UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

INTRODUCCION DE LAS MATEMATICAS MODERNAS EN LA EDUCACION MEDIA

TESIS

PRESENTADA POR

CARLOS MANUEL UMAÑA ARITA

PREVIA A LA OPCION DEL TITULO

DE

INGENIERO CIVIL

SAN SALVADOR EL SALVADOR CENTRO AMERICA

FEBRERO 1965

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR

Dr. Fabio Castillo Figueroa.

SECRETARIO

Dr. Mario Flores Macall.

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO

Ing. León Enrique Cuéllar.

SECRETARIO

Ing. Alonso García Rivera.

DIRECTOR ESCUELA INGENIERIA CIVIL

Ing. Jorge Ernesto Campos

JUNTAS EXAMINADORAS.

Primer Examen de Grado.

Ing. Rodolfo Morales

Ing. José Napoleón Gómez

Ing. Pablo Arnoldo Guzmán

Segundo Examen de Grado.

Ing. Rodolfo Morales

Ing. José Napoleón Gómez

Ing. León Rivas Durán

Tesis de Graduación.

Ing. Rodolfo Morales

Ing. Manuel Zelaya Castro

Dr. Reynaldo Galindo Pohl

A:

mi madre

mi esposa

mis familiares

mis amigos

P R E S E N T A C I O N

El presente trabajo lleva como objetivo, el despertar la inquietud tanto entre profesores como estudiantes de los últimos años de la Educación Media. No es un texto, nunca podría serlo; únicamente expone cómo las cuestiones matemáticas de la enseñanza media pueden ser estudiados con conceptos más avanzados con miras a superar la capacidad analítica de los educandos. Hace al mismo tiempo un breve recuento de las situaciones que cruza el alumno en su andar estudiantial a la par que muestra a los graduados de la Escuela Secundaria uno de los objetivos de la Reforma Universitaria, cual es, lograr el Doctorado en Matemáticas en nuestra Universidad.

INTRODUCCION DE LAS MATEMATICAS MODERNAS EN LA EDUCACION MEDIA.

I.- Consideraciones Generales.

a) Contenido de los programas de Mátematicas en Educación Media.
b) Carácter de los mismos.
c) Vacío educación Media - Universitaria.

II.- Situación del Alumno en la Universidad.

a) Inadaptación.
b) Alteración de los Programas Universita---rios.
c) Alto Porcentaje de egresados; mínimo porcentaje de graduados.

III.- Conceptos Modernos de la Enseñanza Matemática en nuestra Universidad Nacional.

a) Teoría de Conjuntos, Matrices, Vectores.
b) Algebra Lógica, Algebra Abstracta.
c) Modernos Conceptos de Cálculo, Geometría Diferencial.

IV.- Necesidad de nuevos Conceptos matemáticos en la Enseñanza de la Educación Media.

a) Reforma del Programa Matemático.
b) Obstáculos para la Enseñanza.
c) Soluciones.

V.- Proyecciones de esa Innovación de Conceptos.

a) Mayor capacidad analítica de los egresa--dos.
b) Nueva escuela matemática en el país.
c) Un nuevo grado académico.

CONSIDERACIONES GENERALES.

a) Contenido de los Programas Matemáticos en Educación Media.

Hablar de introducir conceptos modernos matemáticos en la Educación Media puede aparentemente confundirnos con respecto al contenido de tales programas en la actualidad. Bastará, sin embargo dar una rápida leída a los mismos para ver que en su elaboración se ha trabajado concientemente con la mejor buena voluntad que un instructor pueda disponer al servicio de la educación. Desde el inicio de su elaboración con los conceptos más elementales de la Aritmética se observa una escala ascendente que nos proporciona un panorama casi completo de lo que debiera ser un curso de Matemáticas. El Algebra presentada desde el concepto elemental de término algebráico hasta la solución de ecuaciones de segundo grado con sus aplicaciones, indudablemente que constituyen una cantidad de conceptos que de ser asimilados convenientemente constituirán una base sólida para cualquier plan de estudios. La Trigonometría junto con el contenido geométrico en el plano y en el espacio completan el conjunto de elementos con los cuales el estudiante estará familiarizado durante toda su vida estudiantil y profesional. Es lógico pensar, desde luego, que con un programa elaborado tan completo en su contenido, tan ordenado en su forma y tan simple y sincero que revela una armonía entre estudiantes y profesores no hace falta reformas ni agregados a su contenido. No obstante hay en los programas de Educación Media la parte relativa a Cosmografía, rama esta en la cual no se cubre un programa más o menos completo a la par de que se estudia en forma tal que da la impresión de no estar relacionada con el resto de asignaturas de índole matemática; pero la realidad es bien distinta, todos los conceptos estudiados en la parte relativa a Cosmografía se repasan en otras ramas de la ciencia. La Física sola es un campo abundante donde se pueden cubrir conceptos de aquella, esto acompañado al hecho de que el estudiante casi nunca, con pocas excepciones, vuelve a hablar de Cosmografía en su carrera estudiantil, le resta méritos para aparecer como una materia específica en el programa, sin menospreciar los conceptos que en ella se estudian pero que pueden ser cubiertos en --- otras asignaturas. Existe en cambio un vacío en los programas de Educación Media y es que en éllos no está incluído un curso de Aritmética Razonada que junto con la Aritmética Elemental constituirían una sólida base para cualquier estudio no sólo de Matemáticas sino de cualquier otra índole. Es una realidad que el individuo en el desarrollo de su actividad diaria se enfrentará a cada momento con situaciones que demandarán el ejercicio de su capacidad para razonar; situaciones difíciles sólo serán resueltas rápida y en buena forma con mejores raciocinios. Adquirir habilidad para razonar convenientemente es pues una gran necesidad y enseñar a los alumnos a razonar es un imperativo obligatorio para todo profesor de matemáticas en la Educación Media. Cabe pues preguntar ¿Puede la Cosmografía ser sustituida en los Programas de la Educación Media por un Curso de Aritmética Razonada?. Dejo en pié la interrogante. De existir una respuesta afirmativa creo que los conceptos que en ella se estudian actualmente pueden ser cubiertos en asignaturas afines.

b) <u>Carácter de los mismos.</u> A pesar de ser muy completos los programas de la Educación Media, el desarrollo de los mismos anda mal llevando como consecuencia, el que sus egresados vayan deficientemente preparados, debido a la costumbre poco productiva de acostumbrarlos a memorizar. Memorizar para aprender es lo que nunca debiera practicarse y eso es en nuestro medio lo normal. Ocurre entonces algo verdaderamente lastimoso; la mejor edad para adquirir conocimientos, aquella en que la niñez está ávida de conocer se pierde al permitirle al alumno memorizar conceptos cosa que no debe de hacerse. Aparece entonces la rivalidad entre los que pueden memorizar fácilmente y los que no; aquellos obtendrán buenas calificaciones y estos no; al final habrá un resultado común: el que memoriza difícilmente puede mantener esa capacidad todo el tiempo para todas sus materias, ello unido al aumento gradual de conocimientos cada año, lo lleva a una situación en que le es imposible ordenar en su memoria el conjunto de conocimientos que ya obtuvo y asimilar los nuevos. Una consecuencia de ello es que un mínimo porcentaje de estudiantes de la Educación Media no lleva apuntes a la hora de rendir un examen, lo que demuestra que el verdadero carácter de los estudios de la Educación Media ha desaparecido.

c) <u>Vacío Educación Media - Universitaria.</u> Egresado en esas circunstancias, el estudiante medio llega a una etapa en que nuevos horizontes le auguran una preparación técnica y científica que le permitirá defenderse en el afán diario a la par que lo capacitará para engrandecer a su Patria. Ahora puede aspirar a ser un profesional en cualquier rama universitaria, se siente grande y piensa que así como venció esa etapa, vencerá la otra, se forma una infinidad de ilusiones y cree que si hubo dificultades en su bachillerato para aprender, en la Universidad será distinto ya que contando ésta con personal capacitado, que teniendo nuevos y mejores métodos para enseñar, los obstáculos que encontró antes, ahora no los encontrará y si los encuentra ya sabrá como resolverlos mejor.

Pasa un largo tiempo para que ello se verifique y siendo tan distintos los campos que el estudiante frecuentará nunca podrá prever las circunstancias de su vida universitaria. Por otra parte el aislamiento total en que se desenvuelven las dos escuelas, deja al nuevo bachiller en una etapa de aislamiento, incapaz de seguir una línea definida en sus planes de estudio; y es una especie de vacío donde se hace una pausa, pero sin saber qué seguirá después. Por lo tanto surge y recomiendo como una necesidad imperiosa establecer un contacto entre la enseñanza de la educación media y la vida universitaria. El Ministerio de Cultura debe organizar cursos pre-universitarios, en donde los nuevos bachilleres reciban orientación acerca del nuevo tipo de relaciones que tendrán, ya que la Universidad con los escasos recursos con que cuenta, apenas alcanza a cubrir los planes superiores. En esa forma se eliminaría esa llamada tierra de nadie que tanta desorientación ha causado y que no permite establecer un plan único que partiendo de los inicios de la Educación Media, permita al alumno especializarse en las materias que le servirán profesionalmente para proyectarse con paso firme a la especialidad académica que más le atrae, sin perjuicio de que en el futuro estos programas de orientación sean realizados en labor conjunta del Ministerio de Cultura y la Universidad.

SITUACION DEL ALUMNO EN LA UNIVERSIDAD.

a) INADAPTACION.

Muy desconcertante es desde luego la situación del alumno en la -- Universidad, especialmente los nuevos, y, es más acentuado este fenómeno en los que asisten o cursan en la Facultad de Ingeniería.

Aquí, el alumno llega al inicio de su carrera con una idea equivocada del medio que va a frecuentar. Opuestamente a lo que es una institución seria y organizada que planifica y programa todas las actividades propias de su rango; encuentra un conjunto de edificios desolados, sin ninguna persona encargada de indicarle cuál es su sala de clase, -- cuál su horario y quienes son sus profesores. Cuando al fin logra determinar estos aspectos se da cuenta que no existen programas definidos y que el catedrático se limita a recomendar un texto y como desarrollo de la clase expone capítulo por capítulo el contenido del libro en mención. Se acentúa el problema en las asignaturas de carácter puramente matemático; lo que debiera ser una exposición claramente razonada se vuelve una simple copia y traslado al pizarrón de la forma y símbolos contenidos en el texto. No existe amplitud de concepto, exposición, análisis, razonamiento; la solución de ejercicios y problemas se vuelve mecanizada y el objetivo primordial; además del cognositivo, se pierde. Poco ha avanzado el profesor en la exposición de la materia cuando se da cuenta que le será muy difícil continuar el desarrollo normal que se había trazado y que la cantidad de conceptos que pretendía cubrir no se rá cubierta; la casi totalidad de los alumnos comienza a solicitar una exposición más lenta, so pretexto de que difícilmente pueden ir al día con sus materias, que en años anteriores sólo han cubierto una pequeña parte de lo que hoy se pretende cubrir, arqueyn que la necesidad de atender las otras materias de los cursos no les permiten dedicar todo el tiempo que debieran a la materia de que ahora se habla, y muchos otros pretextos que no persiguen otro objetivo que el de detener en todo lo que sea posible la exposición del contenido total del curso que se pretendía impartir. Con ello logran cubrir menos material de estudio para la hora de rendir un examen, aumentar su tiempo útil para actividades que no son las puramente estudiantiles a la par de que se posecionan de un arma sicológica que pronto esgrimirán contra el profesor en caso de salir reprobados en alguna prueba.

Pero basta analizar un poco el caso para darse cuenta de la realidad. El alumno aunque resulte capaz de comprender la exposición de algún tema de cualquier asignatura que sea, difícilmente puede solucionar sus problemas cuando en ellos van involucradas cuestiones de carácter matemático. La más elemental simplificación le es de difícil comprensión y un cambio de signos algebráicos es capaz de desorientarlo totalmente. Pasa algún tiempo más o menos largo para que el alumno se pueda reincorporar a la exposición; mientras ello ocurre ha detenido en su totalidad el desarrollo normal de la clase. El alumno no se ha adaptado al sistema de estudios universitarios. Las huellas de la metodología de la Educación Media están vivas en él, espera que se le tome ---

de la mano y se le guie por el camino que se le quiere hacer andar, es incapaz de hacer luz a su alrededor para dar un paso hacia adelante y se conforma con permanecer en el lugar hasta donde ha sido llevado, o retroceder divagándose en lo que no es su materia de estudio con la pérdida de los conceptos hasta entonces adquiridos. Igual que en la Educación Media sus materias sólo serán objeto de estudio cuando se aproxime la prueba parcial, en el mejor de los casos una semana antes de someterse al examen.

b) ALTERACION DE LOS PROGRAMAS UNIVERSITARIOS.

Cuando el material de estudio ha aumentado de forma que exige del estudiante el máximo de tiempo útil y la mayor dedicación y sacrificio para salvar las pruebas a que será sometido, surgen los primeros conflictos. La presión que al principio se ejerció sobre el profesor llega hoy hasta los directores de escuela y la Junta Directiva en forma de múltiples solicitudes. Algunos piden la postergación de las fechas de examenes parciales; otros la exoneración de la obligación de presentarse al examen en las fechas indicadas y la solicitud que por unanimidad es aprobada en el sector estudiantil es la que tiende a lograr la disminución del material de estudio que se ha de cubrir en la prueba. Planteado esto, surge una situación difícil para las autoridades; el no acceder a lo solicitado es considerado por parte de los estudiantes como actitud anti-estudiantil y luego se arguye que el objetivo de tales autoridades es reprobar el mayor número de estudiantes, llegando a mencio narse en abono de tales propósitos hasta diferencias personales de profesor a alumno. Todo esto unido a la actitud poco constructiva de un gran sector del gremio de Ingenieros que ven en los estudiantes de Ingeniería, no a un grupo de elementos que pueden transformar técnica y científicamente al país, sino a nuevos profesionales que vendrán a saturar el ramo de la construcción, viene a formar un clima de pugna entre autoridades y estudiantes en el cual la peor parte la llevan las primeras, llegando a acceder así a la casi totalidad de las solicitudes presentadas. Un fenómeno muy significativo y dañino ha tenido lugar, lo que podríamos llamar el programa, el conjunto de conocimientos requeridos para aprobar la materia ha sido alterado; y no alterados para bien, pues aunque, aparentemente se hizo un bien al estudiante facilitándole el camino hacia la aprobación de su curso, se le hizo un mal al permitírsele tal aprobación sin el caudal de conocimientos necesarios y que más tarde le harán falta al cursar materias de carácter puramente profesional.

c) ALTO PORCENTAJE DE EGRESADOS, MINIMO PORCENTAJE DE GRADUADOS.

Esta alteración momentáneamente ha favorecido al estudiantado. Los cursos no son técnicamente dirigidos por las autoridades constituidas y se desarrollan a la deriva, cubriendo el porcentaje mínimo de horas clase que legalmente son exigidos sin preocuparse en nada del contenido de los cursos impartidos. Así se llega al final de la carrera observándose un ínfimo número de reprobados en los últimos años, hecho es te que hace pensar en que la capacidad intelectual, científica y profesional del estudiante de últimos años está acorde con su condición de egresado o de futuro egresado. En esta forma los cursos que se despiden de la Facultad de Ingeniería y Arquitectura son relativamente numerosos en cada Escuela. Poco tiempo, pasa sinembargo, para darse cuenta del daño académico en que se incurrió; los egresados, se retiraron de la Universidad y pasa un tiempo más o menos largo para que piensen en someterse a sus exámenes de grado; con raras excepciones casi nadie piensa en graduarse hasta varios años después de haber egresado. Esto como es natural va aumentando el número de estudiantes con sus planes de estudio terminados pero sin que puedan darle al país nuevos derroterros de progreso o incrementen los ya existentes, causa aparente de ello es el que las metas o propósitos que se propongan lograr muchos universitarios no llegue hasta la obtención de un título académico. El gran porcentaje de egresados aparentemente nos da la idea de que las inversiones de cultura han sido aprovechadas, lástima grande que sólo haya sido en beneficio de unos pocos; la nación que es la llamada a recoger los frutos de sus inversiones poco o nada podrá recuperar, si no se aumenta ese mínimo porcentaje de graduados registrado hasta hoy. Sólo en esta forma, la Universidad estará cumpliendo a cabalidad su función y el país entero podrá gozar de los beneficios de los adelantos de la cultura. Para ello, sinembargo, se precisa de la comprensión y colaboración de todos los sectores que entran en juego, así como el sacrificio y dedicación de estudiantes y profesores en igualar las metas de los países más avanzados que el nuestro.

CONCEPTOS MODERNOS DE LA ENSEÑANZA MATEMATICA
EN NUESTRA UNIVERSIDAD NACIONAL.

TEORIA DE CONJUNTOS. Será definido un conjunto como una colección de objetos; cada uno de estos objetos, que pueden ser, símbolos, personas, cosas, etc., recibirá el nombre de elemento del conjunto. Todos los números impares por ejemplo forman un conjunto que definiremos como "el conjunto de los números impares". Análogamente podemos definir "el conjunto de todos los números pares"; "el conjunto de todos los números primos"; etc. etc. Designaremos los conjuntos con las letras mayúsculas del alfabeto A, B, C,.... Así podemos decir, por ejemplo, que A es el conjunto de todos los números impares; que B es el conjunto de números pares, etc.; ello se escribirá así:

A = conjunto de números impares

B = conjunto de números pares

Designaremos los elementos de un conjunto con las letras minúsculas del alfabeto a, b, c... Así podemos llamar a los elementos del conjunto de los números impares: a_1, a_2, a_3......a_n donde a_1 será el primer impar; a_2 el segundo, y así sucesivamente. Cuando nos vayamos a referir a un conjunto expresando sus elementos, estos se encerrarán en una llave así:

$$\{a_1, a_2, a_3........a_n\}$$

Siempre que encontremos el signo {} estaremos frente a un conjunto cuyos elementos son los símbolos que están dentro. En el caso de los números impares escribiremos:

$$A = \{a_1, a_2, a_3 .... a_n\}$$

Veamos algunos ejemplos más:

$A = \{1, 3, 5, 7 ....\}$ Impares

$B = \{2, 4, 6, 8 ....\}$ Pares

$C = \{3, 5, 7 ....\}$ Primos

No siempre se mencionará cada uno de los elementos de un conjunto, para definirlo en su totalidad, bastará mencionar una o varias propiedades comunes a los elementos del mismo y lo habremos definido. Por ejemplo podemos referirnos al conjunto cuyos elementos son impares como al conjunto de elementos a_n, tales que a_n es un impar. Esto en símbolos matemáticos se escribe así:

$$A = \{a_n / a_n \text{ es impar}\}$$

el símbolo / se lee "tal que"; en esta forma la referencia es más completa y no hemos escrito ningún elemento del conjunto en particular.

