos, en este orden específico; pero evidentemente hay otros ordenes posibles y es necesario sumar la probabilidad $P^x\, q^{n-x}$ tantas veces - como ordenes sean posibles. El número de ordenes posibles está dado por $\binom{n}{x}$ que se lee "combinaciones x de n", $\binom{n}{x}$ indica el número de formas en que se puede seleccionar x objetos de un total de n.

Multiplicando $P^x\, q^{n-x}$ por $\binom{n}{x}$ se obtiene la probabilidad de - que x éxitos, en cualquier orden, al realizar n intentos. Así se llega a

$$f(x) = \binom{n}{x}\; P^x\, q^{n-x}$$

Esta función de probabilidad que, una vez dados n y P, tiene un - valor determinado para cada x, se llama función de probabilidad binomial, por ser sus valores iguales a los términos del desarrollo de - $(P + q)^n$ por la fórmula del Binomio de Newton. Puesto que $P + q = 1$, esto prueba además, que

$$\sum f(x) = 1 \quad (\text{la suma extendida a } x = 0, 1, \ldots\ldots, n)$$

Es costumbre adoptar la notación

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , x = 0, 1, \ldots\ldots, n.$$

y también es muchas veces útil la función de distribución Binomial

$$P(X \leq k) = F(k) = \sum_{x \leq k} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

El cálculo de f(x) no es fácil para valores un poco grandes de n y x. Se pueden aplicar tablas de los números combinatorios o tablas de factoriales. Sin embargo, en general, es más práctico sustituir - la función binomial por otra función aproximada, como la de Poisson o la normal, que trataremos más adelante.

__Ejemplo 1__ :

Se lanza una moneda 20 veces. Se busca :

a) La probabilidad de sacar 14 veces cara.

b) La probabilidad de que el número de caras sea menor que 3.

__Solución__ :

a) $$f(x) = \binom{20}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{20-x}$$

$$f(14) = P(X = 14) = \binom{20}{14} \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$= 0.036$$

b) $$P(X < 3) = F(2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{20}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{20-x}$$

$$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

4.2.1 ESPERANZA MATEMATICA Y VARIANCIA DE UNA VARIABLE BINOMIAL

Para la distribución binomial puede calcularse los valores esperados de X y de $(X - \mu)^2$, o sea la media y la variancia teóricas.

Como fue visto anteriormente, la media teórica μ se define en la siguiente forma :

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x\, f(x)$$

en el caso de la distribución binomial se tiene :

$$E(X) = \sum_{x=0} x \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^{x}q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{x\, n!}{x(x-1)!(n-x)!} p^{x}q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x}q^{n-x}$$

$$= nP \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1}q^{(n-1)-(x-1)}$$

$$= nP \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1}\, q^{(n-1)-(x-1)}$$

$$= nP(P + q)^{n-1}$$

$$\mu = E(X) = nP$$

Es decir, el valor esperado de x (número de éxitos) en una experiencia binomial es igual al número de pruebas o intentos multiplicado - por la probabilidad de éxito (P).

La variancia en general, se define

$$\sigma^2 = E\left[(X - \mu)^2\right] = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

Dado que $\mu = E(X) = nP$, solamente nos resta encontrar $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} P^x q^{n-x}$$

escribamos $x^2 = x(x - 1) + x$.

Luego

$$E(X^2) = \sum_{x=2}^{n} x(x - 1) \binom{n}{x} P^x q^{n-x} + E(X)$$

Puesto que $x(x - 1)\binom{n}{x} = n(n - 1)\binom{n-2}{x-2}$, se tiene que la sumatoria es igual a

$$n(n - 1)P^2 \sum_{x=2}^{n} \binom{n-2}{x-2} P^{x-2} q^{(n-2)-(x-2)} \quad y$$

ésta igual a $\quad n(n - 1)P^2(P + q)^{n-2}$

consecuentemente, $E(X^2) = n(n-1)P^2 + nP$, así que

$$E(X^2) = n^2P^2 + n\,P\,q$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = nPq$$

4.2.2 FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL

La función de probabilidad binomial con parámetros n y P tiene una función generatriz de momentos para $-\infty < t < \infty$.

$$\psi(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} P^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t p)^x q^{n-x}$$

$$= (e^t p + q)^n$$

Con primeras derivadas

$$\psi'(t) = nPe^t(Pe^t + q)^{n-1}$$

$$\psi''(t) = nPe^t(Pe^t + q)^{n-1} + n(n-1)P^2e^{2t}(Pe^t + q)^{n-2}$$

De donde

$$E(X) = \psi'(0) = nP$$

$$E(X^2) = \psi''(0) = nP + n(n-1)P^2 = nPq + n^2P^2$$

y por tanto

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = nPq$$

4.3 DISTRIBUCION DE POISSON

La distribución de Poisson ha llegado a tener importancia en años recientes, debido a su aplicación en muchos fenómenos aleatorios que han sido estudiados.

En física la emisión aleatoria de electrones procedentes de los filamentos de un tubo al vacio o procedentes de una sustancia fotográfica sensible bajo la influencia de luz, y en la descomposición expontánea de un núcleo atómico radiactivo sobresalen entre fenómenos que obedecen la distribución de Poisson.

Definición 3 :

Un fenómeno aleatorio cuyo espacio muestral S consiste en todos los enteros desde 0 en adelante, es de -

cir $S = \{0, 1, 2, ...\}$, y sobre cuyos subconjuntos se define una función de probabilidad $f(x)$ en términos de un Parámetro $\lambda > 0$ por

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

se dice que obedece a una función de probabilidad de Poisson con parámetro λ.

Se puede verificar que

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = 1 \quad \text{ya que}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \quad ; \text{ pero la serie}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \quad \text{converge a } e^{\lambda} \text{ para todo real } \lambda;$$

luego

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} (e^{\lambda}) = e^0 = 1$$

La función de distribución de Poisson será

$$P(X \leq k) = F(k) = \sum_{x \leq k} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

Ejemplo 2 :

Se sabe que un líquido contiene ciertas bacterias a razón de 4 bacterias por cm^3 . Se desea saber la probabilidad de que una muestra de 1 cm^3 no contenga bacteria alguna y también la probabilidad de que en $\frac{1}{2}$ cm^3 haya por lo menos una bacteria.

Solución :

En la primera pregunta $\lambda = 4$, $x = 0$; por lo tanto

$$P(0) = f(0) = \frac{e^{-4}\lambda^{0}}{0!}$$

$$= e^{-4} = 0.0183$$

En la segunda pregunta, puesto que la probabilidad de - que no contenga alguna bacteria es e^{-2} , la probabilidad de que contenga por lo menos una bacteria será

$$P(x \geq 1) = 1 - f(0)$$

$$= 1 - e^{-2}$$

$$= 0.864$$

4.3.1 ESPERANZA MATEMATICA Y VARIANCIA DE LA DISTRIBUCION DE POISSON

Se sabe que la media teórica μ se define de la siguiente forma :

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x\, f(x)$$

en el caso de la distribución de Poisson se tiene :

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\, \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x\, e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x(x-1)!}$$

multiplicando por $\lambda\, \lambda^{-1} = 1$ se tiene

$$\mu = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}\lambda}{(x-1)!}$$

como λ es un parámetro, podemos escribir

$$\mu = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

haciendo cambio de variable,

$y = x - 1$ tenemos

Si $\quad x = 1 \Longrightarrow y = 0$

Si $\quad x \to \infty \Longrightarrow y \to \infty$; por lo tanto

$$\mu = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}$$

pero,

$$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} = 1 \text{ , así}$$

$$\mu = E(X) = \lambda$$

La variancia en general, se define

$$\sigma_X^2 = \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Dado que $\mu = \lambda$, solamente nos resta encontrar $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 f(x)$$

haciendo la sustitución

$$x^2 = x(x - 1) + x$$

$$\text{y} \quad f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad \text{se tiene}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} [x(x - 1) + x] \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x(x-1)e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x\, e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{x(x-1)e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x(x-1)(x-2)!} + \lambda$$

$$= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{(x-2)!} + \lambda$$

Multiplicando por $\lambda^2\, \lambda^{-2} = 1$ los términos en la sumatoria tenemos

$$E(X^2) = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}\, \lambda^{-2}\lambda^{2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$= \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

haciendo cambio de variable

$y = x - 2$; tenemos que

Si $x = 2 \Longrightarrow y = 0$

si $x \to \infty \Longrightarrow y \to \infty$

$$E(X^2) = \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} + \lambda$$

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

Sustituyendo $E(X^2)$ y $E(X)$ en

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$\sigma_X^2 = \lambda$$

4.3.2 FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS DE LA DISTRIBUCION DE POISSON

La función de probabilidad de Poisson con parámetro λ tiene la siguiente función generatriz de momentos

$$\psi(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{t})^{x}}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{t}}$$

$$= e^{\lambda(e^{t}-1)}$$

Las dos primeras derivadas son

$$\psi'(t) = \lambda e^{t} e^{\lambda(e^{t}-1)}$$

$$\psi''(t) = \lambda e^{t} e^{\lambda(e^{t}-1)}(1 + ae^{t})$$

de donde

$$\mu = E(X) = \psi'(0) = \lambda$$

$$E(X^2) = \psi''(0) = \lambda(1 + \lambda)$$

$$\sigma_X^2 = \lambda(1 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda$$

4.3.3 LA DISTRIBUCION DE POISSON COMO UNA APROXIMACION DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL

Ya dijimos que la expresión b(x; n, P) de la función de probabilidad binomial es difícil de calcular directamente para valores un poco grandes de x y n. Se puede mediante tablas apropiadas, pero muchas veces es preferible sustituir la expresión b(x; n, P) por otra de mejor manejo para el cálculo y suficientemente aproximada en las aplicaciones, un primer caso en que esto es posible es para valores pequeños de P, tales que el producto nP sea relativamente pequeño aún para valores bastantes grandes de n.

Planteemos el problema de buscar el límite de la función de probabilidad binomial para el caso en que P tiende a cero, al mismo tiempo que n tiende a infinito, de manera que el valor medio se mantenga igual a una constante positiva λ , o sea $nP = \lambda$.

Desde luego que se trata de un caso límite teórico pues la probabilidad P en cualquier experimento tiene un valor fijo y, por tanto, el producto nP crece con n. Sin embargo el límite nos dará un valor aproximado de b(x; n, P) para los valores de n y P tales que su producto no difiera mucho de λ.

Se tiene

$$b(x;\, n,\, P) = \binom{n}{x} P^x q^{n-x} \;,\; nP = \lambda \Longrightarrow P = \frac{n}{\lambda}$$

$$= \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-x+1)}{x!\ \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \;\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{(x-1)}{n}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

Para $n \longrightarrow \infty$ (manteniendo fijo x) el numerador de la segunda fracción tiende a 1, puesto que es el producto de un número finito de factores, cada uno de los cuales tiende a 1. El denominador tiende a 1. El último factor tiende a $e^{-\lambda}$, ya que

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{se tiene} \quad e^{-\lambda} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

Por tanto queda

$$\lim_{n\to\infty} b(x;\, n,\, P) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Teniendo en cuenta como ha sido obtenida, resulta que la función de probabilidad de Poisson, nos da un valor aproximado de $b(x;\, n,\, P)$- para valores pequeños de P. Prácticamente se considera que la aproximación es aceptable si $P < 0.1$ y $nP < 5$.

Ejemplo 3 :

Una fábrica produce ciertas piezas y se sabe que la probabilidad de que una pieza sea defectuosa es $P = 0.02$. Se desea hallar la probabilidad de que, en un lote de - 100 piezas, no haya piezas defectuosos, y también la - probabilidad de que haya, a lo sumo 3 piezas defectuo - sas.

Solución :

Aplicando la función de probabilidad de Poisson para - $\lambda = nP = 2$, $x = 0$, resulta

$$P(X = 0) = f(0) = e^{-2} = 0.135$$

y la probabilidad de que haya a lo sumo 3 defectuosas - será :

$$\begin{aligned} F(3) = P(X \leq 3) &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) \\ &= 1 - P(X > 3) \\ &= 0.857 \ldots. \end{aligned}$$

4.4 DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA

Consideremos n pruebas, pero, en contra de lo que suponíamos en el modelo binomial, supongamos que las probabilidades de éxito y fracaso cambian de prueba a prueba.

Este modelo nos permitirá ver los diferentes cambios que se llevan a cabo, como la motivación en que se basan.

Definición 4 :

Sea una variable aleatoria discreta X con función de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \; x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Llamada Distribución Hipergeométrica con parámetros N, k y n.

La función de probabilidad se obtiene así : Supongamos que las n pruebas consisten en la extracción, sin reemplazo, de n unidades de una población finita N que contiene k éxitos y M fracasos (k+M=N).

Sea X el número de éxitos en tales n pruebas. Se busca la probabilidad f(x) de x éxitos (a la vez de n-x fracasos) en n pruebas.

Las n pruebas ya no son mutuamente independientes; como estamos tomando muestras sin reemplazo, la aparición de un éxito o un fracaso en una prueba depende de cuáles hayan sido los resultados de las pruebas anteriores. La probabilidad de que las primeras x pruebas nos hayan dado éxito es

$$\frac{k}{N} \cdot \frac{k-1}{N-1} \cdots\cdots \frac{k-(x-1)}{N-(x-1)} \qquad (1)$$

y la probabilidad de que las últimas n - x pruebas hayan sido fracaso es

$$\frac{M}{N-x} \cdot \frac{M-1}{N-(x+1)} \cdots\cdots \frac{M-(n-x-1)}{N-(n-1)} \qquad (2)$$

Pero x éxitos y n - x fracasos pueden obtenerse en $\binom{n}{x}$ formas mutuamente excluyentes.

Además, estas son formas igualmente probables, como en el caso de la distribución binomial, porque aunque muchas combinaciones conteniendo x éxitos y n - x fracasos tendrán una configuraciones menos sorprendente que la combinación ordenada descrita, las probabilidades asociadas con todas ellas resultarán ser el producto de (1) y (2), como se puede verificar fácilmente.

Así

$$f(x) = \binom{n}{x} \frac{k(k-1) \ldots [k-(x-1)].M(M-1) \ldots [M-(n-x-1)]}{N(N-1) \ldots [N-(x-1)](N-x)[N-(x+1)] \ldots [N-(n-1)]}$$

pero reduciéndola se puede escribir en la forma siguiente :

$$f(x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Este resultado, puede parecer evidente, ya que la probabilidad de x éxitos y n - x fracasos en n pruebas debe ser el producto del número de formas $\binom{k}{x}$ de obtener x éxitos de los k éxitos posibles y el número independiente de formas $\binom{M}{n-x}$ de obtener n - x fracasos de los M fracasos disponigles, dividido por $\binom{N}{n}$, el número total de muestras diferentes de tamaño n que pueden sacarse de una población de tamaño N.

Ejemplo 4 :

Se extraen tres bolillas de una urna que contiene cuatro azules y seis negras. Las bolillas se extraen una a una y sin reposición, considérese la variable aleatoria X : número de cánicas azules extraidas y obténgase la función de probabilidad.

Solución :

La variable aleatoria puede tomar los siguientes valores

X : 0 1 2 3

puesto que la urna contiene N = 10 bolillas de las cuales k = 4 son azules y M = 6 son negras y extraemos n = 3 bolillas del total, la probabilidad de que x sean azules y 3 - x sean negras en 3 extracciones debe ser el producto del número de formas $\binom{4}{x}$ de obtener x azules de las 4 posibles y el número independiente de formas $\binom{6}{3-x}$ de obtener 3 - x negras de las 6 negras disponibles, dividido por $\binom{10}{3}$, el número total de muestras diferentes - de tamaño 3 que pueden sacarse de la urna que tiene 10 - bolillas.

Así la función de probabilidad se escribe

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{6}{3-x}}{\binom{10}{3}}$$

de donde, obtendríamos por ejemplo que, la probabilidad de extraer una bolilla azul es

$$P(X = 1) = f(1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}}$$

4.4.1 ESPERANZA MATEMATICA Y VARIANCIA DE UNA VARIABLE HIPERGEOMETRICA.

La media teórica μ de una variable X con función de probabilidad hipergeométrica está dada por :

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x\, f(x) = \sum_{x=1}^{n} x \frac{\binom{k}{x}\binom{M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=1}^{n} x \binom{k}{x}\binom{M}{n-x}$$

$$= \frac{k}{\binom{N}{n}} \sum_{x=1}^{n} \binom{k-1}{x-1}\binom{M}{n-x}$$

en la cual se tiene $P = \frac{k}{N}$ y $q = 1 - P$.

Ahora, hagamos $J = x - 1$ y usando

$$\binom{s}{0}\binom{t}{n} + \binom{s}{1}\binom{t}{n-1} + \ldots + \binom{s}{n}\binom{t}{0} = \binom{s+t}{n}$$

la última sumatoria es igual a

$$\sum_{J=0}^{n-1} \binom{k-1}{J}\binom{M}{n-J-1} = \binom{k+M-1}{n-1} = \binom{N-1}{n-1}$$

consecuentemente,

$$E(X) = k \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = nP$$

A continuación evaluaremos $E(X^2)$ para determinar la variancia de la distribución hipergeométrica.

