UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

REPRESENTACIONES DE REDES

TRABAJO DE GRADUACION PRESENTADO POR:

ELIZABETH DE LOS ANGELES MUÑOZ TORRES
SIMON ALFREDO PEÑA AGUILAR

PARA OPTAR AL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

JULIO DE 1989.

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR : LIC. JOSE LUIS ARGUETA ANTILLON

SECRETARIO GENERAL : ING. RENE MAURICIO MEJIA MENDEZ

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO : ING. ROBERTO BRAN GIRALT

SECRETARIO : ING. MARIO ARNOLDO MOLINA ARGUETA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

DIRECTOR : LIC. ROLANDO LEMUS GOMEZ

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

TRABAJO DE GRADUACION

COORDINADOR : ING. JOSE FRANCISCO MARROQUIN

ASESORES : LIC. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

LIC. SALVADOR SANDOVAL (M.S)

D E D I C A T O R I A

- A NUESTRO SEÑOR TOPOPODEROSO, por haber permitido que alcanzara una meta más

- A LA MEMORIA DE MI MADRE María Mercedes Torres, por su infinito amor y sacrificio

- CON AMOR MATERNAL A MI ABUELA, Isabel Torres, por su amor, dedicación y sacrificio

- A MIS HERMANOS, Madelin y Ricardo por su constante confianza, apoyo y amor

- A MIS AMIGAS, como un estímulo por su cariño, apoyo y fe en mi persona

- Con mucho respeto y admiración a nuestro PROFESOR, Francisco Marroquín, como un reconocimiento al desarrollo de su labor docente.

I N D I C E

P R O L O G O

El presente trabajo es un estudio de las propiedades básicas de las redes, e incluye dos Teoremas de Representación Topológica.

La finalidad de este trabajo de investigación es divulgar un nuevo campo de estudio en la matemática en este caso las redes, las cuales son muy útiles en otras ramas de la matemática. Además de ser aplicables en el área de la computación.

El capítulo I trata de los conceptos básicos de redes, sus representaciones gráficas, polinomios y otras estructuras y el concepto de red libre generada por un conjunto ordenado.

En el Capítulo II, vemos como caracterizar una red distributiva según su forma, una aplicación de polinomios para conocer las redes Booleanas en n generadores, las relaciones de congruencia y su vinculación con Ideales y finaliza con dos Teoremas de representación Topológica.

CAPITULO I

CONCEPTOS BASICOS EN REDES

1. DOS DEFINICIONES DE REDES

Mientras las propiedades aritméticas del conjunto de los números reales, IR, pueden ser expresados en términos de la suma y la multiplicación, las propiedades del orden teórico y así el topológico son expresadas en términos de la relación de orden $\leq$.

Las propiedades básicas de esta relación son las siguientes:

Para todo $a,b,c \in$ IR se tiene que:

(P.1) $a \leq a$ (Reflexiva)

(P.2) $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$ (antisimétrica)

(P.3) $a \leq b$ y $b \leq c$ entónces $a \leq c$ (transitiva)

(P.4) $a \leq b$ ó $b \leq a$ (linealidad)

Son muchos los ejemplos de las relaciones binarias que comparten las propiedades (P.1) - (P.4) con la relación de orden de los números Reales y hay más que gozan de (P.1) - (P.3). Este hecho por sí mismo, no justifica la introducción de un nuevo concepto. Sin embargo se ha mostrado que muchos conceptos básicos y resultados acerca de los números Reales dependen solamente de (P.1) - (P.3) y estas pueden ser usadas provechosamente.

DEFINICION 1.1

Las relaciones que satisfacen (P.1) - (P.3) son llamadas relaciones de orden parcial y los conjuntos equipados con estas relaciones son llamados conjuntos parcialmente ordenados ó C.O.P.O.S •

Para formalizar las definiciones, sean A,B dos conjuntos y formemos el conjunto $A \times B = \{(a,b)/a \in A,\ b \in B\}$.

Si A = B escribimos A^2 por $A \times A$ y $A \times A = \{(a,b)/a \in A,$ $b \in A\}$ entonces

DEFINICION 1.2

Una relación binaria ρ *en A puede simplemente ser definida como un subconjunto de* A^2. *Los elementos a,b* $(a,b \in A)$ *están en relación con respecto a* ρ *si* $(a,b) \in \rho$. *Para* $(a,b \in \rho$ *también lo podemos escribir* $a \rho b$ *ó* $a \equiv b\ (\rho)$ •

Esta definición formal es equivalente con la intuitiva:

DEFINICION 1.3

Una relación binaria en A es una "regla" que decide si ó no $a \rho b$ *para algún* $a,b \in A$. *Por supuestos una de tales reglas de* *terminará el conjunto* $\{(a,b)/a\rho b;\ a,b \in A\}$ *y viceversa este conjunto determina a la relación* ρ.

DEFINICION 1.4

Un conjunto parcialmente ordenado (A,ρ) *consiste de un conjunto no vacio* A *y una relación binaria* ρ *en* A; *tal que* ρ *satisfaga las propiedades* (P.1) - (P.3).

Las propiedades (P.1) - (P.3) pueden ser enunciadas en la forma siguiente:

Para todo $a,b,c \in A$,

(P.1) $(a,a) \in \rho$

(P.2) $(a,b),\ (b,a) \in \rho$ entonces $a = b$

(P.3) $(a,b),\ (b,c) \in \rho$ entonces $(a,c) \in \rho$.

DEFINICION 1.5

Si ρ *satisface* (P.1) - (P.3), ρ *es una relación de orden parcial y usualmente se denóta por* $\leq$. *Tambien,* $a \geq b$ *significa* $b \leq a$.

Algunas veces diremos que A (más bien $(A,\leq)$) es un C.O.P.O. significando que el orden parcial está sobre entendido.

DEFINICION 1.6

Un C.O.P.O. $(A;\leq)$ que tambien satisface (P.4) es llamado una cadena. (Tambien llamado conjunto completamente ordenado, conjunto linealmente ordenado, y otros) •

DEFINICION 1.7

Si $(A;\leq)$ es un C.O.P.O., $a,b \in A$ entonces a y b son comparables si $a \leq b$ ó $b \leq a$.

En otro caso a y b son no comparables, en notación $a \| b$ •

Una cadena es por consiguiente, un C.O.P.O. en el cual no hay elementos incomparables.

Ahora definiremos el ínfimo y el supremo en un C.O.P.O. arbitrario P (esto es, $(P;\leq)$).

DEFINICION 1.8

Sea $H \subseteq P$, $a \in P$. Entonces a es una cota superior de H, si $h \leq a$ para todo $h \in H$.

Una cota superior a de H es la mínima de las cotas superiores de H ó el supremo de H si, para cualquier cota superior b de H, se tiene que $a \leq b$. Lo escribimos $a = \sup H$ ó $a = \bigvee H$ •

Esta notación puede ser justificada solamente si mostramos que el supremo es único.

PRUEBA

Si a_0 y a_1 son ambos supremos de H, entonces $a_0 \leq a_1$, puesto que a_1 es una cota superior y a_0 es un supremo.

Similarmente $a_1 \leq a_0$. Así $a_0 = a_1$ por (P.2) •

DEFINICION 1.9

Sea $H \subseteq P$, $a \in P$. Entonces a es una cota inferior de H, si $a \leq h$ para todo $h \in H$.

Una cota inferior a de H es la máxima de las cotas inferiores de H ó el ínfimo de H si, para toda cota inferior b de H, se tiene que $b \leq a$. Lo escribimos $a = \inf H$ ó $a = \wedge H$ •

La unicidad es probada como en el párrafo anterior.

Sea $(P;\leq)$ un C.O.P.O. La notación $a \geq b$ (significando $b \leq a$) tambien puede ser vista como una definición de una relación binaria en P. Esta relación binaria $\geq$ satisface (P.1) -(P.3) ya que para todo $a,b,c \in P$ se tiene:

(P.1) $a \geq a$, por definición de $\geq$ y porque $a \leq a$.

(P.2) Si $a \geq b$ y $b \geq a$ debemos probar que $a = b$.

Si $a \geq b$, por definición de $\geq$ se tiene que $b \leq a$.

Si $b \geq a$, por definición de $\geq$ se tiene que $a \leq b$; usando (P.2) para $\leq$ se concluye que $a = b$.

(P.3) Si $a \geq b$ y $b \geq c$ debemos probar que $a \geq c$.

$a \geq b$ significa que $b \leq a$

$b \geq c$ significa que $c \leq b$

usando (P.3) para $\leq$ se tiene:

$c \leq b \leq a$ entonces $c \leq a$ que significa $a \geq c$.

Así $(P;\geq)$ es tambien un C.O.P.O. llamado El Dual de $(P;\leq)$ •

Ahora; si Φ es un enunciado acerca de los C.O.P.O.S y si en Φ reemplazamos la ocurrencia de $\leq$ por $\geq$, obtenemos el dual de Φ.

PRINCIPIO DE DUALIDAD

Si un eneunciado Φ es verdadero en todos los C.O.P.O.S, entonces su dual es tambien verdadero en todos los C.O.P.O.S •

Esto es verdadero simplemente porque Φ se cumple para $(P;\leq)$ si y sólo si el dual de Φ se cumple para $(P;\geq)$ el cual es tambien un C.O.P.O.

Como un ejemplo tomaremos para Φ el enunciado:

"Si sup H existe este es el único"

obtendríamos su dual así: "Si inf H existe este es único".

DEFINICION 1.10

Un C.O.P.O. $(L;\leq)$ *es una red si* $\sup\{a,b\}$ *e* $\inf\{a,b\}$ *existe para todo* $a,b \in L$ •

En otras palabras; la teoría de redes puede escoger un tipo especial de C.O.P.O.S, para detallar la investigación.

Al hacer una definición semejante, es un deber mostrar que esta clase de C.O.P.O.S es muy usual; hay muchos C.O.P.O.S semejantes en varias ramas de la matemática (Análisis, Topología, Lógica, Algebra, Geometría) y un estudio general de los C.O.P.O.S puede guiar a un entendimiento mejor de el comportamiento de estos temas. (Ver Teoría de Redes, G. Birkhoff [1940].)

Hagamos la definición de una red menos arbitraria, notamos que una definición equivalente es la siguiente:

DEFINICION 1.11

Un conjunto parcialmente ordenado (C.O.P.O.) $(L;\leq)$ *es una red si* $\sup H$ *e* $\inf H$ *existen para todo subconjunto finito, no vacio* H *de* L •

Probemos que estas dos definiciones son equivalentes

PRUEBA

Es suficiente probar que la primera definición implica la segunda.

Así supongamos que $(L;\leq)$ satisface la primera definición y sea $H \subseteq L$ un conjunto no-vacio y finito. Si $H = \{a\}$, entonces $\sup H = \inf H = a$, por la propiedad revlexiva del $\leq$ y de la definición de sup e inf. Sea $H = \{a,b,c\}$. A mostrar que $\sup H$ existe, hagamos $d = \sup\{a,b\}$; $e = \sup\{d,c\}$; diremos que $e = \sup H$. Para comerzar, $a \leq d$, $b \leq d$ y $d \leq e$, $c \leq e$; entonces (por transitividad) $a \leq d$ y $d \leq e$ entonces $a \leq e$, $b \leq d$ y $d \leq e$ entonces $b \leq e$ y además $c \leq e$.

Por lo tanto para todo $x \in H$ se cumple que $x \leq e$. Esto nos da como resultado que e es una cota superior.

Ahora miremos que si f es una cota superior de H entonces $e \leq f$.

Como f es una cota superior de H entonces $a \leq f$, $b \leq f$ y así $d \leq f$; también $c \leq f$, así que $c,d \leq f$; entonces $e \leq f$; ya que $e = \sup\{d,e\}$.

Así e es el supremo de H.

Si $H = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$; $n \leq 1$, entonces
$\sup\{\ldots \sup\{\sup\{a_0,a_1\},a_2\} \ldots, a_{n-1}\}$
es el supremo de H, por un argumento inductivo cuyos pasos son análogos a los del conjunto de tres elementos. Por dualidad, concluímos que el inf H existe •

Haciendo uso del principio de dualidad para redes notamos:

Si $(P;\leq)$ es una red, tambien lo es su dual $(P;\geq)$.

Esta es una forma de aplicar el principio de dualidad a redes. Usaremos las notaciones:

$$a \wedge b = \inf\{a,b\}$$

$$\text{y} \qquad a \vee b = \sup\{a,b\}$$

y llamaremos a $\wedge$ conjunción y a $\vee$ disyunción.

En redes, ambas operaciones son binarias o sea que ellas son aplicadas a un par de elementos a,b de L y da por resultado un elemento de L. Así

$$\wedge: \quad L^2 \longrightarrow L \qquad \text{y}$$

$$\vee: \quad L^2 \longrightarrow L$$

son ambas funciones de L^2 en L.

La prueba anterior establece que:

$$(\ldots((a_0 \vee a_1) \vee a_2)\ldots) \vee a_{n-1} = \sup\{a_0,a_1,\ldots a_{n-1}\}$$

$$\text{y } (\ldots((a_0 \wedge a_1) \wedge a_2)\ldots) \wedge a_{n-1} = \inf\{a_0,a_1,\ldots a_{n-1}\}.$$

Ahora observemos que el lado de la parte derecha no depende del orden de los elementos a_i en que están listados. Así $\wedge$ y $\vee$ son: idempotentes, conmutativos, y asociativos, es decir:

(L.1) $a \wedge a = a$; $a \vee a = a$ (idempotencia)

(L.2) $a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$ (conmutatividad)

(L.3) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,

$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (asociatividad)

Como siempre en Algebra, la asociatividad hace posible escribir $a_0 \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}$ y $a_0 \vee a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1}$ sin usar paréntesis.

Existen otro par de reglas que conectan $\wedge$ y $\vee$. Derivémoslas entonces. Si $a \leq b$, entonces $\inf\{a,b\} = a$; esto es $a \wedge b = a$ y recíprocamente.

Así en una red $a \leq b$ si y solo si $a \wedge b = a$.

Por dualidad (y por intercambio de a y b) tenemos:

$$a \leq b \text{ si y solo si } a \vee b = b$$

aplicando el "solamente si" de la primera regla a, a y $a \vee b$ y el de la segunda regla a, $a \wedge b$ y a, se obtiene

(L.4) $a \wedge (a \vee b) = a$; $a \vee (a \wedge b) = a$ (Igualdades de Absorción)

Ahora estamos en la pregunta crucial:

¿Conocemos lo suficiente acerca de $\wedge$ y $\vee$ para que las redes puedan ser caracterizadas puramente en términos de las propiedades del $\wedge$ y $\vee$?.

Haremos dos comentarios en este sentido. Es obvio que $\leq$ puede ser caracterizado por $\wedge$ y $\vee$ (en realidad por uno de ellos); además, obtener la caracterización es un hecho de persistencia y más importante aún.

¿Cuando intentaremos conseguir tal caracterización?

Repitiendo lo anterior, queremos caracterizar $(L;\leq)$ como $(L;\ \wedge,\ \vee)$ el cual es una estructura algebráica, que es un conjunto equipado con dos operaciones binarias (en este caso $\wedge$: $L^2 \longrightarrow L$ y $\vee$: $L^2 \longrightarrow L$). Note que $\leq$ es simplemente un subconjunto de L^2, mientras que $\wedge$ y $\vee$ son funciones de L^2 en L. El interés es simple:

Queremos tal caracterización ya que si podemos tratar redes como estructuras algebraicas, entonces todos los conceptos y métodos del Algebra Universal pueden ser útiles.

DEFINICION 1.12

Una estructura algebráica $(L;\ \wedge,\ \vee)$ es llamada una red algebráica si: L es un conjunto no vacío, $\wedge$ y $\vee$ son operaciones binarias sobre L, ambas $\wedge$ y $\vee$ son idempotentes, conmutativos y asociativos, además satisfacen las dos identidades de absorción •

El siguiente teorema establece que una red como una estructura algebráica y una red como un C.O.P.O. son conceptos "equivalentes". (La palabra equivalente no está definida).

TEOREMA 1.1

(*i*) *Sea el C.O.P.O.* $\rho = (L;\leq)$ *una red.*

Sea $a \wedge b = \inf\{a,b\}$, $a \vee b = \sup\{a,b\}$. *Entonces la estructura algebráica* $\rho^a = (L;\wedge,\vee)$ *es una red algebráica.*

(*ii*) *Sea la estructura algebráica* $\rho = (L;\wedge,\vee)$ *una red algebráica. Sea* $a \leq b$ *si y sólo si* $a \wedge b = a$ *entonces* $\rho^p = (L;\leq)$ *es un C.O.P.O, y el C.O.P.O* ρ^p *es una red.*

(*iii*) *Sea el C.O.P.O.* $\rho = (L;\leq)$ *una red. Entonces* $(\rho^a)^p = \rho$.

(*iv*) *Sea la estructura algebráica* $\rho = (L;\wedge,\vee)$ *una red algebráica. Entonces* $(\rho^p)^a = \rho$ •

Observación: (i) y (ii) describen como se pasa de C.O.P.O.S a estructuras algebráicas y viceversa, mientras que (iii) y (iv) establecen que se generan mutuamente.

PRUEBA

(i) Esta ya ha sido probada.

(ii) Según hipótesis $a \leq b$ significa $a \wedge b = a$. Ahora $\leq$ es reflexiva ya que $\wedge$ es idempotente; $\leq$ es antisimétrico ya que $a \leq b$, $b \leq a$ significa que $a \wedge b = a$, $b \wedge a = b$, lo cual por conmutatividad de $\wedge$, implica que $a = b$.

Si $a \leq b$ y $b \leq c$; $a \wedge b = a$, $b \wedge c = b$ y tenemos:
$a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$ esto es, $a \leq c$ cumpliendose que $\leq$ es transitivo. Así $(L;\leq)$ es un C.O.P.O.

Probemos que $(L;\leq)$ es una red, o sea debemos verificar que $\inf\{a,b\}$ y $\sup\{a,b\}$ existen para cualesquiera $a,b \in L$.

$a \wedge b \leq a$, ya que

$$
\begin{aligned}
(a \wedge b) \wedge a &= a \wedge (b \wedge a), && \text{por asociatividad de } \wedge \\
&= a \wedge (a \wedge b), && \text{por conmutatividad de } \wedge \\
&= (a \wedge a) \wedge b, && \text{por asociatividad de } \wedge \\
&= a \wedge b, && \text{por idempotencia de } \wedge;
\end{aligned}
$$

similarmente, $a \wedge b \leq b$. Ahora si $c \leq a$, $c \leq b$, esto es
$c \wedge a = c$, $c \wedge b = c$, entonces
$c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c$.

Así $a \wedge b = \inf\{a,b\}$.

Finalmente $a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$ ya que
$a = a \wedge (a \vee b)$; $b = b \wedge (a \vee b)$ por la primera identidad de absorción, así si $a \leq c$ y $b \leq c$; o sea $a \wedge c = a$, $b \wedge c = b$, entonces
$a \vee c = (a \wedge c) \vee c = c$ y $b \vee c = c$ por la segunda identidad de absorción, así:

$$
\begin{aligned}
(a \vee b) \wedge c &= (a \vee b) \wedge (a \vee c), && \text{sustituyendo } a,c = a \vee c \\
&= (a \vee b) \wedge [a \vee (b \vee c)], && \text{sustituyendo} \\
& && a,c = b \vee c
\end{aligned}
$$

$= (a \vee b) \wedge [(a \vee b) \vee c]$, por asociatividad del $\vee$

$= a \vee b$, por la primera identidad de absorción.

Es decir, $a \vee b \leq c$, de donde $a \vee b = \sup \{a,b\}$.

(iii) Veamos que:

$(\rho^a)^p \subseteq \rho$

$(\rho^a)^p$ es una red por (i) y (ii).

Sean $a,b \in L$ con $a \leq b$ en $(\rho^a)^p$. En ρ^a tenemos

$a \wedge b = a$ por (ii). Pero si esto sucede en ρ^a por (i)

tenemos $\inf \{a,b\} = a$ en ρ, $a \leq b$ en ρ y obtenemos

$(\rho^a)^p \subseteq \rho$.

$\rho \subseteq (\rho^a)^p$ se consigue aplicando directamente (i) y (ii).

(iv) La prueba de (iv) es similar a la prueba de (iii) •

La prueba del Teorema 1.1 y al igual su información son sujetas a crítica. Comenzaremos con, el último paso de la prueba de (ii) puede ser hábilmente hecha por primera vez probando que $a = a \wedge b$ si y solo si $b = a \vee b$.

El Teorema 1.1 procede de un Teorema similar para "semiredes" que más adelante veremos.

Finalmente para redes como para estructuras algebráicas, el principio de dualidad toma la siguiente forma muy simple.

Sea Φ un enunciado acerca de redes expresadas en términos de $\wedge$ y $\vee$. El dual de Φ es un enunciado logrado de Φ por intercambio de $\wedge$ y $\vee$. Si Φ es verdadero para todas las redes, entonces el dual de Φ es tambien verdadero para todas las redes.

La prueba la obtenemos al observar que $\rho = (L;\wedge,\vee)$ entonces el dual de ρ^P es $(L;\vee,\wedge)^P$.

DEFINICION 1.13

Un C.O.P.O. es una semired disyunción (dualmente, semired conjunción) si sup $\{a,b\}$ (dualmente, inf $\{a,b\}$) existe para cualquier par de elementos a,b •

DEFINICION 1.14

Sea $(A;\circ)$ una estructura algebráica con una operación binaria $\circ$. $(A;\circ)$ es una estructura algebráica semired si $\circ$ es idempotente, conmutativa y asociativa •

TEOREMA 1.2 (Para Semiredes)

Las siguientes afirmaciones se cumplen:

(*i*) *Sea el C.O.P.O. $U = (A;\leq)$ una semired disyunción. Hagamos $a \vee b$ = sup $\{a,b\}$. Entonces la estructura algebraica $U^a = (A;\vee)$ es una semired.*

(*ii*) *Sea la estructura algebráica* $U = (A;\circ)$ *una semired. Sea* $a \leq b$ *si y solo si* $a \circ b = b$. *Entonces* $U^p = (A;\leq)$ *es un C.O.P.O. y el C.O.P.O.* U^p *es una semired disyunción.*

(*iii*) *Sea el C.O.P.O.* $U = (A;\leq)$ *una semired disyunción. Entonces* $(U^a)^p = U$

(*iv*) *Sea la estructura algebráica* $U = (A;\circ)$ *una semired. Entonces* $(U^p)^a = U$ •

PRUEBA

(i) Sean $a,b,c \in A$, $\sup\{a,a\} = a$, asi $a \vee a = a$

$a \vee b = \sup\{a,b\} = \sup\{b,a\} = b \vee a.$

$$\begin{aligned} a \vee (b \vee c) &= \sup\{a, \sup\{b,c\}\} \\ &= \sup\{a,b,c\} \\ &= \sup\{\sup\{a,b\},c\} \\ &= (a \vee b) \vee c \end{aligned}$$

de donde la estructura algebráica $U^a = (A;\vee)$ es una semired.

(ii) Sean $a,b,c \in A$

$a \circ a = a$ (por idempotencia en U)

$a \leq a$

si $a \leq b$ y $b \leq a$

$a \circ b = b$ y $b \circ a = a$, $a \circ b = b \circ a$ (conmutatividad)

y obtenemos $a = b$

si $a \leq b$ y $b \leq c$; $a \circ b = b$, $b \circ c = c$

$a \circ c = a \circ (b \circ c)$

$= (a \circ b) \circ c$

$= b \circ c$

$= c$, o sea $a \leq c$

Ahora veamos que sup $\{a,b\} = a \circ b$

$a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b = a \circ b$; $a \leq a \circ b$

$b \circ (a \circ b) = (b \circ a) \circ b = (a \circ b) \circ b = a \circ b$;

$b \leq a \circ b$.

Si $a \leq c$ y $b \leq c$; $a \circ c = c$, $b \circ c = c$

y obtenemos:

$$\begin{aligned}(a \circ b) \circ c &= a \circ (b \circ c)\\ &= a \circ c\\ &= c\end{aligned}$$

así sup $\{a,b\} = a \circ b$.

De donde $(A;\leq)$ es un C.O.P.O. y tambien semired disyunción.

(iii) U y $(U^a)^p$ son ambos C.O.P.O.S y semiredes disyunción. Sean $a,b \in A$ con: $a \leq b$ en U $a \leq b$ (en U) si y solo si $a \vee b = b$ (en U^a) si y solo si $a \leq b$ en $(U^a)^p$ de donde $U = (U^a)^p$.

(iv) $U = (A;\circ)$ y $(U^p)^a = (A;\vee)$ son ambas estructuras algebráicas semiredes. Sean $a,b,c \in A$.

$a \circ b = c$ en U

si y solo si sup $\{a,b\} = c$ en U^p

si y solo si $a \vee b = c$ en $(U^p)^a$.

Así $U = (U^p)^a$.

2. COMO DESCRIBIR REDES

Para ilustrar resultados y refutar conjeturas debemos describir un número considerable de ejemplos de redes. Esto podemos hacerlo basando los ejemplos en estructuras matemáticas conocidas.

En esta sección mencionaremos otros cuantos métodos.

Una red finita siempre puede ser descrita por una tabla conjunción y una tabla disyunción. Por ejemplo:

Sea $L = \{0,a,b,1\}$

$\vee$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$\wedge$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

Observamos que más información provista por las tablas es redundante. Ya que ambas operaciones son conmutativas, las tablas son simétricas con respecto a la diagonal. Además se sabe que, $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$; así las diagonales mismas no proveen nueva información; por lo tanto, las dos tablas pueden ser condensadas en una sola, de la siguiente forma:

$\wedge$ $\vee$	0	a	b	1
0		0	0	0
a	a		0	a
b	b	1		b
1	1	1	1	

La parte de encima de la diagonal determina la parte de abajo de la diagonal, dado que una de las dos determina el ordenamiento parcial.

Para mostrar que esta tabla determina una red, debemos solamente ver que la propiedad asociativa y las identidades de absorción.

Otra forma de conocer una red, es describir el ordenamiento parcial, esto es, todos los pares (x,y) tales que $x \leq y$.

En el ejemplo anterior el ordenamiento parcial es:

$\leq = \{(0,0),\ (0,a),\ (0,b),\ (0,1),\ (a,a),\ (a,1),\ (b,b),\ (b,1),$
$(1,1)\}$.

Obviamente, todos los pares de la forma (x,x) pueden ser omitidos, ya que conocemos que $x \leq x$.

Tambien, si $x \leq y$, y, $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

Por ejemplo, cuando conocemos que $0 \leq a$ y $a \leq 1$ no es necesario decir que $0 \leq 1$. Hagamos esta idea más precisa, diciendo:

DEFINICION 2.1

En un C.O.P.O. $(P;\leq)$, a cubre a b (b es cubierta por a) (en notación $a >\!\!-\!\!- b$ $(b -\!\!-\!\!< a)$ si $a > b$ y para ningúna x, $a > x > b$ •

La relación de cobertura del anterior ejemplo es simplemente:
$-\!\!-\!\!< \; = \{(0,a), (0,b), (a,1), (b,1)\}$.

¿Podría la relación de cobertura determinar el ordenamiento parcial?. El siguiente Lema muestra que en el caso finito lo hace.

LEMA 2.1

Sea $(P;\leq)$ una C.O.P.O. finito. Entonces $a \leq b$ si y solo si $a = b$ ó existe una secuencia finita de elementos $x_0,\ldots,x_{n-1}$ tal que $x_0 = a$, $x_{n-1} = b$, y $x_i -\!\!-\!\!< x_{i+1}$, para $0 \leq i < n - 1$ •

PRUEBA

Supongamos que $a < b$. Si existe $x_1 \varepsilon P$ tal que $a < x_1$, $x_1 < b$, podemos obtener la cadena $a < x_1 < b$, asi continuamos agregando elementos entre cada par de miembros de la nueva cadena, como P es finito este proceso se detiene obteniendo la cadena $a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{n-1} = b$ donde

$x_i \longrightarrow\!< x_{i-1}$, para $0 \leq i < n - 1$.

El recíproco es inmediato •

Podemos graficar a un C.O.P.O. $(P;\leq)$, simbolizando con círculos pequeños los elementos del C.O.P.O., si $x,y \in P$ y $x \longrightarrow\!< y$, trazamos una linea recta entre los círculos que representan a x,y, y el círculo que representa a y lo dejaremos más alto que el círculo que representa a x.

El diagrama de la red discutida previamente es mostrado así:

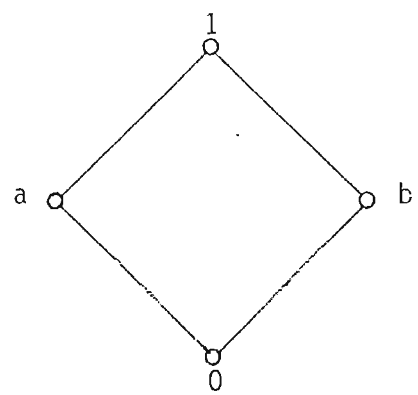


Figura 2.1

Algunas veces el "diagrama de un C.O.P.O. infinito" es dibujado. Tales diagramas son siempre acompañados por explicaciones.

Note que en un diagrama la intersección de dos línea no necesariamente debe indicar un elemento.

DEFINICION 2.2

Un diagrama es plano si ninguna línea se intersecta •

Ejemplos:

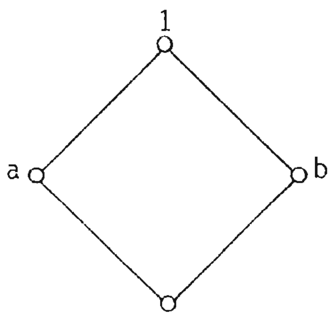


Figura 2.1

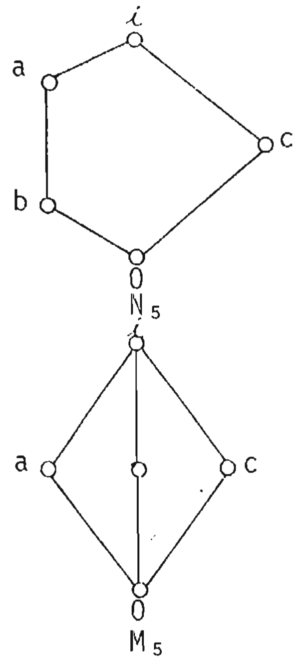


Figura 2.2

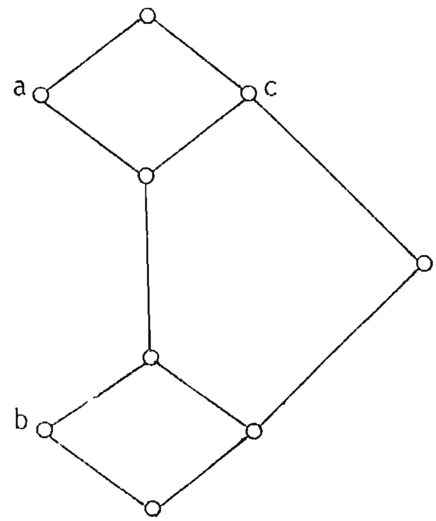


Figura 2.3

DEFINICION 2.3

Un diagrama es óptimo si el número de pares de intersección de líneas es mínimo •

Ejemplo:

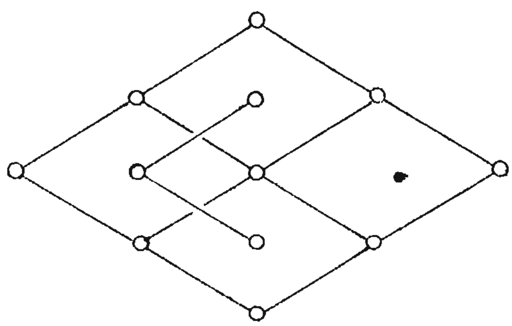


Figura 2.4

Ejemplo de diagrama no óptimo:

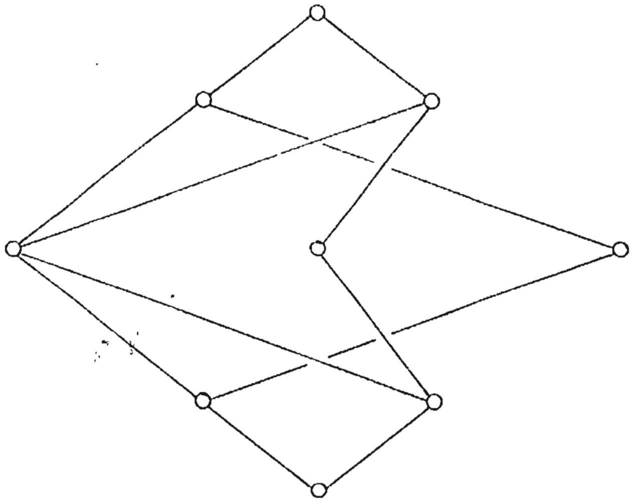


Figura 2.5

Como una regla, los diagramas óptimos son los más usados en la práctica.

Los métodos que usaremos son combinaciones de los vistos previamente. La red N_5 de la figura 2.2 tiene cinco elementos:

$0, a, b, c, i$, y , $b < a$, $c \vee b = i$, $a \wedge c = 0$.

La red M_5 tiene cinco elementos (figura 2.2):

$0, a, b, c, i$, y , $a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c = 0$;
$a \vee b = a \vee c = b \vee c = i$.

En contraste, nosotros podemos iniciar con algunos elementos (digamos a, b, c), con alguna relación (digamos $b < a$), y preguntarnos por la red más general que puede ser formada, sin especificar los elementos a usar. En este caso continuaremos formando disyunciones ($\vee$) y conjunciones ($\wedge$) hasta conseguir una red. Una conjunción (ó disyunción) formada es identificada con un elemento que nosotros ya tenemos, solamente si esta identificación es forzada por los axiomas de red o por las relaciones dadas.

Para ilustrar estas ideas hagamos una parte de los cálculos que se necesitan en la construcción de la red más general L generada por a,b,c con $b < a$.

Iniciaremos la construcción disyuntando y conjuntando $a \vee c$, $b \vee c$, $a \wedge c$, $b \wedge c$; note que, $a \vee b \vee c = (a \vee b) \vee c = a \vee c$ ya que $a \vee b = a$, similarmente $a \wedge b \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = b \wedge c$ ya que $a \wedge b = b$. Proximamente tenemos que probar que los siete elementos ($a,b,c,a \vee c$, $b \vee c$, $a \wedge c$, $b \wedge c$) que tenemos son todos diferentes. Recordemos que dos elementos son iguales si tal igualdad se sigue de la relación ($b < a$) y de los axiomas de red.

Además para probar que un par de ellos es diferente, es suficiente encontrar una red K con $a,b,c, \in K$, $b < a$ donde este par de elementos es diferente; ó suponerlos iguales y llegar a una contradicción con las condiciones iniciales.

Por ejemplo:

Probar que $a \neq a \vee c$, tomemos la red $\{0,1,2\}$ con $0 < 1 < 2$ y $b = 0$, $a = 1$, $c = 2$.

El próximo paso es formar más disyunciones y conjunciones:

$b \vee (a \wedge c)$, $a \wedge (b \vee c)$. Es facil ver que todas las otras disyunciones y conjunciones son iguales a las dadas, por ejemplo:

$b \wedge (a \wedge c) = (b \wedge a) \wedge c = b \wedge c$; $a \vee (a \vee c) = a$;
$b \wedge (a \vee c) = b$; $a \vee (b \wedge c) = a$.

Ahora afirmamos que los nueve elementos $(a, b, c, a \vee c, b \vee c, a \wedge c, b \wedge c, b \vee (a \wedge c), a \wedge (b \vee c))$ forman una red.

Tenemos que probar que por disyunciones ($\vee$) y conjunciones ($\wedge$) no podemos conseguir un nuevo elemento.

Las treinta y seis disyunciones y las treinta y seis conjunciones que tenemos que chequear son todas triviales. Por ejemplo:

$a \vee [b \vee (a \wedge c)] = (a \vee b) \vee (a \wedge c) = a \vee (a \wedge c) = a$,
por ley de absorción

$c \wedge [a \wedge (b \vee c)] = (c \wedge a) \vee (b \vee c) = a \wedge c$, ya que
$c \wedge a \leq b \vee c$.

La red conseguida de a,b,c satisfaciendo $b < a$ es vista en la figura 2.3. •

3. ALGUNOS CONCEPTOS ALGEBRAICOS

El propósito de una teoría algebraica es la investigación de algebras bajo isomorfismos. En ese sentido podemos introducir dos conceptos de isomorfismo para redes.

DEFINICION 3.1

Las redes $\rho_0 = (L_0;\leq)$, $\rho_1 = (L_1;\leq)$ *son isomorfas (en símbolos,* $\rho_0 \cong \rho_1$*), y el mapeo* $\gamma\colon L_0 \to L_1$ *es un isomorfismo si* γ *es uno a uno, sobreyectivo y si*

$a \leq b$ *en* ρ_0 *si y solo si* $a\gamma \leq b\gamma$ *en* ρ_1 •

DEFINICION 3.2

Las redes $\rho_0 = (L_0;\wedge,\vee)$, $\rho_1 = (L_1;\wedge,\vee)$ *son isomorfas (en símbolos,* $\rho_0 \cong \rho_1$*), y el mapeo* $\gamma\colon L_0 \to L_1$ *es un isomorfismo si* γ *es uno a uno, sobreyectivo y si*

$$(a \wedge b)\gamma = a\gamma \wedge b\gamma$$

y,

$$(a \vee b)\gamma = a\gamma \vee b\gamma \quad \bullet$$

Afirmamos que los dos conceptos coinciden bajo la equivalencia del Teorema 1.1 •

Efectivamente:

Si $\rho_0 = (L_0;\wedge,\vee)$, $\rho_1 = (L_1;\wedge,\vee)$, cumplen la definición 3.1;

para $a,b,c \varepsilon L_0$, se tiene:

(i) $(a \wedge b)\gamma \leq a\gamma$, $(a \wedge b)\gamma \leq b\gamma$,

$(a \wedge b)\gamma \leq a\gamma \wedge b\gamma$. Por definición 3.1

si c es tal que $c\gamma \leq a\gamma$ y $c\gamma \leq b\gamma$,

entonces $c \leq a$ y $c \leq b$, $c \leq a \wedge b$ luego,

$c\gamma \leq (a \wedge b)\gamma$. Así $(a \wedge b)\gamma = a\gamma \wedge b\gamma$.

(ii) $(a \vee b)\gamma \geq a\gamma$, $(a \vee b)\gamma \geq b\gamma$,

$(a \vee b)\gamma \geq a\gamma \vee b\gamma$. Por definición 3.1

si c es tal que $c\gamma \geq a\gamma$ y $c\gamma \geq b\gamma$,

$c \geq a$ y $c \geq b$, $c \geq a \vee b$ luego

$c\gamma \geq (a \vee b)\gamma$. Así $(a \vee b)\gamma = a\gamma \vee b\gamma$

así ρ_0 y ρ_1 son isomorfas según definición 3.2.

Recíprocamente si $\rho_0 = (L_0;\wedge,\vee)$, $\rho_1 = (L_1;\wedge,\vee)$, son isomorfas según definición 3.2.

Sean $a,b \ \varepsilon \rho_0$:

$a \leq b$ si y solo si $a \wedge b = a$

si y solo si $(a \wedge b)\gamma = a\gamma$

si y solo si $a\gamma \wedge b\gamma = a\gamma$

si y solo si $a\gamma \leq b\gamma$, cumpliendo definición 3.1 •

De ahora en adelante abandonaremos la notación $(L;\wedge,\vee)$ y $(L;\leq)$ para redes y C.O.P.O.S; simplemente escribiremos la letra mayúscula, indicando el conjunto comprendido a menos que por alguna razón se quiera ser más explícito.

Notaremos que la definición 3.1 puede ser aplicada a pares de

C.O.P.O.S L_0 y L_1, y asi obtendremos el concepto de isomorfismos para C.O.P.O.S .

Teniendo este concepto de isomorfismo, podemos establecer el contenido del Lema 2.1. El diagrama de un C.O.P.O. finito determina el C.O.P.O. bajo un isomorfismo.

Si C_n es denotado por el conjunto $\{0, \ldots, n-1\}$ ordenado por $0 < 1 < 2 < \ldots < n-1$. Entonces C_n tiene n elementos encadenados.

Si $C = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ tiene n elementos encadenados así: $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$, entonces $\gamma: i \longrightarrow x_i$ es un isomorfismo entre C_n y C. Además, el encadenamiento de los n elementos es único bajo el isomorfismo.

Otros tipos de funciones sobre C.O.P.O.S.:

El mapeo $\gamma: P_0 \longrightarrow P_1$ es un mapeo isótono (también llamado mapeo monótono) del C.O.P.O. P_0 en el C.O.P.O. P_1, si $a \leq b$ en P_0 implica que $a\gamma \leq b\gamma$ en P_1.

Un homomorfismo de la semired $(S_0;\circ)$ sobre la semired $(S_1;\circ)$ es un mapeo $\gamma: S_0 \longrightarrow S_1$ satisfaciendo:

$$(a \circ b)\gamma = a\gamma \circ b\gamma.$$

Además una red $\rho = (L;\wedge,\vee)$ es una semired bajo $\wedge$ y bajo $\vee$, consiguiendo dos conceptos de homomorfismos, homomorfismo-conjunción ($\wedge$-homomorfismo) y homomorfismo disjunción ($\vee$- homomorfismo).

DEFINICION 3.3

Un homomorfismo es un mapeo que es ambos un homomorfismo - conjunción y un homomorfismo - disyunción. Así un homomorfismo γ *de la red* L_0 *en la red* L_1 *es un mapeo de* $L_0 \longrightarrow L_1$ *satisfaciendo ambos*

$$(a \wedge b)\gamma = a\gamma \wedge b\gamma \quad y$$
$$(a \vee b)\gamma = a\gamma \vee b\gamma \quad \bullet$$

Un homomorfismo uno a uno también recibe el nombre de inmersión.

Notaremos que el homomorfismo - conjunción, el homomorfismo -disyunción, y el homomorfismo, son todos isótonos.

PRUEBA

Para homomorfismo - conjunción.

Si $\gamma: L_0 \longrightarrow L_1$, $(a \wedge b)\gamma = a\gamma \wedge b\gamma$ para todo $a,b \varepsilon L_0$. Ahora sean $x,y \varepsilon L_0$ $x \leq y$,

entonces $x = x \wedge y$; asi $x\gamma = (x \wedge y)\gamma$

$$= x\gamma \wedge y\gamma,$$

y $x\gamma \leq y\gamma$ en L_1.

Para homomorfismo - disyunción.

Si $\gamma: L_0 \longrightarrow L_1$ $(a \vee b)\gamma = a\gamma \vee b\gamma$ para todo $a,b \varepsilon L_0$. Sean $x,y \varepsilon L_0$ $x \leq y$ en L_0, entonces

$y = x \vee y$, asi $y\gamma = (x \vee y)\gamma$

$= x\gamma \vee y\gamma$

y $x\gamma \leq y\gamma$ en L_1.

Y como un homomorfismo es un mapeo que es ambos homomorfismo-conjunción y un homomorfismo - disyunción y estos cumplen con ser isótonos entonces el homomorfismo es isótono •

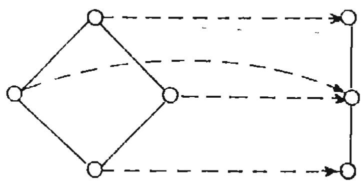


Figura 3.1

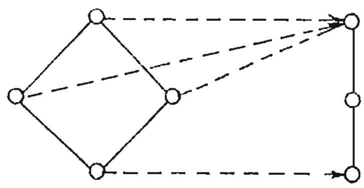


Figura 3.2

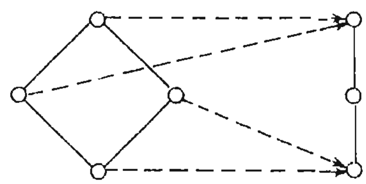


Figura 3.3

Las figuras 3.1 - 3.3 son tres mapeos de los cuatro elementos de la red L de la figura 2.1 en los tres elementos encademados de C_3. El mapeo de la figura 3.1 es monótono, pero no es un homomorfismo - conjunción, ni disyunción.

El mapeo de la figura 3.2 es un homomorfismo - disyunción pero no es un homomorfismo - conjunción.

El mapeo de la figura 3.3 es un homomorfismo.

El segundo concepto básico es el de sub algebra;

DEFINICION 3.4

Una sub red $A = (K;\wedge,\vee)$ *de la red* $\rho = (L;\wedge,\vee)$, *es definida sobre un subconjunto no vacío* K *de* L, *con la propiedad que* $a, b \in K$ *implica que* $a \wedge b$, $a \vee b \in K$ ($\wedge,\vee$, *tomados en* ρ) *y el* $\wedge$ *y el* $\vee$ *de* A *son las restricciones a* K *de el* $\wedge$ *y el* $\vee$ *de* ρ .

Otra forma más simple:

DEFINICION 3.5

K *es una red bajo el mismo* $\wedge$ *y* $\vee$ *de* L; *siendo* K *un subconjunto de la red* L *cerrado bajo el* $\wedge$ *y* $\vee$.

El concepto de una red como un C.O.P.O. sugiere el siguiente concepto de sub red:

Sea K un subconjunto de la red L y $K \neq \phi$; si el ordenamiento parcial de L hace a K una red, entonces K es una sub red de L, pero este concepto es distinto del dado en la definición 3.5.