Otros ejemplos:

$$B = \{b_n / b_n \text{ es par}\}$$

$$C = \{c_n / c_n \text{ es número primo}\}$$

Con base a definiciones como las anteriores se pueden formar diver sos tipos de conjuntos. Veamos, sea formar el conjunto: $D = \{x/x$ es par entre cero y diez$\}$. Interpretamos esto como que D es el conjunto de elementos x tales que x es un número par cualquiera comprendido entre cero y diez; nótese que dice entre cero y diez, ello indica que ambos quedan excluidos; luego D se definirá: como $D = \{2,4,6,8\}$ un conjunto de cuatro elementos.

En otros casos no será tan fácil encontrar directamente el valor de cada uno de los elementos de un conjunto; habrá, para ello, que hacer algunas operaciones matemáticas previas como en el caso:

$$E = \{x/x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

Se observa que habrá determinados valores de x que satisfacen esa ecuación, otros no lo harán, de forma que el conjunto en mención es el compuesto por los elementos 2, y 3 ya que sólo ellos satisfacen la relación dada.

Así pues:

$$E = \{x/x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$$

Entre todos los conjuntos posibles hay uno de características especiales; el denominado "CONJUNTO VACIO", su característica esencial es que carece de elementos y se representa por la letra ϕ (si); hay que hacer distinción entre el conjunto vacío y el conjunto cuyo único elemento es cero. Sean:

$S = \phi$ = conjunto vacío

$T = \{0\}$ = conjunto cuyo único elemento es cero

Un conjunto puede ser igual a otro conjunto, y cuando tal cosa --- ocurre ello significa que los elementos de uno de ellos son iguales a los elementos del otro. Así, si A y B son conjuntos y son iguales, entonces escribiremos:

$$A = B$$

ello implica que cada uno y todos los elementos de A son iguales a cada uno y todos los elementos de B; si hay uno solo de ellos distinto en--- tonces $A \neq B$.. Esto se resume en el denominado:

AXIOMA DE EXTENSION: Dos conjuntos son iguales si y sólo si tie-- nen los mismos elementos.

De lo anterior se desprende que dos conjuntos pueden tener uno o varios elementos iguales. Si todos son iguales, ambos conjuntos serán iguales; si solamente algunos, los conjuntos son desiguales y habrá que distinguir cuales elementos pertenecen a ambos y cuales no. Supongamos que:

$A = \{a, b, c, d\}$ y (1) y

$B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ (2)

Se ve que los elementos a, b, c, d, pertenecen a ambos conjuntos y los elementos e, f, g, sólo pertenecen al conjunto B. Para indicar cuándo un elemento pertenece a un conjunto o no, usaremos el signo "$\in$" que se lee "pertenece a" y se escribe entre el elemento poseído y el poseedor. Por ejemplo:

$a \in A$ significa que el elemento a, pertence a el conjunto A. Si un elemento no pertenece a un conjunto ello lo indicaremos con el signo " $\notin$ " que se lee " no pertenece a ". Así, vemos que e, f, g no pertenecen al conjunto A. Ahora podemos escribir:

$a \in A$; $b \in A$; $c \in A$; $d \in A$; $e \notin A$; $f \notin A$; $g \notin A$:

Se ha visto entonces que entre dos conjuntos hay elementos que pertenecen tanto a uno como a otro; esos elementos pueden formar a su vez un nuevo conjunto que será "el conjunto formado por los elementos comunes a los conjuntos dados". Esto se representa simbólicamente así:

Si A es un conjunto y B, otro conjunto entonces $A \cap B$ = conjunto de elementos commes a A y B el signo $\cap$ expresa intercepción y la expre--sión toda se lee "El conjunto A interceptado con el conjunto B". Así, de las expresiones (1) y (2), tenemos:

$$A \cap B = \{a, b, c, d\}$$

En la misma forma hay un conjunto que contiene tanto a los elementos de uno como de otro conjunto, y el símbolo de unión " $\cup$ " nos ayuda a determinarlo así:

$A \cup B$ = conjunto de elementos que están en A y que están en B. De (1) y (2).

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g,\}$; nótese que la unión tiene los elementos de uno y de otro conjunto, pero no repite los elementos aunque alguno de éllos esté en ambos; es decir, el conjunto unión sólo expresa la condición de que un elemento está en uno o en otro conjunto, o en ambos a la vez, pero no los suma.

Si dos conjuntos son iguales, digamos C = E ello implica que el conjunto intersepción $C \cap E = C = E$ ya que todos los elementos de $C \cap E$ están en C y están en E a la vez. Lo mismo ocurre con $C \cup E$.

Otros símbolos importantes serán " $\forall x$ " que se lee "para todo x"; " $\leftrightarrow$ " que se lee " si y sólo si"; " $\rightarrow$ " que se lee " implica ".

Ahora nuestro simbolismo ya nos permite leer algunas expresiones sobre conjuntos.

$A = \{x/x \in A\}$ se refiere al conjunto A como el conjunto de elementos x tales que cada elemento x pertenece a A.

$\{\forall x/x \notin A\} \leftrightarrow \{A = \phi\}$ se refiere a un conjunto de elementos x tales que ningún x pertenece al conjunto A, ello será cierto si y sólo si A es un conjunto vacío.

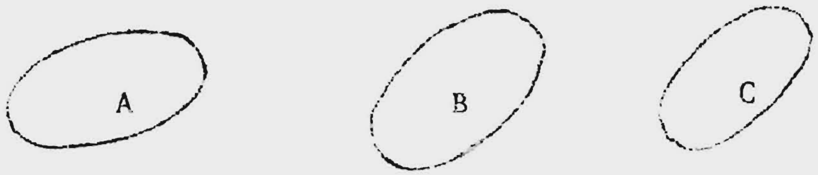
Otro conjunto notable es el llamado conjunto universal y se refiere al conjunto que reune a todos los elementos de una misma especie. . . Por ejemplo, hablando de libros, el conjunto universal incluirá a todos los libros que puedan existir ya sea de Biología, Matemáticas, Medicina etc.; al hablar de lápices, dicho conjunto se referirá al total de objetos que pueden desempeñar la función de un lápiz; al hablar de números, el conjunto universal se referirá tanto a números enteros, fraccionarios, positivos, negativos, reales, complejos, etc. etc.

El conjunto universal se representa por U.

Todo conjunto puede ser considerado como compuesto por otros conjuntos menores o iguales al conjunto mismo que reciben el nombre de "subconjuntos". Así el conjunto universal de libros está compuesto o de todos los elementos libros, o de todos los subconjuntos: Libros de Medicina, libros de leyes, libros de Psicología, etc. Los subconjuntos pueden a su vez considerarse como compuestos por otros subconjuntos menores, por ejemplo, el subconjunto de "Libros de Matemáticas" tendrá como subconjuntos menores a: "Libros de Aritmética", "Libros de Algebra", "Libros de Trigonometría", etc. etc.

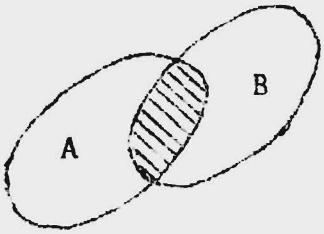
Los conceptos expuestos sobre uniónc intercerpción pueden ser expuestos gráficamente por medio de los llamados "DIAGRAMAS DE VENN". Según Venn, un conjunto puede ser representado gráficamente por óvalos, cuadrados, o rectangulos o cualquier otra figura.

Así:



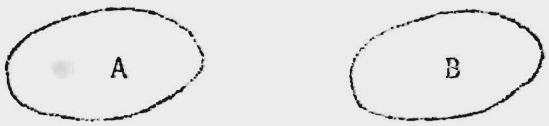
La intercepción de dos conjuntos se representa entonces:

a) Si los conjuntos tienen elementos comunes



La intercepción es real, el conjunto $A \cap B$ existe

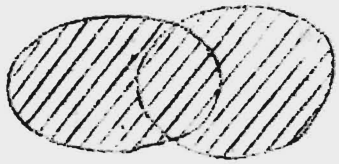
b) Si los conjuntos no tienen elementos comunes



la intercepción es irreal, el conjunto $A \cap B$ es un conjunto vacío y los conjuntos A y B se dice son disjuntos.

La unión se representará

a) Si tienen elementos comunes



$A \cup B$ existe

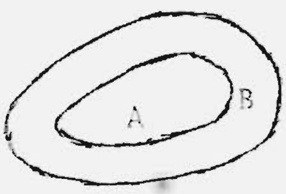
b) Si no tienen elementos comunes

$A \cup B$ existe

Si un conjunto es subconjunto de otro conjunto se dice que el primero está incluido en el segundo y para representarlo matemáticamente se usa el símbolo " $\subset$ " que se lee "es subconjunto de" o bien "está incluído en"; así:

Si $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

Se ve que A es subconjunto de B y podemos escribir $A \subset B$. Por medio de diagramas de Veen representariamos



Todos los elementos de A están en B pero B es de mayor extensión que A.

Otros símbolos importantes son " $\wedge$ " y " $\vee$ " que son equivalentes a las conjunciones "y" y "o" respectivamente. Si por ejemplo quisiéramos referirnos a un elemento del subconjunto A de los mencionados antes, notamos que este elementa está en A; pero al mismo tiempo está en B por ser A subconjunto de B; simbólicamente escribiremos

$$A = \{x / x \subset A \wedge x \subset B\}$$

MATRICES. Se define una matriz como un arreglo en filas y columnas de un conjunto de objetos. Si el arreglo tiene "p" filas y "q" columnas se dice que es una matriz de tipo "p x q". Si uno cualquiera de estos valores p V q es mayor o menor, la matriz se dice ser "Rectangular"; si p = q, entonces la matriz se denomina "Cuadrada".

Cada objeto, o cada elemento de una matriz se representa por un símbolo único, y común para todos, acompañado de dos subíndices que representan la fila y la columna donde está ubicado. Supongamos que para una matriz cualquiera, sus elementos se representarán por el símbolo común " a " acompañado de los subíndices " i " y " j "; entonces cada elemento tendrá la forma " a_{ij} ". En esta forma " a " puede representar cualquier objeto o valor, incluso cero y estar ubicado en cualquier fila desde la primera hasta la p-ésima según que " i " tome valores desde 1 hasta p; y estar ubicado en cualquier columna desde la primera hasta la q-ésima, según que j tome valores desde 1 hasta q.

Veamos una matriz desarrollada de tipo 3x3. Aquí, p=3, p=q, luego es una matriz cuadrada de tres filas y tres columnas; si la denominamos A, su forma será:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Otros ejemplos son:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{matriz de tipo 2x2} \quad \text{(cuadrada)}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \text{matriz de tipo 2x3} \quad \text{(rectangular)}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz de tipo 3x2} \quad \text{(rectangular)}$$

Obsérvese que los elementos de una matriz se encierran entre corchetes, ello es para diferenciarla de su determinante que tiene exactamente la misma forma y representación, pero cuyo valor (el valor del determinante) es una característica de la matriz ya que nos determina el valor de la matriz y se encierra en simples barras.

Por vía de ilustración veamos algunos ejemplos numéricos. Supongamos las matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Vemos que A es de tipo 2x2; B es de tipo 3x3; C es de tipo 2x3. Además ellas son equivalentes a:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

en donde: $a_{11} = 3;\ a_{12} = -2;\ a_{21} = 0;\ a_{22} = 1$

$b_{11} = -1;\ b_{12} = 4;\ b_{13} = 3$ $\qquad$ $c_{11} = -6;\ c_{12} = 3;\ c_{13} = -2$

$b_{21} = 2;\ b_{22} = 0;\ b_{23} = -1$ $\qquad$ $c_{21} = -1;\ c_{22} = 2;\ c_{23} = 4$

$b_{31} = -2;\ b_{32} = 3;\ b_{33} = -3$

OPERACIONES CON MATRICES.

I - SUMA Y RESTA. La suma o diferencia de matrices está definida por una nueva matriz cuyos elementos son, la suma o diferencia de los respectivos elementos de las matrices dadas; para que ello sea posible, ambas deben tener el mismo número de filas y de columnas, es decir deben ser del mismo tipo. Supongamos que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

La suma será: $\qquad$ La resta será:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}; \quad A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{bmatrix}$$

Con valores numéricos. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad A+B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } A-B = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Las operaciones son definidas porque A tiene dos filas y dos columnas y B también; si ello no ocurriera la suma y resta no serían posibles.

II - MULTIPLICACION.

1o. Producto de una matriz por un escalar. Este producto, da lugar a una nueva matriz cuyos elementos resultan multiplicados por el escalar. Sea la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$ que se va a multiplicar por el escalar k.

el producto será:

$$kA = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{vmatrix}$$

Esta definición nos permite ver que si todos los elementos de una matriz tienen un factor común, cada elemento puede ser dividido entre ese factor y sacar este como factor de la matriz. Numéricamente, sea multiplicar A por 4 cuando:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

el producto será $4xA = 4A = 4 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 20 \\ 0 & 12 & -4 \end{bmatrix}$

2o. Producto de una matriz por otra matriz. Se define al producto de dos matrices como una nueva matriz cuyos elementos están formados por la suma de los productos de cada elemento de una fila de la primera matriz por cada elemento de una columna de la segunda matriz; esto im-plica que para estar definido el producto de dos matrices es condición necesaria el que, el número de columnas de la primera, sea igual al número de filas de la segunda ya que al no cumplirse esta condición, ha-bría productos no definidos por no tener su factor correspondiente en una u otra matriz.

Según la definición anterior, si:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{y } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Numéricamente, supongamos que:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} (4)(1)+(-5)(3) & (4)(-1)+(-5)(-2) \\ (0)(1)+(2)(3) & (0)(-1)+(2)(-2) \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz el producto queda:

$$AB = \begin{bmatrix} 4-15 & -4+10 \\ 0+6 & 0-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que el primer elemento de la primera fila de la matriz producto está formado por la suma de: Primer elemento de la primera fila de A por el primer elemento de la primera columna de B, más el segundo elemento de la primera fila de A por el segundo elemento de la primera columna de B, más el tercer elemento de la primera fila de A por el tercer elemento de la primera columna de B, así sucesivamente. En la misma forma se obtiene el elemento de la 1a. fila y segunda columna de la matriz producto; para ello intervienen los elementos de la 1a. fila de A y los de la 2a. columna de B. En esta forma, el número de la fila y el número de la columna que se multiplican, define el elemento de posición en la matriz producto. El proceso vale para matrices de cualquier tipo.

De lo expuesto hasta hoy es fácil ver que:

La suma es conmutativa y asociativa $A + B = B + A$

La multiplicación no es una operación conmutativa $AB \neq BA$

Hablando de matrices; en términos generales, el orden de los factores, sí altera el producto. Sin embargo habrá casos particulares en que por mera casualidad el producto tomado en cualquier sentido dé el mismo resultado, en tal caso se dice que las matrices factores conmutan, si no, se dice que son anticonmutativas.

Antes de pasar a definir la división de matrices conviene hablar un poco acerca de algunos conceptos, por ahora nuevos para el estudiante de Educación Media.

Matriz Transpuesta. Si a una matriz dada, le cambiamos sus filas por sus columnas obtenemos otra matriz distinta de la anterior. Obsérvese bien, lo que era primera fila, pasa a ser primera columna; lo que era segunda fila, pasa a ser segunda columna; la tercera fila se hace tercera columna y así sucesivamente y viceversa.

Esta nueva matriz así encontrada se denomina "matriz transpuesta".

Matriz cero. Se define como matriz cero, a toda matriz cuyos elementos sean cero. Se representa por " 0 ".

Matriz Diagonal. En toda matriz hay elementos que reunen la condición de que el elemento a_{ij} está en tal posición que ambos subíndices son iguales; tal ocurre con el elemento a_{11}, aquí $i = 1$ y $j = 1$; otro ejemplo es a_{22} en que $i = 2$ y $j = 2$; lo mismo ocurre con los a_{33}; a_{44}; etc. etc. Si observamos cuidadosamente, veremos que los elementos en mención están colocados en una matriz en forma diagonal. Ejemplo: Sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que no sólo los elementos enumerados están colocados diagonalmente, lo están también a_{14} con a_{25}; así mismo a_{13}, a_{24} y a_{35} y otros según el orden y sentido en que se tomen; pero entre todos sólo hay una diagonal que satisface el que $i = j$, esa se denomina diagonal principal. Entonces, cuando todos los elementos de una matriz son cero, excepto los elementos de la diagonal principal decimos que esa es una "matriz diagonal" .

Matriz Unidad. Cuando una matriz diagonal tiene además los elementos de su diagonal principal iguales a uno, recibe el nombre de "matriz unidad", o "matriz idéntica". Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{matriz diagonal de tipo 3x3}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{matriz unidad de tipo 3x3}$$

Es fácil ver por desarrollo de determinantes que el valor de la matriz idéntica es uno, de allí su otro nombre, matriz unidad.

