UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

SEMINARIO DE GRADUACION

GRUPOS TOPOLOGICOS

Noviembre 1977

San Salvador, El Salvador, Centro América

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:	HONORABLE CONSEJO DE ADMINISTRACION PROVISIONAL DE LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
SECRETARIO GENERAL:	DR. EDMUNDO BARRERA RODRIGUEZ

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO:	ARQ. MANUEL ENRIQUE ALFARO
SECRETARIO:	ING. LUIS A. CARBAJAL VALDEZ

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE DEL DEPARTAMENTO:	ING. GABRIEL MELENDEZ MAYORGA

TRABAJO DESARROLLADO POR:

CARLOS ERNESTO ANGULO AGUILA

PREVIO A LA OPCION DE SU TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

SEMINARIO DE GRADUACION

ASESORES: LIC. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

LIC. MAURO HERNAN HENRIQUEZ

INDICE

INTRODUCCION

En el presente trabajo, se hace un estudio de los resultados que se obtienen de dotar un conjunto G de una estructura algebraica y - de una topológica.

El modelo, que he tomado, de estructura algebraica es la de - grupo; es así, como mi interés se manifiesta en "Grupos Topológicos".

Considero conveniente mencionar, que todo lo que puede decirse acerca de Grupos Topológicos puede, por supuesto, también aplicarse a otros sistemas algebraicos topológicos, por ejemplo: Anillos Topológicos, Módulos Topológicos, Campos Topológicos y Espacios Vectoriales Topológicos. Sin embargo, mayores restricciones son impuestas sobre estos sistemas.

El contenido está organizado en capítulos y cada uno de estos en secciones. La numeración de las proposiciones y definiciones es correlativa para cada capítulo y si en determinado momento se hace referencia a una proposición o definición, se menciona el número, unicamente, si corresponde al mismo capítulo y en caso contrario, el número y - capítulo correspondiente.

Quiero dejar constancia que mi trabajo se ha limitado a interpretar y redactar los resultados que obtuve de los textos consultados, los cuales en nuestro medio son muy escasos.

Por fin, agradezco a todas las personas que de alguna u otra manera colaboraron para que esto se realizara.

I. ESTRUCTURA: GRUPO TOPOLOGICO

1. GRUPOS TOPOLOGICOS

DEFINICION 1. Llamaremos grupo topológico a un conjunto G, dotado de una estructura de grupo y de una estructura topológica, que satisface los siguientes dos axiomas:

(GT_1) La función $(x,y) \longrightarrow xy$ de $G \times G$ en G es continua.

(GT_2) La función $x \longrightarrow x^{-1}$ de G en G es continua.

Se dice que una estructura de grupo y una estructura topológica dadas sobre un conjunto G, son compatibles, si ellas satisfacen a (GT_1) y (GT_2).

EJEMPLOS

1) La topología discreta sobre un grupo G, es compatible con la estructura de grupo.

2) La topología definida por la métrica $|x-y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, es compatible con $(\mathbb{R}, +)$.

PRUEBA

La función $(x,y) \longrightarrow x+y$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es continua.

En efecto, la continuidad de $x+y$ en el punto (x_o, y_o) es consecuencia inmediata de la desigualdad

$$|(x+y) - (x_o+y_o)| \leq |x-x_o| + |y-y_o|$$

y de la definición.

La función $x \longrightarrow -x$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es continua.

Esto es una consecuencia de la identidad $|x-x_o| = |x_o-x|$ y de la definición.

3) La topología usual en $\mathbb{R}$ inducida a $\mathbb{R}^+$, es compatible con $(\mathbb{R}^+, .)$.

4) Si G es un grupo topológico, su topología es compatible con la estructura de el grupo G^o, el cual es, el opuesto de G; G^o, con esta topolo-

gía se dice ser el grupo topológico opuesto a G.

5) Consideremos el grupo aditivo de un anillo A. Todo filtro F, cuyos elementos son los ideales de A, define una topología compatible con esta estructura de grupo aditivo.

PROPOSICION 1. Los axiomas (GT_1) y (GT_2) son equivalentes al siguiente:

(GT') La función $(x,y) \longrightarrow xy^{-1}$ de $G \times G$ en G es continua.

DEMOSTRACION

Sean las funciones

$$\sigma: \; G \times G \longrightarrow G$$
$$(x,y) \rightsquigarrow \sigma(x,y) = xy$$

$$\tau: \; G \longrightarrow G$$
$$x \rightsquigarrow \tau(x) = x^{-1}$$

$$\mu: \; G \times G \longrightarrow G$$
$$(x,y) \rightsquigarrow \mu(x,y) = xy^{-1}$$

"(GT_1) y (GT_2) implican (GT')".

En efecto:

$$G \times G \xrightarrow{(1,\tau)} G \times G \xrightarrow{\sigma} G$$
$$(x,y) \rightsquigarrow (x,y^{-1}) \rightsquigarrow xy^{-1}$$

es una composición de funciones continuas.

Como $\mu = \sigma_o(1,\tau)$, tenemos que μ es continua.

"(GT') implica (GT_1) y (GT_2).

En efecto:

$$G \xrightarrow{\lambda_e} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$
$$x \rightsquigarrow (e,x) \rightsquigarrow x^{-1}$$

es una composición de funciones continuas.

Como $\tau = \mu \circ \lambda_e$, tenemos que τ es continua.

En forma análoga

$$G \times G \xrightarrow{(1,\tau)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

$$(x,y) \rightsquigarrow (x,y^{-1}) \rightsquigarrow xy$$

de donde $\sigma = \mu \circ (1, \tau)$ es continua.

DEFINICION 2. Sea G un grupo topológico y $a \in G$. Entonces la función

$$L(a): G \longrightarrow G$$

$$x \rightsquigarrow ax$$

es llamada una traslación izquierda.

Similarmente la función

$$R(a): G \longrightarrow G$$

$$x \rightsquigarrow xa$$

es llamada una traslación derecha.

PROPOSICION 2. Sea G un grupo topológico y $a \in G$. Entonces las funcio-- nes $L(a)$, $R(a)$, τ y $R(a^{-1}) \circ L(a)$ son homeomorfismos.

DEMOSTRACION

- $L(a)$ es inyectiva.

Supongamos que $ax = ay$, esto implica inmediatamente que $x = y$ después de - multiplicar a la izquierda por a^{-1}.

- $L(a)$ es sobre.

Para todo $x \in G$, $a^{-1}x$ es tal que $L(a)(a^{-1}x) = x$.

- $L(a)$ es continua.

En efecto:

$$G \xrightarrow{\lambda_a} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

$$x \rightsquigarrow (a,x) \rightsquigarrow ax$$

es una composición de funciones continuas.

Como $L(a) = \mu \circ \lambda_a$, tenemos que $L(a)$ es continua.

- $L(a^{-1})$ es continua.

Como $L^{-1}(a) = L(a^{-1})$ y $L(a^{-1})$ es continua por lo anterior, entonces $L^{-1}(a)$ es continua.

Conclusión final, $L(a)$ es un homeomorfismo. En forma similar se prueba que $R(a)$ también lo es.

- τ es inyectiva.

Supongamos que $x^{-1} = y^{-1}$, esto implica que $x = y$ por la unicidad de los -- elementos inversos.

- τ es sobre.

En efecto, todo $x \in G$ es tal que $(x^{-1})^{-1} = x$.

- τ es continua por el axioma (GT_2).
- τ^{-1} es continua.

En efecto, $\tau = \tau^{-1}$.

Conclusión final, τ es un homeomorfismo.

- Como $R(a^{-1})$ y $L(a)$ son homeomorfismos, tenemos que $R(a^{-1}) \circ L(a)$ es un - homeomorfismo.

$$G \xrightarrow{L(a)} G \xrightarrow{R(a^{-1})} G$$

$$x \rightsquigarrow ax \rightsquigarrow axa^{-1}$$

$$(R(a^{-1}) \circ L(a))(x) = axa^{-1}$$

<u>PROPOSICION 3.</u> Sea G un conjunto dotado de una estructura algebraica y de una estructura topológica. Entonces la topología sobre G es compatible con la estructura de grupo si y sólo si

(i) $L(a)$ y $R(b)$ $(a, b \in G)$ son continuas,

(ii) la función $(x,y) \longrightarrow xy^{-1}$ de $G \times G$ en G, es continua en el punto (e, e).

<u>DEMOSTRACION</u>

La condición necesaria se obtiene de la proposición 1 y proposición 2.

Conversamente, supongamos que (i) y (ii) se cumplen. Tenemos que demostrar que la función $(x,y) \longrightarrow xy^{-1}$ es continua en $G \times G$. Si escribimos $x = au$, $y = bv$, entonces por (ii), $(u,v) \longrightarrow uv^{-1}$ es continua en (e,e), y usando (i), encontramos que la función

$$(x,y) \longrightarrow (a^{-1}x,\ b^{-1}y) = (u,v) \longrightarrow uv^{-1} \longrightarrow a\,u\,v^{-1}b^{-1} = xy^{-1}$$

es continua.

<u>PROPOSICION 4.</u> Sea G un grupo topológico, F un conjunto cerrado en G y $a \in G$. Entonces aF, Fa y F^{-1} son todos cerrados.

