UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

TEOREMA DE METRIZACION DE NAGATA SMIRNOV

TRABAJO DE GRADUACION

PRESENTADO POR

Francisco Orlando Parada Batres

Pedro Flores Sánchez

PARA OPTAR AL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICA

ABRIL DE 1986

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR : DR. MIGUEL ANGEL PARADA

SECRETARIO GENERAL : DRA. ANA GLORIA CASTANEDA PADILLA

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO : ING. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

SECRETARIO : ING. RENE MAURICIO MEJIA MENDEZ

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

DIRECTOR : LIC. ROLANDO LEMUS GOMEZ

ORGANIZACION DEL TRABAJO DE GRADUACION

COORDINADOR : ING. JOSE FRANCISCO MARROQUIN

ASESOR :

ING. JOSE FRANCISCO MARROQUIN

INTRODUCCION

Este trabajo está organizado de tal manera que inicialmente se fundamenta al lector con los conceptos básicos de Topología que se han considerado necesarios para abrir el camino que nos lleva al estudio de los espacios metrizables que vienen a ser en esencia la parte medular de esta obra.

Prácticamente para llegar a establecer la prueba de "El Teorema de Metrización de Nagata Smirnov", hemos utilizado como herramientas, entre otros, los Espacios Topológicos Conexos, Compactos, los Axiomas de Separación y Contabilidad; lo mismo que tenemos que hacer mención del Lema y Teorema de Urysohn, el cual establece condiciones suficientes para que un espacio topológico sea metrizable.

Es en "El Teorema de Metrización de Nagata Smirnov" donde se establecen las condiciones necesarias y suficientes para que un espacio topológico sea metrizable. Se encuentran pues, condiciones lo suficientemente fuertes para que impliquen metrizabilidad y lo suficientemente débiles para que todo espacio metrizable los satisfaga.

Posterior al Teorema de Nagata Smirnov se habla de Paracompacidad y de Espacios Topológicos localmente metrizables para llegar a culminar con un corolario del Teorema de Nagata Smirnov, el cuál es "El Teorema de Metrización de Smirnov".

También, en el Capítulo IV se establecen relaciones entre espacios paracompactos y normales, lo mismo que entre espacios metrizables y paracompactos. Esta última relación se hace a través del Teorema de Stone.

En el Capítulo V se trata sobre las aplicaciones de lo estudiado en el Capítulo IV, tratando de hacer incapié en el conjunto de los números reales. Entre los ejercicios importantes podemos mencionar por ejemplo que el espacio topológico $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico es metrizable.

Considerando que el lector debe tener a la mano los conceptos básicos no topológicos de los cuales hacemos uso aquí, se ha agregado al final de este trabajo un apéndice.

Esperamos que nuestro trabajo sea útil a los lectores que se inician en el estudio de la Topología, que es una rama muy interesante de las matemáticas.

I N D I C E

CAPITULO I : CONCEPTOS INTRODUCTORIOS

ESPACIO TOPOLOGICO

Definición 1.1.

Una topología en un conjunto X, es una colección τ de subconjuntos de X que tiene las siguientes propiedades :

1) ϕ y X están en τ

2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ

3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ .

Un conjunto X para el cual una topología τ ha sido especificada es llamado espacio topológico.

Propiamente, un espacio topológico es un par ordenado (X, τ) que consiste de un conjunto X y una topología τ en X. Si no da lugar a confusión, omitiremos mencionar τ.

CONJUNTOS ABIERTOS

Definición 1.2.

Si X es un espacio topológico con una topología τ, decimos que un subconjunto U que pertenece a la colección τ es un conjunto abierto de X.

Ejemplo 1.1. :

Sea $X = \{a, b, c\}$, en la siguiente figura ilustraremos algunas topologías definidas en X :

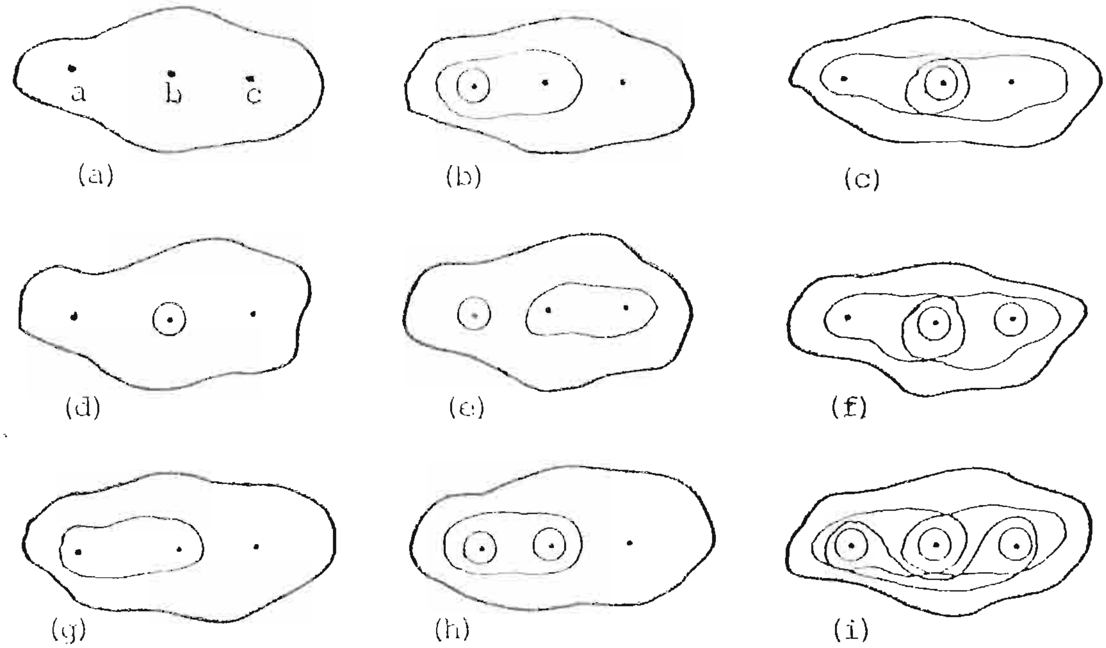


Figura 1

En (c) tenemos que :

$$\tau = \{X, \phi, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$$

mientras que en (a),

$$\tau = \{X, \phi\}$$

en (i) la topología está constituida por todos los subconjuntos de X. - Se pueden formar muchas otras topologías, permutando a, b y c.