DEFINICION 3.6

Sean $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$, *sub-redes de* L. *Entonces* $\cap (A_\lambda / \lambda \in \Lambda)$ (*el conjunto de las intersecciones de* A_λ, $\lambda \in \Lambda$) *es también cerrado bajo el* $\wedge$ *y* $\vee$; *así para cada* $H \subseteq L$; $H \neq \phi$, *existe el más pequeño conjunto* $[H] \subseteq L$ *conteniendo a* H *y cerrado bajo* $\wedge$ *y* $\vee$.
La sub red $[H]$ *es llamada la sub red de* L *generada por* H *y* H

es un subconjunto generador de $[H]$ •

DEFINICION 3.7

El subconjunto K *de la red* L *es llamado convexo si,* $a, b \in K$; $c \in L$ *y* $a \leq c \leq b$ *implica que* $c \in K$ •

Ejemplos de conjuntos convexos:

(i) Para $a, b \in L$, $a \leq b$, el intervalo $[a,b] = \{x/a \leq x \leq b\}$

(ii) Para una cadena C; $a, b \in C$, $a \leq b$, podemos tambien definir los intervalos semi-abiertos:

$(a,b] = \{x/a < x \leq b\}$;

$[a,b) = \{x/a \leq x < b\}$, y el intervalo abierto:

$(a,b) = \{x/a < x < b\}$.

DEFINICION 3.8

Una sub red I *de* L *es un ideal si* $i \in I$ *y* $a \in L$ *implica que* $a \wedge i \in I$ •

DEFINICION 3.9

Un ideal de L *es un ideal propio si* $I \neq L$ •

DEFINICION 3.10

Un ideal propio I *de* L *es primo si* $a, b, \in L$ *y* $a \wedge b \in I$ *impli* *ca que* $a \in I$ *ó* $b \in I$ $\bullet$

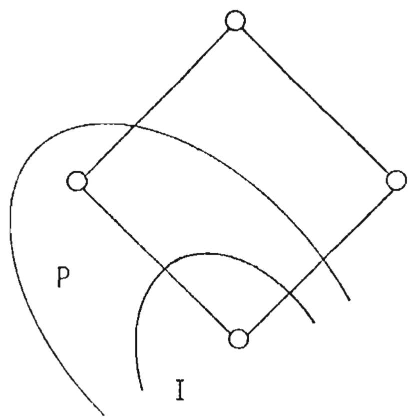


Figura 3.4

Ya que la intersección de un número de sub redes convexas (ideales) es una sub red convexa (ideal excepto vacio, podemos hablar de la sub red convexa generada por un subconjunto H, y el ideal generado por un subconjunto H de la red L, con $H = \phi$. El ideal generado por un subconjunto H será denotado por (H], y si, $H = \{a\}$ escribiremos (a] por ({a}]; llamaremos a (a] un ideal principal.

LEMA 3.1

Sea L *una red y sean* H *e* I *subconjuntos no vacios de* L.

(*i*) I *es un ideal si y solo si* $a, b \in I$ *implica que* $a \vee b \in I$, *y* $a \in I$, $x \in L$, $x \leq a$ *implica que* $x \in I$.

(*ii*) $I = (H]$ *si y solo si para todo* $i \in I$ *existe un entero*

$n \geq 1$ y existen $h_0, \ldots, h_{n-1} \in H$ de manera que $i \leq h_0 \vee \ldots \vee h_{n-1}$.

(*iii*) *Para, $a \in L$ $(a] = \{x/x \leq a\}$* •

PRUEBA

(i) Sea I un ideal. Entonces $a, b \in I$ implica que $a \vee b \in I$, ya que I es una sub red de L.

Si $x \leq a \in I$, entonces $x = x \wedge a \in I$, de aquí que $x \in I$. Y la condición de (i) es verificada.

Recíprocamente, supongamos que I satisface la condición en (i). Sean $a, b \in I$ entonces $a \vee b \in I$ por hipótesis y ya que $a \wedge b \leq a \in I$, tambien tenemos que $a \wedge b \in I$; asi I es una sub red.

Finalmente, si $x \in L$ y $a \in I$, entonces $a \wedge x \leq a \in I$, así $a \wedge x \in I$, probando que I es un ideal.

(ii) Sea $I_0 = \{i/i \leq h_0 \vee \ldots \vee h_{n-1}$ para $h_0, \ldots, h_{n-1} \in H$, para algún entero $n \geq 1\}$. Usando (i), es claro que I_0 es un ideal, y obviamente $H \subseteq I_0$. Finalmente si $H \subseteq J$ y J es un ideal, entonces $I_0 \subseteq J$, y así I_0 es el ideal más pequeño conteniendo a H; esto es $I_0 = (H]$.

(iii) $(a] = (\{a\}] = \{i/i \leq h_0 \vee \ldots \vee h_{n-1},\ h_0, \ldots, h_{n-1} \in \{a\}\}$

$(a] = \{x/x \leq a\}$ •

Denotemos con $I(L)$ al conjunto de todos los ideales de L y $I_0(L) = I(L) \cup \{\phi\}$.

COROLARIO 3.1

$I(L)$ y $I_0(L)$ son C.O.P.O.S bajo "la inclusión", y como C.O.P.O.S ellos son redes •

En efecto, $I \vee J = (I \cup j]$, ya que de (ii) de Lema 3.1 vemos que para $I, J \in I(L)$, $x \in I \vee J$ si y solo si $x \leq i \vee j$ para algún $i \in I$, $j \in J$.

Además convendremos que $(\phi] = \phi$.

En general $\vee(I_\lambda / \lambda \in \Lambda) = (\cup (I_\lambda / \lambda \in \Lambda)]$; esto es, un conjunto no vacio de $I(L)$ tiene supremo. El ínfimo de I y J es $I \cap J$. Combinando esta fórmula con el Lema 3.1 (ii), tenemos:

COROLARIO 3.2

Sean I_λ, $\lambda \in \Lambda$, ideales y sea $I = V(I_\lambda / \lambda \in \Lambda)$. Entonces $i \in I$ si y solo si $i \leq j_{\lambda_0} \vee \cdots \vee j_{n-1}$, para algún entero $n \geq 1$ y para algunos $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \Lambda$, $j_{\lambda_i} \in I_{\lambda_i}$ •

Llamaremos a $I(L)$ la red ideal y a $I_0(L)$ la red ideal aumentada de L.

Ahora observemos las fórmulas:

$$(a] \wedge (b] = (a \wedge b] \quad , \quad (a] \vee (b] = (a \vee b]$$

ya que $a \neq b$ implica que $(a] \neq (b]$, estas fórmulas permiten:

COROLARIO 3.3

L puede ser sumergido en $I(L)$ y tambien en $I_0(L)$, y $a \longrightarrow (a]$ es tal inmersión •

Ahora conectemos homomorfismos e ideales.

LEMA 3.2

(*i*) *I es un ideal propio de L si y solo si existe un homomorfismo-disyunción γ de L sobre C_2 tal que $I = 0\gamma^{-1}$, esto es $I = \{x / x\gamma = 0\}$*

(*ii*) *I es un ideal primo de L si y solo si existe un homomorfismo γ de L sobre C_2 con $I = 0\gamma^{-1}$* •

PRUEBA

(i) Sea I un ideal propio de L y definamos a

$$\begin{aligned} \gamma: L &\longrightarrow C_2 \\ x &\rightsquigarrow x\gamma = 0 \quad \text{si } x \in I \\ x &\rightsquigarrow x\gamma = 1 \quad \text{si } x \notin I \end{aligned}$$

Probaremos que γ es un homomorfismo disyunción es decir que si $a, b \in L$ entonces $a\gamma \vee b\gamma = (a \vee b)\gamma$.

a) Si $a,b \in I$ entonces $a\gamma = b\gamma = 0$ de aquí que
$a\gamma \vee b\gamma = 0 \vee 0 = 0 = (a \vee b)\gamma$

b) Si $a \in I$ y $b \notin I$ entonces $a\gamma = 0$ y $b\gamma = 1$
por lo tanto $a\gamma \vee b\gamma = 0 \vee 1 = 1 = (a \vee b)\gamma$,
ya que $a \vee b \notin I$.

c) Si $a,b \notin I$ entonces $a\gamma = b\gamma = 1$ de donde
$a\gamma \vee b\gamma = 1 \vee 1 = 1 = (a \vee b)\gamma$.
$\therefore$ γ es un homomorfismo disyunción

Recíprocamente si γ es un homomorfismo disyunción de L sobre C_2 y $I = 0\gamma^{-1}$, entonces para $a,b \in I$ tenemos $a\gamma = b\gamma = 0$; asi $(a \vee b)\gamma = a\gamma \vee b\gamma = 0 \vee 0 = 0$, esto es $a \vee b \in I$. Si $a \in I$, $x \in L$, $x \leq a$ entonces $x\gamma \leq a\gamma = 0$, esto es $x\gamma = 0$ asi $x \in I$. De donde I es un ideal.

Finalmente γ es sobre y asi $I \neq L$.

(ii) Si I es primo tomemos a

$$\begin{aligned} \gamma : L &\longrightarrow C_2 \\ x &\rightsquigarrow x\gamma = 0 \quad \text{si } x \in I \\ x &\rightsquigarrow x\gamma = 1 \quad \text{si } x \notin I \end{aligned}$$

y probemos que es un homomorfismo conjunción, es decir que $a\gamma \wedge b\gamma = (a \wedge b)\gamma$.

a) Si $a,b \in I$ entonces $a\gamma = b\gamma = 0$, por lo tanto
$a\gamma \wedge b\gamma = 0 \wedge 0 = 0 = (a \wedge b)\gamma$.

b) Si $a \in I$ y $b \notin I$ entonces $a\gamma = 0$ y $b\gamma = 1$ de aquí que $a\gamma \wedge b\gamma = 0 \wedge 1 = 0 = (a \wedge b)\gamma$

c) Si $a,b \notin I$ entonces $a\gamma = 1$ y $b\gamma = 1$, de donde $a\gamma \wedge b\gamma = 1 \wedge 1 = 1 = (a \wedge b)\gamma$. Esto junto con (i) hace a γ un homomorfismo.

Recíprocamente sea γ un homomorfismo de L sobre C_2 y sea $I = 0\gamma^{-1}$. Por (i) I es un ideal propio.
Si $a,b \in L$ con $a \wedge b \in I$, $(a \wedge b)\gamma = 0$, entonces $a\gamma \wedge b\gamma = 0$, $a\gamma = 0$ ó $b\gamma = 0$, así a ó $b \in I$, I es ideal primo •

Dualizando conseguimos las siguientes definiciones:

DEFINICION 3.11

Una sub red I de L es un ideal dual si, $i \in I$ y $a \in L$ implica que $a \vee i \in I$. A este ideal dual tambien se le da el nombre de filtro •

DEFINICION 3.12

Un ideal de L es un ideal dual propio si $I \neq L$ •

DEFINICION 3.13

Un ideal dual propio I de L es primo (filtro primo o "ultra" filtro) si $a,b \in L$ y $a \vee b \in I$ implica que $a \in I$ ó $b \in I$ •

El ideal dual generado por H será denotado por $[H)$ y si $H = \{a\}$, escribiremos $[a)$ por $[\{a\})$; llamaremos a $[a)$ un ideal dual principal.

Denotaremos por $\mathcal{D}(L)$ a la red de ideales duales ordenados por "inclusión" y $\mathcal{D}_0(L) = \mathcal{D}(L) \cup \{\phi\}$.

Note que en $\mathcal{D}(L)$ $(y(\mathcal{D}_0(L)))$ el elemento más grande es L; si L tiene 0 y 1, entonces $L = [0)$ es el más grande y $\{1\} = [1)$ es el más pequeño elemento de $\mathcal{D}(L)$. Además para $a,b \in L$ tenemos $[a) \wedge [b) = [a \vee b)$ y $[a) \vee [b) = [a \wedge b)$.

LEMA 3.3

Sea I un ideal y sea D un ideal dual. Si $I \cap D \neq \phi$, entonces $I \cap D$ es una sub red convexa y cada sub red convexa puede ser expresada en una y solamente una de tal forma •

PRUEBA

Probaremos primero que si I es un ideal y D un ideal dual, con $I \cap D \neq \phi$ entonces $I \cap D$ es un sub red convexa.

(i) Como I es una red y D un ideal dual, entonces $I \cap D$ es una red; además I es convexo y D tambien, por lo tanto $I \cap D$ es convexo de donde $I \cap D$ es una sub red convexa.

A probar ahora que cada sub-red convexa puede ser expresada en esta forma.

(ii) Sea C una sub red convexa y sea $I = (C]$, $D = [C)$. Entonces $C \subseteq I \cap D$. Si $t \in I \cap D$ entonces $t \in I$ y así por (ii) de Lema 3.1, $t \leq c$ para algún $c \in C$; tambien $t \in D$; además por el dual de (ii) de Lema 3.1 $t \geq d$ para algún $d \in C$. Esto implica que $t \in C$ ya que C es convexo, y así $C = I \cap D$.

A probar que la sub red convexa puede ser expresada en una y solamente una forma.

(iii) Supongamos que C tiene otra representación, $C = I_1 \cap D_1$ ya que $C \subseteq I_1$ tenemos $(C] \subseteq I_1$.

Sea $a \in I$, y sea c un elemento arbitrario de c, entonces $a \vee c \in I$, y $a \vee c \geq c \in D_1$ ya que $a \vee c \in D_1$, así $a \vee c \in I_1 \cap D_1 = C$. Finalmente, $a \leq a \vee c \in C$; asi $a \in (C]$. Esto prueba que $I_1 = (C]$.

El argumento dual prueba que $D_1 = [C)$; de donde $C = (C] \cap [C)$, lo que demuestra la unicidad de cada representación •

DEFINICION 3.14

Una relación de equivalencia θ (esto es reflexiva, simétrica y transitiva relación binaria) sobre una red L es llamada una relación de congruencia de L si $a_0 \equiv b_0$ (θ) y $a_1 \equiv b_1$ (θ) implica que
$a_0 \wedge a_1 \equiv b_0 \wedge b_1$ (θ) y $a_0 \vee a_1 \equiv b_0 \vee b_1$ (θ)
propiedad de sustitucion) •

Ejemplos triviales son w,t definidos por $x \equiv y(w)$ si y solo si $x = y$; $x \equiv y(t)$ para todo x,y.

DEFINICION 3.15

Para $a \in L$, la clase de congruencia conteniendo a es denotada por $[a]$ (θ) y se define como $[a]$ $(\theta) = \{x/x \equiv a$ $(\theta)\}$ •

LEMA 3.4

Sea θ una relación de congruencia de L. Entonces para cada $a \in L$, $[a](\theta)$ es una sub red convexa •

PRUEBA

Sean $x,y \in [a](\theta)$; entonces $x \equiv a(\theta)$ y $y \equiv a(\theta)$ además, $x \wedge y \equiv a \wedge a \equiv a(\theta)$ y $x \vee y \equiv a \vee a \equiv a(\theta)$, probando que $[a]$ (θ) es una sub red. Si $x \leq t \leq y$ con $x,y \in [a]$ (θ) entonces

$x \equiv a(\theta)$ y $y \equiv a(\theta)$. Además, $t = t \wedge y \equiv t \wedge a\ (\theta)$ y $t = t \vee x \equiv (t \wedge a) \vee x \equiv (t \wedge a) \vee a = a\ (\theta)$ probando que $[a](\theta)$ es convexo •

El siguiente Lema facilita los cálculos para probar que una relación binaria dada es una relación de congruencia.

LEMA 3.5

Una relación binaria reflexiva y simétrica θ *sobre una red* L *es una relación de congruencia si y solo si las siguientes tres propiedades son satisfechas por* $x, y, z, t \in L$:

(*i*) $x \equiv y\ (\theta)$ *si y solo si* $x \wedge y \equiv x \vee y\ (\theta)$.

(*ii*) $x \leq y \leq z$, $x \equiv y\ (\theta)$ *y* $y \equiv z\ (\theta)$ *implica que* $x \equiv z\ (\theta)$.

(*iii*) $x \leq y$, *y* $x \equiv y\ (\theta)$ *implica que* $x \wedge t \equiv y \wedge t\ (\theta)$ *y* $x \vee t \equiv y \vee t\ (\theta)$ •

PRUEBA

(i) Si $x \equiv x\ (\theta)$ y $x \equiv y\ (\theta)$ y por hipótesis θ es una relación de congruencia entonces

$x = x \wedge x \equiv x \wedge y\ (\theta)$,

$x = x \vee x \equiv x \vee y\ (\theta)$ y por transitividad

$x \wedge y \equiv x \vee y\ (\theta)$.

Recíprocamente si $x \wedge y \equiv x \vee y\ (\theta)$,

$x \wedge y \leq x$ $y \leq x \vee y$ y $x \equiv y\ (\theta)$ porque las clases de equivalencia son convexas.

(ii) Por transitividad de θ.

(iii) $t \equiv t\ (\theta)$, asi $x \wedge t \equiv y \wedge t\ (\theta)$ y $x \vee t \equiv y \vee t\ (\theta)$.

Recíprocamente asumamos ahora que una relación binaria reflexiva y simétrica θ satisface las condiciones (i) (iii).

Sean $b,c \in [a,d]$ y $a \equiv d\ (\theta)$; afirmamos que $b \equiv c\ (\theta)$, probémoslo.

Realmente $a \equiv d\ (\theta)$ y $a \leq d$ implica por (iii) que $b \wedge c = a \vee (b \wedge c) \equiv d \vee (b \wedge c) = d\ (\theta)$. Ahora $b \wedge c \leq d$ y (iii) implica que $b \wedge c = (b \wedge c) \wedge (b \vee c) \equiv d \wedge (b \vee c) = b \vee c\ (\theta)$; asi por (i) $b \equiv c\ (\theta)$.

Probemos que θ es transitiva, sea $x \equiv y\ (\theta)$, $y \equiv z\ (\theta)$ entonces por (i) $x \wedge y \equiv x \vee y\ (\theta)$ y por (iii)

$$y \vee z = (y \vee z) \vee (y \wedge x) \equiv (y \vee z) \vee (y \vee x) = x \vee y \vee z\ (\theta), \text{ y}$$

similarmente

$$x \wedge y \wedge z \equiv y \wedge z\ (\theta). \text{ Además}$$

$x \wedge y \wedge z \equiv y \wedge z \equiv y \vee z \equiv x \vee y \vee z\ (\theta)$ y $x \wedge y \wedge z \leq y \wedge z \leq y \vee z \leq x \vee y \vee z$. Así aplicando (ii) dos veces tendríamos:

$$x \wedge y \wedge z \equiv x \vee y \vee z \ (\theta).$$

Ahora aplicamos la oración del párrafo previo con

$a = x \wedge y \wedge z$, $b = x$, $c = z$, $d = x \vee y \vee z$

quedando de la siguiente forma $x, z \varepsilon [x \wedge y \wedge z, x \vee y \vee z]$ y $x \wedge y \wedge z \equiv x \vee y \vee z\ (\theta)$ entonces $x \equiv z\ (\theta)$.

Sea $x \equiv y\ (\theta)$ afirmamos que $x \vee t \equiv y \vee t\ (\theta)$, probémoslo.

Si $x \equiv y\ (\theta)$ entonces $x \wedge y \equiv x \vee y\ (\theta)$ por (i); así por (ii) $(x \wedge y) \vee t \equiv x \vee y \vee t\ (\theta)$, ya que $x \vee t$, $y \vee t \ \varepsilon [(x \wedge y) \vee t, x \vee y \vee t]$ concluyendo que $x \vee t \equiv y \vee t\ (\theta)$.

Probemos la propiedad de sustitución para $\vee$.

Sea $x_0 \equiv y_0 (\theta)$ y $x_1 \equiv y_1\ (\theta)$. Entonces $x_0 \vee x_1 \equiv x_0 \vee y_1 \equiv y_0 \vee y_1\ (\theta)$, implicando que, $x_0 \vee x_1 \equiv y_0 \vee y_1\ (\theta)$, ya que θ es transitivo.

Probemos ahora la propiedad de sustitución para $\wedge$, sea $x_0 \equiv y_0\ (\theta)$ y $x_1 \equiv y_1\ (\theta)$. Entonces $x_0 \wedge x_1 \equiv x_0 \wedge y_1 \equiv y_0 \wedge y_1\ (\theta)$ de donde $x_0 \wedge x_1 \equiv y_0 \wedge y_1\ (\theta)$ ya que θ es transitivo •

Si $x \equiv y\ (\theta)$; veamos que $x \wedge t \equiv y \wedge t\ (\theta)$. $x \equiv y\ (\theta)$ implica que $x \wedge y \equiv x \vee y$ por (i); así por (ii) $(x \wedge y) \wedge t \equiv (x \vee y) \wedge t\ (\theta)$, ya que $x \wedge t$, $y \wedge t\ \varepsilon$ $[(x \wedge y) \wedge t, (x \vee y) \wedge t]$ concluimos que $x \wedge t \equiv y \wedge t\ (\theta)$.

DEFINICION 3.16

Sea C(L) *el conjunto de todas las relaciones de congruencia sobre* L, *parcialmente ordenados por la inclusión.* (*Cada* $\theta \in C(L)$ *es un subconjunto de* L^2) •

Como una aplicación del Lema 3.5 probemos.

TEOREMA 3.1

C(L) *es una red. Para* θ, $\Phi \in C(L)$ $\theta \wedge \Phi = \theta \cap \Phi$. *La disyunción* $\theta \vee \Phi$ *puede ser descrita de la forma siguiente:*
$x \equiv y\ (\theta \vee \Phi)$ *si y solo si existe una secuencia*
$z_0 = x \wedge y, z_1, \ldots, z_{n-1} = x \vee y$ *de elementos de* L *tal que*
$z_0 \leq z_1 \leq \ldots \leq z_{n-1}$ *y para cada* i, $0 \leq i < n-1$,
$z_i \equiv z_{i-1}\ (\theta)$ *ó* $z_i \equiv z_{i-1}\ (\Phi)$ •

OBSERVACION:

C(L) es llamada la red de congruencia de L.
C(L) es una sub red de E(L) que es el conjunto de todas las relaciones de equivalencia en L parcialmente ordenadas por el conjunto inclusión; además la disyunción y la conjunción de relaciones de congruencia, como relación de congruencia y como relación de equivalencia coinciden.

PRUEBA

Para θ, $\Phi \varepsilon C(L)$, $\theta \wedge \Phi = \theta \cap \Phi$ es obvio, Veamos que $\theta \vee \Phi$ lo expuesto en el Teorema, Sea Ψ la relación binaria descrita por el teorema 3.1, entonces $\theta \subseteq \Psi$ y $\Phi \subseteq \Psi$. Si Γ, $\Phi \subseteq \Gamma$ y $x \equiv y$ (Ψ) entonces para cada i, alguno $z_i \equiv z_{i-1}$ (Θ) ó $z_i \equiv z_{i-1}$ (Φ); asi $z_i \equiv z_{i+1}$ (Γ). Por la transitividad de Γ $x \wedge y \equiv x \vee y$ (Γ) y así $x \equiv y$ (Γ) y $\Psi \subseteq \Gamma$. Esto prueba que si Ψ es una relación de congruencia entonces $\Psi = \theta \vee \Phi$, Ψ es obviamente reflexivo y simétrico. Si $x \leq y \leq z$, $x \equiv y$ (Ψ) y $y \equiv z$ (Ψ) entonces $x \equiv z$ (Ψ) es establecido poniendo juntas las respectivas secuencias de $x \equiv y$ (Ψ) y $y \equiv z$ (Ψ). Sea $x \equiv y$ (Ψ) y $x \leq y$, para cada z_i, $1 \leq i \leq n$, de la secuencia que existe, por ser $x \equiv y$ (Ψ) hacemos $z_i \wedge t$ y conseguimos $x \wedge t \equiv y \wedge t$ (Ψ), y con $z_i \vee t$ resulta $x \vee t \equiv y \vee t$ (Ψ), satisfaciendo (i - iii) del Lema 3.5, ya que (i) resulta de la definición de Ψ. Concluimos que Ψ es una relación de congruencia •

Las relaciones de congruencia y los homomorfismos expresan dos lados del mismo fenómeno.

Para establecer este hecho, primero definiremos redes cocientes (tambien llamadas redes factor).

DEFINICION 3.17

Sea L una red y sea θ una relación de congruencia sobre L. Decimos que L/θ es el conjunto de bloques de la partición de L inducida por θ, esto es,

$$L/\theta = \{[a]\theta / a \in L\},$$

Fijemos $[a]\theta \wedge [b]\theta = [a \wedge b]\theta$

y $[a]\theta \vee [b]\theta = [a \vee b]\theta$,

lo cual define el $\wedge$ *y* $\vee$ *sobre* L/θ •

Realmente si $[a]\theta = [a_1]\theta$ y $[b]\theta = [b_1]\theta$ entonces $a \equiv a_1\ (\theta)$ y $b \equiv b_1\ (\theta)$; además $a \wedge b \equiv a_1 \wedge b_1\ (\theta)$ esto es $[a \wedge b]\theta = [a_1 \wedge b_1]\theta$.
Asi $\wedge$ y (dualmente) $\vee$ están bien definidos sobre L/θ.
Los axiomas de red en L/θ son heredeados de las propiedades del $\wedge$ y $\vee$ en L.

La red L/θ es la red cociente de L módulo θ.

LEMA 3.6

El mapeo $\gamma_\theta : x \longrightarrow [x]\theta \qquad (x \in L)$;
es un homomorfismo de L sobre L/θ •

PRUEBA

Hay que probar que $(x \vee y)\gamma = x\gamma \vee y\gamma$ y

$(x \wedge y)\gamma = x\gamma \wedge y\gamma$.

(i) $(x \vee y)\gamma = [x \vee y]\theta$ por definición de γ_θ

$= [x]\theta \vee [y]\theta$ por definición de $\vee$ sobre L/θ

$= x\gamma \vee y\gamma$

(ii) $(x \wedge y)\gamma = [x \wedge y]\gamma$ por definición de γ_θ

$= [x]\theta \wedge [y]\theta$ por definición de $\wedge$ sobre L/θ

$= x\gamma \wedge y\gamma$ •

Nota:

La red K es una imagen homomórfica de la red L si existe un homomorfismo sobreyectivo de L en K.

TEOREMA 3.2 (El Teorema de homomorfismo)

Cada imagen homomorfa de una red L *es isomorfa a una adecuada red cociente de* L. *En efecto si* $\gamma: L \longrightarrow L_1$ *es un homomorfismo sobreyectivo de* L *en* L_1 *y si* θ *es la relación de congruencia de* L *definida por* $x \equiv y\ (\theta)$ *si y solo si* $x\gamma = y\gamma$, *entonces* $L/\theta \cong L_1$. *Un isomorfismo (ver figura 3.5) es dado por:* $\Psi: [x]\theta \longrightarrow x\gamma,\quad x \in L$ •

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "x \mapsto {[x]\theta}"'] & L_1 \\
L/\theta \arrow[ur, "{[x]\theta} \mapsto x\gamma"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.5

PRUEBA

Primero hay que chequear que θ es una relación de congruencia .

(i) Reflexiva

Hay que probar que $x \equiv x\ (\theta)$, pero com $x\gamma = x\gamma$ entonces $x \equiv x\ (\theta)$.

(ii) Simétrica

Hay que probar que si $x \equiv y\ (\theta)$ entonces $y \equiv x\ (\theta)$. Como $x \equiv y\ (\theta)$ entonces $x\gamma = y\gamma$, por lo tanto $y \equiv x\ (\theta)$.

(iii) Transitiva

Hay que probar que si $x \equiv y\ (\theta)$ y $y \equiv z\ (\theta)$, entonces $x \equiv z\ (\theta)$.

Como $x \equiv y\ (\theta)$ entonces $x\gamma = y\gamma$, además $y \equiv z\ (\theta)$, por lo tanto $y\gamma = z\gamma$, de donde $x\gamma = y\gamma = z\gamma$ entonces $x\gamma = z\gamma$ de aquí que $x \equiv z\ (\theta)$.

(iv) Hay que probar que si preserva el $\wedge$ y el $\vee$ de la siguiente forma;

si $x \equiv y\ (\theta)$ y $z \equiv d\ (\theta)$ probar que

a) $x \wedge z \equiv y \wedge d\ (\theta)$.

b) $x \vee z \equiv y \vee d\ (\theta)$.

a) Como $x \equiv y\ (\theta)$ entonces $x\gamma = y\gamma$ además $z \equiv d\ (\theta)$ entonces $z\gamma = d\gamma$ por lo tanto

$x\gamma \wedge z\gamma = y\gamma \wedge d\gamma$, pero γ es un homomorfismo entonces esto nos da

$(x \wedge z)\gamma = (y \wedge d)\gamma$, de donde $x \wedge z \equiv y \wedge d\ (\theta)$.

b) Se procede de la misma forma para el $\vee$.

De donde θ es una relación de congruencia.

Ahora probaremos que Ψ es un isomorfismo para lo cual tenemos que ver que Ψ:

(i) Está bien definido, (ii) Es uno a uno,

(ii) Es sobreyectiva y (iv) preserva las operaciones $\wedge, \vee$.

(i) Sea $[x]\theta = [y]\theta$ entonces $x \equiv y\ (\theta)$;
así $x\gamma = y\gamma$ esto es $([x]\theta)\Psi = ([y]\theta)\Psi$.

(ii) Sea $([x]\theta)\Psi = ([y]\theta)\Psi$, esto es $x\gamma = y\gamma$,
entonces $x \equiv y\ (\theta)$ y así $[x]\theta = [y]\theta$.

(iii) Sea $a \varepsilon L_1$, ya que γ es sobre existe $x \varepsilon L$ como $x\gamma = a$. asi $([x]\theta)\Psi = a$,

(iv) $([x]\theta \wedge [y]\theta)\Psi = ([x \wedge y]\theta)\Psi$ por definición de $\wedge$ sobre L/θ.

$= (x \wedge y)\gamma$ por definición de Ψ

$= x\gamma \wedge y\gamma$ por ser γ un homomorfismo.

$= ([x]\theta)\Psi \wedge ([y]\theta)\Psi$.

El cálculo para el $\vee$ es idéntico.

DEFINICION 3.18

Sean L,K *redes y formemos el conjunto*

$L \times K = \{(a,b) \mid a \varepsilon L,\ b \varepsilon K\}$.

Definiendo $\wedge$ *y* $\vee$ *en* $L \times K$ *de la forma siguiente:*

$(a, b) \wedge (a_1,b_1) = (a \wedge a_1,\ b \wedge b_1)$

$(a, b) \vee (a_1, b_1) = (a \vee a_1,\ b \vee b_1)$

esto hace a $L \times K$ *una red, llamada Producto Directo de* L *y* K •

Un ejemplo de producto directo es la figura 3.6

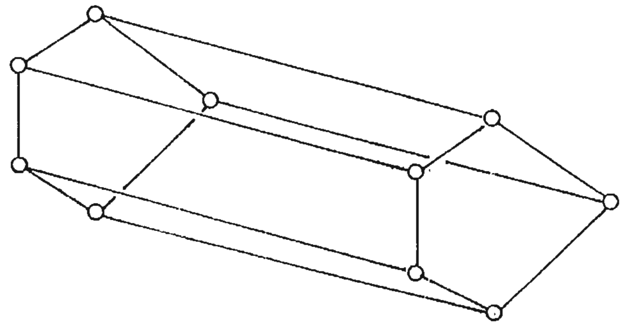


Figura 3.6

LEMA 3.7

Sean L, L_1, K, K_1 *redes*, $L \cong L_1$, $K \cong K_1$.
Entonces $L \times K \cong L_1 \times K_1 \cong K_1 \times L_1$ •

PRUEBA

Sean $\gamma: L \longrightarrow L_1$ y $\Psi: K \longrightarrow K_1$ isomorfismos y para $a \in L$, $b \in K$ definamos;

$$\chi: L \times K \longrightarrow L_1 \times K_1$$
$$(a,b) \rightsquigarrow (a,b)\chi = (a\gamma, b\Psi)$$

Entonces χ es un isomorfismo, probémoslo:
Hay que ver que χ: (i) está bien definida, (ii) es uno a uno, (iii) es sobreyectiva y (iv) preserva las operaciones.

(i) Sea $(a,b) = (c,d)$ entonces $a = c$ y $b = d$ así, $a\gamma = c\gamma$ y $b\Psi = d\Psi$ por lo tanto $(a\gamma, b\Psi) = (c\gamma, d\Psi)$ es decir $(a,b)\chi = (c,d)\chi$.

(ii) Sea $(a,b)\chi = (c,d)\chi$ esto es $(a\gamma, b\Psi) = (c\gamma, d\Psi)$ entonces $a\gamma = c\gamma$ y $b\Psi = d\Psi$, como γ y Ψ son isomorfismos entonces debe ser que $a = c$ y $b = d$, por lo tanto $(a,b) = (c,d)$.

(iii) Sea $(c,d) \in L_1 \times K_1$; ya que γ y Ψ son sobreyectivos va a existir $(a,b) \in L \times K$ tal que $(a\gamma, b\Psi) = (c,d)$, por lo tanto $(a,b)\chi = (c,d)$

(iv) $[(a,b) \wedge (c,d)]\chi = (a \wedge c,\ b \wedge d)$ por definición de $\wedge$ en L X K.

$= ((a \wedge c)\gamma\ ,\ (b \wedge d)\Psi)$ por definición de χ.

$= (a\gamma \wedge c\gamma,\ b\Psi \wedge d\Psi)$ ya que γ y Ψ son morfismos.

$= (a\gamma,\ b\Psi) \wedge (c\gamma,\ d\Psi)$ por definición de $\wedge$ en L X K.

$= (a,b)\chi \wedge (c,d)\chi.$

De donde $[(a,b) \wedge (c,d)]\chi = (a,b)\chi \wedge (c,d)\chi$.

El cálculo para el $\vee$ es idéntico.

Lo que sigue es probar que $L_1 X\ K_1 \cong K_1 X\ L_1$.

sea β: $L_1 X\ K_1 \longrightarrow K_1 X\ L_1$

$(a,b) \rightsquigarrow (a,b)\beta = (b,a)$ con $a \in L_1$ y $b \in K_1$.

Probar que β es un isomorfismo. Hay que ver que

β: (i) está bien definida, (ii) es uno a uno,

(iii) es sobreyectivo y (iv) preserva las operaciones.

(i) Sea $(a,b) = (c,d)$ entonces $a = c$ y $b = d$, por lo tanto $(b,a) = (d,c)$ y esto es $(a,b)\beta = (c,d)\beta$.

(ii) Sea $(a,b)\beta = (c,d)\beta$, esto es $(b,a) = (d,c)$ entonces $b = d$ y $a = c$ de aquí que $(a,b) = (c,d)$.

(iii) Sea $(a,b) \in K_1 X\ L_1$, $(b,a) \in L_1 X\ K_1$, $(b,a)\beta = (a,b)$.

(iv) $[(a,b) \wedge (c,d)]\beta = [(a \wedge c,\ b \wedge d)]\beta$ por definición de $\wedge$ en L X K.

$= (b \wedge d,\ a \wedge c)$ por definición de β.

$= (b,a) \wedge (d,c)$ por definición de $\wedge$

$= (a,b)\beta \wedge (c,d)\beta.$

El cálculo para $\vee$ es idéntico •

DEFINICION 3.19

Si L_i, $i \in I$ *es una familia de redes, alrededor de esta podemos formar el producto cartesiano de los conjuntos* $L_i / i \in I$, *el cual es definido como el conjunto de todas las funciones* $f\colon I \longrightarrow \cup(L_i / i \in I) / f_{(i)} \in L_i,\ \forall i \in I.$

Entonces definimos $\wedge$ *y* $\vee$ *"en dos componentes", esto es* $f \wedge g = h$, $f \vee g = k$ *significando*

$f(i) \wedge g(i) = h(i)$, $f(i) \vee g(i) = k(i)$, *para todo* $i \in I$.
La red resultante es el producto directo $\prod(L_i / i \in I)$ •

Si $L_i = L$ para todo $i \in I$, conseguimos la potencia directa L^I. Denotando a n como el conjunto $\{0, \ldots n-1\}$, L^n es $\underbrace{((L \times L) \times \ldots) \times L}_{\text{n tiempos}}$.

En particular si identificamos a $f\colon 2 \longrightarrow L$ con $(f(0), f(1))$ entonces conseguimos $L^2 = L \times L$.

Una importante propiedad del producto directo es:

TEOREMA 3.3

Sean L *y* K *redes;* θ *una relación de congruencia de* L *y* Φ *una relación de congruencia de* K.

Definamos la relación $\theta \times \Phi$ *sobre* $L \times K$ *por:*
$(a,b) \equiv (c,d)$ $(\theta \times \Phi)$ *si y solo si* $a \equiv c$ (θ) *y* $b \equiv d$ (Φ)*; entonces* $\theta \times \Phi$ *es una relación de congruencia sobre* $L \times K$.

Recíprocamente, cada relación de congruencia de $L \times K$ *es de esta forma* •

PRUEBA

Probaremos primero que $\theta \times \Phi$ es una relación de congruencia sobre $L \times K$. Para lo cual hay que probar las propiedades: (i) reflexiva; (ii) simétrica; (iii) transitiva y (iv) preservación del $\wedge$ y $\vee$.

(i) $a \equiv a$ (θ) y $b \equiv b$ (Φ), ya que θ y Φ son relaciones de congruencia por hipótesis, por lo tanto $(a,b) \equiv (a,b)$ $(\theta \times \Phi)$ para todo $a \varepsilon L$ y $b \varepsilon K$.

(ii) Sean $a,c \varepsilon L$ y $b,d \varepsilon K$ entonces si $(a,b) \equiv (c,d)$ $(\theta \times \Phi)$ tendríamos que $a \equiv c$ (θ) y $b \equiv d$ (Φ) y además θ y Φ son relaciones de congruencia, por lo tanto

$$(c,d) \equiv (a,b) \ (\theta \times \Phi)$$

(iii) Sean $a,c,e \in L$ y $b,d,f \in K$, Si

$(a,b) \equiv (c,d)\ (\theta \times \Phi)$ y $(c,d) \equiv (e,f)\ (\theta \times \Phi)$

entonces $a \equiv c\ (\theta)$, $b \equiv d\ (\Phi)$ y

$c \equiv e\ (\theta)$, $d \equiv f\ (\Phi)$

de aquí que $a \equiv c \equiv e\ (\theta)$ y $b \equiv d \equiv d\ (\Phi)$,

θ y Φ son relaciones de congruencia, por lo tanto

$$a \equiv e\ (\theta) \text{ y } b \equiv f\ (\Phi)$$

de donde $(a,b) \equiv (e,f)\ (\theta \times \Phi)$.

(iv) Si $(a,b) \equiv (c,d)\ (\theta \times \Phi)$ y $(a_1,b_1) \equiv (c_1,d_1)\ (\theta \times \Phi)$

con $a, c, a_1, c_1 \in L$ y $b, d, b_1, d_1 \in K$.

Probemos que $(a,b) \wedge (a_1,b_1) \equiv (c,d) \wedge (c_1,d_1)\ (\theta \times \Phi)$.

Como $(a,b) \equiv (c,d)\ (\partial \times \Phi)$ entonces $a \equiv c\ (\theta)$ y

$b \equiv d\ (\Phi)$ además $(a_1,b_1) \equiv (c_1,d_1)\ (\theta \times \Phi)$ entonces

$a_1 \equiv c_1\ (\theta)$ y $b_1 \equiv d_1\ (\Phi)$

Por lo tanto $a \wedge a_1 \equiv c \wedge c_1\ (\theta)$ y

$b \wedge b_1 \equiv d \wedge d_1\ (\Phi)$

entonces $(a \wedge a_1, b \wedge b_1) \equiv (c \wedge c_1, d \wedge d_1)\ (\theta \times \Phi)$ y

esto es $(a,b) \wedge (a_1,b_1) \equiv (c,d) \wedge (c_1,d_1)\ (\theta \times \Phi)$.

De la misma forma se procede para el $\vee$.

Ahora sea Ψ una relación de congruencia sobre $L \times K$,

probemos que $\Psi = \theta \times \Phi$.

I) Para $a,b \in L$ definamos $a \equiv b\ (\theta)$ si $(a,c) \equiv (b,c)\ (\Psi)$ para algún $c \in K$.

Sea $d \in K$ y disyuntando $(a \wedge b,d)$ a ambos lados se tie ne $(a,c) \vee (a \wedge b,d) \equiv (a,c) \vee (a \wedge b,d)\ (\Psi)$ que es igual a $(a,c \vee d) \equiv (b,c \vee d)\ (\Psi)$.

Conjuntando $(a \vee b,d)$ se tiene

$(a,c \vee d) \wedge (a \vee b,d) \equiv (b,c \vee d) \wedge (a \vee b,d)\ (\Psi)$

que es igual a $(a,d) \equiv (b,d)\ (\Psi)$.

Así $(a,c) \equiv (b,c)$ para todo $c \in K$.

II) Ahora similarmente definamos para $a,b \in K$, $a \equiv b\ (\Phi)$ si y solo si $(c,a) \equiv (c,b)\ (\Psi)$ para algún $c \in L$, se prueba en la misma forma para todo $c \in L$.

III) Probemos ahora que θ y Ψ son congruentes.

Primero mostremos que θ es congruente, para lo cual hay que probar: (i) reflexiva, (ii) simetría; (iii) transitividad y (iv) preservación del $\wedge$ y $\vee$.

(i) Hay que probar que $a \equiv a\ (\theta)$ con $a \in L$.
Como $(a,c) \equiv (a,c)\ (\Psi)$ ya que Ψ es una relación de congruencia entonces $a \equiv a\ (\theta)$.

(ii) Sean $a,b \in L$ y $a \equiv b\ (\theta)$ entonces $(a,c) \equiv (b,c)(\Psi)$ pero de esto obtenemos a $(b,c) \equiv (a,c)(\Psi)$, ya que Ψ es una relación de congruencia, entonces $b \equiv a\ (\theta)$.

(iii) Sean $a,b,e \in L$. Si $a \equiv b\ (\theta)$ y $b \equiv e\ (\theta)$ enton ces $(a,c) \equiv (b,c)\ (\Psi)$ y $(b,c) \equiv (e,c)\ (\Psi)$ entonces $(a,c) \equiv (b,c) \equiv (e,c)\ (\Psi)$ de donde

$(a,c) \equiv (e,c)$ (Ψ) por lo tanto

$a \equiv e$ (θ)

(iv) Hay que probar que

$a \equiv b$ (θ) y $e \equiv d$ (θ) implica $a \wedge e \equiv b \wedge d$ (θ).

Como $a \equiv b$ (θ) y $e \equiv d$ (θ) entonces $(a,c) \equiv (b,c)$ (Ψ) $(e,c) \equiv (d,c)$ (Ψ), como Ψ es relación de congruencia $(a,c) \wedge (e,c) \equiv (b,c) \wedge (d,c)$ (Ψ) esto es $(a \wedge e,c) \equiv (b \wedge d,c)$ (Ψ), de donde $a \wedge e \equiv b \wedge d$ (θ).

Para el $\vee$ se procede en la misma forma.

Para probar que Φ es una relación de congruencia se procede de la misma forma que para θ.

Por lo tanto θ y Φ son congruentes.

IV) Sea $(a,b) \equiv (c,d)$ $(\theta \times \Phi)$ y probemos que (a,b) Ψ (c,d) (Ψ).

Como $(a,b) \equiv (c,d)$ $(\theta \times \Phi)$ entonces $(a,x) \equiv (c,x)$ (Ψ), $(y,b) \equiv (y,d)$ (Ψ). Sustituyendo a x por $(b \wedge d)$ y a y por $(a \wedge c)$, se obtiene $(a,b \wedge d) \equiv (c,b \wedge d)$ (Ψ) y $(a \wedge c,b) \equiv (a \wedge c,d)$ (Ψ) conjuntandolos obtenemos $(a,b) \equiv (c,d)$ (Ψ).

V) Finalmente sea $(a,b) \equiv (c,d)$ (Ψ) y probemos que $(a,b) \equiv (c,d)$ $(\theta \times \Phi)$.

Como $(a,b) \equiv (c,d)$ (Ψ), conjuntando a ambos lados con $(a \wedge c,\ b \vee d)$ se obtiene $(a \wedge c, b) \equiv (a \wedge c, d)$ (Ψ) entonces $b \equiv d$ (Φ) y haciendolo con $(a \vee c,\ b \wedge d)$ obtenemos $e \equiv c$ (θ) y así $(a,b) \equiv (c,d)$ $(\theta \times \Phi)$, probando que $\Psi = \theta \times \Phi$ •

Introduciremos un concepto no algebráico:

DEFINICION 3.20

Una red L *es llamada completa si* ΛH *y* VH *existen para todo subconjunto* $H \subseteq L$ •

LEMA 3.8

Sea P *un C.O.P.O. en el cual* ΛH *existe para todo* $H \subseteq P$, *y para cualquier* $J \subseteq P$ *existe una cota superior de* J, *entonces* P *es una red completa* •

PRUEBA

Para $H \subseteq P$, sea K el conjunto de todas las cotas superiores de H. Por hipótesis ΛK existe; hagamos $a = \Lambda K$. Si $h \in H$, entonces $h \leq k$ para todo $k \in K$; además $h \leq a$ y $a \in K$. Asi a es el miembro más pequeño de K, de aquí que $a = VH$ •

DEFINICION 3.21

Sea Sub (L) el conjunto de todos los subconjuntos A de L cerrados bajo $\wedge$ y $\vee$, conjuntos parcialmente ordenados bajo inclusión.