Además, si U es un conjunto abierto en G y $E \subset G$, entonces UE, EU y U^{-1} son todos abiertos.

<u>DEMOSTRACION</u>

Probaremos que Fa es cerrado y UE es abierto; la prueba para los restantes se hace en forma similar.

Por ser $R(a)$ un homeomorfismo y F un conjunto cerrado en G, tenemos que $R(a)(F) = Fa$ es un conjunto cerrado en G.

Si U es abierto en G, entonces $R(a)(U) = Ua$ es un conjunto abierto en G.

Podemos escribir $UE = \bigcup_{a \in E} (Ua)$.

Luego UE es abierto por ser unión de conjuntos abiertos.

2. VECINDARIOS DE UN PUNTO EN UN GRUPO TOPOLOGICO

En un espacio topológico, la topología es posible definirla por medio de los vecindarios de sus puntos; es por esto, que se analizará, la importancia que tiene lo que a continuación se dirá.

Sea $\mathbb{B}$ el filtro de vecindarios del elemento identidad e en un grupo topológico G, y sea a un punto de G. Como L(a) y R(a) son homeomorfismos, se sigue que el filtro de vecindarios de a, es la familia $a\mathbb{B}$ de conjuntos aV, donde V recorre $\mathbb{B}$, y de manera similar la familia $\mathbb{B}a$ de conjuntos Va. Luego nosotros podemos conocer el filtro de vecindarios de cualquier punto de un grupo topológico tan pronto como conozcamos el filtro de vecindarios del elemento identidad e del grupo.

DEFINICION 1. Un vecindario del elemento identidad de un grupo topológico G, lo llamaremos un núcleo de G.

PROPOSICION 1. Sea G un grupo topológico y $\mathbb{B}$ el filtro de núcleos de G. Entonces $\mathbb{B}$ tiene las siguientes propiedades que se cumplen:

(GV_1) Dado $U \in \mathbb{B}$, existe $V \in \mathbb{B}$ tal que $V.V \subset U$.

(GV_2) Dado $U \in \mathbb{B}$, tenemos que $U^{-1} \in \mathbb{B}$.

(GV_3) Para todo $a \in G$ y todo $V \in \mathbb{B}$, tenemos que $aVa^{-1} \in \mathbb{B}$.

DEMOSTRACION

Las propiedades (GV_1) y (GV_2) se obtienen del hecho que xy y x^{-1} son continuas en $G\times G$ y G respectivamente, en particular son continuas en (e,e) y e.

Finalmente, como $R(a^{-1})\circ L(a)$ es un homeomorfismo y además $(R(a^{-1})\circ L(a))(e) = e$, se tiene que (GV_3) se cumple.

PROPOSICION 2. Las propiedades (GV_1) y (GV_2) son equivalentes a la propiedad

(GV_a) Dado $U \in \mathbb{B}$, existe $V \in \mathbb{B}$ tal que $V.V^{-1} \subset U$.

DEMOSTRACION

"(GV_1) y (GV_2) implican (GV_a)".

Sea $U \in \mathbb{B}$, por (GV_1) tenemos que, existe $W \in \mathbb{B}$ tal que $W.W \subset U$.

Por (GV_1) y (GV_2), podemos afirmar que existe $V \in \mathbb{B}$ tal que $V.V \subset W \cap W^{-1}$; de donde $V \subset W$ y $V^{-1} \subset W$, ya que $V \subset W^{-1}$. Por lo tanto $V.V^{-1} \subset W.W \subset U$.

"(GV_a) implica (GV_1) y (GV_2)".

Sea $U \in \mathbb{B}$, por (GV_a) tenemos que, existe $V \in \mathbb{B}$ tal que $V.V^{-1} \subset U$.

Como $V.V^{-1} \subset U$ implica que $V^{-1} \subset U$, de donde $V \subset U^{-1}$, por lo que $U^{-1} \in \mathbb{B}$ con $U \in \mathbb{B}$.

Finalmente, si $V \in \mathbb{B}$ es tal que $V.V^{-1} \subset U$, y $W \in \mathbb{B}$ es tal que $W \subset V \cap V^{-1}$, tenemos que $W.W \subset V.V^{-1} \subset U$.

PROPOSICION 3. Sea G un grupo y $\mathbb{B}$ un filtro sobre G, el cual satisface las propiedades (GV_1), (GV_2) y (GV_3). Entonces existe una única topología sobre G, compatible con la estructura de grupo de G, para la cual $\mathbb{B}$ es el filtro de núcleos de G.

DEMOSTRACION

Si existe una topología con las propiedades requeridas, entonces por lo que se ha dicho acerca del filtro de vecindarios de cualquier punto $a \in G$, coincide con cada uno de los filtros $a\mathbb{B}$ y $\mathbb{B}a$; luego la topología es única si existe.

La existencia se establecerá si mostramos:

1) Que los filtros $a\mathbb{B}$ son los filtros de vecindarios de una topología sobre G, y

2) Que esta topología es compatible con la estructura de grupo de G.

1) Para demostrar que $a\mathbb{B}$ es el filtro de vecindarios de a, en una topología sobre G, tenemos que verificar los siguientes axiomas

   (V_1) Todo subconjunto de G el cual este contenido en un conjunto perteneciente a $a\mathbb{B}$ también pertenece a $a\mathbb{B}$.

   (V_2) Toda intersección finita de conjuntos de $a\mathbb{B}$ pertenece a $a\mathbb{B}$.

   (V_3) El elemento a está en todo conjunto de $a\mathbb{B}$.

   (V_4) Si V pertenece a $a\mathbb{B}$, entonces existe un conjunto W perteneciente a $a\mathbb{B}$ tal que, para cada $y \in aW$, aV pertenece a $y\mathbb{B}$.

Los axiomas (V_1) y (V_2) se derivan de la definición de filtro.

Sea $aV \in a\mathbb{B}$, es evidente que $a \in aV$ ya que $a = a.e$, $e \in V$. Luego (V_3) se cumple.

Sólo nos falta verificar el axioma (V_4). Sea entonces V un conjunto de $\mathbb{B}$, y W un conjunto de $\mathbb{B}$ tal que $W.W \subset V$; entonces para cualquier $y \in aW$ tenemos $yW \subset aWW \subset aV$, así que aV pertenece a $y\mathbb{B}$, luego (V_4) se satisface.

2) Mostremos ahora que la topología definida por el filtro de vecindarios de e, es compatible con la estructura de grupo de G.

   En virtud de No.1, proposición 3, tenemos que demostrar que L(a) y --

$R(a)$ son continuas y la función $(x,y) \longrightarrow xy^{-1}$ es continua en (e,e)

- $L(a)$ es continua.

Sea $\mathcal{O}$ un abierto de G, probaremos que $L^{-1}(a)(\mathcal{O})$ es un abierto de G. Sea $x \in L^{-1}(a)(\mathcal{O})$, entonces $ax \in \mathcal{O}$; de donde $\mathcal{O}$ se puede expresar como $\mathcal{O} = Vax$ para algún núcleo V de G.

Pero por (GV_3) tenemos que $a^{-1}Va$ es un núcleo de G, es así como $a^{-1}\mathcal{O} = a^{-1}Vax$, de donde $L^{-1}(a)(\mathcal{O})$ es un abierto de G.

- $R(a)$ es continua.

Siguiendo un proceso similar al anterior se concluye que $R(a)$ es -- continua.

- Finalmente, (GV_a) expresa que la función $(x,y) \longrightarrow xy^{-1}$ de $G \times G$ en G es continua en (e,e).

Nota. Un método común de definir una topología compatible con la estructura de grupo sobre G, consiste en darse un filtro que satisfaga los axiomas (GV_1), (GV_2) y (GV_3). Las condiciones correspondientes - para una base de filtro son las siguientes:

(GV'_1) Dado $U \in \mathbb{B}$, existe $V \in \mathbb{B}$ tal que $V.V \subset U$.

(GV'_2) Dado $U \in \mathbb{B}$, existe $V \in \mathbb{B}$ tal que $V^{-1} \subset U$.

(GV'_3) Dado $a \in G$ y $U \in \mathbb{B}$, existe $V \in \mathbb{B}$ tal que $V \subset aUa^{-1}$.

DEFINICION 2. Un núcleo V de G el cual coincide con su imagen bajo la -- función $x \longrightarrow x^{-1}$, se dice ser simétrico.

PROPOSICION 4. Si V es un núcleo de G, entonces $V \cup V^{-1}$, $V \cap V^{-1}$ y $V.V^{-1}$ son núcleos simétricos.

DEMOSTRACION

Probaremos que $V \cup V^{-1}$ y $V.V^{-1}$ son núcleos simétricos, la prueba del restante se hace en forma similar.

$$"(V \cup V^{-1})^{-1} = V \cup V^{-1}"$$

Sea $x \in (V \cup V^{-1})^{-1}$; entonces $x^{-1} \in V \cup V^{-1}$, de donde $x^{-1} \in V$ ó $x^{-1} \in V^{-1}$, por lo que $x \in V^{-1}$ ó $x \in V$, es decir $x \in V \cup V^{-1}$.