En este ejemplo se puede observar que aún un conjunto de tres elementos tiene muchas topologías diferentes. Pero no toda colección de subconjuntos de X es una topología en X. Por ejemplo ninguna de las colecciones indicadas en la Figura 2 es una topología.

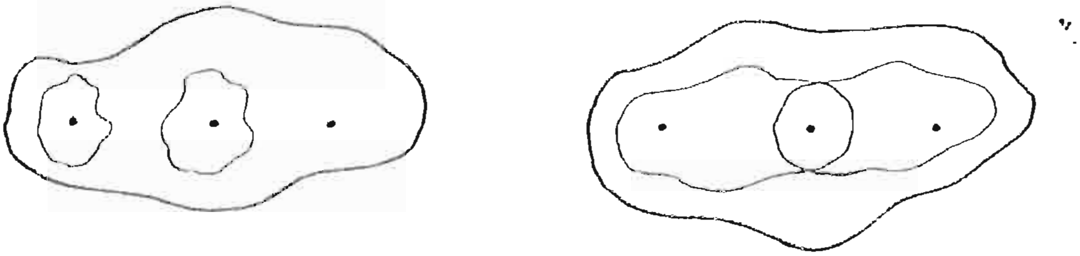


Figura 2

Ejemplo 1.2 :

Si X es un conjunto, la colección de todos los subconjuntos de X es una topología en X; esta es llamada la topología discreta. La colección que consiste de X y ϕ solamente es también una topología en X; llamaremos a ésta la topología indiscreta, o la topología trivial.

Ejemplo 1.3 :

Sea X un conjunto; sea τ_f la colección de todos los subconjuntos de U de X tal que $X \setminus U$ es finito o es todo X. Entonces τ_f es una topología en X, llamada la topología de los complementos finitos. Tanto X como ϕ están en τ_f, puesto que $X \setminus X$ es finito y $X \setminus \phi$ es todo X. Si

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in T}$$

es una colección de elementos de τ_f, para mostrar que $\bigcup U_\alpha$ está en τ_f, por propiedad de conjuntos, tenemos :

$$X \setminus \bigcup U_\alpha = \bigcap (X \setminus U_\alpha)$$

El conjunto de la derecha es finito, ya que $X \setminus U_\alpha$ es finito para todo α. Por otra parte, si $U_1, \ldots, U_n$ son elementos de τ_f, para mostrar que $\bigcap U_i$ está en τ_f establecemos que :

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus U_i)$$

La expresión de la derecha es unión finita de conjuntos finitos y por consiguiente un conjunto finito.

Ejemplo 1.4.:

Sea X un conjunto; sea τ_c la colección de todos los subconjuntos U de X tal que $X \setminus U$ es contable o es todo X. Entonces τ_c es una topología en X. Para mostrar que τ_c es una topología en X, lo hacemos en forma similar al ejemplo 3.

Ejemplo 1.5. :

Vamos a definir una topología en el conjunto $\mathbb{R}$. Decimos que U es un abierto en $\mathbb{R}$ si $\forall_x \in U$, $\exists\ \varepsilon > 0$, t.q. $B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Donde

$$B(x, \varepsilon) = \{y / |x - y| < \varepsilon\}$$

Llamamos a $\tau = \{U/U \text{ es abierto en } \mathbb{R}\}$, la topología usual en $\mathbb{R}$.

INTERIOR DE UN CONJUNTO

Definición 1.1. :

Dado un subconjunto A de un espacio topológico X, el interior de A se define como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A. Se denota por i(A).

Ejemplo 1.6. :

En el ejemplo 1.1. (Figura 1), en (b), el interior del conjunto $\{b, c\}$ es vacío, ya que $\{b, c\}$ no contiene ningún abierto; mientras que el interior de $\{a, b\}$ es $\{a, b\}$. Es evidente que el interior de un abierto es el mismo conjunto y además que el interior de un conjunto es el más grande abierto contenido en dicho conjunto.

TOPOLOGIA MAS FINA

Definición 1.4. :

Supóngase que τ y τ' son dos topologías en un conjunto dado X. Si $\tau' \supseteq \tau$, decimos que τ' es más fina que τ; si τ' contiene propiamente a τ, decimos que τ' es estrictamente más fina que τ.

También decimos que τ es más gruesa que τ', o estrictamente más gruesa en estos dos casos respectivamente.

Claro que dos topologías en X no necesariamente son comparables, por ejemplo en la figura 1 de 1.1., la topología que se ilustra en (c) es estrictamente más fina que cada una de las ilustradas en (a), (d), (g) y estrictamente más gruesa que las topologías ilustradas en (f) e (i); pero no es comparable con las topologías de (b), (e), (h).

Otra terminología usada algunas veces para este concepto es : Si $\tau' \supseteq \tau$, algunos matemáticos dicían que τ' es más grande que τ, y τ es más pequeña que τ'.

También se usa "más fuerte" y "más débil".