VECTORES. En nuestro estudio matemático nos encontramos a cada momento con ciertas magnitudes, las cuales para determinarlas basta indicar un número real cualquiera que indique su medida. Ejemplos de ellos son: el volumen de un cuerpo, el trabajo, la potencia, el largo de una mesa, etc. Tales magnitudes se conocen con el nombre de escalares. Otras magnitudes en cambio no pueden ser determinadas por ese sólo hecho; hay además que dar otros conceptos como la dirección y el sentido en que se producen; ejemplos de ellas son la velocidad, la aceleración, la cantidad de movimiento, la intensidad de un campo magnético, etc. etc. Para la velocidad por ejemplo no bastará decir que es de x kilómetros por hora, faltará indicar en qué dirección se desplaza el móvil y en qué sentido se dirige. Tales magnitudes se denominan: VECTORIALES.

La dirección de un vector está definida por una recta, y ella es, "la recta que contiene el vector", así considerada, vemos que todas las rectas que son paralelas tienen la misma dirección y rectas no paralelas indican direcciones distintas.

A una dirección definida corresponden dos sentidos distintos que se asignan a las dos orientaciones posibles de la recta.

De lo anterior, podemos definir una magnitud vectorial, dando la intensidad del fenómeno (que es una magnitud escalar), la dirección en que se produce y el sentido.

Segmento de recta. Dos puntos cualesquiera de una recta definen un segmento, ese segmento queda determinado por sus puntos extremos, tal

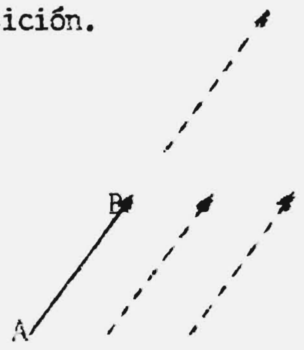
el segmento AB de la figura. Si los puntos sobre la recta los tomamos en un sentido determinado entonces se dice que el segmento de recta está orientado. Si los puntos A y B los tomamos de A hacia B el segmento AB será orientarlo de A hacia B; si los puntos se toman de B hacia A, el segmento será orientado de B hacia A.

VECTOR. Recibe el nombre de vector, todo segmento orientado y los puntos que lo determinan se llaman: origen el primero y extremo el segundo.

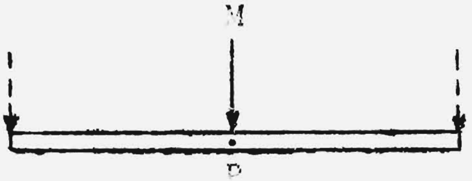
Toda magnitud vectorial puede ser representada por un vector cuya longitud sea proporcional a la intensidad, recibiendo el nombre de módulo, dicha longitud. El módulo de un vector es siempre un número positivo que representa en valor absoluto el valor del vector. Si el módulo de un vector es cero, el segmento que lo define se reduce a un punto, ya que el extremo se confunde con el origen y aún cuando no se puede hablar estrictamente de un vector, por no estar definida la dirección ni el sentido, se conviene en denominarlo " vector cero " cuyas características son: módulo cero, dirección indefinida, o sea que puede tener cualquiera, entre infinitas direcciones, y sentido indefinido.

Para representar un vector se usan letras minúsculas o mayúsculas con una flecha encima. Por ejemplo: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{M}$, $\vec{O}$; se refieren a los vectores a, b, M, O. Otras veces se representa indicando por una letra su origen y por otro su extremo, así OP se refiere al vector cuyo origen es el punto O y cuyo extremo es el punto P. Para efectos de tésis usaré este último sistema. Al esquematizarlo se dibuja una flecha en el extremo para indicar el sentido.

Vectores libres son aquellos que se pueden desplazar paralelamente a su dirección o sobre su recta de acción, sin alterar su valor; por ejemplo, el vector AB que puede tomar las posiciones indicadas en la figura, sin sufrir cambio en su valor, el efecto que producen es el mismo en cualquier posición.



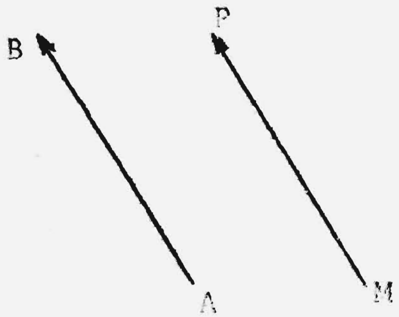
Vectores deslizantes son aquellos que sólo se pueden desplazar sobre su recta de acción sin alterar su valor, ni el efecto que producen; ya que aún cuando puedan desplazarse paralelamente a sí mismos sin alterar su valor, cambia el efecto que producen. En la regla apoyada en su centro y libre en sus extremos representada en la figura siguiente,



el vector MP aplicado en el centro no cambia si lo desplazamos hacia -- uno cualquiera de los extremos tal como lo indican las posiciones en lí neas de puntos; pero es claro que el efecto que produce sobre la regla de ningún movimiento en la primera posición se transforma en un giro de la regla sobre su punto de apoyo cuyo sentido (el de el giro) depende de la posición del vector.

Vectores fijos. Son aquellos que no alteran su valor, ni el efecto que producen únicamente cuándo conservan su dirección, su sentido y su origen.

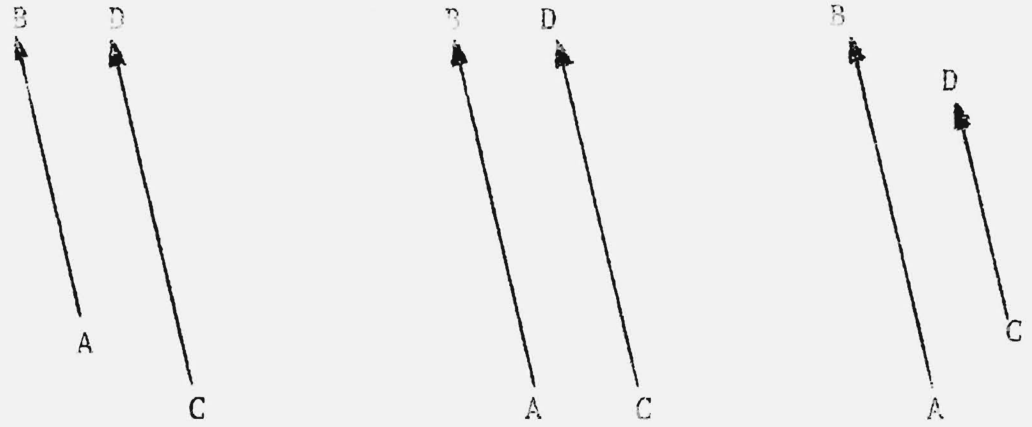
Decimos que dos vectores son iguales cuando tienen la misma dirección, el mismo sentido e igual módulo. Los vectores representados gráficamente son iguales si el módulo de AB es igual al de MP, ello se in-



dica así:

$$AB = MP$$

Si dos vectores son paralelos pero de módulo distinto, uno de --- ellos puede ser considerado como equivalente al otro, multiplicado por una cantidad escalar m que puede dar lugar a:

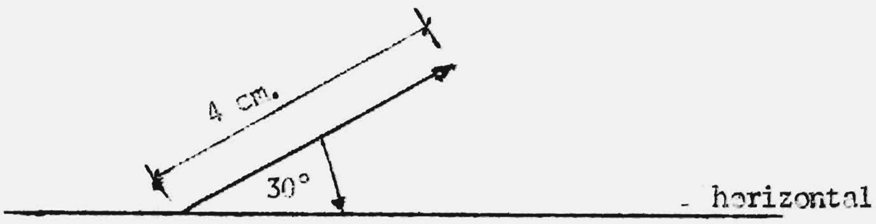


AB = m(CD) m < 1

AB = m(CD) = CD m = 1

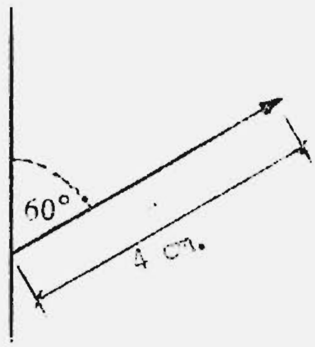
AB = m(CD) m > 1

Al referirnos a un vector indicaremos la dirección por el ángulo que haga la recta que lo contiene con la horizontal o con la vertical, así: Sea dibujar un vector de módulo 4 que hace un ángulo de 30° con la horizontal y dirigido hacia arriba y a la derecha.

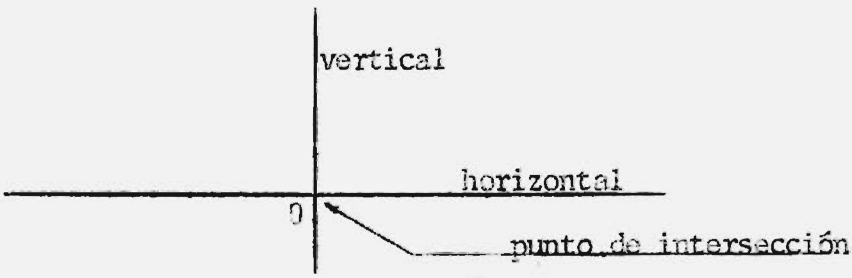


Usamos 1 cm. para representar cada unidad del módulo y desde un -- punto cualquiera de la horizontal dibujamos una línea de 4 cm. de largo haciendo un ángulo de 30° tal como indica la figura.

El mismo problema lo plantearemos ahora así: Sea dibujar un vec-- tor de módulo 4 que hace un ángulo de 60° con la vertical y dirigido hacia arriba y hacia la derecha.

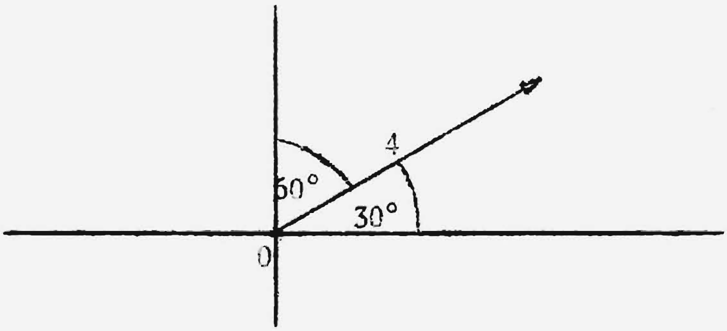


Es fácil ver que se trata del mismo vector, y que partiendo de la horizontal se puede dibujar más a la derecha o más a la izquierda y que partiendo de la vertical se puede dibujar más arriba o más abajo. Con el objeto de simplificar nuestras operaciones usaremos juntas la vertical y la horizontal y a partir del punto donde se cortan (Punto de intersección) dibujaremos todo vector a estudiar. Las líneas de refe-- rencia nos quedan entonces así:



Matemáticamente, sin embargo no los designaremos como queda dicho. A la horizontal se le llamará: eje horizontal, eje de las equis o eje de las variables independientes; a la vertical se le llamará; eje vertical, eje de las yes o eje de las variables dependientes; al punto de intersección se le denominará: origen y se indicará con la letra o.

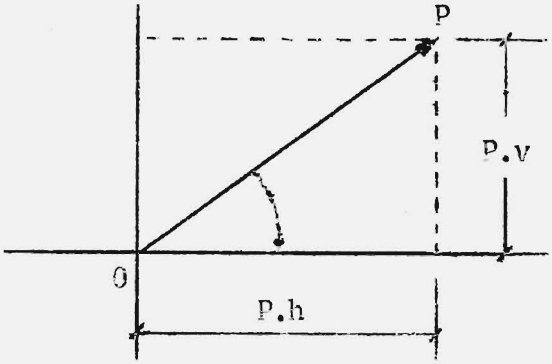
Al conjunto de los tres elementos se le conoce como: Sistema de ejes Cartesiano en honor del célebre filósofo y matemático René Descartes que fue quien lo usó por primera vez. En un sistema de ejes tal, el vector de módulo 4 definido anteriormente se representará así:



Todo vector entonces, tiene una proyección sobre el eje horizon---tal y una proyección sobre el eje vertical.

Sea el vector OP, que hace un ángulo A con la horizontal y menor de 90°.

Toda proyección horizontal a partir del origen hacia la derecha, será positiva y a partir del origen hacia la izquierda será negativa; recíprocamente, todo número positivo que represente proyección horizontal de un vector se dibujará a la derecha del origen y hacia la izquierda si es negativo.



P.v. =Proyección vertical

P.h. =Proyección horizontal

P.v. = OP Sen A

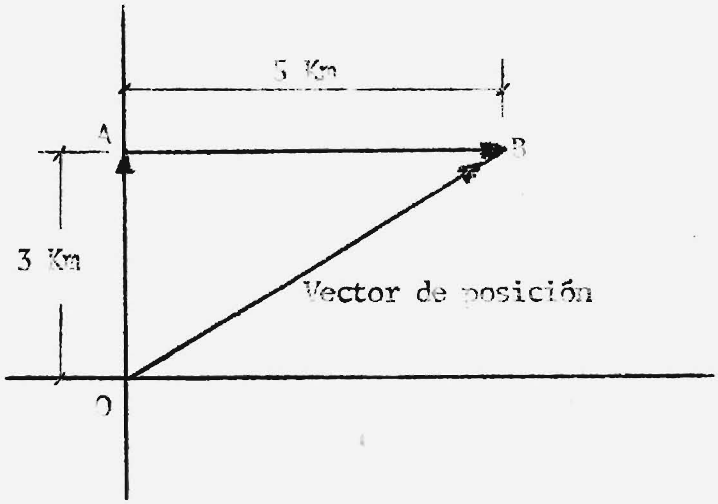
P.h. = OP Cos A

Análogamente, toda proyección vertical del eje horizontal hacia arriba es positiva y del eje horizontal hacia bajo es negativa; recí---procamente todo número que represente proyección vertical de un vector se mostrará gráficamente hacia arriba si es positivo y hacia bajo si es negativo.

OPERACIONES CON VECTORES.

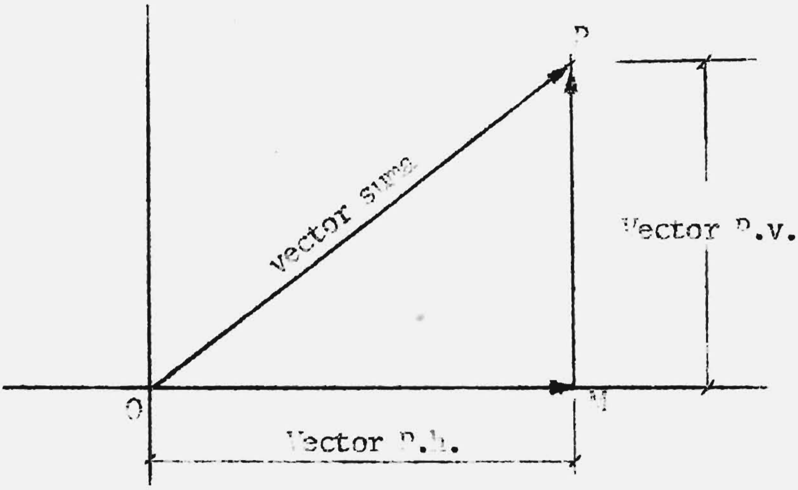
SUMA. Para sumar dos o más vectores se colocan uno a continuación de otro y el resultado es otro vector, llamado vector resultante o vector suma y que queda definido en dirección y sentido, uniendo el origen del primer vector con el extremo del último; la magnitud del segmento orientado así obtenido es el módulo de vector resultante. Ilustremos esto:

Un automóvil viaja a partir de un punto fijo 3 Km. hacia el norte, luego cruza y camina 5 Km. al este, determinar gráficamente la posición del automóvil.



para resolverlo tomamos segmentos de recta orientados según los senti-- dos dados por el problema y proporcionales a las distancias mencionadas. Usamos 10 mm. equivalentes a 1 Km.; entonces partiendo del origen del sistema de ejes nos desplazamos 30 mm = 3 Km hacia arriba y localizamos el punto A, que es donde cruza el automóvil para tomar la dirección este, a partir de aquí nos desplazamos 50 mm = 5 Km al E y llegamos al punto B que es la posición final del automóvil.

Definida en esta forma la suma, podemos considerar a todo vector como la suma de sus respectivas proyecciones y a su módulo (por el teorema de Pitágoras) como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los módulos de las proyecciones.



De la figura:

Vector OP = Vector OM + Vector MP

OP = Suma de sus proyecciones.

Es usual, en tratados más avanzados de vectores denominar genéricamente por "a_1" (a-subuno) el valor escalar de la proyección horizontal y por "a_2" (a-subdos) el valor escalar de la proyección vertical (cuando hay varios vectores en estudio se usan varias letras para diferenciarlos); pero como la proyección de un vector en cualquier dirección es una magnitud vectorial, es preciso acompañar a dichos escalares de otras cantidades denominadas "versores" que no son otra cosa que vectores de magnitud unitaria; y que se representan por "i" cuando se refiere a un vector unidad en dirección horizontal y por "j" cuando se refiere a un vector unidad en la dirección vertical. Considerado en esta forma el vector representado en la figura anterior tendrá como proyecciones:

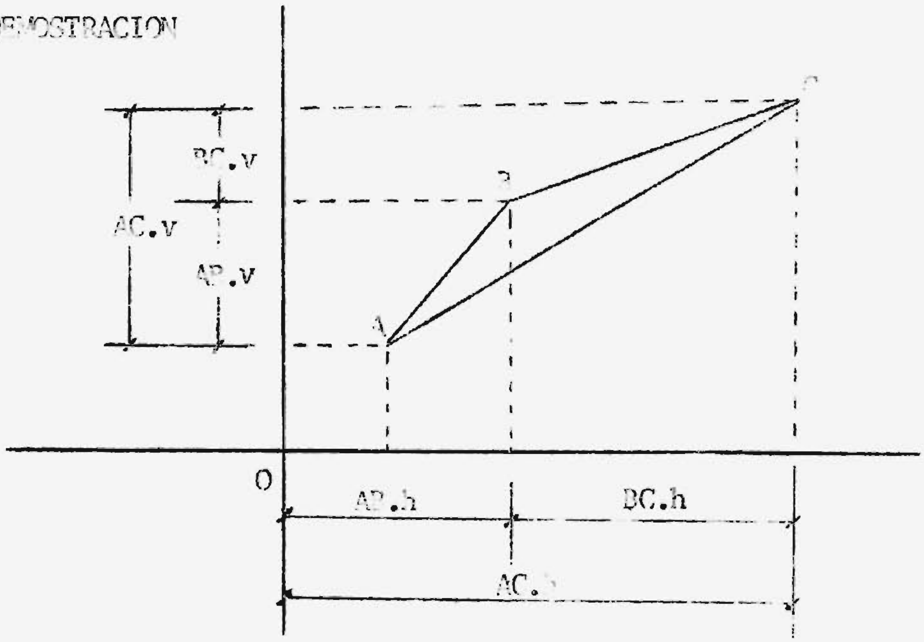
$$P.h = a_1 i$$

$$P.v = a_2 j$$

y el vector suma será $OP = a_1 i + a_2 j$.