Sea $x \in V \cup V^{-1}$; entonces $x \in V$ ó $x \in V^{-1}$, por lo que $x^{-1} \in V^{-1}$ ó $x^{-1} \in V$. De donde $x^{-1} \in (V \cup V^{-1})$, es decir $x \in (V \cup V^{-1})^{-1}$.

$$"(V.V^{-1})^{-1} = V.V^{-1}"$$

Sea $x \in (V.V^{-1})^{-1}$; entonces $x^{-1} \in V.V^{-1}$, es decir $x^{-1} = m.n$; $m \in V$, $n \in V^{-1}$. De donde $x = n^{-1}.m^{-1}$; $n^{-1} \in V$, $m^{-1} \in V^{-1}$; por lo que $x \in V.V^{-1}$.

Sea $x \in V.V^{-1}$, entonces $x = m.n$; $m \in V$, $n \in V^{-1}$. Por lo tanto $x^{-1} = n^{-1}.m^{-1}$; $n^{-1} \in V$, $m^{-1} \in V^{-1}$, de donde $x^{-1} \in V.V^{-1}$, es decir $x \in (V.V^{-1})^{-1}$.

PROPOSICION 5. Los núcleos simétricos forman un sistema fundamental de vecindarios.

DEMOSTRACION

Sea U un núcleo de G, por (GV_2) y la proposición anterior, tenemos que U^{-1} es un núcleo y $U \cap U^{-1}$ es un núcleo simétrico.

Como $U \cap U^{-1} \subset U$; se tiene que los núcleos simétricos forman un sistema fundamental de vecindarios.

Nota. Si G es conmutativo, tenemos que $xAx^{-1} = A$ para todo subconjunto A de G y todo $x \in G$, y además (GV_3) es automáticamente satisfecho para --

todo filtro sobre G.

PROPOSICION 6. Sea G un grupo topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1) G es separado.

2) La intersección de todos los núcleos consiste únicamente de el punto e.

3) El conjunto $\{e\}$ es cerrado.

DEMOSTRACION

"1) $\Longrightarrow$ 2)"

Sea x un punto común a todos los núcleos de G. Supongamos que $x \neq e$ y sea W un vecindario de x y U un núcleo; como $x \in W$ y $x \in U$, tenemos que $W \cap U \neq \phi$; lo cual es contrario al hecho de ser G separado.

"2) $\Longrightarrow$ 3)"

Probaremos que $\{e\} = \overline{\{e\}}$.

Sea $x \neq e$, entonces existe un núcleo V tal que $x^{-1} \notin V$ y además $e \notin xV$, lo cual muestra $x \notin \overline{\{e\}}$, de donde $\{e\}$ es cerrado.

"3) $\Longrightarrow$ 1)"

Sean $a, b \in G$ tal que $a \neq b$; se sigue que $L(a)(e) = \{a\}$ es cerrado, y además existe un vecindario V de b tal que $V \cap \{a\} = \phi$. El conjunto V tiene la forma Wb, donde W es un núcleo.

Sea U un núcleo tal que $U^{-1}.U \subset W$. Probaremos que G es separado mostrando que $Ua \cap Ub = \phi$.

Si $x \in Ua \cap Ub$, entonces $x = u_1a = u_2b$; $u_1, u_2 \in U$, de donde

$a = u_1^{-1} u_2 b \in U^{-1}Ub \subset Wb = V$, lo cual es contradictorio al hecho que $V \cap \{a\} = \phi$.

Luego $Ua \cap Ub = \phi$.

II. SUBESTRUCTURA

1. SUBGRUPOS DE UN GRUPO TOPOLOGICO

DEFINICION 1. Sea G un grupo topológico y H un subconjunto no vacío de G; diremos que H es un subgrupo del grupo topológico G, si

(a) $HH^{-1} \subset H$.

(b) La topología inducida sobre H, por la topología de G, es compatible -- con la estructura de grupo de H.

DEFINICION 2. Un subgrupo H de un grupo topológico G se dice ser un subgrupo cerrado de G, si H es un subconjunto cerrado del espacio topológico G. Prestaremos especial interés a los subgrupos cerrados de G.

PROPOSICION 1. Sean A y B subconjuntos de un grupo topológico G. Entonces las siguientes relaciones se cumplen:

(a) $\overline{A} \cdot \overline{B} \subset \overline{A.B}$

(b) $(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$

(c) $x\,\overline{A}\,y = \overline{(x\,A\,y)}$, para cualesquiera $x, y \in G$.

DEMOSTRACION

Para funciones continuas tenemos que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Además, $\overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B}$.

$$\sigma(\overline{A \times B}) = \sigma(\overline{A} \times \overline{B}) = \overline{A}.\overline{B} \subset \overline{\sigma(A \times B)} = \overline{A.B}.$$

Para homeomorfismo la relación $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ es cierta. Las funciones τ y $L(x)_{o}R(y)$ son homeomorfismos, de donde tenemos que las relaciones (b) y (c) se cumplen.

<u>PROPOSICION 2.</u> Si H es un subgrupo de un grupo topológico G, entonces $\overline{H}$ es un subgrupo de G. Si H es un subgrupo normal, entonces $\overline{H}$ también lo - es.

<u>DEMOSTRACION</u>

Por los literales (a) y (b) de la proposición anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \overline{H}.(\overline{H})^{-1} &= \overline{H(H^{-1})} = \overline{H\,H^{-1}} \\ &= \overline{H} \end{aligned}$$

Luego $\overline{H}$ es un subgrupo de G.

Si H es normal, entonces $aHa^{-1} = H$, $a \in G$. Por el literal (c), tene $a\overline{H}a^{-1} = \overline{(aHa^{-1})} = \overline{H}$. Se sigue que $\overline{H}$ es normal.

<u>PROPOSICION 3.</u> Sea G un grupo topológico separado. Si $ab = ba$ para todo $a \in A$, $b \in B$, siendo A y B subconjuntos de G, entonces $ab = ba$ para todo $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$.

<u>DEMOSTRACION</u>

Por ser G separado, el conjunto $\{e\}$ es cerrado.

La función

$$\begin{aligned} \psi:\ & G \times G \longrightarrow G \\ & (x,y) \rightsquigarrow xyx^{-1}y^{-1} \end{aligned}$$

es continua, por ser la composición de funciones continuas

$$\psi(x,y) = \sigma(\sigma(x,y),\ \sigma(\tau(x),\ \tau(y))).$$

Luego $\psi^{-1}(e)$ es un conjunto cerrado.

Como $A \times B \subset \psi^{-1}(e)$, de donde

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} \subset \psi^{-1}(e).$$

PROPOSICION 4. Si G es un grupo topológico separado, entonces la cerradura de un subgrupo conmutativo de G, es un subgrupo conmutativo de G.

DEMOSTRACION

Se sigue de las proposiciones 2 y 3 que $\overline{H}$ es un subgrupo abeliano.

PROPOSICION 5. Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G, el cual es localmente cerrado en un punto de H. Entonces H es cerrado en G.

DEMOSTRACION

Probaremos que H es localmente cerrado en G. Sea $m \in H$, el punto en el cual H es localmente cerrado; y sea $y \in H$ un punto cualquiera.

Por ser H localmente cerrado en m, existe Wm, donde W es un núcleo de G, tal que $Wm \cap H$ es cerrado en Wm. Además $ym \in yWm$, siendo yWm un vecindario de ym.

La función

$$R(m): G \longrightarrow G \text{ es un homeomorfismo,}$$
$$z \rightsquigarrow zm$$

por lo que $R^{-1}(m)(yWm) = yW$, es un vecindario de y.

Sólo resta probar que $yW \cap H$ es cerrado en yW. Como $Wm \cap H$ es cerrado en Wm, entonces $(Wm \cap H)m^{-1}$ es cerrado en W, es decir $W \cap H$ es cerrado en W. De donde $y(W \cap H) = yW \cap H$ es cerrado en yW.

Por lo anterior, podemos afirmar que H es localmente cerrado en G.

Sea V un núcleo, abierto y simétrico, de G tal que $V \cap H$ es cerrado en V.

Si $x \in \overline{H}$, entonces $xV \cap H \neq \phi$.

Sea $y \in xV \cap H$; entonces $x \in yV$ y además $y(V \cap H) = (yV) \cap H$ es cerrado en yV.

Como $x \in (yV) \cap \overline{H} \subset \overline{(yV) \cap H}$, entonces $x \in yV$ y $x \in \overline{(yV) \cap H}$, de donde $x \in (yV) \cap \overline{(yV) \cap H} = \overline{(yV) \cap H} = (yV) \cap H$. Por lo que $x \in H$.

PROPOSICION 6. Un subgrupo de un grupo topológico es abierto si y sólo si tiene un punto interior. Todo subgrupo abierto es cerrado.

DEMOSTRACION

Sea $H \subset G$ un subgrupo del grupo topológico G, y $m \in H$ un punto interior de H.

Luego, existe un abierto $\mathcal{O}$ tal que $m \in \mathcal{O} \subset H$. Sea $x \in H$; $mx \in \mathcal{O}x$, $\mathcal{O}x$ abierto.