BASE PARA UNA TOPOLOGIA

Definición 1.5.:

Si X es un conjunto, una base para una topología en X es una colección β de subconjuntos de X (llamados elementos básicos) tal que :

1) Para cada $x \in X$, existe al menos un elemento básico B que contiene a x.

2) Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemento B_3 que contiene a x tal que :

$B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, donde B_3 es básico.

<u>Definición 1.6.</u> :

Si β es una base para una topología en X, la topología τ generada por β se describe así: Un subconjunto U de X es abierto en X (esto es, un elemento de τ), si para cada $x \in U$, existe un elemento básico $B \in \beta$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq U$.

Note que cada elemento de β es abierto en X bajo esta definición, así que $\beta \subseteq \tau$.

<u>Ejemplo 1.7.</u> :

Sea β la colección de todas las regiones circulares (interiores de círculos) en el plano. Entonces β satisface ambas condiciones para una base. Para ver si se satisface la primera condición, basta decir que todo punto del plano pertenece a una región circular. La segunda condición, se ilustra en la figura 3. En la topología generada por

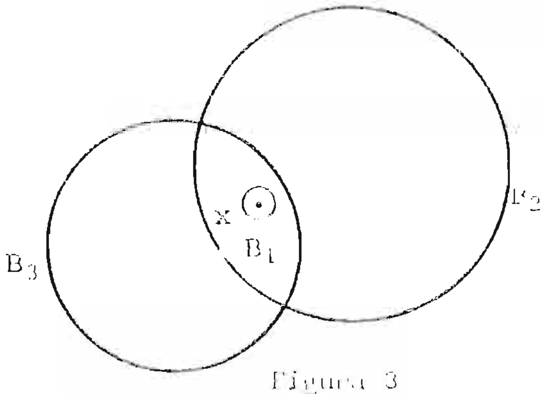


Figura 3

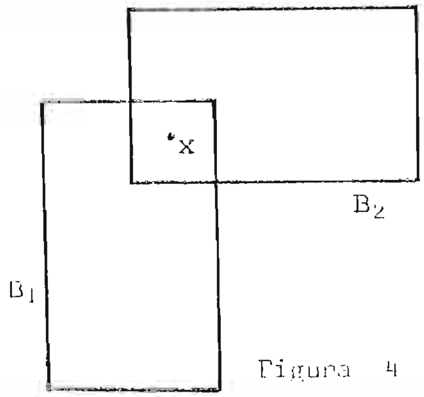


Figura 4

β, un subconjunto U del plano es abierto si todo x en U está en alguna región circular contenida en U.

<u>Ejemplo 1.8.</u> :

Sea β' la colección de todas las regiones rectangulares (interiores de rectángulos) en el plano, donde los rectángulos tienen lados paralelos a los ejes coordenados. Entonces β' satisface ambas con diciones para una base. La segunda condición es ilustrada en la figura 4; en este caso, la condición es trivial, porque la intersección de dos elementos básicos cualesquiera es ella misma un elemento básico (o vacío).

Ejemplo 1.9. :

Si X es cualquier conjunto, la colección de todos los subconjuntos unitarios de X es una base para la topología discreta en X.

Lema 1.1. :

Sea X un conjunto; sea β una base para una topología τ en X. Entonces τ es la colección de todas las uniones de elementos de β.

Lema 1.2. :

Sean β y β' bases para las topologías τ y τ', respectivamente en X. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes :

1) τ' es más fina que τ.
2) Para cada $x \in X$ y cada elemento básico $B \in \beta$ que contiene a x, existe un elemento básico $B' \in \beta'$, tal que $B' \subseteq B$.

Lema 1.3. :

Sea X un espacio topológico. Supóngase que **C** es una colección de conjuntos abiertos de X tal que para cada conjunto abierto U de X y cada x en U, existe un elemento C de **C** tal que $x \in C \subseteq U$. Entonces **C** es una base para la topología de X.

Definición 1.7. :

Si β es la colección de todos los intervalos abiertos en la recta real

$$(a, b) = \{x / a < x < b\}$$

la topología generada por β es llamada la topología usual en la recta real. Si β' es la colección de todos los intervalos semiabiertos de la forma

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

donde $a < b$, la topología generada por β' es llamada la <u>topología del límite inferior</u>. Cuando en $\mathbb{R}$ se da la topología del límite inferior, lo denotamos por $\mathbb{R}_l$.

Es fácil ver que β y β' son bases; la intersección de dos elementos básicos es otro elemento básico o es vacío.

Siempre que consideremos $\mathbb{R}$, supondremos que le ha sido asignado la topología usual, a menos que especifiquemos otra cosa.

<u>Lema 1.4.</u> :

La topología del límite inferior τ' en $\mathbb{R}$ es estrictamente más fina que la topología usual τ.

<u>SUBBASE PARA UNA TOPOLOGIA</u>

<u>Definición 1.8.</u> :

Una subbase δ para una topología en X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X. La topología generada por la subbase δ es definida como la colección τ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de δ.

Es claro que debemos comprobar que τ es una topología. Para este propósito será suficiente mostrar que la colección β de todas las intersecciones finitas de elementos de δ es una base, porque entonces la colección τ de todas las uniones de elementos de β es una topología por lema 1.1. Dado $x \in X$, este pertenece a un elemento de δ y por consiguiente a un elemento de β; ésta es la primera condición para una base.

Para comprobar la segunda condición, sean

$$B_1 = S_1 \cap \ldots\ldots \cap S_m \quad y \quad B_2 = S_1' \cap \ldots\ldots \cap S_n'$$

dos elementos de β. Su intersección

$$B_1 \cap B_2 = (S_1 \cap \ldots\ldots \cap S_m) \cap (S_1' \cap \ldots\ldots \cap S_n')$$

es también una intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$, así que pertene - ce a β.