Utilizaremos el hecho que

$$E(X^2) = E\,[X(X-1)] + E(X)$$

Ahora

$$E[X(X-1)] = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=1}^{n} x(x-1) \binom{k}{x}\binom{M}{n-x}$$

$$= \frac{k(k-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{x=2}^{n} \binom{k-2}{x-2}\binom{M}{n-x}$$

$$= \frac{k(k-1)}{\binom{N}{n}} \binom{k+M-2}{n-2}$$

$$= \frac{k(k-1)}{\binom{N}{n}} \binom{N-2}{n-2}$$

De donde

$$E(X^2) = nP(k-1)\frac{n-1}{N-1} + nP$$

$$= \frac{nP}{N-1}\,[k(n-1) + N - n]$$

$$\sigma^2 = \frac{nP}{N-1}\,[k(n-1) + N - n] - (n\,P)^2$$

$$= \frac{nP}{N-1}\,[k(n-1) + N - n - nP(N-1)]$$

$$= \frac{nP}{N-1} \left[kn - k + N - n - \frac{nk}{N} (N - 1)\right]$$

$$= \frac{nP}{N-1} (N - n) \left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

$$\sigma^2 = nPq \frac{N - n}{N - 1}$$

4.5 DISTRIBUCION MULTINOMIAL

Estudiaremos la distribución multinomial, una generalización directa de la distribución binomial. En esta distribución, tenemos una partición del espacio muestral S, en $A_1, A_2, \ldots, A_k$ eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos. En la binomial las probabilidades son constantes de evento a evento, con $P(A) + P(\bar{A}) = 1$; en la multinomial, las probabilidades son constantes de evento a evento, con $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) = 1$.

En la misma forma que en la binomial, supongamos que se llevan a cabo n pruebas independientes.

Las variables aleatorias serán $X_1, X_2, \ldots, X_k$ donde x_1 es el número de veces que se presenta A_1, x_2 el número de veces que se presenta A_2, ..., x_k el número de veces que se presenta A_k y $x_1, x_2, \ldots, x_k$ están sujetos a la condición

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

Se desea determinar la función de probabilidad conjunta

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

Las primeras x_1 pruebas pueden originar A_1, las segundas x_2 originan A_2, ..., las últimas x_k pruebas A_k. La probabilidad de este re sultado ordenado es

$$P_1^{x_1}\ P_2^{x_2}\ \ldots\ldots\ P_k^{x_k}$$

pero x_1 valores iguales A_1, x_2 valores iguales A_2, ..., x_k valores iguales A_k se pueden obtener de

(ver 1.2.1)

$$\frac{n!}{x_1!\ x_2!\ \ldots\ x_k!}$$

maneras mutuamente excluyentes. Las cuales se pueden ver fácilmente que son igualmente posibles.

De donde

$$(*) \qquad f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k) = \frac{n!}{x_1!\ x_2!\ \ldots\ x_k!}\ P_1^{x_1}\ P_2^{x_2} \ldots P_k^{x_k}$$

en donde x_1, x_2, ..., x_k son enteros no negativos cuya suma es n.

Esta es la función de probabilidad multinomial, que depende de k parámetros continuos P_1, P_2, ..., P_k sujetos a la restricción de - que su suma sea 1, un parámetro discreto n, y k variables aleatorias discretas X_1, X_2, ..., X_k.

La expresión (*) es el término general del desarrollo del multino mio

$$(P_1 + P_2 + \ldots + P_k)^n\ ,$$

esto es

$$\sum \frac{n!}{x_1!\ x_2!\ \ldots\ x_k!}\ P_1^{x_1} P_2^{x_2} \ldots P_k^{x_k} = (P_1 + P_2 + \ldots + P_k)^n = 1$$

en donde esta suma, se toma sobre todos los valores posibles de x_1, x_2, ..., x_k que satisfacen $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$

La esperanza matemática y la variancia vienen dadas así

$$E(X_i) = n\,P_i$$

$$\sigma^2(X_i) = n\,P_i(1 - P_i)$$

con $\quad i = 1, 2, \ldots, k$

Nótese que los resultados anteriores son una generalización de los utilizados para la distribución binomial; esta es un caso particular de la distribución multinomial con $k = 2$.

Ejemplo 5 :

Las tolerancias de ingeniería, superior e inferior, sobre una unidad de un producto son tales que, dada una producción normal, el 6% del producto queda por encima del límite superior de tolerancia, y el 2% por debajo del límite inferior.

En una muestra de 100 unidades del producto, la probabilidad de que 10 unidades queden por encima del límite superior y 4 por debajo del inferior es :

Solución : (Utilizamos una función de probabilidad trinomial)

$$f(x_1, x_2, x\ ) = \frac{n!}{x_1!\ x_2!\ x_3!}\, P_1^{x_1} P_2^{x_2} P_3^{x_3}$$

donde $n = 100$, $x_1 = 10$, $x_2 = 4$, $x_3 = 86$

$P_1 = 0.06$, $P_2 = 0.02$, $P_3 = 0.92$

así

$$f(10,4,86) = \frac{100!}{10!\ 4!\ 86!}\,(0.06)^{10}(0.02)^{4}(0.92)^{86}$$

$$= 0.0033$$

4.5.1 FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS DE LA DISTRIBUCION MULTINOMIAL

La distribución de probabilidad multinomial tiene la siguiente función generatriz de momentos

$$\psi(t_1, t_2, \ldots, t_k) = \sum e^{(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_k x_k)} \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} P_1^{x_1} P_2^{x_2} \ldots P_k^{x_k}$$

$$= \sum \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} (P_1 e^{t_1})^{x_1} (P_2 e^{t_2})^{x_2} \ldots (P_k e^{t_k})^{x_k}$$

Partiendo de que el desarrollo del multinomio $(P_1 + P_2 + \ldots + P_k)^n = 1$ es una identidad algebráica que para ser válida no requiere la condición probabilística $P_1 + P_2 + \ldots + P_k = 1$. Si aplicamos este hecho, la función generatriz de momentos se reduce a

$$\psi(t_1, t_2, \ldots, t_k) = (P_1 e^{t_1} + P_2 e^{t_2} + \ldots . + P_k e^{t_k})^n$$

su derivación con respecto a t_i produce

$$E(X_i) = n P_i \quad , \quad \sigma^2(X_i) = n P_i (1 - P_i)$$

UNIDAD V

MODELOS PROBABILISTICOS DE VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

5.1 DISTRIBUCION UNIFORME

La distribución uniforme es la más sencilla de variable continua, la cual definimos a continuación.

DEFINICION 1 :

Se dice que una variable aleatoria X se distribuye uniformemente si su función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

La variable aleatoria uniforme o rectangular X es continua y tiene probabilidad constante sobre el recorrido $a < X < b$, con discontinuidad en los extremos $X = a$ y $X = b$, donde a y b son finitos y reales.

La función se representa en la figura siguiente

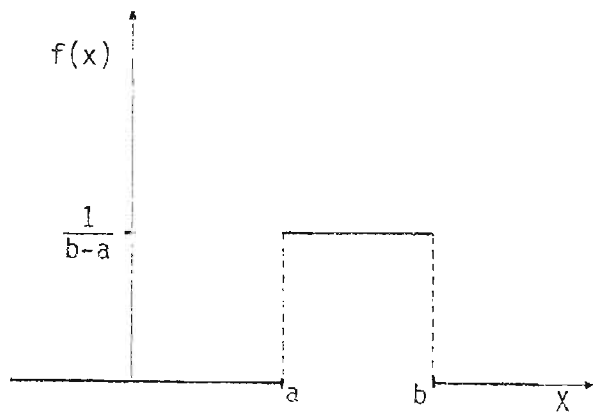


FIGURA 5.1

La función de distribución de la variable aleatoria uniforme viene dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , \ a < x < b \\ 1 & , \ x \geq b \end{cases}$$

La diferenciación de la función de distribución nos determina nuevamente la función de densidad.

Ejemplo 1 :

Suponga que X está distribuida uniformemente en $[-a, a]$, en donde $a > 0$. Determine "a" de modo que satisfaga

$$P(X > 1) = \frac{1}{3}$$

Solución :

La función de densidad de la variable aleatoria X es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & , \ -a < x < a \\ 0 & , \ \text{en otro caso} \end{cases}$$

así

$$P(X > 1) = \int_1^a \frac{1}{2t}\, dt = \frac{1}{3}$$

es decir, $\text{Ln } a = \frac{2}{3}$

de donde

$$a = e^{\frac{2}{3}}$$

5.1.1 ESPERANZA MATEMATICA Y VARIANCIA DE UNA VARIABLE ALEATORIA UNIFORME

La media teórica de una variable continua en general se define así

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)$$

en el caso de una variable aleatoria uniforme se tiene

$$\mu = E(X) = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\ x\ dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{a}^{b} \right)$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

La variancia de una variable aleatoria continua se define como

$$\sigma^2(X) = E\left[(X - \mu)^2\right]$$

$$= E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

en nuestro caso tenemos que para una distribución uniforme

$$\sigma^2(X) = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\ x^2 dx - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

$$= \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\sigma^2(X) = \frac{(a - b)^2}{12}$$

5.1.2 FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS DE UNA VARIABLE ALEATORIA UNIFORME

La función de densidad uniforme tiene como función generatriz de momentos la siguiente.

En general $\psi(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$

en nuestro caso se tiene

$$\psi(t) = \int_a^b e^{tx} \left(\frac{1}{b-a} \right) dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\frac{e^{tx}}{t} \Big|_a^b \right)$$

$$\psi(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

5.2 DISTRIBUCION NORMAL

5.2.1 FUNCION DE DENSIDAD Y FUNCION DE DISTRIBUCION NORMAL

La más importante distribución de probabilidad en el campo integro de probabilidad y estadística es la distribución de probabilidad normal.

En esta oportunidad describiremos esta distribución de probabilidad, como se usa y porque es tan importante.

La distribución normal es una manera especial de asignar probabilidades a intervalos de números reales con variables aleatorias continuas. Estas probabilidades son asignadas por medio de una curva especial, llamada la curva normal y son relacionadas a una clase especial de variable aleatoria, llamada variable aleatoria normal estandar.

Definición 2 :

Se dice que la variable aleatoria X se distribuye normalmente si su función de densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} , \quad -\infty < X < \infty$$

En realidad la función anterior representa una familia de distribuciones con dos parámetros, μ y σ^2. Hemos utilizado los símbolos μ y σ^2 para representar los parámetros, porque, según veremos, estos - son precisamente la media y la variancia, respectivamente, de la distribución.

La función anterior puede representarse por $N(\mu, \sigma^2)$ poniéndose - de manifiesto los parámetros.

La primera condición que debe cumplir toda función de densidad de probabilidad es satisfecha por f(x) y la segunda habrá de verificarse

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Supongamos que representamos por I el área limitada por la curva; tendremos

$$I = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

y haciendo la sustiticuón

$$u = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

tenemos

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} u^2} du$$

para ello se sigue el artificio siguiente :

$$I^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} u^2} du \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2} v^2} dv \right)$$

$$= \frac{1}{2\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (u^2 + v^2)} du\, dv$$

pasando a coordenadas polares

$$u = r \cos \Theta \quad , \quad v = r \operatorname{sen} \Theta \quad , \quad u^2 + v^2 = r^2$$

además

$dudv = dr\, d\Theta\, |j|$, donde $|j|$ es el jacobiano de transformación

dado por

$$|j| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial \Theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{Cos} \Theta & - r \operatorname{Sen} \Theta \\ \operatorname{Sen} \Theta & r \operatorname{Cos} \Theta \end{vmatrix}$$

$$|j| = r \operatorname{Cos}^2 \Theta + r \operatorname{Sen}^2 \Theta = r \quad ; \quad \text{luego}$$

$$dudv = r\, dr\, d\Theta$$

Notemos que r varía de 0 a ∞ mientras que Θ de 0 a 2Π luego

$$I^2 = \frac{1}{2\Pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\Pi} r\, e^{-\frac{1}{2} r^2} d\Theta\, dr$$

$$= \int_0^\infty r\, e^{-\frac{1}{2} r^2}\, dr$$

$$= 1$$

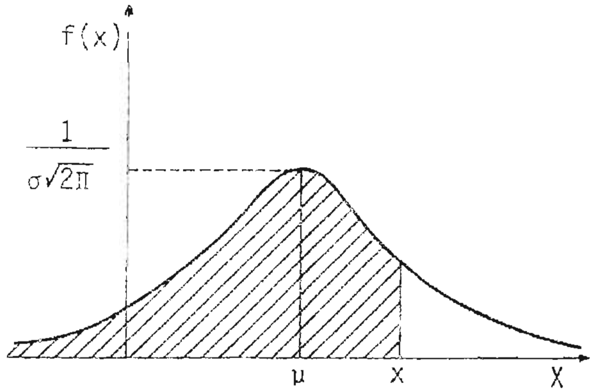


FIGURA 5.2

La expresión de la función de distribución es

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\ \sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

La función de densidad presenta ademas las siguientes característi cas :

1. Por ser $f(x)$ función de densidad el área bajo la curva es 1.
2. La curva descrita por $f(x)$ es simétrica con respecto al eje - que pasa por la media μ.
3. Los puntos de inflexión, esto es donde cambia la concavidad,- los alcanza en $x = \mu \pm \sigma$

4. Se extiende asintóticamente desde $-\infty$ hasta ∞ obteniendo su máximo en el punto $\left(\mu\ ,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}\right)$

5.2.2 ESPERANZA MATEMATICA Y VARIANCIA DE UNA VARIABLE ALEATORIA NORMAL

Además de la interpretación geométrica de los parámetros μ y σ, la siguiente interpretación probabilística puede asociarse con esas cantidades. Considérese

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

haciendo

$$z = \frac{(X-\mu)}{\sigma} \qquad \text{y observando que}$$

$$dx = \sigma dz \quad , \quad \text{obtenemos}$$

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\ \sigma \int_{-\infty}^{\infty} z\, e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \mu\ \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

La primera de las integrales anteriores es igual a cero puesto que el integrando, llamémoslo $H(z)$, tiene la propiedad de que $H(Z) = -H(-z)$, y, por lo tanto, H es una función impar. La segunda integral (sin el factor μ) representa el área total bajo la función de densidad normal y, por lo tanto, es igual a la unidad.

Luego

$$E(X) = \mu$$

Consideremos

$$E(X^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

haciendo $z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$, obtenemos

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu)^2 \, e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + 2\mu\sigma \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \, e^{-\frac{z^2}{2}} dz \; +$$

$$+ \; \mu^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

La segunda integral es igual a cero y la última integral (sin el factor μ^2) es igual a la unidad.

Para calcular

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

integramos por partes haciendo

$$z \, e^{\frac{z^2}{2}} dz = dv \qquad y \qquad z = u$$

luego

$$v = - e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad \text{mientras} \quad dz = du.$$

Se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \frac{z e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

$$= 0 + 1$$

$$= 1$$

Luego

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

y por tanto

$$\text{Variancia } (X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2$$

así encontramos que los dos parámetros μ y σ^2 que caracterizan la distribución normal son la esperanza y la variancia de X, respectivamente.

5.2.3 FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS DE UNA DISTRIBUCION NORMAL

Supóngase que X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Entonces

$$\psi(t) = E(e^{tx}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Sea $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$; luego $x = \sigma z + \mu$ y $dx = \sigma dz$.

Por tanto

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma z + \mu)}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

$$= e^{t\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2t\sigma z)}\, dz$$

$$= e^{t\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[(z-t\sigma)^2 - t^2\sigma^2\right]} dz$$

$$= e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-t\sigma)^2} dz$$

Sea $z = \sigma t = v$; luego $dz = dv$ y obtenemos

$$\psi(t) = e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

$$= e^{\left(t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$$

Derivando dos veces esta función y haciendo $t = 0$ en los resultados, hallamos

$$E(X) = \mu$$

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

Variancia $(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2$

5.2.4 DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR

Particularmente interesante es el caso $N(0, 1)$

Definición 3 :

Se dice que la variable aleatoria X tiene una distribución normal estandar si posee media $\mu = 0$, variancia $\sigma^2 = 1$ y cuya función de densidad es

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , -\infty < x < \infty$$

La importancia de la distribución normal estandar se debe a que está tabulada.

Cada vez que X tiene una distribución $N(\mu , \sigma^2)$ siempre podemos obtener la forma estandar, tomando simplemente una función lineal de X como lo indica el teorema siguiente.

TEOREMA 5.1

Si X tiene la distribución $N(\mu , \sigma^2)$ y si $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, entonces z tiene la distribución N(0, 1).

Demostración :

Recordando el hecho de que

$$E(ax + b) = a\mu + b$$

$$\sigma^2(ax + b) = a^2\sigma^2 (X)$$

aplicando estos resultados a z tendremos que

$$z = \frac{1}{\sigma} X - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$E(z) = \frac{1}{\sigma} \mu - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$\mu_z = 0$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1$$

es decir, la variancia de $z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ es uno.

Por lo tanto z tiene una distribución N(0, 1) ya que x tiene una distribución normal y z es una función lineal de X.