La función

$$L(m): G \longrightarrow G \quad \text{es un homeomorfismo}$$
$$x \rightsquigarrow mx$$

de donde, $L^{-1}(m)(\mathcal{O}x) = m^{-1}\mathcal{O}x$ es abierto tal que $x \in m^{-1}\mathcal{O}x \subset H$.

Por lo tanto x es un punto interior de H. Para la segunda afirmación, bastará probar que H es localmente cerrado en uno de sus puntos.

Sea $m \in H$ un punto interior de H; entonces existe un abierto $\mathcal{O}$ tal que $m \in \mathcal{O} \subset H$. $\mathcal{O}$ es vecindario de m tal que $\mathcal{O} \cap H$ es cerrado en $\mathcal{O}$.

PROPOSICION 7. Un subgrupo H de un grupo topológico G, es discreto si y sólo si H tiene un punto aislado. Todo subgrupo discreto de un grupo separado, es cerrado.

DEMOSTRACION

Si H es discreto, todo punto de H es aislado. Conversamente, si H tiene un punto aislado, entonces por traslación, todo punto de H es aislado, -- luego H es discreto.

Si H es discreto y G separado, entonces existe un núcleo V de G, tal que $V \cap H = \{e\}$; como $\{e\}$ es cerrado en G, y además en V, esto hace de H, -- ser localmente cerrado en e.

Luego H es cerrado en G por la proposición 5.

2. SUBGRUPOS DENSOS.

PROPOSICION 1. Sea H un subgrupo denso de un grupo topológico G, y sea K un subgrupo normal de H. Entonces la cerradura de K en G es un subgrupo normal de G.

DEMOSTRACION

La función

$$\psi: \; G \times G \longrightarrow G, \quad \text{es continua}$$
$$(z,x) \rightsquigarrow z\,x\,z^{-1}$$

y además, $\psi(H \times K) = K$.

Por ser ψ continua, tenemos

$$\psi(\overline{H \times K}) \subset \overline{\psi(H \times K)} = \overline{K}$$
$$\psi(\overline{H} \times \overline{K}) \subset \overline{K}$$

Como H es denso en G, $\overline{H} = G$.

Luego $\psi(G\times\overline{K}) \subset \overline{K}$.

Por lo tanto $\overline{K}$ es un subgrupo normal de G.

III. MORFISMOS

1. ISOMORFISMOS E ISOMORFISMOS LOCALES

DEFINICION 1. Un isomorfismo f de un grupo topológico G sobre un grupo topológico G' es una función biyectiva de G sobre G' la cual es simultáneamente un isomorfismo de la estructura de grupo de G sobre la de G', y un homeomorfismo de G sobre G'.

EJEMPLOS

1) Sea a un punto de G; la función

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ x &\rightsquigarrow a x a^{-1} \end{aligned}$$

es un isomorfismo de G sobre G.

2) Si una topología T es compatible con la estructura de grupo de un grupo G, y si G^{o} designa el grupo topológico que se obtiene de dotar el grupo opuesto de G de la topología T, la simetría $x \longrightarrow x^{-1}$ es un isomorfismo del grupo topológico G sobre el grupo topológico G^{o}.

DEFINICION 2. Dos grupos topológicos G, G' se dicen ser isomórficos si existe un isomorfismo de G sobre G'.

DEFINICION 3. Sean G y G' dos grupos topológicos; un isomorfismo local de G en G' es un homeomorfismo f de un núcleo V de G sobre un núcleo V' de G', el cual satisface las condiciones siguientes:

1) Para cada par x, y de puntos de V tal que $xy \in V$, tenemos

$$f(xy) = f(x)\,f(y)$$

2) Si g es la función inversa de f, entonces para cada par de puntos x', $y' \in V'$ tal que $x'y' \in V'$, tenemos

$$g(x'y') = g(x')\,g(y').$$

La función g es entonces un isomorfismo local de G' en G.

DEFINICION 4. Dos grupos topológicos G, G' se dicen ser localmente isomórficos, si existe un isomorfismo local de G en G'.

Nota.

Un isomorfismo local de G en G es llamado un automorfismo local de G.

Los grupos topológicos isomórficos son, evidentemente, localmente isomórficos. El converso es falso.

Si f es un isomorfismo local de G en G', entonces toda restricción de f a un núcleo de G, es también un isomórfismo local de G en G'.

En general, si f es un homeomorfismo de un núcleo V de G sobre un núcleo V' de G', el cual satisface la condición 1) de la definición 3, f no necesariamente satisface la condición 2).

PROPOSICION 1. Sean G y G' dos grupos topológicos y f un homeomorfismo de un núcleo V de G sobre un núcleo V' de G', el cual satisface la condición 1) de la definición 3. Entonces f es una extensión de un isomorfismo local de G en G'.

DEMOSTRACION

Sea $f: V \to V'$ un homeomorfismo que cumple que: para cada par x, y de pun tos de V tal que $xy \in V$, se tiene

$$f(xy) = f(x)\, f(y).$$

Sea W un núcleo de G tal que $WW \subset V$. Probaremos que la restricción de f a W es un isomorfismo local de G en G'.

Es claro que f/W satisface la condición 1). Sea g la función inversa de f/W y $x', y' \in f(W)$ tal que $x'y' \in f(W)$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} f(g(x')\, g(y')) &= f(g(x'))\, f(g(y')) \\ &= x'y' \end{aligned}$$

Además $f(g(x'y')) = x'y'$.

Luego, $g(x'y') = g(x')\, g(y')$ por ser f inyectiva. Por lo tanto f/W es un isomorfismo local de G en G'.

IV. GRUPOS TOPOLOGICOS COCIENTES

1. ESPACIOS CON OPERADORES

DEFINICION 1. Sea X un espacio topológico y G un grupo topológico. Si las siguientes condiciones, son satisfechas

1) X tiene a G como un grupo de operadores;

2) La función $(g, x) \longrightarrow g.x$ de $G \times X$ en X es continua,

Diremos que G opera continuamente sobre X.

LEMA 1. Si un grupo topológico G opera continuamente sobre un espacio topológico X, entonces para cada $g \in G$ la función $x \longrightarrow g.x$ es un homeomorfismo de X sobre X.

DEMOSTRACION

Sea $g \in G$ y sea h la función

$$\begin{aligned} h:\ & X \longrightarrow X \\ & x \rightsquigarrow g.x \end{aligned}$$

Evidentemente h es biyectiva, donde h^{-1} está definida así:

$$\begin{aligned} h^{-1}:\ & X \longrightarrow X \\ & x \rightsquigarrow g^{-1}.x \end{aligned}$$

Para completar la prueba, probaremos que h y h^{-1} son continuas.

En efecto, dichas funciones pueden obtenerse, respectivamente, como composición de funciones continuas, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & X \longrightarrow G \times X \longrightarrow X \\ & x \rightsquigarrow (g,x) \rightsquigarrow g.x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & X \longrightarrow G \times X \longrightarrow X \\ & x \rightsquigarrow (g^{-1}, x) \rightsquigarrow g^{-1}.x \end{aligned}$$

DEFINICION 2. Para cada $x \in X$, llamaremos la órbita de x, al conjunto -- $G.x$ de transformaciones $g.x$ de x por los elementos g de G; y el conjunto de los $g \in G$ tal que $g.x = x$, lo llamaremos el estabilizador de x.

Nota. El estabilizador de x es un subgrupo de G. La relación $R\{x,y\}$: "y pertenece a la órbita de x" es una relación de equivalencia sobre X, llamada la relación de equivalencia definida por G; las clases de equivalencias con respecto a esta relación, son las órbitas de los puntos de X. - El espacio topológico X/R es llamado el espacio orbital de X (con respecto a G), o el espacio cociente de X por el grupo G, y es denotado por X/G; y la topología de X/G se dice ser el cociente de la topología de X por G.

LEMA 2. Si un grupo topológico G opera continuamente sobre un espacio topológico X, entonces la relación de equivalencia R, definida por G, es abierta.

DEMOSTRACION

Sea U un subconjunto abierto de X; probaremos que la saturación de U, con respecto a R, es abierto en X.

En efecto, dicha saturación es $\bigcup_{x\in U} G.x$ y además $\bigcup_{x\in U} G.x = \bigcup_{g\in G} g.U$, y cada g.U es abierto por el lema 1.

EJEMPLOS

1) Sea H un subgrupo de un grupo topológico G. H opera continuamente sobre G por la ley externa $(g, x) \longrightarrow gx$. H también opera continuamente sobre G por la ley externa $(g, x) \longrightarrow gx\,g^{-1}$.

PRUEBA

La primera afirmación es evidente, reflexionemos sobre la segunda.

Sea α la ley externa

$$\begin{aligned} \alpha:\ H \times G &\longrightarrow G \\ (g,x) &\rightsquigarrow gx\,g^{-1} \end{aligned}$$

El hecho de que α es continua es claro y además $\alpha(e, x) = x$.

Analicemos, si $\alpha(gt, x) = \alpha(g, \alpha(t, x))$.

En efecto, $\alpha(gt, x) = gt\,x\,t^{-1}g^{-1}$

$$\begin{aligned} \alpha(g, \alpha(t, x)) &= \alpha(g, tx\,t^{-1}) \\ &= gt\,x\,t^{-1}g^{-1} \end{aligned}$$

Luego $\alpha(gt, x) = \alpha(g, \alpha(t, x))$.