LA TOPOLOGIA DEL ORDEN

Si X es un conjunto ordenado simplemente, existe una topología - usual para X, definida usando la relación de orden. Esta topología es - llamada la topología del orden.

Supóngase que X es un conjunto que tiene una relación de orden simple $<$. Dados dos elementos a y b de X tal que $a < b$, existen cuatro - subconjuntos de X que son llamados los intervalos determinados por a y b. Ellos son los siguientes :

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

La notación usada aquí es familiar en el caso que X es la recta - real, pero estos son intervalos en un conjunto ordenado arbitrario. Un conjunto del primer tipo es llamado intervalo abierto en X, un interva- lo del último tipo es llamado intervalo cerrado en X, y los conjuntos - del segundo y tercer tipo son llamados intervalos semiabiertos.

Definición 1.9.:

Sea X un conjunto con una relación de orden simple. Sea β la colección de todos los conjuntos de los siguientes tipos :

1. Todos los intervalos (a, b) en X.
2. Todos los intervalos de la forma $[a_0, b)$, donde a_0 es el más pequeño elemento de X en caso de que exista.
3. Todos los intervalos de la forma $(a, b_0]$, donde b_0 es el más grande elemento de X en caso de que exista.

La colección β es una base para una topología en X, que es llamada la topología del orden.

Si X no tiene elemento más pequeño, no hay conjuntos del tipo (2), y si X no tiene elemento más grande, no hay conjuntos del tipo (3).

Tenemos que comprobar que β satisface los requerimientos para una base. Primero notemos que todo elemento x de X está en al menos un elemento de β. El elemento más pequeño (si existe), está en todos los conjuntos del tipo (2), el más grande elemento (si existe), está en todos los conjuntos del tipo (3) y todo otro elemento está en un conjunto del tipo (1). Segundo, note que la intersección de cualquier dos conjuntos de los tipos anteriores es de nuevo un conjunto de uno de estos tipos, o es vacío.

Ejemplo 1.10. :

La topología usual en $\mathbb{R}$, como fue definida anteriormente es precisamente la topología del orden derivada del orden usual en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.11. :

Consideremos el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en el orden lexicográfico, denotaremos el elemento ordenado de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por $x \times y$. El conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ no tiene elemento más grande ni más pequeño, así la topología del orden en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tiene como base la colección de todos los intervalos abiertos de la forma $(a \times b, c \times d)$ para $a < c$, o donde $a = c$, tiene que ser $b < d$. Estos dos tipos de intervalo están indicados en la figura 5. La subcolección que consiste solamente de intervalos de la forma $(a \times b, a \times d)$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es también una base para la topología del orden.

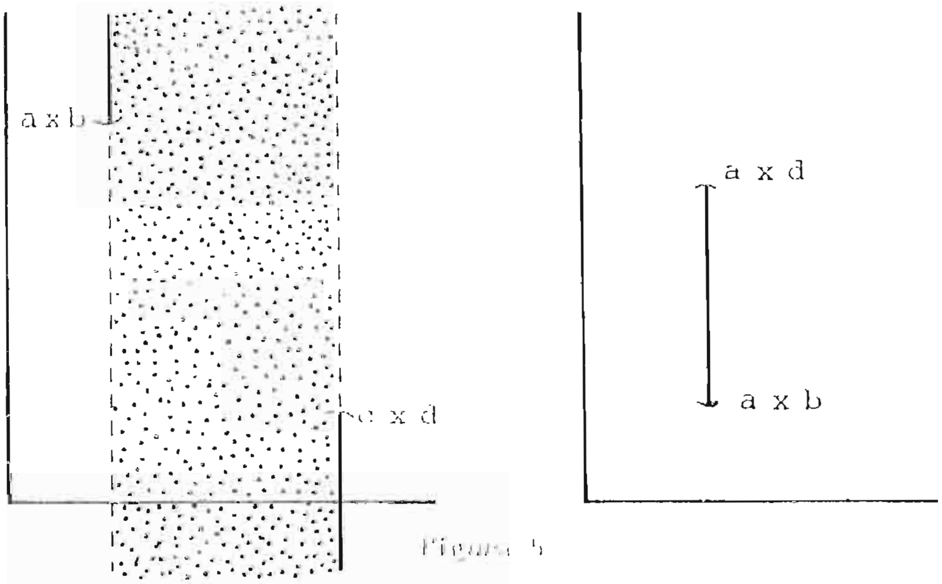


Figura 5

<u>Ejemplo 1.12.</u> :

Los enteros positivos Z_+ forman un conjunto ordenado con un elemento más pequeño. La topología del orden en Z_+ es la topología discreta para la cual cada conjunto unitario es abierto: Si $n > 1$, entonces el conjunto unitario $\{n\} = (n-1, n+1)$ es un elemento básico; y si $n = 1$, el conjunto unitario $\{1\} = [1, 2)$ es un elemento básico.

<u>Ejemplo 1.13.</u> :

El conjunto $X = \{1, 2\} \times Z_+$ en el orden lexicográfico es otro ejemplo de un conjunto ordenado con un elemento más pequeño. Denotando 1 × n por a_n y 2 × n por b_n, podemos representar X por

$$a_1, a_2, \ldots ; b_1, b_2, \ldots$$

La topología del orden en X no es la topología discreta. La mayoría de conjuntos unitarios son abiertos, pero existe una excepción - el conjunto unitario $\{b_1\}$. Todo conjunto abierto que contiene a b_1 debe contener un elemento básico que contiene a b_1 (por definición), y todo elemento básico que contiene a b_1, contiene puntos de la sucesión a_i.