OBSERVACION :

La importancia de este teorema es que al cambiar las unidades en las cuales se mide la variable podemos obtener la distribución estandar. Al hacer esto, obtenemos una distribución donde ningún parámetro es no especificado, lo cual es una situación muy propicia bajo el punto de vista de la tabulación de la distribución.

5.2.5 TABULACION DE LA DISTRIBUCION NORMAL

La función de distribución normal estandar se denotará así

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

(VER TABLA I)

La función $\Phi(x)$ ha sido tabulada ampliamente. Podemos usar la tabulación de la función $\Phi(x)$ con el objeto de evaluar $P(a \leq X \leq b)$, en donde X tiene la distribución estandar N(0, 1) puesto que

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

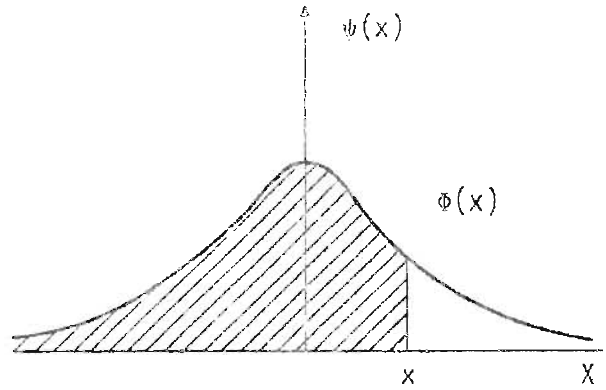


FIGURA 5.3

La importancia particular que tiene la tabulación anterior se debe al hecho de que si X tiene cualquier distribución normal $N(\mu , \sigma^2)$, la función tabulada Φ puede usarse para evaluar probabilidades asociadas con X.

Simplemente usamos el teorema 5.1 para observar que si X tiene distribución $N(\mu , \sigma^2)$, entonces $z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ tiene distribución $N(0, 1)$. Por tanto

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Es evidente de la definición de $\Phi(x)$ (ver figura 5.3) que

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad (5.1)$$

$\Phi(x)$ representa el área entre la curva y el eje desde $-\infty$ hasta el punto x.

Por simetría el área desde $-\infty$ hasta $-x$ es igual al área desde x hasta ∞, y como el área total es 1, resulta la relación anterior.

Esta relación hace que sea sufuciente tabular $\Phi(x)$ para valores positivos de x.

La probabilidad de que la variable aleatoria normal X de tipo $N(\mu , \sigma^2)$ esté comprendida en el intervalo $[\mu - k\sigma , \mu + k\sigma]$ se expresa por

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = P(-k \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq k)$$

$$= \Phi(k) - \Phi(-k)$$

usando la ecuación (5.1), para $k > 0$ tenemos

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = 2\Phi(k) - 1$$

Nótese que la probabilidad anterior es independiente de μ y σ.

En general, son de interes las probabilidades que tienen los valores 0.90, 0.99, ó 0.999. Como se puede deducir de las tablas estos valores corresponden a $x = 1.65$, $x = 1.96$, $x = 2.58$, $x = 3.29$, de manera que, para toda variable normal $N(\mu, \sigma^2)$, se cumple

$$P(\mu - 1.65\,\sigma < X \leq \mu + 1.65\,\sigma) = 0.90$$

$$P(\mu - 1.96\,\sigma < X \leq \mu + 1.95\,\sigma) = 0.95$$

$$P(\mu - 2.58\,\sigma < X \leq \mu + 2.58\,\sigma) = 0.99$$

$$P(\mu - 3.29\,\sigma < X \leq \mu + 3.29\,\sigma) = 0.999$$

recordemos que en todas estas fórmulas el signo $\leq$ puede sustituirse por $<$, puesto que la probabilidad de que X tome un determinado valor es nula.

Ejemplo 2 :

¿Cuál es la probabilidad de que una variable aleatoria normal estandar tome un valor entre 0 y 1?

Solución :

El área a determinar es la que aparece sombreada.

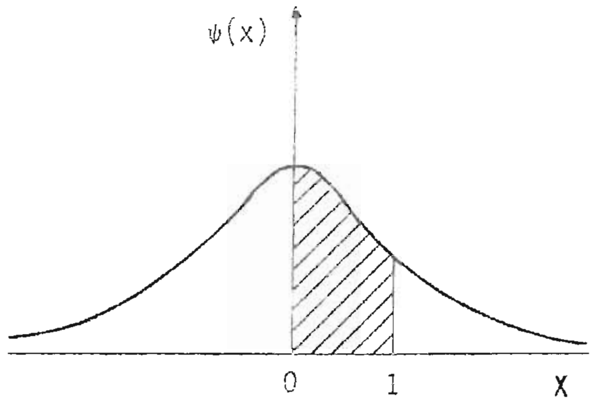


FIGURA 5.4

$$P(0 < X < 1) = \Phi(1) - \Phi(0)$$
$$= 0.8413 - 0.5000$$
$$= 0.3413$$

cerca del 34% de la probabilidad total está entre 0 y 1, por simetría, cerca de 68% está entre - 1 y 1.

Ejemplo 3 :

¿Cuál es la probabilidad de que una variable aleatoria - normal estandar tome un valor entre - 2 y 2?

Solución :

Puesto que la curva normal es simétrica con respecto al - eje Y, el área de - 2 a 2 es dos veces el área de 0 a 2.

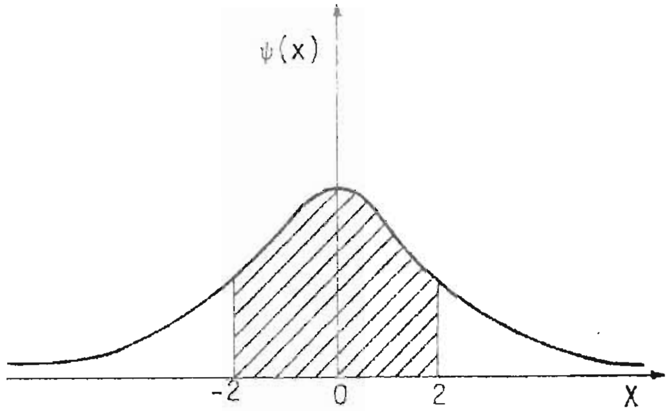


FIGURA 5.5

$$P(-2 < X < 2) = 2\Phi(2) - 1$$
$$= 2(0.9772) - 1$$
$$= 0.9544$$

ligeramente más del 95% del área total yace sobre el intervalo entre - 2 y 2.

Ejemplo 4 :

Encuentre $P(-0.3 < X < 3.2)$, x variable aleatoria normal estandar.

Solución :

El área sombreada es la probabilidad deseada.

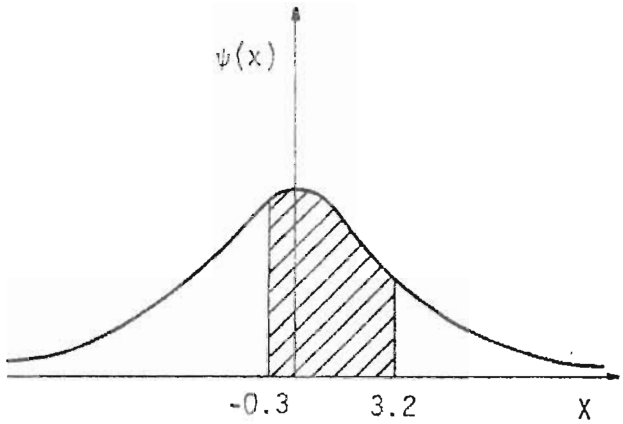


FIGURA 5.6

luego

$$P(-\,0.3 < X < 3.2) = \Phi(3.2) - \Phi(-\,0.3)$$

ya que $\Phi(-\,0.3) = 1 - \Phi(0.3) = 0.3821$

se tiene

$$\Phi(3.2) - \Phi(-\,0.3) = 0.9993 - 0.3821$$

así

$$P(-\,0.3 < X < 3.2) = 0.6172$$

Ejemplo 5 :

Sea X una variable aleatoria normal estandar. Encuentra $P(X > 0.3)$.

Solución :

El área sombreada es la probabilidad deseada

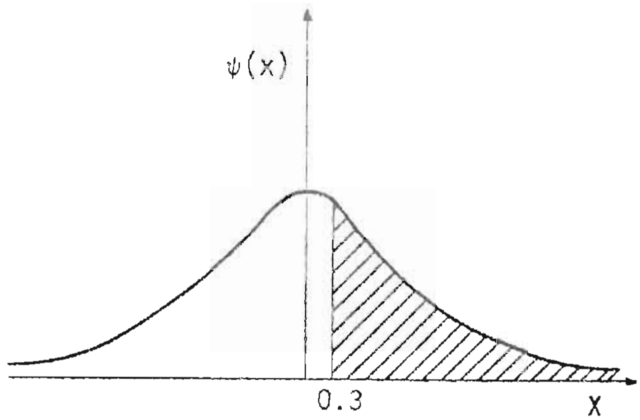


FIGURA 5.7

luego

$$P(X > 0.3) = 1 - P(X < 0.3)$$

$$= 1 - \Phi(0.3)$$

$$= 1 - 0.6179$$

$$= 0.3821$$

Ejemplo 6 :

Los puntajes de un examen son medidos según escala por aproximación a una distribución normal con media $\mu = 500$ y desviación estandar $\sigma = 100$.

¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante seleccionado aleatoriamente tenga una calificación de 700 ó más?

Solución :

La distribución normal es del tipo N(500, 10000), por lo que se hace necesario transformarla a una distribución normal N(0, 1) mediante el cambio de variable

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

La probabilidad deseada es

$$P(X \geq 700) = P\left(\frac{X-500}{100} \geq \frac{700-500}{100} \right)$$

$$= P(z \geq 2)$$

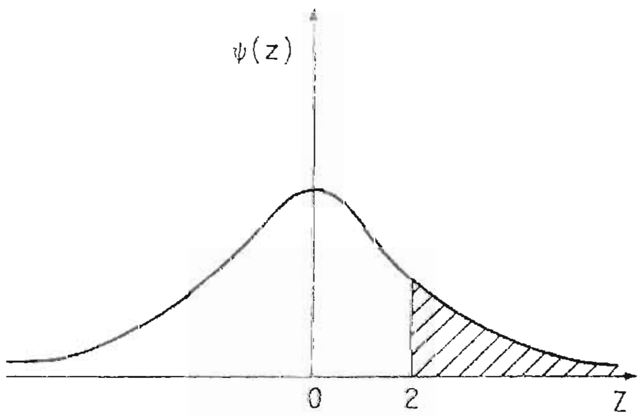


FIGURA 5.8

La probabilidad viene dada por el área sombreada que se puede calcular utilizando la función de distribución N(0, 1).

$$P(z \geq 2) = 1 - P(z < 2)$$

$$= 1 - 0.9772$$

$$= 0.0228$$

Ejemplo 7 :

Supóngase que X tiene distribución N(5, 9), deseamos encontrar un número a tal que

$$P(X < a) = 2P(X \geq a)$$

Solución :

Observemos que $\frac{X-5}{3}$ tiene distribución N(0, 1)

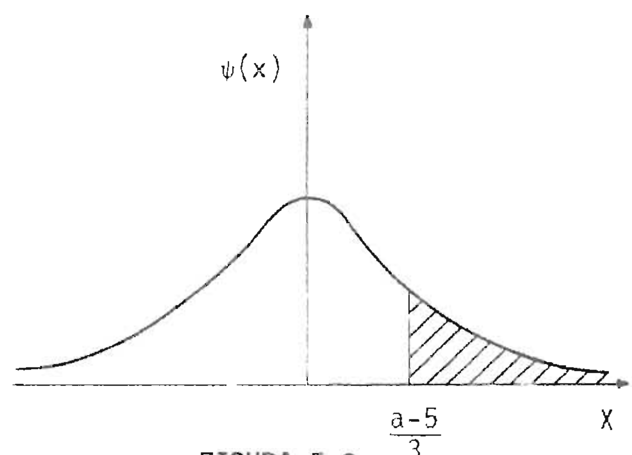


FIGURA 5.9

Por tanto

$$P(X < a) = P\left(\frac{X-5}{3} < \frac{a-5}{3}\right) = \Phi\left(\frac{a-5}{3}\right)$$

también

$$P(X \geq a) = P\left(\frac{X-5}{3} \geq \frac{a-5}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a-5}{3}\right)$$

La condición anterior puede escribirse, como

$$\Phi\left(\frac{a-5}{3}\right) = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{a-5}{3}\right)\right]$$

luego $\Phi\left(\frac{a-5}{3}\right) = \frac{2}{3}$. Por tanto (de la tabla de la distribución normal), encontramos que $\frac{a-5}{3} = 0.43$, de donde $a = 6.29$

5.2.6 APROXIMACION DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL POR LA NORMAL

Hemos visto que suponiendo $np = \lambda$ constante la distribución Binomial tiende a la de Poisson.

Consideremos ahora otra aproximación importante para tales probabilidades que se aplica cada vez que n es suficientemente grande.

Considerando que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Esta probabilidad depende de n de un modo muy complicado y no hay una indicación evidente de lo que sucede a la expresión anterior si n es grande.

A fin de investigar esta probabilidad

CUADRO 5.1

n	n!	$\sqrt{2\pi}\ e^{-n} n^{n+(\frac{1}{2})}$	Diferencia	$\frac{\text{Diferencia}}{n!}$
1	1	0.922	0.078	0.08
2	2	1.919	0.081	0.04
5	120	118.019	1.981	0.02
10	$(3.6288)10^6$	$(3.5986)10^6$	$(0.0302)10^6$	0.008
100	$(9.3326)10^{157}$	$(9.3249)10^{157}$	$(0.0077)10^{157}$	0.0008

necesitamos usar la fórmula de Stirling, una aproximación de n!.

Esta fórmula establece que para un n grande,

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \quad e^{-n} \, n^{n+\frac{1}{2}}$$

en el supuesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} \quad e^{-n} \, n^{n+1/2}} = 1$$

el cuadro 5.1 puede darnos una idea de la exactitud de esta aproximación.

Aunque la diferencia entre n! y su aproximación llega a ser mayor cuando $n \longrightarrow \infty$, lo importante de observar en el cuadro es que el porcentaje de error llega a ser cada vez más pequeño.

Usando la fórmula de Stirling para los diversos factoriales que aparecen en la expresión de $P(X = k)$, puede demostrarse que para un n grande,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\, n\, p\, q}} \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} \end{aligned}$$

Finalmente puede demostrarse que para n grande,

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= P\left[\frac{x - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right] \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{k-np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \end{aligned}$$

así tenemos el siguiente resultado importante conocido como la aproximación de De Moivre - Laplace para la distribución binomial.

Si X tiene una distribución binomial con parámetro n y P y si

$$z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

luego, para un n grande, z tiene una distribución N(0, 1), aproximadamente en el supuesto que

$$\lim_{n \to \infty} P(z \leq z) = \Phi(z)$$

Por tanto se origina una aproximación entre la suma de las áreas de los rectángulos originados por la función de probabilidad Binomial y el área de la función de densidad normal correspondiente.

Asi la aplicación de la Curva Normal como un método aproximado para el cálculo de probabilidades en relación con una variable Binomial, requiere únicamente el conocimiento de los parámetros de la curva normal.

El cómputo de las probabilidades se reduce a una simple estandarización y luego al uso de la tabla de la función de distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$; sin embargo es necesario introducir una corrección por continuidad que se origina en el hecho de que la Binomial es una variable aleatoria discreta y la Normal es una variable aleatoria continua.

Esta corrección consiste en sumar y restar media unidad de valor Binomial que interesa antes de proceder a la estandarización.

La expresión para z debe ser entonces :

$$z = \frac{X \pm \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}$$

La necesidad de la corrección por continuidad puede apreciarse mejor si se analiza el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8 :

Se quiere calcular, con la aproximación

$$b(7;\ 10,\ 0.5) = P(X = 7)$$

para el ejemplo considerado en la binomial tiene sentido hablar de $P(X = 7)$, pero no en la curva continua, ya que no existe área bajo la curva en un punto.

Es necesario entonces considerar $X = 7$ como el punto medio de un intervalo de variación unitaria y tomar como estimación de $P(X = 7)$ en la binomial, el área comprendida entre 6.5 y 7.5 bajo la curva normal.

Solución :

El cálculo de la probabilidad sería entonces

$$b(7;\ 10\ ,\ 0.5) \approx P(6.5 \leq X \leq 7.5) \quad \text{en la } N(\mu,\sigma^2),$$

$$\mu = np = 5$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = 1.58$$

$$z_1 = \frac{6.5 - 5}{1.58} = 0.949$$

$$z_2 = \frac{7.5 - 5}{1.58} = 1.58$$

luego

$$\begin{aligned} P(6.5 \leq X \leq 7.5) &= P(0.95 \leq z \leq 1.58) \\ &= \Phi(1.58) - \Phi(0.95) \\ &= 0.9429 - 0.8289 \\ &= 0.1140 \end{aligned}$$

Es interesante notar que el valor exacto para $P(X = 7)$ es 0.1172.

5.3 DISTRIBUCION GAMMA

Esta distribución desempeña un importante papel en estadística, la cual pasamos a definir a continuación.