Si los vectores sumandos no están definidos por su módulo, dirección y sentido, sino que únicamente están dadas las proyecciones de cada uno, se demuestra que la suma algebráica de las proyecciones horizontales es igual a la proyección horizontal del vector suma; y la suma algebráica de las proyecciones verticales es igual a la proyección vertical del vector suma.

DEMOSTRACION



Sean los vectores AB y BC cuya suma es AC en donde

AB.h = proyección horizontal de AB

BC.h = proyección horizontal de BC

AC.h = proyección horizontal de AC

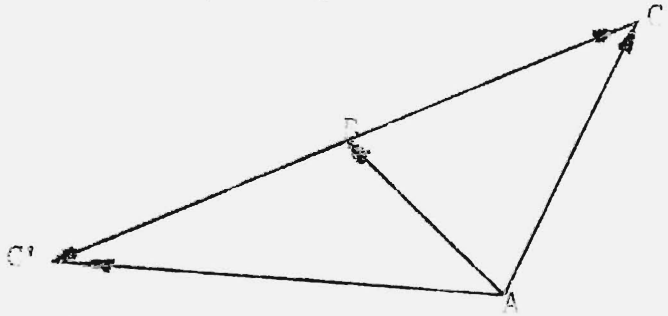
Dado que el todo es igual a la suma de las partes

$$AC.h = AB.h + BC.h \qquad \text{o sea que}$$

la proyección horizontal del vector suma es igual a la suma algebráica de las proyecciones horizontales de los vectores componentes o sumandos.

Con igual razonamiento se demuestra para las proyecciones verticales y con cualquier número de vectores sumandos.

RESTA. Simplificadamente la resta de dos vectores equivale a sumar al vector minuendo, el negativo del vector sustraendo.



Si AB y BC se suman nos dan

$$AC = AB + BC$$

Si en lugar de sumar BC sumamos -BC obtenemos

$$AC' = AB + (-BC) = AB - BC$$

el vector resta se obtiene entonces uniendo el origen del minuendo con el extremo del negativo del sustraendo.

Si los vectores están dados por sus proyecciones, por un proceso análogo al de la suma se demuestra que la proyección horizontal del vector resta es igual a la diferencia de las proyecciones horizontales de los vectores dados y la proyección vertical del vector resta es igual a la diferencia de las proyecciones verticales de los vectores dados.

Del concepto de resta de vectores se ve fácilmente que si dos vectores tienen el mismo origen, el segmento que une sus extremos es igual a la diferencia de los vectores dados en los que el punto donde se juntan dos extremos determina el extremo del vector minuendo quedando el otro como sustraendo. Así en la figura anterior AC' y AB son dos vectores con el mismo origen, en el punto C' se unen dos extremos de vectores, luego AC' es el vector minuendo y obligadamente AB será el vector sustraendo y

$$BC' = AC' - AB$$

Si el segmento BC' estuviera orientado de C' a B sería en el punto B donde se juntarían dos extremos de vectores y la resta sería:

$$C'B = AB - AC'$$

MULTIPLICACION. En la multiplicación de vectores tenemos que distinguir:

a) El producto de un escalar por un vector.

Sea m un escalar y OP un vector, m multiplicado por OP da m(OP) y es un vector: igual a OP si $m = 1$

mayor que OP si $m > 1$

menor que OP si $m < 1$

La multiplicación de un vector por un escalar es conmutativa

$$m.(OP) = (OP).m$$

b) El producto de un vector por otro vector. Este producto tiene dos formas:

1o. El llamado "producto escalar" y

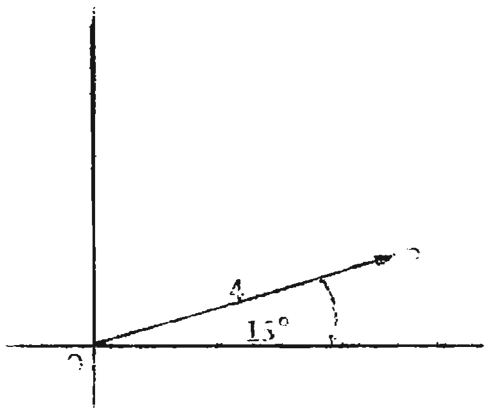
2o. El llamado "producto vectorial".

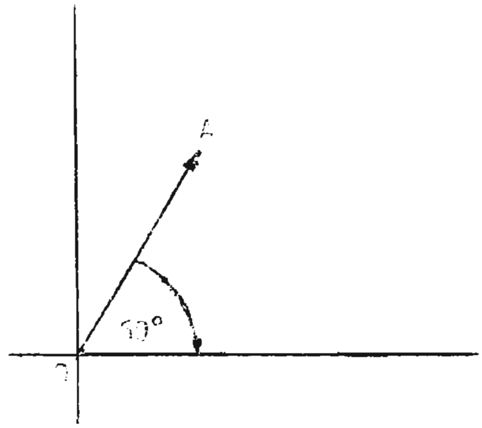
1o. El producto escalar de dos vectores se define como el producto de los módulos de los vectores dados por el coseno del ángulo comprendido entre éllos. Se representa por la indicación de los vectores dados separados por un punto que indica multiplicación escalar. Si AB y CD son dos vectores y representamos por $|AB|$ y $|CD|$ sus módulos, entonces:

$$(AB).(CD) = |AB||CD| \cos \omega$$

Siendo ω el ángulo entre AB y CD

Esta expresión se lee: "El producto escalar del vector AB por el vector CD es igual a el módulo de AB por el módulo de CD por el coseno del ángulo comprendido entre los vectores dados". Una ilustración numérica:





$|OP| = 4$ $\qquad\qquad$ $|OA| = 3$

$$\omega = 60° - 15° = 45°$$

$$\cos \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(OP).(OA) = 4 x 3 x \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

Si los vectores están dados por medio de sus proyecciones, la multiplicación se hace miembro a miembro; pero antes de verificar esto, veamos el producto escalar de los versores "i" y "j".

$$i.i = |i||i| \cos \omega$$

pero la magnitud de i es 1 (uno) y el ángulo ω entre i y él mismo es 0° (cero grados), tenemos que

$$i.i = 1x1x\cos 0° = 1x1x1 = 1$$

Razonando en igual forma se demuestra que

$$j.j = 1$$

Calculo ahora i.j

$$i.j = |i||j| \cos \omega$$

el ángulo ω entre i y j es 90°, luego

$$i.j = 1x1 \cos 90° = 1x1x0 = 0$$

análogamente $j.i = 0$

Pasemos ahora al caso de 2 vectores cualesquiera: Sean

$$OA = a_1 i + a_2 j \qquad y \qquad OB = b_1 i + b_2 j$$

y el producto escalar

$$(OA).(OB) = (a_1 i + a_2 j).(b_1 i + b_2 j)$$

$$(OA).(OB) = a_1 b_1 i.i + a_1 b_2 i.j + a_2 b_1 j.i + a_2 b_2 j.j$$

Sustituyendo el valor del producto de los versores

$$(OA).(OB) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Obsérvese que el producto escalar de dos vectores dados por sus proyecciones es igual a la suma del producto de las primeras proyecciones, más el producto de las segundas proyecciones y está definido aún cuando no se conoce el ángulo entre los vectores pues el hecho de conocer las proyecciones en sí, lleva implícita la inclinación del vector ya que para cualquier vector se cumple que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_2}{a_1}$$ Siendo α el ángulo de inclinación del vector.

2o. El producto vectorial de dos vectores. Se define el producto vectorial de dos vectores como el producto de sus módulos por el seno del ángulo comprendido entre éllos. Se representa por el signo "x" entre los vectores nominados.

Si OA y OB son vectores y ω el ángulo entre éllos,

$$(OA)x(OB) = |OA||OB| \text{sen } \omega$$ y se lee:

"el producto vectorial de los vectores OA y OB es igual al módulo de OA por el módulo de OB por el seno del ángulo entre éllos".

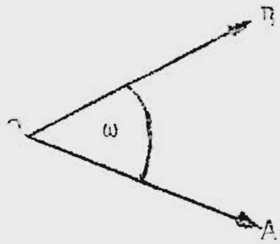
El producto vectorial es también un vector por lo que siendo el segundo miembro de la ecuación anterior una cantidad escalar debemos acompañarla de un versor para que represente un vector. A este efecto usemos un versor cualquiera, llamemosle "u" y la expresión toma la forma:

$$(OA)x(OB) = |OA||OB| \text{ sen } \omega.u$$ que es más correcto

Si el producto vectorial es un vector, nos falta definir su dirección y su sentido.

La dirección es perpendicular al plano definido por los vectores dados, y pasa por el punto de intersección de ellos. Así, si los vectores están en el plano del papel, la dirección del producto vectorial será perpendicular a la página, pasando por la intersección de éllos.

El sentido será hacia el lector o alejándose del lector según el orden de los factores.



Si dados los vectores, tal como indica la figura, el orden se toma indicando primero OA y luego OB, el sentido será hacia el lector y pasando por O; si por el contrario se indica primero OB y luego OA el sentido es alejándose del lector. Se observa que aún cuando la magnitud y dirección del vector producto es la misma; los sentidos son opuestos; de manera que

$$(OA)x(OB) = - (OB)x(OA)$$

o sea que en el producto vectorial, el orden de los factores, si altera el resultado.

Veamos qué ocurre cuando los vectores están definidos por sus proyecciones. Sean

$$OA = a_1 i + a_2 j \qquad y \qquad OB = b_1 i + b_2 j$$

Veamos antes que ocurre con el producto vectorial de los versores "i" y "j".

el ángulo entre i y el mismo i es 0° (cero grados)

el ángulo entre i y j es 90°

el ángulo entre j y el mismo j es 0°; entonces

$i \times i = |i||i| \text{ sen } \omega . u = 1 \times 1 \times \text{ sen } 0° \times u = 0$

$j \times j = |j||j| \text{ sen } \omega . u = 1 \times 1 \times \text{ sen } 0° \times u = 0$

$i \times j = |i||j| \text{ sen } \omega . u = 1 \times 1 \times \text{sen } 90° \times u = 1 \times 1 \times 1 \times u = u$ versor

$j \times i = -i \times j = -u$ versor de sentido contrario.

Calculemos ahora el producto de dos vectores cualesquiera.

$$(OA) \times (OB) = (a_1 i + a_2 j) \times (b_1 i + b_2 j)$$
$$= a_1 b_1 i \times i + a_1 b_2 i \times j + a_2 b_1 j \times i + a_2 b_2 j \times j$$

Sustituyendo el producto de los versores por su equivalente

$$(OA) \times (OB) = a_1 b_2 u - a_2 b_1 u = u\,(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Si observamos la expresión dentro del paréntesis vemos que es el desarrollo del determinante formado por las proyecciones de los vectores dados, de forma que:

$$(OA) \times (OB) = u \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

El valor del determinante es un escalar que multiplicado por el versor u da un vector de acuerdo a la definición.

ALGEBRA LOGICA. Proposición. Una proposición es un enunciado en el que los términos han de ser claramente definidos y que debe llenar la condición de ser verdadera o falsa, este hecho es importante pues ello implica que toda proposición debe expresar un hecho, un significado real, sea este falso o verdadero. Si yo digo:

Está lloviendo

ello puede ser cierto o falso y se refiere a un hecho que puede ocurrir de un momento a otro. Evidentemente, lo enunciado es una proposición. No tiene sentido, sin embargo, decir

Las Matemáticas son verdes.

Una fórmula cuyos elementos son proposiciones se denomina "fórmula proposicional" o "sentencia".

Dado un conjunto de proposiciones, hay varias maneras en que ellas pueden ser combinadas para formar sentencias. Deben estar sin embargo unidas por uno cualquiera de los llamados "conectivos". Existen cinco conectivos básicos a saber: "no", "y", "o", "si....entonces....", "si y sólo si", su equivalente en signos matemáticos es:

no	=	$\sim$
y	=	$\wedge$
o	=	$\vee$
si...entonces	=	$\rightarrow$
si y sólo si	=	$\leftrightarrow$

Si tenemos dos proposiciones a y b puede ocurrir que a sea falsa o verdadera y que b también sea falsa o verdadera. Lo mismo ocurrirá con otras proposiciones.

El conectivo " $\sim$ " aplicado a una proposición indica la negación de ella. Así " $\sim a$ " indica la negación de a, se lee "no a" y establece que la proposición a es falsa. Por ejemplo, si

a es la proposición: $3x2 = 5$

$\sim a$ es la proposición: $3x2 \neq 5$

Así, según la verdad o falsedad de a, será falsa o verdadera $\sim a$.

si a es verdadera: $\sim a$ es falsa

a es falsa : $\sim a$ es verdadera

Es común la práctica de representar simbólicamente el hecho de que una proposición sea verdadera o falsa. La mayoría de textos convienen en usar el uno (1) para indicar que una proposición es verdadera y el cero (0) para indicar que una proposición es falsa; dichos símbolos reciben el calificativo de "valores de verdad". Así si una proposición a es verdadera su valor de verdad es 1 y si es falsa su valor de verdad es 0. También, si el valor de verdad de a es 1; el valor de verdad de $\sim a$ es 0; si el valor de verdad de a es 0, el valor de verdad de $\sim a$ es 1. Esto se puede representar en una tabla, conocida como table de valores de verdad para el conectivo "no", así

a	$\sim a$
1	0
0	1

El conectivo " $\wedge$ " se usa para unir dos proposiciones, su función es conjuntiva. "$a \wedge b$" se lee "a y b". Sirve para indicar que a am--- bos corresponde un valor de verdad. Si a es verdadera y b es verdadera decimos que $a \wedge b$ son verdaderas y que el valor de verdad de $a \wedge b$ es 1. Si ambos $a \wedge b$ fueran falsas, el valor de verdad de $a \wedge b$ es 0.

La tabla de valores de verdad para este conectivo es:

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

El conectivo "o" es usado para unir dos proposiciones a y b con carácter disyuntivo. $a \vee b$ se lee "a ó b". Significa que una de dos alternativas se verifica. Su tabla de valores de verdad es la siguiente:

a	b	a ∨ b
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

El conectivo "si....entonces....." se aplica a dos proposiciones a y b para formar la sentencia "si a, entonces b"; es condicional. Simbólicamente se representa $a \rightarrow b$. Su tabla de verdad es:

a	b	$a \rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Observamos que el valor de verdad de b debe estar condicionado al de a, de modo que si a es verdadera; b se obliga a ser verdadera. La primera fila de la tabla no presenta ningún problema en su interpretación. La segunda fila en cambio nos dice que a es verdadera, luego b debiera ser verdadera; pero b es falsa, luego $a \rightarrow b$ es verdadera. La cuarta fila es evidente.

El conectivo "si y sólo si" se aplica a dos proposiciones a y b para formar la sentencia "a si y sólo si b", simbólicamente $a \leftrightarrow b$. Significa que b es verdadera o falsa, si y sólo si a es verdadera o falsa. Su tabla de valores de verdad es:

a	b	$a \leftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Sea a la proposición, Santa Anita es un barrio de San Salvador

b la proposición $7x2 = 12$ y

c la proposición $\text{Sen } 180° = 1$

El valor de verdad de $a \wedge b$ es cero

El valor de verdad de $a \vee b$ es uno

El valor de verdad de $\sim a$ es cero

El valor de verdad de $\sim b$ es uno

El valor de verdad de $a \wedge a$ es uno

Consideremos ahora:

$(x^2 - 5x + 6 = 0) \rightarrow x = 2.$ Su valor de verdad es 1.

$(y = x) \quad (1 < y < 4) \rightarrow x < 2$

Los siguientes axiomas son aplicables a los conectivos estudiados. Siendo a, b y c proposiciones.

Axima I $\quad a \wedge b = b \wedge a$

Axioma II $\quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

Axioma III $\quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Axioma IV $a \wedge a = a$

Axioma V $\sim\sim a = a$

A estos axiomas podemos agregar las leyes de Morgan, aplicables a los conectivos $\wedge$ y $\vee$ que se expresan:

1a.) $\sim (a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$

2a.) $\sim (a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$

ALGEBRA ABSTRACTA. Una combinación de conceptos que se rfiere a una o más variables recibe el nombre de función proposicional y se transforma en una proposición cuando sus variables toman un valor específico. Cuando afirmamos que x es un número natural, planteamos una función proposicional; si decimos x = 5, expresamos la proposición: x es igual al número natural cinco. La función proposicional es pues un conjunto de valores relacionados entre si.

Decimos que existe una relación binaria en un conjunto cualquiera A, cuando hay otro conjunto R de función proposicional, tal que si $(x, y) \in A$ entonces x está relacionada con y, ello se representa xRy y se lee que x está en la relación R con Y. A x se le llama primer elemento y a y, segundo elemento de la relación binaria.