Definición 1.10. :

Si X es un conjunto ordenado y $\underline{a}$ es un elemento de X, existen cuatro subconjuntos de X que son llamados los rayos determinados por a. Ellos son los siguientes:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\},$$

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$$

Conjuntos de los primeros dos tipos son llamados rayos abiertos, y conjuntos de los últimos dos tipos son llamados rayos cerrados.

El uso del término "abierto" sugiere que rayos abiertos en X son conjuntos abiertos en la topología del orden. En efecto, lo son. Consideremos por ejemplo, el rayo $(a, +\infty)$. Si X tiene un elemento más grande b_0, entonces $(a, +\infty)$ es igual al elemento básico $(a, b_0]$. Si X no tiene elemento más grande, entonces $(a, +\infty)$ es igual a la unión de todos los elementos básicos de la forma (a, x), para $x > a$. En ambos casos, $(a, +\infty)$ es abierto. Un argumento similar se aplica para el rayo $(-\infty, a)$.

Los rayos abiertos, en efecto forman una subbase para la topología del orden en X.

PRODUCTO FINITO DE ESPACIOS

Si X y Y son espacios topológicos, existe una manera usual de definir una topología en el producto cartesiano X × Y.

Definición 1.11. :

Sean X y Y espacios topológicos. La topología producto en X × Y es la topología que tiene como base la colección β de todos los conjuntos de la forma U × V, donde U es un conjunto abierto de X y V es un subconjunto abierto de Y.

Comprobaremos que β es una base. La primera condición es trivial, ya que X × Y es él mismo un elemento básico. La segunda condición es casi igual de fácil, como la intersección de cualquier par de elementos básicos $U_1 \times V_1$ y $U_2 \times V_2$ es otro elemento básico; porque :

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

y el conjunto de la derecha de la ecuación es un elemento básico porque $U_1 \cap U_2$ y $V_1 \cap V_2$ son abiertos de X y Y respectivamente.

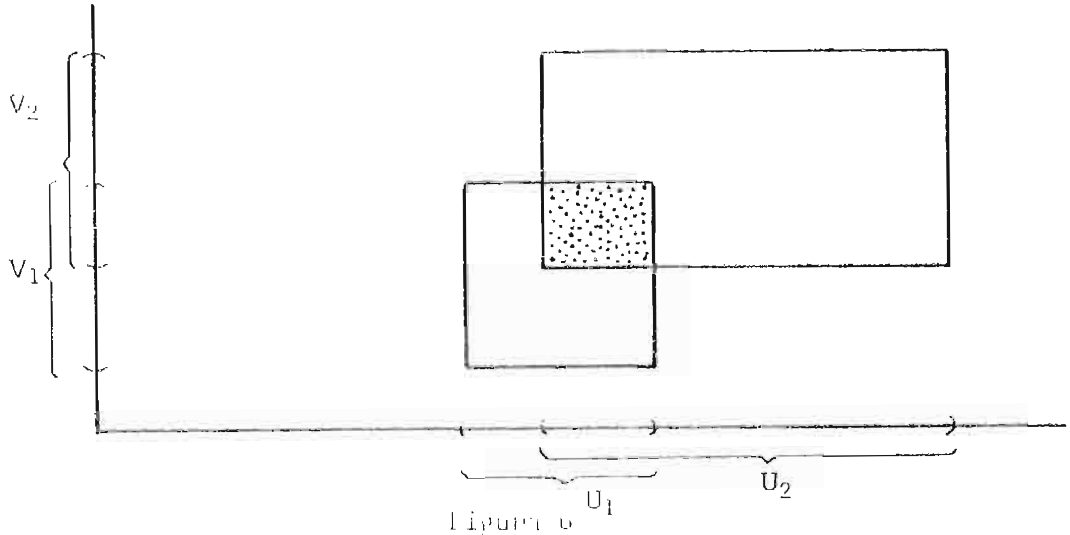


Figura 6

Nótese que la colección no es una topología en $X \times Y$. La unión de los dos rectángulos de la figura 6, por ejemplo, no es un producto de dos conjuntos, así que no puede pertenecer a β; pero es abierto en $X \times Y$.

<u>Teorema 1.1.</u> :

Si β es una base para la topología de X, y C es una base para la topología de Y, entonces la colección

$$D = \{B \times C \mid B \in \beta \text{ y } C \in C\}$$

es una base para la topología de $X \times Y$.

<u>Ejemplo 1.14.</u> :

Tenemos una topología usual en $\mathbb{R}$: la topología del orden. El producto de esta topología consigo misma es llamada la topología usual en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Esta tiene como base la colección de todos los productos de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, pero el teorema anterior nos garantiza que la más pequeña colección de todos los productos $(a, b) \times (c, d)$ de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ servirá también como una base para la topología en $\mathbb{R}^2$. Cada conjunto puede ser ilustrado como el interior de un rectángulo en $\mathbb{R}^2$. Así la topología usual en $\mathbb{R}^2$ es precisamente la considerada en el ejemplo 1.8.

<u>SUBESPACIOS TOPOLOGICOS</u>

<u>Definición 1.12.</u> :

Sea X un espacio topológico con la topología τ. Si Y es un subconjunto de X, la colección

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$$

es una topología en Y, llamada topología del subespacio.

Con esta topología, Y es llamado un subespacio de X; sus conjuntos abiertos consisten de todas las intersecciones de conjuntos abiertos de X con Y.