Definición 4 :

Se dice que una variable aleatoria X se distribuye según una distribución gamma si su función de densidad - es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha!\,\beta^{\alpha+1}}\; x^{\alpha}\, e^{-\frac{x}{\beta}} \;, & 0 < x < \infty \\ 0 \;, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es una familia de distribuciones con dos parámetros, α y β; β ha de ser positivo, y α, mayor que - 1. Para $\beta = 1$ y diversos valores de α (ver figura 5.10).

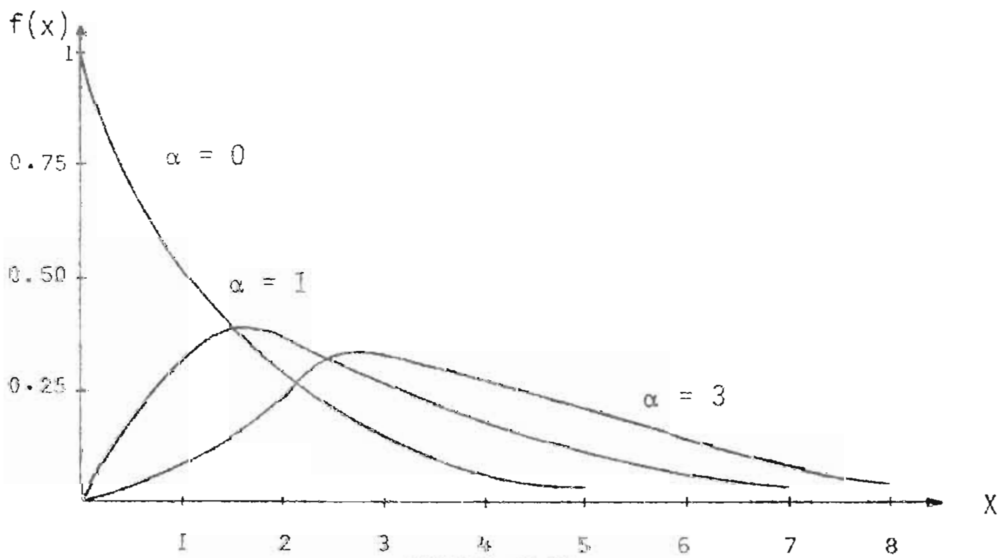


FIGURA 5.10

Mostremos que la función representa una densidad, es decir calcularemos la integral

$$A = \int_0^\infty \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} \; x^\alpha \, e^{-\frac{x}{\beta}} \, dx$$

que se convierte en

$$A = A(\alpha) = \int_0^\infty y^\alpha \, e^{-y} \, dy$$

sustituyendo $\frac{x}{\beta}$ por y; se deduce, por tanto, que A es función sólo de α . Si $\alpha > 0$, podemos integrar por partes, y se obtiene:

$$A(\alpha) = - y^\alpha \, e^{-y} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \alpha \, y^{\alpha-1} \, e^{-y} \, dy$$

$$= \alpha \int_0^\infty y^{\alpha-1} \, e^{-y} \, dy$$

de donde se deduce que

$$A(\alpha) = \alpha \; A(\alpha - 1)$$

Si α es un número natural, aplicando la fórmula de recurrencia sucesivamente, se obtiene

$$A(\alpha) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \; ..... \; (2)(1) \; A(0)$$

y puesto que

$$A(0) = \int_0^\infty e^{-y} \, dy = 1$$

resulta $\qquad A(\alpha) = \alpha!$

Cuando α es entero. La función $A(\alpha)$ se representa a menudo por - $\Gamma(\alpha + 1)$.

La función de densidad gamma tiene como función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\alpha!\beta^{\alpha+1}} \ t^\alpha \ e^{\frac{t}{\beta}} dt \ , & x > 0 \end{cases}$$

Si α es un número natural, se tiene

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 1 - \left[1 + \frac{x}{\beta} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{\beta}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{\beta}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right] e^{-\frac{x}{\beta}} \ , & x > 0 \end{cases}$$

5.3.1 FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS DE UNA DISTRIBUCION GAMMA

La función generatriz de momentos de esta distribución es

$$\psi(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\alpha!\beta^{\alpha+1}} \ x^\alpha \ e^{\frac{x}{\beta}} \ dx$$

$$= \int_0^\infty e^{\beta ty} \ \frac{1}{\alpha!} \ y^\alpha \ e^{-y} \ dy$$

después de sustituir $\frac{x}{\beta}$ por y.

Así

$$\psi(t) = \frac{1}{\alpha!} \int_0^\infty y^\alpha \ e^{-y(1-\beta t)} \ dy$$

$$= \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+1}} \int_0^\infty \frac{(1-\beta t)^{\alpha+1}}{\alpha!} \ y^\alpha \ e^{-y(1-\beta t)} \ dy$$

$$= \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+1}}$$

suponiendo que $t < \frac{1}{\beta}$, ya que la última integral representa el área limitada por la distribución gamma de parámetros α y $\beta_1 = \frac{1}{(1-\beta t)}$ y - es, por tanto igual a la unidad.

Derivando $\psi(t)$ dos veces y evaluando en $t = 0$ los resultados, tenemos

$$\mu = \beta(\alpha + 1)$$

$$E(X^2) = \beta^2(\alpha + 1)(\alpha + 2)$$

$$\sigma^2(X) = \beta^2(\alpha + 1)$$

El caso particular de la distribución gamma cuando $\alpha = \frac{v}{2} - 1$ y $\beta = 2$ suele denominarse ji cuadrado (x^2) con v grados de libertad y se usa para la comparación de Distribuciones Experimentales y Teóricas (esperadas). Su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\left(\frac{v}{2} - 1\right)!} \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}} x^{\left(\frac{v}{2}\right)-1} e^{-\frac{x}{2}} , x > 0$$

La aplicación de ji cuadrado tiene su base en el teorema de Pearson, que dice que la distribución del estadístico

$$u = \sum \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

para n grande, tiende a una distribución x^2 con v - 1 grados de libertad, cuando la hipótesis planteada es cierta.

n_i : valores observados , nP_i : valores teóricos)

Es decir, aunque no sea exacto (pues sólo lo es para $n \to \infty$) se acostumbra poner $u = x^2$ y entonces las tablas de x^2, dados v y α, permite calcular x_o^2 tal que

$$P(x^2 > x_o^2) = \alpha \quad \text{(ver TABLA VI)}$$

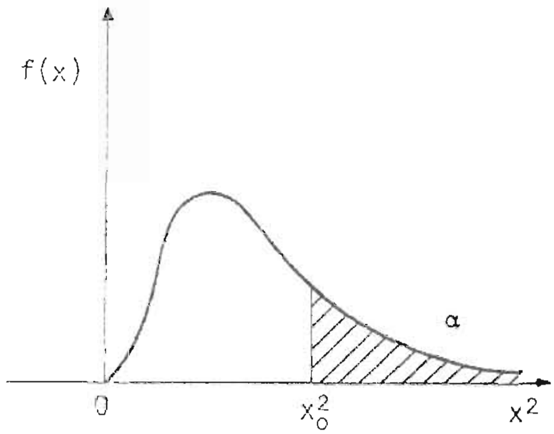


FIGURA 5-11

Entonces, fijado el nivel de significación α si el valor u es superior al x_o^2 obtenido, rechazamos la hipótesis.

Ejemplo 9 :

Se lanza un dado 6000 veces y resulta que las caras 1, 2, 3, 4, 5, 6 salen, respectivamente, los siguientes números dos veces.

800 , 1080 , 960 , 1086 , 1304 , 770

¿Es el dado perfecto?

Es decir, son estos resultados compatibles con la hipóte-

$P_i = \frac{1}{6}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ se desea un nivel de significancia igual a 0.001.

Solución :

Aplicando el método de x^2 al caso $P = \frac{1}{6}$, resulta

$$u = \frac{1}{1000}(200^2 + 80^2 + 40^2 + 86^2 + 304^2 + 230^2)$$

$$= 200,69$$

El número de grados de libertad es 5 según las tablas de x^2, el valor 200 queda sin duda en la región crítica. Es decir que se concluye que, o bien el dado es defectuoso, o el experimento ha sido mal realizado. Ya que

$$P(x^2 > 20.52) = 0.001$$

5.4 DISTRIBUCION EXPONENCIAL

Esta distribución es un caso particular de la distribución gamma, cuando $\alpha = 0$.

Definición 5 :

Decimos que una variable aleatoria continua X que toma todos los valores no negativos tiene una distribución exponencial con parámetro β positivo si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & , x > 0 \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se puede verificar, mediante una integración inmediata que

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = 1$$

La función de distribución de la variable aleatoria continua exponencial viene dada por

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{x}{\beta}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 10 :

El tiempo de vida en horas de un tubo de radio, sigue una distribución exponencial con parámetro $\beta = \frac{1}{1000}$. Una - compañía que produce estos tubos espera garantizarlos un cierto tiempo de vida. ¿Por cuántas horas debería de ga - rantizarse la función del tubo, para alcanzar una probabilidad de 0.95 de que funcionará al menos el número de horas garantizadas?

Solución :

$$F(x_o) = P(X \leq x_o) = \int_0^{x_o} 1000\, e^{-1000t}\, dt$$

$$= 1 - e^{-1000x_o} = 0.95$$

De donde

$$e^{-1000x_o} = 0.05$$

$$x_o = \frac{\ln 0.05}{1000}$$

$$x_o = 0.003 \text{ horas}$$

5.4.1 ESPERANZA MATEMATICA Y VARIANCIA DE UNA VARIABLE EXPONENCIAL

La esperanza matemática de X se obtiene como sigue

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty \frac{1}{\beta} \, x \, e^{-\frac{x}{\beta}} \, dx$$

haciendo

$$y = \frac{x}{\beta} \implies dy = \frac{dx}{\beta}$$

obtenemos

$$\mu = \beta \int_0^\infty y \, e^{-y} \, dy$$

integrando por partes

$$\mu = \beta \left[- y \, e^{-y} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty - e^{-y} \, dy \right]$$

$$E(X) = \beta$$

La variancia de X se obtiene mediante la relación

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty \frac{1}{\beta} \, x^2 e^{-\frac{x}{\beta}} \, dx$$

haciendo

$$y = \frac{x}{\beta} \implies dy = \frac{1}{\beta} \, dx$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty y^2 \, \beta^2 e^{-y} \, dy$$

$$= \beta^2 \int_0^\infty y^2 e^{-y} \, dy$$

integrando por partes

$$E(X^2) = \beta^2 \left[e^{-y} (y^2 - 2y - 2) \Big|_0^{\infty} \right]$$

$$= 2\beta^2$$

$$\sigma^2(X) = 2\beta^2 - \beta^2 = \beta^2$$

5.4.2 FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS DE UNA DISTRIBUCION EXPONENCIAL

Considerando que la distribución Exponencial es un caso particular de la distribución gamma, cuando $\alpha = 0$ y la función generatriz de momentos de la última es

$$\psi(t) = \frac{1}{(1 - \beta t)^{\alpha+1}}$$

podemos concluir que la función generatriz de momentos de una variable aleatoria exponencial es

$$\psi(t) = (1 - \beta t)^{-1}$$

Derivando y evaluando los resultados en $t = 0$ se tiene (otra forma de encontrar $E(X)$ y $\sigma^2(X)$, es decir usando la función generatriz de momentos),

$$\psi'(0) = E(X) = \beta$$

$$\psi''(0) = E(X^2) = 2\beta^2$$

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \beta^2$$

5.5 DISTRIBUCION BETA

Definición 6 :

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución beta si su función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha + \alpha + 1)}{\alpha! \;\; \beta!} x^{\alpha}(1-x)^{\beta} \;, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta función constituye una familia de distribuciones con dos parámetros α y β ambos mayores que - 1. Se reduce a la distribución uniforme sobre el intervalo unitario cuando $\alpha = \beta = 0$

Verificaremos la segunda condición que cumple toda función de densidad, calculemos la integral

$$A(\alpha \;, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha}(1 - x)^{\beta} \, dx$$

Queda claro que A es función de α y β ; vamos a probar que es igual al recíproco del multiplicador constante que aparece en la función de densidad.

Tomando en cuenta la distribución gamma, podemos escribir

$$\alpha! \; \beta! = \left(\int_0^{\infty} x^{\alpha} \, e^{-x} \, dx \right) \left(\int_0^{\infty} y^{\beta} \, e^{-y} \, dy \right)$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{\alpha} \, y^{\beta} \, e^{-(x+y)} \, dx \, dy$$

llevando a cabo el cambio de variable de x por u, mediante la sustitución

$$u = \frac{x}{x + y}$$

o bien

$$x = \frac{uy}{1 - u} \qquad dx = \frac{ydu}{(1 - u)^2}$$

podemos observar que u tiene el recorrido de 0 a 1, la integral es ahora

$$\alpha!\ \beta! = \int_0^\infty \int_0^1 \left(\frac{uy}{1-u}\right)^\alpha y^\beta e^{-\frac{y}{(1-u)}} \frac{y}{(1-u)^2} du\, dy$$

En esta integral cambiamos y por v, mediante la sustitución

$$y = (1 - u)v \qquad dy = (1 - u)dv$$

obteniendo

$$\alpha!\ \beta! = \int_0^\infty \int_0^1 (uv)^\alpha (1-u)^\beta v^\beta v\, e^{-v} du\, dv$$

$$= \int_0^\infty \int_0^1 u^\alpha (1-u)^\beta v^{\alpha+\beta+1} e^{-v} du\, dv$$

$$= \left(\int_0^\infty v^{\alpha+\beta+1} e^{-v} dv \right) \left(\int_0^1 u^\alpha (1-u)^\beta du \right)$$

$$= (\alpha + \beta + 1)! \int_0^1 u^\alpha (1-u)^\beta du$$

de donde

$$A(\alpha , \beta) = \int_0^1 u^\alpha (1-u)^\beta du = \frac{\alpha!\ \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!}$$

Con lo que se demuestra que el área limitada por f(x) es igual a la u nidad. $A(\alpha - 1, \beta - 1)$ recibe el nombre de función beta de α y β , y suele denotarse por $B(\alpha , \beta)$.

La función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\ \beta!} t^{\alpha}(1-t)^{\beta}dt, & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 11 :

Para $\ell > 0$, $m > 0$, la función Beta se define así

$$B(\ell , m) = \int_0^1 u^{\ell-1} (1-u)^{m-1} du$$

verifique que $B(\ell , m) = B(m, \ell)$

Solución :

Haciendo un cambio de variable podemos llegar al resultado deseado.

Sea $v = 1 - u$ tenemos $dv = - du$ y los límites del integral de 1 a 0, luego

$$B(\ell , m) = \int_0^1 (1-v)^{\ell-1} v^{m-1} dv$$

$$= B(m, \ell)$$

5.5.1 ESPERANZA MATEMATICA Y VARIANCIA DE LA DISTRIBUCION BETA

Por definición

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$$

en nuestro caso la esperanza se define por

$$\mu = E(X) = \frac{(\alpha + \beta + 1)!}{\alpha!\ \beta!} \int_0^1 x^{\alpha+1}\ (1-x)^{\beta}dx$$

$$= \frac{(\alpha + \beta + 1)!(\alpha + 1)!}{(\alpha + \beta + 2)!\ \ \alpha!} \int_0^1 \frac{(\alpha + \beta + 2)!}{(\alpha+1)!\ \beta!}\ x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta}dx$$

$$= \frac{(\alpha + \beta + 1)!\ (\alpha + 1)!}{(\alpha + \beta + 2)!\ \ \alpha!} = \frac{\alpha + 1}{\alpha+\beta+2}$$

ya que la integral debe ser igual a la unidad.

Ya que la variancia se define como

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

determinaremos $E(X^2)$

$$E(X^2) = \frac{(\alpha + \beta + 1)!}{\alpha\ !\ \ \beta!} \int_0^1 x^{\alpha+2}\ (1-x)^{\beta}dx$$

$$= \frac{(\alpha + \beta + 1)!(\alpha+2)!}{(\alpha + \beta + 3)!\ \ \alpha!} \int_0^1 \frac{(\alpha + \beta + 3)!}{(\alpha+2)!\ \beta!}\ x^{\alpha+2}(1-x)^{\beta}dx$$

$$= \frac{(\alpha + \beta + 1)!(\alpha + 2)!}{(\alpha + \beta + 3)!\ \ \alpha!} = \frac{(\alpha + 2)(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 2)}$$

ya que la integral es igual a la unidad.

Tenemos así que

$$\sigma^2(X) = \frac{(\alpha+2)\ (\alpha+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)} - \left[\frac{\alpha+1}{(\alpha+\beta+2)}\right]^2$$

$$= \frac{(\alpha+\beta+2)(\alpha+2)(\alpha+1) - (\alpha+\beta+3)(\alpha+1)^2}{(\alpha+\beta+3)\quad(\alpha+\beta+2)^2}$$

$$= \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 2)^2}$$

UNIDAD VI

VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES

6.1 VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES

En nuestro estudio hemos considerado el estudio de una variable aleatoria. En muchos casos el resultado de un experimento aleatorio puede clasificarse de dos o más formas. Por ejemplo podríamos estudiar la altura y el peso de una persona determinada, tendríamos el resultado (x, y).