2) Sea G un grupo topológico, X un espacio topológico. Entonces la función $(g, x) \longrightarrow x$ de $G \times X$ en X es una ley de composición externa sobre X, y G opera continuamente sobre X con respecto a esta ley; se dice entonces que G opera trivialmente sobre X.

Nota. En lugar de decir que un grupo topológico G opera continuamente sobre un espacio topológico X, es frecuente decir que G opera continuamente a la izquierda sobre X. Cuando el grupo G^o opuesto a G opera continuamente sobre X, diremos que G opera continuamente a la derecha sobre X.

DEFINICION 3. Sean X, X' dos conjuntos y G, G' sus grupos de operadores respectivamente, y sea $f: G \to G'$ un homomorfismo y $h: X \to X'$ una función. f y h se dicen ser compatibles, si $h(g.x) = f(g).h(x)$ para todo $g \in G$ y todo $x \in X$.

PROPOSICION 1. Sea X" un conjunto y G" su grupo de operadores, $f': G' \to G''$ un homomorfismo y $h': X' \to X''$ una función; si f' y h' son compatibles, entonces $f'_o f$ y $h'_o h$ son compatibles.

DEMOSTRACION

Sea $g \in G$ y $x \in X$

$$\begin{aligned}(h'_o h)(g.x) &= h'(h(g.x)) \\ &= h'(f(g).h(x)) \\ &= f'(f(g)).h'(h(x)) \\ &= (f'_o f)(g).(h'_o h)(x)\end{aligned}$$

Luego $f'_o f$ y $h'_o h$ son compatibles.

DEFINICION 4. Sea S una relación de equivalencia sobre X; diremos que la relación S es compatible con el grupo G si para cada $g \in G$ la función $x \longrightarrow g.x$ de X en X, es compatible con S. [en otras palabras, tal que la relación $x \equiv y \pmod S$ implica $g.x \equiv g.y \pmod S$].

PROPOSICION 2. Si ψ es la función canónica de X sobre X/S, y si $g.\psi(x)$ denota las clases módulo S de $g.x$, entonces X/S tiene a G como un grupo de operadores con respecto a la ley externa $(g, \psi(x)) \longrightarrow g.\psi(x) = \psi(g.x)$

DEMOSTRACION

-"$g.(t.\psi(x)) = (gt).\psi(x)$ para todo $g, t \in G$ y todo $x \in X$".

$$\begin{aligned} g.(t.\psi(x)) &= g.(\psi(t.x)) \\ &= \psi(g.(t.x)) \\ &= \psi((gt).x) \\ &= (gt).\psi(x) \end{aligned}$$

-"$e.\psi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in X$".

$$e.\psi(x) = \psi(e.x) = \psi(x)$$

PROPOSICION 3. Si una relación de equivalencia S sobre X es abierta y compatible con G, entonces G opera continuamente sobre X/S.

DEMOSTRACION

Probaremos que la función

$$G \times X/S \longrightarrow X/S$$

$$(g, \psi(x)) \rightsquigarrow g.\psi(x) = \psi(g.x) \qquad \text{es continua.}$$

En efecto, como la función

$$G \times X \longrightarrow G \times X/S$$

$$(g,x) \rightsquigarrow (g, \psi(x))$$

es continua, abierta y suryectiva; además, la función

$$G \times X \longrightarrow X/S$$

$$(g,x) \rightsquigarrow g.\psi(x)$$

es continua por ser la composición de funciones continuas, esto es:

$$G \times X \longrightarrow X \longrightarrow X/S$$

$$(g,x) \rightsquigarrow g.x \rightsquigarrow g.\psi(x)$$

2. ESPACIOS HOMOGENEOS

Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G. H opera continuamente a la derecha sobre G de acuerdo a la ley externa $(t,x) \longrightarrow xt$, y la orbita de un punto $x \in G$ es la coclase izquierda xH.

DEFINICION 1. Llamaremos espacio homogêneo, y lo representaremos por G/H, al conjunto de orbitas de G

Es importante hacer notar que: cuando hablemos de G/H como un espacio topológico, lo pensaremos como el espacio orbital de G (con respecto a H); en caso contratio lo expresaremos.

PROPOSICION 2. El grupo G opera continuamente sobre todo espacio homogeneo G/H.

DEMOSTRACION

Como la relación de equivalencia $x^{-1} y \in H$ es abierta por No.1, lema 2; resulta ser esto, un caso particular de la proposición 3, No.1

PROPOSICION 3. Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Entonces la función canónica ϕ, definida

$$\phi: G \longrightarrow G/H$$
$$g \rightsquigarrow gH$$

es abierta.

DEMOSTRACION

Sea $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto en G. Probaremos que $\phi(\mathcal{O})$ es abierto en G/H; para esto mostraremos que $\phi^{-1}(\phi(\mathcal{O}))$ es abierto en G.

Primero notemos que

$$\phi(\mathcal{O}) = \{gH/\ g \in \mathcal{O}\} \quad y \quad \bigcup_{g\in\mathcal{O}} gH = \bigcup_{h\in H} \mathcal{O}h.$$

Sea $g_1 \in \phi^{-1}(\phi(\mathcal{O}))$, entonces $\phi(g_1) \in \phi(\mathcal{O})$, lo cual implica que existe $g \in \mathcal{O}$ tal que $\phi(g_1) = gH$ o $g_1H = gH$.

Como $e \in H$, tenemos $g_1 \in \bigcup_{g\in\mathcal{O}} gH$, de donde $g_1 \in \bigcup_{h\in H} \mathcal{O}h$.

Luego $\phi^{-1}(\phi(\mathcal{O})) \subset \bigcup_{h\in H} \mathcal{O}h$.

Conversamente, sea $z \in \bigcup_{h\in H} \mathcal{O}h$, entonces existe $h' \in H$ tal que $z \in \mathcal{O}h'$; de donde existe $g \in \mathcal{O}$ tal que $z = gh'$.

Como $\phi(z) = \phi(gh') = gh'H = gH \in \phi(\mathcal{O})$, entonces $z \in \phi^{-1}(\phi(\mathcal{O}))$.

Luego $\bigcup_{h\in H} \mathcal{O}h \subset \phi^{-1}(\phi(\mathcal{O}))$.

Por lo tanto $\phi^{-1}(\phi(\mathcal{O})) = \bigcup_{h\in H} \mathcal{O}h$, el cual es un conjunto abierto en G. (§1, No.1, proposición 4).

PROPOSICION 4. Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Entonces el espacio homogeneo G/H es separado si y sólo si H es cerrado en G.

DEMOSTRACION

H es una clase de equivalencia por la relación $x^{-1} y \in H$ y además, si G/H es separado, H es cerrado en G. Conversamente, supongamos que H es cerrado y sea $aH \neq bH$ en G/H. Entonces $a \notin bH$. Luego como bH es cerrado, existe un núcleo U de G tal que Ua es un vecindario de a en G y $Ua \cap bH$ es vacío.

Por el axioma (GVa), existe un núcleo V de G tal que $V^{-1}V \subset U$.

Usando el hecho de que, la función ϕ: $G \to G/H$ es abierta y, Va y Vb son vecindarios de a y b en G, tenemos que $(Va)H = V(aH)$ y $V(bH)$ son vecindarios de aH y bH, respectivamente. Estos vecindarios son disjuntos, ya que si $p \in V(aH) \cap V(bH)$, entonces $p = v\, ah = v_1\, bh_1$ para $v, v_1 \in V$ y $h, h_1 \in H$.

De donde $q = v_1^{-1}\, va = b\, h_1 h^{-1}$ pertenece a $Ua \cap bH$, lo que es contrario a lo supuesto.

PROPOSICION 5. Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Entonces el espacio homogeneo G/H es discreto si y sólo si H es abierto en G.

DEMOSTRACION

En efecto, ya que las imagenes inversas en G de los puntos de G/H bajo la función canónica son las coclases xH $(x \in G)$; y estos conjuntos son abiertos en G si y sólo si H es abierto en G.

DEFINICION 5. Sea X un espacio topológico y G un grupo topológico. Diremos que G opera transitivamente sobre X, si para todo $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $g.x = y$.

DEFINICION 6. Sea X un espacio topológico, diremos que X es (en el sentido algebraico) un espacio homogéneo de G si G opera continua y transitivamente sobre X.

Nota. Sea x un punto de X, H_x su estabilizador. La suryección contimua $g \to g.x$ de G sobre X se factoriza canónicamente así:

$$G \xrightarrow{f_x} G/H_x \xrightarrow{g_x} X$$

donde f_x es la función canónica de G sobre el espacio homogeneo G/H_x, y g_x es la biyección $gH_x \to g.x$ de G/H_x sobre X; además g_x es una función continua. Pero g_x no es necesariamente un homeomorfismo.

DEFINICION 7. Sea X un espacio topológico sobre el cual un grupo topológico G opera continua y transitivamente; diremos que X es un espacio homogeneo topológico (relativo a G) si g_x es un homeomorfismo para cada $x \in X$.

PROPOSICION 6. X es un espacio homogeneo topológico (relativo a G), si y sólo si, para cada $x \in X$, la función $g \to g.x$ de G en X, es abierta.