Es decir si $A \in$ Sub (L), $A \neq \phi$, entonces A es una sub red de L. Obviamente Sub (L) es cerrado bajo arbitrarias intersecciones •

COROLARIO 3.4

$I_0(L)$ y C(L) son redes completas. Si L tiene un elemento más pequeño, I(L) es una red completa.

La red Sub (L) es una red completa •

PRUEBA

(i) Sea $H \subseteq I_0(L)$, $\Lambda H = \bigcap_{h \in H} h$, además L es cota superior de H. Por Lema 3.8 $I_0(L)$ es una red completa.

(ii) Sea $H \subseteq C(L)$, C(L) es una red, por Teorema 3.1 $\Lambda H = \bigcap_{h \in H} h = \phi$, ya que $w \subseteq h (x \equiv y\ (w)$ si y solo si $x = y)$.

Además H está acotado superiormente por la relación de congruencia t ($x \equiv y\ (t)$ para todo x,y). De donde

$C(L)$ es completa.

(iii) Si L tiene a un elemento más pequeño, digamos b; para $H \subseteq I(L)$, $\wedge H = \bigcap_{h \in H} h = \phi$, ya que $b \in h$, para todo h. También $L \in I(L)$, asi L es una cota superior de H. Aplicando Lema 3.8, $I(L)$ es una red completa.

(iv) Es claro que Sub (L) es una red, ordenada por inclusión. Sea $H \subseteq$ Sub (L), $\wedge H = \bigcap_{h \in H} h$.
Además $L \in$ Sub (L), o sea H tiene cota superior. Aplicando Lema 3.8 afirmamos que Sub (L) es un red completa •

4. POLINOMIOS, IDENTIDADES Y DESIGUALDADES

Con las variables $x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots,$ podemos formar polinomios de la manera usual con el $\wedge$, $\vee$ y paréntesis. Algunos ejemplos de polinomios son: x_0, x_3, $x_0 \vee x_0$, $(x_0 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_0)$, $(x_0 \wedge x_1) \vee (x_0 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2)$.

Una definición formal es:

DEFINICION 4.1

El conjunto $\mathbf{P}^{(n)}$ *de polinomios n-arios de red es el conjunto más pequeño que satisface (i) y (ii).*

(*i*) $x_i \in \mathbf{P}^{(n)}$, $0 \leq i < n$. (*proyección en la i-ésima variable*).

(*ii*) *Si* $p, q \in \mathbf{P}^{(n)}$, *entonces* $(p \wedge q)$, $(p \vee q) \in \mathbf{P}^{(n)}$ •

Observación: omitiremos los paréntesis y escribiremos $p_1 \vee \ldots \vee p_n$ por $(\ldots(p_1 \vee p_2)\ldots p_n)$, y en la misma forma para $\wedge$.

Así escribiremos $x_0 \vee x_1$ por $(x_0 \vee x_1)$ y $x_0 \vee x_1 \vee x_2$ por $((x_0 \vee x_1) \vee x_2)$.

Por la definición 4.1, un polinomio es justamente una secuencia de símbolos. Es definido de esta forma, ya que en términos de una tal secuencia de símbolos podemos definir una función en una red.

DEFINICION 4.2

Un polinomio n-ario p define una función en n variables (una función polinomial, o simplemente, un polinomio) en una red L por las reglas siguientes ($a_0, \dots a_{n-1} \in L$):

(*i*) *Si* $p = x_i$, $p(a_0, \dots a_{n-1}) = a_i$, $0 \leq i < n$

(*ii*) *Si* $p(a_0, \dots, a_{n-1}) = a$, $q(a_0, \dots a_{n-1}) = b$, *y*
$p \wedge q = r$, $p \vee q = t$, *entonces*
$r(a_0, \dots a_{n-1}) = a \wedge b$ *y* $t(a_0, \dots, a_{n-1}) = a \vee b$ •

Así si $p = (x_0 \wedge x_1) \vee (x_2 \vee x_1)$, entonces
$p(a,b,c) = (a \wedge b) \vee (c \vee b) = b \vee c$.

Un polinomio es un polinomio n-ario para algún n. Tambien usaremos x,y,z, en lugar de x_i.

Si p es un polinomio unario (n = 1) de red, entonces $p(a) = a$ para cualquier $a \in L$. si p es binario, entonces $p(a,b) = a$ ó b ó $a \wedge b$ ó $a \vee b$.

Probaremos las propiedades de polinomios por inducción en el grado.

El grado x_i es 1; el de $p \wedge q$ (y $p \vee q$) es la suma de los grados de p y q.

Ahora podremos describir [H], la sub red generada por H.

LEMA 4.1

$a \varepsilon [H]$ si y solo si $a = p(h_0, \ldots h_{n-1})$ para cualquier entero $n \geq 1$, para cualquier polinomio n-ario p y para $h_0, \ldots h_{n-1} \varepsilon H$ •

PRUEBA

(i) Primero deberemos probar que si $a = p(h_0, \ldots, h_{n-1})$; $h_i \varepsilon H$, entonces $a \varepsilon [H]$.

$p(h_0, \ldots, h_{n-1})$ esta formado por $\wedge, \vee$ y con elementos de H, como $\wedge, \vee$ son operadores binarios cerrados en $[H]$, entonces $a = p(h_0, \ldots, h_{n-1}) \varepsilon [H]$.

(ii) Ahora formamos el conjunto $\{a/a = p(h_0, \ldots, h_{n-1}), n \geq 1, h_i \varepsilon H\}$ y observemos que este conjunto contiene a H, haciendo a p unario; y como si $p, q \varepsilon \mathbf{P}^{(n)}$, entonces $(p \wedge q), (p \vee q) \varepsilon \mathbf{P}^{(n)}$, el conjunto $\{a/a = p(h_0, \ldots, h_{n-1}), n \geq 1, h_i \varepsilon H\}$ es cerrado bajo los operadores $\wedge, \vee$.

Así este conjunto es una red que contiene a H, de donde contiene a $[H]$.

Por (i), (ii), queda probado el Lema •

COROLARIO 4.1

$\left|[H]\right| \leq |H| + N_0$; N_0: *el cardinal de los Naturales.*

PRUEBA

Por el Lema 4.1, cada elemento de $|H|$ puede ser asociado con una secuencia finita de elementos de $H \cup \{(,), \wedge, \vee\}$, y no existen más que $|H| + N_0$ de tales secuencias.

DEFINICION 4.3

Una identidad de polinomios (desigualdad) es una expresión de la forma $p = q$ $(p \leq q)$, en donde p y q son polinomios. Una identidad (desigualdad) se dá en la red L si $p(a_0, a_1, \ldots) = q(a_0, a_1, \ldots)$ $(p(a_0, a_1, \ldots) \leq q(a_0, a_1, \ldots))$ se mantiene para cualquier $a_0, a_1, \ldots, \in L$ •

Una identidad $p = q$ es equivalente a las dos desigualdades $p \leq q$ y $q \leq p$, y la desigualdad $p \leq q$ es equivalente a la identidad $p \vee q = q$ (y a $p \wedge q = p$). Frecuentemente la validez de identidades es probada verificando que las dos desigualdades se cumplen.

Una de las propiedades más básicas de los polinomios es:

LEMA 4.2

Un polinomio (función) p es isótono; esto es, si $a_0 \leq b_0$, $a_1 \leq b_1, \dots,$ *entonces* $p(a_0, a_1, \dots) \leq p(b_0, b_1, \dots)$. *Además* $x_0 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \leq p(x_0, \dots, x_{n-1}) \leq x_0 \dots x_{n-1}$ •

PRUEBA

Probaremos la primera afirmación por inducción en el grado de p.

La primera afirmación es ciertamente verdadera para $p = x_i$ y que $p(a_0, a_1, \dots) = a_i$ y $p(b_0, b_1, \dots) = b_i$ y por hipótesis $a_i \leq b_i$ entonces $p(a_0, a_1, \dots) \leq p(b_0, b_1, \dots)$.

Supongamos que es verdadera para q y r polinomios de grado menor que p y además que $p = q \wedge r$. Entonces

$p(a_0, \dots) \wedge p(b_0, \dots)$

$= (q(a_0, \dots) \wedge r(a_0, \dots)) \wedge (q(b_0, \dots) \wedge r(b_0, \dots))$ sustituyendo p

$= (q(a_0, \dots) \wedge q(b_0, \dots)) \wedge (r(a_0, \dots) \wedge r(b_0, \dots))$ asociando y conmutando

$= \; q(a_0, \dots) \wedge r(a_0, \dots)$

$= \; p(a_0, \dots)$ por definición de p.

Así $p(a_0, \dots) \leq p(b_0, \dots)$. La prueba es similar para $p = q \vee r$.

Ya que $x_0 \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \leq x_i \leq x_0 \vee x_1 \ldots \vee x_{n-1}$ para $p \leq i \leq n-1$ se tiene:

$x_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}$

$= p(x_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}, x_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}, \ldots, x_0 \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1})$ por que $p(a, \ldots, a) = a$

$\leq p(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ ya que $x_0 \ldots x_{n-1} \leq x_i$

$\leq p(x_0 \vee \ldots x_{n-1}, \ldots, x_0 \vee \ldots \vee x_{n-1})$ ya que $x_i \leq x_0 \vee \ldots \vee x_{n-1}$

$= x_0 \vee x_1 \vee \ldots \vee x_{n-1}$ por que $p(a, \ldots, a) = a$

Probando con esto la segunda afirmación •

Una aplicación simple es:

LEMA 4.3

Sean $p_i = q_i$, $0 \leq i \leq n$, identidades en redes. Entonces existe una única identidad $p = q$ tal que todo $p_i = q_i$, $0 \leq i < n$, se cumplen en una red L si y solo si $p = q$ también se cumple en L •

PRUEBA

Tomemos dos identidades, $p_0 = q_0$ y $p_1 = q_1$.

Supongamos que todos los polinomios son n-arios y consideremos la identidad:

(N) $\quad p_0(x_0, \ldots, x_{n-1}) \wedge p_1(x_n, \ldots, x_{2n-1})$

$\quad = q_0(x_0, \ldots, x_{n-1}) \wedge q_1(x_n, \ldots, x_{2n-1})$

Es obvio que si $p_0 = q_0$, $p_1 = q_1$ entonces los ínfimos respectivos tambien son iguales en L, de donde (N) se cumple en L.

Ahora sea (N) satisfecho en L y sean $a_0, \ldots, a_{n-1} \varepsilon L$.
Sustituyendo $x_0 = a_0, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}$, $x_n = x_{n+1} \ldots = x_{2n-1}$ con $x_n = a_0 \vee a_1 \ldots \vee a_{n-1}$, en (N) obtenemos:

$p_0(a_0,\ldots,a_{n-1}) \wedge p_1(x_n,\ldots,x_n) = q_0(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}) \wedge q_1(x_n,\ldots,x_n)$

$p_0(a_0,\ldots,a_{n-1}) \wedge x_n = q_0(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}) \wedge x_n$

como $x_n = a_0 \vee a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1}$, aplicando Lema 4.2 obtenemos:

$p_0(a_0,\ldots, a_{n-1}) = q_0(a_0,\ldots, a_{n-1})$.

La segunda identidad derivada de (N) de manera similar.
La prueba general es similar •

Las propiedades (y, de hecho características) más importantes de las identidades son dadas por el siguiente Lema:

LEMA 4.4

Las identidades se preservan bajo la formación de sub redes, imagen homomorfica, producto directo e ideales.

PRUEBA

Sean los polinomios n-arios p y q con p = q en L. Si L_1 es una sub red de L entonces p = q obviamente se cumple en L_1.

Sea γ: L ——> K un homomorfismo sobreyectivo.

Es claro que $p(a_0,\ldots, a_{n-1})\gamma = p(a_0\gamma,\ldots, a_{n-1}\gamma)$ ya que γ es un homomorfismo, y por lo tanto preserva los polinomios, ya que están formados con $\vee$ y $\wedge$. Similarmente para q. Así:

$$\begin{aligned} p(a_0\gamma,\ldots,a_{n-1}\gamma) &= p(a_0,\ldots,a_{n-1})\gamma \\ &= q(a_0,\ldots,a_{n-1})\gamma \\ &= q(a_0\gamma,\ldots,a_{n-1}\gamma) \end{aligned}$$

de donde $p = q$ se cumple en K, por ser γ sobreyectivo.

Supongamos que $p = q$ en L y K; ambas redes

$$\begin{aligned} &p((a_0,b_0),\ldots,(a_{n-1},b_{n-1})); \text{ con } (a_i,b_i)\in L \times K \quad 1 \leq i < n. \\ &= (p(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}),\ p(b_0,b_1,\ldots,b_{n-1})) \\ &= (q(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}),\ q(b_0,b_1,\ldots,b_{n-1})) \\ &= q((a_0,b_0),\ldots,\ (a_{n-1},b_{n-1})) \end{aligned}$$

de donde $p = q$ en $L \times K$.

Sea p un polinomio n-ario y sean $I_0,\ldots,I_{n-1}$ ideales de L. Entonces $I_0,\ldots,I_{n-1} \in I(L)$; así podemos sustituir los I_j en p: $p(I_0,\ldots,I_{n-1})$ está también en $I(L)$, esto es, un ideal de L.

Este ideal puede ser descrito por una simple fórmula:

$$p(I_0,\ldots,I_{n-1}) = \{x/x \leq p(i_0,\ldots,i_{n-1}), \text{ para todos los posibles } i_0 \in I_0,\ldots,i_{n-1} \in I_{n-1}\}$$

Veamos que esta fórmula es cierta:

Para $p(I_0,I_1) = I_0 \wedge I_1$.

Sabemos que $I_0 \wedge I_1 = I_0 \cap I_1$.

$I_0 \cap I_1 \neq \phi$.

Sea $x \in I_0 \cap I_1$, $x \leq i_{01} \vee i_{02} \vee \ldots \vee i_{0m}$,
$x \leq i_{11} \vee i_{12} \vee \ldots \vee i_{1m}$ con i_{0j}, i_{1j}; $1 \leq j \leq m$ en I_0, I_1 respectivamente por (ii) Lema 3.1, $x \leq i_0$, $x \leq i_1$; con $i_0 \in I_0$, $i_1 \in I_1$, ya que I_0, I_1 son redes. Así $x \in \{y/y \leq i_0 \wedge i_1;$ $i_0 \in I_0$, $i_1 \in I_1\}$.

Sea $x \in \{y/y \leq i_0 \wedge i_1;\ i_0 \in I_0,\ i_1 \in I_1\}$
$x \leq i_0$, para algún $i_0 \in I_0$, $x \leq i_1$ para algún $i_1 \in I_1$; $x \in I_0$, $x \in I_1$; ya que I_0, I_1 son ideales de donde $x \in I_0 \cap I_1$ y obtenemos

$I_0 \wedge I_1 = \{x/x \leq i_0 \wedge i_1$, con: $i_0 \in I_0$, $i_1 \in I_1\}$
Para $p(I_0, I_1) = I_0 \vee I_1$.

Recordemos que $I_0 \vee I_1 = (I_0 \cup I_1]$.

$I_0 \vee I_1 \neq \phi$. Sea $x \in I_0 \vee I_1$, $x \leq h_0 \vee h_1 \vee \ldots \vee h_{n-1}$;
con h_i, $0 \leq i \leq n-1$ en $I_0 \cup I_1$. Juntemos los elementos de I_0 y de I_1.

$x \leq (h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_j) \vee (h_{j+1} \vee \ldots \vee h_{n-1})$ con h_k,
$1 \leq k \leq j \in I_0$, h_k, $j + 1 \leq k \leq n-1 \in I_1$, $x \leq i_0 \vee i_1$
para algún $i_0 \in I_0$, $i_1 \in I_1$, ya que I_0, I_1 son redes. De donde $x \in \{y/y \leq i_0 \vee i_1$, para algún $i_0 \in I_0$, $i_1 \in I_1\}$. Recíprocamente sea x un elemento de este conjunto por (ii) Lema 3.1, es claro que $x \in (I_0 \vee I_1]$ obteniendo $(I_0 \vee I_1] = \{x/x \leq i_0 \vee i_1$, para algún $i_0 \in I_0$, $i_1 \in I_1\}$

$(I_0 \wedge I_1) \vee I_2 = \{x/x \leq i \vee i_2$, para algún $i \in I_0 \wedge I_1$, $i_2 \in I_2\}$

$= \{x/x \leq (i_0 \wedge i_1) \vee i_2$, con $i_0 \in I_0, i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2\}$.

$(I_0 \vee I_1) \wedge I_2 = \{x/x \leq i \wedge i_2$, con $i \in I_0 \vee I_1$, $i_2 \in I_2\}$

$= \{x/x \leq (i_0 \vee i_1) \wedge i_2$, con $i_0 \in I_0, i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2\}$

y de aquí podemos concluir que:

$p(I_0, \ldots, I_{n-1}) = \{x/x \leq p(i_0, \ldots, i_{n-1})$, para todo los posibles $i_0 \in I_0, \ldots, i_{n-1} \in I_{n-1}\}$.

La última afirmación de la prueba es un Corolario de esta fórmula •

Un Lema muy importante es:

LEMA 4.5

Las siguientes desigualdades se cumplen en una red.

(*i*) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$

(*ii*) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(*iii*) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$

(*iv*) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee (x \wedge z))$ •

Observación:

(i) - (iii) son llamadas desigualdades distribuitivas, y (iv) es la desigualdad modular.

PRUEBA

(i) Ya que $(x \wedge y) \leq x$, $(x \wedge z) \leq x$, obtenemos que $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x$; $(x \wedge y) \leq y \leq (y \vee z)$, $(x \wedge z) \leq z \leq (y \vee z)$ obteniendo que $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq (y \vee z)$.

Con la conjunción de las dos desigualdades $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x$ y $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq (y \vee z)$ se logra probar que $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$.

(ii) Ya que $x \leq (x \vee y)$, $x \leq (x \vee z)$, obtenemos $x \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$; además $(y \wedge z) \leq y \leq (x \vee y)$ $(y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

La disyunción de las dos desigualdades $x \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ y $(y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ nos dá como resultado $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

(iii) Ya que $(x \wedge y) \leq x \leq (x \vee y)$, $(x \wedge y) \leq x \leq (z \vee x)$, $(x \wedge y) \leq y \leq (y \vee z)$, obtenemos que $(x \wedge y) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$; además $(y \wedge z) \leq y \leq (x \vee y)$, $(y \wedge z) \leq y \leq (y \vee z)$, $(y \wedge z) \leq z \leq (z \vee x)$, entonces $(y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$; y $(z \wedge x) \leq z \leq (y \vee z)$, $(z \wedge x) \leq z \leq (z \vee x)$, $(z \wedge x) \leq x \leq (x \vee y)$ por lo tanto

$(z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$.

La disyunción de las tres desigualdades

$(x \wedge y) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$,

$(y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$,

$(z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$ nos dá como resultado

$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$.

(iv) Ya que $(x \wedge y) \leq x$, $(x \wedge z) \leq x$, obtenemos $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x$; además $(x \wedge y) \leq y \leq y \vee (x \wedge z)$ y , $(x \wedge z) \leq y \vee (x \wedge z)$ así

$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq y \vee (x \wedge z)$.

La conjunción de las dos desigualdades

$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x$ y $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq y \vee (x \wedge z)$

nos dá como resultado

$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee (x \wedge z))$ •

LEMA 4.6

Considere las siguientes dos identidades y la desigualdad:

(*i*) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$.

(*ii*) $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$.

(*iii*) $(x \vee y) \wedge z \leq x \vee (y \wedge z)$.

Entonces (*i*), (*ii*) *y* (*iii*) *son equivalentes en una red* L •

Observación.

Una red que satisface (i) ó (ii) es llamada distributiva. Note que (i) e (ii) no son equivalentes para elementos fijos; esto es, (i) puede cumplirse para tres elementos $a,b,c \in L$, mientras (ii) no lo haga.

PRUEBA

Supongamos que (i) se cumple en L y verifiquemos (ii).

Sean $a,b,c \in L$; entonces, usando (i) con

$x = a \vee b$, $y = a$, $z = c$, se obtiene

$(a \vee b) \wedge [a \vee c] = ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c)$

$= a \vee ((a \vee b) \wedge c)$ por absorción

$= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c))$ usando (i) para $x = c$, $y = a$, $z = b$

$= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c)$ asociando

$= a \vee (b \wedge c)$ por absorción.

Verificando (ii).

La prueba (ii) implica (i) es el dual del párrafo anterior. Veámosla:

Supongamos que (ii) se cumple en L.

Sean $a,b,c \in L$; entonces, usando (ii) con

$x = a \wedge b$, $y = a$, $z = c$, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= ((a \wedge b) \vee a) \wedge ((a \wedge b) \vee c) \\
&= a \wedge ((a \wedge b) \vee c), \text{ por absorción} \\
&= a \wedge (c \vee (a \wedge b)) \\
&= a \wedge ((c \vee a) \wedge (c \vee b)), \text{ usando (ii)} \\
&= (a \wedge (c \vee a)) \wedge (c \vee b) \text{ con } x = c, \\
&\quad y = a,\ z = b. \\
&= a \wedge (c \vee b) \text{ por absorción.}
\end{aligned}
$$

Ahora verifiquemos que si (ii) se cumple en L entonces se dá (iii).

Como (ii) es satisfecho en L; entonces

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \geq (x \vee y) \wedge z$,

ya que $(x \vee z) \geq z$, lo cual verifica (iii).

Y por último veamos que si (iii) es satisfecho en L entonces se cumple (ii).

Como (iii) es satisfecho en L, entonces con $x = a$, $y = b$, $z = a \vee c$ en (iii) se tiene

$$
\begin{aligned}
(a \vee b) \wedge (a \vee c) &\leq a \vee (b \wedge (a \vee c)) \\
&= a \vee ((a \vee c) \wedge b) \text{ por conmutatividad} \\
&\leq a \vee (a \vee (c \wedge b)) \text{ con } x = a,\ y = c, \\
&\qquad\qquad z = b \text{ en (iii)} \\
&= a \vee (c \wedge b).
\end{aligned}
$$

Esto combinado con el (ii) del Lema 4.5 dá (ii) del Lema 4.6 •

COROLARIO 4.2

El dual de una red distributiva es distributiva •

PRUEBA

Sea $(L;\wedge,\vee)$ una red distributiva y sea $(L,\wedge',\vee')$ la red dual de L. Por definición de dual sabemos que $a \wedge b = a \vee' b$, $a \vee b = a \wedge' b$.

Para $x,y,z \in L$ se tiene en $(L;\wedge,\vee)$ que:
$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$; por (i) de Lema 4.6 y en su dual obtendrémos:

$(x \vee' y) \wedge' (x \vee' z) = x \wedge'(y \wedge' z)$; satisfaciendo (ii) de Lema 4.6 así $(L;\wedge',\vee')$ es distribuitiva •

LEMA 4.7

La identidad $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee (x \wedge z))$ *es equivalente a la condición:*
$x \geq z$ *implica que* $(x \wedge y) \vee z = x \wedge (y \vee z)$ •

Observación.

Una red que satisface esta condición es llamada Modular. La red M_5 de la figura 2.2 es un ejemplo.

PRUEBA

Si $x \geq z$, entonces $z = x \wedge z$; así la implicación sigue de la identidad. Recíprocamente, si la implicación se cumple, entonces ya que $x \geq x \wedge z$, tenemos

$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee (x \wedge z))$ •

LEMA 4.8

L *es distributiva si y solo si la identidad*

$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$

se cumple en L •

PRUEBA

Si L es distributiva:

$[(x \wedge y) \vee (y \wedge z)] \vee (z \wedge x)$

$= [((x \wedge y) \vee y) \wedge ((x \wedge y) \vee z)] \vee (z \wedge x)$

$= [y \wedge ((x \wedge y) \vee z)] \vee (z \wedge x)$

$= [y \vee (z \wedge x)] \wedge [((x \wedge y) \vee z) \vee (z \wedge x)]$

$= (y \vee z) \wedge (y \vee x) \quad \wedge \quad (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

$= (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x).$

Supongamos que en L se cumple al identidad

$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$

y obtenemos

$$
\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge z) &= [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)] \wedge z \\
&\leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) \\
&= (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \\
&\leq [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)] \vee x \\
&= (y \wedge z) \vee x.
\end{aligned}
$$

Cumpliendose (iii) del Lema 4.6, y L es distributiva •

LEMA 4.9

Toda red distributiva es modular •

PRUEBA

Sea L una red distributiva. Sean $x,y,z \in L$; con $x \geq z$.

$$
\begin{aligned}
(x \wedge y) \vee z &= (x \vee z) \wedge (y \vee z) \\
&= x \wedge (y \vee z).
\end{aligned}
$$

Por el Lema 4.7 L es modular •

5. REDES LIBRES (NO ACOTADAS)

La red más general formada a partir de determinados elementos es llamada libre. Puesto que podríamos estar interesados en la red más general distributiva, generada por a,b,c; satisfaciendo $b < a$; parece razonable definir el concepto "libre" con respecto a una clase **K** de redes.

DEFINICION 5.1

Sean $p_i = q_i$ identidades para $i \in I$. La clase **K** *de todas las redes que satisfacen todas las identidades $p_i = q_i$, $i \in I$ es llamada una clase ecuacional de redes.*

Una clase ecuacional es trivial si contiene solamente una red como elemento •

Algunos ejemplos de clases ecuacionales son:

La clase **L** de todas las redes, la clase **D** de todas las redes distributivas y la clase **M** de todas las redes modulares.

Lo siguiente es ponernos de acuerdo sobre qué clase de relaciones se permitirán en el conjunto generador.

Para un conjunto generador F, tomamos un C.O.P.O. P, y para relaciones en F todas las $a \leq b$ que se cumplen en P, todos los $a \wedge b = c$ en F, donde $\inf\{a,b\} = c$ en P, y los $a \vee b = c$, donde $\sup\{a,b\} = c$ en P. (más adelante presentaremos una aproximación más liberal).

Formulemos este concepto más detalladamente.

DEFINICION 5.2

Sea P *un* C.O.P.O. *y sea* $\mathbf{K}$ *una clase ecuacional de redes. Una red* $F_{\mathbf{K}}(P)$ *es llamada una red libre sobre* $\mathbf{K}$ *generada por* P *si se cumplen las siguientes condiciones:*

(*i*) $F_{\mathbf{K}}(P) \varepsilon \mathbf{K}$.

(*ii*) $P \subseteq F_{\mathbf{K}}(P)$, *y para* $a,b,c \varepsilon P$, $inf\{a,b\} = c$ *en* P *si y solo si* $a \wedge b = c$ *en* $F_{\mathbf{K}}(P)$, *y* $sup\{a,b\} = c$ *en* P *si y solo si* $a \vee b = c$ *en* $F_{\mathbf{K}}(P)$.

(*iii*) $[P] = F_{\mathbf{K}}(P)$.

(*iv*) *Sea* $L \varepsilon \mathbf{K}$ *y sea* $\gamma: P \longrightarrow L$ *una función monótona (isótona) con la propiedad que si* $a,b,c \varepsilon P$, $inf\{a,b\} = c$ *en* P, *entonces* $a\gamma \wedge b\gamma = c\gamma$ *en* L, *y si* $sup\{a,b\} = c$ *en* P, *entonces* $a\gamma \vee b\gamma = c\gamma$ *en* L. *Entonces existe un homomorfismo (de redes)* $\Psi: F_{\mathbf{K}}(P) \longrightarrow L$ *que extiende a* γ *(esto es,* $a\gamma = a\Psi$ *para todo* $a \varepsilon P$) •

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[d, "\gamma"'] & & F_{\mathbf{K}}(P) \arrow[dll, dashed, "\Psi"] \\ L & & \end{tikzcd}$$

Figura 5.1a

Si denotamos con ε a la función identidad en P; entonces la condición crucial (iv) puede ser expresada por la figura 5.1a.

En ese y en todos los diagramas similares, las letras mayúsculas representan redes ó C.O.P.O.S y las flechas indican homomorfismos ó funciones con ciertas propiedades. Estos diagramas son usualmente asumidos conmutativos, que en este caso particular significa $\varepsilon \circ \Psi = \gamma$, lo cual es (iv).

Note que (ii) es tambien incluido en el diagrama si suponemos que las flechas representan mapeos como se requiere en (iv). En efecto nosotros podríamos tener requerido en (ii) que la función identidad en P es una inmersión de P en $F_{\mathbf{K}}(P)$ en el sentido de (iv).

DEFINICION 5.3

Si P *es un conjunto no ordenado,* $|P| = m$, *escribiremos* $F_{\mathbf{K}}(m)$ *por* $F_{\mathbf{K}}(P)$ *y lo llamaremos una red libre en m generadores sobre* **K**. *En el caso* **K** = **L**, *omitiremos "sobre* **L**"; *así "red libre generada por* P" *significará "red libre sobre* **L** *generada por* P" *en notación* F(P) •

Si $b \in F_{\mathbf{K}}(P)$, entonces por (iii) y por Lema 4.1, $b = p(a_0,\dots,a_{n-1})$, donde p es un polinomio y $a_0,\dots,a_{n-1} \in P$.

Así si el Ψ de (iv) existe, entonces tendremos:

$b\Psi = p(a_0,\ldots,a_{n-1})\Psi$ (ya que Ψ es un homomorfismo)

$= p(a_0\Psi,\ldots,a_{n-1}\Psi)$

$= p(a_0\gamma,\ldots,a_{n-1}\gamma)$ ya que $a_i\Psi = a_i\,(\varepsilon\circ\Psi) = a_i\gamma$.

De lo anterior podemos concluir el siguiente Corolario.

COROLARIO 5.2

Sean $F_{\mathbf{K}}(P)$ y $F^*_{\mathbf{K}}(P)$ redes que satisfacen las condiciones de la definición 5.2. Entonces existe un isomorfismo $\chi: F_{\mathbf{K}}(P) \longrightarrow F^*_{\mathbf{K}}(P)$ y χ puede ser escogido de tal forma que $a\chi = a$ para todo $a \in P$. En otras palabras las redes libres (sobre $\mathbf{K}$ generadas por P) son únicas salvo un isomorfismo •

PRUEBA

Usaremos la figura 5.1a con $L = F_{\mathbf{K}}(P)$ y $\gamma = \varepsilon$ entonces existe $\Psi_1: F_{\mathbf{K}}(P) \longrightarrow F^*_{\mathbf{K}}(P)$ y $\Psi_2: F^*_{\mathbf{K}}(P) \longrightarrow F_{\mathbf{K}}(P)$ tal que $\varepsilon\circ\Psi_1 = \varepsilon$ y $\varepsilon\circ\Psi_2 = \varepsilon$ así $\Psi_1\circ\Psi_2: F_{\mathbf{K}}(P) \longrightarrow F_{\mathbf{K}}(P)$; la función identidad ε sobre P.

Por Corolario 5.1, tiene una única extensión a un homomorfismo $F_{\mathbf{K}}(P) \longrightarrow F_{\mathbf{K}}(P)$; la función identidad sobre $F_{\mathbf{K}}(P)$ es una de tales extensiones.

Por ello, $\Psi_1\circ\Psi_2$ es la función identidad sobre $F_{\mathbf{K}}(P)$. Similarmente, $\Psi_2\circ\Psi_1$ es la función identidad sobre $F^*_{\mathbf{K}}(P)$, y así Ψ_1 es el isomorfismo requerido (ver figura 5.1b) •

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & F_{\mathbf{K}}(P) \arrow[dl, dashed, "\Psi_1 \circ \Psi_2"'] \\
F_{\mathbf{K}}(P) \arrow[r, "\Psi_1"'] & F^*_{\mathbf{K}}(P) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Figura 5.1b

Este Corolario aclara la unicidad, ¿Pero qué de su existencia?. Naturalmente, $F_{\mathbf{K}}(P)$ no siempre existe. Por ejemplo: $F_{\mathbf{D}}(N_5)$ seria N_5, ya que por (ii) y (iii) de la definición 5.2 $F_{\mathbf{K}}(P) = P$ si P es una red; pero $N_5 \notin \mathbf{D}$ ya que:

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= b \vee 0 \\
&= b \\
a \wedge (b \vee c) &= a \wedge i \\
&= a
\end{aligned}$$

pero $a \neq b$ de done N_5 no es distributiva, así (i) es violentado.

TEOREMA 5.1

Sea P *un C.O.P.O. y sea* $\mathbf{K}$ *una clase ecuacional de redes. Entonces* $F_{\mathbf{K}}(P)$ *existe si y solo si las siguientes condiciones son satisfechas:*

(E) *Existe una red* L *en* $\mathbf{K}$ *tal que* $P \subseteq L$ *y para* $a, b, c \in P$, $\inf\{a,b\} = c$ *en* P *si y solo si* $a \wedge b = c$ *en* L *y* $\sup\{a,b\} = c$ *en* P *si y solo si* $a \vee b = c$ *en* L.

PRUEBA

La condición (E) es obviamente necesaria por la existencia de $F_{\mathbf{K}}(P)$; realmente, si $F_{\mathbf{K}}(P)$ existe, (E) siempre puede ser satisfecho con $L = F_{\mathbf{K}}(P)$ por (i) y (ii) de la definición 5.2.

Ahora asumamos que (E) es satisfecho. En esta prueba en mapeo $\gamma: P \longrightarrow N$ ($N \in \mathbf{K}$) será llamado un homorfismo si satisface el conjunto de las primeras tres condiciones contempladas en la definición 5.2 (iv).

Es claro que, en la definición 5.2 (iv) es suficiente considerar N con $N = [P\gamma]$; con (N,γ) denotemos esta situación - esto es, $N \in \mathbf{K}$; $\gamma: P \longrightarrow N$ es un homomorfismo y $N = [P\gamma]$. Entonces $F_{\mathbf{K}}(P)$, ó más precisamente, $(F_{\mathbf{K}}(P),\varepsilon)$ tiene la propiedad que para un (L,γ) existe un $\Psi: F_{\mathbf{K}}(P) \longrightarrow L$ con $\gamma = \varepsilon \circ \Psi$. Para construir $F_{\mathbf{K}}(P)$ tenemos que formar una red teniendo esta propiedad para todo (L,γ). ¿Cómo debemos de construirla para que cumpla estas condiciones?.

Sean (L_1,γ_1) y (L_2,γ_2) dadas. Formemos $L_1 \times L_2$ y definamos una mapeo $\gamma: P \longrightarrow L_1 \times L_2$ por $P\gamma = (P\gamma_1, P\gamma_2)$; sea $N = [P\gamma]$. El hecho que γ es un homomorfismo es facil de ver. Un ejemplo simple es ilustrado en las figuras 5.2 - 5.4.

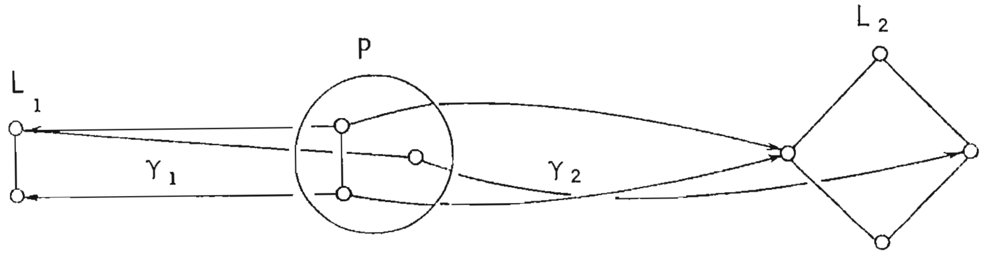


Figura 5.2

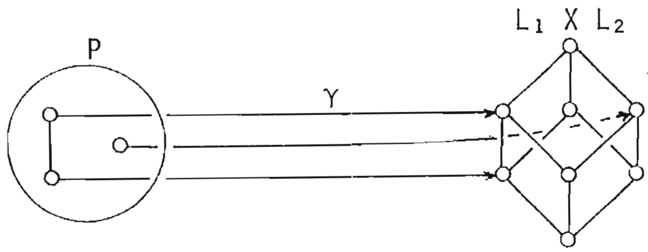


Figura 5.3

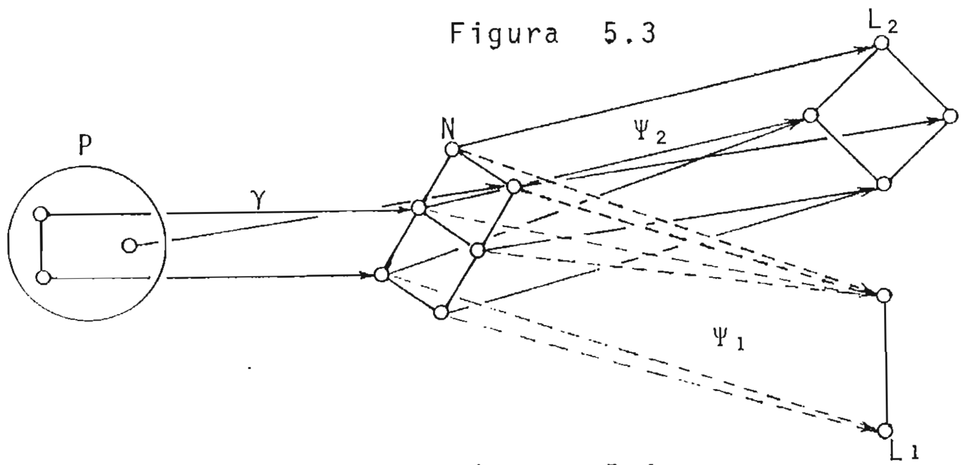


Figura 5.4

Ahora definamos $\Psi_i: (x_1,x_2) \longrightarrow x_i$ y obviamente, para $p \in P$, $p\,\gamma\,\Psi_i = p\gamma_i$ y $\Psi_i: N \longrightarrow L_i$.

Si tenemos un número dado de (L_i,γ_i), $i \in I$, podemos proceder como antes y conseguimos (N,γ); si uno de los (L_i,γ_i) es el

(L,ε) dado por (E),

¿Entonces (ii) de la definición 5,2 tambien será satisfecho?. Existe solamente un problema: todos los pares (L_i,γ_i) no forman un conjunto, asi su producto directo no puede ser formado. Los (L_i,γ_i) no forman un conjunto ya que una red y todas sus copias isomorfas no forman un conjunto; por ello, si pudiéramos de algún modo restringir y tomar muchas copias isomorfas a los (L_i,γ_i), el procedimiento previo puede ser seguido.

Observe que por Corolario 4.1, en cada par (L_i,γ_i) tenemos: $|L_i| \leq |P\gamma_i| + \aleph_0 \leq |P| + \aleph_0$

Así, escogiendo un conjunto suficientemente grande S y tomando solamente esos (L_i,γ_i) que satisfacen $L_i \subseteq S$, (bajo una inmersión) podemos resolver nuestro problema.

Ahora procederemos con la prueba formal.

Escojamos un conjunto S satisfaciendo

$$|P| + \aleph_0 = |S|.$$

Sea Q el conjunto de todos los pares (M,Ψ) donde $M \subseteq S$ (bajo una inmersión). Formemos $A = \prod (M/(M,\Psi) \in Q)$, y para cada $p \in P$ sea $f_p \in A$ definido por

$f_p((M,\Psi)) = p\Psi$. Esto es la proyección en la coordenada M-ésima de f_p. ($M \subseteq S$, bajo una inmersión).

Finalmente, sea $N = [\{f_p / p \in P\}]$.

Afirmamos que si, para todo $p \in P$, identificamos p con f_p, entonces N satisface (i) - (iv) de definición 5,2, y así $N = F_{\mathbf{K}}(P)$.

(i) N es construido de miembros de $\mathbf{K}$ (los M), tomando una sub red de su producto directo.

Por Lema 4.4, $N \in \mathbf{K}$, puesto que $\mathbf{K}$ es una clase ecuacional.

(ii) Sea $\inf\{a,b\} = c$ en P. Entonces para cada $(M,\Psi) \in Q$, $a\Psi \wedge b\Psi = c\Psi$, así que $f_a((M,\Psi)) \wedge f_b((M,\Psi)) = f_c((M,\Psi))$, esto es, $f_a \wedge f_b = f_c$. Puesto que p es identificado con f_p, concluimos que $a \wedge b = c$ en N.

Recíprocamente, sea $a \wedge b = c$ en N, esto es, $f_a \wedge f_b = f_c$.

Sea L la red dada por (E) y sea ε la función identidad sobre P; entonces podemos formar (L,ε). Por Corolario 4.1, $|L| \leq |S|$, así existe un mapeo uno a uno $\alpha: L \longrightarrow S$. Sea $L_1 = L\alpha$ y hagamos a L_1 una red definido $a\alpha \wedge b\alpha = (a \wedge b)\alpha$, $a\alpha \vee b\alpha = (a \vee b)\alpha$.

Entonces $L \cong L_1$ y podemos formar el par (L_1,α_1), donde α_1 es la restricción de α a $P(\subseteq L)$. Puesto que $L_1 \subseteq S$, $(L_1,\alpha_1) \in Q$. Ahora $f_a \wedge f_b = f_c$ nos dá $f_a((L_1,\alpha_1)) \wedge f_b((L_1,\alpha_1)) = f_c((L_1,\alpha_1))$;

esto es, $a\alpha \wedge b\alpha = c\alpha$, lo cual a su vez dá $a \wedge b = c$, puesto que α es un isomorfismo. Por (E), $a \wedge b = c$ en L implica que $\inf\{a,b\} = c$. La segunda parte de (ii) se sigue por dualidad.

(iii) Esta parte de la prueba se sigue de la definición de N.

(iv) Tomemos (L,γ); tenemos que encontrar un homorfismo $\Psi: N \longrightarrow L$ satisfaciendo $a\gamma = a\Psi$ para $a \in P$. Usando $|N| \leq |S|$, el argumento dado en (ii) puede ser repetido para encontrar (L_1,γ_1), un isomorfismo $\alpha : L \longrightarrow L_1$ tal que $a\gamma\alpha = a\gamma_1$ para todo $a \in P$ y $L_1 \subseteq S$. Además, $(L_1,\gamma_1) \in Q$.

Sea $\Psi_1: f \longrightarrow f((L_1,\gamma_1))$, $f \in N$.

Entonces para $a \in P$, $a\Psi_1 = f_a \Psi_1 = f_a((L_1,\gamma_1)) = a\gamma_1 = a\gamma\alpha$. Así el homomorfismo $\Psi = \Psi_1\alpha^{-1}: N \longrightarrow L$ satisface lo requerido por (iv) •

Dos consecuencias muy importantes de este teorema son:

COROLARIO 5.3

Para una clase ecuacional no trivial $\mathbf{K}$ *y para un cardinal* m, *una red libre sobre* $\mathbf{K}$ *con* m *generadores*, $F_{\mathbf{K}}(m)$, *existe* •

PRUEBA

Es suficiente encontrar un $L \varepsilon \mathbf{K}$, $X \subseteq L$ tal que $|X| = m$, y para $x,y \varepsilon X$, $x \neq y$; x,y son incomparables.

Se tiene por hipótesis que $\mathbf{K}$ es no trivial, entonces existe un $N \varepsilon \mathbf{K}$, $|N| > 1$; así, C_2 es una sub red de N. Por Lema 4.4 $C_2 \varepsilon \mathbf{K}$; por Lema 4.4 $(C_2)^I \varepsilon \mathbf{K}$ para un conjunto I.

Sea $|I| = m$, $L = (C_2)^I$; para $i \varepsilon I$, definimos $f_i \varepsilon L$ por $f_i(i) = 1$, $f_i(j) = 0$ para $i \neq j$, y el conjunto $X = \{f_i / i \varepsilon I\}$, obviamente X satisface la condición •

El argumento dado en la prueba del Corolario 5.1 Muestra que, siempre que L es generada por P, un homomorfismo γ de P tiene a lo más una extensión a L, y si existe una, esta es dada por

$$\Psi: p(a_0,\ldots,a_{n-1}) \longrightarrow p(a_0\gamma,\ldots,a_{n-1}\gamma).$$

Esta fórmula da un homomorfismo si y solo si Ψ está bien definida; en otras palabras, si y solo si

$p(a_0,\ldots,a_{n-1}) = q(b_0,\ldots,b_{m-1})$ implica que

$p(a_0\gamma,\ldots,a_{n-1}\gamma) = q(b_0\gamma,\ldots,b_{m-1}\gamma)$ para cualquier

$a_0,\ldots a_{n-1}$, $b_0,\ldots,b_{m-1} \varepsilon P$ y $\gamma: P \longrightarrow N \varepsilon \mathbf{K}$.

Esto nos ayuda en el siguiente Teorema:

TEOREMA 5.2

En la definición de $F_{\mathbf{K}}(P)$, *(iv) puede ser sustituida por la* *siguiente condición,*

Si $b \in F_{\mathbf{K}}(P)$ *tiene dos representaciones,*
$b = p(a_0,\ldots,a_{n-1})$ *y* $b = q(b_0,\ldots,b_{m-1})$ $(a_0,\ldots,a_{n-1},b_0,\ldots,b_{m-1} \in P)$,
entonces

$$p(a_0,\ldots a_{n-1}) = q(b_0,\ldots,b_{m-1})$$

puede ser derivado de las identidades definidas en **K** *y las relaciones de* P *de la forma* $a \wedge b = c$ *y* $a \vee b = c$ •

PRUEBA

Sea $L \in \mathbf{K}$ y sea γ: P ——> L, dados según las condiciones de (iv).