R sobre A es Reflexivo si xRx

Antisimétrico si xRy y yRx

Transitivo xRz si xRy y yRz

siempre que se cumpla que $(x, y, z) \in A$, entonces A se dice que es parcialmente ordenado.

Dos conjuntos parcialmente ordenados, digamos A_1 y A_2 son isomorfos si existe una correspondencia T biunivoca entre éllos, de tal forma que si $x \in A_1$ y $y \in A_2$ se cumple que

$$T(y) \subseteq T(x)$$

lo que significa que el conjunto de correspondencia de y es un subconjunto del conjunto de correspondencia de x.

Si $(x, y) \in A$ y ambos están relacionados con otro elemento z tal que $z \in A$ pero que $z \geq x$ y $z \geq y$ entonces z es la frontera superior del conjunto xRy pudiendo z pertenecer o no a este último. Si z sólo toma valores $\leq$ que xey se denomina la frontera inferior o valor ínfimo del conjunto de valores xey.

Cuando existe un conjunto de correspondencia T de un conjunto L_1 sobre otro conjunto L_2 de tal forma que $(x, y) \in L_1$ y $T(x) \in L_2$ entonces decimos que L_1 y L_2 son conjuntos isomorfos y se cumplen las relaciones

$$T(x \cup y) = T(x) \cup (y) \; ; \qquad T(x \cap y) = T(x) \cap (y)$$

Hay que hacer notar que los conectivos " $\wedge$ " y " $\vee$ " para los conjuntos operadores L pueden ser combinados a conveniencia según la es---

tructura abstracta que se desee formar.

A los conjuntos operadores parcialmente ordenados son aplicables las siguientes leyes:

1o.) Ley Conmutativa.

$$x \cup y = y \cup x \qquad \text{y} \qquad x \cap y = y \cap x$$

Vamos a demostrarlo

Sean $x \cup y = p$ y $y \cup x = q$ entendiéndose que x, y, p y q pertenecen al conjunto operador L. Siendo así se cumplirá que:

pPq o bien qPp. Si pPq entonces $(x \cup y)P\,(y \cup x)$ y si qPp, entonces $(y \cup x)P\,(x \cup y)$. Pero siendo L un conjunto parcialmente ordenado se sigue que

$$x \cup y = y \cup x.$$

Por un razonamiento análogo se demuestra para la intersección.

2o. Ley Asociativa.

$$x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z \qquad \text{y} \qquad x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$$

Sean $x \cup (y \cup z) = p$ cumpliéndose que $x, y, z, p \in L$ siendo L parcialmente ordenado. Se ve entonces que:

$$xPp \qquad \text{y} \qquad (y \cup z)Pp$$

Pero y, y z pueden estar relacionados con ellos mismos y con los que ya se relacionan con ellos, luego podemos escribir:

$y^{P}(y \cup z)$ y $z \cup (y \cup z)$ por lo tanto se sigue que

$x^{P}p$; $y^{P}p$ y $z^{P}p$ y p es así una frontera superior para los valores de x, y, z.

Supongamos ahora que: $(x \cup y) \cup z = r$ para valores $z, y, z, \in L$. Si hacemos un análisis análogo al de p vemos que $r^{P}s$ donde s es una frontera superior cualquiera (incluso p). En el caso límite $p = r$ y

$$x \cup (y \cup z) \quad = \quad (x \cup y) \cup z.$$

Con igual análisis se vizualiza la ley para la intersección.

3o.) Ley de Absorción.

$$x \cup (x \cap y) = x \qquad y \quad x \cap (x \cup y) = x$$

Sean $(x \cap y)^{P}x$ y $x^{P}x$; de esto vemos que x es una frontera superior de x y de $(x \cap y)$. Supongamos ahora que u es cualquier frontera supe-- rior de estos dos últimos valores; u será así frontera superior de x y de él mismo.

Si ahora unimos x con $(x \cap y)$; u sigue siendo frontera superior, pero x ya no, sólo satisface la condición de frontera inferior, de modo que

$$x \cup (x \cap y) = x$$

de igual forma se demuestra que $x \cap (x \cup y) = x$

4o.) Ley de Idempotencia

$$x \cup x = x \qquad y \qquad x \cap x = x$$

Aparte de una exposición simbólica para la demostración es fácil ver que $x \cup x$ es el conjunto de elementos comunes a x y a x, luego es igual a x. Lo mismo ocurre con la intersección.

Veamos una ilustración.

Si $x, y, z \in L$ demostrar que:

$$x \cup (y \cap z) \leq (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

Sabemos que: $x \geq x \cap y$ y que

$x \geq x \cap z$

Por ser $x, y, z \in L$ se sigue que

$$x \geq (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

También se cumple que:

$y \cup z \geq (x \cap y) \cup (x \cap z)$, luego tenemos

$(y \cup z) \geq y \geq (x \cap y)$ y además

$(y \cup z) \geq z \geq (x \cap z)$ por lo tanto

$x \cup (y \cap z) \geq (x \cap y) \cup (x \cap z)$

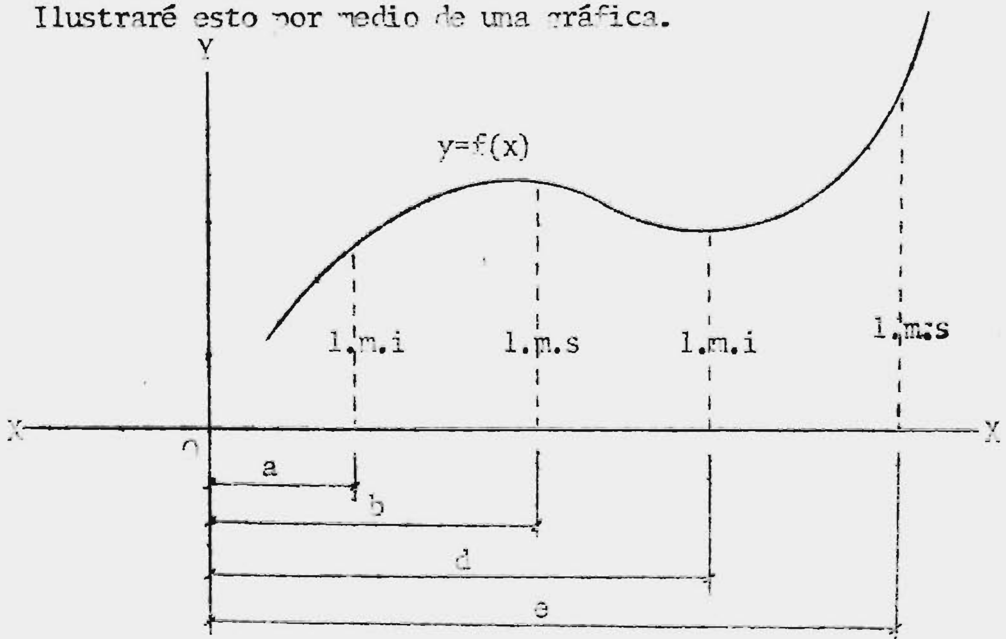
Cambiando signos al segundo miembro, cambia la desigualdad y tenemos:

$$x \cup (y \cap z) \leq (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

MODERNOS CONCEPTOS DE CALCULO. Por no tratar aquí de un curso de Cálculo, sino más bien de mencionar la forma nueva de exponer algunos tópicos de la materia, me limitaré a ilustrar el método para calcular el área bajo una curva y los ejes coordenados proceso que se conoce con el nombre de Integración. Comenzaré enunciando el siguiente teorema:

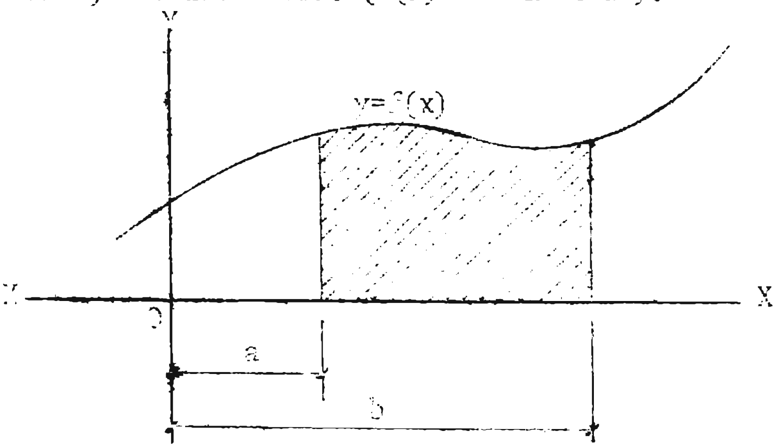
Toda función continua es un intervalo abierto a y b, en algún punto alcanza su valor mínimo y en otro su valor máximo. Que se conoce como "Teorema de Weierstrauss". Los problemas serán presentados haciendo caso omiso del cálculo diferencial y en su solución se utilizará conceptos de algebra superior y Geometría Analítica.

Ilustraré esto por medio de una gráfica.



Como puede apreciarse, cada uno de los intervalos: a,b , d,e , tienen sus respectivos l.m.s., l.m.i. (límite máximo superior, límite mínimo inferior).

Abordaré ahora el problema planteándolo en la forma siguiente: cuál es el valor del área bajo la curva f(x) en el intervalo <a,b> y limitada por el eje de las equis. (f(x) es contínua).



El número que dá el valor del área bajo f(x) lo señalaré por el símbolo:

a = $\int_a^b f(x)\,dx$ (Se lee: integral entre los límites a, b).

El símbolo $\int$ (integral) una s alargada de la primera letra de la palabra "suma" es notación de Leibnitz.

Del concepto intuitivo del área se desprenden las siguientes propiedades del integral:

I $\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

II $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

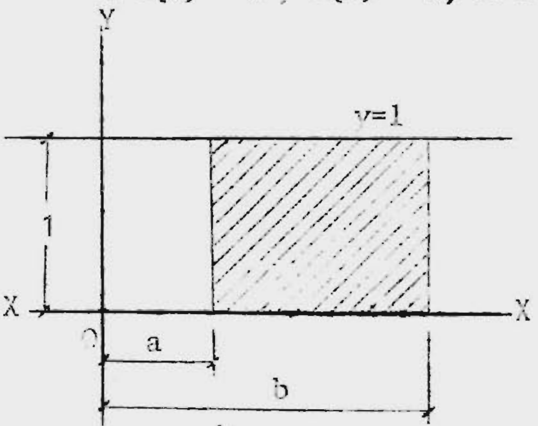
III $\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$

$$\text{IV} \quad \int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

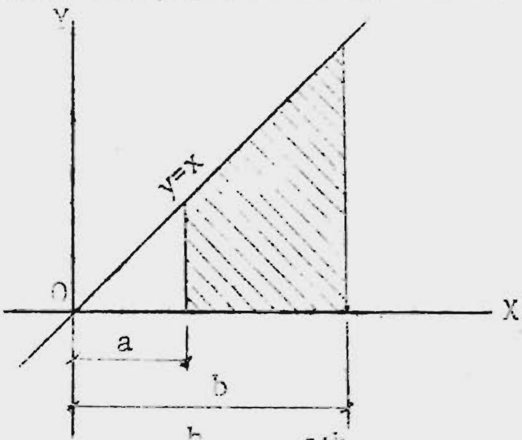
$$\text{V} \quad \int_a^b \{cf(x)+dg(x)\}\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx + d\int_a^b g(x)\,dx$$

La propiedad V se conoce como propiedad de linealidad de la integral.

Si $f(x) = 1$ y $f(x) = x$, la solución del problema es inmediata.



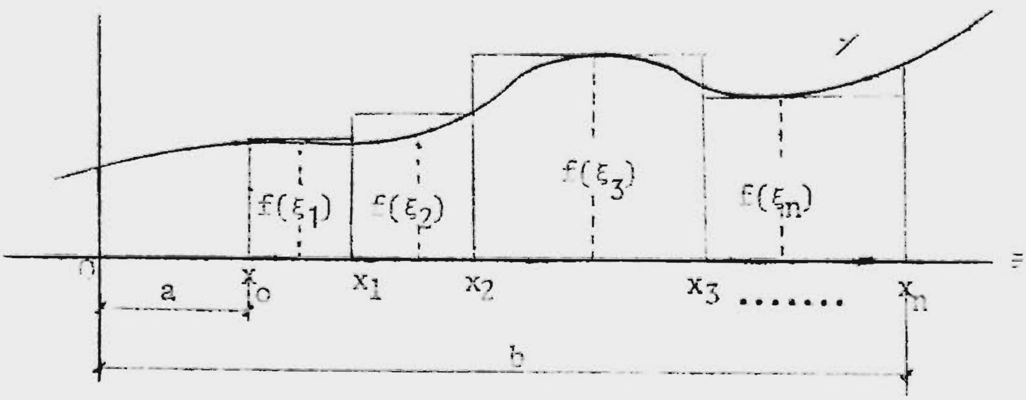
$$A = \int_a^b 1.dx = b-a$$



$$A = \int_a^b x\,dx = \frac{a+b}{2}(a-b)$$

$$= \frac{a^2-b^2}{2}$$

Volviendo al problema, divido el área en una red de n-1 puntos intermedios, separados en distancias no necesariamente iguales.



Los subintervalos están dispuestos así:

$$a = x_o < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots\ldots < x_n = b$$

llamando δ a los espacios entre los subintervalos, así:

$$\delta_1 = x_1 - x_o;\ \delta_2 = x_2 - x_1; \ldots\ldots,\ \delta_i = x_i - x_{i-1}$$

y sean ξ_i valores cualesquiera entre los subintervalos.

$$x_o < \xi_1 < x_1,\ x_1 < \xi_2 < x_2, \ldots\ldots,\ x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

Considerando ahora la siguiente suma:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i = f(\xi_1)\delta_1 + f(\xi_2)\delta_2 + \ldots + f(\xi_n)\delta_n$$

La suma depende de la red x_i y de la elección de los puntos ξ_i. Hay infinito número de soluciones.

También, es conveniente definir a δ como, el mayor de los δ_i, esto es importante.

Si la suma tiende a tener un límite cuando $\delta \to o$ y en consecuencia $n \to \infty$, lo cual es totalmente independiente de la forma en que se elijan la red y los puntos ξ_i, decimos que $f(x)$ es <u>integrable</u> en el intervalo $<a,b>$.

Esto lo escribimos así:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to o} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i, \qquad \delta = \max.\delta_i$$

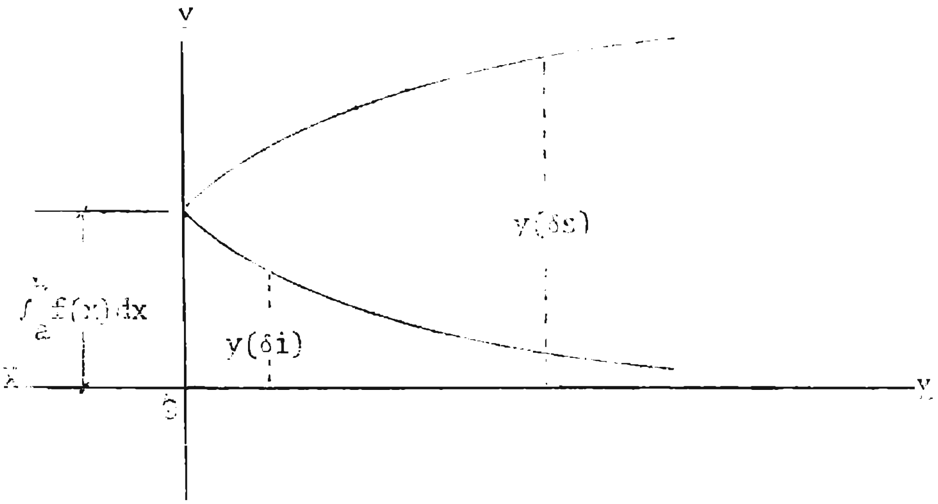
El proceso de obtención de este límite se llama la integración de Riemann, y, el límite se dice que es la integral definida de f(x) entre los límites a y b. La f(x) se llama el integrando.

La ecuación anterior, obviamente dá para un $\varepsilon > o$ arbitrariamente pequeño, que existe un número positivo Δ tal que

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \Sigma f(\xi_i)\delta_i\right| < \varepsilon \text{ cuando } \delta < \Delta$$

Esta desigualdad es siempre verdadera para todas las redes sobre <a,b> cuya malla $\delta < \Delta$, independientemente de la forma en que se elijan los puntos ξ_i.

En general, cuando la integral existe, es decir, hay condiciones de integrabilidad, para cualquier δ dada, los valores de $\Sigma f(\xi_i)\delta_i$ se encuentren sobre un intervalo definido $y_s(\delta)$ y $y_i(\delta)$ (sumas superiores a f(x) y sumas inferiores a f(x) y cuando $\delta \to o$ el valor de $\Sigma f(\xi_i)\delta_i \to \int_a^b f(x)dx$.



PROCESO EN LA INTEGRACION DE RIEMANN.

En la solución del problema, se ha supuesto a < b. Cuando a > b sucede lo siguiente:

$$a = x_o > x_1 > x_2 > \ldots\ldots > x_n = b$$

Lo cual, lógicamente tiene que dar subintervalos negativos $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to o} \Sigma f(\xi_i)\delta_i = -\lim_{\delta\to o} \Sigma f(\xi_i)(-\delta_i) = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Por lo que, si hay un intercambio de los límites, la integral tiene que cambiar de signo, es decir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

cuando a = b, δ_i es obviamente cero, por lo que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Integración como suma.

Si f(x) es integrable, se puede calcular su integral eligiendo n subintervalos δ_i y los puntos ξ_i en alguna forma específica. Por ejemplo, si todas las δ_i son iguales y elegimos ξ_i al extremo derecho de cada subintervalo.

$$\delta_i = h = \frac{b-a}{n}, \qquad \xi_i = a + ih,$$

La suma $\Sigma f(\xi_i)\delta_i$ es una función únicamente de n, y podemos calcular la integral como un límite ordinario como $n \to \infty$ ó $h \to o$.