DEMOSTRACION

Sea $x \in X$, donde X es un espacio homogeneo topológico (relativo a G); entonces g_x es un homeomorfismo de G/H_x sobre X, para cada $x \in X$. Luego $g_x \circ f_x$ es abierta, por ser composición de funciones abiertas.

Por lo tanto, la función $g \to g.x$ de G en X, es abierta.

Conversamente, supongamos que para cada $x \in X$, la función $g \to g.x$ de G en X, es abierta. Probaremos que g_x es un homeomorfismo, para esto es suficiente probar que g_x es abierta, en vista de que g_x es biyectiva y continua.

En efecto, como $g_x \circ f_x$ es abierta para cada $x \in X$, y f_x es continua y suryectiva, tenemos que g_x es abierta.

PROPOSICION 7. Sea X un espacio topológico sobre el cual un grupo topológico G opera continua y transitivamente. Para que X sea un espacio homogeneo topológico (relativo a G), es suficiente que para algún punto $x_o \in X$, la función $g \to g.x_o$ transforme cada núcleo de G en un vecindario de x_o en X.

DEMOSTRACION

Todo $x \in X$ puede ser escrito como $x = g_1.x_o$ para algún $g_1 \in G$. Si V es un núcleo de G, entonces $V.x = (Vg_1).x_o$ es un vecindario de x, en efecto, podemos escribir

$(Vg_1).x_o = g_1((g^{-1}Vg_1).x_o)$, y la afirmación anterior se sigue de que $g^{-1}Vg$ es un núcleo de G y que $y \to g\ .y$ es un homeomorfismo de X sobre si mismo (No. 1, lema 1).

Se sigue que si U es un subconjunto abierto de G y si x es un punto de X, entonces U.x es un abierto en X; en efecto, si $t \in U$, entonces $t^{-1}U$ es un núcleo de G, luego $(t^{-1}U).x$ es un vecindario de x, y $t((t^{-1}U).x) = U.x$ es un vecindario de t.x.

Luego U.x es abierto en X, así que la función $g \to g.x$ de G en X es abierta.

3. GRUPOS COCIENTES

PROPOSICION 1. Sea G un grupo topológico y H un subgrupo normal de G. Entonces la topología cociente es compatible con la estructura de grupos de G/H.

DEMOSTRACION

Es suficiente mostrar que

$$G/H \times G/H \longrightarrow G/H$$
$$(aH, bH) \rightsquigarrow ab^{-1}H$$

es continua. Sea U un vecindario de $ab^{-1}H = \phi(ab^{-1})$ en G/H. Entonces $\phi^{-1}(U)$ es un vecindario de ab^{-1} en G. Luego, existen vecindarios V de a y W de b tal que $VW^{-1} \subset \phi^{-1}(U)$. Como ϕ es abierta, $\phi(V)$ y $\phi(W)$ son vecindarios de $aH = \phi(a)$ y $bH = \phi(b)$, respectivamente. Luego $\phi(VW^{-1}) = \phi(V)\,\phi(W)^{-1} \subset U$, lo que prueba la continuidad.

DEFINICION 1. Al conjunto G/H, de la proposición anterior, lo llamaremos grupo cociente.

PROPOSICION 2. Sea ϕ la función canónica de un grupo topológico G sobre un grupo cociente G/H. Si $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de núcleos de G, entonces $\phi(\mathcal{B})$ es un sistema fundamental de vecindarios del elemento identidad $\phi(e)$ de G/H.

DEMOSTRACION

Sea U un vecindario de $\phi(e)$, entonces $\phi^{-1}(U)$ es un núcleo de G, de donde existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset \phi^{-1}(U)$. Entonces $\phi(W) \subset \phi(\phi^{-1}(U)) = U$. De lo anterior, concluimos que $\phi(\mathcal{B})$ es un sistema fundamental de vecindarios $\phi(e)$.

PROPOSICION 3. Sea G un grupo topológico y H un subgrupo normal de G.

1) El grupo cociente G/H es separado si y sólo si H es cerrado en G.

2) El grupo cociente G/H es discreto si y sólo si H es abierto en G.

DEMOSTRACION

Las proposiciones 4 y 5 del No. 2, se dan en particular, para grupos cocientes.

COROLARIO. Si G es un grupo y N es la cerradura de $\{e\}$ en G, entonces N es un subgrupo normal cerrado de G, luego G/N es separado; G/N es llamado el grupo separado asociado con G.

PROPOSICION 4. Si H es un subgrupo normal discreto de un grupo topológico G, entonces G/H es localmente isomórfico a G.

DEMOSTRACION

Sea V un núcleo de G tal que $V \cap H = \{e\}$, y sea W un núcleo simétrico abierto de G tal que $W^2 \subset V$. Entonces la restricción a W, de la función canónica ϕ de G sobre G/H, es inyectiva; en efecto, si $x, y \in W$ y $\phi(x) = \phi(y)$, entonces $x^{-1} y \in W \subset V$ y $x^{-1} y \in H$, de donde $x = y$. Por la proposición 2, y debido a que la restricción de ϕ a W, es un homeomorfismo de W sobre $\phi(W)$; y además $\phi(xy) = \phi(x)\,\phi(y)$ para todo $x, y \in W$, concluimos que G y G/H son localmente isomórficos (§3, No. 1, proposición 1).

4. HOMOMORFISMOS CONTINUOS Y MORFISMOS ESTRICTOS

DEFINICION 1. Sean G y G' dos grupos topológicos y f una función de G en

G'; diremos que f es un homomorfismo continuo, si f es un homomorfismo de G en G' para las estructuras de grupos, y además f es continua en G.

EJEMPLO

Consideremos, los grupos topológicos dados en §1, No. 1, ejemplos 2 y 3; y la función

$$f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \rightsquigarrow f(x) = a^x, \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad a \neq 1.$$

Dicha función es un homomorfismo continuo.

PROPOSICION 1. Un homomorfismo f de un grupo topológico G en un grupo topológico G', es continuo en G si y sólo si es continuo en un punto de G.

DEMOSTRACION

Primero, probaremos que si f es continua en $e \in G$, entonces f es continua en G.

Sea $x \in G$ y U un vecindario de $f(x)$, entonces $U = f(x)\,V$, donde V es un núcleo de G'.

Por ser f continua en $e \in G$, tenemos $f^{-1}(V)$ es un núcleo de G; luego $x\, f^{-1}(V)$ es un vecindario de x, y además

$$f(x\, f^{-1}(V)) = f(x).f(f^{-1}(V)) \subset f(x)V = U.$$

Por lo tanto, f es continua en G.

Ahora, probaremos que si f es continua en un punto $a \in G$, entonces f es continua en $e \in G$.

Sea W un núcleo abierto de G', entonces $f(a)W$ es un vecindario abierto de $f(a)$.

Por ser f continua en $a \in G$, tenemos que $f^{-1}(f(a)W)$ es un vecindario --

abierto de a; luego $a^{-1}f^{-1}(f(a)W)$ es un núcleo de G, y además

$$f(a^{-1}f^{-1}(f(a)W)) = [f(a)]^{-1} f(f^{-1}(f(a)W)) \subset [f(a)]^{-1} f(a)W = W.$$

De los dos resultados demostrados, podemos afirmar que, si f es continua en un punto de G, entonces f es continua en G.

Nota. Si consideramos un homomorfismo continuo f de G en G', tenemos que la imagen inversa del elemento identidad e' de G', $f^{-1}(e')$ es un subgrupo normal de G, y f(G) es un subgrupo de G'. Además, la factorización canónica

$$f: G \xrightarrow{\phi} G/f^{-1}(e') \xrightarrow{\dot{f}} f(G) \xrightarrow{\psi} G'$$

donde ϕ es la función canónica, ψ la inyección canónica; hace que $\dot{f}$ sea un homomorfismo biyectivo continuo.

$\dot{f}$ se dice ser el homomorfismo biyectivo "asociado" con f. En general, $\dot{f}$ no es un isomorfismo de grupos topológicos.

Por ejemplo, sea G' un grupo topológico no discreto, y G el grupo topológico que se obtiene de dotar a G' de la topología discreta; entonces la función identidad de G en G' es un homomorfismo biyectivo continuo, pero no es bicontinuo.

DEFINICION 2. Un homomorfismo continuo f de un grupo topológico G en un grupo topológico G' se dice ser un morfismo estricto de G en G', si el homomorfismo biyectivo $\dot{f}$ de $G/f^{-1}(e')$ sobre f(G), asociado con f, es un isomorfismo de grupos topológicos (en otras palabras, si $\dot{f}$ es bicontinua).

Un isomorfismo de un grupo topológico G sobre un grupo topológico G' es por lo tanto un morfismo estricto biyectivo de G sobre G'.

PROPOSICION 2. Sea f un homomorfismo continuo de un grupo topológico G - en un grupo topológico G'. Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:

1) f es un morfismo estricto.

2) La imagen bajo f de todo conjunto abierto en G, es un conjunto abierto en $f(G)$.

3) La imagen bajo f de todo núcleo de G, es un núcleo de $f(G)$.