Es fácil ver que τ_Y es una topología. Esta contiene a ϕ y a Y porque

$$\phi = Y \cap \phi \qquad y \qquad Y = Y \cap X$$

donde ϕ y X son elementos de τ. El hecho que las intersecciones finitas y uniones arbitrarias estén en τ_Y viene de las ecuaciones siguientes :

$$(U_1 \cap Y) \cap \ldots\ldots \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap \ldots\ldots \cap U_n) \cap Y,$$

$$\bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap Y) = (\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha) \cap Y.$$

<u>Lema 1.5.</u> :

Si β es una base para la topología de X, entonces la colección

$$\beta_Y = \{B \cap Y \mid B \in \beta\}$$

es una base para la topología del subespacio Y.

<u>Lema 1.6.</u> :

Sea Y un subespacio de X. Si U es abierto en Y y Y es abierto en X, entonces U es abierto en X.

<u>Ejemplo 1.15.</u> :

Consideremos el subconjunto Y = [0, 1] de la recta real, en la topología del subespacio la topología del subespacio tiene como base todos los subconjuntos de la forma (a, b) ∩ Y, donde (a, b) es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Tal conjunto es de uno de los siguientes tipues :

$$(a, b) \cap Y = \begin{cases} (a, b) & \text{si } a \text{ y } b \text{ están en } Y, \\ [0, b) & \text{si sólo } b \text{ está en } Y, \\ (a, 1] & \text{si sólo } a \text{ está en } Y, \\ Y \text{ ó } \phi & \text{si ni } a \text{ ni } b \text{ están en } Y. \end{cases}$$

Por definición, cada uno de estos conjuntos es abierto en Y. Pero los conjuntos del segundo y tercer tipo, no son abiertos en el espacio grande $\mathbb{R}$.

Nótese que los primeros tres tipos de conjuntos son los elementos básicos para la topología del orden en Y. Así vemos que en el caso del conjunto $Y = [0, 1]$, esta topología del subespacio (como subespacio de $\mathbb{R}$) y su topología del orden son las mismas.

Ejemplo 1.[illegible] .

Sea Y el subconjunto $[0, 1) \cup \{2\}$ de $\mathbb{R}$. En la topología del subespacio en Y, el conjunto unitario $\{2\}$ es abierto, porque es la intersección del conjunto abierto $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ con Y. Pero en la topología del orden en Y, el conjunto $\{2\}$ no es abierto. Cualquier elemento básico de la topología del orden en Y que contiene a 2 es de la forma :

$$\{x \mid x \in Y, \; a < x \leq 2\}$$

para algún $a \in Y$; así un conjunto básico necesariamente contiene puntos de Y menores que 2.

Teorema 1.[illegible] :

Si X es un conjunto ordenado junto con la topología del orden y si Y es un intervalo o un rayo en X, entonces la topología del subespacio y la topología del orden en Y son las mismas.

Teorema 1.3. :

Si A es un subespacio de X y B un subespacio de Y, entonces la topología producto en A x B es la misma con la topología A x B heredada como un subespacio de X x Y.

CONJUNTOS CERRADOS Y CLAUSURA DE UN CONJUNTO

Definición 1.13. :

Un subconjunto A de un espacio topológico X es cerrado, si el conjunto $X \setminus A$ es abierto.

Ejemplo 1.17. :

El subconjunto $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es cerrado porque su complemento

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$

es abierto.

El subconjunto $[a, b)$ de $\mathbb{R}$ no es ni abierto ni cerrado.

Ejemplo 1.18.:

En la topología discreta en el conjunto X todo conjunto es abierto; se sigue también que todo conjunto es cerrado.

Teorema 1.4. :

Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son válidas :

1) ϕ y X son cerrados.

2) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.

3) La unión finita de conjuntos cerrados es cerrada.

Prueba :

1) ϕ y X son cerrados porque ellos son los complementos de los conjun-

tos abiertos X y ϕ respectivamente.

2) Dada una colección de conjuntos cerrados $\{A_\alpha\}_\alpha$, aplicamos ley de DeMorgan.

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} (X \setminus A_\alpha)$$

Como los conjuntos $X \setminus A_\alpha$ son abiertos por definición, el miembro derecho de la ecuación representa una unión arbitraria de conjuntos abiertos, y es entonces un conjunto abierto. Por lo tanto $\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ es cerrado.

3) Si A_i es cerrado para $i = 1, \ldots, n$, consideremos la ecuación

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus A_i)$$

A la derecha, en la ecuación tenemos una intersección finita de abiertos. Por lo tanto $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es cerrado.

<u>Definición 1.18.</u> :

Dado un subconjunto A de un espacio topológico X, la clausura de A denotada por $C(A)$ o $\bar{A}$, se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A.

<u>Ejemplo 1.19.</u> :

Considérese la topología τ de $X = \{a, b, c, d, e\}$ en donde:

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

Los conjuntos cerrados de X son :

$$\phi, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}$$

Por consiguiente :

$$c(\{b\}) = \{b, e\}$$

$$c(\{a,c\}) = X,$$

$$c(\{b, d\}) = \{b, c, d, e\}$$

$$c(\{a\}) = \{a\}$$

Se nota en este ejemplo que las clausuras dadas resultan ser cerrados. Además por el teorema anterior c(A) es cerrado por ser intersección de cerrados.

VECINDARIOS

Definición 1.15. :

Un vecindario de un punto x de un espacio topológico X es todo conjunto que contiene un conjunto abierto G tal que $x \in G$.

Claramente que E es un vecindario de x sii $x \in i(E)$. De esto se sigue que un conjunto es abierto sii es un vecindario de cada uno de sus puntos.