Si $p(a_0,\ldots,a_{n-1}) = q(b_0,\ldots,b_{n-1})$ puede ser derivado de las identidades definidas en **K** y las relaciones de P de la forma $a \wedge b = c$ y $a \vee b = c$, $p(a_0\gamma,\ldots, a_{n-1}\gamma) = q(b_0\gamma,\ldots,b_{m-1}\gamma)$, también se podría derivar en L, puesto que γ respeta las relaciones de P de la forma $a \wedge b = c$, $a \vee b = c$; y además $L \in \mathbf{K}$, por los comentarios previos a este Teorema esto es suficiente para que exista Ψ: $F_{\mathbf{K}}(P)$ ——> L, como una extensión de γ •

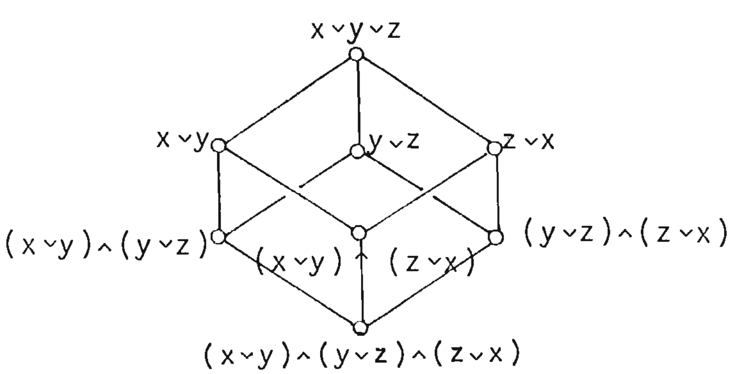


Figura 5.5

LEMA 5.2

Sea x, y, z elementos de una red L y sean $x \vee y$, $y \vee z$, $z \vee x$; incomparables dos a dos. Entonces $\{x \vee y, y \vee z, z \vee x\}$ generan una sub red de L isomórfa a $(C_2)^3$. (ver figura 5.5) •

PRUEBA

Casi todas las conjunciones y disyunciones son obvias; por simetría, las no obvia estan tipificadas por

$[(x \vee y) \wedge (y \vee z)] \vee [(x \vee y) \wedge (z \vee x)] = x \vee y$ y

$[(x \vee y) \wedge (y \vee z)] \vee (z \vee x) = x \vee y \vee z.$

Mostremos la primera.

Ya que $y \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z)$ y $x \leq (x \vee y) \wedge (z \vee x)$, conseguimos que $x \vee y \leq [(x \vee y) \wedge (y \vee z)] \vee [(x \vee y) \wedge (z \vee x)]$, y $\geq$ es trivial.

La segunda igualdad se sigue de $y \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z)$ y $(x \vee z) = (z \vee x)$, de donde $x \vee y \vee z \leq [(x \vee y) \wedge (y \vee z)] \vee (z \vee x)$, y $\geq$ es trivial.

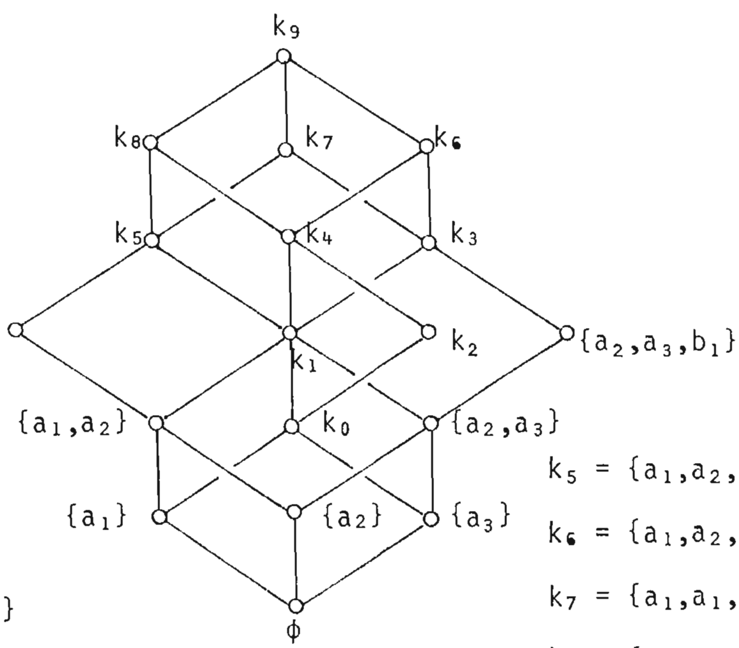
Note que por ejemplo si, $(x \vee y) \wedge (y \vee z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$ implicaría, disyuntando a ambos lados con $(y \vee z)$, que $(x \vee y \vee z) = z \vee x$; así $x \vee y \leq z \vee x$, una contradicción. Además, todos los ocho elementos son distintos •

LEMA 5.3

Sean, A,B conjuntos disjuntos de tres elementos. Sea L_a el conjunto de los siguientes subconjuntos de $A \cup B$:
Todo $X \subseteq A$, todo $A \cup Y$, $Y \subseteq B$, todos los conjuntos de tres elementos Z con $|Z \cap A| = 2$. Entonces $\langle L_a; \subseteq\rangle$ es una red, $\wedge$ y $\vee$ son intersección y unión y que L es distributiva.

La figura 5.6a es el diagrama de L_a (A.D. Compbell [1943]) •

PRUEBA



$k_0 = \{a_1,a_3\}$

$k_1 = \{a_1,a_2,a_3\}$

$k_2 = \{a_1,a_3,b_2\}$

$k_3 = \{a_1,a_2,a_3,b_1\}$

$k_4 = \{a_1,a_2,a_3,b_2\}$

$k_5 = \{a_1,a_2,a_3,b_3\}$

$k_6 = \{a_1,a_2,a_3,b_1, b_2\}$

$k_7 = \{a_1,a_1,a_3,b_1,b_3\}$

$k_8 = \{a_1,a_2,a_3,b_2,b_3\}$

$k_9 = \{a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\}$

Figura 5.6a

de la figura 5.6a, es claro que L_a es una red.

Es una red Distributiva ya que la unión e intersección de conjuntos son distributivos, una con respecto a la otra •

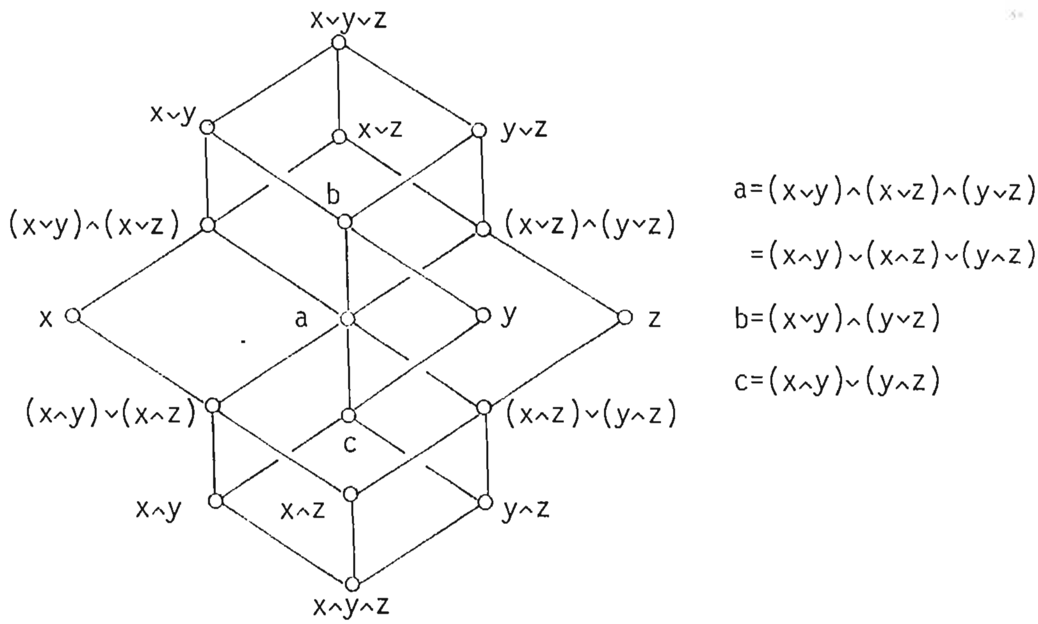


Figura 5.6b

TEOREMA 5.3

Una red libre distributiva sobre tes generadores $F_D(3)$ *tiene dieciocho elementos. (ver figura 5.6b)* •

PRUEBA

Sean x,y,z los tres generadores. Si $x \vee y \leq x \vee z$, $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee y$, $x \vee (y \wedge z) = x \vee y$ de donde $z \geq y$ contradiciendo la hipótesis del Teorema. De donde $x \vee y$, $x \vee z$, $y \vee z$ son incomparables y por Lema 5.2 generan una sub red isomorfa a $(C_2)^3$ la cual es distributiva. Así construimos la cima de ocho elementos en la figura 5.6b. Dualmente formemos también la base (en la figura 5.6b) de ocho elementos. Además

$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$ por Lema 4.8, de esto obtenemos la red L_b de la figura 5.6b.

De acuerdo al Teorema 5.2, tenemos solamente que verificar que la red L_b cumpla con:

(i) Ser una red distributiva, y

(ii) Que si p,q,r son polinomios representando elementos de L_b y $p \wedge q = r$ en L_b, entonces $p \wedge q = r$ en cada red distributiva y similarmente para el $\vee$.

(i) Hagamos la siguiente asociación entre las figuras 5.6a y 5.6b.

Definamos: $\gamma: L_a \longrightarrow L_b$ tal que:
para todo $a,b \in L_a$, $(a \cap b)\gamma = a\gamma \wedge b\gamma$, $(a \cup b)\gamma = a\gamma \vee b\gamma$.
Con $\{a_1,a_2,a_3\}\gamma = x$; $\{a_1,a_2,b_3\}\gamma = y$; $\{a_2,a_3,b_1\}\gamma = z$.

Al aplicar esta definición en ambas figuras, observamos que γ es un isomorfismo, así L_b es distributiva.

(ii) La segunda afirmación requiere un completo listado de todas las ternas p,q,r con $p \wedge q = r$; puesto que el caso $\vee$ es su dual.

Si p,q,r pertenecen a la cima de ocho elementos, la afirmación se sigue del Lema 5.2, puesto que cualquier red distributiva que contenga a $x \vee y$, $x \vee z$, $y \vee z$ (incomparables) contendrá a $(C_2)^3$, la cual es distributiva. Así si $p \wedge q = r$ en $(C_2)^3$, tambien se tendrá $p \wedge q = r$ en cualquier red distributiva, puesto que $(C_2)^3$ será una sub red de esta. Si p,q,r están en la base de ocho elementos, la afirmación es dual a la anterior.

Veamos los casos restantes: si p y q son comparables, con $p \leq q$, $p \wedge q = p$ en cualquier red distributiva.

En otro caso si: $p = x$, $q = y \vee z$, $r = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ según la figura 5.6b, y en una red L distributiva tendríamos $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, ambos resultados coinciden. Por simetría también cumplen: $p = y$, $q = x \vee z$; $p = z$, $q = x \vee y$. Si $p = z$, $q = (x \vee y) \wedge (y \vee z)$, $r = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$, y en una red L distributiva tenemos:

$z \wedge [(x \vee y) \wedge (y \vee z)] = z \wedge (x \vee y) = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$, ambos resultados coinciden. Los casos restantes son deducidos facilmente •

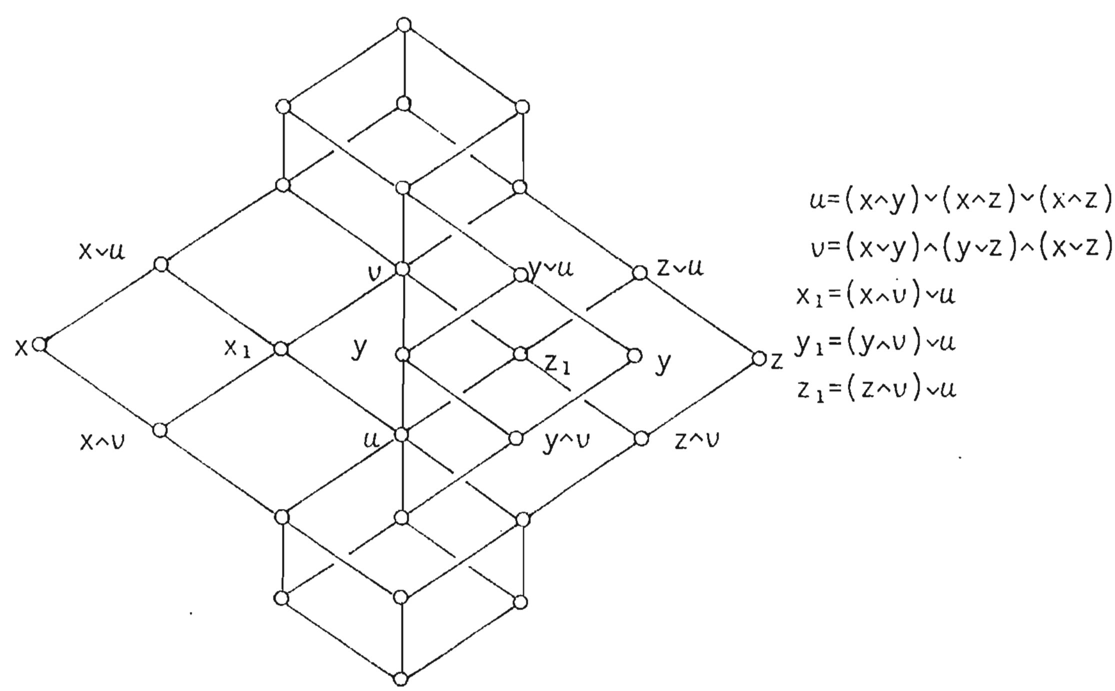


Figura 5.7

LEMA 5.4

La red L *de la figura 5.7 puede representarse como una sub red de* $L_a \times M_5$*, donde* L_a *es la red del Lema 5.3 y* M_5 *es la red de la figura 2.2* •

PRUEBA

$L_a \times M_5$ es una red, donde para dos elementos (ℓ_1,m_1), (ℓ_2,m_2) de $L_a \times M_5$, se tiene que $(\ell_1,m_1) \wedge (\ell_2,m_2) = (\ell_1 \cap \ell_2, m_1 \wedge m_2)$, $(\ell_1,m\ ) \vee (\ell_2,m_2) = (\ell_1 \cup \ell_2, m_1 \vee m_2)$. Además esta red es modular ya que L_a y M_5 son redes modulares.

La asociación establecida en la figura 5.7 deja claro que L es sub red de $L_a \times M_5$ •

TEOREMA 5.4

(R. Dedekind). Una red libre modular sobre tres generadores $F_{\mathbf{M}}(3)$ *tiene veinte y ocho elementos (ver figura 5.7)* •

PRUEBA

Sean x,y,z los tres generadores. De nuevo la modularidad es probada por una representación (Lema 5.4) •

Solo haria falta ver que si p,q,r son polinomios representando elementos de la red L de la figura 5.7, y $p \wedge q = r$ en L, entonces $p \wedge q = r$ en cada red modular, y similarmente para el $\vee$. El Teorema anterior toma en cuenta la mayoría de las conjunciones y disyunciones excepto para x_1, y_1, z_1. Veamos algunos con estos elementos:

$x_1 \wedge y_1 = [(x \wedge v) \vee u] \wedge [(y \wedge v) \vee u]$ puesto que $u \leq (y \wedge u) \vee u$ y Lema 4.7.

$= [(x \wedge v) \wedge (y \wedge v) \vee u] \vee u$ ya que $u \leq v$, y Lema 4.7.

$= [(x \wedge v) \wedge (y \vee u) \wedge v] \vee u$ sustituyendo u y v.

$= [x \wedge (y \vee z) \wedge (y \vee (x \wedge z))] \vee u$

$= x \wedge (y \vee (x \wedge z))$ porque $x \wedge z \leq z$.

$= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee u$ ya que $x \wedge z \leq x$.

$= u$

$x_1 \wedge y = [(x \wedge v) \vee u] \wedge y$ puesto que $u \leq v$.

$= [v \wedge (x \vee u)] \wedge y$

$= [v \wedge (x \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z))] \wedge y$ sustituyendo u.

$= [v \wedge (x \vee (y \wedge z))] \wedge y$

$= [x \vee (y \wedge z)] \wedge [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z)] \wedge y$ sustituyendo v.

$= [x \vee (y \wedge z)] \wedge [(x \vee z) \wedge y]$ como $y \wedge z \leq y \wedge (x \vee z)$.

$= (y \wedge z) \vee [x \wedge ((x \vee z) \wedge y)]$

$= (y \wedge z) \vee (x \wedge y)$.

$z_1 \vee z = [(y \wedge v) \vee u] \vee z$ sustituyendo y_1.

$= (y \wedge v) \vee (u \vee z)$

$= [y \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z)] \vee [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee z]$

sustituyendo u, v.

$= [y\wedge(x\vee z)] \vee [(x\wedge y)\vee z]$ puesto que $(x\wedge y)\vee z \leq x\vee z$

$= (x\vee z) \wedge (y\vee z)$.

$z_1\wedge z = [(z\wedge v)\vee u]\wedge z$ sustituyendo z_1

$= (z\wedge v) \vee (u\wedge z)$ ya que $z\wedge v \leq z$

$= z\wedge v$.

Los casos restantes resultan con cálculos parecidos •

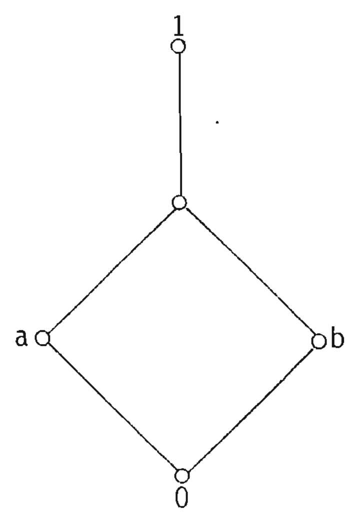


Figura 5.8

Al observar la red representada por la figura 5.8, podríamos decir que es libre generada por $\{0,a,b,1\} = P$, pero claramente no es el caso de acuerdo a la definición 5.2, ya que $\sup\{a,b\} = 1$ en P, mientras en la red $a\vee b < 1$.

Así para conseguir la red más general de la sección 2 tenemos que extender los conceptos anteriores de nuestra discusión introduciendo redes parciales.

DEFINICION 5.3

Sea L *una red* H $\subseteq$ L, *y restringimos* $\wedge$ *y* $\vee$ *a* H *como sigue: para* $a,b,c \in H$, *si* $a \wedge b = c$ *(dualmente,* $a \vee b = c$*), entonces decimos que en* H, $a \wedge b$ *(dualmente,* $a \vee b$*) es definido e igual a* c*; si, para* $a,b \in H$, $a \wedge b$ *(dualmente* $a \vee b$*)* $\notin$ H, *entonces decimos que* $a \wedge b$ *(dualmente,* $a \vee b$*) no está definida en* H. *Así* $(H;\wedge,\vee)$ *es un conjunto con dos operaciones binarias parciales.* $(H;\wedge,\vee)$ *es llamada una red parcial.* $(H;\wedge,\vee)$ *es llamada una sub red relativa de* L •

Así cada subconjunto de una red determina una red parcial. La segunda parte de esta sección está dirigida a una caracterización interna de redes parciales.

Ahora analizemos la forma que toman las ocho identidades que fueron usadas para definir redes ((L_1) - (L_4) de la sección 1), en las redes parciales.

LEMA 5.2

Sea $(H;\wedge,\vee)$ *una red parcial* $a,b,c \in H$.

(*i*) $a \wedge a$ *existe, y* $a \wedge a = a$.

(*ii*) *Si* $a \wedge b$ *existe, entonces* $b \wedge a$ *existe, y* $a \wedge b = b \wedge a$.

(*iii*) *Si* $a \wedge b$, $(a \wedge b) \wedge c$, $b \wedge c$ *existen, entonces* $a \wedge (b \wedge c)$ *existe,* *y* $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$. *Si* $b \wedge c$, $a \wedge (b \wedge c)$, $a \wedge b$ *existen, entonces* $(a \wedge b) \wedge c$ *existe, y* $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

(*iv*) *Si* $a \wedge b$ *existe, entonces* $a \vee (a \wedge b)$ *existe, y* $a = a \vee (a \wedge b)$ •

PRUEBA

(i) Si $a \in H$, como en L $a \wedge a = a$, así también en H $a \wedge a = a$.

(ii) Si a, b, $a \wedge b \in H$, ya que en L $a \wedge b = b \wedge a$, entonces $b \wedge a \in H$ y $a \wedge b = b \wedge a$ también en H.

(iii) Asumimos que $a \wedge b$, $(a \wedge b) \wedge c$, $b \wedge c$ existen en H, pero en L, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$; con a, $b \wedge c$, $(a \wedge b) \wedge c \in H$. Así $a \wedge (b \wedge c) \in H$ y $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ en H.

(iv) Si $a, b, a \wedge b \in H$, entonces en L $a \wedge b = b \wedge a$, así $b \wedge a \in H$ y $a \wedge b = b \wedge a$ en H •

LEMA 5.2'

Con (*i'*) - (*iv'*) *denotemos las afirmaciones conseguidas de* (*i*) - (*iv*) *del Lema 5.2 por el intercambio de* $\wedge$ *por* $\vee$ *y viceversa. Entonces* (*i'*) - (*iv'*) *se cumplen en una red parcial* •

PRUEBA

(i) Si $a \in H$, como $a \vee a = a$ en L; entonces $a \vee a = a$ en H.

(ii) Si $a, b, a \vee b \in H$. En L $a \vee b = b \vee a$, así $b \vee a \in H$ y $a \vee b = b \vee a$.

(iii) Asumimos que $a, b, a \vee b, (a \vee b) \vee c, b \vee c \in H$; pero en L, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ y además a y $b \vee c \in H$, así $a \vee (b \vee c) \in H$ y $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ en H.

(iv) Si $a, b, a \vee b \in H$; como en L $a \vee b = b \vee a$, $b \vee a \in H$ y $a \vee b = b \vee a$ en H •

DEFINICION 5.4

Una red parcial débil es un conjunto con dos operaciones binarias parciales satisfaciendo (i) - (iv) y (i') - (iv') •

COROLARIO 5.4

Cada red parcial es una red parcial débil •

Basado en la figura 5.9, conseguimos el siguiente ejemplo de una red parcial débil que no es red parcial.

Sea $H = \{0, a, b, c, d, e, f, g, h, 1\}$. Consideremos la red N de la figura 5.9. Definamos $x \wedge y = z$ en H si $x \wedge y = z$ en N. Definamos $x \vee y = z$ en H si alguno: $x \leq y$ en N, y $y = z$, ó $y \leq x$ en N, y $x = z$; ó si $\{x,y\} = \{a,c\}$, y $z = f$; ó $\{x,y\} = \{b,d\}$, y $z = g$; ó $\{x,y\} = \{f,g\}$, y $z = 1$. Entonces $(H; \wedge, \vee)$ es una red parcial debil, puesto que para $x, y \in H$, los $x \wedge y$ ó $x \vee y$ definidos en H están igualmente definidos en

N (son heredados de N), y así satisfacen (i) - (iv) del Lema 5.2 y (i') - (iv') del Lema 5.2'. Ahora supongamos que existe una red L; H $\subseteq$ L, tal que (H;$\wedge$,$\vee$) es una relativa sub red de L. Entonces $1 = (a \vee c) \vee (b \vee d)$ en L, y así
$1 = \sup\{a,b,c,d\}$. Puesto que $e \geq a,b$ y $h \geq c,d$ en L,
y $1 \geq e,h$; conseguimos $1 = \sup\{e,h\}$ en L.

El hecho que e,h, $1 \in$ H implica que $e \vee h$ es definido en H (e igual a 1), contrario a la definición de (H;$\wedge$,$\vee$) $\bullet$

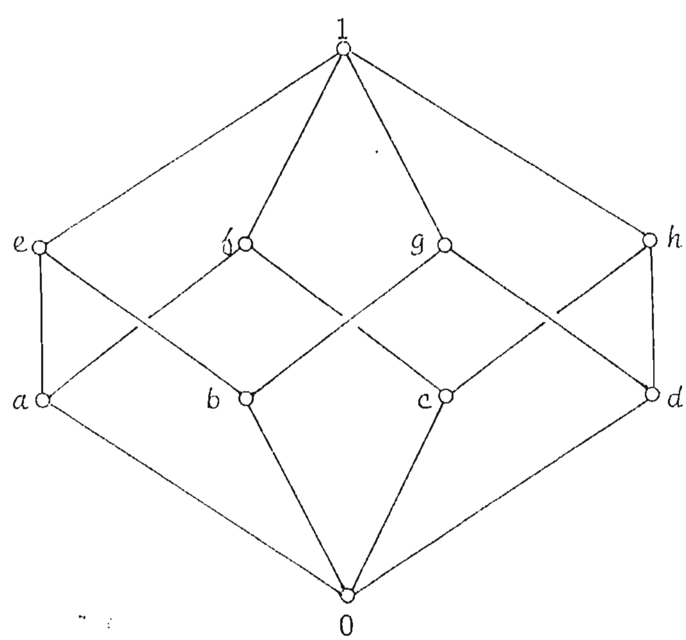


Figura 5.9

Para evitar tales anomalias introduciremos dos condiciones más. Preparándonos para ello probamos:

LEMA 5.3

Sea $(H;\wedge,\vee)$ una red parcial débil. Entonces definimos una relación de orden parcial $\leq$ en H por "$a \leq b$ si y solo si $a\wedge b$ existe y $a\wedge b = a$". Si $a\vee b$ existe, entonces $a\vee b = \sup\{a,b\}$. Si $a\wedge b$ existe, entonces $a\wedge b = \inf\{a,b\}$. Tambien, $a \leq b$ si y solo si $a\vee b = b$.

PRUEBA

Veamos que "$\leq$" es una relación de orden parcial. Si $a \in H$, por (i) Lema 5.2, $a\wedge a = a$, así $a \leq a$ ahora supongamos que $a \leq b$ y $b \leq a$ esto es $a\wedge b = a$ y $b\wedge a = b$ en H, y por (ii) Lema 5.2, $a\wedge b = b\wedge a$, así $a = b$. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, $a\wedge b = a$ y $b\wedge c = b$ en H, así por (iii) Lema 5.2 $(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$ o sea $a\wedge c = a$, $a \leq c$. Así $(H,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Ahora si $a\vee b$ existe, $a\wedge(a\vee b) = a$, $b\wedge(a\vee b) = b$ por (iv') Lema 5.2' y tenemos $a \leq a\vee b$, $b \leq a\vee b$. Para un c tal que $a \leq c$, $b \leq c$; $a\wedge c = a$, $b\wedge c = b$, entonces $a\vee c = (a\wedge c)\vee c = c$, y $b\vee c = c$ por (iv) Lema 5.2. Así

$$\begin{aligned}(a\vee b)\wedge c &= (a\vee b) \wedge (a\vee c) = (a\vee b) \wedge [a\vee(b\vee c)]\\ &= (a\vee b) \wedge [(a\vee b)\vee c] = a\vee b\end{aligned}$$

de donde $\sup\{a,b\} = a\vee b$.

Si $a \leq b$ entoces $a\wedge b = a$, $a\vee b = (a\wedge b)\vee b = b$ por (iv) Lema

5.2. Si $a \vee b = b$, es claro que $a \leq b$. De donde $a \leq b$ si y solo si $a \vee b = b$. Por último, si $a \wedge b$ existe, $a \vee (a \wedge b) = a$, $b \vee (a \wedge b) = b$, por (iv) Lema 5.2 y (ii') Lema 5.2', así $a \wedge b \leq a$, $a \wedge b \leq b$. Sea $c \in H$ con $c < a$, $c < b$, y tenemos $c \wedge a = c$, $c \wedge b = c$, $(c \wedge a) \wedge b \in H$, así por (iii) Lema 5.2, $(c \wedge a) \wedge b = c \wedge (a \wedge b) = c$, de donde $a \wedge b = \inf \{a,b\}$ •

Note que en una red parcial sup $\{a,b\}$ puede existir, pero no así $a \vee b$. Por ejemplo, sea L la red de la figura 5.9, $H = \{0,a,b,1\}$. Entonces sup $\{a,b\} = 1$ en H, pero $a \vee b$ no está definido en H ya que $a \vee b \notin H$.

DEFINICION 5.5

Un ideal de una red parcial débil H es un subconjunto no vacío I de H tal que si $a,b \in I$ y $a \vee b$ existe, entonces $a \vee b \in I$, y $x \leq a \in I$ implica que $x \in I$. De nuevo fijamos $\{x/x \leq a\} = (a]$. El ideal dual y $[a)$ son definidos dualmente. $I_0(H)$ es la red consistente de ϕ y todos los ideales de H (parcialmente ordenados por $\subseteq$), $D_0(H)$ es la red consistente de ϕ y todos los ideales duales de H (parcialmente ordenados por $\subseteq$). Para $K \subseteq H$, $(K]$ es el ideal y $[K)$ es el ideal dual generado por K •

COROLARIO 5.5

Sean H y L dadas como en la definición 5.3. Sea I un ideal *de L. Entonces $I \cap H$ es un ideal de H siempre que $I \cap H \neq \phi$* •

PRUEBA

Sean $a,b \in I \cap H$; $a,b \in I$, $a \vee b \in I$, si $a \vee b \in H$, $a \vee b \in I \cap H$.

Para los x tal que $x \leq a$ y $x \in H$, como $a \in I$, $x \in I$; así $x \in I \cap H$, de donde $I \cap H$ es un ideal de H •

LEMA 5.4

Una red parcial satisface la siguiente condición:
(I) si $(a] \vee (b] = (c]$ en $I_0(H)$, entonces $a \vee b$ existe en H y es igual a c •

PRUEBA

Sean H y L dados como en la definición 5.3, sean $a,b,c \in H$, y sea $(a] \vee (b] = (c]$ en $I_0(H)$. Sea $I = (a \vee b]_L$. Entonces $(a]_H$, $(b]_H \subseteq I \cap H$, así $(c]_H = (a]_H \vee (b]_H \subseteq (a\ b]_L$, esto es $c \leq a \vee b$.

Puesto que $a \leq c$, $b \leq c$, concluimos que $a \vee b = c$ •

Denotemos con (D) a la condición dual a (I), o sea:

(D) Si $[a) \vee [b) = [c)$ en $\mathcal{D}_0(H)$, entonces $a \wedge b$ existe en H y es igual a c.

TEOREMA 5.5

(N. Funayama): Una red parcial es un red parcial débil que satisface las condiciones (I) y (D) •

PRUEBA

Corolario 5.4 y Lema 5.4 y su dual prueban que una red parcial es una red parcial débil satisfaciendo (I) y (D). Recíprocamente, sea $(H;\wedge,\vee)$ una red parcial débil que satisface (I) y (D). Considere el mapeo

$$\gamma: x \longrightarrow ((x], [x)),$$

enviando H en $I_0(H) \times \tilde{\mathcal{D}}_0(H)$, donde $\tilde{\mathcal{D}}_0(H)$ es el dual de $\mathcal{D}_0(H)$. Este mapeo es uno a uno ya que si $(y] = (w]$, $y \leq w$, $w \leq y$, así $y = w$. Si $x \vee y = z$, entonces
$(x] \vee (y] = (z]$ en $I_0(H)$ y $[x) \vee [y) = [z)$ en $\tilde{\mathcal{D}}_0(H)$, así $x\gamma \vee y\gamma = (x \vee y)\gamma$. Recíprocamente, si $x\gamma \vee y\gamma = z\gamma$, entonces $(x] \vee (y] = (z]$ en $I_0(H)$.

Además, por (I), $x \vee y$ existe y es igual a z, así $x\gamma \vee y\gamma = z\gamma$ implica que $x \vee y = z$. Si $x \wedge y = z$, entonces $(x] \wedge (y] = (z]$ en $I_0(H)$ y $[x) \wedge [y) = [z)$ en $\tilde{\mathcal{D}}_0(H)$, así $x\gamma \wedge y\gamma = (x \wedge y)\gamma$.

Por el contrario, si $x\gamma \wedge y\gamma = z\gamma$, entonces $[x) \wedge [y) = [z)$ en $\tilde{\mathcal{D}}_0(H)$. Además, por (D), $x \wedge y$ existe y es igual a z, así $x\gamma \wedge y\gamma = z\gamma$ implica que $x \wedge y = z$. Por lo anterior tenemos: $x \vee y = z$ si y solo si $x\gamma \vee y\gamma = z\gamma$ y $x \wedge y = z$ si y solo si

$x\gamma \wedge y\gamma = z\gamma$. Así podemos identificar x con $x\gamma$, consiguiendo $H \subseteq L = I_0(H) \times \tilde{D}_0(H)$.

Hemos probado justamente que $(H;\wedge,\vee)$ es una sub red relativa de L •

Sea $(P;\leq)$ un C.O.P.O. Haremos a P una red parcial como sigue: $a\wedge b$ es definido si y solo si $\inf\{a,b\}$ existe y $a\wedge b = \inf\{a,b\}$, y similarmente para $a\vee b$.

LEMA 5.5

$(P;\wedge,\vee)$ es una red parcial •

PRUEBA

Veamos que (i) - (iv) del Lema 5.2 y (i') - (iv') del Lema 5.2' se verifican.

(i) $\inf\{a,a\} = a$ en P, así $a\wedge a = a$.

(ii) Si $a\wedge b$ existe, $a\wedge b = \inf\{a,b\} = \inf\{b,a\} = b\wedge a$.

(iii) Si $a\wedge b$, $(a\wedge b)\wedge c$, $b\wedge c$ existen, $a\wedge b = \inf\{a,b\}$, $b\wedge c = \inf\{b,c\}$, $(a\wedge b)\wedge c = \inf\{\inf\{(a,b\},c\}$, ahora veamos que $\inf\{\inf\{a,b\},c\} = \inf\{a,\inf\{b,c\}\}$ es claro que $\inf \inf\{a,b\},c\} \leq a,b,c$. Así $\inf\{\inf\{a,b\},c\} \leq a, \inf\{b,c\}$ y tenemos $\inf\{\inf\{a,b\},c\} \leq \inf\{a, \inf\{b,c\}\}$, de igual manera $\inf\{a, \inf\{b,c\}\} \leq \inf\{\inf\{a,b\},c\}$, de donde

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

(iv) Si $a \wedge b$ existe, $a \wedge b = \inf\{a,b\}$, como $\inf\{a,b\} \leq a$, $\sup\{\inf\{a,b\}, a\} = a$, así $\inf\{a,b\} \vee a = a$, $(a \wedge b) \vee a = a$.

Dualmente se verifican (i') - (iv') del Lema 5.2'.

Por lo anterior P es una red parcial débil.

Si $(a] \vee (b] = (c]$ en $I_0(H)$ (según definición 5.5 $a \leq c$, $b \leq c$, si existiera un $d \geq a$, $d \geq b$, $(d] \supseteq (c]$, así $d \geq c$, donde $\sup\{a,b\} = c$, $a \vee b = c$. De donde se cumple la condición (I).

Si $[a) \vee [b) = [c)$ en $\mathcal{D}_0(H)$; $c \leq a$ y $c \leq b$, si existiera un $d \leq a$ y $d \leq b$, $[d) \supseteq [c)$, así $d \leq c$, de donde $\inf\{a,b\} = c$, $a \wedge b = c$. Cumpliendose la condición (D)

Así por Teorema 5.5 $(P;\wedge,\vee)$ es una red parcial •

COROLARIO 5.6

Para un C.O.P.O. P, una red libre (sobre L) generada por el C.O.P.O. P existe.

PRUEBA

Es inmediato del Teorema 5.1 y Lema 5.5.

DEFINICION 5.6

Sean $(A;\wedge,\vee)$, $(B;\wedge,\vee)$ *redes parciales débiles;* $\gamma : A \longrightarrow B$. *Diremos que* γ *es un homomorfismo si, siempre que* $a\wedge b$ *existe para* $a,b \in A$ *entonces* $a\gamma \wedge b\gamma$ *existe y* $(a\wedge b)\gamma = a\gamma \wedge b\gamma$, *y si se cumple la condición similar para* $\vee$. *Un homomorfismo uno a uno* γ *es una inmersión siempre que* $a\wedge b$ *exista si y solo si* $a\gamma \wedge b\gamma$ *existe, y si la condición similar se cumple para* $\vee$. *Si* γ *es sobre y* γ *es una inmersión, entonces* γ *es un isomorfismo* •

Ahora estamos descifrando de nuevo la definición de las redes más generales de la sección 2.

DEFINICION 5.7

Sea $U = (A;\wedge,\vee)$ *una red parcial y sea* $\mathbf{K}$ *una clase cuacional de redes. La red* $F_{\mathbf{K}}(U)$ *(o, simplemente* $F_{\mathbf{K}}(A)$*) es una red libre sobre* $\mathbf{K}$ *generada por* U, *si las condiciones siguientes son satisfechas:*

(i) $F_{\mathbf{K}}(A) \in \mathbf{K}$

(ii) $A \subseteq F_{\mathbf{K}}(A)$, *y* A *es sub red parcial de* $F_{\mathbf{K}}(A)$.

(iii) $[A] = F_{\mathbf{K}}(A)$.

(iv) *Si* $L \in \mathbf{K}$ *y* $\gamma : A \longrightarrow L$ *es un homomorfismo, entonces existe un homomorfismo* $\Psi : F_{\mathbf{K}}(A) \longrightarrow L$ *existiendo* γ *(esto es,* $a\gamma = a\Psi$ *para* $a \in A$*)* •

Si P es un C.O.P.O., entonces $F_{\mathbf{K}}(P)$ es una red libre sobre $\mathbf{K}$ generada por P, donde P es considerado una red parcial como en el Lema 5.5.

Esta teoría es desarrollada exactamente como la que se hizo en la primera parte de esta sección. El resultado final es:

TEOREMA 5.6

Sea $U = (A;\wedge,\vee)$ *una red parcial y sea* $\mathbf{K}$ *una clase ecuacional. Entonces* $F_{\mathbf{K}}(U)$ *existe si y solo si existe una red* L *en* $\mathbf{K}$ *tal que* U *es una sub red relativa de* L •

Como una aplicación probaremos la existencia de la red absolutamente libre generada por un C.O.P.O.

Sea P un C.O.P.O.; definimos una red parcial P^m sobre P como sigue:

$x \wedge y = z$ en P^m si y solo si x,y son comparables y
  $z = \inf\{x,y\}$;

$x \vee y = z$ en P^m si y solo si x,y son comparables y
  $z = \sup\{x,y\}$ •

DEFINICION 5.8

$F(P^m)(= F_{\mathbf{L}}(P^m))$ *es llamada una red absolutamente libre generada por* P •

TEOREMA 5.7

Para un C.O.P.O. P, una red absolutamente libre generada por P existe .

PRUEBA

Un subconjunto $A \subseteq P$ es llamado hereditario si $x \in A$ y, $y \leq x$ implica que $y \in A$. Sea $H(P)$ el conjunto de todos los subconjuntos hereditarios de P parcialmente ordenados por la inclusión de conjuntos. Sea $P_1 = H(P)$, $P_2 = H(\tilde{P}_1)$, donde $\tilde{P}_1$ es el dual de P_1. P_2 es una red donde para $B, C \in P_2$, $\inf\{B,C\} = B \cap C$, $\sup\{B,C\} = B \cup C$, $B \cap C \neq \phi$ ya que $P \in B \cap C$.

Identificando $p \in P$ con $(p]$, conseguimos $P \subseteq P_1$; identificando $p \in P_1$ con $[p)$, conseguimos $P_1 \subseteq P_2$, así $P \subseteq P_2$. Sean $a,b,c \in P$:

(i) $\operatorname{Sup}\{a,b\} = b$ en P si y solo si $a \leq b$ en P
si y solo si $(a] \leq (b$ en P_1
si y solo si $(a] \geq (b]$ en $\tilde{P}_1$
si y solo si $[(a]) \leq [(b])$ en P_2.
si y solo si $\sup\{[(a]), [(b])\} = [(b])$

(ii) Si $\sup\{[(a]), [(b])\} = [(c])$ en P_2 con a y b incomparables en P, entonces $(a] \cup (b]$ $(\neq (c])$ es una cota su perior para $(a]$ y $(a]$, así sup $\{[(a]), [(b])\} < [(c])$ en P_2. Contradiciendo la hipótesis, de donde a y b deben ser comparables.

(iii) Si inf $\{[(a]), [(b])\} = [(c])$ en P_2 con a y b incomparables en P, $(c] \notin [(a])$, $(c] \notin [(b])$, $[(c]) \neq [(a]) \cup [(b])$. De donde a y b son comparables.

Por (i), (ii), (iii) se satisfacen las condiciones del Teorema 5.6, donde $U = P^m$ •

6. ELEMENTOS ESPECIALES

DEFINICION 6.1

Un cero de un C.O.P.O. P es un elemento 0 con $0 \leq x$ *para todo* $x \in P$*. Un uno 1 satisface* $x \leq 1$ *para todo* $x \in P$*. Existen a lo más un cero y un uno. Un C.O.P.O. acotado es uno que tiene a ambos elementos 0 y 1* •

DEFINICION 6.2

Un $\{0,1\}$*-homomorfismo (de una red acotada en otra) es un homomorfismo que mapea el cero en el cero, y el uno en el uno* •

DEFINICION 6.3

Una $\{0,1\}$*-sub red de una red acotada L, es una sub red conteniendo el 0 y 1 de L* •

DEFINICION 6.4

Un $\{0\}$*-homomorfismo (de una red acotada en otra) es un homomorfismo que mapea el cero en el cero* •

DEFINICION 6.5

Una {0}-sub red de una red acotada L, *es una sub red conteniendo el 0 de* L •

Para semiredes tenemos:

DEFINICION 6.6

Un {0,1}-homomorfismo (de una semired acotada en otra), es un homomorfismo que mapea el cero en el cero y el uno en el uno •

DEFINICION 6.7

Una {0,1}- sub semired de una semired acotada L, *es una semired conteniendo el 0 y 1 de* L •

De la misma forma podemos definir un {0}-homomorfismo y una {0}-sub semired.

DEFINICION 6.8

En una red acotada L, *a es complemento de* b *si* $a \wedge b = 0$ *y* $a \vee b = 1$ •

LEMA 6.1

En una red distributiva, un elemento puede tener solamente un complemento •

PRUEBA

Supongamos que existen dos complementos.

Sean b_0 y b_1 ambos complementos de a, entonces

$$
\begin{aligned}
b_0 = b_0 \wedge 1 = b_0 \wedge (a \vee b_1) &= (b_0 \wedge a) \vee (b_0 \wedge b_1) \\
&= 0 \vee (b_0 \wedge b_1) \\
&= (b_0 \wedge b_1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1 = b_1 \wedge 1 = b_1 \wedge (a \vee b_0) &= (b_1 \wedge a) \vee (b_1 \wedge b_0) \\
&= 0 \vee (b_1 \wedge b_0) \\
&= (b_1 \wedge b_0).
\end{aligned}
$$

De donde $b_0 = b_1$ •

DEFINICION 6.9

Sea $a \in [b,c]$*; x es un complemento relativo de a en* $[b,c]$ *si* $a \wedge x = b$, $a \vee x = c$ •

LEMA 6.2

En una red distributiva, si a tiene un complenento, enton-

ces tambien tiene un complemento relativo en un intervalo que la contenga •

PRUEBA

Sea d el complemento de a. Entonces $x = (d \vee b) \wedge c$ es el complemento relativo de a en $[b,c]$, puesto que para $b \leq a \leq c$ se tiene:

$$a \wedge x = a \wedge (d \vee b) \wedge c = [(a \wedge d) \vee (a \wedge b)] \wedge c$$
$$= (0 \vee d) \wedge c$$
$$= b$$

$$a \vee x = a \vee [(d \vee b) \wedge c] = (a \vee d \vee b) \wedge (a \vee c)$$
$$= 1 \wedge (a \vee c)$$
$$= c \quad \bullet$$

LEMA 6.3 (Identidades de Morgan's)

En una red distributiva, si a,b tienen complementos a' y b' respectivamente, entonces $a \wedge b$ y $a \vee b$ tienen complementos $(a \wedge b)'$ y $(a \vee b)'$, respectivamente, y

$$(a \wedge b)' = a' \vee b'$$
$$(a \vee b)' = a' \wedge b' \quad \bullet$$

PRUEBA

Por Lema 6.1 es suficiente probar que:

(i) $(a\wedge b) \wedge (a'\vee b') = 0$ y $(a\wedge b) \vee (a'\vee b') = 1$

(ii) $(a\vee b) \wedge (a'\wedge b') = 0$ y $(a\vee b) \vee (a'\wedge b') = 1$

verificando:

(i)
$$\begin{aligned}(a\wedge b) \wedge (a'\vee b') &= (a\wedge b\wedge a') \vee (a\wedge b\wedge b')\\ &= 0 \vee 0\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a\wedge b) \vee (a'\vee b') &= (a\vee a'\vee b') \wedge (b\vee a'\vee b')\\ &= 1 \wedge 1\\ &= 1\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}(a\vee b) \wedge (a'\wedge b') &= (a\wedge a'\wedge b') \vee (b\wedge a'\wedge b')\\ &= 0 \vee 0\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a\vee b) \vee (a'\wedge b') &= (a\vee b\vee a') \wedge (a\vee b\vee b')\\ &= 1 \wedge 1\\ &= 1 \quad \bullet\end{aligned}$$

DEFINICION 6.10

Una red complementada es una red acotada en la cual cada elemento tiene un complemento. Una red relativamente complementada es una red en la cual cada elemento tiene un comple *mento relativo en todo intervalo que lo contenga* •

DEFINICION 6,11

Una red Booleana es una red distributiva complementada •

Así, en una red Booleana B; cada elemento a tiene un único complemento, y B es también relativamente complementada.