DEMOSTRACION

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\phi"'] & G' \\ G/f^{-1}(e') \arrow[r, "\dot{f}"'] & f(G) \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

"1) $\Longrightarrow$ 2)"

Sea U un abierto en G, entonces $\phi(U)$ es un abierto en $G/f^{-1}(e')$, por ser ϕ abierta; luego $\dot{f}(\phi(U))$ es abierto en $f(G)$, por ser $\dot{f}$ abierta. Por lo - tanto $f(U) = \dot{f}(\phi(U))$ es un abierto en $f(G)$.

"2) $\Longrightarrow$ 3)"

Sea V un núcleo de G, entonces existe un abierto $\mathcal{O}$ de G tal que $e \in \mathcal{O} \subset V$. de donde $f(e) = e' \in f(\mathcal{O}) \subset f(V)$.

Es así como $f(V)$ es un núcleo de $f(G)$.

"3) $\Longrightarrow$ 1)"

En virtud de la proposición 7, No. 2; es suficiente mostrar que G opera - continua y transitivamente sobre $f(G)$, por medio de la ley de composición.

$$G \times f(G) \longrightarrow f(G)$$

$$(g, f(x)) \rightsquigarrow g.f(x) = f(gx)$$

$$= f(g)\, f(x)$$

En efecto, G opera continuamente, ya que

$$G \times f(G) \longrightarrow f(G) \times f(G) \longrightarrow f(G)$$

$$(g,\ f(x)) \rightsquigarrow (f(g),\ f(x)) \rightsquigarrow f(g)\ f(x)$$

es una composición de funciones continuas.

Además,

$$g'.(g.f(x)) = (g'g).f(x) \qquad \text{para todo } g',\ g,\ x \in G.$$

En efecto, $g'.(g.f(x)) = g'.(f(gx))$

$$= f(g'(gx))$$

$$= f((g'g)x)$$

$$= (g'g).f(x)$$

$$e.f(x) = f(x), \qquad \text{para todo } x \in G.$$

$$e.f(x) = f(ex)$$

$$= f(x).$$

G opera transitivamente sobre f(G), en efecto, sean $g,\ x \in G$, entonces -- existe $g' \in G$ tal que $g'g = x$; de donde

$$f(g'g) = f(x)$$

$$g'.f(g) = f(x)$$

Luego, G opera transitivamente sobre f(G).

V. GRUPOS TOPOLOGICOS CONEXOS

1. ESPACIOS CONEXOS Y CONJUNTOS CONEXOS

DEFINICION 1. Un espacio topológico X se dice ser conexo si éste no se puede expresar como la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos.

EJEMPLOS

1) Un espacio discreto que posee más de un punto no es conexo.

2) Sea X un espacio topológico con dos puntos y cuya topología es la topología grosera. Obviamente X no se puede expresar como la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos. Así, X es conexo.

La siguiente proposición nos da otras características de los espacios conexos.

PROPOSICION 1. Sea X un espacio topológico. Las siguientes tres condiciones son equivalentes.

1) X es conexo.

2) Los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados son ϕ y X mismo.

3) X no se puede expresar como la unión de dos conjuntos cerrados disjuntos no vacíos.

DEMOSTRACION

"1) $\Longrightarrow$ 2)"

Supongamos que X es conexo y que A es un subconjunto propio no vacío de X, el cual es a la vez cerrado y abierto en X.

Entonces, $X = A \cup (X-A)$, lo que es contradictorio, pues hemos supuesto que X es conexo.

"2) $\Longrightarrow$ 3)"

Supongamos que solamente X y ϕ son abiertos y cerrados en X, entonces X no se puede expresar como la unión de dos conjuntos cerrados disjuntos no va -- cíos, puesto que si existen dichos cerrados, digamos F_1 y F_2, tal que $F_1 \cap F_2 = \phi$ y $X = F_1 \cup F_2$, entonces F es cerrado y abierto a la vez, - lo que es contrario a lo supuesto.

"3) $\Longrightarrow$ 1)"

Supongamos que X no es conexo, entonces existen abiertos O_1 y O_2 no vacíos, tales que $X = O_1 \cup O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \phi$.

Tomando $F_1 = X-O_1$ y $F_2 = X-O_2$, se tiene que $X = F_1 \cup F_2$ y $F_1 \cap F_2 = \phi$, donde F_1 y F_2 son cerrados no vacíos.

DEFINICION 2. Un subconjunto A de un espacio topológico X, se dice que es - un conjunto conexo, si el subespacio A de X es conexo.

EJEMPLOS

1) En un espacio topológico, el conjunto vacío y los conjuntos unitarios -- son conexos.
2) En un espacio separado X, todo conjunto finito que tiene más de un punto, no es conexo.

PROPOSICION 2. Un subconjunto A de X es conexo si y sólo si para cada cubrimiento de A por dos subconjuntos abiertos (o cerrados) B, C de X, tal que $A \cap B$ y $A \cap C$ sean no vacíos, tengamos $A \cap B \cap C \neq \phi$.

DEMOSTRACION

Supongamos que A es conexo, y sean B, C dos conjuntos abiertos de X tal que $A \subset B \cup C$ y $A \cap B$, $A \cap C$ no vacíos.

Luego, $A = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, donde $A \cap B$ y $A \cap C$ son abiertos de A. Como A es conexo, tenemos que $A \cap B \cap C \neq \phi$. Conversamente, supongamos que A es no conexo, y sean B, C dos conjuntos abiertos de X tal que $A \subset B \cup C$ y $A \cap B$, $A \cap C$ no vacíos.

Luego, $A = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, donde $A \cap B$ y $A \cap C$ son abiertos de A.

Como A es no conexo, tenemos que $A \cap B \cap C = \phi$.

PROPOSICION 3. La unión de una familia de conjuntos conexos, cuya intersección es no vacía, es conexo.

DEMOSTRACION

Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de subconjuntos conexos de X, tal que todos contienen un mismo punto x; probaremos que

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \qquad \text{es conexo.}$$

Supongamos que A no es conexo, entonces existen dos conjuntos abiertos B y C de X, tales que $B \cap A$ y $C \cap A$ son no vacíos, y $A \subset B \cup C$ y $A \cap B \cap C = \phi$. x pertenece a B o a C, digamos que $x \in B$; en otras palabras, x pertenece a uno de los conjuntos A_i, digamos A_x, donde $A_x \cap C \neq \phi$; tenemos además que $A_x \subset B \cup C$, $A_x \cap B \cap C = \phi$ y $B \cap A_x$ y $C \cap A_x$ son no vacíos. Luego A_x no es conexo, lo cual es una contradicción.

PROPOSICION 4. Si O_1 y O_2 son dos conjuntos abiertos de un espacio topológico X tal que $O_1 \cap O_2 = \phi$ y $X = O_1 \cup O_2$, entonces, si $E \subset X$ es conexo, $E \subset O_1$ o bien, $E \subset O_2$.

DEMOSTRACION

Por ser O_1 y O_2 abiertos en X, los conjuntos $O_1 \cap E$ y $O_2 \cap E$, son abiertos en E. Se tiene además que estos conjuntos son disjuntos y que su unión es E. Ahora bien, no puede ser que ambos sean no vacíos, pues tendríamos que E es no conexo. En consecuencia: $O_1 \cap E = \phi$, o bien, $O_2 \cap E = \phi$, de donde se sigue de inmediato el resultado.

PROPOSICION 5. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un conjunto conexo. Si $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es conexo.

DEMOSTRACION

Sea $A \subset X$ conexo y $A \subset B \subset \overline{A}$. Si B no fuera conexo, existirían abiertos no vacíos O_1 y O_2 de B tal que $O_1 \cap O_2 = \phi$ y $B = O_1 \cup O_2$.
Por la proposición 4, ha de tenerse que $A \subset O_1$, o bien, $A \subset O_2$; supongamos que $A \subset O_1$, entonces $\overline{A} \subset \overline{O}_1$. Pero, $\overline{O}_1 \cap O_2 = \phi$ ya que O_1 es abierto y cerrado en B, por lo tanto $B \cap O_2 = \phi$, lo que contradice el hecho de que O_2 es un subconjunto no vacío de B.

COROLARIO. La adherencia de una parte conexa es un conexo.

PROPOSICION 6. Sea A un subconjunto conexo de un espacio topológico X, y sea f una función continua de X en un espacio topológico X'. Entonces f(A) es conexo.

DEMOSTRACION

Supongamos que f(A) no es conexo. Entonces existen dos conjuntos M, N los cuales son abiertos en f(A) y forman una partición de f(A); luego $A \cap f^{-1}(M)$

y $A \cap f^{-1}(N)$ son abiertos en A y forman una partición de A; esto contradice la hipótesis que A es conexo.

COROLARIO. Sea G un grupo topológico, A un subconjunto conexo de G y $a \in G$. Entonces aA, Aa^{-1} y aAa^{-1} son conexos.

Nota. La imagen inversa de un conjunto conexo, bajo una función continua, no necesariamente es conexo; consideremos por ejemplo una función de un espacio discreto en un espacio que tiene un solo punto.

La proposición que se da a continuación, es una caracterización de los espacios no conexos.