Los matemáticos usan a menudo una especial terminología aquí. Ellos abrevian el enunciado "U es un abierto que contiene a x" por la frase :

"U es un vecindario de x"

PUNTO LIMITE

Definición 1.16. :

Si A es un subconjunto del espacio topológico X y si x es un punto de X, decimos que x es un punto límite (o punto de acumulación) de A, si todo vecindario de x interseca a A en algún otro punto distinto de x.

Dicho de otra forma, x es un punto límite de A si $x \in c(A \setminus \{x\})$.

El punto x puede estar o no en A.

Ejemplo 1.20. :

Consideremos la recta real $\mathbb{R}$. Si $A = (0, 1]$, entonces el punto 0 es un punto límite de A y también lo es $\frac{1}{2}$. En efecto, todo punto del intervalo $[0, 1]$ es un punto límite de A, pero ningún otro punto de $\mathbb{R}$ es un punto límite de A.

Si $B = \{ \frac{1}{n} | n \in Z_+ \}$, entonces 0 es el único punto límite de B. Cualquier otro punto x de $\mathbb{R}$ tiene un vecindario que no interseca a B o interseca a B solamente en x mismo. Si $C = \{0\} \cup (2, 3)$, entonces los puntos límites de C son los puntos del intervalo $[2, 3]$. Si Q es el conjunto de los racionales, todo punto de $\mathbb{R}$ es punto límite de Q. Si Z_+ es el conjunto de enteros positivos, ningún punto de $\mathbb{R}$ es punto límite de Z_+. Si $\mathbb{R}_+$ es el conjunto de los reales positivos, entonces todo punto de $\{0\} \cup \mathbb{R}_+$ es punto límite de $\mathbb{R}_+$.

Teorema 1.5. :

Sea Y un subespacio de X. Entonces un conjunto A es cerrado en Y si y sólo si es la intersección de un conjunto cerrado de X con Y.

Teorema 1.6. :

Sea Y un subespacio de X. Si A es cerrado en Y y Y es cerrado en X, entonces A es cerrado en X.

Teorema 1.7. :

Sea Y un subespacio de X; sea A un subconjunto de Y; sea $c(A)$ la clausura de A en X. Entonces la clausura de A en Y es $c(A) \cap Y$.

Teorema 1.8. :

Sea A un subconjunto del espacio topológico X.

(a) Entonces $x \in C(A)$ si y sólo si todo conjunto abierto U que -

contiene a x interseca a A.

(b) Supóngase que la topología de X es dada por una base, entonces $x \in Cl(A)$ si y sólo si todo elemento básico B que contiene a x intersecta a A.

Teorema 1.9. :

Sea A un subconjunto de un espacio topológico X; sea $d(A)$ el conjunto de todos los puntos límites de A. Entonces

$$Cl(A) = A \cup d(A)$$

Corolario 1.1. :

Un subconjunto de un espacio topológico es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos límites.

FUNCIONES CONTINUAS

Definición 1.17. :

Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f: X \to Y$ es contínua si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X.

Notamos que si la topología del espacio rango Y es dada por una base β, entonces para probar continuidad de f, es suficiente mostrar que la imagen inversa de todo elemento básico es abierta: el conjunto arbitrario abierto V de Y puede ser escrito como la unión de elementos básicos

$$V = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$$

entonces

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha)$$

así que $f^{-1}(V)$ es abierta si cada conjunto $f^{-1}(B_\alpha)$ es abierto.

Si la topología en Y es dada por una subbase $\mathcal{S}$, para probar continuidad de f será suficiente mostrar que la imagen inversa de cada elemento subbásico es abierta. El elemento básico arbitrario B para Y puede ser escrito como una intersección finita $S_1 \cap \ldots\ldots \cap S_n$ de elementos subbásicos; se sigue de la ecuación :

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \ldots\ldots \cap f^{-1}(S_n)$$

que la imagen inversa de todo elemento básico es abierto.

<u>Ejemplo 1.21.</u> :

Sea $\mathbb{R}$ que denota el conjunto de los números reales con su topología usual y sea $\mathbb{R}_l$ que denota el mismo conjunto con la topología del límite inferior. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$

La función identidad, $f(x) = x$, para todo número real x. Entonces f no es una función contínua; la imagen inversa del conjunto $[a, b)$ de $\mathbb{R}_l$ igual a el mismo, no es abierto en $\mathbb{R}$. Por otra parte, la función identidad $g : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$ es contínua, porque la imagen inversa de (a, b) que es el mismo, es abierto en $\mathbb{R}_l$.

<u>Teorema 1.10.</u> :

Sean X y Y espacios topológicos; sea $f: X \to Y$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes :

(1) f es contínua.

(2) Para todo subconjunto A de X, se tiene $f(c(A)) \subseteq c(f(A))$.

(3) Para todo conjunto cerrado B en Y, el conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.

HOMEOMORFISMOS

Definición 1.18. :

Sean X y Y espacios topológicos; sea $f : X \to Y$ una biyección. Si tanto la función f como la función inversa

$$f^{-1} : Y \to X$$

son contínuas, entonces f es llamado un homeomorfismo.

La condición que f^{-1} sea contínua dice que para cada conjunto abierto U de X, la imagen inversa de U bajo la función $f^{-1} : Y \to X$ es abierta en Y. Pero la imagen inversa de U bajo la función f^{-1} es la misma que la imagen de U bajo la función f.