DEFINICION 6,12

Un Algebra Booleana es una red Booleana en la cual 0,1 y, ' (complementación) son considerados como operaciones. Así en Algebra Booleana es un sistema $(B;\wedge,\vee,',0,1)$, *donde* $\wedge$, $\vee$ *son operaciones binarias, ' es una operación unaria.*

Un homomorfismo γ *preserva 0, 1 y '; esto es, él es un {0,1}-homomorfismo satisfaciendo* $(x\gamma)' = x'\gamma$.

Una sub algebra es un {0,1}-sub red cerrada bajo '. (B_2 *denotará el Algebra Booleana de dos elementos)* •

Notemos que en una red distributiva acotada L, si b es un complemento de a, entonces b es el más grande elemento x de L con $a\wedge x = 0$.

DEFINICION 6,13

Sea L *una red con* 0. *Un elemento* a^* *es un pseudocomplemento de* a (εL) *si* $a \wedge a^* = 0$ *y* $a \wedge x = 0$ *implica que* $x \leq a^*$ •

Un elemento puede tener a lo más un pseudocomplemento.

DEFINICION 6.14

Una red pseudocomplementada es una en la cual cada elemento tiene un pseudocomplemento •

El concepto de pseudocmplemento utiliza solamente la operación conjunción. Así también se puede definir semiredes pseudocomplementadas.

TEOREMA 6.1

Sea L *una semired conjunción pseudocomplementada y hagamos a* $S(L) = \{a^*/a \in L\}$. *Entonces el ordenamiento parcial de* L *se hereda a* S(L) *y hace a* S(L) *una red Booleana. Para* $a,b \in S(L)$ *tenemos* $a \wedge b \in S(L)$ *y la disyunción en* S(L) *es descrita por:* $a \vee b = (a^* \wedge b^*)^*$ •

Observación.

Sí L es una red, la disyunción en L no necesita ser la misma que la disyunción en S(L).

PRUEBA

Iniciaremos con las siguientes observaciones:

(1) $a \leq a^{**}$.

(2) $a \leq b$ implica que $a^* \geq b^*$.

(3) $a^* = a^{***}$.

(4) $a \in S(L)$ si y solamente si $a = a^{**}$.

(5) $a,b \in S(L)$ implica que $a \wedge b \in S(L)$.

(6) Para $a,b \in S(L)$, $\sup_{S(L)}\{a,b\} = (a^* \wedge b^*)^*$.

Las fórmulas (1) y (2) se siguen de las definiciones.

(3) Las fórmulas (1) y (2) producen $a^* \geq a^{***}$, y por (1) $a^* \leq a^{***}$.

(4) Si $a \in S(L)$, entonces $a = b^*$; además por (3), $a^{**} = b^{***} = b^* = a$. Recíprocamente, si $a = a^{**}$ entonces $a = b^*$ con $b = a^*$; así $a \in S(L)$.

(5) Si $a,b \in S(L)$, entonces $a = a^{**}$, $b = b^{**}$, y así $a \geq (a \wedge b)^{**}$ y $b \geq (a \wedge b)^{**}$, así $a \wedge b \geq (a \wedge b)^{**}$; por (1), $a \wedge b = (a \wedge b)^{**}$, de este modo $a \wedge b \in S(L)$.

Si $x \in S(L)$, $x \leq a$ y $x \leq b$, entonces $x \leq a \wedge b$; por lo tanto $a \wedge b = \inf_{S(L)}\{a,b\}$.

(6) $a^* \geq a^* \wedge b^*$, así por (2) y (4), $a \leq (a^* \wedge b^*)^*$; similarmente $b \leq (a^* \wedge b^*)^*$.

Si $a \leq x$, $b \leq x$ $(x \in S(L))$, entonces $a^* \geq x^*$, $b^* \geq x^*$

por (2); de este modo por (2) y (4), $(a^*\wedge b^*)^* \leq x$.

Por lo tanto para $a,b \in S(L)$, definimos

$a \vee b = (a^*\wedge b^*)^*$.

Por fórmula (5) y (6), $(S(L);\wedge,\vee)$ es una red complementada ya que para $a \in S(L)$, $a \vee a^* = (a^*\wedge a^{**})^* = 0^* = 1$, $a\wedge a^* = 0$, $S(L)$ es una red acotada.

Ahora necesitamos probar solamente que $S(L)$ es distributiva.

Para $x,y,z \in S(L)$, $x\wedge z \leq x \vee (y\wedge z)$ y $y\wedge z \leq x \vee (y\wedge z)$; además $x\wedge z \wedge (x \vee (y\wedge z))^* = 0$ y, $y\wedge z \wedge (x \vee (y\wedge z))^* = 0$ Así

$z \wedge (x \vee (y\wedge z))^* \leq x^*$ y y^*, así

$z \wedge (x \vee (y\wedge z))^* \leq x^*\wedge y^*$ consecuentemente

$z \wedge (x \vee (y\wedge z))^* \wedge (x^*\wedge y^*)^* = 0$, lo cual implica que

$z \wedge (x^*\wedge y^*)^* \leq (x \vee (y\wedge z))^{**}$.

Ahora la parte izquierda es $z \wedge (x\vee y)$ por fórmula (6) y el lado de la parte derecha es $x \vee (y\wedge z)$ por fórmula (4).

De este modo conseguimos $z\wedge(x\vee y) \leq x\vee(y\wedge z)$, lo cual es la distributividad por Lema 4.6 •

Otros tipos de elementos especiales son los siguientes:

DEFINICION 6.15

Un elemento a es un átomo si $a \succ 0$ y un átomo dual si $a \prec 1$; él es una disyunción irreducible si $a = b\vee c$ implica *que* $a = b$ *ó* $a = c$*; él es una conjunción irreducible si* $a = b \wedge c$ *implica que* $a = b$ *ó* $a = c$ •

DEFINICION 6.16

El C.O.P.O. $(Q;\leq)$ *se dice que satisface la condición de la cadena ascendente si cualquier cadena creciente termina, esto es, si* $x_i \in Q$*,* $i = 0,1,2,\ldots,$ *y* $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots,$ *entonces para algún m tenemos* $x_m = x_{m+1} = \ldots$ •

Es claro que la condición de la cadena ascendente implica la existencia de elementos maximales y que, en efecto, cada elemento está incluido en un elemento maximal.

TEOREMA 6.2

La condición de la cadena ascendente se cumple en una red L *si y solo si cada ideal de* L *es principal* •

PRUEBA

Supongamos que L cumple la condición de la cadena ascendente, y sea I un ideal de L, entonces I también cumple la condición de la cadena ascendente y así tiene un elemento maximal, de donde I es principal.

Recíprocamente si cada ideal de L es principal, entonces para una cadena $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$ podemos formar $H = \{x \leq x_i / i \in N\}$, $H = (a]$ con $a \in L$, así $a = x_i$, para algún $i \in N$, de donde x_i es un elemento maximal en la cadena •

CAPITULO II

REDES DISTRIBUTIVAS

7. TEOREMAS DE CARACTERIZACION Y DE REPRESENTACION.

Dos ejemplos típicos de redes no distributivas son M_5 y N_5 cuyos diagramas son dados en la figura 7.1.

El Teorema 7.1 es llamativo y útil para la caracterización de redes distributivas; el Teorema 7.2 es una versión más detallada del Teorema 7.1.

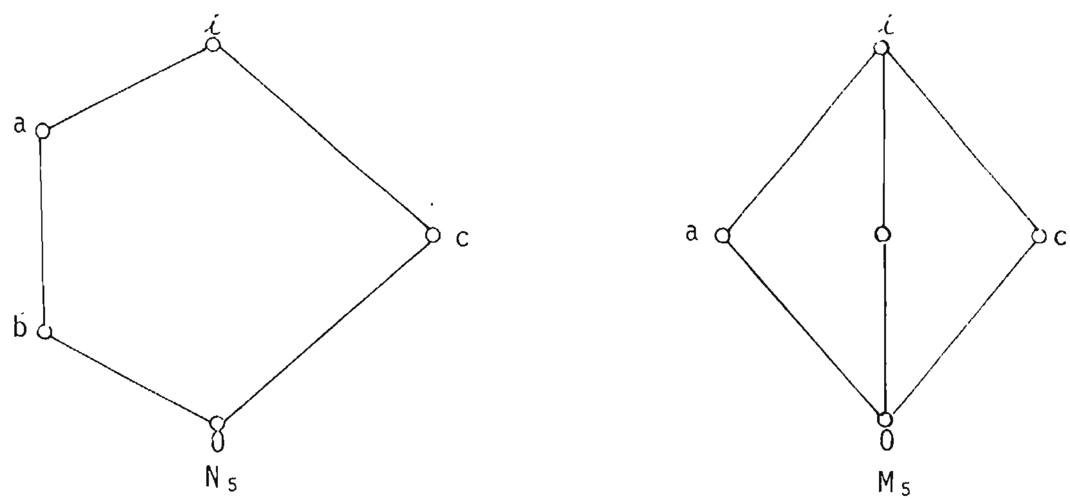


Figura 7.1

TEOREMA 7.1

Una red L es distributiva si y solo si en L no existe una sub red isomorfa a M_5 ó N_5 •

TEOREMA 7.2

(i) *Una red L es modular si y solo si en L no existe una sub red isomorfa a N_5*

(ii) *Una red modular L es distributiva si y solo si en L no existe una sub red isomorfa a M_5* •

PRUEBA

(i) Si L es modular, entonces cada sub red de L es modular; N_5 no es modular porque $a \geq b$, $(a \wedge c) \vee b = b$, $a \wedge (c \vee b) = a$, "fallando Lema 4.7". Así N_5 no puede ser isomorfa a una sub red de L.

Recíprocamente, sea L no modular, existen $a,b,c \in L$ con $a \geq b$ y $(a \wedge c) \vee b \neq a \wedge (c \vee b)$.

La red libre generada por a,b y c con $a \geq b$ es vista en la figura 2.3. Además la sub red de L generada por a,b y c debe ser una imagen homomórfica de la red de la figura 2.3, ya que esta última es la red más general que contiene a: a,b,c con $a > b$.

Observe que si algún par de elementos de los cinco $a \wedge c$, $(a \wedge c) \vee b$, $a \wedge (b \vee c)$, $b \vee c$, c son identificados bajo un isomorfismo, entonces así lo son $(a \wedge c) \vee b$ y $a \wedge (b \vee c)$; puesto que: si $c = b \vee c$ ó $c = (a \wedge c) \vee b$ ó $a \wedge c = (a \wedge c) \vee b$ entonces $c \geq b$,

$(a\wedge c)\vee b = a\wedge c \quad (a \geq b),\ a\wedge(b\vee c) = a\wedge c.$

Si se tiene $c = a\wedge c$ ó $c = a\wedge(b\vee c)$ ó $b\vee c = a\wedge(b\vee c)$ entonces $c \leq a$, como $a \geq b$, $a\wedge(b\vee c) = b\vee c = (a\wedge c)\vee b$.

Es claro que $a\wedge c \neq b\vee c$, $a\wedge c \neq a\wedge(b\vee c)$, $b\vee c \neq (a\wedge c)\vee b$.

Consecuentemente, esos cinco elementos son distintos en L, y ellos forman una sub red isomorfa a N_5.

(ii) Si L es una red distributiva, toda sub red de L es distributiva, M_5 no es distributiva ya que $a\wedge(b\vee c) = a$ y $(a\wedge b) \vee (a\wedge c) = 0$; así ninguna sub red de L puede ser isomorfa a M_5.

Recíprocamente, sea L modular, pero no distributiva, y escojamos $x,y,z \in L$ tal que
$x\wedge(y\vee z) \neq (x\wedge y) \vee (x\wedge z)$.

La red libre modular generada por x,y,z es vista en la figura 5.7. Por inspección del diagrama vemos que; u, x_2, y_1, z_1, v forman una sub red isomorfa a M_5. Pero la red de la figura 5.7 es la más general.

Así la sub red de L generada por x,y,z debe ser imagen homomórfica de la red más general. Sea γ ese homomorfismo, $u\gamma$, $x_2\gamma$, $y_1\gamma$, $z_1\gamma$, $v\gamma$ es una sub red de L, puesto que el homomorfismo preserva la estructura de red.

Así por Teorema 3.2, $u\gamma$, $x_2\gamma$, $y_1\gamma$, $z_1\gamma$, $v\gamma$ es isomorfa a una adecuada red cociente de M_5.

Pero M_5 tiene solamente dos redes cocientes M_5 y la red de un elemento, ya que si $i \equiv 0\ (\Theta)$; $a,b,c,i,0$ están en la misma clase, ya que $[i]\Theta$ es convexo. Si $a \equiv b(\Theta)$, $a \wedge b \equiv a \vee b(\Theta)$ por "Lema 3.5", $i \equiv 0\ (\Theta)$, y de la misma manera en los demás casos.

Si es isomorfa a M_5 hemos finalizado la prueba. Ahora si u, x_1, y_1, z_1, v forman una red isomorfa a un elemento, $u = v$, $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) = (x\ y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z)$ entonces $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (ver figura 5.7) contrario a nuestra hipótesis •

COROLARIO 7.1

Una red L es distributiva si y solo si cada elemento tiene a lo más un complemento relativo en un intervalo •

PRUEBA

La afirmación: Si una red L es distributiva entonces cada elemento tiene a lo más un complemento relativo en un intervalo (una sub red), ya fue probada en Lema 6.1.

Recíprocamente, si L es no distributiva, un intervalo de L es distributivo (un intervalo es una sub red), entonces por Teorema 7.2, él contiene a N_5 ó M_5, y cada uno tiene un elemento con dos complementos relativos en el intervalo •

COROLARIO 7.2

Una red L *es distributiva si y solo si para cualquier par* I, J *de ideales de* L:

$$I \vee J = \{i \vee j / i \in I,\ j \in J\} \quad \bullet$$

PRUEBA

Sea L distributiva. Por Lema 3.1 (ii), si $t \in I \vee J$, entonces $t \leq i \vee j$ para algún $i \in I$, $j \in J$. Por lo tanto, $t = (t \wedge i) \vee (t \wedge j)$ con, $t \wedge i \in I$, $t \wedge j \in J$.

Recíprocamente, si L es no distributiva, entonces L contiene elementos a,b,c como en la figura 7.1.

Sea $I = (b]$ y $J = (c]$; observe que $a \in I \vee J$, ya que $a \leq b \vee c$. Sin embargo, a no tiene representación como es requerida por Corolario 7.2, además si $a = i \vee j$, $i \in I$, $j \in J$, entonces $j \leq a$, $j \leq c$. Además $j \leq a \wedge c < b$ así $j \in I$, y también $a = i \vee j \in I$, una contradicción ya que $a > b$ $\bullet$

Otra propiedad importante de ideales de una red distributiva es:

LEMA 7.1

Sean I *y* J *ideales de una red distributiva* L. *Si* $I \wedge J$ *y* $I \vee J$ *son principales, entonces así lo son* I *y* J $\bullet$

PRUEBA

Sean $I \wedge J = (x]$ y $I \vee J = (y]$.

En el caso que $I \subseteq J$ ó $J \not\subseteq I$ la prueba es obvia.

Supongamos que $I \not\subseteq J$ y $J \not\subseteq I$. Entonces $y = i \vee j$ para algún $i \in I$, $j \in J$. Sean $c = x \vee i$ y $I = (c]$, $J = (b]$. Realmente si por ejemplo, $J \neq (b]$, entonces existe un $a \not\leq b$, $a \in J$. Si $a \vee b < y$, $\{x, a \vee b, b, c, y\}$ forma un N_5. Si $a \vee b = y$, $I \subseteq J$, contradiciendo lo supuesto •

TEOREMA 7.3

Sea L una red distributiva y sea $a \in L$.

Entonces el mapeo

$$\gamma : x \to \langle x \wedge a \; , \; x \vee a \rangle, \; x \in L.$$

es una inmersión de L en $(a] \times [a)$; esto es un isomorfismo si a tiene un complemento •

PRUEBA

$(a] \times [a)$ es una red. Si $(x \wedge a,\ x \vee a) \neq (y \wedge a,\ y \vee a)$, $x \wedge a \neq y \wedge a$ ó $x \vee a \neq b \vee a$, así $x \neq y$. γ está bien definida. Si $(x \wedge a,\ x \vee a) = (y \wedge a,\ y \vee a)$ tenemos que $x \neq y$, porque de otra manera, $x \wedge a$, $x \vee a$, a, x, y forman un M_5. De donde γ es inyec tivo. Ahora

$$(x\vee y)\gamma = ((x\vee y)\wedge a,\ (x\vee y)\vee a) = ((x\wedge a)\vee(y\wedge a),\ (x\vee a)\vee(y\vee a))$$
$$= (x\wedge a,\ x\vee a)\vee(y\wedge a,\ y\vee a)$$
$$= x\gamma \vee y\gamma$$
$$(x\wedge y)\gamma = ((x\wedge y)\wedge a,\ (x\wedge y)\vee a) = ((x\wedge a)\wedge(y\wedge a),\ (x\vee a)\wedge(y\vee a))$$
$$= (x\wedge a,\ x\vee a)\wedge(y\wedge a,\ y\vee a)$$
$$= x\gamma \wedge y\gamma.$$

Por tanto γ es un homomorfismo.

Si a tiene un complemento, b y $(u,v) \in (a] \times [a)$, entonces para $x = (u\vee b)\wedge v$,

$$x\gamma = ((u\vee b)\wedge v\wedge a,\ ((u\vee b)\wedge v)\vee a)$$
$$= (((u\wedge a)\vee(b\wedge a))\wedge v,\ (u\vee b\vee a)\wedge(v\vee a))$$
$$= ((u\vee(b\wedge a)\wedge v,\ (u\vee b\vee a)\wedge v) \text{ ya que } u\in(a],\ v\in[a)$$
$$= (u\wedge v, v) \text{ ya que b es el complemento de a.}$$
$$= (u,v).$$

En este caso γ es un isomorfismo •

Iniciaremos la investigación detallada de la estructura de redes distributivas en el caso finito.

DEFINICION 7.1

Para una red distributiva L, *con* J(L) *denotemos el conjunto de todos los elementos no cero disyunción irreducible, visto como un* C.O.P.O. *bajo el ordenamiento parcial de* L. *Para*

$a \varepsilon L$ sea

$$r(a) = \{x / \ x \leq a, \ x \in J(L)\} \quad \bullet$$

DEFINICION 7.2

Para un C.O.P.O. P, llamemos a $A \subseteq P$ hereditario si $x \in A$, $y \leq x$ implica que $y \in A$. Con $H(P)$ denotemos el conjunto de todos los subconjuntos hereditarios parcialmente ordenados por inclusión •

Note que H(P) es una red en la cual, conjunción y disyunción son intersecciones y uniones, respectivamente, y así H(P) es distributivo. La estructura de redes distributivas finitas es revelada por el siguiente resultado:

TEOREMA 7.4

Sea L una red distributiva finita. Entonces el mapeo

$$\gamma: a \longrightarrow r(a)$$

es un isomorfismo entre L y H(J(L)) •

PRUEBA

Veamos que $a = \vee r(a)$.

Si $a \in J(L)$ es claro. Si $a \notin J(L)$ y $a = a_1 \vee r(a)$ con $a_1 < a$.

Si $a_1 \notin J(L)$, $a_1 = a_2 \vee r(a)$ con $a_2 < a_1$, como L es finito, $a_n \in J(L)$ para algún n, $a_n = Vr(a_n)$.

$a_{n-1} = a_n \vee Vr(a_{n-1}) = Vr(a_n) \vee Vr(a_{n-1}) = Vr(a_{n-1})$, y así obtenemos $a = Vr(a)$.

El hecho que $a = Vr(a)$, verifica que γ es inyectivo. Obviamente, $r(a) \cap r(b) = r(a \cap b)$, y así $(a \wedge b)\gamma = a\gamma \wedge b\gamma$.

La fórmula $(a \vee b)\gamma = a\gamma \vee b\gamma$ es equivalente a $r(a \vee b) = r(a) \cup r(b)$.

Verificamos esta fórmula, notemos que $r(a) \cup r(b) \subseteq r(a \vee b)$ es obvio. Ahora sea $x \varepsilon r(a \vee b)$; entonces
$x = x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b)$; además, $x = x \wedge a$ ó $x = x \wedge b$, puesto que x es disyunción irreducible. Así $x \varepsilon r(a)$ ó $x \varepsilon r(b)$, esto es, $x \varepsilon r(a) \cup r(b)$.

Finalmente, tenemos que probar que si $A \varepsilon H(J(L))$, entonces $a\gamma = A$ para algún $a \varepsilon L$. Sea $a = V A$; entonces $r(a) \supseteq A$ es obvio. Sea $x \varepsilon r(a)$: entonces
$x = x \wedge a = x \wedge V A = V (x \wedge y / y \varepsilon A)$. Así $x = x \wedge y$ para algún $y \varepsilon A$, implicando que $x \varepsilon A$, ya que A es hereditario •

COROLARIO 7.3

La correspondencia $L \to J(L)$ *hace la clase de todas las redes distributivas finitas corresponder a la clase de todos los C.O.P.O.S finitos; redes isomorfas corresponder a*

C.O.P.O.S isomorfos, y viceversa $\bullet$

PRUEBA

Sean L_1, L_2 dos redes distributivas finitas, con $L_1 \cong L_2$, y formemos los C.O.P.O.S $P_1 = J(L_1)$, $P_2 = J(L_2)$, es claro que $P_1 \cong P_2$.

Recíprocamente; sean los C.O.P.O.S P_1, P_2 tal que $P_1 \cong P_2$, así $H(P_1) \cong H(P_2)$, pero $H(P_1)$, $H(P_2)$ son ambas redes distributivas con $J(H(P_1)) = J(H(P_2)) = P_1 = P_2$ $\bullet$

DEFINICION 7.3

Un subconjunto S *de* P(A) *es llamado un anillo de conjuntos si* $X, Y \in S$ *implica que* $X \cap Y$ $X \cup Y \in S$ $\bullet$

Ya que $H(J(L))$ es un anillo de conjuntos, obtenemos:

COROLARIO 7.4

Una red finita es distributiva si y solo si es isomorfa a un anillo de conjuntos $\bullet$

PRUEBA

Un anillo de conjuntos es una sub red de P(A), así es distributivo. Si una red L es isomorfa a un anillo de conjuntos esta es distributiva.

Recíprocamente, si una red L es distributiva, se tiene $L \cong H(J(L))$, con $H(J(L))$ un anillo de conjuntos •

Si el C.O.P.O. Q es no ordenado, $H(Q) = P(Q)$; si B es Booleana, $J(B)$ es el conjunto de todos los átomos, porque si $c >$ átomo (a), c tiene un complemento relativo en $[a, c \vee a]$, así $c \notin J(B)$. Además $J(B)$ es no ordenado. Así conseguimos:

COROLARIO 7.5

Una red finita es Booleana si y solo si es isomorfa a la red Booleana de todos los subconjuntos de un conjunto finito •

PRUEBA

$B \cong H(J(B)) = P(J(B))$ •

DEFINICION 7.4

Una representación $a = x_0 \vee \ldots \vee x_{n-1}$ *es redundante si* $a = x_0 \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \ldots \vee x_{n-1}$, *para algún* $0 \leq i < n$; *es otro caso es irredundante* •

COROLARIO 7.6

Cada elemento de una red distributiva finita tiene una única representación irredundante como una disyunción de elementos disyunción - irreducible •

PRUEBA

$a = r(a)$, $a = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$, si $x_i < x_j$, para algún i,j. Eliminemos x_i, y reordenando los subíndices obtenemos:

$$a = x_1 \vee \ldots \vee x_m.$$

Así x_i ocurre en cada representación si y solo si x_i es un elemento maximal de $r(a)$. Ninguno de los elementos maximales x_i puede ser quitado, porque entonces

$a = x_1 \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \ldots \vee x_n \not\geq x_i$, contrario a lo supuesto que $x_i \in r(a)$. De aquí la unicidad de la representación •

Una cadena finita de n elementos se dice que es de longitud n-1.

COROLARIO 7.7

Cada cadena maximal C *de la red distributiva finita* L *es de longitud* $|J(L)|$ •

PRUEBA

Para $a \in J(L)$, sea $m(a)$ el más pequeño miembro de C conteniendo a. Entonces $a \longrightarrow m(a)$ es un mapeo uno a uno de $J(L)$ sobre los no cero elementos de C. Ya que, si $m(a) = m(b)$, $m(a) \succ x$, y $x \in C$, entonces $x \vee a = x \vee b$; así, $a = (a \wedge x) \vee (a \wedge b)$, implicando que $a \leq x$ ó $a \leq b$. Pero $a \leq x$ implica que $m(a) \leq x < m(a)$, una contradicción. Consecuentemente, $a \leq b$; similarmente, $b \leq a$; así $a = b$. Sea $y \in C$, $y \succ z$, $z \in C$. Entonces $r(y) \supset r(z)$, y así $y = m(a)$ para un $a \in r(y) - r(z)$ •

TEOREMA 7.5

a es disyunción irreducible si y solo si $L-[a)$ *es un ideal primo* •

PRUEBA

$L - [a) = \{x \in L \; x \not\geq a\}$.

Supongamos que a es disyunción irreducible, sean $b, c \in L - [a)$, $b \neq c$, es claro que $b \wedge c \in L - [a)$, si $b \vee c \in [a)$, $a = (b \vee c) \wedge a = (b \wedge a) \vee (c \wedge a)$, así a no es disyunción irreducible, o sea que $b \vee c \in L - [a)$; de donde $L - [a)$ es una red. Para un $x \leq y$, con $y \in L - [a)$, $x \notin [a)$ así $x \in L - [a)$. Si $x \wedge y \in L - [a)$, $x \in L - [a)$ ó $y \in L - [a)$, ya que $[a)$ es cerrado con $\wedge$. Por lo anterior $L - [a)$ es un ideal primo.

Recíprocamente, si $L - [a)$ es un ideal primo, y $a = b \vee c$, con $b \neq a$ y $c \neq a$, así $b \notin [a)$, $c \in [a)$, $b \in L - [a)$, $c \in L - [a)$, como $L - [a)$ es una red, $b \vee c \in L - [a)$, $a \in L - [a)$; así a tiene que ser disyunción irreducible •

TEOREMA 7.6 (M.H. Stone)

Sea L *una red distributiva, sea* I *un ideal, sea* D *un ideal dual de* L*, y sea* $I \cap D = \phi$*. Entonces existe un ideal primo* P *de* L *tal que* $P \supseteq I$ *y* $P \cap D = \phi$ •

PRUEBA

Una de las formas del axioma de elección es necesaria para la prueba de este Teorema. La forma más conveniente para este caso es:

LEMA DE ZORN

Sea A *un conjunto y sea* X *un subconjunto no vacío de* $P(A)$*. Asumamos que* X *tiene la siguiente propiedad: si* $C \subseteq X$ *y* C *es una cadena (esto es, para cualquier* $X, Y \in C$ *se tiene* $X \subseteq Y$ *ó* $Y \subseteq X$*), entonces* $\cup(X/X \in C) \in X$*.*

Entonces X *tiene un elemento maximal (esto es, un* $M \in X$ *tal* *que* $M \subseteq X$ *y* $X \in \mathcal{X}$ *implica que* $M = X$) $\bullet$

PRUEBA

Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de todos los ideales de L que contienen a I y que son disjuntos de D. Tenemos que verificar que $\mathcal{X}$ satisface la hipótesis del Lema de Zorn.

Ya que $I \in \mathcal{X}$, concluimos que $\mathcal{X}$ es no vacío. Sea C una cadena en $\mathcal{X}$ y sea $M = \cup(X/X \in C)$. Si $a,b \in M$, entonces $a \in X$, $b \in Y$ para algún $X,Y \in C$; ya que C es una cadena, se tiene que $X \subseteq Y$ ó $Y \subseteq X$; si, decimos, $X \subseteq Y$, entonces $a,b \in Y$, y así $a \vee b \in Y \subseteq M$, ya que Y es un ideal. También si $a \in M$ y $b \leq a$, $a \in X$ para algún X, $b \in X$ ya que X es un ideal. Así M es un ideal. Es claro que $I \subseteq M$ y $M \cap D = \phi$, verificando que $M \in \mathcal{X}$. Además por el Lema de Zorn, $\mathcal{X}$ tiene un elemento maximal, digamos, P. Afirmamos que P es un ideal primo. Realmente si P no es primo, existen $a,b \in L$ tal que $a,b \notin P$ con $a \wedge b \in P$. A causa de la maximilitud de P, $(P \vee (a]) \cap D \neq \phi$, $(P \vee (b] \cap D \neq \phi$. Así existen $p \vee a \in D$, $q \vee b \in D$, $p,q \in P$. Entonces $x = (p \vee a) \wedge (q \vee b) \in D$, puesto que D es un ideal dual. También, $x = (p \wedge q) \vee (p \wedge b) \vee (a \wedge q) \vee (a \wedge b) \in P$; ya que L es distributiva; así $P \cap D \neq \phi$, una contradicción $\bullet$

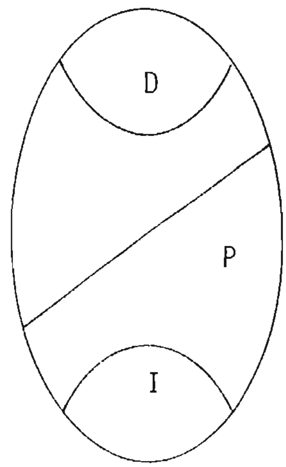


Figura 7.2

COROLARIO 7.7

Sea L *una red distributiva, sea* I *un ideal de* L, *y sea* $a \in L$, *y* $a \notin I$. *Entonces existe un ideal primo* P *tal que* $P \supseteq I$, *y* $a \in P$ •

PRUEBA

Aplicar Teorema 7.6 a I y $D = [a)$ •

COROLARIO 7.8

Sea L *una red distributiva,* $a, b \in L$, $a \neq b$. *Entonces existe un ideal primo conteniendo exactamente a uno de los dos* •

PRUEBA

Si $a > b$, $[a) \cap (b] = \phi$. Si $a < b$, $(a] \cap [b) = \phi$. Si a y b son incomparables, cualquiera de los dos casos anteriores es posible •

COROLARIO 7.9

Cada ideal I de una red distributiva es la intersección de todos los ideales primos que lo contienen •

PRUEBA

Sea $I_1 = \cap(P/P \supseteq I;\ P$ es ideal primo de $L)$.

Si $I \neq I_1$, entonces existe un $a \in I_1 - I$, y así por Corolario 7.7 existe un ideal primo P, con $P \supseteq I$, $a \notin P$. Pero entonces $a \notin P \supseteq I_1$, lo cual es una contradicción •

TEOREMA 7.7 (G. Berkhoff y M.H. Stone)

Una red es distributiva si y solo si es isomorfa a un anillo de conjuntos •

PRUEBA

Sea L una red distributiva y sea X el conjunto de todos los ideales primos de L. Para $a \in L$ sea

$$r(a) = \{P/a \notin P, P \in X\}.$$

Los $r(a)$ con $a \in L$ forman un anillo de conjuntos, puesto que para b,c L, $b \neq c$, se tiene:
$r(b) \in P(X)$. $b \wedge c \notin r(b) \cap r(c)$, ya que cada elemento de esta intersección no contiene a, b y c, así
$r(b) \cap r(c) \subseteq r(b \wedge c)$. También b no pertenece a cada elemento de $r(b \wedge c)$, c no pertenece a cada elemento de $r(b \wedge c)$, así
$r(b \wedge c) \subseteq r(b) \cap r(c)$; por lo tanto $r(b \wedge c) = r(b) \cap r(c)$.

Ahora sea P un ideal primo tal que $P \in r(b \vee c)$, $b \vee c \notin P$, b y c no pertenecen al mismo tiempo a P, y entonces $P \in r(b)$ ó $P \in r(c)$, $r(b \vee c) \subseteq r(b) \cup r(c)$; es claro que $r(b) \subseteq r(b \vee c)$ y $r(c) \subseteq r(b \vee c)$, de donde $r(b) \cup r(a) \subseteq r(b \vee c)$, y obtenemos $r(b \vee c) = r(b) \cup r(c)$.

Ahora si hacemos la función $a \longrightarrow r(a)$ entre L y
$P_a = \{r(a), a \in L\}$, $P_a \subseteq P(X)$, es claro que está bien definida, es un homomorfismo y es sobreyectiva. Veamos inyectividad, sean $a, b \in L$, $a \neq b$, por Corolario 7.8 existe un ideal primo P tal que P contiene solamente uno de los dos, así $r(a) \neq r(b)$.

Recíprocamente si L es isomorfa a un anillo de conjuntos L es distributiva •

Este resultado tiene un Corolario muy usado:

COROLARIO 7.10

Sea L una red distributiva con más de un elemento. Una identidad se cumple en L si y solo si se cumple en los dos elementos encadenados, C_2 •

PRUEBA

Supongamos que p = q se cumple en L. Puesto que $|L| > 1$, C_2 es una sub red de L, y p = q se cumple en C_2.

Recíprocamente, supongamos que p = q se cumple en C_2. Nótese que $C_2 = P(X)$, con $|X| = 1$, y P(A) es isomorfa a la potencia directa $P(X)^{|A|}$. Por esto, p = q se cumple en cualquier P(A). Por Teorema 7.7, L es una sub red de algún P(A); así p = q se cumple en L •

Podemos reformular el Teorema 7.7 usando el concepto de campo de conjuntos.

DEFINICION 7.5

Un campo de conjuntos es un anillo de conjuntos cerrado bajo la complementación •

COROLARIO 7.11 (M.H. Stone)

Una red es Booleana si y solo si es isomorfa a un campo de *conjuntos* •

PRUEBA

Ocupemos la representación del Teorema 7.7, sea $a \in L$, $P \in X$; se tiene que $a \in P$ ó $a' \in P$ puesto que $a \wedge a' = 0 \in P$ y P es primo. Si $a \in P$, $a' \notin P$ pues de otra manera $a \vee a' = 1 \in P$, o sea $P = L$, lo cual es una contradicción puesto que P es primo. De lo anterior $r(a') = X - r(a)$ y el isomorfismo del Teorema 7.7 preserva la complementación •

Con $\mathcal{P}(L)$ denotemos el conjunto de todos los ideales primos de L, visto como un C.O.P.O. bajo $\subseteq$. La importancia de $\mathcal{P}(L)$ es clara de los resultados previos. Interesantes propiedades de L influyen en $\mathcal{P}(L)$. Un importante resultado de este tipo es el siguiente:

TEOREMA 7.8 (L. Nachbin).

Sea L *una red distributiva con 0 y 1. Entonces* L *es Booleana si y solo si* $\mathcal{P}(L)$ *es no ordenado* •

PRUEBA

Sea L Booleana, $P, Q \in \mathcal{P}(L)$, $P \subset Q$. Escojemos $a \in Q - P$. Puesto que $a \in Q$, $a' \in Q$ (de lo contrario $Q = L$), y así

$a' \notin P$. Entonces $a, a' \notin P$, pero $a \wedge a' = 0 \in P$, una contradicción, probando que $P(L)$ es no ordenado.

Ahora sea $P(L)$ no ordenado y $a \in L$, asumamos que a no tiene complemento. Sea $D = \{x / a \vee x = 1\}$.

Entonces D es un ideal dual. Tomemos $D_1 = D \vee [a) = \{x / x \geq d \wedge a$, para algún $\in D\}$. El ideal dual D_1 no contiene al 0, puesto que $0 = d \wedge a$, $a \vee d = 1$; lo que significa que d es el complemento de a. Así existe un ideal primo P disjunto a D_1. Notemos que $1 \notin (a] \vee P$, de lo contrario $1 = a \vee p$ para algún $p \in P$, contradiciendo $P \cap D = \phi$. Así por Corolario 7.7 existe un ideal primo Q conteniendo a $(a] \vee P$; entonces $P \subset Q$, lo cual es una contradicción puesto que $P(L)$ es no ordenado •

TEOREMA 7.9 (J. Hashimoto).

Sea L una red distributiva con 0 y 1. Cada ideal tiene una única representación como una intersección de ideales primos si y solo si L es una red Booleana finita •

PRUEBA

Sea L una red Booleana finita, entonces P es un ideal si y solo si $P = (a]$, con $a \in L$. Si a es átomo dual y $b \wedge c \in (a]$, $(b \wedge c) \vee a = a$, $(b \vee a) \wedge (c \vee a) = a$, $b \vee a = 1$ ó $c \vee a = 1$, si

$b \vee a = 1$, $c \vee a = a$, $c \in (a]$, así $(a]$ es primo.

Ahora si $(y]$ es primo, por Teorema 7.8 $\mathcal{P}(L)$ es no ordenado, así y es átomo dual.

De lo anterior se obtiene que P es ideal primo si y solo si $P = (a]$ donde a es átomo dual.

$I(L)$ es una red; además sean $I_1, I_2 \in I(L)$, $I_1 = (b]$, $I_2 = (c]$, $(b] \wedge (c] = (b \wedge c]$, $(b] \vee (c] = (b \vee c]$, así $I(L)$ es distributiva, tambien $I(L)$ es finita. Por dual del Corolario 7.6, "Cada elemento de una red distributiva finita tiene una única representación irredundante como conjunción de elementos conjunción irreducible". Así cada ideal tiene una única representación como intersección de ideales primos.

Ahora si cada ideal de L tiene una única representación como una conjunción de ideales primos; veamos que $I(L)$ es Booleana.

Sea $I \in I(L)$, $J = \cap(P/P \in \mathcal{P}(L),\ P \not\supseteq I)$.

Entonces $I \wedge J = \cap(P/P \in \mathcal{P}(L)) = (0]$. Si $L \neq I \vee J$, entonces existe un ideal primo $P_0 \supseteq I \vee J$, y consecuentemente J tiene dos representaciones:

$$\cap(P/P \not\supseteq I) = P_0 \cap [\cap(P/P \not\supseteq I)].$$

Así $L = I \vee J$ y J es un complemento de I en $I(L)$. Además por Lema 7.1 cada ideal de L es principal; y obtenemos $L \cong I(L)$ y así L e $I(L)$ son ambos Booleanos. Por Teorema 6.2, L satisface la condición de la cadena ascendente; así cada elemento de L distinto a 1 está contenido en un átomo dual.

Puesto que el complemento de un átomo dual es un átomo (de otra manera se formaría un N_5), tomando complementos el átomo dual y al elemento, encontramos que cada elemento no cero de L contiene un átomo.

Si p_0, p_1, ... p_n, ... son distintos átomos en L, entonces la cadena ascendente p_0, $p_0 \vee p_1$, ..., $p_0 \vee p_1 \ldots \vee p_n$, ... no termina, y así L tiene un número de átomos finito, sean estos p_0, $p_1, \ldots, p_{n-1}$.

Hagamos $a = p_0 \vee \ldots \vee p_{n-1}$, si $a' \neq 0$, entonces a' no contiene un átomo, lo cual es imposible. Entonces $a' = 0$, $a = 1$, y $L \cong P(X)$, con $|X| = n$. ●

8. POLINOMIOS Y REDES LIBRES

Podemos introducir una relación de equivalencia $\equiv$ para polinomios de red: $p \equiv q$ si y solo si p y q definen la misma función en la clase de redes distributivas $\mathbf{D}$.

Más formalmente, si p y q son polinomios de red (ver sección 4), entonces $p \equiv q$ si y solo si, para cualquier red distributiva L y $a_0, a_1, \ldots \in L$, tenemos $p(a_0, \ldots) = q(a_0, \ldots)$. Para un polinomio de red n-ario p, con $[p]\mathbf{D}$ denotemos el conjunto de todos los polinomios de red n-arios q que satisfacen $p \equiv q$ y con $P_{\mathbf{D}}(n)$ denotemos el conjunto de todas esas clases de equivalencia, esto es, $P_{\mathbf{D}}(n) = \{[p]\mathbf{D} / p \in \mathbf{P}^{(n)}\}$. Observe que para $p, p_1, q, q_1 \in \underline{\mathbf{P}}^{(n)}$ si $p \equiv p_1$ y $q \equiv q_1$, entonces $p \wedge q \equiv p_1 \wedge q_1$ y $p \vee q \equiv p_1 \vee q_1$. Así $[p]\mathbf{D} \wedge [q]\mathbf{D} = [p \wedge q]\mathbf{D}$ y $[p]\mathbf{D} \vee [q]\mathbf{D} = [p \vee q]\mathbf{D}$ definen el $\wedge$ y el $\vee$ en $P_{\mathbf{D}}(n)$. Como el $\wedge$ y $\vee$ de $P_{\mathbf{D}}(n)$ se hereda del $\wedge$ y $\vee$ de L, es claro que $P_{\mathbf{D}}(n)$ es una red distributiva y $[p]\mathbf{D} \leq [q]\mathbf{D}$ si y solo si la desigualdad $p \leq q$ se cumple en la clase $\mathbf{D}$.

Con $Q(n)$ denotemos el C.O.P.O. de todos los subconjuntos no-vacios de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, este nos será útil para describir la estructura de $P_{\mathbf{D}}(n)$.

TEOREMA 8.1

(i) $P_{\mathbf{D}}(n)$ *es isomorfo con* $H(Q(n))$.

(*ii*) $P_{\mathbf{D}}(n)$ *es una red distributiva libre con n generadores.*

(*iii*) $2^n \leq |P_{\mathbf{D}}(n)| < 2^{2^n}$.

(*iv*) *Una red distributiva con un número finito de generadores es finita* •

PRUEBA

(i) Un polinomio de red p es llamado un polinomio conjunción si él es de la forma $x_{i_0} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}$.

Para $J \subseteq \{0,1, \ldots, n-1\}$, $J \neq \phi$, sea $p_J = \Lambda(x_i / i \in J)$.

Afirmamos que $[p_J]\mathbf{D} \leq [p_K]\mathbf{D}$ ($J,K \subseteq \{0,\ldots n-1\}$) si y solo si $J \supseteq K$. Si $J \supseteq K$, $[p_J]D \leq [p_K]\mathbf{D}$ es obvio.

Ahora supongamos $J \not\supseteq K$; entonces existe un $i \in K$ tal que $i \notin J$. Consideremos los dos elementos encadenados C_2 y sustituimos $x_i = 0$ y $x_j = 1$ para $j \neq i$.

Obviamente, $p_J = 1$ y $p_K = 0$; así la desigualdad $p_J \leq p_K$ falla en C_2 y además en $\mathbf{D}$.

Cada polinomio de red es equivalente a uno de la forma

$$Vp_J;$$

ya que cada x_i es de esta forma, la disyunción de dos de tales polinomios es de esta forma y lo mismo se cumple para la conjunción en vista de

$$Vp_{J_i} \wedge Vp_{K_j} \equiv V(p_{J_i} \wedge p_{K_j})$$

y $p_{J_i} \wedge p_{K_j} \equiv p_{J_i \cup K_j}$.

Seguidamente afirmamos que $[p]\mathbf{D}$ es disyunción - irreducible (en $P_{\mathbf{D}}(n)$) si y solo si él es un $[p_J]\mathbf{D}$.

Puesto que cada $[p]\mathbf{D} \in P_{\mathbf{D}}(n)$ es una disyunción de algunos $[p_J]\mathbf{D}$, es suficiente probar que cualquier $[p_J]\mathbf{D}$ es disyunción - irreducible. Sea

$$p_J \equiv V(p_{J_i} / i \in K,\ J_i \subseteq \{0, \ldots, n-1\});$$

$J \subseteq J_i$ se sigue de $[p_J]\mathbf{D} \geq [p_{J_i}]\mathbf{D}$. Ahora si $[p_J]\mathbf{D} > [p_{J_i}]\mathbf{D}$

para todo i, entonces tenemos $J \subset J_i$. Escojamos $j_i \in J_i$, $j_i \notin J$ para todo $i \in K$. En C_2 pongamos $x_k = 0$ para todo $K = j_i$ y $x_k = 1$ en otro caso. Entonces $p_J = 1$, y $V(p_{J_i} / i \in K) = 0$, lo cual es una contradicción.

Lo visto anteriormente muestra que los elementos disyunción - irreducible forman un C.O.P.O. isomorfo a $Q(n)$. Es claro que ninguno de estos elementos es cero, así según Teorema 7.4 $P_{\mathbf{D}}(n) \cong H(Q(n))$.

(ii) Es claro que los $[x_i]\mathbf{D}$ $0 \leq i < n$; son incomparables, y que $P_{\mathbf{D}}(n)$ cumple (i) - (iii) de la Definición 5.2. Ahora si L es una red distributiva $a_0, \ldots, a_{n-1} \in L$. Entonces el mapeo $[x_i]\mathbf{D} \longrightarrow a_i$ puede ser extendido puede ser extendido al homomorfismo

$$[p]\,\mathbf{D} \longrightarrow p(a_0, \ldots, a_{n-1}),$$

cumpliendo (iv) de la Definición 5.2, así $P_{\mathbf{D}}(n)$ es una red distributiva libre con n generadores.