Definición 1 :

Sea E un experimento y S un espacio muestral asociado con E.

Sea X e Y dos funciones que asignan un número real a cada uno de los resultados $s \in S$ (figura 6.1). Llamamos a (X, Y) variable aleatoria bidimensional.

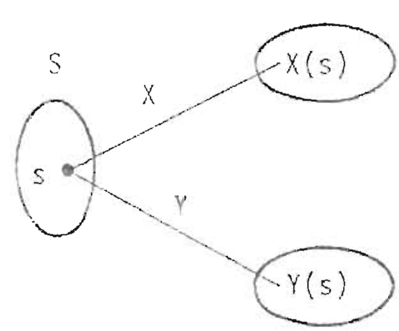


FIGURA 6.1

El rango de (X, Y) será un subconjunto del plano Euclidiano. Cada uno de los resultados (x, y) se puede representar como un punto en el plano.

Distinguiremos dos tipos de variables aleatorias como en el caso unidimensional: variables aleatorias discretas y continuas.

Definición 2 :

(X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta si los valores posibles de (X, Y) son finitos o infinitos numerables.

Definición 3 :

(X, Y) es una variable aleatoria bidimensional continua si (X, Y) puede tomar todos los valores en un conjunto no numerable del plano euclidiano.

A continuación pasamos a definir la función de probabilidad y de densidad, las cuales son funciones de dos variables, para el caso discreta y continua respectivamente.

Definición 4 :

Sea (X, Y) una variable discreta bidimensional. Con cada resultado posible (x, y) asociamos un número f(x,y) que representa $P(X = x, Y = y)$ y que satisface las condiciones siguientes :

i) $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y)

ii) $\sum_{x} \sum_{y} f(x, y) = 1$

Esta función puede representarse sobre un plano. Como en la figura 6.2; las probabilidades vienen representadas por segmentos verticales en los puntos (x, y) del plano horizontal en que están definidas.

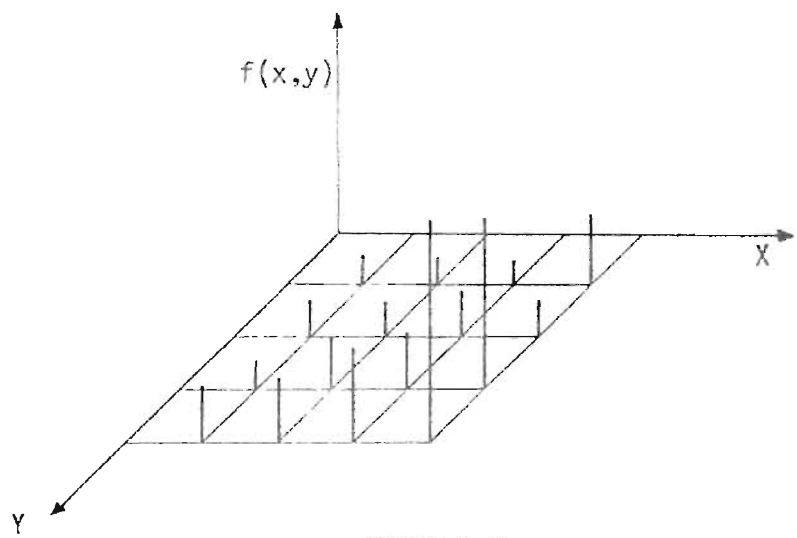


FIGURA 6.2

Definición 5 :

Sea (X, Y) una variable continua que toma todos los valores en una región R del plano euclidiano. La función de densidad de probabilidades conjuntas f es una función que satisface las siguientes condiciones :

i) $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$

ii) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

La condición (ii) indica que el volumen total bajo la superficie dada por la ecuación $f(x, y)$ es igual a 1.

Si B está en el rango de (x, y) tenemos

$$P(B) = \sum_B \sum f(x, y)$$

Si (X, Y) es discreta, la suma toma para todos (x, y) para los cuales $(x, y) \in B$.

Y

$$P(B) = \int_B\int f(x, y)dx\,dy \quad \text{si} \quad (X, Y) \quad \text{es continua}$$

Ejemplo 1 :

Dos lineas de producción manufacturan cierto tipo de artículos. Supóngase que la capacidad es 3 artículos para la línea I y 3 artículos para la línea II. Supóngase que el número verdadero de artículos producidos por cada una de las líneas de producción es una variable aleatoria.

Sea (X, Y) la representación de la variable aleatoria bidimensional que da el número de artículos producidos por la línea I y por la línea II respectivamente. La siguiente tabla da la distribución de probabilidades conjunta de (X, Y).

Y \ X	1	2	3
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$

Si B está definida como

B = {más artículos producos por la línea I que por la línea II}.

encontramos que

$$P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}$$

Ejemplo 2 :

Supongamos que la variable aleatoria continua bidimensional (X, Y) tiene una función de densidad de probabilidad conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & , 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{para cualquier otro punto} \end{cases}$$

Para verificar que $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx\, dy = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx\, dy = \int_{0}^{2}\int_{0}^{1}\left(x^2 + \frac{xy}{3}\right)dx\, dy$$

$$= \int_{0}^{2} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2y}{6}\Bigg|_{0}^{1} dy$$

$$= \int_{0}^{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{6}\right)dy$$

$$= \frac{1}{3}y + \frac{y^2}{12}\Bigg|_{0}^{2}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Sea $B = \{X + Y \geq 1\}$. Calcularemos $P(B)$ al evaluar $1 - P(\overline{B})$ en donde

$$\overline{B} = \{X + Y < 1\} \quad \text{(ver figura 6.3)}$$

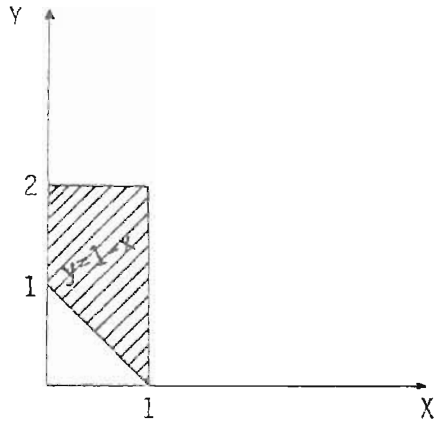


FIGURA 6.3

Por lo tanto

$$P(B) = 1 - \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dy\, dx$$

$$= 1 - \int_0^1 \left[x^2(1 - x) + \frac{x(1 - x)^2}{6} \right] dx$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{2}{18} + \frac{1}{24} \right]$$

$$= 1 - \frac{7}{72} = \frac{65}{72}$$

Definición 6 :

Sea (X, Y) una variable bidimensional. La función de distribución F de la variable aleatoria bidimensional

(X, Y) está definida por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Propiedades de F

i) F es no decreciente

ii) $f(-\infty, -\infty) = 0$, $F(\infty , \infty) = 1$

iii) Si F es una función de distribución de una variable bidimensional con función de densidad de probabilidad conjunta f, entonces

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \ \partial y} = f(x, y)$$ en el supuesto que las derivadas existen.

6.2 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDADES MARGINALES Y CONDICIONALES

Con cada variable aleatoria bidimensional (X, Y) asociamos dos variables aleatorias unidimensionales, llamadas X e Y respectivamente.- Es decir, podemos interesarnos por la distribución de probabilidades de X o por la distribución de probabilidades de Y.

En el caso discreto tenemos

$$f_1(x) = P(X = x) = \sum_{y} f(x, y)$$

distribución marginal de probabilidades de X.

Análogamente definimos

$$f_2(y) = P(Y = y) = \sum_{x} f(x, y)$$

como la distribución marginal de probabilidades de Y.

Ejemplo 3 :

En la siguiente tabla las probabilidad que aparecen en -- los márgenes de las filas y columnas representan la dis - tribución de probabilidades de Y y X, respectivamente.

Y \ X	0	1	2	$f_2(y)$
0	0.1	0.2	0.2	0.5
1	0.04	0.08	0.08	0.2
2	0.06	0.12	0.12	0.3
$f_1(x)$	0.2	0.4	0.4	1.0

así

$$P(Y = 1) = 0.2 \ , \ P(X = 2) = 0.4, \text{ etc.}$$

En el caso continuo procedemos como sigue: sea f la función densidad de probabilidades conjunta de la variable aleatoria continua bidimensional (X, Y).

Definimos f_1 y f_2 las funciones densidad de probabilidades marginales de X e Y, respectivamente, como sigue :

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \quad \text{(función densidad marginal de X)}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx \quad \text{(función densidad marginal de Y)}$$

Estas funciones de densidad de probabilidades corresponden a las - funciones de densidad de probabilidades básicas de las variables alea torias unidimensionales X e Y, respectivamente.

Asi,

$$P(a \leq X \leq b) = P\left[a \leq X \leq b, -\infty < Y < \infty\right]$$

$$= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy\,dx$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx$$

Ejemplo 4 :

Supongamos que la función densidad de probabilidad conjunta de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}x(x - y), & 0 < x < 2,\ 0 < y < 1 \\ 0 & , \text{ en otra parte} \end{cases}$$

obtener la función de densidad marginal de X y de Y.

Solución :

La función de densidad marginal de X está dada por

$$f_1(x) = \int_0^1 \frac{1}{3}x(x - y)dy$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2y - \frac{xy^2}{2} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{x}{2} \right)$$

luego

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x\left(x - \frac{1}{2} \right) & , 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de densidad marginal de Y está dada por

$$f_2(y) = \int_0^2 \frac{1}{3}x(x - y)dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2y}{2} \right)\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{8}{9} - \frac{2}{3}y$$

luego

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3} - y \right) & , 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición 7 :

Sea (X, Y) una variable bidimensional continua con función densidad de probabilidad conjunta f. Sean f_1 y f_2 las funciones densidad de probabilidades marginales de X e Y respectivamente.

La función densidad de probabilidad condicional de X para Y = y dada, está definida por

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \quad , \quad f_2(y) > 0$$

La función densidad de probabilidad condicional de Y para una X = x dada se define

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \quad , \quad f_1(x) > 0$$

La funciones densidad de probabilidades condicionales anteriores - satisfacen todas las exigencias de una función de densidad de probabilidad unidimensional. Así, para y fijo, tenemos

i) $f(x|y) \geq 0$

ii) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{f_2(y)} dx = \frac{1}{f_2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

$$= \frac{f_2(y)}{f_2(y)} = 1$$

análogamente se puede hacer para $f(y|x)$.

Para el caso discreto se puede definir, similarmente, la función de probabilidad condicional haciendo las consideraciones correspondientes.

Ejemplo 5 :

Refiriéndonos al ejemplo 4, tenemos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} x(x - y), & 0 < x < 2,\ 0 < y < 1 \\ 0 & , \text{ en otra parte} \end{cases}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{3} x \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$f_2(y) = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3} - y \right)$$

Por tanto :

$$f(x|y) = \frac{\frac{1}{3} x(x - y)}{\frac{2}{3}\left(\frac{4}{3} - y \right)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - xy}{\frac{4}{3} - y}\right), \quad 0 < x < 2 \ , \ 0 < y < 1$$

$$f(y|x) = \frac{\frac{1}{3}\,x(x - y)}{\frac{1}{3}\,x\left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{x - y}{x - \frac{1}{2}}, \quad 0 < x < 2 \ , \ 0 < y < 1$$

6.3 VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES

Las variables aleatorias independientes serán definidas tal como definimos el concepto de independencia entre dos sucesos A y B. Intuitivamente es que X e Y son variables aleatorias independientes si el resultado de X, digamos, de ninguna manera influye en el resultado de Y.

Definición 8 :

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta. Decimos que X e Y son variables aleatorias independientes si y sólo si $f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$ para todo (x, y). Esto es $P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$ para todo (x, y).

Definición 9 :

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua. Decimos que X e Y son variables aleatorias independientes si y sólo si $f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$ para todo (x, y), en donde f es la función densidad de probabilidad conjunta, y f_1 , f_2 son las funciones densidad de probabilidades marginales de X e Y respectivamente.

Ejemplo 6 :

Supongamos que $f(x, y) = 5xy$, $0 \leq x \leq y \leq 1$. Determinar si X e Y son variables aleatorias independientes.

Solución :

Aunque f ya está escrita en forma factorizada, X e Y no son independientes, puesto que el dominio de definición

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

es tal que para una x dada, y puede tomar sólo valores - mayores que la x dada y menores que 1. Por tanto X e Y no son independientes.

UNIDAD VII

VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES ; VALORES ESPERADOS

7.1 DEFINICIONES Y EJEMPLOS

Los conceptos discutidos para una variable aleatoria también se mantienen para el caso bidimensional.

Definición 1 :

La esperanza matemática o el valor esperado o la media $E[H(X, Y)]$ de una función arbitraria $H(X, Y)$ de una variable aleatoria bidimensional discreta (X, Y) es como sigue :

$$E[H(X, Y)] = \sum_{x} \sum_{y} H(x, y)\, f(x, y)$$

en donde $f(x, y)$ es la función de probabilidad conjunta de (X, Y) y la suma se toma sobre todos los valores - (x, y) para los que (X, Y) existe.

La definición correspondiente para una variable aleatoria continua es

$$E[H(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, y)\, f(x, y)\, dx\, dy$$

en donde $f(x, y)$ representa la función de densidad conjunta de la variable aleatoria bidimensional continua (X, Y).

Restringimos el estudio a variables aleatorias contínuas.

La esperanza matemática de ciertas funciones $H(X, Y)$ identifican características de mucho interés e información, de la distribución de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias.

Definición 2 :

Se llama momento de orden $k\ell$ de la variable aleatoria bidimensional continua (X, Y) con respecto al origen, a la esperanza matemática de $X^k Y^\ell$, o sea,

$$\mu_{k\ell} = E(X^k Y^\ell) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^\ell f(x, y)dx\, dy$$

Ejemplo 1 :

Determinar los resultados siguientes

i) $\mu_{00} = 1$

ii) $\mu_{10} = E(X)$, la media de X

iii) $\mu_{01} = E(Y)$, la media de Y

Solución :

i) $$\mu_{00} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx\, dy = 1$$

Por propiedad de la función de densidad conjunta $f(x, y)$.

ii) $$\mu_{10} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x, y)dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[x\, dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_1(x)dx = E(X)$$

$$\mu_{01} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \, f(x, y)dx \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[y \, dy \int_{\infty}^{\infty} f(x, y)dx \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y \, f_2(y)dy = E(Y)$$

Debemos señalar que, así como determinamos el comportamiento probabilístico de cualquiera de las dos variables aleatorias a partir de la distribución de probabilidad conjunta, ciertos parámetros de las distribuciones de probabilidad de cualquiera de las dos variables aleatorias X, Y son casos particulares de esperanza de dos dimensiones, obtenidas integrando la variable que se quiere eliminar.

Definición 3 :

Los momentos de orden $k\ell$ de la variable aleatoria (X, Y) con respecto a los momentos μ_{10} y μ_{01} se definen por la ecuación

$$\mu'_{k\ell} = E\left[X-\mu_{10}\right]^k \left[Y-\mu_{01}\right]^\ell = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x-\mu_{10}\right]^k \left[y-\mu_{01}\right]^\ell f(x,y)dx \, dy$$

Ejemplo 2 :

Determinar los resultados

i) $\mu'_{11} = E\left[X - E(X)\right] \left[Y - E(Y)\right]$, la covarianza de X e Y

ii) $\mu'_{20} = \sigma^2(X)$, la varianza de X

iii) $\mu'_{02} = \sigma^2(Y)$, la varianza de Y

Solución :

$$\text{i)}\quad \mu'_{11} = E[X - \mu_{10}]\,[Y - \mu_{01}]$$
$$= E[X - E(X)]\,[Y - E(Y)]$$
$$\text{ii)}\quad \mu'_{20} = E[X - \mu_{10}]^2\,[Y - \mu_{01}]^0$$
$$= E[X - E(X)]^2$$
$$= \sigma^2(X)$$
$$\text{iii)}\quad \mu'_{02} = E[X - \mu_{01}]^0\,[Y - \mu_{01}]^2$$
$$= E[Y - E(Y)]^2$$
$$= \sigma^2(Y)$$

Definición 4 :

Se llama función generatriz de momentos de la varia - ble aleatoria (X, Y), a la esperanza matemática de la función $e^{t_1X+t_2Y}$, o sea la función de t_1 y t_2 defini da por

$$\psi(t_1, t_2) = E(e^{t_1X+t_2Y})$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x+t_2y}\, f(x, y)dx\,dy$$

Si desarrollamos $e^{t_1X+t_2Y}$ en una serie de Taylor, su esperanza re vela todos los momentos de (X, Y) con respecto al origen. Si derivamos parcialmente esta esperanza, como una alternativa para ver los momentos, encontramos que

$$\left. \frac{\partial^{k+\ell} \psi(t_1, t_2)}{\partial t_1^{k} \, \partial t_2^{\ell}} \right|_{t_1 = t_2 = 0} = \mu_{k\ell}$$

el momento de orden $k\ell$ de (X, Y) con respecto al origen.