También, podemos utilizar las expresiones de las sumas inferiores o superiores.

Todo lo anterior explica lo que se conoce como la <u>integral definida entre límites</u> y el proceso por el cual

$$\lim_{\delta \to o} \Sigma f(\xi_i)\delta_i = \int_a^b f(x)dx \text{ es la integración de RIEMANN.}$$

EJERCICIOS.

1. $\int_a^b e^x dx$

$$\sum_{i=1}^{n} e^{\xi i}\delta i = h\ (e^a + e^{a+h} + e^{a+2h} + \ldots + e^{a+(n-1)})$$

$$= he^a\ (1 + e^h + e^{2h} + \ldots + e^{(n-1)h})$$

$$= he^a \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1} = he^a \frac{e^{b-a} - 1}{e^h - 1}$$

$$= (e^b - e^a) \frac{h}{e^h - 1}$$

$$\int_a^b e^x dx = \lim_{h \to o} (e^b - e^a) \frac{h}{e^h - 1} = e^b - e^a$$

2.- $\int_a^b x^r dx$ (r es un racional $\neq -1$)

$$x^r = x^{\frac{m}{n}}$$

haciendo $\sqrt[n]{b/a} = q$ y subdividiendo el intervalo <a,b> en una serie geométrica, como:

$$a,\ aq,\ aq^2, \ldots\ldots, aq^{n-1},\ aq^n = b, \text{ entonces}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x^r dx = a^r(aq-a) + (aq)^r(aq^2 - aq) + \ldots\ldots + (aq^{n-1})^r(aq^n - aq^{n-1})$$

$$= a^{r+1}(q-1)\{1+q^{r+1}+q^{2(r+1)}+\ldots\ldots+ q^{(n-1)(r+1)}\}$$

$$= a^{r+1}(q-1)\,\frac{q^{n(r+1)} - 1}{q^{r+1} - 1}$$

sustituyendo q por su valor $(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$

$$= (b^{r+1} - a^{r+1})\,\frac{q - 1}{q^{r+1} - 1}$$

Ahora si $r = \frac{m}{n}$

$$\frac{q - 1}{q^{r+1} - 1} = \frac{q - 1}{q^{\frac{m+n}{n}} - 1}$$

Hagamos $q^{1/n} = \tau \qquad (\tau \neq 1)$

si $q \to 1 \quad \tau \to 1$

entonces, hallemos el límite de $\dfrac{\tau^n - 1}{\tau^{m+n} - 1}$ cuando $\tau \to 1$

dividiendo el numerador y el denominador por $\tau - 1$

$$\lim_{\tau \to 1} \frac{\tau^{n-1} + \tau^{n-2} + \ldots\ldots + 1}{\tau^{m+n-1} + \tau^{m+n-2} + \ldots\ldots + 1} \quad \frac{n}{m + n} \quad \frac{1}{r + 1}$$

entonces: $\lim\limits_{\delta_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i)^r \delta_i = \int_a^b x^r dx = \dfrac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}$

3.- $\int_a^b \operatorname{sen} x dx$

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}(a+\xi_i)h = h\ \{\operatorname{sen}(a+h) + \operatorname{sen}(a+2h) + \ldots + \operatorname{sen}(a+hn)\}$$

en donde $h = \dfrac{b-a}{n} = \xi_i$

recordando que $2\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \cos(u-v) - \cos(u+v)$

$$= \frac{h}{2\operatorname{sen}\frac{h}{2}} \{\cos(a+\tfrac{h}{2}) - \cos(a+\tfrac{3}{2}h) + \cos(a+\tfrac{3}{2}h) - \cos(a+\tfrac{5}{2}h)$$

$$+ \ldots + \cos(a + \tfrac{2n-1}{2}h) - \cos(a + \tfrac{2n+1}{2}h)\}$$

haciendo $a+nh = b$

$$\lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}(a+\xi_i)h = -(\cos b - \cos a)$$

4.- Probar que

$$\int_a^b \cos x\, dx = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a$$

TEOREMA DE ROLLE

Si $f(x)$

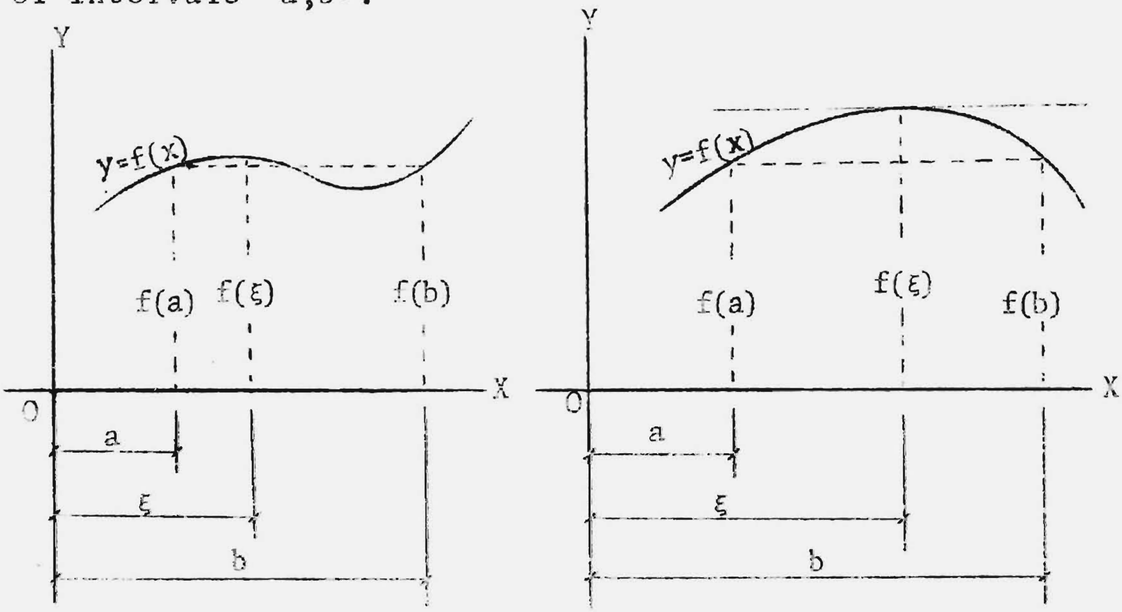
i) es contínua en el intervalo cerrado $<a,b>$, $a \leq x \leq b$,

ii) tiene una derivada en todo punto interior (a,b), $a < x < b$, y

iii) $f(a) = f(b)$;

entonces existe por lo menos un punto interior ξ tal que $f'(\xi) = 0$, $a < \xi < b$.

Prueba. Por la hipótesis (i), $f(x)$ debe alcanzar sus valores mínimo y máximo m, M, por lo menos una vez en el intervalo $\langle a,b \rangle$.



Si $m = M$ la prueba es simple

Si $m < M$, ya sea m ó M diferirán de los valores extremos $f(a)$, $f(b)$, (iguales).

Si $M > f(a)$ en algún punto ξ interior, entonces $f(\xi) = M$. Para un sitio cercano de abscisa $a+h$ (positiva $+h$ ó negativa $-h$) se tendrá lo siguiente:

$$\text{para } +h \quad \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \leq o \qquad (1)$$

$$\text{para } -h \quad \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \geq o \qquad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) se convierten en la derivada en el sitio ξ cuando $h \to o$. De la tricotomía se prueba que:

$$f'(\xi) = o$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL

Si $f(x)$:

i) es continua en el intervalo cerrado $<a,b>$,

ii) tiene derivada en todos los puntos interiores; entonces en algún punto interior del intervalo ξ se cumple que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \qquad a < \xi < b$$

Prueba.

Si $f(a) = f(b)$, el teorema se reduce al de Rolle. Por lo tanto, supongamos que $f(a) \neq f(b)$.

Construyamos la función auxiliar siguiente:

$F(x) = f(x) - Kx$

$F(x)$ es tal que $F(a) = F(b)$. De esta condición calculamos la constante

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Entonces:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$$

Como F(x) satisface todas las hipótesis del teorema de Rolle

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

de donde se deduce lo que queríamos demostrar:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Otra forma de presentar este teorema del valor medio, conocido también como ley de los <u>acrecentamientos finitos</u>, es la siguiente:

haciendo $b = a + h$ y $\xi = a + \theta h$, en donde $0 < \theta < 1$; el teorema del valor medio toma la forma:

$$f(a + h) - f(a) = h\, f'(a + \theta h).$$

<u>TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO INTEGRAL.</u>

Si f(x) es contínua en un intervalo (a,b) y si m, M son respectivamente los valores mínimo y máximo, también dado que $M - f(x)$, $f(x) - m$ son valores positivos, siempre puede establecerse la doble desigualdad siguiente:

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx,$$

entonces:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

por lo que no hay duda que existe un valor ξ en el intervalo $<a,b>$, tal que $m \leq f(\xi) \leq M$, de donde:

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi) \qquad a \leq \xi \leq b$$

Esta última fórmula es conocida como el teorema del valor medio del cálculo integral.

LA RELACION ENTRE LOS TEOREMAS DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

1o. El teorema del valor medio del cálculo integral establece:

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi)$$

2o. Si hacemos que $\int f(x)dx = F(x)$ de tal manera que: $f(x) = F'(x)$, el teorema anterior toma la forma:

$$F(b) - F(a) = (b - a)F'(\xi).$$

lo cual prueba el teorema del valor medio del cálculo diferencial y establece la relación simple que $f(x) = F'(x)$.

SEGUNDO TEOREMA DEL VALOR MEDIO. (CAUCHY)

Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$

i) son continuas en $a \leq x \leq b$

ii) tienen derivada en todo punto interior, y

iii) $f'(x)$ y $g'(x)$ no desaparecen ambas en ningún punto interior.

iv) $g(a) \neq g(b)$;

entonces:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \qquad a < \xi < b$$

prueba. Construyamos la función

$F(x) = f(x) - K.g(x)$

de tal manera que $F(a) = F(b)$. De esta condición calculamos la constante $K = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$, y en vista de la hipótesis iv) y puesto que $F(x)$ satisface todas las hipótesis del teorema de Rolle,

$$F'(\xi) = f'(\xi) - K.g'(\xi) = 0$$

$$a < \xi < b$$

de lo cual se deduce lo que queríamos probar.

Debe notarse que $g'(\xi) \neq 0$, pues si $g'(\xi) = 0$, $f'(\xi) - 0$, lo cual contradice la hipótesis iii).

Las hipotesis (iii) y (iv), excluyen la división por cero.

REGLA DE L'HOPITAL

Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son:

i) continuas para $a \leq x \leq a+h$

ii) diferenciables para $a \leq x \leq a+h$, y

iii) $f(a) \neq f(b)$;

iv) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

entonces $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

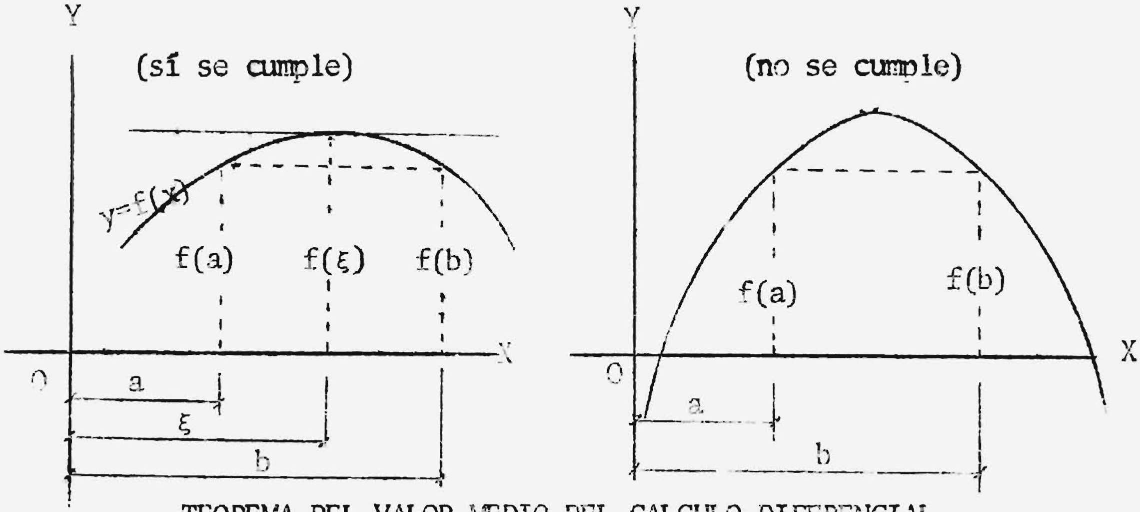
Prueba. Puesto que el límite (iv) existe, $g'(x) \neq o$ en algún intervalo $a < x < a+h$ cuando h es convenientemente pequeña; de otra forma $f'(x)/g'(x)$ no sería definida para un número infinito de valores entre a y a+h (independientemente de qué tan pequeña se elija h) y el límite A no existiría. Entonces, las condiciones de la fórmula de Cauchy se cumplen en el intervalo (a, a+h) y, por (iii).

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad a < \xi < x$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$$

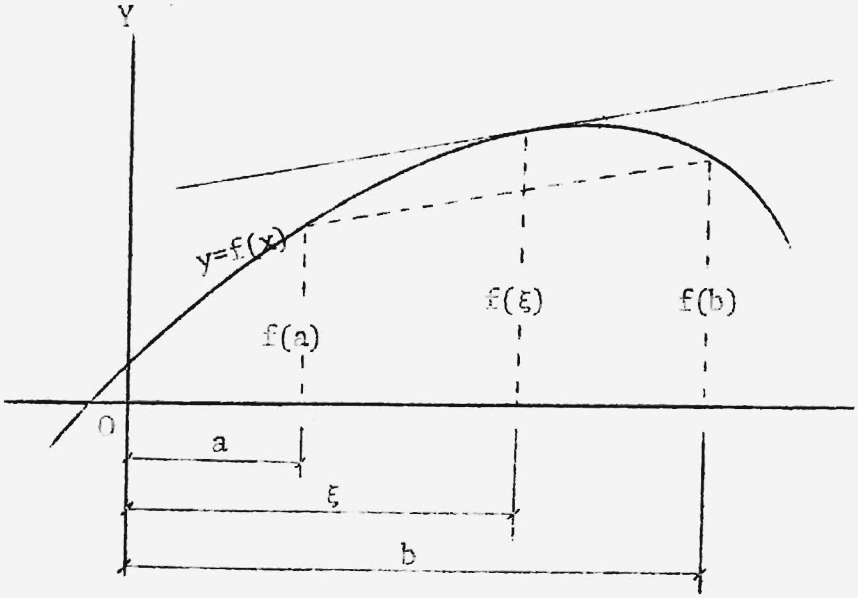
INTERPRETACION GEOMETRICA DE LOS TEOREMAS DE ROLLE Y VALOR MEDIO.

TEOREMA DE ROLLE. En una función contínua f(x) y derivable en todos sus puntos, y, si f(a) = f(b), siempre se cumple que la derivada se anula en algún punto intermedio.



TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL.

En una función contínua f(x) en el intervalo <a,b> y derivable en todo punto entre a y b siempre se cumple que en algún punto interior la tangente es paralela a la cuerda.



GEOMETRIA DIFERENCIAL.

Toda curva será considerada como la trayectoria de un punto que se mueve. Sus coordenadas en un sistema de ejes rectangulares se pue--

den expresar como funciones de un parámetro ω que varía en el interior de un intervalo cerrado. Algunas veces se usa como parámetro el tiempo t, aunque no es estrictamente necesario usarlo siempre. Cuando definimos una curva mediante una función $y = f(x)$, la forma caracterísitica de la ecuación dependerá en su totalidad del sistema de referencia que se haya elegido. Supongamos ahora que la curva se desplaza en el espacio, conservando su forma, las coordenadas de cada punto serán diferentes para cada una de las posiciones de la curva en el espacio, por lo cual para cada posición existirá una forma característica de la ecuación para la misma curva. Importante es desde luego aprender a distinguir si dos ecuaciones representan la misma curva en el espacio. Para lograrlo son de gran ayuda las llamadas "ecuaciones intrínsecas" mediante las cuales es posible caracterizar una curva cualquiera mediante una ó más relaciones que sean independientes de las coordenadas. Por ejemplo, estableciendo una relación entre la curvatura y la longitud de arco se determina a una ecuación intrinseca para una curva en el plano.

Consideremos la epicicloide descrita por la circunstancia de radio b al rodar exteriormente sobre la circunferencia de radio a con centro en el origen; sea además Ψ el ángulo formado por la parte positiva del eje x con la línea que une los centros de las circunferencias. Las ecuaciones paramétricas de la epicicloide serán:

$$x = (a+b)\cos\Psi - b\cos\frac{a+b}{b}\Psi$$

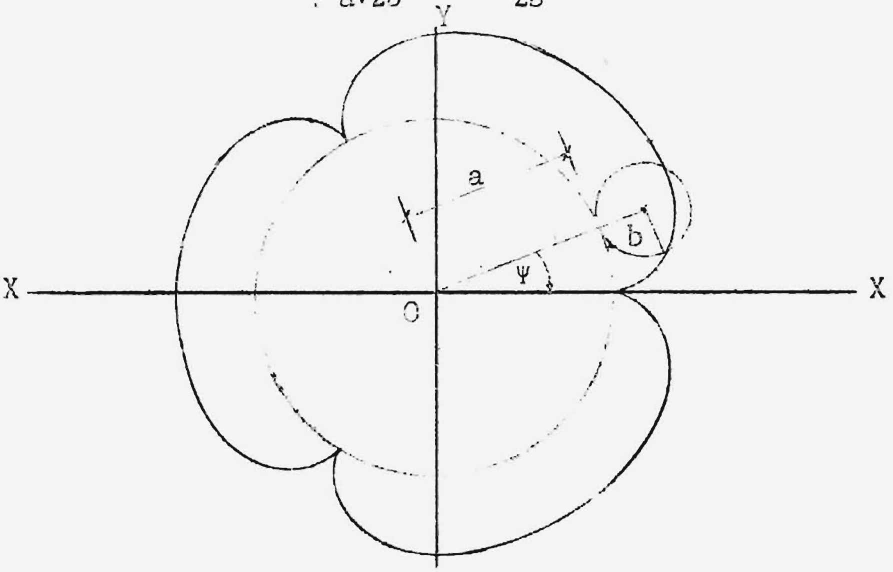
$$y = (a+b)\,\mathrm{sen}\,\Psi - b\,\mathrm{sen}\,\frac{a+b}{b}\Psi$$

la longitud de arco será

$$s = 4\frac{b(a+b)}{a} \cos \frac{a\Psi}{2b} \quad (1)$$

y el radio de curvatura es

$$R = \frac{4b(a+b)}{a+2b} \operatorname{sen} \frac{a\Psi}{2b} \quad (2)$$



Relacionando (1) y (2) se encuentra la ecuación intrínseca cuya forma es:

$$\frac{s^2}{A^2} + \frac{R^2}{B^2} = 1 \text{ donde}$$

$$A = \frac{4b(a+b)}{a} \qquad y \qquad B = \frac{4b(a+b)}{a+2b}$$

En el caso de una superficie, también será definida por medio de sus coordenadas rectangulares expresadas en función de dos parámetros u y v en un intervalo cerrado.