(iii) $|Q(n)| = 2^n - 1$; $H(Q(n)) \geq 2^n$ ya que $\phi \in H(Q(n))$, $H(Q(n)) \leq 2^{2^n} - 1$ puesto que $H(Q(n)) \subseteq P(Q(n))$, y por (i) obtenemos:

$$2^n \leq |P_{\mathbf{D}}(n)| < 2^{2^n}$$

(iv) Se sigue de (ii) y (iii) •

Polinomios Booleanos son definidos exactamente como polinomios de red excepto que todas la operaciones $\wedge$, $\vee$, $'$, 0, 1 son usadas en la formación de polinomios.

Una definición formal es la misma que la Definición 4.1 con dos artículos agregados: Si p es un polinomio Booleano, así lo es p'; 0 y 1 son polinomios Booleanos. Un polinomio Booleano n-ario p define una función en n variables sobre un algebra Booleana B; $p(a_0, \ldots, a_{n-1})$ es definido imitando la Definición 4.2.

DEFINICION 8.1

Para los polinomios Booleanos p y q diremos que $p \equiv q$ si, para cualquier algebra Booleana B y $a_0, a_1, \ldots \in B$, tenemos $p(a_0, \ldots) = q(a_1, \ldots)$ •

Con $[p]\mathbf{B}$ denotaremos la clase de equivalencia conteniendo a p. Observe que $p \equiv q$ es equivalente a que la identidad $p = q$

se cumple en la clase $\mathbf{B}$ de todas las algebras Booleanas.

Con $P_{\mathbf{B}}(n)$ denotaremos el conjunto de todas las $[p]\mathbf{B}$, donde p es un polinomio Booleano n-ario. Facilmente vemos que

$[p]\mathbf{B} \wedge [q]\mathbf{B} = [p \wedge q]\mathbf{B}$,

$[p]\mathbf{B} \vee [q]\mathbf{B} = [p \vee q]\mathbf{B}$,

$([p]\mathbf{B})' = [p']\mathbf{B}$, $0 = [0]\mathbf{B}$, $1 = [1]\mathbf{B}$

definen las operaciones Booleanas en $P_{\mathbf{B}}(n)$, y así $P_{\mathbf{B}}(n)$ es un algebra Booleana.

TEOREMA 8.2

(i) $P_{\mathbf{B}}(n)$ *es isomorfo a* $(B_2)^{2^n}$

(ii) $P_{\mathbf{B}}(n)$ *es una algebra Booleana libre con n generadores.*

(iii) $|P_{\mathbf{B}}(n)| = 2^{2^n}$

(iv) *Un Algebra Booleana con un número finito de generadores es finita.*

PRUEBA

(i) Un polinomio Booleano es llamado atómico si es de la forma

$$x_0^{i_0} \wedge \ldots \wedge x_{n-1}^{i_{n-1}},$$

donde $i_j = 0$ ó 1, x^0 denota a x, x^1 denota a x'. Para cada $J \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$ existe un polinomio atómico p_J pa ra el cual $i_j = 0$ si y solo si $j \varepsilon J$.

La afirmación crucial es: $[p_{J_0}]\mathbf{B} \leq [p_{J_1}]\mathbf{B}$ si y solo si $J_0 = J_1$. Realmente, supongamos que $J_0 \neq J_1$. Hagamos la siguiente sustitución en B_2: $x_i = 1$ si $i \varepsilon J_0$, $x_i = 0$ si $i \notin J_0$; esto hace que $p_{J_0} = 1$, $p_{J_1} = 0$, contradiciendo que $[p_{J_0}]\mathbf{B} \leq [p_{J_1}]\mathbf{B}$.

Con B(n) denotemos el conjunto de todos los polinomios Booleanos que son equivalentes a uno de la forma $\bigvee(p_{J_i} / i \varepsilon k)$. Entonces B(n) es cerrado el $\vee$ y $\wedge$, puesto que

$$\bigvee p_{J_i} \wedge \bigvee p_{I_k} \equiv \bigvee(p_{J_i} \wedge p_{I_k}),$$

y $p_{J_i} \wedge p_{I_k} \equiv p_{J_k}$ si $J_i = I_k$, y $p_{J_i} \wedge p_{I_k} \equiv 0$ en otro caso.

Ahora probaremos por inducción sobre n que x_i, $x'_i \varepsilon B(n)$ para $i < n$. Para $n = 1$, x_0, x'_0 son polinomios atómicos, así x_0, $x'_0 \varepsilon B(1)$. Por inducción, supongamos que $x_0 \equiv \bigvee(p_{J_i} / i \varepsilon K)$, donde los p_{J_i} son polinomios atómicos (n-1) - arios; entonces

$x_0 \equiv x_0 \wedge (x_{n-1} \wedge x'_{n-1}) \equiv (x_0 \wedge x_{n-1}) \vee (x_0 \wedge x'_{n-1})$

$\quad \equiv \bigvee(p_{J_i} \wedge x_{n-1} / i \varepsilon K) \vee \bigvee(p_{J_i} \wedge x'_{n-1} / i \varepsilon K)$,

y similarmente para x'_0. Así x_0, $x'_0 \varepsilon B(n)$, y por simetria, x_i, $x'_i \varepsilon B(n)$ para todo $i < n$. Puesto que

$$(p_J)' \equiv \bigvee(x'_i / i \varepsilon J) \vee \bigvee(x_i / i \notin J),$$

concluimos que $(p_J)' \in B(n)$; de donde $B(n)$ es cerrado bajo $'$.

Así $B(n)$ es cerrado bajo $\wedge$, $\vee$, $'$, 0, 1. Puesto que $B(n)$ incluye todos los x_i, $i < n$, $B(n)$ es el conjunto de todos los polinomios Booleanos n-arios.

Consecuentemente, cada $[p]\mathbf{B}$ es disyunción de atómicos, los $[p]\mathbf{B}$ para p polinomios atómicos son no-ordenados y son en número 2^n, también los elementos de $(\mathcal{B}_2)^{2^n}$ de la forma $(1,0,\ldots 0)$, $(0,1,0,\ldots 0)$, ... $(0,0,\ldots,1)$ son no-ordenados, generan a $(\mathcal{B}_2)^{2n}$ y tienen un número de 2^n, implicando (i) y (iii).

(ii) Los $[x_i]\mathbf{B}$, $0 \leq i < n$, son incomprables, y $P_{\mathbf{B}}(n)$ cumple (i) - (iii) de la Definición 5.2 con $P = \{[x_i]\mathbf{B},\ 0 \leq i < n\}$. Ahora si L es una red Booleana, con $a_0, \ldots, a_{n-1} \in L$, entonces el mapeo $[x_i]\mathbf{B} \longrightarrow a_i$ puede ser extendido al homomorfismo

$$[p]\mathbf{B} \longrightarrow p(a_0,\ldots,a_{n-1})$$

cumpliendo (iv) de la Definición 5.2, si $P_{\mathbf{B}}(n)$ es una red Booleana libre sobre n generadores.

(iii) Ya fué probado en (i).

(iv) Se sigue de (iii) •

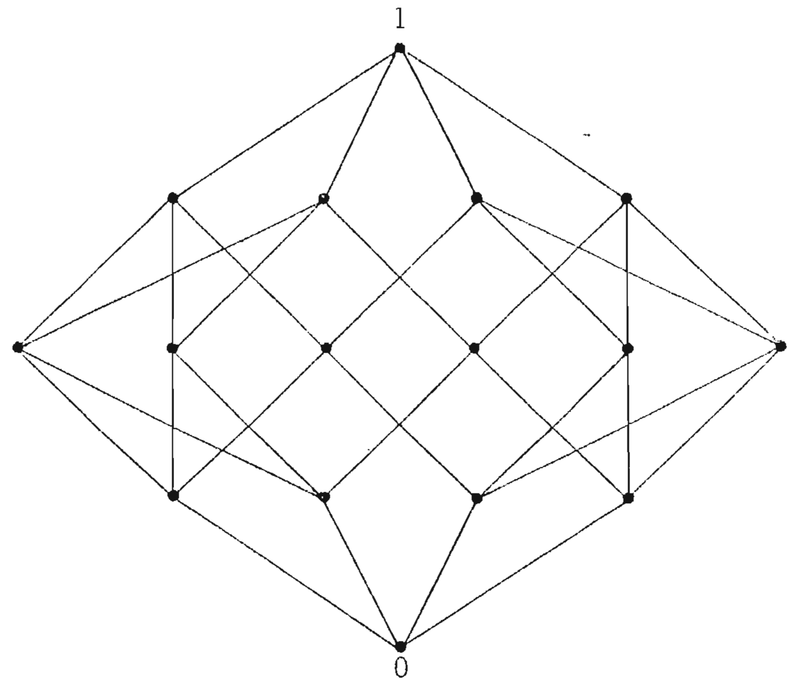


Figura 8.1

TEOREMA 8.3

Sea L una red distributiva generada por $\{a_i / i \in I\}$. *L es libremente generada por los* a_i *si y solo si la validez en L de una relación de la forma*

$$\wedge(a_i / i \in I_0) \leq \vee(a_i / i \in I_1)$$

implica que $I_0 \cap I_1 \neq \phi$, *para* I_0, I_1 *subconjuntos finitos no vacios de* I •

PRUEBA

Supongamos que L es libremente generada por $\{a_i / i \in I\}$ y que $\Lambda(a_i/i \in I_0) \leq V(a_i/i \in I_1)$ para I_0, I_1 subconjuntos finitos no vacíos de I.

Sea $n = |I_0 \cup I_1|$, es claro que $P_D(n) \cong [\{a_i/i \in I_0 \cup I_1\}]$ así existe un isomorfismo γ tal que

$$x_i\gamma = a_i, \quad i \in I_0 \cup I_1.$$

Pero si $I_0 \cap I_1 = \phi$, sustituyamos con $x_i = 1$ si $i \in I_0$ y $x_i = 0$ si $i \in I_1$, en:

$$\Lambda(x_i/i \in I_0)\ , \quad V(x_i/i \in I_1)$$

y así obtenemos $\Lambda(a_i/i \in I_0) > V(a_i/i \in I_1)$ lo cual es una contradicción, así que $I_0 \cap I_1 \neq \phi$.

Recíprocamente, sea F una red distributiva generada libremente por x_i, $i \in I$, y sea γ un homomorfismo de F en (de hecho, sobreyectivo) L satisfaciendo $x_i\gamma = a_i$ para $i \in I$. Es suficiente probar que para los polinomios de red p, q, $p\gamma \leq q\gamma$ implica que $[p]\mathbf{D} \leq [q]\mathbf{D}$. (Pensando en los elementos de F como clases de equivalencia de polinomios en los x_i, $i \in I$).

Sea

$$p \equiv V(\Lambda(x_i/i \in I_j)/j \in J)$$

$$\text{y} \quad q \equiv \Lambda(V(x_i/i \in K_t)/t \in T).$$

Entonces $p\gamma \leq q\gamma$ toma la forma

$$V(\Lambda(a_i/i \in I_j)j \in J) \leq \Lambda(V(a_i/i \in K_t)/t \in T),$$

lo cual es equivalente a:

$$\Lambda(a_i/i \in I_j) \leq V(a_i/i \in K_t)$$

para todo $j \in J$, $t \in T$. Por lo asumido esto implica que $I_j \cap K_t \neq \phi$ para todo $j \in J$, $t \in T$; así $\Lambda(x_i/i \in J_j) \leq V(x_i/i \in K_t)$ para todo $j \in J$, $t \in T$, implicando que $[p]\mathbf{D} \leq [q]\mathbf{D}$ •

TEOREMA 3.4

Sea B un algebra Booleana generada por $\{a_i/i \in I\}$. Entonces B es generada libremente por $\{a_i/i \in I\}$ si y solo si, siempre que I_0, I_1, J_0, J_1 sean subconjuntos finitos de I con $I_0 \cup I_1 = J_0 \cup J_1$ y $I_0 \cap I_1 = \phi$, entonces

$$\Lambda(a_i/i \in I_0) \wedge \Lambda(a'_i/i \in I_1)$$

$$\leq \quad \Lambda(a_i/i \in J_0) \wedge \Lambda(a'_i/i \in J_1)$$

implica que $I_0 = J_0$ y $I_1 = J_1$ •

PRUEBA

Supongamos que B es un algebra Booleana libremente generada por $\{a_i/i \in I\}$, además que I_0, I_1, J_0, J_1 son subconjuntos finitos con $I_0 \cup I_1 = J_0 \cup J_1$, y $I_0 \cap I_1 = \phi$, entonces $\Lambda(a_i/i \in I_0) \wedge \Lambda(a'_i/i \in I_1) \leq \Lambda(a_i/i \in J_0) \wedge \Lambda(a'_i/i \in J_1)$. Entonces $[\{a_i/i \in I_0 \cup I_1\}] \cong P_{\mathbf{B}}(|I_0 \cup I_1|)$, y existe un isomorfismo γ tal que $a_i\gamma = x_i$. De aquí obtenemos que:

$$\Lambda(x_i / i \in I_0) \wedge \Lambda(x'_i / i \in I_1)$$
$$\leq \quad \Lambda(x_i / i \in J_0) \wedge \Lambda(x'_i / i \in J_1)$$

y por Teorema 8.2 esto implica que $I_0 = J_0$ y $I_1 = J_1$.

Sobre la otra parte, claramente B es generada libremente por $\{a_i / i \in I\}$ si y solo si, para cada subconjunto finito $\bar{I}$ de I, la sub algebra $[\{a_i / i \in \bar{I}\}]$ es generada libremente por $\{a_i / i \in \bar{I}\}$.

Por Teorema 8.2, lo último se cumple si y solo si $[\{a_i / i \in \bar{I}\}]$ tiene $2^{2^{|\bar{I}|}}$ elementos, lo cual, es equivalente a que $[\{a_i / i \in \bar{I}\}]$ tenga $2^{|\bar{I}|}$ átomos.

Usando la prueba del Teorema 8.2 y la presente hipótesis para $I_0 \cup I_1 = \bar{I}$, vemos que los elementos de la forma $\Lambda(a_i / i \in I_0) \wedge \Lambda(a'_i / i \in I_1)$, donde $I_0 \cup I_1 = \bar{I}$ y $I_0 \cap I_1 = \phi$, son átomos distintos en $[\{a_i / i \in \bar{I}\}]$, esto completa la prueba •

TEOREMA 8.5

Sea el algebra Booleana B generada por la sub algebra B_1 y el elemento a. Sea B_2 un algebra Booleana y sea γ un homomorfismo de B_1 en B_2.

Las extensiones de γ *a homomorfismos de* B *en* B_2 *están en correspondencia uno - a - uno con los elementos* p *de* B_2 *que satisfacen las siguientes condiciones:*

(*i*) *Si* $x \in B_1$, $x \leq a$, *entonces* $x\gamma \leq p$.

(*ii*) *Si* $x \in B_1$, $x \geq a$, *entonces* $x\gamma \geq p$ •

Para prepararnos para la prueba de este Teorema verificaremos un Lema, en el cual + denota la diferencia simétrica; esto es

$$x + y = (x' \wedge y) \vee (x \wedge y').$$

LEMA 8.1

Sea B *el algebra Booleana generada por la sub algebra* B_1 *y el elemento* a. *Entonces cada elemento* x *de* B *puede ser representado en la forma*

$$x = (a \wedge x_0) \vee (a' \wedge x_1), \quad x_0, x_1 \in B_1.$$

Esta representación no es única. De hecho,

$$(a \wedge x_0) \vee (a' \wedge x_1) = (a \wedge y_0) \vee (a' \wedge y_1), \quad x_0, x_1, y_0, y_1 \in B_1$$

si y solo si $a \leq (x_0 + y_0)'$ *y* $x_1 + y_1 \leq a$ •

PRUEBA

Con B_0 denotemos el conjunto de todos los elementos de B

que tienen una tal representación. Si $x \in B_1$,
$x = x \wedge 1 = x \wedge (a \vee a') = (x \wedge a) \vee (x \wedge a')$; así $B_1 \subseteq B_0$. También

$$a = (a \wedge 1) \vee (a' \wedge 0),$$

así $a \in B_0$. Entonces, para probar que $B_0 = B$, es suficiente verificar que B_0 es una sub algebra. Veamos esto, tomemos $y, z \in B_0$:

$y = (a \wedge y_0) \vee (a' \wedge y_1)$, $z = (a \wedge z_0) \vee (a' \wedge z_1)$ con $y_0, y_1, z_0, z_1 \in B_1$.

$$\begin{aligned} y \vee z &= [(a \wedge y_0) \vee (a \wedge z_0)] \vee [(a' \wedge y_1) \vee (a' \wedge z_1)] \\ &= [a \wedge (y_0 \vee z_0)] \vee [a' \wedge (y_1 \vee z_1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \wedge z &= [(a \wedge y_0) \wedge (a \wedge z_0)] \vee [(a' \wedge y_1) \wedge (a' \wedge z_1)] \\ &= [a \wedge (y_0 \wedge z_0)] \vee [a' \wedge (y_1 \wedge z_1)]. \end{aligned}$$

De donde $y \vee z, y \wedge z \in B_0$.

Ahora notemos que para $p, q \in B$, $p = q$ si y solo si $p \wedge a = q \wedge a$ y $p \wedge a' = q \wedge a'$; ya que si $(p \wedge a) \vee (p \wedge a') = (q \wedge a) \vee (q \wedge a')$ entonces
$p \wedge (a \vee a') = q \wedge (a \vee a')$, $p = q$. Así obtenemos
$(a \wedge x_0) \vee (a' \wedge x_1) = (a \wedge y_0) \vee (a' \wedge y_1)$ si y solo si $a \wedge x_0 = a \wedge y_0$ y $a' \wedge x_1 = a' \wedge y_1$. Sin embargo, $a \wedge x_0 = a \wedge y_0$ es equivalente a $(a \wedge x_0) + (a \wedge y_0) = 0$, puesto que $(a \wedge x_0) + (a \wedge y_0) = 0$ si y solo si

$[(a\wedge x_0)' \wedge (a\wedge y_0)] \vee [(a\wedge x_0) \wedge (a\wedge y_0)'] = 0$

$(a\wedge x_0)' \wedge (a\wedge y_0) = 0 \quad , \quad (a\wedge x_0) \wedge (a\wedge y_0)' = 0$

así: $a\wedge y_0 \leq (a\wedge x_0)'' \quad , \quad a\wedge x_0 \leq (a\wedge y_0)''$,

$a\wedge y_0 \leq a\wedge x_0 \quad , \quad a\wedge x_0 \leq a\wedge y_0$.

Y obtenemos: $a\wedge x_0 = a\wedge y_0$.

Pero tambien $(a\wedge x_0) + (a\wedge y_0) = 0$ si y solo si

$[(a\wedge x_0)' \wedge (a\wedge y_0)] \vee [(a\wedge x_0) \wedge (a\wedge y_0)'] = 0$ si y solo si

$(a\wedge x_0'\wedge y_0) \vee (a\wedge x_0\wedge y_0') = 0$ si y solo si

$a \wedge [(x_0'\wedge y_0) \vee (x_0\wedge y_0')] = 0$ si y solo si

$a \wedge (x_0 + y_0) = 0$

y esto último es lo mismo que $a \leq (x_0 + y_0)'$.

Similarmente, $a' \wedge x = a' \wedge y$ si y solo si

$x_1 + y_1 \leq a$. •

PRUEBA DEL TEOREMA 8.5

Sea p un elemento que satisface las condiciones (i), (ii); y sea el mapeo

Ψ: $B \to B_2$ definido como sigue:

Ψ: $(a\wedge x_0) \vee (a'\wedge x_1) \to (p\wedge x_0\gamma) \vee (p'\wedge x_1\gamma)$.

Por Lema 8.1, Ψ es definido en B. Está bien definido ya que si $(a\wedge x_0) \vee (a'\wedge x_1) = (a\wedge y_0) \vee (a'\wedge y_0)$, entonces $x_1 + y_1 \leq a \leq (x_0 + y_0)'$; así

$(x_1 + y_1)\gamma \leq p \leq (x_0 + y_0)'\gamma$, y además

$x_1\gamma + y_1\gamma \leq p \leq (x_0\gamma + y_0\gamma)'$, implicando que

$(p \wedge x_0\gamma) \vee (p' \wedge x_1\gamma) = (p \wedge y_0\gamma) \vee (p' \wedge y_1\gamma)$.

Ahora veamos que Ψ es un homomorfismo.

$$[(a\wedge x_0) \vee (a'\wedge x_1)] \wedge [(a\wedge y_0) \vee (a'\wedge y_1)]\Psi$$
$$= [a \wedge (x_0\wedge y_0)] \vee [a'\wedge(x_1 \wedge y_1)]\Psi$$
$$= (p \wedge (x_0\wedge y_0)\gamma) \vee (p' \wedge (x_1\wedge y_1)\gamma)$$
$$= [(p\wedge x_0\gamma) \vee (p'\wedge x_1\gamma)] \wedge [(p\wedge y_0\gamma) \vee (p'\wedge y_1\gamma)]$$
$$= [(a\wedge x_0) \vee (a'\wedge x_1)]\Psi \wedge [(a\wedge y_0) \vee (a'\wedge y_1)]\Psi.$$

$$[(a \wedge x_0) \vee (a'\wedge x_1)] \vee [(a\wedge y_0) \vee (a'\wedge y_1)]\Psi$$
$$= [a \wedge (x_0\vee y_0)] \vee [a' \wedge (x_1\vee y_1)]\Psi$$
$$= [p \wedge (x_0\vee y_0)\gamma] \vee [a' \wedge (x_1\vee y_1)\gamma]$$
$$= [p \wedge (x_0\gamma \vee y_0\gamma)] \vee [p' \wedge (x_1\gamma \vee y_1\gamma)]$$
$$= [(p\wedge x_0\gamma) \vee (p'\wedge x_1\gamma)] \vee [(p\wedge y_0\gamma) \vee (p'\wedge y_1\gamma)]$$
$$= [(a\wedge x_0) \vee (a'\wedge x_1)]\Psi \vee [(a\wedge y_0) \vee (a'\wedge y_1)]\Psi.$$

$$[(a \wedge x_0) \vee (a' \wedge x_1)]'\Psi$$
$$= [(a \wedge x_0)' \wedge (a' \wedge x_1)']\Psi$$
$$= [(a' \vee x_0') \wedge (a \vee x_1')]\Psi$$
$$= [(a \wedge x_0') \vee (a' \wedge x_1')]\Psi$$
$$= (p \wedge x_0'\gamma) \vee (p' \wedge x_1'\gamma)$$
$$= (p \wedge (x_0\gamma)') \vee (p' \wedge (x_1\gamma)')$$

$= (p' \vee (x_0\gamma)') \wedge (p \vee (x_1\gamma)')$

$= (p \wedge (x_0\gamma))' \wedge (p' \wedge (x_1\gamma))'$

$= [(p \wedge (x_0\gamma)) \vee (p' \wedge (x_1\gamma))]'$

$= [(a \wedge x_0) \vee (a' \wedge x_1))\Psi]'$.

Recíprocamente, si Ψ es una extensión de γ a B, entonces Ψ es unívocamente determinado por $p = a\Psi$, y p satisface (i) y (ii) •

COROLARIO 8.1

Asumamos las condiciones del Teorema 8.5. Y supongamos además que B_2 *es completa. Sean*

$x_0 = \bigvee(x\gamma / x \in B_1,\ x \leq a)$ *y* $x_1 = \bigwedge(x\gamma / x \in B_1,\ x \geq a)$. *Entonces las extensiones de* γ *a* B *están en correspondencia uno - a - uno con los elementos del intervalo* $[x_0, x_1]$. *En particular, siempre existe al menos una de tales extensiones.*

PRUEBA

La prueba es obvia según Teorema 8.5.

9. RELACION DE CONGRUENCIA

Sea L una red y sea $H \subseteq L^2$. Denotaremos con $\Theta(H)$ a la relación de congruencia más pequeña tal que $a \equiv b$ para todo $(a,b) \in H$.

LEMA 9.1

Para un $H \subseteq L^2$, $\Theta(H)$ *existe* •

PRUEBA

Sea $\Phi = \Lambda(\Theta/a \equiv b(\Theta)$ para todo $(a,b) \in H)$. Puesto que en la red C(L) la conjunción es la intersección, es obvio que $a \equiv b\ (\Phi)$, para todo $(a,b) \in H$; así $\Phi = \Theta(H)$ •

Usaremos notaciones especiales en dos casos:

Si $H = \{(a,b)\}$, escribiremos $\Theta(a,b)$ por $\Theta(H)$. Si $H = I^2$, donde I es un ideal, escribiremos $\Theta[I]$ por $\Theta(H)$. La relación de congruencia $\Theta(a,b)$ es llamada principal; su importancia es dada por la fórmula siguiente:

LEMA 9.2

$\Theta(H) = V(\Theta(a,b)/(a,b) \in H)$.

PRUEBA

Sea $(a,b) \in H$, $\Theta(a,b) \subseteq \Theta(H)$. Así $\vee(\Theta(a,b)/(a,b) \in H \subseteq \Theta(H))$. También $\vee(\Theta(a,b)/(a,b) \in H)$ es una relación de congruencia donde $a \equiv b$ para todo $(a,b) \in H$, y tenemos $\Theta(H) \subseteq \vee(\Theta(a,b)/(a,b) \in H)$ •

Note que $\Theta(a,b)$ es la relación de congruencia más pequeña bajo la cual $a \equiv b$, mientras que $\Theta[I]$ es la relación de congruencia más pequeña bajo la cual I está contenido en una única clase.

En redes en general, no podemos decir mucho acerca de $\Theta(H)$. En redes distributivas, la siguiente descripción de $\Theta(a,b)$ es importante.

TEOREMA 9.1

Sea L *una red distributiva,* $a,b,x,y \in L$, *y sea* $a \leq b$. *Entonces* $x \equiv y\ (\Theta(a,b))$ *si y solo si* $x \wedge a = y \wedge a$ *y* $x \vee b = y \vee b$ •

OBSERVACION.

Esta situación es ilustrada en la figura 9.1.

PRUEBA

Con Φ denotemos la relación binaria bajo la cual $x \equiv y\ (\Phi)$

si y solo si $x \wedge a = y \wedge a$ y $x \vee b = y \vee b$. Φ es obviamente una relación de equivalencia. Si $x \equiv y(\Phi)$ y $z \varepsilon L$, entonces $(x \vee z) \wedge a = (x \wedge a) \vee (z \wedge a) = (y \wedge a) \vee (z \wedge a) = (y \vee z) \wedge a$, y $(x \vee z) \vee b = z \vee (x \vee b) = z \vee (y \vee b) = (y \vee z) \vee b$; así $x \vee z \equiv y \vee z$ (Φ). Similarmente,

$(x \wedge z) \wedge a = z \wedge (x \wedge a) = z \wedge (y \wedge z) = (y \wedge z) \wedge a$ y

$(x \wedge z) \vee b = (x \vee b) \wedge (z \vee b) = (y \vee b) \wedge (z \vee b) = (y \wedge z) \vee b$

y obtenemos $x \wedge z \equiv y \wedge z$ (Φ). También si $z \equiv w$ (Φ),

$x \wedge z \equiv y \wedge z$ (Φ), $z \wedge y \equiv w \wedge y$ (Φ) por transitividad $x \wedge z \equiv y \wedge w$ (Φ);

$x \vee z \equiv y \vee z$ (Φ), $y \vee z \equiv y \vee w$ (Φ) y por transitividad

$x \vee z \equiv y \vee w$ (Φ), y así Φ es una relación de congruencia. Que $a \equiv b$ (Φ) es obvio.

Finalmente, sea Θ una relación de congruencia tal que $a \equiv b$ (Θ) y sea $x \equiv y$ (Φ). por tanto, $x \wedge a = y \wedge a$, $x \vee b = y \vee b$, $x \vee a \equiv x \vee b$ (Θ), y $x \wedge b \equiv x \wedge a$ (Θ). Entonces calculando módulo Θ, obtenemos:

$$\begin{aligned}
x &= x \vee (x \wedge a) = x \vee (y \wedge a) \\
&= (x \vee y) \wedge (x \vee a) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee b) \\
&= (x \vee y) \wedge (y \vee b) = y \vee (x \wedge b) \\
&\equiv y \vee (x \wedge a) = y \vee (y \wedge a) = y,
\end{aligned}$$

esto es, $x \equiv y$ (Θ), probando que $\Phi \leq \Theta$ •

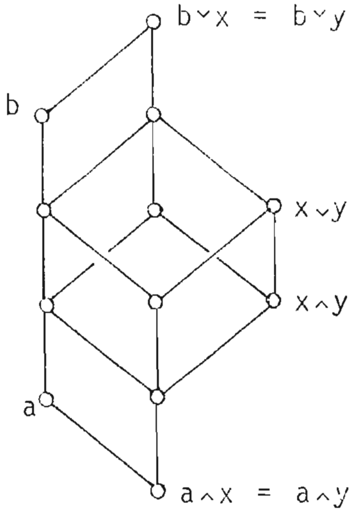


Figura 9.1

COROLARIO 9.1

Sea I *un ideal de una red distributiva* L. *Entonces* $x \equiv y\ (\Theta[I])$ *si y solo si* $x \vee y = (x \wedge y) \vee i$ *para algún* $i \in I$. *Además,* I *es una clase de congruencia módulo* $\Theta[I]$ •

OBSERVACION

Esta situación es ilustrada en la figura 9.2.

PRUEBA

Si $x \vee y = (x \wedge y) \vee i$, entonces $x \vee y = (x \vee i) \wedge (y \vee i)$ y obtenemos $x \vee y \leq x \vee i$, $x \vee y \leq y \vee i$, $x \vee y \geq i$, $x \vee y \geq x \vee i$, $x \vee y \geq y \vee i$, o sea $x \vee i = y \vee i$. Y lo anterior implica que

$x \equiv y\ (\Theta(x\wedge y\wedge i, i))$, $x\wedge y\wedge i$, $i\varepsilon I$, y así $x \equiv y\ (\Theta[I])$.

Recíprocamente, $\Theta\ [I] = {}^{V}(\Theta(u,v)/u,v\ \varepsilon\ I)$ por Lema 9.2. Sin embargo,

$\Theta(u,v) \vee \Theta(u_1,v_1) \leq \Theta\ (u\wedge v\wedge u_1\wedge v_1,\ u\vee v\vee u_1\vee v_1)$ por Lema 3.4; además $\Theta[I] = \cup\ (\Theta(u,v)/u,v\ \varepsilon\ I)$.

Si $x \equiv y\ (\Theta(u,v))$, $u,v\ \varepsilon\ I$, $u \leq v$ entonces $x\vee v = y\vee v$, así

$(x\wedge y) \vee [v\wedge(x\vee y)]$

$= [(x\wedge y)\vee v] \wedge [(x\wedge y) \vee (x\vee y)]$

$= [(x\vee v) \wedge (y\vee v)] \wedge (x\vee y)$

$= (x\vee v) \wedge (x\vee y)$

$= [(x\vee v) \wedge x] \vee [(x\vee v)\wedge y]$

$= x \vee [(y\vee v) \wedge y]$

$= x \vee y.$

Y la condición del Corolario 9.1 es satisfecha con $i = v \wedge (x\vee y)\ \varepsilon\ I$. Finalmente, si $a\ \varepsilon\ I$, $a \equiv b(\Theta[I])$, entonces $a\vee b = (a\wedge b)\vee i$, $i\ \varepsilon\ I$, y así $a\vee b\ \varepsilon\ I$, y $b\ \varepsilon\ I$, probando que I es una clase de congruencia *

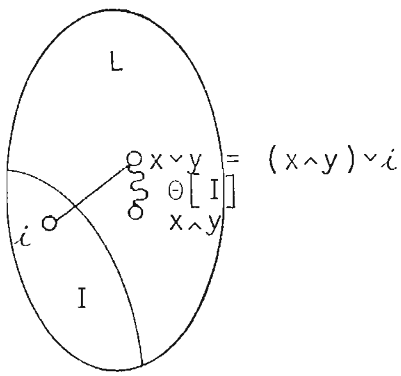


Figura 9.2

COROLARIO 9.2

Sea L *una red distributiva,* $x, y, a, b \in L$, *y sea* $x \leq y \leq a \leq b$ *ó* $a \leq b \leq x \leq y$. *Entonces* $x \equiv y\ (\Theta(a,b))$ *implica que* $x = y$ •

PRUEBA

Es consecuencia inmediata del Teorema 9.1 •

Una relación de congruencia muy importante fue usada en la prueba del Lema 3.2 (ii). Dado un ideal primo P de la red L, podemos construir una relación de congruencia que tiene exactamente dos clases de congruencia, P y L - P. Esta afirmación puede ser generalizada como sigue: Sea A un conjunto de ideales primos de una red L, diremos que dos elementos x,y son congruentes módulo A si y solo si, para cada $P \in A$, $x,y \in P$ ó $x,y \in L - P$; esto describe una relación de congruencia sobre L. Por ejemplo, si $A = \{P,Q,R\}$, $Q \subset P$, $R \subset P$, conseguimos cinco clases de congruencia como vemos en la figura 9.3; la red cociente es vista en la figura 5.8.

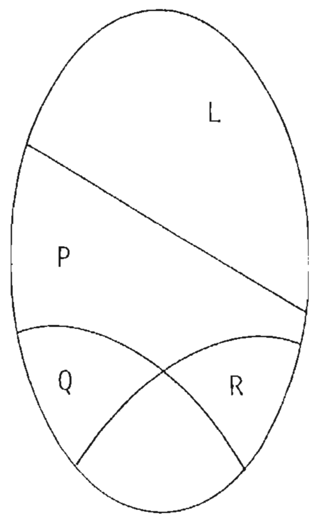


Figura 9.3

Este principio será usado más adelante. Una interesante aplicación es:

TEOREMA 9.2

Sea K *una sub red de una red distributiva* L *y sea* Θ *una relación de congruencia de* K. *Entonces* Θ *puede ser extendido a* L; *esto es, existe una relación de congruencia* Φ *sobre* L *tal que, para* $x, y \in K$, $x \equiv y\ (\Phi)$ *si y solo si* $x \equiv y\ (O)$ •

PRUEBA

Sea γ el homomorfismo natural de K sobre K/Θ, esto es,

$\gamma: x \longrightarrow [x]\Theta$; K/Θ es una red distributiva según Definición 3.17 de L/Θ, así por Corolario 7.8 K/Θ tiene ideales primos.

Para cada ideal primo P de K/Θ, $P\gamma^{-1}$ es ideal primo de K, puesto que para $x,y,a\wedge b \in P\gamma^{-1}$ y $z \in K$ se tiene:

$(x\vee y)\gamma = [x\vee y]\Theta = [x]\Theta \vee [y]\Theta \in P$

$(x\wedge y)\gamma = [x\wedge y]_\Theta = [x]\Theta \wedge [y]\Theta \in P$

$(x\wedge z)\gamma = [x\wedge z]\Theta = [x]\Theta \wedge [z]\Theta \in P$,

como P es ideal, $x\wedge z \in P\gamma^{-1}$.

$(a\wedge b)\gamma = [a\wedge b]\Theta = [a]\Theta \wedge [b]\Theta \in P$,

como P es ideal primo $a \in P\gamma^{-1}$ ó $b \in P\gamma^{-1}$.

Por tanto, $(P\gamma^{-1}]$ es un ideal de L y $[K - P\gamma^{-1})$ es un ideal dual de L; $(P\gamma^{-1}] \cap [K - P\gamma^{-1}) = \phi$ ya que $P\gamma^{-1}$ es ideal primo; así por Teorema 7.5 podemos escoger un ideal primo P_1 de L tal que $P_1 \supseteq P\gamma^{-1}$ y $P_1 \cap [K - P\gamma^{-1}) = \phi$. Para cada ideal primo P de K escogemos un adecuado ideal primo P_1 de L; con A denotemos la colección de todos estos ideales primos (los P_1).

Sea Φ la relación de congruencia asociada con A como describimos previamente. Ahora para $x,y \in K$ la condición $x \equiv y\ (\Theta)$ es equivalente a $x\gamma = y\gamma$, y así para cada $P_1 \in A$; $x,y \in P_1$ ó $x,y \notin P_1$; así $x \equiv y\ (\Phi)$.

Recíprocamente, si $x \equiv y\ (\Phi)$, entonces para cada $P_1 \in A$;

$x, y \in P_1$ ó $x, y \notin P_1$, y así $x\gamma$, $y\gamma \in P$ ó $x\gamma$, $y\gamma \in P$. Puesto que cada par de elementos distintos de K/Θ es separado por un ideal primo (Corolario 7.9), concluimos que $x\gamma = y\gamma$ y así $x \equiv y$ (Θ) •

TEOREMA 9.3

Sea L *una red Booleana. Entonces*

$$\Theta \longrightarrow [0]\Theta$$

es una correspondencia uno a uno entre relaciones de congruencia e ideales de L.

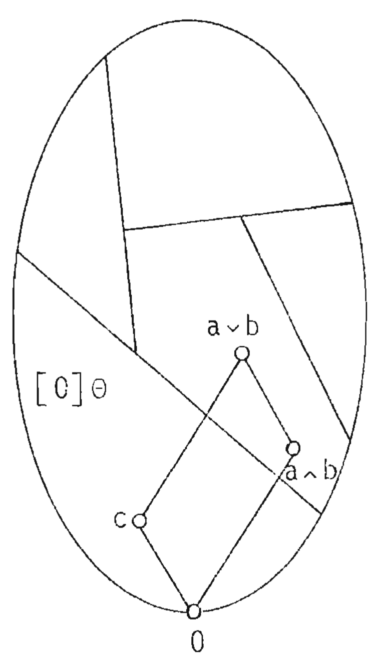


Figura 9.4

PRUEBA

Es claro que $[0]\Theta$ es una sub red de L.

Sea $x \in [0]\Theta$ e $y \in L$, $x \equiv 0\ (\Theta)$, $y \equiv y\ (\Theta)$, así $x \wedge y \equiv 0\ (\Theta)$ y $[0]\Theta$ es un ideal de L. Por Corolario 9.1 el mapeo es sobreyectivo; por tanto, solamente tenemos que probar que es uno a uno, esto es, que $[0]\Theta$ determina Θ. Este hecho, sin embargo, es obvio, puesto que $a \equiv b\ (\Theta)$ si y solo s[illegible] $b \equiv a \vee b\ (\Theta)$ (por Lema 3.5), además $c \equiv c\ (\Theta)$ donde c es el complemento relativo de $a \wedge b$ en $[0, a \vee b]$, conjuntando miembro a miembro obtenemos $0 \equiv c\ (\Theta)$. También si $c \equiv 0\ (\Theta)$, $a \wedge b \equiv a \wedge b\ (\Theta)$, disyuntando miembro a miembro nos queda $a \vee b \equiv a \vee b\ (\Theta)$. Así $a \equiv b\ (\Theta)$ si y solo si $c \in [0]\Theta$ •

Esta prueba no hace uso completo de la hipótesis que L es una red distributiva complementada. En efecto, todo lo que necesitamos para hacer la prueba es que L tenga un cero y que sea relativamente complementada.

Una tal red distributiva es llamada una red Booleana generalizada.

TEOREMA 9.4 (J. Hashimoto).

Sea L una red. Existe una correspondencia biyectiva entre ide[illegible] [illegible] relaciones de congruencia de L [illegible] la cual el ideal correspondien[illegible] una relación de c[illegible]ia, Θ, [illegible]na *clase de congruencia integra bajo Θ si y solo si* L *es una algebra Booleana generalizada* •

PRUEBA

La prueba de la parte "si" es la prueba del Teorema 9.3. Procedamos con la parte del "solamente si". El ideal correspondiente a w ($x \equiv y$ (w) si y solo si $x = y$) tiene que ser (0], y así L tiene 0. Si L tiene a M_5 como una sub red, entonces (usando la notación de la figura 7.1) (a] no puede ser una clase de congruencia, ya que si $a \equiv o$ entónces $i = a \vee c \equiv o \vee c = c$, y $b = b \wedge i \equiv b \wedge c = o$.

Pero $o \notin (a]$ y esto es una contradicción. Similarmente, si L contiene un N_5, tandríamos que (b] sería una clase de congruencia para algún Θ, (ver figura 7.1) entonces $b \equiv o$; así $i = b \vee c \equiv o \vee c = c$, y así $a = a \wedge i \equiv a \wedge c = o$. Y $a \in (b]$ lo cual es contradictorio. De donde L no contiene a ningún N_5. Y por Teorema 7.1 L es distributiva.

Sea $a < b$, $I = [0]\ \Theta(a,b)$. Por Corolario 9.1, $\Theta[I]$ es tambien una relación de congruencia de L teniendo a I como una clase integra; ocupando la hipótesis del Teorema, $\Theta[I] = \Theta(a,b)$, y así $a \equiv b$ $(\Theta[I])$.

Nuevamente por Corolario 9.1, $b = a \vee i$ para algún $i \in I$, y $i \equiv 0$ $(\Theta(a,b))$.

Por Teorema 9.1 lo último es equivalente a que $i \vee b = 0 \vee b$ y

$i \wedge a = 0 \wedge a$. De este modo $b \vee i = b$ y $a \wedge i = 0$, y así i es el complemento relativo de a en $[0,b]$. Así si $a \in [c,b]$, $(i \vee c) \wedge b$ es el complemento de a, según Lema 6.2 •

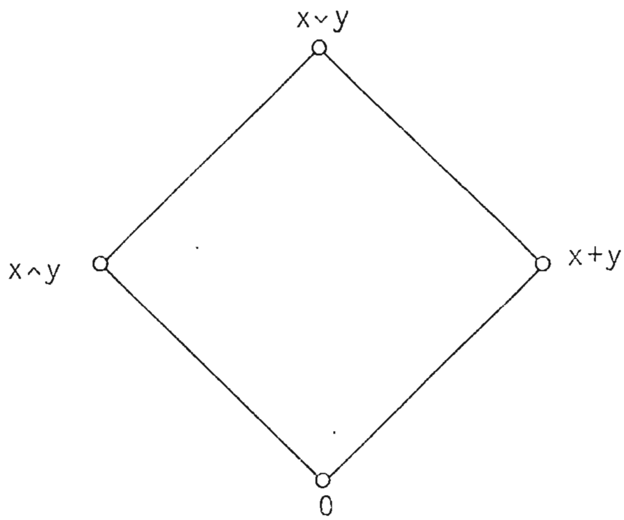


Figura 9.5

TEOREMA 9.5 (M.H. Stone).

(*i*) *Sea* $\mathcal{B} = (B;\wedge,\vee)$ *una red Booleana generalizada. Definamos las operaciones binarias* · *y* + *en* B *como sigue:*

$$x \cdot y = x \wedge y$$

y $x + y$ *como el complemento relativo de* $x \wedge y$ *en* $[0, x \vee y]$ *(ver figura 9.5). Entonces* $B^R = (B;+,\cdot)$ *es un anillo Booleano, esto es, un anillo (asociativo) satisfaciendo* $x^2 = x$ *para todo* $x \in B$ *(y, consecuente-*

mente, satisfaciendo $xy = yx$ *y* $x + x = 0$ *para* $x, y \in B$).

(*ii*) *Sea* B $(B;+,\cdot)$ *un anillo Booleano. Definamos las operaciones binarias* $\wedge$ *y* $\vee$ *en* B *por*

$$x \wedge y = x \cdot y$$

y
$$x \vee y = x + y + x \cdot y$$

Entonces $B^L = (B;\wedge,\vee)$ *es una red Booleana generalizada.*

(*iii*) *Sea* B *una red Booleana generalizada. Entonces* $(B^R)^L = B$.

(*iv*) *Sea* B *un anillo Booleano. Entonces* $(B^L)^R = B$.

PRUEBA

(i) Es claro que B es cerrado con las operaciones + y $\cdot$ La operación "$\cdot$" satisface:

$x \cdot x = x$, $x \cdot y = y \cdot x$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $x \cdot 0 = 0$.

La operación "+" satisface :

$x + x = 0$, $x + 0 = x$, $x + y = y + x$.

"." es distributiva sobre "+" puesto que:

$[x \wedge (y+z)] \wedge [(x \wedge y) \wedge (x \wedge z)]$

$= x \wedge (y+z) \wedge (x \wedge y \wedge z)$

$= x \wedge [(y+z) \wedge (y \wedge z)]$

$= 0$ por definición de $y+z$.

$$[x \wedge (y+z)] \vee [(x\wedge y) \wedge (x\wedge z)]$$
$$= [x \wedge (y+z)] \vee [x \wedge (y\wedge z)]$$
$$= x \wedge [(y+z) \vee (y\wedge z)]$$
$$= x \wedge (y\vee z)$$
$$= (x\wedge y) \vee (x\wedge z).$$

Veamos ahora que la operación "+" es asociativa.

El intervalo $[o, x\vee y\vee z]$ puede ser considerado como una red Booleana. Al hacer los cálculos:

$$[(x\wedge y') \vee (x'\wedge y)] \wedge (x\wedge y) = 0.$$

$$[(x\wedge y') \vee (x'\wedge y)] \vee (x\wedge y)$$
$$= [(x\wedge y') \vee (x\wedge y)] \vee [(x'\wedge y) \vee (x\wedge y)]$$
$$= [x \wedge (y'\vee y)] \vee [(x'\vee x) \wedge y]$$
$$= x\vee y.$$

Obtenemos: $x + y = (x\wedge y') \vee (x'\wedge y)$.