Ejemplo 3 :

Verificar que $E(e^{t_1X+t_2Y})$ genera todos los momentos de (X, Y) con respecto al origen.

Solución :

$\psi(t_1, t_2) = E(e^{t_1X+t_2Y})$

Si sustituimos $e^{t_1X+t_2Y}$ por su desarrollo en serie, resulta el desarrollo en serie de $\psi(t_1, t_2)$ en función de los momentos de f(x, y).

$$e^{t_1X+t_2Y} = 1 + \frac{t_1X + t_2Y}{1!} + \frac{(t_1X + t_2Y)^2}{2!} + \ldots.$$

$$E(e^{t_1X+t_2Y}) = 1 + \frac{t_1}{1} E(X) + \frac{t_2}{1} E(Y) + \frac{t_1^2}{2} E(X^2) + \frac{t^2}{2} E(Y^2)+$$

$$+ t_1t_2E(XY) + \ldots..$$

Es evidente que al derivar parcialmente una vez respecto a t_1 la esperanza y haciendo igual a cero todas las t,

$\mu_{10} = E(X)$

7.2 VALORES ESPERADOS DE CIERTAS FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS

TEOREMA 7.1

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con una - distribución de probabilidades conjunta. Sean

$Z = H_1(X, Y)$ y $U = H_2(X, Y)$

Entonces

$$E(Z + U) = E(Z) + E(U)$$

Demostración :

$$E(Z+U) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [H_1(x,y) + H_2(x,y)] \; f(x,y)dx \; dy$$

en donde f es la función de densidad de probabilidad - conjunta de (X, Y)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(x,y) \; f(x,y)dx \; dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_2(x,y) \; f(x,y)dx \; dy$$

$$= E(Z) + E(U)$$

TEOREMA 7.2

Sean X e Y dos variables aleatorias cualquiera.

Entonces $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Demostración:

Este se deduce de inmediato del Teorema 7.1 al hacer $H_1(X, Y) = X$, $H_2(X, Y) = Y$

TEOREMA 7.3

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional y supongamos que X e Y son independientes.

Entonces $E(XY) = E(X) \; E(Y)$.

Demostración:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \; f(x, y)dx \; dy$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} x\ y\ f_1(x)\ f_2(y) dx\ dy$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} x\ f_1(x) dx \int_{\infty}^{\infty} y\ f_2(y) dy$$

$$= E(X)\ E(Y)$$

Definición 5 :

Se llama covarianza o covariancia de dos variables aleatorias X e Y a la expresión

$$\mathrm{Cov}\ [X,\ Y] = E\ \{[X - E(X)]\ [Y - E(Y)]\}$$

Otra forma de la covarianza, que se obtiene desarrollando

$$E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E\ [XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)]$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y), \quad \text{es}$$

$$\mathrm{Cov}(X,\ Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

De aquí se deduce que, en el caso de variables aleatorias dependientes, el resultado del Teorema 7.3 debe ser sustituido por

$$E(X\ Y) = E(X)E(Y) + \mathrm{Cov}(X,\ Y)$$

En particular, si X e Y son independientes, se verifica

$$\mathrm{Cov}\ [X,\ Y] = 0$$

TEOREMA 7.4

Para dos variables aleatorias X e Y independientes o no entonces

$$E[(X + Y) - E(X + Y)]^2 = \sigma^2(X + Y)$$

$$= \sigma^2(X)+\sigma^2(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$

Demostración :

$$E[(X+Y) - E(X+Y)]^2 = E[X + Y - E(X) - E(Y)]^2$$

$$= E[(X-E(X)) + (Y-E(Y))]^2$$

$$= E[X-E(X)]^2 + 2\,E[X-E(X)]\,[Y-E(Y)] +$$

$$+ E[Y - E(Y)]^2$$

$$= \sigma^2(X) + 2\,\mathrm{Cov}\,(X, Y) + \sigma^2(Y)$$

7.3 EL COEFICIENTE DE CORRELACION

Puesto que Cov(X, Y) en el caso en que X e Y son independientes, puede decirse que la Cov(X, Y) mide, en cierta manera, el grado de dependencia entre X e Y. Sin embargo, Cov(X, Y) tiene el inconveniente de depender de las unidades de medida. Para evitar este inconveniente se ha recurrido al siguiente concepto :

Definición 6 :

Se llama coeficiente de correlación entre dos variables aleatorias, cuyas desviaciones típicas $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ no sean nulas, al cociente

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{\mu_{11}}{+\sqrt{\mu_{20}\,\mu_{02}}}$$

Un refinamiento inmediato e importante de la Cov(X, Y) es el coefi_ ciente de correlación, una medida sin dimensión, ya que un efecto del denominador de ρ, es eliminar cualquier dependencia de la medida de a̲ sociación de las unidades en que se expresaron X, Y.

Esto, evidentemente, no lo hace la Cov(X, Y) ; cualquier cambio en las unidades de X, Y, afecta igualmente al numerador y al denominador de ρ y no tiene trascendencia.

Si X e Y son independientes, hemos visto que $\rho = 0$. Sin embargo, esta condición necesaria no es suficiente para la independencia de - las variables X e Y.

Ejemplo 4 :

Supóngase que una variable aleatoria X toma los valores -1, 0 y 1 con probabilidades $\frac{1}{3}$. Entonces X tiene media $E(X) = 0$. Sea $Y = X^2$.

Entonces

$$E(XY) = E(X^3) = (-1)^3 \cdot \frac{1}{3} + 0^3 \cdot \frac{1}{3} + 1^3 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

De esto y $E(X) = 0$ obtenemos

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 \quad , \quad \text{asi que} \quad \rho = 0$$

Por lo tanto las variables X e Y no están correlacionadas, pero no son independientes entre sí, ya que están ligadas por una relación funcional.

El ejemplo anterior nos muestra que el coeficiente de correlación no es una medida para la dependencia general, pero si veremos que es una medida de la dependencia lineal.

TEOREMA 7.5

El coeficiente de correlación es un número real ρ comprendido entre -1 y 1, tal que $\rho = \pm 1$ implica que entre X e Y existe una dependencia funcional lineal.

Demostración:

Se va a demostrar que $-1 \leq \rho \leq 1$. Para ello, siendo λ, α dos constantes, consideremos

$$E\left[\lambda(X - E(X)) + \alpha(Y - E(Y))\right]^2$$

$$= \lambda^2\sigma^2(X) + \alpha^2\sigma^2(Y) + 2\lambda\alpha \operatorname{Cov}(X, Y) \qquad (1)$$

Por ser la esperanza matemática un cuadrado, ésta expresión es siempre ≥ 0, y por lo tanto

$$\sigma^2(X)\,\sigma^2(Y) - (\operatorname{Cov}(X, Y))^2 \geq 0$$

de donde

i) $\rho^2 \leq 1$, y por tanto $-1 \leq \rho \leq 1$

ii) Si $\rho = \pm 1$, existen valores $\lambda = \lambda_0, \alpha = \alpha_0$ (no ambos nulos), para los cuales (1) se anula, o sea

$$E\left[\lambda_0(X - E(X)) + \alpha_0\,(Y - E(Y))\right]^2 = 0\ ,$$

lo que exige que sea

$$\lambda_0(X - E(X)) + \alpha_0(Y - E(Y)) = 0 \qquad (2)$$

Esta igualdad significa que, para cualquier par de valores (x, y) de las variables X e Y, se verifica

$$\lambda_0(x - E(X)) + \alpha_0(y - E(Y)) = 0$$

es decir los pares (x, y) son coordenadas de puntos pertenecientes a la recta (2). Esto implica que entre X e Y hay una correspondencia funcional lineal.

7.4 ESPERANZA CONDICIONAL

Definición :

Si (X, Y) es una variable aleatoria continua bidimensional definimos la esperanza condicional de X para Y = y dada como

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x|y)dx$$

La esperanza condicional de Y para X = x dada como

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\ f(y|x)dx$$

Podemos observar que $f(x|y)$ representa la función de densidad condicional de X para Y = y dado, $E(X|y)$ es la esperanza de X condicionada al suceso $\{Y = y\}$

Por otra parte en general $E(X|y)$ es una función de y por lo tanto es una variable aleatoria. Análogamente $E(Y|x)$ es una función de x y también es una variable aleatoria. Podemos afirmar que $E(X|y)$ es el valor de la variable aleatoria $E(X|Y)$.

El gráfico de esta función de y se conoce como la curva de regresión (del promedio) de X sobre Y. Análogamente, el gráfico de la función de x, $E(Y|x)$ se llama la curva de regresión (del Promedio) de Y sobre X. Para cada uno de los y fijos, $E(X|y)$ es el valor esperado de la variable aleatoria (unidimensional) cuya distribución de probabilidades está definida por $f(x|y)$. En general, el valor esperado dependerá de y.

Puesto que $E(Y|X)$ y $E(X|Y)$ son variables aleatorias, será preciso hablar de sus esperanzas. Por ejemplo $E[E(X|Y)]$.

Es importante establecer que la esperanza interna se toma respecto a la distribución condicional de X dado que Y es igual a y, mientras que la esperanza exterior se toma respecto a la distribución de probabilidades de Y.

TEOREMA 7

i) $E[E(X|Y)] = E(X)$

ii) $E[E(Y|X)] = E(Y)$

Demostración :

i) Por definición

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f(x|y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \; \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \; dx$$

en donde f es la función de densidad conjunta de (X, Y) y f_2 es la función de densidad marginal de Y.

Por tanto

$$E[E(X|Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|y) \; f_2(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x \; \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \; dx\right] \; f_2(y)dy$$

si todas las esperanzas existen,

$$E\left[E(X|Y)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_1(x)dx$$

$$= E(X)$$

ii) Se sigue un camino semejante para establecer

$$E\left[E(Y|X)\right] = E(Y)$$

TEOREMA 7

Supóngase que X e Y son variables aleatorias independien - tes. Entonces

$$E(X|Y) = E(X) \quad y \quad E(Y|X) = E(Y)$$

Demostración :

Por definición

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x|y)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, \frac{f(x, y)}{f_2(y)}\, dx$$

Por ser X e Y variables aleatorias independientes se tie ne que $f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$, luego

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, \frac{f_1(x)\, f_2(y)}{f_2(y)}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_1(x)dx = E(X)$$

Similarmente se demuestra que $E(Y|X) = E(Y)$ cuando X e Y son variables aleatorias independientes.

UNIDAD VIII

DISTRIBUCION NORMAL EN DOS VARIABLES

De las distribuciones de probabilidad en dos variables aleatorias, la más importante es la distribución Normal, una generalización directa de la distribución Normal Univariada. La distribución Normal en dos variables juega un papel importante en la teoría del muestreo como descripción de fenómenos observables.

8.1 LA DISTRIBUCION Y SUS MOMENTOS

Definición 1 :

Sea la variable aleatoria bidimensional (X, Y) con densidad conjunta

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\,\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\,\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]} \qquad (1)$$

$-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, donde σ_x, σ_y, μ_x, μ_y, ρ, son constantes tales que $-1 < \rho < 1$; $0 < \sigma_x$; $0 < \sigma_y$; $-\infty < \mu_x < \infty$; $-\infty < \mu_y < \infty$. En estas condiciones se dice que la variable aleatoria tiene una distribución bivariada.

La densidad (1) puede representarse por una superfice de forma de campana $z = f(x, y)$, tal como la dibujada en la figura 8-1. Todo plano paralelo x, y, que corte a la superficie, lo hace según una curva elíptica, y todo plano perpendicular al x, y la corta según una curva normal. La probabilidad de que un punto (X, Y) tomado al azar esté situado en una región R determinada del plano x, y se obtiene integrando f(x, y) sobre tal región.

$$P[(X, Y) \text{ esté en } R] = \iint_R f(x, y)dy\,dx$$

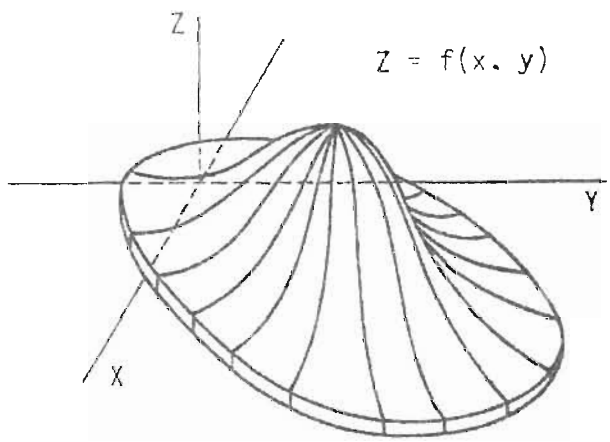


FIGURA 8.1

Comenzaremos por demostrar que la función representa, en efecto, - una distribución; esto es,

i) La densidad es positiva (por supuesto).

ii) La integral extendida a todo el plano es igual a uno; es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy\,dx = 1$$

hagamos la sustitución siguiente, para simplificar la integral

$$u = \frac{x - \mu x}{\sigma_x} \qquad v = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y}$$

$$du = \frac{dx}{\sigma_x} \qquad dv = \frac{dy}{\sigma_y}$$

con lo cual tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - 2\rho uv + v^2)} dv\, du$$

completando el cuadrado en la variable u del exponente tenemos

$$u^2 - 2\rho uv + v^2 = u^2 - 2\rho uv + \rho^2 v^2 + v^2 - \rho^2 v^2$$

$$= (u - \rho v)^2 + (1 - \rho^2)v^2$$

resultando

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\left[\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right]\left[(u-\rho v)^2 + (1-\rho^2)v^2\right]} dv\, du$$

luego haciendo la sustitución

$$s = \frac{u - \rho v}{\sqrt{1-\rho^2}} \qquad ds = \frac{du}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(s^2 + v^2)} dv\, ds$$

la integral se puede escribir como producto de dos integrales simples

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{s^2}{2}\right)} ds \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{v^2}{2}\right)} dv$$

cada una de las cuales es igual a la unidad, como hemos visto al estudiar la distribución normal unidimensional. Con esto queda demostrado lo deseado.

Para obtener los momentos de X e Y, hallaremos la función generatriz de momentos mixtos; es decir

$$\psi(t_1, t_2) = E(e^{t_1 X + t_2 Y})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} \; f(x, y) dy\, dx$$

si hacemos la sustitución

$$u = \frac{x - \mu x}{\sigma_x} \qquad v = \frac{y - \mu y}{\sigma_y}$$

$$du = \frac{du}{\sigma_x} \qquad dv = \frac{dy}{\sigma_y}$$

obtenemos

$$\psi(t_1,t_2)=e^{t_1\mu_x+t_2\mu_y} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1\sigma_x u+t_2\sigma_y v} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\left[\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right]\left[u^2-2\rho uv+v^2\right]} dvdu \qquad (2)$$

los exponentes combinados que aparecen en el integrando pueden escribirse :

$$- \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[u^2 - 2\rho uv + v^2 - 2(1-\rho^2)t_1\sigma_x u - 2(1-\rho^2)t_2\sigma_y v\right]$$

y completando el cuadrado primero en u tenemos

$$- \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{\left[u-\rho v-(1-\rho^2)t_1\sigma_x\right]^2-2\rho v(1-\rho^2)t_1\sigma_x-\rho^2v^2-(1-\rho^2)^2t_1{}^2\sigma_x{}^2+ v^2 - \right.$$
$$\left. - 2(1-\rho^2)t_2\sigma_y v\right\}$$

$$= - \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{\left[u-\rho v-(1-\rho^2)t_1\sigma_x\right]^2+(1-\rho^2)(v^2-2\rho t_1\sigma_x v-2t_2\sigma_y v)-(1-\rho^2)^2t_1^2\sigma_x^2\right\}$$

ahora completando el cuadrado en v tenemos

$$- \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{\left[u-\rho v-(1-\rho^2)t_1\sigma_x\right]^2+(1-\rho^2)(v-\rho t_1\sigma_x-t_2\sigma_y)^2-(1-\rho^2)(\rho^2t_1{}^2\sigma_x{}^2+\right.$$
$$\left. + 2\rho t_1\sigma_x t_2\sigma_y +t_2{}^2\sigma_y{}^2)-(1-\rho^2)^2t_1{}^2\sigma_x{}^2\right\}$$

la expresión se transforma en

$$- \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{\left[u-\rho v-(1-\rho^2)t_1\sigma_x\right]^2+(1-\rho^2)(v-\rho t_1\sigma_x-t_2\sigma_y)^2-(1-\rho^2)(t_1{}^2\sigma_x{}^2+\right.$$
$$\left. 2\rho t_1t_2\sigma_x\sigma_y + t_2{}^2\sigma_y{}^2)\right\}$$

que, haciendo la sustitución

$$s = \frac{u - \rho v - (1-\rho^2)t_1\sigma_x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \qquad w = v - \rho t_1\sigma_x - t_2\sigma_y$$

$$ds = \frac{du}{\sqrt{1 - \rho^2}} \qquad dw = \frac{dv}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

el exponente toma la forma

$$- \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{2} (t_1{}^2\sigma_x{}^2 + 2\rho t_1 t_2\sigma_x\sigma_y + t_2{}^2\sigma_y{}^2)$$

con lo cual la integral (2), se escribe

$$\psi(t_1,t_2)=e^{t_1\mu_x+t_2\mu_y}e^{\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_x^2+2\rho t_1t_2\sigma_x\sigma_y+t_2^2\sigma_y^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\Pi}e^{-\frac{s^2}{2}-\frac{w^2}{2}}\,ds\,dw$$

$$\psi(t_1,t_2) = e^{t_1\mu_x + t_2\mu_y + \frac{1}{2}(t_1^2\sigma_x^2 + 2\rho t_1t_2\sigma_x\sigma_y + t_2^2\sigma_y^2)}$$

puesto que la integral es igual a la unidad.