PROPOSICION 7. Para que un espacio topológico X no sea conexo, es necesario y suficiente que exista una función suryectiva continua de X sobre un espacio discreto que contiene más de un punto.

DEMOSTRACION

La condición es suficiente por la proposición 6. Conversamente, si X no es conexo, existen dos subconjuntos abiertos, disjuntos, no vacíos A, B cuya unión es X, y la función f de X sobre un espacio discreto de dos elementos $\{a, b\}$, definida por $f(A) = \{a\}$ y $f(B) = \{b\}$, es continua.

2. COMPONENTES CONEXAS

Dado un punto x de un espacio topológico X, la unión de los subconjuntos conexos de X, que contienen a x, es conexo (No. 1, proposición 3); y es además el subconjunto conexo más grande de X que contiene a x.

DEFINICION 1. La componente (o componente conexa) de un punto de un espacio topológico X, es el subconjunto conexo más grande de X que contiene dicho -- punto. Las componentes de un subconjunto A de X son las componentes de los puntos de A, relativas al subespacio A de X.

PROPOSICION 1. Sea X un espacio topológico. La relación "y pertenece a la componente de x" es una relación de equivalencia $R\{x,y\}$ sobre X, y las cla - ses de equivalencia son las componentes de X.

DEMOSTRACION

La reflexividad y la simetría de R es obvio. Además R es transitiva, ya -- que, la unión de conjuntos conexos que tienen un punto en común es conexo -- (No. 1, proposición 3); luego, R es una relación de equivalencia sobre X. Sea $x \in X$, y A la componente de x; es claro que $A = \bar{x}$, donde

$$\bar{x} = \{y \in X / \text{ y pertenece a la componente de } x\}$$

Otra manera de describir las componentes conexas de un espacio topológico X, se presenta en la proposición siguiente:

PROPOSICION 2. Sea X un espacio topológico. Entonces

i) Las componentes conexas de X forman una partición de X.

ii) Si para cada $x \in X$, $C(x)$ denota la componente conexa que contiene a x, entonces $C(x) = \bigcup_{i \in I} A_i$, donde los A_i son todos los conjuntos conexos que contienen a x.

iii) $C(x)$ es conexo, para cada $x \in X$.

iv) $C(x)$ es cerrado, para cada $x \in X$.

DEMOSTRACION

i) Se obtiene de la proposición anterior.

ii) Primero notemos que para cada $x \in X$, existe una componente conexa que lo contiene, ya que X es la unión de sus componentes conexas. Además, existe al menos un conjunto conexo $\{x\}$, que contiene a x; luego, la igualdad a probar es inmediata.

iii) Se obtiene, del literal ii) y del No. 1, proposición 3.

iv) En vista de que la adherencia de un conexo es un conjunto conexo, resulta que $\overline{C(x)}$ es conexo, luego por ii), $\overline{C(x)} \subset C(x)$.

Notas.

1) Por la condición ii) de la proposición 2, se dice que $C(x)$ es la "mayor" parte conexa de X, que contiena a x.

2) Es claro que un espacio topológico X es conexo si y sólo si $C(x) = X$, para algún $x \in X$ (o para todo $x \in X$).

3) Si para un espacio topológico X se tiene $C(x) = \{x\}$, para cada $x \in X$; X se llama totalmente discontinuo.

3. GRUPO TOPOLOGICO CONEXO

PROPOSICION 1. Sea G un grupo topológico y $g \in G$. Entonces $C(e)$ es un subgrupo normal cerrado y $C(g)$ es la coclase $g\,C(e)$.

DEMOSTRACION

Si $C(e)$ es la componente conexa que contiene a e, entonces $C(e)$ es cerrado.

Si $x \in C(e)$, entonces $C(e)$ y $C(e)x^{-1}$ son conexos y contienen a e; como $C(e) \cup C(e)x^{-1}$ es conexo y $C(e) \subset C(e) \cup C(e)x^{-1}$, entonces, por ser $C(e)$ maximal, tenemos $C(e) \cup C(e)x^{-1} = C(e)$, es decir $C(e)x^{-1} \subset C(e)$.
Luego, se tiene que para todo $x \in C(e)$, $C(e)\, C^{-1}(e) \subset C(e)$, es decir, $C(e)$ es un subgrupo de G.
Si $y \in G$, entonces $e \in C(e)$ y $e \in y^{-1}C(e)y$, y por un argumento similar, concluimos que $y^{-1}C(e)y \subset C(e)$, de donde $C(e)$ es normal en G. Finalmente, si $C(g)$ es la componente conexa que contiene a g, entonces $C(g)$ y $g\,C(e)$ son conexos y contienen a g, luego $g\,C(e) \subset C(g)$; similarmente $g^{-1}C(g) \subset C(e)$, de donde $C(g) = g\,C(e)$.

PROPOSICION 2. Si G es localmente conexo (es decir, si todo punto g de G tiene un vecindario conexo), entonces $G/C(e)$ es discreto.

DEMOSTRACION

Sea U un vecindario conexo de e en G. Como $\phi: G \longrightarrow G/C(e)$ es una función abierta, $\phi(U)$ es un vecindario de $C(e)$ en $G/C(e)$.
Luego, como U es conexo tenemos que $U \subset C(e)$, por lo que $\phi(U) = \{C(e)\}$.
Por lo tanto $C(e)$ es abierto, de donde $G/C(e)$ es discreto.

PROPOSICION 3. Sea G un grupo topológico y U un núcleo abierto de G.

i) Si U es simétrico, entonces $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} U^i$ es un subgrupo abierto y cerrado de G. Si U es conexo, también lo es H.

ii) $C(e) = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U^i \right) \cap C(e)$.

iii) Si G es conexo, entonces $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} U^i$.

DEMOSTRACION

i) Si U es simétrico, entonces para $x \in U^m$, $y \in U^n$, tenemos que $xy \in U^{m+n}$ y $x^{-1} \in (U^{-1})^m = U^m$, de donde H es un subgrupo. Por ser U abierto, $U^2 = \cup\{a\,U / \ a \in U\}$ es abierto y por inducción U^i es abierto, luego H es un subgrupo abierto. Además, por §2, No.1, proposición 6, tenemos que H también es cerrado.

Si U es conexo, entonces cada U^i lo es, y por lo tanto H es conexo -- (usando el hecho de que $e \in U^i$).

ii) Sea V un núcleo simétrico tal que $V \subset U$, y sea $W = V \cap C(e)$. Entonces W es un núcleo simétrico en $C(e)$, y

$$H = \bigcup_{i=1}^{\infty} W^i \subset \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V^i \right) \cap C(e)$$

Luego, H es un subgrupo abierto y cerrado de $C(e)$ y como $C(e)$ es conexo, tenemos que $C(e) = H$.

Como $\bigcup_{i=1}^{\infty} V^i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U^i$, obtenemos así el resultado requerido.

iii) Se sigue de ii) tomando $G = C(e)$.

PROPOSICION 4. Sea G un grupo topológico conexo y H un subgrupo normal discreto de G. Entonces H está contenido en el centro de G.

DEMOSTRACION

Sea $a \in H$. Entonces la función

$$f: G \longrightarrow H$$
$$x \rightsquigarrow x^{-1} a x \qquad \text{es continua.}$$

Por ser G conexo y H discreto, tenemos que $f(G) = \{a\}$, por lo que $x^{-1} a x = a$

para todo $x \in G$, luego H está contenido en el centro de G.

PROPOSICION 5. Sea G un grupo topológico y H un subgrupo topológico cerrado tal que H es conexo y G/H es conexo. Entonces G es conexo.

DEMOSTRACION

Sea H y G/H conexos y asumamos que $G = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos no vacíos.

La función canónica

$\phi: G \longrightarrow G/H$ es abierta y además

$\phi(U) = UH$, $\phi(V) = VH$.

Como $G = U \cup V$, tenemos que $G/H = \phi(U) \cup \phi(V)$, es decir $G/H = UH \cup VH$, y como G/H es conexo, existe $aH \in UH \cap VH$.

De donde, $aH \in UH$; lo que implica que existe $h \in H$ tal que $ah = u$, $u \in U$.

De donde $aH \cap U$ es no vacío.

Similarmente $aH \cap V$ es no vacío. Ahora, como $G = U \cup V$, tenemos que $aH = (aH \cap U) \cup (aH \cap V)$, y como H es conexo y aH es homeomórfico a H, tenemos que aH es conexo.

De donde $(aH \cap U) \cap (aH \cap V)$ es no vacío. Esto implica que $U \cap V$ es no vacío, luego G es conexo.

BIBLIOGRAFIA

1) Bourbaki, N., ELEMENTS OF MATHEMATIC: GENERAL TOPOLOGY. Reading, Mass: Addison Wesley, 1966.

2) Bachman., ELEMENTS OF ABSTRACT HARMONIC ANALYSIS, Academic Press Inc, 1965.

3) Francois Treves., TOPOLOGICAL VECTOR SPACES DISTRIBUTIONS AN KERNELS, Academic Press Inc., 1967.

4) Wolfgang J. Thron., TOPOLOGICAL STRUCTURES, Holt, Reneahart and Winston, 1966.

5) Sagle., INTRODUCTION TO LIE GROUPS AND LIE ALGEBRA.