Ahora veamos que:

$$(x + y) + z = (x\wedge y\wedge z) \vee (x'\wedge y'\wedge z) \vee (x\wedge y'\wedge z') \vee (x'\wedge y\wedge z').$$

$$(x + y) \wedge z = [(x\wedge y') \vee (x'\wedge y)] \wedge z$$
$$= (x\wedge y'\wedge z) \vee (x'\wedge y\wedge z).$$

De este modo

$$[(x+y)\wedge z] \wedge [(x\wedge y\wedge z) \vee (x'\wedge y'\wedge z) \vee (x\wedge y'\wedge z') \vee (x'\wedge y\wedge z')]=0.$$

$[(x+y)\wedge z] \vee [(x\wedge y\wedge z) \vee (x'\wedge y'\wedge z) \vee (x\wedge y'\wedge z') \vee (x'\wedge y\wedge z')]$

$= [(x\wedge y'\wedge z) \vee (x'\wedge y\wedge z)] \vee [(x\wedge y\wedge z) \vee (x'\wedge y'\wedge z) \vee (x\wedge y'\wedge z')$

$\quad \vee (x'\wedge y\wedge z')].$

$= [(x\wedge y\wedge z) \vee (x'\wedge y'\wedge z)] \vee [(x\wedge y'\wedge z') \vee (x'\wedge y\wedge z')]$

$\quad \vee [(x\wedge y'\wedge z) \vee (x'\wedge y\wedge z)].$

$= [z\wedge[(x\wedge y) \vee (x'\wedge y')]] \vee [(x\wedge y') \vee (x'\wedge y)] \wedge z'\vee[(x\wedge y')$

$\quad \vee (x'\wedge y)]\wedge z.$

$= [z\wedge[(x\wedge y) \vee (x'\wedge y')]] \vee [(x\wedge y') \vee (x'\wedge y)].$

$= [(x\wedge y') \vee (x'\wedge y)]\vee z \wedge [[(x\wedge y') \vee (x'\wedge y)] \vee [(x\wedge y) \vee (x'\wedge y')]]$

$= [(x\wedge y') \vee (x'\wedge y)]\vee z \wedge [y'\vee y]$

$= [(x\wedge y') \vee (x'\wedge y)]\vee z.$

$= (x + y) \vee z.$

De este modo: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Observación: dos conexiones entre $(B;\wedge,\vee)$ y $(B;+,\cdot)$ son: $a\cdot b = a \wedge b$, $(a + b) + a\cdot b = a\vee b$, para todo $a,b \in B$.

(ii) Es claro que B es cerrado con las operaciones $\wedge,\vee$.

La operación $\wedge$ satisface:

$x \wedge x = x$, $x \wedge y = y\wedge x$, $x \wedge (y\wedge z) = (x\wedge y)\wedge z$,

$x \wedge 0 = 0$.

La operación $\vee$ satisface:

$$
\begin{aligned}
x \vee x &= x + x + x\,x \\
&= x + (x + x) \\
&= x + 0 \\
&= x \quad \text{(idempotencia)}
\end{aligned}
$$

$$x \vee y = (x + y) + x \cdot y$$

$$= (y + x) + y \cdot x$$

$$= y \vee x \qquad \text{(conmutatividad)}$$

$$x \vee (y \vee z) = x \vee [y + z + y \cdot z]$$

$$= x + [y + z + y \cdot z] + x \cdot [y + z + y \cdot z]$$

$$= x + y + z + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z + x \cdot y \cdot z$$

$$= (x \vee y) \vee z \qquad \text{(Asociatividad).}$$

$$x \wedge (x \vee y) = x \cdot (x + y + x \cdot y)$$

$$= x \cdot x + x \cdot y + x \cdot x \cdot y$$

$$= x + x \cdot y + x \cdot y$$

$$= x + 0$$

$$= x \qquad \text{(identidad de absorción).}$$

$$x \vee (x \wedge y) = x + (x \cdot y) + x \cdot (x \cdot y)$$

$$= x + x \cdot y + x \cdot y$$

$$= x + 0$$

$$= x \qquad \text{(identidad de absorción).}$$

De donde $(B; \wedge, \vee)$ es una red.

Como $a \wedge 0 = 0$, la red $\mathcal{B}$ tiene el cero.

Ahora veamos que el complemento relativo de $x \wedge y$ en $[o, x \vee y]$ viene dado por $x + y$.

$$(x \wedge y) \wedge (x+y) = (x \cdot y) \cdot (x+y)$$
$$= x \cdot y \cdot x + x \cdot y \cdot y$$
$$= x \cdot y + x \cdot y$$
$$= 0$$

$$(x \wedge y) \vee (x+y) = (x \cdot y) \vee (x+y)$$
$$= (x \cdot y) + (x+y) + (x \cdot y) \cdot (x+y)$$
$$= (x \cdot y) + (x+y) + (x \cdot y) + (x \cdot y)$$
$$= (x \cdot y) + (x+y) + 0$$
$$= x + y + x \cdot y$$
$$= x \vee y.$$

De donde $\mathcal{B}^L = (B;\wedge,\vee)$ es una red Booleana generalizada.

(iii) $\mathcal{B} = (B;\wedge,\vee)$

$\mathcal{B}^R = (B;+,\cdot)$

donde: $a \cdot b = a \wedge b$, para todo $a,b \in B$.

$a + b$ es el complemento relativo de

$a \wedge b$ en $[0,a \vee b]$.

$(\mathcal{B}^R)^L = (B,\wedge',\vee')$

donde: $a \wedge' b = a \cdot b$, para todo $a,b \in B$

$a \vee' b = a + b + a \cdot b.$

Sabemos que $\mathcal{B}$ y $(\mathcal{B}^R)^L$ son ambas redes Booleanas generalizadas. Además:

$a \vee b = a + b + a \cdot b$, de donde $\mathcal{B} = (\mathcal{B}^R)^L$.

(iv) $\mathcal{B} = (B;+,\cdot)$, $\mathcal{B}^L = (B,\wedge,\vee)$

con: $a\wedge b = a\cdot b$, para todo $a,b \in B$

$a\vee b = a + b + a\cdot b$

$(\mathcal{B}^L)^R = (B;+',\cdot')$

Con: $a\cdot' b = a\wedge b$, para todo $a,b \in B$

$a +' b$ es el complemento relativo de $a\wedge b$ en $[0,a\vee b]$.

Sabemos que $\mathcal{B}$ y $(\mathcal{B}^L)^R$ son ambos anillos Booleanos.

Será suficiente verificar que para todo $a,b \in B$ se tiene:

$$a\cdot b = a \cdot' b \quad (1)$$

$$a+b = a +' b \quad (2)$$

(1) es inmediato. Para (2) se tiene:

$(a+b) \wedge (a\wedge b)$ en $\mathcal{B}^L$

$= (a+b) \cdot (a\cdot b)$ en $\mathcal{B}$

$= a\cdot a\cdot b + b\cdot a\cdot b$

$= a\cdot b + a\cdot b$

$= 0$

$(a+b) \vee (a\wedge b)$ en $\mathcal{B}^L$

$= (a+b) + (a\cdot b) + (a+b)\cdot(a\cdot b)$ en $\mathcal{B}$

$= (a+b) + (a\cdot b) + 0$

$= a \vee b$ en $\mathcal{B}$.

De este modo a+b tambien es el complemento relativo de $a\wedge b$

en $[0, a \vee b]$ como este complemento es único: $a+b = a +' b$ •

TEOREMA 9.6

Sean B_0 y B_1 redes Booleanas generalizadas.

(*i*) *Sea $I \subseteq B_0$. Entonces I es un ideal de B_0 si y solo si I^R es un ideal de B_0^R.*

(*ii*) *Sea $\gamma: B_0 \longrightarrow B_1$. Entonces γ es un $\{0\}$ - homomorfismo de B_0 en B_1 si y solo si γ es un homomorfismo de B_0^R en B_1^R.*

(*iii*) *B_0 es una $\{0\}$-sub red de B_1 si y solo si B_0^R es un sub anillo de B_1^R.*

PRUEBA

(i) Supongamos que I es un ideal de B_0, entonces I es una red Booleana generalizada, así I^R es un sub anillo de B_0^R; además, sean $i \in I^R$, $a \in B^R$, $i \cdot a = i \wedge a \in I$, ya que I es ideal, así I^R es ideal.

Lo recíproco es idéntico.

(ii) Supongamos que $\gamma: B_0 \longrightarrow B_1$ es un $\{0\}$- homomorfismo de B_0 en B_1. Sean $a,b \in B_0$:

$(a \cdot b)\gamma = (a \wedge b)\gamma = a\gamma \wedge b\gamma = a\gamma \cdot b\gamma.$

$[a\gamma \wedge b\gamma] \vee (a + b)\gamma$

$= (a \wedge b)\gamma \vee (a+b)\gamma$

$= [(a \wedge b) \vee (a+b)]\gamma$

$= (a \vee b)\gamma$

$= a\gamma \vee b\gamma.$

$[a\gamma \wedge b\gamma] \wedge (a+b)\gamma$

$= (a \wedge b)\gamma \wedge (a+b)\gamma$

$= [(a \wedge b) \wedge (a+b)]\gamma$

$= \quad 0\gamma = 0$

De este modo $(a+b)\gamma = a\gamma + b\gamma$

Recíprocamente supongamos que γ es un homomorfismo de B_0^R en B_1^R.

Sean $a,b \in B_0$:

$(a \wedge b)\gamma = (a \cdot b)\gamma = a\gamma \cdot b\gamma = a\gamma \wedge b\gamma.$

$(a \vee b)\gamma = (a+b+a \cdot b)\gamma$

$= a\gamma + b\gamma + (a\gamma \cdot b\gamma)$

$= a\gamma \vee b\gamma.$

$0\gamma = [(a+b) \cdot (a \cdot b)]\gamma$

$= (a\gamma + b\gamma) \cdot (a\gamma \cdot b\gamma)$

$= 0.$

De donde γ es un $\{0\}$-homomorfismo de B_0 en B_1.

(iii) La prueba es obvia •

Relaciones de congruencia en una red arbitraria tienen una interesante conección con redes distributivas:

TEOREMA 9.7 (N. Funayama y T. Nakayama).

Sea L una red arbitraria. Entonces C(L), el conjunto de todas las relaciones de congruencia de L, es distributivo •

PRUEBA

Sean Θ, Φ, $\Psi \in C(L)$. Puesto que $\Theta\wedge(\Phi\vee\Psi) \geq (\Theta\wedge\Phi) \vee (\Theta\wedge\Psi)$ por Lema 4.5(i) será suficiente probar que $a \equiv b\ (\Theta\wedge(\Phi\vee\Psi))$ implica que $a \equiv b\ ((\Theta\wedge\Phi) \vee (\Theta\wedge\Psi))$. Así supongamos que $a \equiv b\ (\Theta\wedge(\Phi\vee\Psi)$; esto es, $a \equiv b\ (\Theta)$ y $a \equiv b\ (\Phi\vee\Psi)$. Por Teorema 3.1, existe una secuencia $a\wedge b = z_0 \leq \ldots \leq z_n = a\vee b$ tal que $z_i \equiv z_{i+1}\ (\Phi)$ ó $z_i \equiv z_{i+1}\ (\Psi)$ para cada $0 \leq i<n$. Puesto que $a \equiv b\ (\Theta)$, tenemos $a\wedge b \equiv a\vee b\ (\Theta)$, ahora por Lema 3.4 tenemos que $z_i \equiv z_{i+1}\ (\Theta)$ para cada $0 \leq i<n$. Así para cada $0 \leq i < n$, $z_i \equiv z_{i+1}\ (\Theta\wedge\Phi)$ ó $z_i \equiv z_{i+1}\ (\Theta\wedge\Psi)$, implicando que $a \equiv b((\Theta\wedge\Phi) \vee (\Theta\wedge\Psi))$ •

Otra propiedad de redes de congruencia (los C(L)) es dada en la siguiente definición.

DEFINICION 9.1

(*i*) *Sea* L *una red completa y sea* a *un elemento de* L. *Entonces* a *es llamado compacto si* $a \leq \vee X$ *para algún* $X \subseteq L$ *implica que* $a \leq X_1$ *para algún finito* $X_1 \subseteq X$.

(*ii*) *Una red completa es llamada algebráica si cada elemento es la disyunción de elementos compactos* •

Justamente como para redes, un sub conjunto no vacío I de una semired disyunción F es un ideal si, para $a,b \in F$, tenemos $a \vee b \in I$ si y solo si a y $b \in I$. De nuevo I(F) es el C.O.P.O. (no necesariamente una red, de todos los ideales de F parcialmente ordenados por la inclusión de conjuntos). Y para $a,b \in F$ y $H \subseteq F$ obtenemos:

$(a] = \{x \in F / x \leq a\}$

$(H] = \{i \in F / i \leq h_0 \vee \ldots \vee h_{n-1}$ para algún entero $n \geq 1\}$

Si F tiene un cero, para I, J $\in$ I(F) podemos definir:

$$I \wedge J = I \cap J$$
$$I \vee J = (I \cup J].$$

y de este mod I(F) es una red.

Usando I(F) conseguimos una caracterización útil de redes algebráicas.

TEOREMA 9.8

Una red L es algebráica si y solo si es isomorfa a la red de todos los ideales de una semired disyunción con 0 .

PRUEBA

Sea F una semired disyunción con 0; queremos probar que I(F) es algebráico. De la definición del $\vee$ y $\wedge$ en I(F) vemos que este es completo.

Afirmamos que para $a \in F$, $(a]$ es un elemento compacto de I(F). Sea $X \subseteq I(F)$ y $(a] \subseteq V(I/I \in X)$.

Con $V(I/I \in X) = \{x/x \leq t_0 \vee \ldots \vee t_{n-1},\ t_i \in I_i,\ I_i \in X\}$

de este modo, $a \leq t_0 \vee \ldots \vee t_{n-1}$, $t_i \in I_i$, $I_i \in X$. Así con

$$X_1 = \{I_0, \ldots, I_{n-1}\}$$

$$(a] \subseteq V(I/I \in X_1).$$

Puesto que para un $I \in I(F)$ tenemos $I = V((a]/a \in I)$, vemos que I(F) es algebráico.

Ahora supongamos que L es una red algebráica y formemos a F como el conjunto de los elementos compactos de L. Como L es completa, $0 \in L$, y también $0 \in F$. Sean $a,b \in F$, $a \vee b \leq X$, $X \subseteq L$. Entonces $a \leq a \vee b \leq VX$, y así $a \leq VX_0$, para algún X_0 finito, $X_0 \subseteq X$. Similarmente, $b \leq VX_1$, para algún $X_1 \subseteq X$, X_1 finito. De este modo $a \vee b \leq V(X_0 \cup X_1)$, y $X_0 \cup X_1$ es un sub conjunto de X, finito. Así $a \vee b \in F$.

Por tanto, $(F,\vee)$ es una semired desyunción con 0. Considere mos el mapeo:

$$\gamma: a \longrightarrow \{x/x \in F,\ x \leq a\},\ a \in L.$$

Obviamente, γ mapeo L en I(F). Por la definición de una red algebráica.

$$a = V_{a\gamma}$$

y así γ es uno a uno. Probemos que γ es sobreyectivo, sea $I \in I(F)$, como L es completa, hagamos $a = VI$, entonces $a\gamma \supseteq I$. Sea $x \in a\gamma$. Entonces $x \leq VI$, así que por la compaci dad de x, $x \leq VI_1$ para algún I_1 finito, $I_1 \subseteq I$. Por tanto $x \in I$, probando que $a\gamma \subseteq I$. Consecuentemente, $a\gamma = I$, y así γ es sobreyectivo.

Para que γ sea un homomorfismo será suficiente verificar en I(L) que

$$\{x/x \in F,\ x \leq a\} \cap \{x/x \in F,\ x \leq b\}$$
$$= \{x/x \in F,\ x \leq a \wedge b\} \qquad (1)$$
$$\{x/x \in F,\ x \leq a\} \vee \{x/x \in F,\ x \leq b\}$$
$$= \{x/x \in F,\ x \leq a \vee b\} \qquad (2)$$

La primera es obvia. En el segundo caso, es claro que $\{x/x \in F,\ x \leq a \vee b\}$ es una cota superior en I(L). Si le quitamos un elemento z a este conjunto, debe de ser $z > a$, ya que el es cota superior de $\{x/x \in F, x \leq a\}$, también $z > b$, así $z > a \vee b$.

Por tanto el conjunto dado es el supremo $\bullet$

LEMA 9.3

Cada relación de congruencia principal es compacta $\bullet$

PRUEBA

Sea L una red, $a,b \in L$, $X \subseteq C(L)$,

$$\Theta(a,b) \leq \vee(\Theta/\Theta \in X).$$

Entonces $a \equiv b\ (\vee(\Theta/\Theta \in X))$, y así (por Teorema 3.1 existe una secuencia $a = x_0, x_1, \ldots x_{n-1} = b$, en la cual $x_i \equiv x_{i+1}\ (\Theta_i)$ para algún $\Theta_i \in X$. Por tanto, $a \equiv b(\vee(\Theta/\Theta \in X_0))$, donde $X_0 = \{\Theta_0, \ldots, \Theta_{n-1}\}$, y así $\Theta(a,b) \leq \vee(\Theta/\Theta \in X_0)$, donde X_0 es un subconjunto finito de X $\bullet$

TEOREMA 9.9

Sea L una red arbitraria. Entonces C(L) es una red algebrái ca $\bullet$

PRUEBA

Para cada $\Theta \in C(L)$

$$\Theta = V(\Theta(a,b)/a \equiv b(\Theta)).$$

Este Teorema se sigue del Lema 9.3 y Corolario 3.4 •

Cambiando los Teoremas 9.7 y 9.9 conseguimos:

COROLARIO 9.3

Sea L una red arbitraria. Entonces C(L) es una red algebráica distributiva •

Este Corolario se deduce del Teorema 9.7 y 9.9 ∘

Sea M un C.O.P.O finito tal que inf{a,b} existe en M para cualquier $a,b \in M$. Definimos en M:

$a \wedge b = \inf\{a,b\}$ y $a \vee b = \sup\{a,b\}$ siempre que exista. Esto convierte a M en una red parcial. Una relación de equivalencia Θ en M es una relación de congruencia si $a_0 \equiv b_0$ (Θ) y $a_1 \equiv b_1$ (Θ) implica que $a_0 \wedge a_1 \equiv b_0 \wedge b_1$ (Θ) y que $a_0 \vee a_1$ y $b_0 \vee b_1$ existan. Entonces el conjunto C(M) de todas las relaciones de congruencia es nuevamente una red.

LEMA 9.4

Sea K una red finita distributiva. Entonces existe un

C.O.P.O. finito M *tal que* $inf\{a,b\}$ *existe para cualquier* $a,b \in M$ *y* $C(M)$ *es isomorfo a* K •

PRUEBA

Tomemos el conjunto $M_0 = J(K) \cup \{0\}$ y hagámoslo una semired-conjunción definiendo: $\inf\{a,b\} = 0$ si $a \neq b$ ($J(K)$ es el conjunto de los elementos disyunción - irreducible no cero de K), como es ilustrado en la figura 9.6.

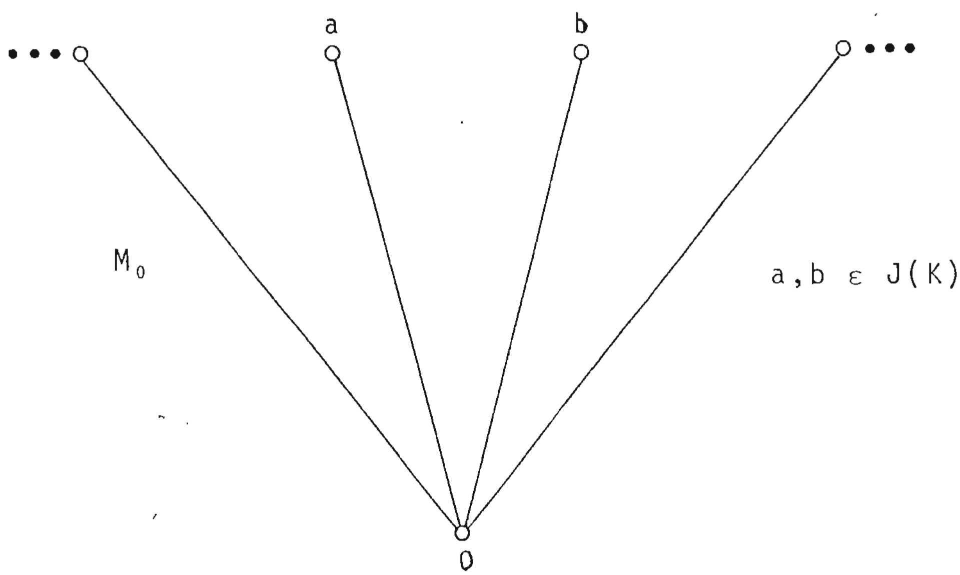


Figura 9.6

Note que $a \equiv b\ (\Theta)$ y $a \neq b$ implica en M_0 que $a \equiv 0\ (\Theta)$ y $b \equiv 0\ (\Theta)$; por tanto, relaciones de congruencia de M_0 están en correspondencia uno a uno con subconjuntos de $J(K)$. De este modo $C(M_0)$ es una red booleana cuyos átomos están asociados con elementos de J(K); la congruencia Φ_a asociado con a ε J(K) es: $x \equiv y$ (Φ_a) si $\{x,y\} = \{a,0\}$, y si $\{x,y\} \neq \{a,0\}$, entonces $x \equiv y$ (Φ_a) implica que $x = y$.

Si J(K) es no ordenado en K, entonces hemos terminado. Sin embargo, si, tenemos, a,b ε J(K) $a > b$ en K, entonces debemos tener $\Phi_a > \Phi_b$.

La forma más simple que esto ocurre es visto en la red M(a,b) de la figura 9.7. Notemos que M(a,b) tiene tres relaciones de congruencia, esta son W, L y Θ donde Θ es la relación de congruencia con las clases de congruencia $\{o,b_1,b_2,b\}$, $\{a_1,a(b)\}$. De este modo $\Theta(a_1,0) = L$. En otras palabras, $a_1 \equiv 0$ "implica" que $b_1 \equiv 0$, pero $b_1 \equiv 0$ no "implica' que $a_1 \equiv 0$.

M(a,b)

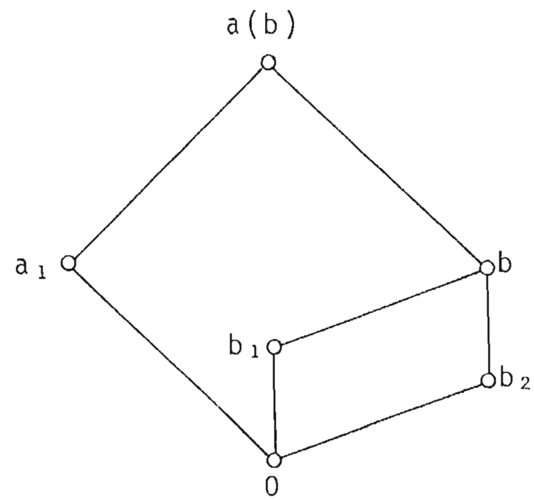


Figura 9.7

Construiremos M "insertando" M(a,b) en M siempre que exista un $a > b$ en J(K). La figura 9.8 da M para tres elementos encadenados.

Más precisamente, M consiste de cuatro clases de elementos:

(i) 0; (ii) todos los elementos disyunción irreducible que son maximales; (iii) para cualquier elemento disyunción irreducible no maximal a de K, tres elementos: a, a_1, a_2; (iv) para cada par $a,b \in J(K)$ con $a > b$, un nuevo elemento, a(b). Para simplificar la notación, para cada elemento disyunción irreducible a, escribiremos $a = a_1 = a_2$.

Para $a,b \in J(K)$ con $a > b$, haçemos
$M(a,b) = \{0,a_1,b,b_1,b_2,a(b)\}$. Observe que
$M(a,b) \cap M(c,d) = M(a,b)$ si $a = c$ y $b = d$;
$M(a,b) \cap M(c,d) = \{0,c,c_1,c_2\}$ si $a \neq c$ y $b = d$;
$M(a,b) \cap M(c,d) = \{0,a_1\}$ si $a = c$ y $b \neq d$;
$M(a,b) \cap M(c,d) = \{0,b_2\}$ si $b = c$; en otro caso,
$M(a,b) \cap M(c,d) = \{0\}$.

Para $x,y \in M$, definimos $x \leq y$ significando que para algún $a,b \in J(K)$ con $a > b$, se tiene $x,y \in M(a,b)$ y $x \leq y$ en la red M(a,b) como está ilustrado en la figura 9.7. Es fácil ver que $x \leq y$ no depende de la escogencia de a,b y que $\leq$ es una relación de orden parcial. Puesto que, bajo este ordenamiento parcial, todos los M(a,b) y $M(a,b) \cap M(c,d)$ son redes y $x,y \in M$, $x \in M(a,b)$, y $y \leq x$ implica que $y \in M(a,b)$, concluimos que $\inf\{u,v\}$ existe para todo $u,v \in M$.

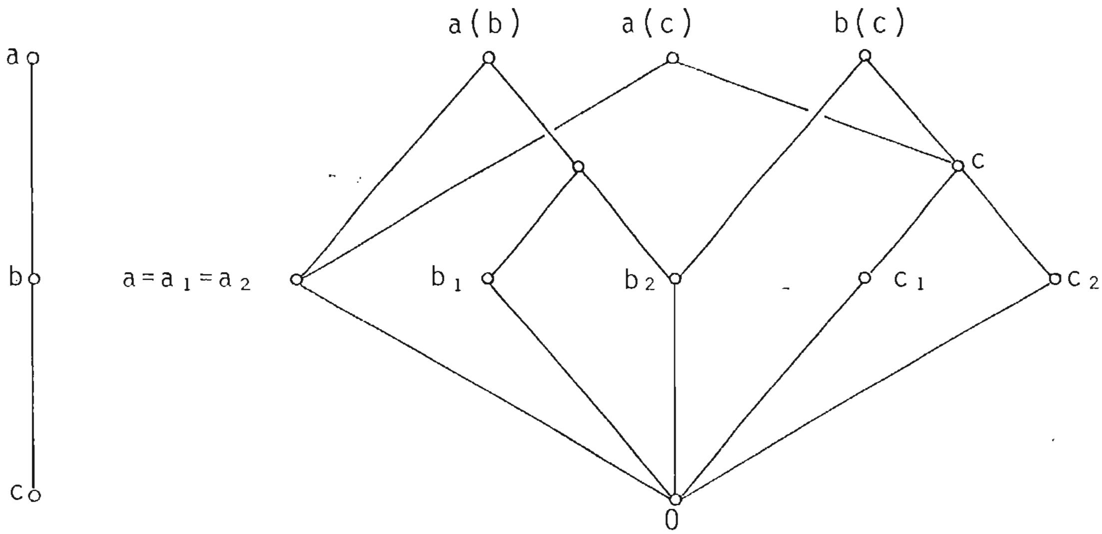


Figura 9.8

Ahora describamos $C(M)$. Sea $H \in H(J(K))$. Definamos una relación binaria θ_H en M: $x \equiv y$ (θ_H) si
$x,y \in \cup(M(a,b)/a,b \in H,\ a > b) \cup \cup(\{0,a_1,a_2,a\}/a \in H)$ ó
$x,y \in \{a_1,a(b),a(c)\}$, donde $a > b$, $a > c$, $b,c \in H$, ó $x = y$.

En otras palabras $[0]\Theta_H$ contiene todos los a_1,a_2,a con $a \in H$; y si $a > b$, $a,b \in H$, entonces él también contiene $a(b)$. Aparte de esta clase la única congruencia no trivial es $a(b) \equiv a_1 \equiv a(c)$, donde $a \notin H$, y $b,c \in H$, $a > b$, $a > c$.

Θ_H es obviamente una relación de equivalencia. El hecho que Θ_H restringida a cualquier $M(a,b)$ es una relación de congruencia implica que θ_H es una relación de equivalencia. Dado una Θ_H conseguimos:

$$H = \{a/a_1 \equiv 0(\theta_H)\};$$

de este modo el mapeo:

$$\gamma: H \longrightarrow \Theta_H$$

es una función uno a uno que preserva el orden de $H(J(K))$ en $C(M)$. Para probar que γ es un isomorfismo, tenemos que probar que γ es sobre. Así sea Θ una relación de congruencia de M, y

$$H = \{a/a_1 \equiv 0\ (\Theta)\}.$$

Puesto que en $M(a,b)$ cada relación de congruencia Θ es determinada por los átomos en $[0]\Theta$, lo mismo se cumple en M. Por tanto, $\Theta = \Theta_H$. De este modo $H(J(K)) \cong C(M)$. Por Teorema 7.9, $K \cong H(J(K))$, y así $K \cong C(M)$ •

10. ALGEBRAS BOOLEANAS R-GENERADAS POR REDES DISTRIBUTIVAS

TEOREMA 10.1

Cada red distributiva puede ser inmersa en una red Booleana •

PRUEBA

Por Teorema 7.5, cada red distributiva L es isomorfa a un anillo de subconjuntos de algún conjunto X. De aquí que L puede ser inmersa en P(X), el cual es una red Booleana •

DEFINICION 10.1

Sea L *una sub red de la red Booleana generalizada* B. *Se dice que* L *R-genera a* B *si* L *genera a* B *como un anillo (o sea* $B = (L,+,\cdot)$), *y si* L *tiene un 0 (ó 1), es el mismo 0 ó 1 de* B •

Las últimas dos condiciones son equivalentes a la siguiente:

Si $\wedge L$ existe, entonces $\wedge L = \wedge B$, y si $\vee L$ existe entonces $\vee L = \vee B$.

LEMA 10.1

Sea B R-generada por L. Entonces cada $a \in B$ puede ser expresado en la forma

$a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}, a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in L$ •

PRUEBA

Con B_1 denotemos el conjunto de todos los elementos que pueden ser representada en la forma

$a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in L$. Entonces $L \subseteq B_1$, y B_1 es cerrado por $+$ y $\cdot$, puesto que:

$$(a_0 + \ldots + a_{n-1})(b_0 + \ldots + b_{m-1}) = \Sigma a_i b_j,$$

y cada término $a_i b_j = a_i \wedge b_j \in L$.

De donde concluimos que $B_1 = B$.

B_1 también puede ser visto como una red $(B_1, \wedge, \vee)$, y podemos decir que L es sub red de B; por tanto para $a, b \in L$, $a \vee b$ en L es el mismo $a \vee b$ en B. De este modo

$$a \vee b = a + b + ab, \text{ y así}$$
$$a + b = ab + (a \vee b) = (a \wedge b) + (a \vee b).$$

Tomemos $a_0 + \ldots + a_{n-1} \in B$. Probaremos por inducción sobre n que los sumandos siempre pueden ser obtenidos de forma cre ciente. Para $n = 1$ esto es claro. Asumamos que $a_1 \leq \ldots \leq a_{n-1}$, entonces

$$
\begin{aligned}
& a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} \\
= & (a_0 \wedge a_1) + (a_0 \vee a_1) + a_2 + \ldots a_{n-1} \\
= & (a_0 \wedge a_1) + ((a_0 \vee a_1) \wedge a_2) + (a_0 \vee a_2) + a_3 + \ldots + a_{n-1} \\
= & (a_0 \wedge a_1) + ((a_0 \vee a_1) \wedge a_2) + (a_0 \vee a_2) \wedge a_3) + (a_0 \vee a_3) + \ldots + a_{n-1} \\
= & \ldots \\
= & (a_0 \wedge a_1) + ((a_0 \vee a_1) \wedge a_2) + \ldots + (a_0 \vee a_{n-2}) \wedge a_{n-1}) + (a_0 \vee a_{n-1}),
\end{aligned}
$$

y $a_0 \wedge a_1 \leq (a_0 \vee a_1) \wedge a_2 \leq \ldots \leq (a_0 \vee a_{n-2}) \wedge a_{n-1} \leq a_0 \vee a_{n-1}$ •

Ejemplo. Sea B la red Booleana vista en la figura 10.1 y sea $L = \{0, a_0, a_1, a_2\}$. Entonces L R-genera a B.

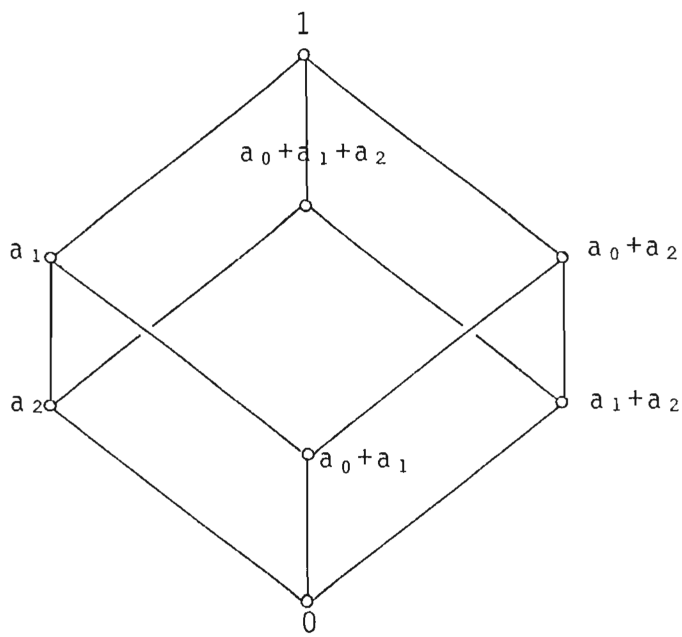


Figura 10.1

LEMA 10.2

Sea L una red distributiva. Entonces existe una red Booleana generalizada B libremente R-generada por L esto es, una red Booleana generalizada con las siguientes propiedades:

(*i*) B *Es R-generada por* L;

(*ii*) *Si* B_1 *es R-generada por* L, *en-onces existe un homomorfismo sobreyectivo* Υ *de* B *en* B_1 *que es la función identidad sobre* L •

PRUEBA

Por Teorema 10.1 L puede ser inmersa en una red Booleana B, la cual también es red Booleana generalizada. Por Teorema 5.1 existe una red Booleana generalizada, generada libremente por L, según la Definición 5.2 y Teorema 9.5, B puede ser considerado como un anillo Booleano generado por L. Como B satisface (iv) de la Definición 5.2, si B_1 es R-generada por L (como anillo), B_1 es generada por L como redes ($a \cdot b = a \wedge b$, $a \vee b = a+b+a \cdot b$), así existe un homomorfismo (de redes) sobreyectivo $\Upsilon: B \longrightarrow B_1$, que mapea la identidad en L, entonces por Teorema 9.6, Υ también es un homomorfismo sobreyectivo de anillos. Cumpliéndose la condición (ii) solicitada •

LEMA 10.3 (J. Hashimoto).

Sea B una red Booleana generalizada generada por L. Entonces cada relación de congruencia de L tiene una única extensión a B •

PRUEBA

La existencia de una extensión fue probada en el Teorema 9.2. Por Teorema 9.3 y 9.6 (i), la siguiente afirmación implica la unicidad de la extensión:

Si I y J son ideales (como anillos) de B con $I \subset J$, entonces existen elementos $a, b \in L$, $a \neq b$, tal que $a \equiv b \pmod J$ y $a \not\equiv b \pmod I$.

Efectivamente, sea $x \in J - I$. Por Lema 10.1, x puede ser representado en la forma

$$x = x_0 + \ldots + x_{n-1},\ x_0 \leq \ldots \leq x_{n-1},\ x_0, \ldots, x_{n-1} \in L.$$

Si n es impar, entonces $x_0 = x \cdot x_0 \leq x \cdot \in J$; y de este modo $x_0 \in J$; $x_0 + x_1 + x_2 = x \cdot x_2 \in J$. por tanto $x_1 + x_2 = x_0 + (x_0 + x_1 + x_2) \in J$. Similarmente, $x_3 + x_4$, $x_5 + x_6 \ldots \in J$. Puesto que

$x_0 + (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \ldots \in J - I$, concluimos que $x_0 \in J - I$ ó $x_{2i} + x_{2i+1} \in J - I$ para algún $2_i < n$.

Si n es par, entonces obtenemos

$x_0 + x_1,\ x_2 + x_0,\ \ldots \ \varepsilon\ J$ (multiplicando x por $x_1, x_3 \ldots$),

y concluimos que para algún $2i < n$, $x_{2i} + x_{2i+1}\ \varepsilon\ J - I$.

Ahora si $x_{2i} + x_{2i+1}\ \varepsilon\ J - I$, entonces $x_{2i} \equiv x_{2i+1} (\mathrm{mod}\ J)$, pero $x_{2i} \not\equiv x_{2i+1}$ (mod I), $x_{2i}, x_{2i+1}\ \varepsilon\ L$. Finalmente, si $x_0\ \varepsilon\ J - I$, entonces $x_0 \equiv 0$ (mod J) y $x_0 \equiv 0$ (mod I). Esto completa la prueba, en el supuesto que $0\ \varepsilon\ L$. Si $0 \notin L$, entonces podemos escoger un $y\ \varepsilon\ I$ con $y < x_0$ y obtenemos $y \equiv x_0$ (mod J), $y \not\equiv x$ (mod I) •

TEOREMA 10.2

Si B_1 *y* B_2 *son redes Booleanas generalizadas R-generadas por una red distributiva* L, *entonces* B_1 *y* B_2 *son isomorfas* •

PRUEBA

Sea B una red Booleana libre R-generada por L (ver Lema 20.2). Sea γ un homomorfismo sobreyectivo de B en B_1 tal que γ y la identidad es L (ver Lema 10.2 (ii)).

Queremos probar que γ es un isomorfismo. Efectivamente, si γ no es un isomorfismo, entonces el ideal

$$I = \{x / x\ \varepsilon\ B,\ x\gamma = 0\}$$

no es cero. De este modo por Lema 10.3, $a \equiv b$ (mod I) para algún $a, b\ \varepsilon\ L$, $a \neq b$. Esto significa que $a\gamma = b\gamma$, contrario a lo asumido. Similarmente, existe un isomorfismo Ψ entre B y B_2. Entonces $\gamma^{-1}\Psi$ es un isomorfismo entre B_1 y B_2 •

COROLARIO 10.1

Sean L_0 y L_1 redes distributivas y sea γ un homomorfismo sobreyectivo de L_0 en L_1 que preserva el 0 y/ó 1, si ellos existen en L_0. Entonces γ, puede ser extendido a un homomorfismo sobreyectivo de $B(L_0)$ en $B(L_1)$ •

PRUEBA

Sea Θ una relación de congruencia de L_0 inducida por $\gamma(x \equiv y\ (\Theta)$ si y solo si $x\gamma = y\gamma)$ y sea $\overline{\Theta}$ la extensión de Θ a $B(L_0)$ (Lema 10.3). Entonces $B(L_0)/\overline{\Theta}$ es una red Booleana generalizada R-generada por $L_0/\Theta \cong L_1$. Por Teorema 10.2, $B(L_0)/\overline{\Theta} \cong B(L_1)$, de donde existe un homomorfismo sobreyectivo de $B(L_0)$ sobre $B(L_1)$ •

COROLARIO 10.2

Sea L_0 una sub red de la red distributiva L_1 y asumamos que si L_1 tiene 0 y/ó 1, entonces así lo hace L_0, y el 0, 1 de L_1 es el mismo 0,1 de L_0. Con B denotemos la sub-algebra de $B(L_1)$ R-generada por L_0. Entonces $B(L_0) \cong B$ •

PRUEBA

Por Teorema 10.2 y Corolario 10.1 la conclusión es inmediata $\bullet$

DEFINICION 10.2

Sea L *una red distributiva. Para* $H \subseteq B(L)$, *con* $[H]_R$ *denotaremos la sub red Booleana generalizada de* B(L) *R-generada por* H.

LEMA 10.4

Sean L_0 *y* L_1 *dados como en el Corolario 10.2 y supongamos que* L_0 *tiene un cero. Entonces* $L_1 \cap [L_0]_R$ *es la sub red de* L_1 *más pequeña conteniendo* L_0 *la cual es cerrada al tomar complementos relativos en* L_1. *Además* L_0 *R-genera a* $B(L_1)$ *si y solo si la sub red más pequeña de* L_1 *conteniendo a* L_0 *y cerrada al tomar complementos relativos en* L_1 *es* L_1 *mismo.*

PRUEBA

Primero veamos que $L_1 \cap [L_0]_R$ es una sub red de L_1 conteniendo a L_0 y cerrada al tomar complementos relativos.

Es obvio que $L_0 \subseteq L_1 \cap [L_0]_R$. Si $a,b,c \in L_1 \cap [L_0]_R$, $d \in L_1$ y d es el complemento relativo de b en $[a,c]$, entonces

$d = (a + b) + c \in [L_0]_R$, puesto que (ver figura 10.2) d es el complemento relativo de a + b en el intervalo $[0,c]$. Así $d \in L_1 \cap [L_0]_R$.

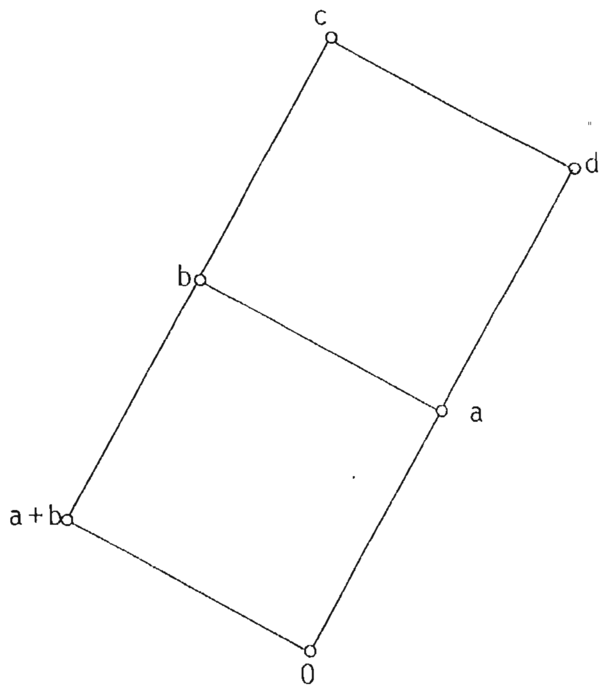


Figura 10.2

En segundo lugar veamos que $L_1 \cap [L_0]_R$ es la más pequeña.

Supongamos que L es una sub red de L_1 conteniendo L_0 y cerrada bajo complementos relativos en L_1. Si $x \in L_1 \cap [L_0]_R$, entonces por Lema 10.1 podemos representar a x como:

$$x = a_0 + \ldots + a_{n-1} \ ; \ a_0, a_1, \ldots a_{n-1} \in L_0$$
$$a_0 \leq \ldots \leq a_{n-1}.$$

Probaremos que $x \in L$ por inducción en n. Si $n = 1$, $x = a_0 \in L_0 \subseteq L$. Si $n = 2$, entonces x es el complemento relativo de a_0 en $[0,a_1]$, $0,a_0,a_1 \in L_0$, así $x \in L$. Si $n = 3$, entonces (ver figura 10.1) $x = a_0 + a_1 + a_2$ es el complemento relativo de a_1 en $[a_0,a_2]$, y así $x \in L$. Ahora sea $n > 3$ y supongamos que para todo

$y = b_0 + \ldots + b_{k-1}$, $b_0, \ldots, b_{k-1} \in L_0$, $b_0 \leq \ldots \leq b_{k-1}$, y $k < n$, $y \in L$, ha sido probado. Notemos que $x \in L_1$ y $a_{n-3} \in L_0$ implica que

$$\begin{aligned} xa_{n-3} &= a_0 + \ldots + a_{n-3} + a_{n-3} + a_{n-3} \\ &= a_0 + \ldots + a_{n-3} \in L_1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x \vee a_{n-3} &= x + a_{n-3} + xa_{n-3} \\ &= a_0 + \ldots + a_{n-1} + a_{n-3} + a_0 + \ldots + a_{n-3} \\ &= a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} \in L_1. \end{aligned}$$

Por la hipótesis inductiva, $a_0 + \ldots + a_{n-3} \in L$ y $a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} \in L$; por tanto x es el complemento relativo en L_1 de un elemento (a saber, a_{n-3}) de L en un intervalo (a saber, $[a_0 + \ldots + a_{n-3}, a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1}]$) en L, y así, por lo asumido, $x \in L$. De este modo $L_1 \cap [L_0]_R \subseteq L$ •

DEFINICION 10.3

Una inmersión de L en L_1 es completa, si ella preserva arbitrarias conjunciones y disyunciones, si ellas existen en L •

LEMA 10.5 (J. Von Neuman)

Sea B *un red Booleana completa. Entonces* B *satisface la identidad distributiva de infinitas disyunciones* (JID),

$$x \wedge V(x_i/i \in I) = V(x \wedge x_i/i \in I),$$

y su dual, la identidad distributiva de infinitas conjunciones (MID) •

PRUEBA

$x \wedge x_i \leq x$ y $x \wedge x_i \leq V(x_i/i \in I)$; por tanto, $x \wedge V(x_i/i \in I)$ es una cota superior para $\{x \wedge x_i/i \in I\}$. Ahora sea u una cota superior, esto es $x \wedge x_i \leq u$ para todo $i \in I$.