Los momentos pueden obtenerse calculando las derivadas de $\psi(t_1, t_2)$ en $t_1 = 0$, $t_2 = 0$. Así, pues,

$$E(X) = \left.\frac{\partial\psi}{\partial t_1}\right|_{t_1,\, t_2 = 0} = \mu_x$$

$$E(X^2) = \left.\frac{\partial^2\psi}{\partial t_1^2}\right|_{t_1,\, t_2 = 0} = \mu_x^2 + \sigma_x^2$$

y por tanto, la variancia de X es

$$E(X - \mu_x)^2 = E(X^2) - \mu_x^2 = \sigma_x^2$$

análogamente, derivando respecto a t_2 , se hallan

$$E(Y) = \mu_y \qquad\qquad E(Y - \mu_y)^2 = \sigma_y^2$$

Se obtienen también los momentos mixtos

$$E(X^k\, Y^s)$$

derivando $\psi(t_1, t_2)$ k veces respecto a t_1 y s veces respecto a t_2 y haciendo a continuación t_1 y t_2 iguales a cero. La covarianza de X e Y es :

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = E(XY) - \mu_x \mu_y = \rho\sigma_x \sigma_y$$

Se observará que cuando la correlación es cero, f(x, y) en (1) es el producto de dos distribuciones normales unidimensionales; por tanto, en este caso X e Y son independientes. Luego en el caso de la distribución normal bivariada, encontramos que la correlación cero y la independencia son equivalentes.

8.2 DISTRIBUCIONES MARGINALES

TEOREMA 8.1

Sea la variable aleatoria (X, Y), con la densidad bivariada dada en la definición 1. La distribución marginal de X es normal con media μ_x y variancia σ_x^2. Asi mismo, la distribución marginal de Y es normal con media μ_y y varianza σ_y^2.

Demostración :

Por definición

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \ ;$$

haciendo la sustitución

$$v = \frac{y - \mu y}{\sigma y} \implies dv = \frac{dy}{\sigma y}$$

Los exponentes combinados que aparecen en el integrando pueden escribirse

$$- \frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left[\left(\frac{x - \mu x}{\sigma x} \right)^2 - 2\rho \ \frac{x - \mu x}{\sigma x} v + v^2 \right]$$

completando el cuadrado en v tenemos

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2+\left(v-\rho\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-\rho^2\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right]$$

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2(1-\rho^2)+\left(v-\rho\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(v-\rho\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2$$

Se tiene entonces

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\Pi\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{x}\right)^2-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(v-\rho\frac{x-\mu_X}{x}\right)^2}\,dv$$

que haciendo la sustitución

$$s=\frac{v-\rho\left[\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right]}{\sqrt{1-\rho^2}} \qquad ds=\frac{dv}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

nos da

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\Pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{x}\right)^2}\int_{\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\,e^{-\frac{1}{2}s^2}\,ds$$

luego

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\Pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2}$$

que es la función de densidad normal univariada. Análogamente se halla la función de densidad marginal de Y,

$$f(Y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2}$$

La recíproca no es cierta; si las distribuciones marginales f (x) y f (Y) son normales, la función de densidad conjunta f(x, y) no es - necesariamente normal bivariada.

8.3 FUNCIONES DE REGRESION NORMALES

Demostraremos el hecho natable de que las funciones de regresión de variables normales bivariadas son lineales.

TEOREMA 8.2

Sea la variable aleatoria bidimensional (X, Y), con densidad bivariada dada por la definición 1. La distribu - ción condicional de X, dado Y = y, es normal con media $\mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \mu_y)$ y varianza $\sigma_x^2(1 - \rho^2)$. Análogamente, la distribución condicional de Y, dado X = x, es normal con media $\mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \mu_x)$ y varianza $\sigma_y^2(1 - \rho^2)$.

Demostración :

La función de densidad de X para valores fijos de Y es

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

sustituyendo los valores de las funciones en el segundo miembro tenemos

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\,\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}} \; \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}}{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2}} \qquad (3)$$

Los exponentes que aparecen pueden operarse de la manera siguiente

$$- \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu x}{\sigma x}\right)^2 - 2\rho \frac{x-\mu x}{\sigma x} \frac{y-\mu y}{\sigma y} + \left(\frac{y-\mu y}{\sigma y}\right)^2 - \left(\frac{y-\mu y}{\sigma y}\right)^2 (1-\rho^2) \right]$$

$$- \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu x}{\sigma x}\right)^2 - 2\rho \frac{x-\mu x}{\sigma x} \frac{y-\mu y}{\sigma y} - \rho^2 \left[\frac{y-\mu y}{\sigma y}\right]^2 \right]^2$$

$$- \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{x^2}{\sigma x^2} - \frac{\mu x^2}{\sigma x^2} - \frac{2x\mu x}{\sigma x^2} - \frac{2x\rho}{\sigma x} \left(\frac{y-\mu y}{\sigma y}\right) + \frac{2\mu x\rho}{\sigma x} \left(\frac{y-\mu y}{\sigma y}\right) - \rho^2 \left(\frac{y-\mu y}{\sigma y}\right)^2 \right]$$

$$- \frac{1}{2\sigma x^2(1-\rho^2)} \left[x^2 - \mu x^2 - \rho^2 \frac{\sigma x^2}{\sigma y^2}(y-\mu y)^2 - 2x\mu x - 2x\rho\frac{\sigma x}{\sigma y} (y-\mu y) + 2\mu x\rho\frac{\sigma x}{\sigma y} (y-\mu y) \right]$$

$$- \frac{1}{2\sigma x^2(1-\rho^2)} \left[x - \mu x - \rho \frac{\sigma x}{\sigma y} (y - \mu y) \right]^2$$

asi la función (3), toma la forma

$$f(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\ \sigma x\ \sqrt{1-\rho^2}}\ e^{-\frac{1}{2\sigma x^2(1-\rho^2)} \left[x-\mu x - \frac{\rho\sigma x}{\sigma y} (y-\mu y)\right]^2}$$

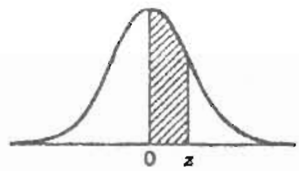
que es una función de densidad normal univariada, con media μx + $+ \rho\frac{\sigma x}{\sigma y} (y - \mu y)$ y variancia $\sigma x^2 (1 - \rho^2)$. Asi pues, tanto la distribución condicional como la distribución marginal de la distribución normal bivariada son normales. Pero la función de regresión de X en y es la media condicional de X dada y :

$$E(X|y) = \mu x + \rho \frac{\sigma x}{\sigma y} (y - \mu y) \quad ,$$

una función lineal de x. Análogos resultados pueden obtenerse para $E(Y|x)$ y $\sigma^2(Y|x)$.

TABLAS ESTADISTICAS

Tabla I. *Superficies de una distribución normal estandarizada.*



Cada valor tabulado (entrada en tabla) representa la proporción de curva abarcada entre $z = 0$ y un valor positivo de z. Las superficies correspondientes a valores negativos de z se obtienen por simetría.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4117
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4490	0,4990

TABLA II - FUNCION DE PROBABILIDAD BINOMIAL

Las cifras tabuladas son valores de ${}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}$ para los valores indicados de n, x y p. Cuando $p > 0,5$, el valor de ${}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}$, dados n, x y p, se obtiene hallando el valor para el n fijado, con $n-x$ en lugar de la x dada y $1-p$ en lugar del p dado.

		p									
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0312
	1	0,2036	0,3280	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1562
	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0004	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1562
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0312
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547
	2	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
	3	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
	4	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734
	5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0312
	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
	4	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734
	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0312
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039

n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0.30	0,35	0,40	0,45	0,50
						p					
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
	2	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703
	3	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
	4	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461
	5	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2128	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
	2	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
	3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
	4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
	5	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
11	0	0,5688	0,3138	0,1673	0,0859	0,0422	0,0198	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1	0,3293	0,3835	0,3248	0,2362	0,1549	0,0932	0,0518	0,0266	0,0125	0,0054
	2	0,0867	0,2131	0,2866	0,2953	0,2581	0,1998	0,1395	0,0887	0,0513	0,0269
	3	0,0137	0,0710	0,1517	0,2215	0,2581	0,2568	0,2254	0,1774	0,1259	0,0806
	4	0,0014	0,0158	0,0536	0,1107	0,1721	0,2201	0,2428	0,2365	0,2060	0,1611
	5	0,0001	0,0025	0,0132	0,0388	0,0803	0,1321	0,1830	0,2207	0,2360	0,2256
	6	0,0000	0,0003	0,0023	0,0097	0,0268	0,0566	0,0985	0,1471	0,1931	0,2256
	7	0,0000	0,0000	0,0003	0,0017	0,0064	0,0173	0,0379	0,0701	0,1128	0,1611
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0037	0,0102	0,0234	0,0462	0,0806
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018	0,0052	0,0126	0,0269
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0021	0,0054
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0005
12	0	0,5405	0,2824	0,1422	0,0687	0,0317	0,1038	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1	0,3413	0,3766	0,3012	0,2062	0,1267	0,0712	0,0368	0,0174	0,0075	0,0029
	2	0,0988	0,2301	0,2924	0,2835	0,2323	0,1678	0,1088	0,0639	0,0339	0,0161
	3	0,0173	0,0852	0,1720	0,2362	0,2581	0,2397	0,1954	0,1419	0,0923	0,0537
	4	0,0021	0,0213	0,0683	0,1329	0,1936	0,2311	0,2367	0,2128	0,1700	0,1208
	5	0,0002	0,0038	0,0193	0,0532	0,1032	0,1585	0,2039	0,2270	0,2225	0,1934
	6	0,0000	0,0005	0,0040	0,0155	0,0401	0,0792	0,1281	0,1766	0,2124	0,2256
	7	0,0000	0,0000	0,0006	0,0033	0,0115	0,0291	0,0591	0,1009	0,1489	0,1934
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0078	0,0199	0,0420	0,0762	0,1208
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0048	0,0125	0,0277	0,0537
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0025	0,0068	0,0161
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0029
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002

		p									
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
13	0	0,5133	0,2542	0,1209	0,0550	0,0238	0,0097	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1	0,3512	0,3672	0,2774	0,1787	0,1029	0,0540	0,0259	0,0113	0,0045	0,0016
	2	0,1109	0,2448	0,2937	0,2680	0,2059	0,1388	0,0836	0,0453	0,0220	0,0095
	3	0,0214	0,0997	0,1900	0,2457	0,2517	0,2181	0,1651	0,1107	0,0660	0,0349
	4	0,0028	0,0277	0,0838	0,1535	0,2097	0,2337	0,2222	0,1845	0,1350	0,0873
	5	0,0003	0,0055	0,0266	0,0691	0,1258	0,1803	0,2154	0,2214	0,1989	0,1571
	6	0,0000	0,0008	0,0063	0,0230	0,0559	0,1030	0,1546	0,1968	0,2169	0,2095
	7	0,0000	0,0001	0,0011	0,0058	0,0186	0,0442	0,0833	0,1312	0,1775	0,2095
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0011	0,0047	0,0142	0,0336	0,0656	0,1089	0,1571
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0034	0,0101	0,0243	0,0495	0,0873
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0022	0,0065	0,0162	0,0349
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0012	0,0036	0,0095
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
14	0	0,4877	0,2288	0,1028	0,0440	0,0178	0,0068	0,0024	0,0008	0,0002	0,0001
	1	0,3593	0,3559	0,2539	0,1539	0,0832	0,0407	0,0181	0,0073	0,0027	0,0009
	2	0,1229	0,2570	0,2912	0,2501	0,1802	0,1134	0,0634	0,0317	0,0141	0,0056
	3	0,0259	0,1142	0,2056	0,2501	0,2402	0,1943	0,1366	0,0845	0,0462	0,0222
	4	0,0037	0,0349	0,0998	0,1720	0,2202	0,2290	0,2022	0,1549	0,1040	0,0611
	5	0,0004	0,0078	0,0352	0,0860	0,1468	0,1963	0,2178	0,2066	0,1701	0,1222
	6	0,0000	0,0013	0,0093	0,0322	0,0734	0,1262	0,1759	0,2066	0,2088	0,1833
	7	0,0000	0,0002	0,0019	0,0092	0,0280	0,0618	0,1082	0,1574	0,1952	0,2095
	8	0,0000	0,0000	0,0003	0,0020	0,0082	0,0232	0,0510	0,0918	0,1398	0,1833
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0018	0,0066	0,0183	0,0408	0,0762	0,1222
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0049	0,0136	0,0312	0,0611
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0033	0,0093	0,0222
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0019	0,0056
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0009
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
15	0	0,4633	0,2059	0,0874	0,0352	0,0134	0,0047	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000
	1	0,3658	0,3432	0,2312	0,1319	0,0668	0,0305	0,0126	0,0047	0,0016	0,0005
	2	0,1348	0,2669	0,2856	0,2309	0,1559	0,0916	0,0476	0,0219	0,0090	0,0032
	3	0,0307	0,1285	0,2184	0,2501	0,2252	0,1700	0,1110	0,0634	0,0318	0,0139
	4	0,0049	0,0428	0,1156	0,1876	0,2252	0,2186	0,1792	0,1268	0,0780	0,0417
	5	0,0006	0,0105	0,0449	0,1032	0,1651	0,2061	0,2123	0,1859	0,1404	0,0916
	6	0,0000	0,0019	0,0132	0,0430	0,0917	0,1472	0,1906	0,2066	0,1914	0,1527
	7	0,0000	0,0003	0,0030	0,0138	0,0393	0,0811	0,1319	0,1771	0,2013	0,1964
	8	0,0000	0,0000	0,0005	0,0035	0,0131	0,0348	0,0710	0,1181	0,1647	0,1964
	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0034	0,0116	0,0298	0,0612	0,1048	0,1527
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0030	0,0096	0,0245	0,0515	0,0916
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0074	0,0191	0,0417
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052	0,0139
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0032
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
16	0	0,4401	0,1853	0,0743	0,0281	0,0100	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000
	1	0,3706	0,3294	0,2097	0,1126	0,0535	0,0228	0,0087	0,0030	0,0009	0,0002
	2	0,1463	0,2745	0,2775	0,2111	0,1336	0,0732	0,0353	0,0150	0,0056	0,0018
	3	0,0359	0,1423	0,2285	0,2463	0,2079	0,1465	0,0888	0,0468	0,0215	0,0085
	4	0,0061	0,0514	0,1311	0,2001	0,2252	0,2040	0,1553	0,1014	0,0572	0,0278

n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	5	0,0008	0,0137	0,0555	0,1201	0,1802	0,2099	0,2008	0,1623	0,1123	0,0667
	6	0,0001	0,0028	0,0180	0,0550	0,1101	0,1649	0,1982	0,1983	0,1684	0,1222
	7	0,0000	0,0004	0,0045	0,0197	0,0524	0,1010	0,1524	0,1889	0,1969	0,1746
	8	0,0000	0,0001	0,0009	0,0055	0,0197	0,0487	0,0923	0,1417	0,1812	0,1964
	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0058	0,0185	0,0442	0,0840	0,1318	0,1746
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0014	0,0056	0,0167	0,0392	0,0755	0,1222
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0049	0,0142	0,0337	0,0667
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0040	0,0115	0,0278
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0029	0,0085
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

La interpolación lineal con respecto a p no será en general exacta hasta más de dos lugares decimales, y a veces incluso menos. Para consultar tablas más amplias de ${}_nC_r p^r(1-p)^{n-r}$, véase National Bureau of Standards, *Tables of the Binomial Probability Distribution*, Applied Mathematics Series 6, Washington, D. C., 1950.