Sean las coordenadas rectangulares.

$x_i = x_i(u,v)$ donde las x_i se consideran como funciones reales de las variables reales u y v. Si estas funciones son diferenciables hasta el orden n-1 y encontramos las derivadas de orden n podemos expresar las coordenadas como un desarrollo de la serie de Taylor así:

$$x_i(u,v) = x_i(u_o,v_o) + h(\frac{\partial x_i}{\partial u}) + k(\frac{\partial x_i}{\partial v}) + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{(n-1)!}(h\frac{\partial}{\partial u} + k\frac{\partial}{\partial v})^{n-1}_o \cdot x_i + \frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial u}+k\frac{\partial}{\partial v})^n_o \cdot x_i(u_o + \theta, v_o + \theta k)$$

donde varía desde cero a un radián y h y k son las nuevas variables para la serie de potencias.

Si u y v son independientes se cumplirá que la matriz

$$M = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}$$ tendrá como característica 2

y cada elemento se obtiene derivando parcialmente así:

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u} \quad ; \quad y_u = \frac{\partial y}{\partial u} \quad ; \quad z_u = \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$x_v = \frac{\partial x}{\partial v} \quad ; \quad y_v = \frac{\partial y}{\partial v} \quad ; \quad z_v = \frac{\partial z}{\partial v}$$

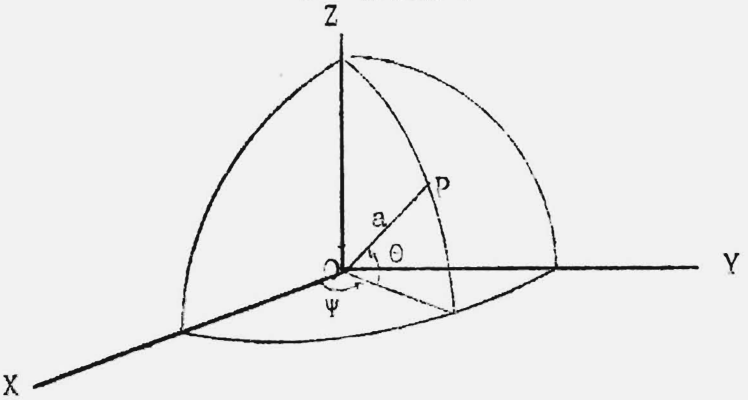
Como al variar los puntos sobre la superficie, las derivadas parciales tomarán valores distintos, ello alterará la característica de la matriz, existiendo entre ellos la característica 1 y 0, los puntos que determinan tales valores se denominan puntos singulares.

Los puntos singulares pueden ocurrir ya sea por la naturaleza de la superficie o debido a la forma que tome la ecuación por el sistema de coordenadas que se haya elegido. Veamos por ejemplo el caso de la esfera. Usando como parámetros la latitud Θ y la longitud Ψ las ecuaciones paramétricas serán:

$$x = a \cos \Theta \cos \Psi$$

$$y = a \cos \Theta \operatorname{sen} \Psi$$

$$z = a \operatorname{sen} \Theta$$



donde a es constante en cualquier dirección a partir del origen. Encontremos los elementos de la matriz M. Para nuestro caso los parámetros u y v son Θ y Ψ respectivamente. De modo que:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial \Theta} = - a \operatorname{sen} \Theta \cos \Psi \;; \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial \Psi} = - a \cos \Theta \operatorname{sen} \Psi$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial \Theta} = - a \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} \Psi \;; \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial \Psi} = + a \cos \Theta \cos \Psi$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial \Theta} = + a \cos \Theta \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial \Psi} = 0$$

La matriz tendrá entonces la forma:

$$M = \begin{bmatrix} -a \text{ sen } \Theta \cos \Psi & -a \text{ sen } \Theta \text{ sen } \Psi & a \cos \Theta \\ -a \cos \Theta \text{ sen } \Psi & +a \cos \Theta \cos \Psi & 0 \end{bmatrix}$$

Igualando a uno la matriz las soluciones son múltiples; en cambio igualándola a cero encontramos como punto singular aquel en que $\Theta = 90°$ o sea donde el eje de z corta a la esfera.

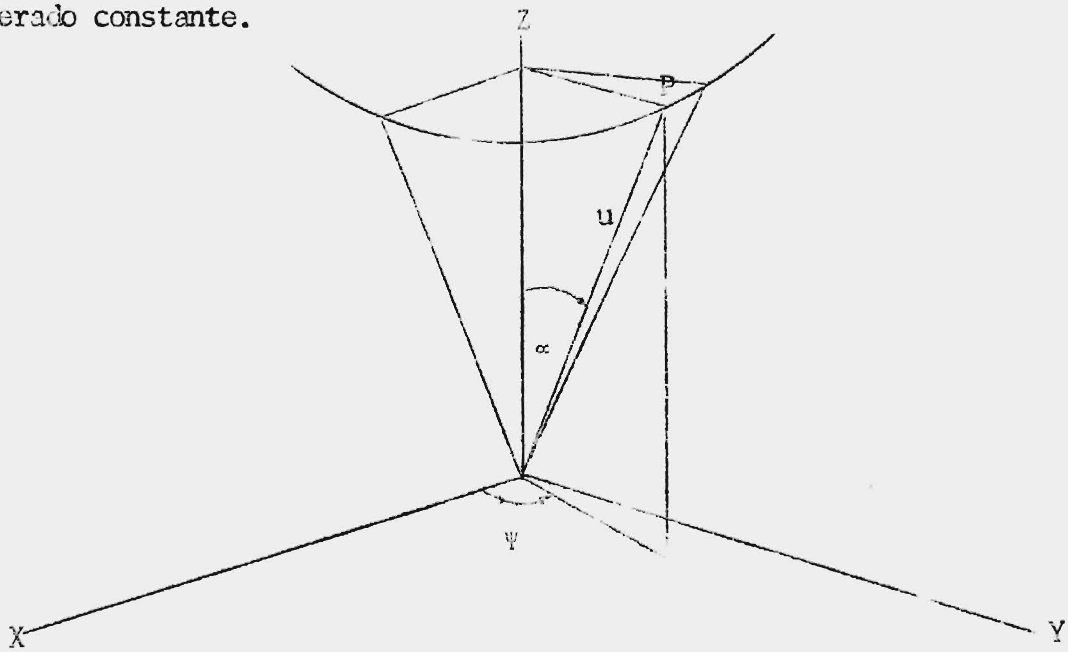
Consideremos ahora la superficie definida por

$$x = u \text{ sen } \alpha \cos \Psi$$

$$y = u \text{ sen } \alpha \text{ sen } \Psi$$

$$z = u \cos \alpha$$

en donde u y Ψ son consideradas las variables paramétricas y α es considerado constante.



$$\frac{\partial x}{\partial u} = \text{sen } \alpha \cos \Psi \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial \Psi} = - u \text{ sen } \alpha \text{ sen } \Psi$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \text{sen } \alpha \text{ sen } \Psi \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial \Psi} = u \text{ sen } \alpha \cos \Psi$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \cos \alpha \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial \Psi} = 0$$

y la matriz M toma la forma:

$$M = \begin{bmatrix} \text{sen } \alpha \cos \Psi & \text{sen } \alpha \text{ sen } \Psi & \cos\alpha \\ -u \text{ sen } \alpha \text{ sen } \Psi & u \text{ sen } \alpha \cos \Psi & 0 \end{bmatrix}$$

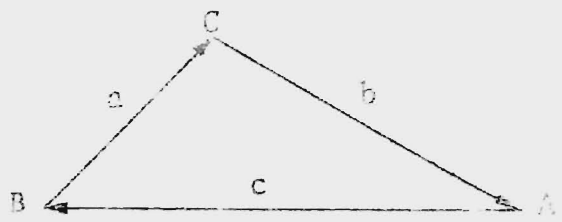
que da como punto singular la intersección de los ejes coordenados, vértice del cono circular representado por las ecuaciones dadas, o sea donde $u = 0$.

NECESIDAD DE NUEVOS CONCEPTOS MATEMATICOS EN LA ENSEÑANZA DE LA EDUCACION MEDIA.

a) REFORMA DEL PROGRAMA MATEMATICO.

Frente a la evidente abundancia de conceptos nuevos de la matemática, que ya se han introducido en los programas de estudio de nuestra Universidad se va imponiendo ya la reforma de los programas de la Educación Media. Esta reforma no implica de ninguna manera eliminar el contenido matemático de los programas anteriores, presupone sin embargo un cambio total en la exposición, enfocando los problemas desde el punto de vista conceptual moderno con miras a cubrir lo ya existente y avanzar al mismo tiempo sobre campos nuevos. Vista así la cuestión, ni la Aritmética ni el Algebra sufrirían cambios en los programas, salvo aquellos de carácter expositivo en el aula. La reforma se iniciaría a partir de los conceptos de trigonometría donde las exposiciones se pueden hacer cubriendo al mismo tiempo una gran parte del análisis de vectores y con estos resolver problemas trigonométricos; se continuaría introduciendo cambios expositivos en Geometría Plana y del Espacio donde gran cantidad de teoremas se demuestran con mayor sencillez, analizándolos con vectores. Valgan para el caso algunos ejemplos:

1o. Demostrar que en cualquier triángulo, los lados son proporcionales al seno del ángulo opuesto a cada uno de éllos.



Demostración:

consideremos los lados del triángulo como vectores continuos tal como lo indica la figura.

La suma vectorial es:

$a + b + c = 0$

Multiplicando por ax toda la expresión.

$a \times a + a \times b + a \times c = 0$

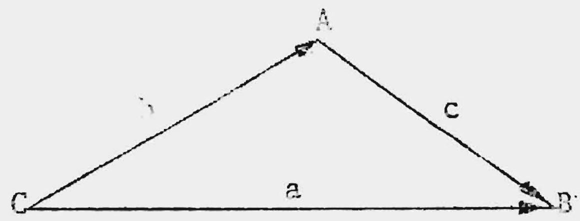
Pero $a \times a = 0$ y $a \times c = -c \times a$, luego

$a \times b - c \times a = 0$ de donde $a \times b = c \times a$

o bien ab sen $C = c\,a$ sen B y dividiendo entre abc.

$$\frac{\text{Sen } C}{c} = \frac{\text{Sen } B}{b}$$

2o. Demostrar que en un triángulo cualquiera el cuadrado de la magnitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de éllos por el coseno del ángulo que comprenden.



Demostración:

considerando cada lado como un vector según la figura.

$$b + c = a$$

o bien $$c = a - b$$

Multiplicando miembro a miembro escalarmente

$$c.c = (a-b).(a-b)$$

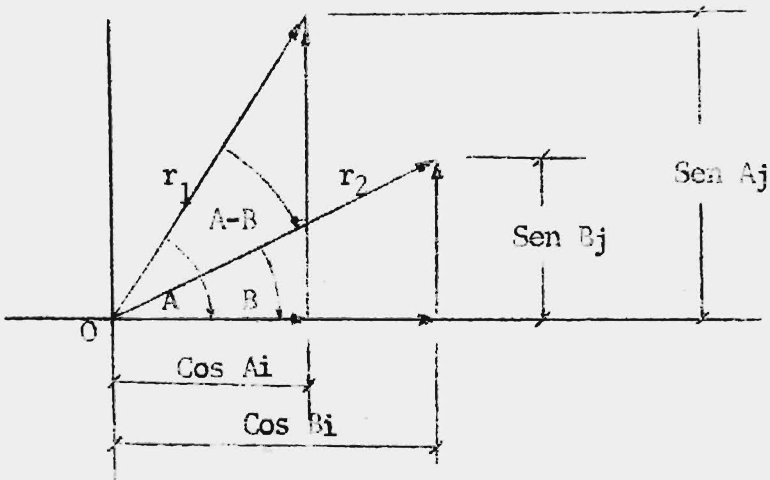
$$c.c = a.a + b.b - 2a.b$$

Pero $c.c = c^2$; $a.a = a^2$; $b.b = b^2$; $a.b = ab \cos C$.

Luego $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

3o. Demostrar la fórmula trigonométrica:

$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$



Demostración:

Sean: el versor r_1 que hace un ángulo A con el eje x

el versor r_2 que hace un ángulo B con el eje x

según la figura.

Por ser r_1 y r_2 versores tenemos que:

r_1 = Cos A i + Sen A j

r_2 = Cos B i + Sen B j

multiplicando escalarmente

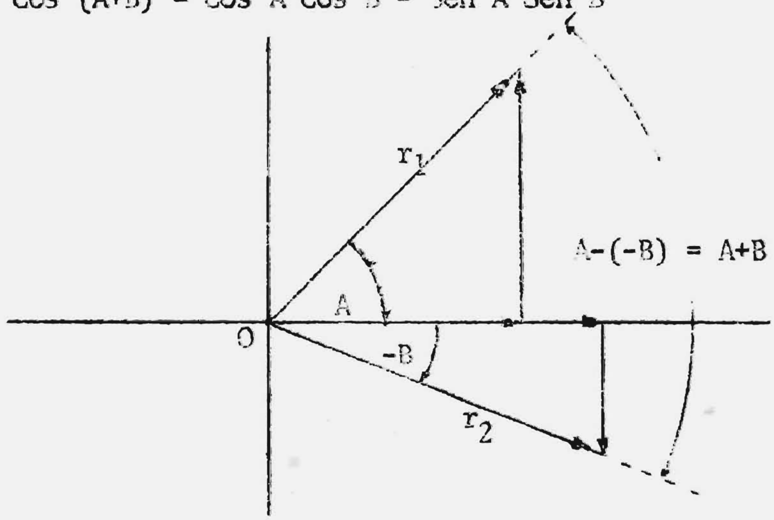
$r_1 r_2$ = Cos A Cos B + Sen A Sen B

Pero $r_1 r_2 = |r_1||r_2|$ cos (A-B) = 1x1 cos (a-B) = Cos (A-B)

Luego Cos (A-B) = Cos A Cos B + Sen A Sen B

4o. Demostrar la fórmula trigonométrica:

Cos (A+B) = Cos A Cos B - Sen A Sen B



Coloquemos ahora los versores r_1 y r_2 según la figura, de ella se desprende que:

$$r_1 = \text{Cos } A\ i + \text{Sen } A\ j$$

$$r_2 = \text{Cos } (-B) i + \text{Sen}(-B) j$$

Pero

$$\text{Cos}(-B) = \text{Cos } B$$

$$\text{Sen}(-B) = -\text{Sen } B \text{ luego:}$$

$$r_2 = \text{Cos } B\ i - \text{Sen } B\ j$$

multiplicando escalarmente

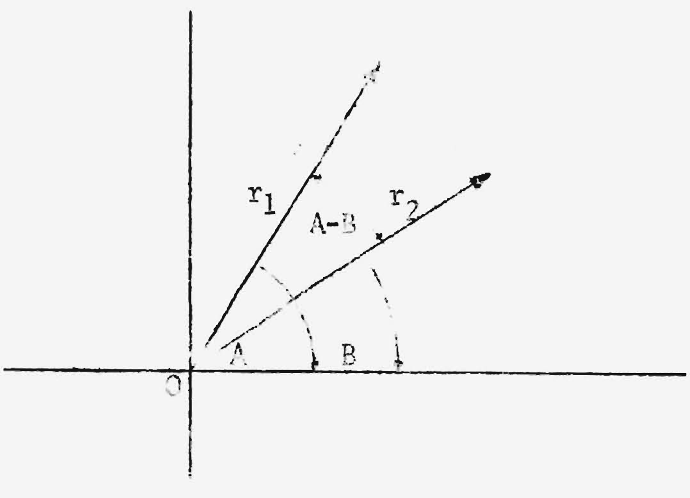
$$r_1 r_2 = \text{Cos } A \text{ Cos } B - \text{Sen } A \text{ Sen } B$$

además $r_1 r_2 = 1x1 \cos \{A-(-B)\} = \text{Cos } (A+B)$ por lo tanto

$$\text{Cos } (A+B) = \text{Cos } A \text{ Cos } B - \text{Sen } A \text{ sen } B$$

5o. Demostrar la fórmula trigonométrica:

$$\text{Sen } (A-B) = \text{Sen } A \text{ Cos } B - \text{Cos } A \text{ Sen } B$$



coloquemos los versores r_1 y r_2 según la figura y multipliquemos vectorialmente, así:

$$r_2 x r_1 = (\text{Cos } B\ i + \text{Sen } B\ j) x (\text{Cos } A\ i + \text{Sen } A\ j)$$

$$r_2 x r_1 = \text{Cos } B \text{ Sen } A ixj + \text{Sen } B \text{ Cos } A jxi$$

Pero $ixj = k$ y $jxi = -k$

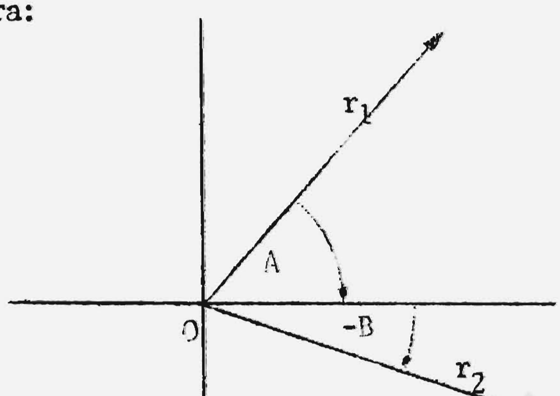
además $r_2 x r_1 = 1x1 \text{ Sen } (A-B).u$ siendo u un versor

luego Sen (A-B)u = k(Cos B Sen A - Sen B Cos A); ordenando y simplificando Sen (A-B) = Sen A Cos B - Cos A Sen B.