Entonces

$$\begin{aligned} x_i = x_i \wedge (x \vee x') &= (x_i \wedge x) \vee (x_i \wedge x') \\ &\leq u \vee x' \end{aligned}$$

De este modo:

$$\begin{aligned} x \wedge V(x_i/i \in I) &\leq x \wedge (u \vee x') \\ &= (x \wedge u) \vee (x \wedge x') \\ &= (x \wedge u) \\ &\leq u, \end{aligned}$$

probando que $x \wedge V(x_i/i \in I)$ es la más pequeña cota superior para $\{x \wedge x_i/i \in I\}$.

El MID se sigue por dualidad •

COROLARIO 10.3

Una red distributiva completa que tiene una inmersión completa en una red Booleana completa satisface ambos (JID) *y* (MID) •

PRUEBA

Puesto que la red Booleana es completa por Lema 10.5 satisface ambos (JID) y (MID), como la inmersión es completa, preserva conjunciones y disyunciones arbitrarias. Como la red distributiva tambien es completa y la inmersión es un homomorfismo inyectivo, la red distributiva tambien satisface el (JID) y (MID) •

LEMA 10.6 (V. Glivenko).

Sea L *una red distributiva con 0. Entonces* $I(L)$ *es una red seudocomplementada en la cual*

$$I^* = \{x / x \wedge i = 0 \text{ para todo } i \in I\}.$$

Sea $S(I(L)) = \{I^*/I \in I(L)\}$. *Si* L *es una red Booleana, entonces* $S(I(L))$ *es una red Booleana completa y la función* $a \longrightarrow (a]$ *es una inmersión de* L *en* $S(I(L))$; *esta inmersión preserva todas las conjunciones y disyunciones existentes* •

PRUEBA

La primera afirmación es trivial. Ahora sea L una red Booleana. Se sigue del Teorema 6.1 que $S(I(L))$ es una red Booleana. Además, podemos ver que para cualquier $X \subseteq I(L)$, el inf y fup de X en $S(I(L))$ son ΛX y $(VX)^{**}$, respectivamente donde Λ y V son la conjunción y la disyunción de X en $I(L)$, respectivamente. Puesto que $\Lambda((x]/x \in X] = (\inf X]$, siempre que inf X existe en L, el mapeo $a \longrightarrow (a]$ preserva todas las conjunciones existentes en L.

Observemos que, para $x,a \in L$, $x \wedge a' = 0$ si y solo si $x \leq a$, y así $(a] = (a']^* \in S(I(L))$. Ahora hagamos $a = \sup X$ en L y sea $I = (x]$ $(= V((x]/x \in X))$.

Probemos que $x \longrightarrow (x]$, preserva disyunciones, o sea tenemos que verificar que $I^{**} = (a]$, o equivalentemente, que $I^* = (a']$. Efectivamente, si $b \in I^*$, entonces $b \wedge x = 0$ para todo $x \in I$, y de este modo $x \leq b'$. Además, $a = \sup X \leq b'$, probando que $a' \geq b$, esto es, $b \in (a']$. Recíprocamente, sea $b \in (a']$. Entonces $b' \geq a$; además, $b' \geq a = \sup X \geq x$ para todo $x \in X$.

Esto prueba que $b \in I^*$, probando que $I^X = (a']$ •

LEMA 10.7

Sea L una red completa satisfaciendo (JID) *y* (MID). *Entonces* *la función identidad es una inmersión completa de L en* B(L) $\bullet$

PRUEBA

Escribamos $a \in B(L)$ en la forma:

$$a = a_0 + \ldots + a_{n-1}, \quad a \leq a_1 \leq \ldots \leq a_{n-1},$$
$$a_0, \ldots, a_{n-1} \in L.$$

Puesto que L es completa, ella tiene al 0 (cero) y así (escribiendo a_0 como $0 + a_0$) podemos asumir sin pérdida de generalidad que n es impar. Afirmamos que para $x \in L$ y $a \in B(L)$, tenemos $x \leq a$ si y solo si

$$x \wedge a_0 = x \wedge a_1, \qquad (1)$$
$$x \wedge a_2 = x \wedge a_3, \ldots, \qquad (2)$$
$$\vdots$$
$$x \wedge a_{n-3} = x \wedge a_{n-2}, \qquad (i)$$
$$x \leq a_{n-1}$$

Efectivamente, sea $x \leq a$. Entonces:

$$xa_1 = xa_1\,(a_0 + \ldots + a_{n-1}) = x(a_0 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1) = xa_0$$

por tanto, $x \wedge a_0 = x \wedge a_1$. De este modo

$$x(a_2 + \ldots + a_{n-1}) = (xa_0 + xa_1) + x(a_2 + \ldots + a_{n-1}) = xa = x,$$

y así $x \leq a_2 + \ldots + a_{n-1}$. Recíprocamente, si $x \wedge a_0 = x \wedge a_1$ y $x \leq a_2 + \ldots + a_{n-2}$, entonces

$xa = xa_0 + xa_1 + x(a_2 + \ldots + a_{n-1}) = x$, probando que $x \leq a$. Una simple inducción completa la prueba de lo afirmado.

Sea $X \subseteq L$, ; $y = \sup X$ en L, y $a \in B(L)$.

Si $x \leq a$ para todo $x \in X$, entonces las fórmulas de la afirmación procedente se cumplen para todo x y a y aplicando (JID) a (1),..., (i), probamos que $y \leq a$. Así $y = \sup X$ en $B(L)$.

El argumento dual usando (MID), completa la prueba •

TEOREMA 10.3 (N. Funayama).

Una red completa L tiene una inmersión completa en una red Booleana completa si y solo si L satisface (MID) y (JID) •

PRUEBA

Combinando Corolario 10.3 y Lema 10.7 •

La representación para $a \in B(L)$ dada en el Lema 10.1 en general no es única; la única excepción es cuando L es una cadena. Puesto que este caso es de especial interés, deberemos investigarlo al detalle.

DEFINICION 10.4

Una red Booleana B es R-generada por una cadena si $B = B(C)$

para alguna cadena $C \subseteq B$.

DEFINICION 10.5

Una red distributiva L *es R-generada por una cadena* $C (\subseteq L)$ *si* C *R-genera a* $B(L)$.

Notación:

Para una cadena C en una red L, escribimos $C°$ para denotar la cadena C si L no tiene cero, y $C°$ denotará $C \cup \{0\}$ si L tiene un cero.

LEMA 10.8

Sea L *una red distributiva y sea* C *una cadena en* L. *Entonces* C *R-genera* L *si y solo si* L *es la más pequeña sub red de si misma conteniendo* $C°$ *y cerrada bajo la formación de complementos relativos* .

PRUEBA

Apliquemos Lema 10.4 a $C°$.

DEFINICION 10.6

Para una cadena C, *sea* $B[C]$ *el conjunto formado por todos los* *subconjuntos de C de la forma*

$$(a_0] + (a_1] + \ldots + (a_{n-1}], \quad 0 < a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_{n-1}, \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in C$$

y ϕ*, donde + es la diferencia simétrica de conjuntos, o sea*

$$A+B = (A-B) \cup (B-A) \quad .$$

Comentario:

Consideraremos a $B[C]$ como un C.O.P.O. parcialmente ordenado por $\subseteq$. La cláusula "$0 < a_0$" signfica que $0 < a_0$ si 0 existe; en otro caso no existe restricción para a_0.

Identificaremos a $a \in C$ con $(a]$, para $a \neq 0$, y 0 (si él existe) con ϕ. Así $C \subseteq B[C]$.

LEMA 10.9

$B[C]$ *es la red Booleana generalizada R-generada por* C .

PRUEBA

$a = a_0 + b_1 + a_1 + \ldots + b_{n-1} + a_{n-1}$ si y solo si

$a \equiv (a_0] \cup (b_1, a_1] \cup \ldots \cup (b_{n-1}, a_{n-1}]$

a_0 puede no existir, si el número de sumandos de a es impar, en cualquier caso, los elementos que tienen la forma de a son cerrados bajo uniones e intersecciones, o sea forman una red. También con cerrados bajo la diferencia simétrica de conjuntos (esta será la operación "+") y el elemento cero, el ϕ. De esta manera $B[C]$ es una red Booleana generalizada R-generada por C, por Teorema 10.2 , $B[C] \cong B(C)$ •

De este Lema inmediatamente concluimos:

COROLARIO 10.4

En B(C) *cada elemento no cero tiene una única representación en la forma*

$a = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1},\ 0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} \in C$ •

PRUEBA

Ya que

$a = (a_0] \cup (a_1,a_2] \cup \ldots \cup (a_{n-2},a_{n-1}]$ si n es impar.

$a = (a_0,a_1] \cup \ldots \cup (a_{n-2},a_{n-1}]$ si n es par;

en $B[C]$ •

Los siguientes resultados prueban que muchas redes distributivas pueden ser R-generadas por cadenas.

LEMA 10.10

Cada red Booleana finita B *puede ser R-generada por una cadena; de hecho* $B = [C]_R$ *para cualquier cadena maximal* C *de* B •

PRUEBA

Sea C una cadena maximal en L y sea B = B(C). Como C también es maximal en B(C), por Corolario 7.7

$$|J(L)| = |J(B)|.$$

Entonces Υ: $L \longrightarrow B$

$H(J(L)) \longrightarrow H(J(B))$

es una inmersión de L en B. Así $L \subseteq B = B(C)$ •

TEOREMA 10.4

Cada red distributiva contable L puede ser R-generada por una cadena •

PRUEBA

Sea $L = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ y sea L_n una sub red de L generada por $a_0, \ldots, a_n$. Además supongamos que C_0 es una cadena maximal de L_0, e, inductivamente, que C_n es una cadena maximal de L_n conteniendo a C_{n-1}.

Hagamos $C = \cup(C_i / i < \alpha)$. Afirmamos que C genera a L. Para el caso, tomemos un $a \in B(L)$;

$a = x_0 + \ldots + x_{m-1}$, $x_0, \ldots, x_{m-1} \in L$. Como $L = \cup(L_i / i < \alpha)$. Así para algún n, $x_0, \ldots, x_{m-1} \in L_n$, de donde $a \in B(L_n)$.

Puesto que L_n es finito, por Teorema 10.4 $B(L_n) = B(C_n)$; por tanto $a \in B(C_n) \subseteq B(C)$, probando que $L \subseteq B(C)$ •

COROLARIO 10.5

La correspondencia $C \longrightarrow B(C)$ *mapea la clase de las cadenas contables sobre la clase de las redes Booleanas generalizadas. Bajo esta correspondencia, subcadenas e imagenes homomorficas corresponden a sub algebras e imagenes homomorficas* •

DEFINICION 10.7

Un intervalo $[a,b]$ *es primo si* $a \prec a$ •

LEMA 10.11

Cada cadena contable C *puede ser inmersa en la cadena* Q *de números racionales. Cada cadena contable que no contiene un intervalo primo es isomorfo a uno de los intervalos* $(0,1)$, $[0,1)$, $(0,1]$, *ó* $[0,1]$ *de* Q.

PRUEBA

Sea $C = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots\}$. Definamos el mapeo γ inductivamente como sigue: tomemos un arbitrario $\gamma_0 \in Q$ y hagamos

$x_0\gamma = r_0$.

Si $x_0\gamma, \ldots, x_{n-1}\gamma$ estan bien definidos, definimos $x_n\ \gamma$ como sigue:

Sean $L_n = \cup\,((x_i\gamma]/x_i < x_n,\ i < n)$

$U_n = \cup\,([x_i\gamma)/x_i > x_n,\ i < n)$

(Es posible que $L_n = \phi$ ó $U_n = \phi$). Notemos que si $L_n \neq \phi$, entonces el tiene un elemento maximal ℓ_n, y si $U_n \neq \phi$, entonces el tiene un elemento mínimo u_n. Si ambos son no vacíos, entonces $\ell_n < u_n$. En cualquier caso podemos escoger un $r_n \in Q$ con $r_n \notin L_n \cup U_n$ y hacemos $x_n\gamma = r_n$. Obviamente, γ es una inmersión. La segunda parte de la prueba se reduce a la siguiente afirmación:

Sean C y D cademas contables acotadas sin intervalos primos. Entonces $C \cong D$. Para probar esto, hagamos $C = \{c_0, c_1, \ldots, \ldots\}$ y $D = \{d_0, d_1, \ldots\}$.

Definamos dos funciones: $\gamma: C \longrightarrow D$, $\Psi: D \longrightarrow C$. Asumamos que $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, y que $d_0 = 0$, $d_1 = 1$. Para cada $n < \infty$, debemos definir inductivamente cadenas finitas C_n, D_n ($C_n \subseteq C$, $D_n \subseteq D$) y un isomorfismo $\gamma_n: C_n \longrightarrow D_n$ con inversa $\Psi_n: D_n \longrightarrow C_n$. Sea $C_0 = \{c_0, c_1\} = \{0,1\}$, $D_0 = \{d_0, d_1\} = \{0,1\}$ y $i\gamma_0 = i$, $i\Psi_0 = i$, para $i = 0,1$. Dados $C_n, D_n, \gamma_n, \Psi_n$, y n par, sea k el entero más pequeño con $c_k \notin C_n$.

Definimos $u_k = \Lambda([c_k) \cap C_n)$ y $\ell_k = ((c_k] \cap C_n)$.

Entonces $\ell_k < c_k < u_k$, y así $\ell_k \gamma_n < u_k \gamma_n$. Puesto que D no contiene intervalos primos, podemos escoger un $d \in D$ satisfaciendo $\ell_k \gamma_n < d < u_k \gamma_n$. Puesto que Ψ_n es isótono, $d \notin D_n$. Definimos $C_{n+1} = C_n \cup \{c_k\}$, $D_{n+1} = D_n \cup \{d\}$, γ_{n+1} restringido a C_n es γ_n, y $c_k \gamma_{n+1} = d$, Ψ_{n+1} restringido a D_n es Ψ_n y $d \Psi_{n+1} = c_k$. Si n es impar procedamos en forma similar, pero intercambiamos los roles de C y D, C_n y D_n, γ_n y Ψ_n, respectivamente.

Finalmente, pongamos $\gamma = \cup(\gamma_n / n < \infty)$. Claramente, $C = \cup(C_n / n < \infty)$, $D = \cup(D_n / n < \infty)$, y γ es el isomorfismo requerido •

COROLARIO 10.6

Salvo un isomorfismo existe exactamente una red Booleana contable sin átomos y exactamente una red Booleana generalizada contable sin átomos y sin elementos unitarios, B(D), *donde* D *es el intervalo de racionales* $[0,1)$ •

PRUEBA

Tomemos el intervalo de números racionales en $[0,1]$ y $[0,1)$. La red Booleana generalizada es en cuestión $B([0,1])$ y $B([0,1))$ respectivamente. Esto se sigue de la observación que $[a,b]$ es un intervalo primo en C si y solo si $a + b$ es un átomo en B(C). El resultado se sigue de Lema 10.9 y 10.11 y Teorema 10.4 •

11. REPRESENTACION TOPOLOGICA

El C.O.P.O. $P(L)$ de ideales primos nos da mucha información acerca de la red distributiva L, pero obviamente no caracteriza a L. Por tanto es necesario dotar a $P(L)$ con más estructuras si queremos caracterizar a L.

DEFINICION 11.1

Una semired disyunción L es llamada distributiva si $a \leq b_0 \vee b_1$ $(a, b_0, b_1 \in L)$ *implica la existencia de* $a_0, a_1 \in L$, $a_i \leq b_i$, $i = 0,1$, *con* $a = a_0 \vee a_1$ *(ver figura 11.1)* •

Note que a_0 y a_1 no necesariamente son únicos.

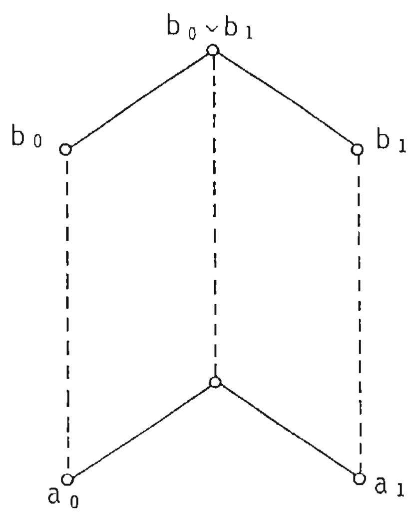


Figura 11.1

Algunas propiedades elementales de semiredes distributivas son las siguientes:

LEMA 11.1

(*i*) *Si* $(L;\wedge,\vee)$ *es una red, entonces la semired disyunción* $(L;\vee)$ *es distributiva si y solo si la red* $(L;\wedge,\vee)$ *es distributiva.*

(*ii*) *Si una semired disyunción* L *es distributiva, entonces para cualquier* $a,b \in L$ *existe un* $d \in L$ *con* $d \leq a$, $d \leq b$. *Consecuentemente* $I(L)$ *es una red.*

(*iii*) *Una semired disyunción* L *es distributiva si y solo si* $I(L)$, *como una red, es distributiva* •

PRUEBA

(i) Si $(L;\wedge,\vee)$ es distributiva, y $a \leq b_0 \vee b_1$, entonces con $a_i = a \wedge b_i$, $i = 0,1$, $a = a_0 \vee a_1$, y por tanto $(L,\vee)$ es semired distributiva.

Recíprocamente, si $(L,\vee)$ es distributiva, y la red L tiene a M_5 ó N_5 como una sub red, entonces $a \leq b \vee c$ (ver la notación de la figura 7.1) y no se pueden encontrar a_1, a_2 con $a_1 \leq b$, $a_2 \leq c$ y $a = a_1 \vee a_2$, lo que produce a una contradicción con lo supuesto. De este modo la red $(L,\wedge,\vee)$ es distributiva.

(ii) $a \leq a \vee b$, de este modo $a = a_0 \vee b_0$, donde $a_0 \leq a$, $b_0 \leq a$. Puesto que $b_0 \leq a$, b_0 es cota enferior de a y de b.

(iii) Primero observemos que, para $I, J \in I(L)$,
$I \vee J = \{i \vee j / i \in I;\ j \in J\}$

se sigue de que asumimos que L es una semired disyunción distributiva.

Supongamos que I(L) es una red. Ahora sean I,J,K elementos de I(L) con $I \leq J \vee K$, como
$I = (I \cap J) \vee (I \cap K)$, $(I(L), \vee)$ es distributiva, por tanto por (i) $(I(L); \wedge, \vee)$ es una red distributiva.

Recíprocamente, si I(L) es distributiva, y $a \leq b_0 \vee b_1$, entonces

$$\begin{aligned}(a] &= (a] \wedge ((b_0] \vee (b_1]) \\ &= ((a] \wedge (b_0]) \vee ((a] \wedge (b_1]),\end{aligned}$$

y así $a = a_0 \vee a_1$, $a_0 \in (b_0]$, $a_1 \in (b_1]$, lo cual es la distributividad para L •

DEFINICION 11.2

Un subconjunto D *de una semired disyunción* L *es llamado un ideal dual si* $a \in D$ *y* $x \geq a$ *implica que* $x \in D$, *y* $a, b \in D$ *implica que existe una cota inferior* d *de* $\{a, b\}$ *tal que* $d \in D$ •

DEFINICION 11.3

Un ideal I *de* L *es primo si* $I \neq L$ *y* $L - I$ *es un ideal dual* •

Nuevamente con $P(L)$ denotaremos el conjunto de todos los ideales primos de L.

LEMA 11.2

Sea I *un ideal y sea* D *un ideal dual de una semired disyunción distributiva* L. *Si* $I \cap D = \phi$, *entonces existe un ideal primo* P *de* L *con* $P \supseteq I$, $P \cap D = \phi$ •

PRUEBA

Sea X el conjunto de todos los ideales de L conteniendo a I y que son disjuntos de D.

Tenemos que verificar que X satisface la hipótesis del Lema de Zorn. Puesto que $I \in X$, concluimos que X es no vacío. Sea C una cadena en X y sea $M = \cup(X/X \in C)$. Si $a,b \in M$, entonces $a \in X$, $b \in Y$ para algún X, $Y \in C$; puesto que C es una cadena, $X \subseteq Y$ ó $Y \subseteq X$; si, decimos, $X \subseteq Y$, entonces $a,b \in Y$, y así $a \vee b \in Y \subseteq M$, puesto que Y es un ideal. También, si $b \leq a \in M$, entonces $a \in X$; puesto que X es un ideal, $b \in X \subseteq M$. De este modo M es un ideal. Es obvio que $M \supseteq I$ y $M \cap D = \phi$, verificando que $M \in X$. Por tanto por el Lema de Zorn, X tiene un elemento maximal, digamos, P. Afir mamos que P es un ideal primo. Realmente, si P no es primo, existen $a,b \in L$ tal que $a,b \notin P$ y para cualquier c tal que $c \leq a$ y $c \leq b$, se tiene que $c \in P$. A causa de la maximilitud de P, $(P \vee (a]) \cap D \neq \phi$, $(P \vee (b]) \cap D \neq \phi$.

Sean $p \vee a \in D$, $q \vee b \in D$, $p,q \in P$. De este modo existe $x \in D$ tal que $x \leq p \vee a$ y $x \leq q \vee b$. Así $x = p_1 \vee a_1$ con $p_1 \leq p$, $a_1 \leq a$ y $x = q_1 \vee b_1$ con $q_1 \leq q$, $b_1 \leq b$. Así $x \in (P \vee (a]) \cap (P \vee (b]) \cap D$. Por (ii) Lema 11.1 tenemos:

$[P \vee (P \cap (a]) \vee (P \cap (b]) \vee ((a] \cap (b])] \cap D \neq \phi$ con $(a] \cap (b] \subseteq P$, por hipótesis. De este modo $P \cap D \neq \phi$ lo cual es una contradicción •

En el resto de esta sección, entenderemos por L_a una semi-red - disyunción con cero.

En $P(L)$ los conjuntos de la forma $r(a) = \{P / a \notin P\}$ representan los elementos de L. Haremos de todos estos conjuntos, conjuntos abiertos. Con $L\ell(L)$ denotemos el espacio Topológico definido en $P(L)$ postulando que los conjuntos de la forma $r(a)$ son una sub - base para los conjuntos abiertos; llamaremos a $L\ell(L)$ el espacio Stone de L.

LEMA 11.3

Sea I *un ideal de* L,

$$r(I) = \{P / P \in P(L),\ P \not\supseteq I\}$$

Entonces r(I) *es abierto en* $L\ell(L)$. *Recíprocamente, cada conjunto abierto* U *de* $L\ell(L)$ *puede ser representado únicamente como* r(I) *para algún ideal* I *de* L •

PRUEBA

Simplemente observemos que

$$r(I) \cap r(J) = r(I \wedge J),$$
$$r(\vee(I_j/j \in K) = \cup\ (r(I_j)/j \in K),$$

y $r((a]) = r(a)$, de lo cual se sigue que los r(I) forman la más pequeña colección de conjuntos cerrados bajo intersecciones finitas y uniones arbitrarias conteniendo todos los r(a).

Observemos que $a \in I$ si y solo si $r(a) \subseteq r(I)$. De este modo $r(I) = r(J)$ si y solo si $a \in I$ es equivalente a, $a \in J$, esto es, si y solo si $I = J$ •

TEOREMA 11.1

Los conjuntos de la forma r(a) *forman una base para* $L\ell(L)$ •

PRUEBA

Los conjuntos r(a) forman una sub - base para $L\ell(L)$. Para que sean una base tenemos que verificar que para cualquier

$a, b \in L$, $P \in r(a) \cap r(b)$, existe $c \in L$ con $P \in r(c)$, $r(c) \subseteq r(a) \cap r(b)$. Por lo asumido, $a \notin P$, $b \notin P$; de este modo, si P es primo, existe un $c \in L$, $c \notin P$, $c \leq a$, $c \leq b$.

Entonces $P \in r(c)$, $r(c) \subseteq r(a)$, y $r(c) \subseteq r(b)$, como es requerido •

LEMA 11.4

Los subconjuntos de $L\ell(L)$ de la forma $r(a)$ pueden ser caracterizados como conjuntos abiertos y compactos •

PRUEBA

Efectivamente si una familia de conjuntos abiertos $\{r(I_k)/k \in K\}$ es una cobertura para $r(a)$, esto es, $r(a) \subseteq \cup(r(I_k)/k \in K) = r(V(I_k/k \in K))$, entonces $a \in V(I_k/k \in K)$. Esto implica que $a \in V(I_k/k \in K_0)$ para algún finito $k_0 \subseteq K$, probando que $r(a) \subseteq \cup(r(I_k)/k \in K_0)$.

De este modo $r(a)$ es compacto. Recíprocamente, si I no es principal, entonces $r(I) \subseteq \cup(r(a)/a \in I)$, pero $r(I) \not\subseteq \cup(r(a)/a \in I_0)$ para cualquier I_0 finito con $I_0 \subseteq I$.

Del Lema 11.4 y Teorema 11.1 concluimos:

TEOREMA 11.2

El espacio Stone $L\ell(L)$ *determina a* L *salvo un isomorfismo* •

Sea P un ideal primo de L. Entonces P es representado como un elemento de $L\ell(L)$ y también por r(P). La conección entre P y r(P) está dada en el Lema 11.6 e ilustrada en la figura 11.2

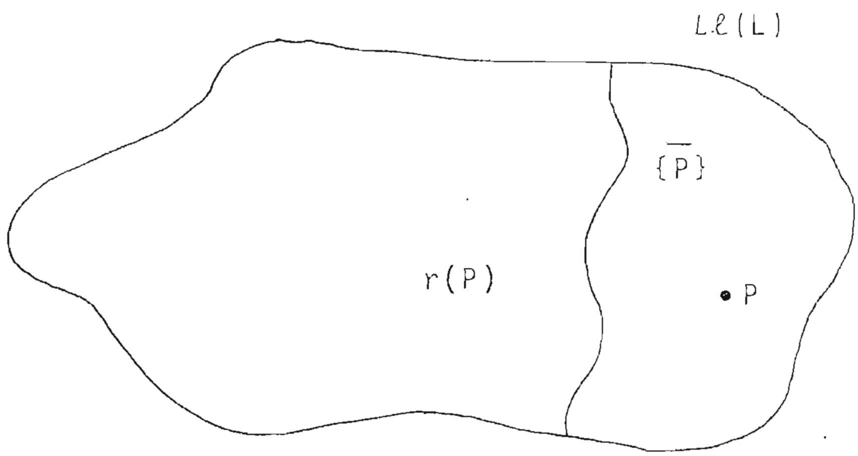


Figura 11.2

LEMA 11.5

Para cada ideal primo P *de* L, $\overline{\{P\}} = L\ell(L) - r(P)$, *donde* $\overline{\{P\}}$ *es la cerradura topológica de* {P} •

PRUEBA

Por definición de cerradura,

$\{\overline{P}\} = \{Q/Q \in r(a)$ implica que $P \in r(a)\}$

$= \{Q/Q \supseteq P\}$

$= L\ell(L) - \{Q/Q \not\supseteq P\}$

$= L\ell(L) - r(P)$ •

COROLARIO 11.1

Si $P \neq Q$, *entonces* $\{\overline{P}\} \neq \{\overline{Q}\}$; *en otras palabras,* $L\ell(L)$ *es un espacio* T_0 •

PRUEBA

Combinando Lema 11.3 y 11.5 •

El Lema 11.5 también prueba que si P es un ideal primo, entonces $L\ell(L) - r(P)$ debe ser la cerradura de un conjunto unitario.

En otras palabras:

(C) si U es un conjunto abierto con la propiedad que, para los conjuntos abiertos y compactos U_0 y U_1, $U_0 \cap U_1 \subseteq U$ implica que $U_0 \subseteq U$ ó $U_1 \subseteq U$, entonces $L\ell(L) - U = \{\overline{P}\}$ para algún elemento P.

DEFINICION 11.4

Una familia de conjuntos abiertos y compactos $\{U_k / k \in K\}$ *es dualmente dirigida si* $K \neq \phi$ *y para* $k_0, k_1 \in K$, *existe un* $k_2 \in K$ *tal que* $U_{k_2} \subseteq U_{k_0} \cap U_{k_1}$

Ahora estableceremos el Teorema de Caracterización:

TEOREMA 11.3

El espacio Stono $L\ell$ *de una semired disyunción distributiva con cero puede ser caracterizado (salvo homeomorfismos) por las siguientes dos propiedades:*

(S1) *$L\ell$ es un T_0 - espacio en el cual los conjuntos abiertos y compactos forman una base para los conjuntos abiertos.*

(S2) *Si F es un conjunto cerrado en $L\ell$, $\{U_k / k \in K\}$ es una familia dirigida dualmente de conjuntos abiertos y compactos de $L\ell$, y $U_k \cap F \neq \phi$, entonces* $\cap (U_k / k \in K) \cap F \neq \phi$ •

PRUEBA

Por Corolario 11.1 y Teorema 11.2 (S1) es satisfecho. Para verificar (S2) para $L\ell(L)$, sea $F = L\ell(L) - r(I)$ y $U_k = r(a_k)$. De este modo $F = \{P/P \supseteq I\}$ y $U_k = \{P/a_k \in P\}$.

Lo asumido sobre los a_k significa que $D = \{x/x \geq a_k$ para algún $k \in K\}$ es un ideal dual; por hipótesis sobre los U_k, $U_k \cap F \neq \phi$, y tenemos $r(a_k) \not\subseteq r(I)$; esto es, $a_k \notin I$, probando que $D \cap I = \phi$. Por tanto, por Lema 11.2, existe un ideal primo P con $P \supseteq I$, $P \cap D = \phi$. Entonces $a_k \notin P$, y así $P \in r(a_k)$ para todo $k \in K$. También $P \supseteq I$, de este modo $P \notin r(I)$, y así $P \in F$, probando que $P \in F \cap \cap (U_k/k \in K)$, verificando (S2).

Recíprocamente, sea $L\ell$ un espacio topológico que satisface las condiciones (S1) y (S2). Sea L el conjunto de todos los conjuntos abiertos y compactos de $L\ell$. Obviamente, $\phi \in L$ y si $A, B \in L$, entonces $A \cup B \in L$, y por tanto L es una semired disyunción con cero. Sea

$$A \subseteq B_0 \cup B_1 \quad \text{con } A,\ B_0,\ B_1 \in L.$$

Entonces $A \cap B_i$ es abierto, y por tanto $A \cap B_i = \cup (A_j^i/j \in J_i)$, $i = 0,1$, donde los A_j^i son conjuntos abiertos compactos. Puesto que $A = (A \cap B_0) \cup (A \cap B_1) = \cup (A_j^i/j \in J_0 \cup J_1, i = 0,1)$, por la compacidad de A conseguimos $A = \cup (A_j^i/j \in \overline{J}$ ó $j \in J_1)$, donde $\overline{J}_i$ es un subconjunto finito de J_i, $i = 0,1$. Hagamos

$$A = \cap (A_j^i/j \in \overline{J}_i),\ i = 0,1.$$

Entonces A_0, $A_1 \in L$, $A = A_0 \cup A_1$, y $A_0 \subseteq B_0$, $A_1 \subseteq B_1$, probando que L es distributiva.

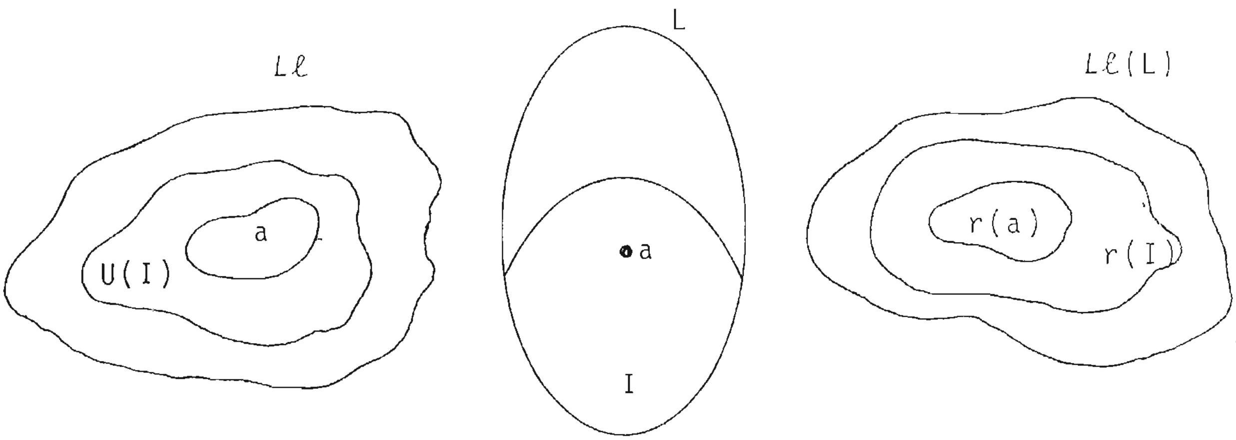


Figura 11.3

Se sigue de (S2) que los conjuntos abiertos de $L\ell$ estan asociados unívocamente con los ideales de L.

Para un ideal I de L, sea $U(I) = \cup(a/a \in I)$ (guardar en mente que un $a \in L$ es un subconjunto de $L\ell$, como está ilustrado en la figura 11.3). Note que para $a \in L$, $a \in I$ si y solo si $a \subseteq U(I)$.

Ahora sea P un ideal primo de L, $F = L\ell - U(P)$, y sean $\{U_k/k \in K\}$ el conjunto de todos los conjuntos abiertos compactos de $L\ell$ que tienen intersección no vacía con F. De este modo, los U_k son exactamente aquellos elementos de L que no estan en P. Por tanto, por la definición de un ideal primo, dados $k, \ell \in K$, existe $t \in K$ con $U_t \subseteq U_k$, $U_t \subseteq U_\ell$ probando que F y $\{U_k / k \in K\}$ satisfacen la hipótesis de la condición (S2). Por (S2) concluimos que existe un $p \in F \cap \cap(U_k / k \in K)$. Si $q \in F$, entonces para cada conjunto abierto compacto U con $q \in U$, tenemos $U \cap F \neq \phi$; de este modo $p \in U$, probando que $\overline{\{p\}} = F$. Notemos que $L\ell(L)$ es T_0; por tanto p es único.

Recíprocamente, si $p \in L\ell$, Sea $I = \{a / a \in L,\ a \subseteq L\ell - \overline{\{p\}}\}$. Entonces I es un ideal de L, y $L\ell - \overline{\{p\}} = U(I)$. Veamos que I es primo. Efectivamente, si $U, V \in L$, $U \notin I$, $V \notin I$, entonces $U \cap \overline{\{p\}} \neq \phi$, $V \cap \overline{\{p\}} \neq \phi$, y por tanto $p \in U$, $p \in V$. De este modo, $p \in U \cap V$ y así $U \cap V \not\subseteq U(I)$.

Por (S1) existe al menos un $W \in L$ con $W \subseteq U \cap V$, $W \not\subseteq U(I)$. Por tanto $W \notin I$, y así I es primo.

El mapeo γ: $P \longrightarrow p$ es uno a uno y sobreyectivo entre los espacios topológicos $L\ell(L)$ y $L\ell$. Para probar que $L\ell$ es un homeomorfismo, es suficiente probar que U es abierto en $L\ell(L)$ si y solo si $U\gamma$ es abierto en $L\ell$. Puesto que un típico conjunto abierto en $L\ell(L)$ es de la forma $r(I)$ $(I \in I(L))$, y un conjunto abierto de $L\ell$ es de la forma $U(I)$, solamente necesitamos probar que $r(I)\gamma = U(I)$ y $U(I)\gamma^{-1} = r(I)$ en otras palabras, que $P \in r(I)$ si y solo si $(P\gamma =)p \in U(I)$. Efectivamente, $P \in r(I)$ significa que $P \not\supseteq I$, lo cual es equivalente a $U(P) \not\supseteq U(I)$; esto es lo mismo que $U(I) \cap (L\ell - U(P) \neq \phi$. Puesto que $L\ell - U(P) = \overline{\{P\}}$ con

$p = P\gamma$, la condición última significa que $U(I) \cap \{\overline{P}\} \neq \phi$, lo cual se cumple si y solo si $p \in U(I)$.

COROLARIO 11.2 (M.H. Stone).

El espacio Stone de una red distributiva es caracterizado por (S1), (S2), y
(S3) La intersección de dos abiertos compactos es compacto .

COROLARIO 11.3 (M.H. Stone)

El espacio Stone $L\ell$ de una red Booleana (llamado un espacio Booleano) puede ser caracterizado como un espacio compacto Hausdorff en el cual los conjuntos abiertos y cerrados forman una base para los conjuntos abiertos .

PRUEBA

Sea $L\ell = L\ell(B)$, donde B es una red Booleana. Entonces $L\ell = r(1)$, y de este modo $L\ell$ es compacto. Sean $P,Q \in L\ell$ y $P \neq Q$ y tomemos $a \in P-Q$. Entonces $Q \in r(a)$, $P \in r(a')$; por tanto, cada par de elementos de $L\ell$ puede ser separado por conjuntos abiertos - cerrados, verificando que $L\ell$ es Hausdorff. Obviamente $L\ell$ es totalmente desconectado.

Recíprocamente, sea $L\ell$ compacto. Hausdorff, en la cual los conjuntos abiertos y cerrados forman una base para los conjuntos abiertos. Entonces (S1) es obvio. (S2) se sigue de la observación que F y los U_i, $i \in I$, son conjuntos cerrados que tienen la propiedad de la intersección finita; por tanto, por la compacidad, ellos tienen un elemento en común. (S3) se cumple puesto que la intersección de dos abiertos compactos es la intersección de abiertos cerrados, lo cual es cerrado, y en este espacio es compacto. Luego los conjuntos abiertos y compactos forman una red distributiva B, la cual es Booleana, con $L\ell$ homeomorfismo a $L\ell(B)$ •

TEOREMA 11.4

Sea B *una red Booleana infinita. Entonces*

$$|P(B)| \geq |B| \quad \bullet$$

PRUEBA

Sea $L\ell$ un espacio Hausdorff compacto en el cual los conjuntos abiertos cerrados forman una base. Para $a, b \in L\ell$ con $a \neq b$, fijemos un par de conjuntos cerrados-abiertos $U_{a,b}$, $U_{b,a}$ tal que $a \in U_{a,b}$, $b \in U_{b,a}$ y $U_{a,b} \cap U_{b,a} = \varphi$.

Ahora sea U un conjunto cerrado - abierto y $a \in U$. Entonces $L\ell - U \subseteq \cup (U_{b,a} / b \in L\ell - U)$, y así, por la compacidad de $L\ell - U$, $L\ell - U \subseteq \cup (U_{b,a} / b \in B)$ para algún finito $B \subseteq L\ell' - U$. Entonces $V_a = \cap (U_{a,b} / b \in B)$ es abierto y $a \in V_a \subseteq U$. De este modo, $U \subseteq \cup(V_a/a \in U)$, así por compacidad de U, $U \subseteq \cup(V_a/a \in A)$ para algín finito $A \subseteq U$. Por tanto, $U = \cup(V_a/a \in A)$. De este modo cada conjunto abierto cerrado es unión finita de intersecciones finitas de $U_{a,b}$, y así no hay más conjuntos abiertos-cerrados que la existencia de secuencias finitas de elementos de $L\ell$, de aquí que

$$|P(B)| \geq |B| \quad \bullet$$

LEMA 11.6

Sean L_0 y L_1 *redes distributivas acotadas y sea* γ *un* $\{0,1\}$ - *homomorfismo sobreyectivo de* L_0 *en* L_1. *Entonces*

$$L\ell(\gamma): P \longrightarrow P\gamma^{-1}$$

Mapeo $L\ell(L_1)$ *en* $L\ell(L_0)$; $L\ell(\gamma)$ *es una función continua con la propiedad que si* U *es un abierto - conpacto en* $L\ell(L_0)$, *entonces* $U(L\ell(\gamma))^{-1}$ *es compacto en* $L\ell(L_1)$.

Recíprocamente, si $\Psi: L\ell(L_1) \longrightarrow L\ell(L_0)$ *tiene las propiedades anteriores, entonces* $\Psi = L\ell(\gamma)$ *para exactamente un*

$$\gamma: L_0 \longrightarrow L_1 \quad \bullet$$

PRUEBA

Como γ es un $\{0,1\}$ - homomorfismo sobreyectivo, si P es primo en L_1, $P\gamma^{-1}$ es primo en L_0. De este modo $L\ell(\gamma)$ es una fun ción sobreyectiva.

Además, si $U = r(a)$, $a \in L_0$, entonces

$$U\,\mathcal{L}\ell(\gamma)^{-1} = \{P/P \in \mathcal{L}\ell(L_1),\ PQ^{-1} \in r(a)\}$$
$$= \{P/P \in \mathcal{L}\ell(L_1),\ a \notin P\gamma^{-1}\}$$
$$= \{P/P \in \mathcal{L}\ell(L_1),\ a\gamma \notin P\}$$
$$= r(a\gamma).$$

Recíprocamente, si un tal Ψ es dado y $U = r(a)$, $a \in L_0$, entonces $U\,\Psi^{-1}$ es abierto - compacto, y así $U\,\Psi^{-1} = r(b)$ para un único $b \in L_1$. Y
así $\gamma: a \longrightarrow b$ es un mapeo sobreyectivo de L_0 en L_1.

Es claro que $\mathcal{L}\ell(L_0)\,\Psi^{-1} = \mathcal{L}\ell(L_1)$, y tambien

$\phi\,\Psi^{-1} = \phi$ y obtenemos $1\gamma = 1$, $0\gamma = 0$.

Ya que $r(a \vee b) = r(a) \cup r(b)$ y
$r(a \wedge b) = r(a) \cap r(b)$, obtenemos:
$(a \vee b)\gamma = a\gamma \vee b\gamma$, $(a \wedge b)\gamma = a\gamma \wedge b\gamma$.

Por lo tanto γ es un $\{0,1\}$ - homomorfismo, y $\Psi = \mathcal{L}\ell(\gamma)$ ○

DEFINICION 11.5

Sea $\mathcal{L}\ell$ un espacio topológico. La Booleanización de $\mathcal{L}\ell$ es un espacio topológico $\mathcal{L}\ell^B$ sobre $\mathcal{L}\ell$ que tiene los conjuntos abiertos - compactos de $\mathcal{L}\ell$ y sus complementos como una sub-

base para los conjuntos abiertos .

LEMA 11.7

El espacio topológico compacto $L\ell$ satisface (S1), (S2), y (S3) si y solo si $L\ell^B$ es un espacio Booleano .

PRUEBA

Supongamos que satisface (S1), (S2) y (S3).
Para $x,y \in L\ell^B$, obtenemos: $\overline{\{x\}} = \{x\}$, el complemento de $\{x\}$ es abierto en $L\ell$, así existe un abierto compacto B en $L\ell$ que contiene a y, y no contiene a x, como B y su complemento, son ambos abiertos en $L\ell^B$, entonces $L\ell^B$ es Hausdorff y totalmente desconectado. Ahora verifiquemos la compacidad de $L\ell^B$, sea F_0 una colección de conjuntos abiertos compactos de $L\ell$ y sea F_1 una colección de complementos de conjuntos abiertos compactos de $L\ell$, y supongamos que en $F = F_0 \cup F_1$ ninguna intersección finita es vacía. Por (S3) F_0 es cerrado por intersecciones finitas. Puesto que los miembros de F_1 son cerrados en $L\ell$ y $L\ell$ es compacto, $\cap(X/X \in F_1) = F$ es distinto de de vacío; ya que de otra forma $\cup(L\ell - X/X \in F_1)$ es cobertura de $L\ell$ y no tiene sub - cobertura finita. También, para cualquier $U \in F_0$, y $X \in F_1$, $U \cap X$ es cerrado en U (considerando a U como un espacio topológico compacto), y así
$U \cap F = \cap(U \cap X/X \in F_1) \neq \phi$, puesto que U es compacto y

$(U \cap X / X \in g \subseteq F_1)$ con g finito es distinto de vacío.

Aplicando (S2) a F y F_0, concluimos que $\cap F = \phi$ lo cual, por el Teorema de Alexander prueba la compacidad de $L\ell^B$. Como la base de $L\ell^B$ está formada de intersecciones finitas de abiertos compactos (que tambien son cerrados en $L\ell$), esta base está formada por abiertos - cerrados. Por Corolario 11.3, $L\ell^B$ es un espacio Booleano.

Recíprocamente, si $L\ell^B$ es Booleano, los conjuntos abiertos compactos de $L\ell^B$ forman una red Booleana L. Como $L\ell^B$ es compacto, tambien lo es $L\ell$, un abierto compacto de $L\ell$ es también un abierto compacto de $L\ell^B$, puesto que el es abierto en $L\ell^B$, y también es cerrado en $L\ell^B$, por lo tanto es compacto en $L\ell^B$. Así si L_1 es el conjunto de conjuntos abiertos compactos de $L\ell$, $L_1 \subseteq L$. L_1 es una red, ya que $L\ell$ es compacto. Así L_1 es una sub red de L, L_1 es distributiva, y por Corolario 11.2, $L\ell = L\ell(L_1)$ satisface (S1), (S2) y (S3) ∎

B I B L I O G R A F I A

1. George Gratzen
   "Lattice Theory"

2. Joaquín Antonio Sermeño
   "Seudocomplementos en Conjuntos parcialmente Ordenados"

3. J. K Munkres
   "Topology A. First Course".