TABLA III

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$$1 - F(x-1) = \sum_{r=x}^{r=n} C_r^n p^r q^{n-r}$$

$n = 10$ $x = 10$	$n = 10$ $x = 9$	$n = 10$ $x = 8$	$n = 10$ $x = 7$	p
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.01
.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.02
.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.03
.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.04
.0000000	.0000000	.0000000	.0000001	.05
.0000000	.0000000	.0000000	.0000003	.06
.0000000	.0000000	.0000000	.0000008	.07
.0000000	.0000000	.0000001	.0000020	.08
.0000000	.0000000	.0000002	.0000045	.09
.0000000	.0000000	.0000004	.0000091	.10
.0000000	.0000000	.0000008	.0000173	.11
.0000000	.0000000	.0000015	.0000308	.12
.0000000	.0000001	.0000029	.0000525	.13
.0000000	.0000002	.0000051	.0000856	.14
.0000000	.0000003	.0000087	.0001346	.15
.0000000	.0000006	.0000142	.0002051	.16
.0000000	.0000010	.0000226	.0003042	.17
.0000000	.0000017	.0000350	.0004401	.18
.0000001	.0000027	.0000528	.0006229	.19
.0000001	.0000042	.0000779	.0008644	.20
.0000002	.0000064	.0001127	.0011783	.21
.0000003	.0000097	.0001599	.0015804	.22
.0000004	.0000143	.0002232	.0020885	.23
.0000006	.0000207	.0003068	.0027228	.24
.0000010	.0000296	.0004158	.0035057	.25
.0000014	.0000416	.0005362	.0044618	.26
.0000021	.0000577	.0007350	.0056181	.27
.0000030	.0000791	.0009605	.0070039	.28
.0000042	.0001072	.0012420	.0086507	.29
.0000059	.0001437	.0015904	.0105921	.30
.0000082	.0001906	.0020179	.0128637	.31
.0000113	.0002505	.0025384	.0155029	.32
.0000153	.0003263	.0031673	.0185489	.33
.0000206	.0004214	.0039219	.0220422	.34
.0000276	.0005399	.0048213	.0260243	.35
.0000366	.0006865	.0058864	.0305376	.36
.0000481	.0008668	.0071403	.0356252	.37
.0000628	.0010871	.0086079	.0412301	.38
.0000814	.0013546	.0103163	.0476949	.39
.0001049	.0016777	.0122946	.0547619	.40
.0001342	.0020658	.0145738	.0625719	.41
.0001708	.0025295	.0171871	.0711643	.42
.0002161	.0030809	.0201696	.0805763	.43
.0002720	.0037335	.0235583	.0908427	.44
.0003405	.0045022	.0273918	.1019949	.45
.0004242	.0054040	.0317105	.1140612	.46
.0005259	.0064574	.0365560	.1270655	.47
.0006493	.0076828	.0419713	.1410272	.48
.0007979	.0091028	.0480003	.1559607	.49
.0009766	.0107422	.0546875	.1718750	.50

* *National Bureau of Standards, Applied Math. Series No. 6*, 1950.

$n=10$ $x=6$	$n=10$ $x=5$	$n=10$ $x=4$	$n=10$ $x=3$	$n=10$ $x=2$	$n=10$ $x=1$	p
0.0000000	0.0000000	0.0000020	0.0001138	0.0042662	0.0956179	0.01
.0000000	.0000007	.0000305	.0008639	.0161776	.1829272	.02
.0000001	.0000054	.0001471	.0027650	.0345066	.2625759	.03
.0000007	.0000218	.0004426	.0062137	.0581538	.3351674	.04
.0000028	.0000637	.0010285	.0115036	.0861384	.4012631	.05
.0000079	.0001517	.0020293	.0188378	.1175880	.4613849	.06
.0000193	.0003139	.0035761	.0283421	.1517299	.5160177	.07
.0000415	.0005857	.0058013	.0400754	.1878825	.5656115	.08
.0000810	.0010096	.0088338	.0540400	.2254471	.6105839	.09
.0001469	.0016349	.0127952	.0701908	.2639011	.6513216	.10
.0002507	.0025170	.0177972	.0884435	.3027908	.6881828	.11
.0004069	.0037161	.0239388	.1086818	.3417250	.7214990	.12
.0006332	.0052967	.0313048	.1307642	.3803692	.7515766	.13
.0009505	.0073263	.0399642	.1545298	.4184400	.7786984	.14
.0013832	.0098741	.0499698	.1798035	.4557002	.8031256	.15
.0019593	.0130101	.0613577	.2064005	.4919536	.8250988	.16
.0027098	.0168038	.0741472	.2341305	.5270412	.8448396	.17
.0036694	.0213229	.0883411	.2628010	.5608368	.8625520	.18
.0048757	.0266325	.1039261	.2922204	.5932435	.8784233	.19
.0063694	.0327935	.1208739	.3222005	.6241904	.8926258	.20
.0081935	.0398624	.1391418	.3525586	.6536289	.9053172	.21
.0103936	.0478897	.1586739	.3831197	.6815306	.9166422	.22
.0130167	.0569196	.1794024	.4137173	.7078843	.9267332	.23
.0161116	.0669890	.2012487	.4441949	.7326936	.9357111	.24
.0197277	.0781269	.2241249	.4744072	.7559748	.9436865	.25
.0239148	.0903542	.2479349	.5042200	.7777550	.9507601	.26
.0287224	.1036831	.2725761	.5335112	.7980705	.9570237	.27
.0341994	.1181171	.2979105	.5621710	.8169646	.9625609	.28
.0403932	.1336503	.3238164	.5901015	.8344869	.9674476	.29
.0473490	.1502683	.3503893	.6172172	.8506917	.9717525	.30
.0551097	.1679475	.3772433	.6434445	.8656366	.9755381	.31
.0637149	.1866554	.4043626	.6687212	.8793821	.9788608	.32
.0732905	.2063514	.4316320	.6929966	.8919901	.9817716	.33
.0835979	.2269866	.4589388	.7162304	.9035235	.9843166	.34
.0949341	.2485045	.4861730	.7383926	.9140456	.9865373	.35
.1072304	.2708415	.5132284	.7594627	.9235190	.9884708	.36
.1205026	.2939277	.5400038	.7794292	.9323056	.9901507	.37
.1347603	.3176870	.5664030	.7982887	.9401661	.9916070	.38
.1500968	.3420385	.5923361	.8160453	.9472594	.9928666	.39
.1662386	.3668967	.6177194	.8327102	.9536426	.9939534	.40
.1834452	.3921728	.6424762	.8483007	.9593705	.9948888	.41
.2016092	.4177749	.6665372	.8628393	.9644958	.9956920	.42
.2207058	.4436094	.6898401	.8763528	.9690684	.9963797	.43
.2407033	.4695813	.7123307	.8888757	.9731358	.9969669	.44
.2615627	.4955954	.7339621	.9004403	.9767429	.9974670	.45
.2832382	.5215571	.7546952	.9110859	.9799319	.9978917	.46
.3056772	.5473730	.7744985	.9208530	.9827422	.9982511	.47
.3288205	.5729517	.7933480	.9297839	.9852109	.9985544	.48
.3526028	.5982047	.8112268	.9379222	.9873722	.9988096	.49
.3769531	.6230469	.8281250	.9453125	.9892578	.9990234	.50

TABLA IV

FUNCION DE PROBABILIDAD DE POISSON

x	$a = 0.2$	$a = 0.3$	$a = 0.4$	$a = 0.5$	$a = 0.6$
0	0.8187308	0.7408182	0.6703200	0.606531	0.548812
1	.1637462	.2222455	.2681280	.303265	.329287
2	.0163746	.0333368	.0536256	.075816	.098786
3	.0010916	.0033337	.0071501	.012636	.019757
4	.0000546	.0002500	.0007150	.001580	.002964
5	.0000022	.0000150	.0000572	.000158	.000356
6	.0000001	.0000008	.0000038	.000013	.000036
7			.0000002	.0000001	.0000003

x	$a = 0.7$	$a = 0.8$	$a = 0.9$	$a = 1.0$	$a = 1.2$
0	0.496585	0.449329	0.406570	0.367879	0.301194
1	.347610	.359463	.365913	.367879	.361433
2	.121663	.143785	.164661	.183940	.216860
3	.028388	.038343	.049398	.061313	.086744
4	.004968	.007669	.011115	.015328	.026023
5	.000696	.001227	.002001	.003066	.006246
6	.000081	.000164	.000300	.000511	.001249
7	.000008	.000019	.000039	.000073	.000214
8	.000001	.000002	.000004	.000009	.000004
9				.000001	.000001

x	$a = 1.4$	$a = 1.6$	$a = 1.8$	$a = 2.0$	
0	0.246597	0.201897	0.165299	0.135335	
1	.345236	.323034	.297538	.270671	
2	.241665	.258428	.267784	.270671	
3	.112777	.137828	.160671	.180447	
4	.039472	.055131	.072302	.090224	
5	.011052	.017642	.026029	.036089	
6	.002579	.004705	.007809	.012030	
7	.000516	.001075	.002008	.003437	
8	.000090	.000215	.000452	.000859	
9	.000014	.000038	.000090	.000191	
10	.000002	.000006	.000016	.000038	
11		.000001	.000003	.000007	
12				.000001	

* E. C. Molina, *Poisson's Exponential Binomial Limit*, D. Van Nostrand, Inc., 1947.

x	$a = 2.5$	$a = 3.0$	$a = 3.5$	$a = 4.0$	$a = 4.5$	$a = 5.0$
0	0.082085	0.049787	0.030197	0.018316	0.011109	0.006738
1	.205212	.149361	.105691	.073263	.049990	.033690
2	.256516	.224042	.184959	.146525	.112479	.084224
3	.213763	.224042	.215785	.195367	.168718	.140374
4	.133602	.168031	.188812	.195367	.189808	.175467
5	.066801	.100819	.132169	.156293	.170827	.175467
6	.027834	.050409	.077098	.104196	.128120	.146223
7	.009941	.021604	.038549	.059540	.082363	.104445
8	.003106	.008102	.016865	.029770	.046329	.065278
9	.000863	.002701	.006559	.013231	.023165	.036266
10	.000216	.000810	.002296	.005292	.010424	.018133
11	.000049	.000221	.000730	.001925	.004264	.008242
12	.000010	.000055	.000213	.000642	.001599	.003434
13	.000002	.000013	.000057	.000197	.000554	.001321
14		.000003	.000014	.000056	.000178	.000472
15		.000001	.000003	.000015	.000053	.000157
16			.000001	.000004	.000015	.000049
17				.000001	.000004	.000014
18					.000001	.000004
19						.000001

TABLA V

FUNCION DE DISTRIBUCION DE POISSON

x	$a = 0.2$	$a = 0.3$	$a = 0.4$	$a = 0.5$	$a = 0.6$
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	.1812692	.2591818	.3296800	.393469	.451188
2	.0175231	.0369363	.0615519	.090204	.121901
3	.0011485	.0035995	.0079263	.014388	.023115
4	.0000568	.0002658	.0007763	.001752	.003358
5	.0000023	.0000158	.0000612	.000172	.000394
6	.0000001	.0000008	.0000040	.000014	.000039
7			.0000002	.000001	.000003

x	$a = 0.7$	$a = 0.8$	$a = 0.9$	$a = 1.0$	$a = 1.2$
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	.503415	.550671	.593430	.632121	.698806
2	.155805	.191208	.227518	.264241	.337373
3	.034142	.047423	.062857	.080301	.120513
4	.005753	.009080	.013459	.018988	.033769
5	.000786	.001411	.002344	.003660	.007746
6	.000090	.000184	.000343	.000594	.001500
7	.000009	.000021	.000043	.000083	.000251
8	.000001	.000002	.000005	.000010	.000037
9				.000001	.000005
10					.000001

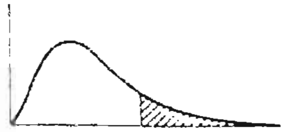
x	$a = 1.4$	$a = 1.6$	$a = 1.8$		
0	1.000000	1.000000	1.000000		
1	.753403	.798103	.834701		
2	.408167	.475069	.537163		
3	.166502	.216642	.269379		
4	.053725	.078813	.108708		
5	.014253	.023682	.036407		
6	.003201	.006040	.010378		
7	.000622	.001336	.002569		
8	.000107	.00260	.000562		
9	.000016	.000045	.000110		
10	.000002	.000007	.000019		
11		.000001	.000003		

* E. C. Molina, *Poisson's Exponential Binomial Limit*, D. Van Nostrand, Inc., 1947.

r	$a = 2.5$	$a = 3.0$	$a = 3.5$	$a = 4.0$	$a = 4.5$	$a = 5.0$
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	.917915	.950213	.969803	.981684	.988891	.993262
2	.712703	.800852	.864112	.908422	.938901	.959572
3	.456187	.576810	.679153	.761897	.826422	.875348
4	.242424	.352768	.463367	.566530	.657704	.734974
5	.108822	.184737	.274555	.371163	.467896	.559507
6	.042021	.083918	.142386	.214870	.297070	.384039
7	.014187	.033509	.065288	.110674	.168949	.237817
8	.004247	.011905	.026739	.051134	.086586	.133372
9	.001140	.003803	.009874	.021363	.040257	.068094
10	.000277	.001102	.003315	.008132	.017093	.031828
11	.000062	.000292	.001019	.002840	.006669	.013695
12	.000013	.000071	.000289	.000915	.002404	.005453
13	.000002	.000016	.000076	.000274	.000805	.002019
14		.000003	.000019	.000076	.000252	.000698
15		.000001	.000004	.000020	.000074	.000226
16			.000001	.000005	.000020	.000069
17				.000001	000005	.000020
18					.000001	.000005
19						.000001

TABLA VI - DISTRIBUCION JI CUADRADO

En la primera columna aparecen los grados de libertad (v). Los encabezados de las restantes suministran las probabilidades α de que χ^2 exceda del valor tabulado. Para $v > 100$, tratar a $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2v-1}$ como una variable normal estandarizada.



χ^2

v \ α	0,995	0,975	0,050	0,025	0,010	0,005
1	$0{,}0^{4}3927$	$0{,}0^{3}9821$	3,84146	5,02389	6,63490	7,87944
2	0.010025	0,050636	5,99147	7,37776	9,21034	10,5966
3	0.071721	0,215795	7,81473	9,34840	11,3449	12,8381
4	0,206990	0,484419	9,48773	11,1433	13,2767	14,8602
5	0,411740	0,831211	11,0705	12,8325	15,0863	16,7496
6	0,675727	1,237347	12,5916	14,4494	16,8119	18,5476
7	0,989265	1,68987	14,0671	16,0128	18,4753	20,2777
8	1,344419	2,17973	15,5073	17,5346	20,0902	21,9550
9	1,734926	2,70039	16,9190	19,0228	12,6660	23,5893
10	2,15585	3,24697	18,3070	20,4831	23,2093	25,1882
11	2,60321	3,81575	19,6751	21,9200	24,7250	26,7569
12	3,07382	4,40379	21,0261	23,3367	26,2170	28,2995
13	3,56503	5,00874	22,3621	24,7356	27,6883	29,8194
14	4.07468	5,62872	23,6848	26,1190	29,1413	31,3193
15	4,60094	6,26214	24,9958	27,4884	30,5779	32,8013
16	5,14224	6,90766	26,2962	28,8454	31,9999	34,2672
17	5,69724	7,56418	27,5871	30,1910	33,4087	35,7185
18	6,26481	8,23075	28,8693	31,5264	34,8053	37,1564
19	6,84398	8.90655	30,1435	32,8523	36,1908	38,5822
20	7,43386	9,59083	31,4104	34,1696	37,5662	39,9968
21	8,03366	10,28293	32,6705	35,4789	38,9321	41,4010
22	8,64272	10,9823	33,9244	36,7807	40,2894	42,7956
23	9,26042	11,6885	35,1725	38,0757	41,6384	44,1813
24	9,88623	12,4001	36,4151	39,3641	42,9798	45,5585
25	10,5197	13,1197	37,6525	40,6465	44,3141	46,9278
26	11,1603	13,8439	38,8852	41,9232	45,6417	48,2899
27	11,8076	14,5733	40,1133	43,1944	46,9630	49,6449
28	12,4613	15,3079	41,3372	44,4607	48,2782	50,9933
29	13,1211	16,0471	42,5569	45,7222	49,5879	52,3356
30	13,7867	16,7908	43,7729	46,9792	50,8922	53,6720
40	20,7065	24,4331	55,7585	59,3417	63,6907	66,7659
50	27,9907	32,3574	67,5048	71,4202	76,1539	79,4900
60	35,5346	40,4817	79,0819	83,2976	88,3794	91,9517
70	43,2752	48,7576	90,5312	95,0231	100.425	104,215
80	51,1720	57,1532	101,879	106,629	112,329	116,321
90	59,1963	65,6466	113,145	118,136	124,116	128,299
100	67,3276	74,2219	124,342	129,561	135,807	140,169

Fuente Resumida de la tabla 8 de *Biometrika Tables for Statisticians*, vol. 1, 3ª ed., 1966.

BIBLIOGRAFIA

A. N. KOCHERGUIN

"El método de los Modelos y el Proceso del Conocimiento"

Academia de Ciencias de la U.R.S.S. Algunas Leyes del Conocimiento Científico. Ediciones Pueblos Unidos, S.A.

A. M. MOOD y F. A. GRAYBILL

"Introducción a la Teoría de la Estadística"
Editorial Aguilar.

E. PARZEN

"Modern Probability Theory and Its Applications"

Wiley International Edition.

H. FREEMAN

"Introduction to Statistical Inference".

Addison - Wesley, Reading, Mass.

F. MOSTELLER, R. E. ROURKE y G. B. THOMAS

"Probability with Statistical Applications".

Addison - Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Mass.

L. A. SANTALO

"Probabilidad e Inferencia Estadística".

Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico. Departamento de Asuntos Científicos. Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos. Serie Matemática.

P. L. MEYER

"Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas".
Fondo Educativo Interamericano, S. A.