6o. Demostrar la fórmula trigonométrica:

$$\text{Sen } (A+B) = \text{Sen } A \text{ Cos } B + \text{Cos } A \text{ Sen } B$$

según la figura:



$$r_1 = \text{Cos } A\ i + \text{Sen } A\ j$$

$$r_2 = \text{Cos } B\ i - \text{Sen } B\ j$$

$$r_2 x r_1 = (\text{Cos } B\ i - \text{Sen } B\ j) x (\text{Cos } A\ i + \text{Sen } A\ j)$$

$$= \text{Cos } B \text{ Sen } A\ ixj - \text{Sen } B \text{ Cos } A jxi$$

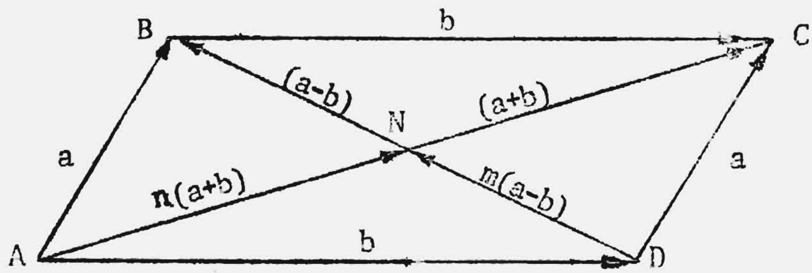
$$= \text{Sen } A \text{ Cos } Bk + \text{Cos } A \text{ Sen } Bk$$

Pero ahora $r_2 x r_1$ = 1x1 Sen {A - (-B)} u = Sen (A+B)u, luego

Sen (A+B) = Sen A Cos B + Cos A Sen B.

Los conceptos de la Geometría Elemental son de mucha más fácil comprensión operando con vectores. Veamos:

7o. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo cualquiera se cortan en el punto medio.



De la figura:

En triángulo ABC

AN = n(a+b) (1)

En triángulo ADN

AN = b + m(a-b) (2)

Igualando (1) y (2)

n(a+b) = b+m(a-b)

na+nb = b+ma-mb

a(n-m) + b(n+m-1) = 0 (3)

(3) es la suma de 2 vectores que es igual a cero; pero la suma de dos

vectores es cero, si ellos son iguales, colineales y de sentido contrario o si ambos son cero. Pero ninguno de los vectores sumandos de (3) es colineal, luego sólo queda la segunda hipótesis, el que ambos sean cero. Pero ni a ni b son cero, luego sus coeficientes han de ser cero. De esto resulta que

$$n - m \quad = 0 \quad (4)$$

$$n + m - 1 = 0 \quad (5)$$

De la (4) m = n y sustituyendo en (5)

$$m + m - 1 = 0$$

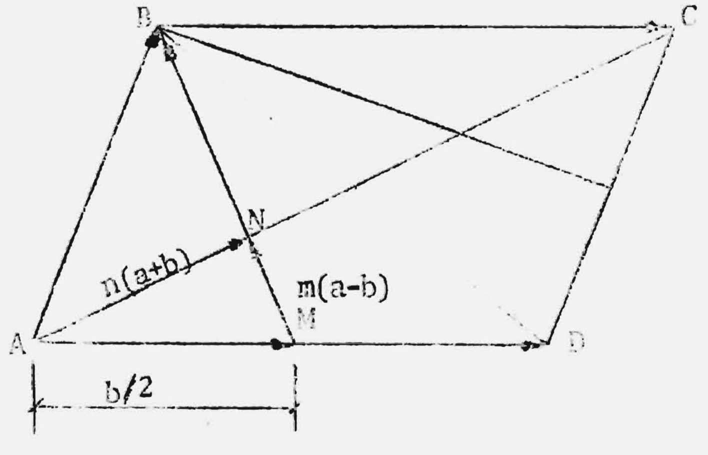
$$2m = 1$$

$$m = 1/2$$

$$\text{luego} \quad n = 1/2$$

Lo que demuestra que las diagonales se cortan a 1/2 de su longitud.

8o. Demostrar que si en un paralelogramo cualquiera se trazan líneas desde un vértice a los puntos medios de los lados opuestos, estas líneas cortan a la diagonal opuesta en los puntos tercios de su longitud.



De la figura:

$AC = a + b \qquad (1)$

$AN = n(a + b) \qquad (2)$

$AM = 1/2\,b \qquad ; \quad MB = AB - AM$

$MB = a - 1/2b \qquad (3)$

$MN = m(a - \frac{b}{2}) \qquad (4)$

$AN = AM + MN = \frac{b}{2} + m(a - \frac{b}{2}) \qquad (5)$

Igualando (2) y (5)

$$n(a + b) = \frac{b}{2} + m(a - \frac{b}{2})$$

$$na + nb = \frac{b}{2} + ma - \frac{mb}{2};$$

$$a(n - m) + b(n + \frac{m}{2} - \frac{1}{2}) = 0$$

Razonando igual que en problema anterior:

$$n - m = 0 \qquad (6)$$

$$n + \frac{m}{2} - \frac{1}{2} = 0 \qquad (7)$$

De la (6) $n = m$; sustituyendo en (7)

$$n + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

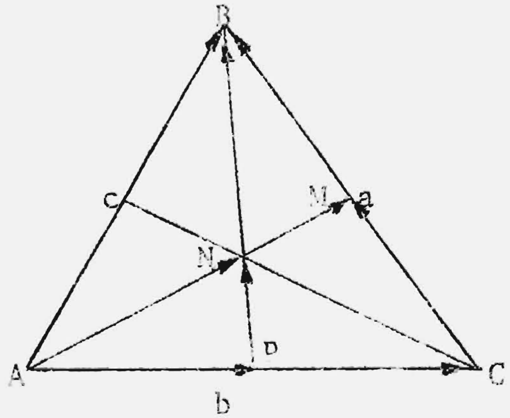
$$\frac{3n}{2} = \frac{1}{2} \qquad 3n = 1$$

de donde

$$n = 1/3$$

$m = 1/3$ lo que demuestra el teorema.

9o. Demostrar que las medianas de un triángulo se cortan a un tercio de su longitud. Colocando el sentido de los vectores según la figura:



$AB = AC + CB$ o bien

$c = b + a = a + b$

$AM = b + \frac{a}{2}$

$AN = m(b + \frac{a}{2})$ (1) m es escalar

$PB = c - \frac{b}{2} = (a+b - \frac{b}{2}) = (a + \frac{b}{2})$

$PN = n.PB = n(a + \frac{b}{2})$; n es escalar

$AN = AP + PN = \frac{b}{2} + n(a+ \frac{b}{2})$ (2)

igualando (1) y (2)

$m(b + \frac{a}{2}) = \frac{b}{2} + n(a + \frac{b}{2})$

$mb + m\frac{a}{2} = \frac{b}{2} + na + \frac{nb}{2}$

$a(\frac{m}{2} - n) + b(m - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}) = 0$ de donde

$\frac{m}{2} - n = 0$ (3) luego $m = 2n$

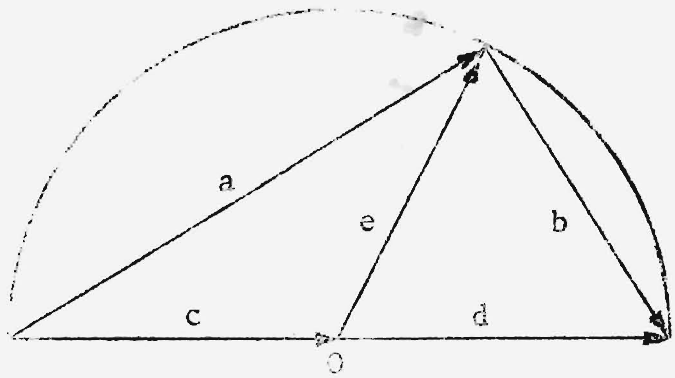
$m - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = 0$ (4) sustituyendo $m = 2n$

$$2n - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{3n}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{por lo tanto}$$

$$n = \frac{1}{3} \qquad y \qquad m = \frac{2}{3}$$

10.- Demostrar que todo triángulo inscrito en un simicírculo es rectángulo con su ángulo recto sobre el semicírculo.



Sea el semicírculo de centro 0 y a, b, c, d y e vectores según la figura. Se ve que:

$$c = d \text{ y además}$$

$|c| = |e| = |d|$ por lo que

$c^2 = e^2 = d^2$ (1)

además:

$$a = c + e$$

$$b = d - e \quad \text{multiplicando escalarmente}$$

$$a.b = (c + e).(d - e) = (c + e).(c - e) = c^2 - e^2$$

o sea que a.b = 0 luego el ángulo entre a y b es tal que su coseno es cero o sea igual a 90°y el triángulo será rectángulo en cualquier posición.

b) Obstáculos para la enseñanza. Indudablemente los problemas para cu-- brir una reforma de programa como la propuesta no se harán esperar. El - nivel matemático de los profesores de educación media, con pocas excepcio nes, no permitirá en corto tiempo introducir las reformas de exposición de cátedra. Por otra parte el que un alumno sea reprobado en alguna mate ria cuyo programa ha sido reformado no será nunca bien visto por los pa-- dres de familia afectados; muy pronto arguirán que si no fuera por los nuevos conceptos su hijo hubiera aprobado la materia y que se comete una injusticia. El profesionalismo actual también se sentirá afectado ya que es indudable que si nuevos conocimientos existen para revolver proble mas técnicos de cualquier especie, ellos se traducirán en métodos más mo- dernos con mejores coeficientes de productividad y costo, lo que lógica-- mente va en contra, por competencia con ventaja, de los métodos ya esta-- blecidos.

Sin embargo la tarea más difícil será hacer conciencia en las autorida des de cultura sobre la conveniencia de tales reformas y más aún, vencer las presiones de la opinión pública sobre dichas autoridades pues es de conocimiento general el temor que existe en nuestro medio a todo lo que es superación en materia de conocimiento.

c) Soluciones. Es imprescindible por lo tanto buscar solución a los pro blemas planteados.

Con respecto a la falta de profesores capacitados para el nuevo nivel, nuestra Universidad cuenta ya con un Departamento de Matemáticas y Física con capacidad científica para impartir los cursos necesarios que le fueren solicitados. En él se cuenta con una variadísima biblioteca donde se puede estudiar desde la más elemental cuestión aritmética, hasta los modernos conceptos expuestos por matemáticos de nuestro tiempo. De manera que la Universidad puede organizar cursos para profesores de Educación Media sobre diversos tópicos de la matemática moderna. Otra solución sería incluir dentro de los programas de la Escuela Normal Superior estas innovaciones con el objeto de que el personal que de éllos egrese ya vaya preparado para las reformas de la Educación Media; esto sin embargo plantea la interrogante de ¿quién impartirá dichos cursos en la Normal Superior?. Como el objetivo de la solución propuesta no es desplazar personal de ninguna institución educativa, me permito contestar de dos maneras: Primera: En un principio los cursos serán impartidos por un miembro del Departamento de Matemáticas y Física de la Universidad Nacional y tendrían una duración suficiente como para preparar personal, dentro del nivel Normal Superior, que pueda continuar en años futuros con la exposición de dichos cursos. Segunda: La Escuela Normal Superior puede contratar en el extranjero, él o los profesores que considere necesarios para cubrir las necesidades académicas impuestas por la reforma de programas.

Existe además otra solución, aunque con el inconveniente de ser a largo plazo y es la de que la Escuela Normal Superior seleccione entre sus egresados más capacitados a uno o más, que puedan seguir en el extranjero cursos de matemática superior moderna y éllos vuelvan luego a prepara el personal nacional.

En todo caso, es de urgente necesidad aumentar la capacidad matemática de la población estudiantil de todos los niveles para que nuestro país pueda por lo menos ir a la par del resto de países centroamericanos que ya lo hicieron y podamos así recuperar el terreno que por negligencia hemos perdido en la educación superior.

PROYECCIONES DE ESA INNOVACION DE CONCEPTOS.

a) MAYOR CAPACIDAD ANALITICA DE LOS EGRESADOS.

Al realizar la reforma de programas con el incremento en su contenido la tarea de aprendizaje tendrá que ser más difícil desde el punto de vista asimilativo; la actual costumbre de aprobar las materias matemáticas memorizando un buen número de reglas y aplicarlas a la resolución de problemas tiene que desecharse, y no sólo porque hasta hoy ha resultado impráctica siendo útil sólo para llenar las necesidades temporales de la Educación Media sino porque para programas de mayor extensión resulta inoperante. Entre los problemas mayores que se encuentran al impartir las cátedras de matemáticas en la Universidad está la tendencia a memorizar, tal práctica no produce resultado beneficioso alguno, el alumno en cada año muy poco recuerda de lo que ha visto en años anteriores y ello se debe a que la capacidad humana no es suficiente para memorizar año tras año el conjunto de conocimientos que ha de requerir para cubrir una carrera; en tal caso se impone la adquisición de un sistema de estudio, de una metología en el aprendizaje y ello sólo se logrará aprendiendo a razonar. Visto un problema, pensar en él, analizar las situaciones que plantea y elaborar juicios sobre los mismos, tratando de llegar a conclusiones ciertas. Un plan de estudio basado en el razonamiento resulta efectivo para cualquier carrera y para programas de mayor o menor extensión. Unicamente los estudiantes que aprendieron a razonar en todas las situaciones y problemas que afrontaron, salieron avantes en sus pruebas en corto tiempo; los que no lo hicieron así, con mucho esfuerzo lograron coronar su carrera. A simple vista esto puede parecer perjudicial ante quienes no han sentido nunca la satisfacción de aprender razonando; pero aquellos que conocen esa manera de aprender y el que no conociéndola llega a experimentarla, difícilmente podrá desecharla. Aprendiendo en esta forma, las nuevas generaciones poseerán una mayor capacidad analítica y los nuevos profesionales estarán potencialmente más capacitados para su función creadora y constructiva.

b) NUEVA ESCUELA MATEMATICA EN EL PAIS. Es una realidad ya en el país, el hecho de que en todos los sectores profesionales se va precisando del auxilio matemático para el control de movimientos y operaciones. Desde el hecho más simple de la vida diaria hasta los más complicados fenómenos sociales son suceptibles de analizarse matemáticamente, todo ello unido a la capacidad de análisis con auxilio de computadores electrónicos justifica más los esfuerzos que se hacen en el sentido de enseñar, según la nueva escuela matemática. No es raro entonces el entusiasmo con que han sido recibidas las matemáticas en los programas de estudio de algunas facultades que antes no las tenías; así, en la actualidad ya no son únicamente los estudiantes de Ingeniería y Arquitectura y los de Ciencias Económicas los que platican de matemáticas en su vida diaria, ahora ello es tema en las distintas ramas profesionales. Una nueva inquietud existe ya y se va necesitando personal más numeroso y con mayor capacidad científica para responder a la demanda de las nuevas generaciones. Los países llamados grandes, lo son por su amor y dedicación a las ciencias, entre ellos, las ciencias exactas ocupan un lugar predominante cosa que ya es comprendida en nuestro medio. Las bases para una nueva escuela matemática están colocadas, nuestras juventudes necesitan prepararse más para hacer progresar al país y los avances de la ciencia en el mundo así lo justifican.

c) UN NUEVO GRADO ACADEMICO. Atendiendo a numerosas solicitudes que obedecen a esta agitación académica, la Universidad Nacional ha organizado ya sus Departamentos de Ciencias entre los cuales está el de Matemáticas y Física. Entre otras finalidades científicas se le ha encomendado la tarea de organizar y recomendar un plan de estudios tendientes a lograr que entre los títulos extendidos en nuestro Máximo Centro de Estudios se incluya el que corresponde a Licenciado y Doctorado en Matemáticas. Dada la gran demanda que hay de matemáticos para impartir tales asignaturas en el nivel medio y universitario; el paso dado por --- nuestras autoridades del Alma Mater ha sido recibido con beneplácito. La Universidad se impone así la tarea de formar el personal académico que tanta falta le está haciendo al país.

Se abre pues un nuevo horizonte para nuestro graduados en la Educación Media pues en muy corto tiempo podrán matricularse en nuestra Universidad para estudiar una carrera de gran atracción, de grandes perspectivas y cuyos graduados van siendo más solicitados cada día más. Nuestras juventudes podrán aspirar dentro de poco, en nuestro país, al Doctorado en Matemáticas.

B I B L I O G R A F I A .

R. COURANT	Differential and Integral Calculus.
K. O. MAY	Elements of Modern Mathematics.
SCHAUM'S	Abstract Algebra.
WILHELM MAAK	An Introduction To Modern Calculus.
B. H. ARNOLD	Logic and Boolean Algebra.
D. J. STRUIK	Geometría Diferencial.
LUIS SANTALO	Vectores y Tensores.
BEAUMONT AND BALL	Introduction To Modern Algebra and Matrix Theory.