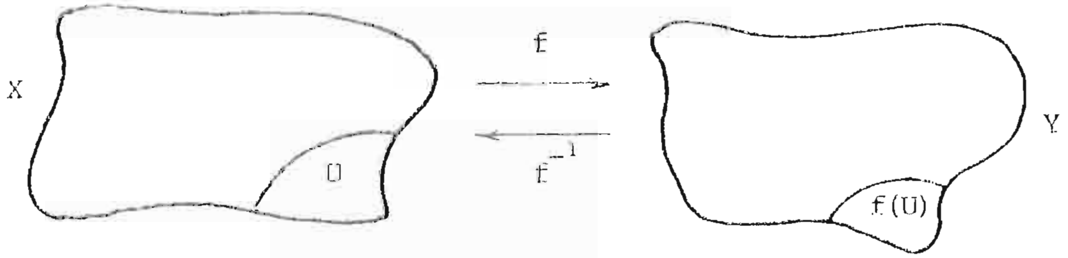


Figura 7

Así que otra forma de definir un homeomorfismo es decir que es una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que f(U) es abierta ssi U es abierto.

Esto nos muestra que un homeomorfismo $f : X \to Y$ nos da una correspondencia biyectiva, no solamente entre X y Y sino también entre los abiertos de X y de Y. Como un resultado toda propiedad de X que es enteramente expresada en términos de la topología de X (esto es, en términos de los conjuntos abiertos de X) lleva, a través de la función f, la propiedad correspondiente para el espacio Y. Tal propiedad de X es llamada una propiedad topológica de X.

Ahora supongamos que $f : X \to Y$ función contínua inyectiva, donde X y Y son espacios topológicos. Sea Z el conjunto imagen $f(X)$, considerado como un subespacio de Y; entonces la función $f' : X \to Z$ obtenida restringiendo el rango de f es biyectiva. Si f' pasa a ser un homeomorfismo de X con Z, decimos que la función $f : X \to Y$ es una inmersión topológica, o simplemente una inmersión de X en Y.

Ejemplo 1.22. :

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 1$ es un homeomorfismo. Ver figura 8.

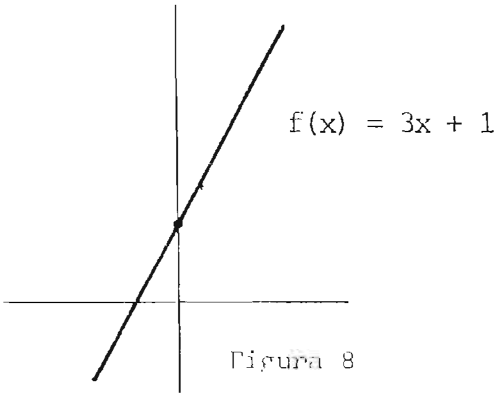


Figura 8

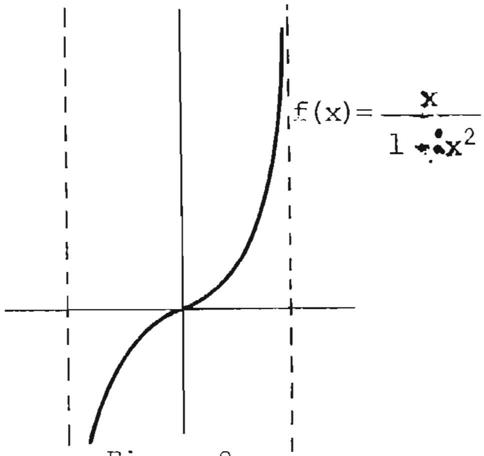


Figura 9

Si definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por la ecuación

$$g(y) = \frac{1}{3}(y - 1)$$

entonces podemos comprobar fácilmente que $f(g(y)) = y$ y $g(f(x)) = x$ para todo número real x y y. Se sigue que f es biyectiva y que $g = f^{-1}$; la continuidad de f y g es un resultado familiar del cálculo.

Ejemplo 1.23. :

La función $F : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

es un homeomorfismo. Ver figura 9. Su inversa es la función G definida por :

$$G(y) = \frac{2y}{1 + (1 + 4y^2)^{1/2}}$$

Notamos que F es función biyectiva que preserva el orden.

El hecho que F es un homeomorfismo puede ser probado en dos formas. Una forma es, notar que F preserva el orden y biyectiva. F lleva un elemento básico para la topología del orden en (-1, 1) sobre un elemento básico para la topología del orden en $\mathbb{R}$, y viceversa. Como un resultado, F es automáticamente un homeomorfismo de (-1, 1) con $\mathbb{R}$ (ambos con la topología del orden). Como la topología del orden en (-1, 1) y la topología usual (subespacio) coinciden, F es un homeomorfismo de (-1, 1) con $\mathbb{R}$.

Una segunda forma de mostrar que F es un homeomorfismo es usar la continuidad de las funciones algebráicas y la función raíz cuadrada para mostrar que ambas, F y G son contínuas. Estos son hechos familiares del cálculo.

Ejemplo 1.24. :

Una función biyectiva $f : X \longrightarrow Y$ puede ser contínua sin ser homeomorfismo. Una de esas funciones es la función identidad $g : \mathbb{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ considerada en el ejemplo 1.21. Otra es la siguiente : Sea S^1 que denota el círculo unitario

$$S^1 = \{x \times y \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

considerado como un subespacio del plano $\mathbb{R}^2$, y sea

$$f : [0, 1) \longrightarrow S^1$$

La función definida por $f(t) = (\mathrm{Cos}\ 2\pi t, \mathrm{Sen}\ 2\pi t)$. El hecho que f es biyectiva y contínua se sigue de las propiedades de las funciones --

trigonométricas. Pero la función f^{-1} no es continua. La imagen bajo f del conjunto abierto $U = \left[0, \frac{1}{4}\right)$ del dominio, por ejemplo, no es abierto en S^1, para el punto $p = f(0)$ no está en un abierto V de $\mathbb{R}^2$, tal que

$$V \cap S^1 \subseteq f(U)$$

Ver figura 10.

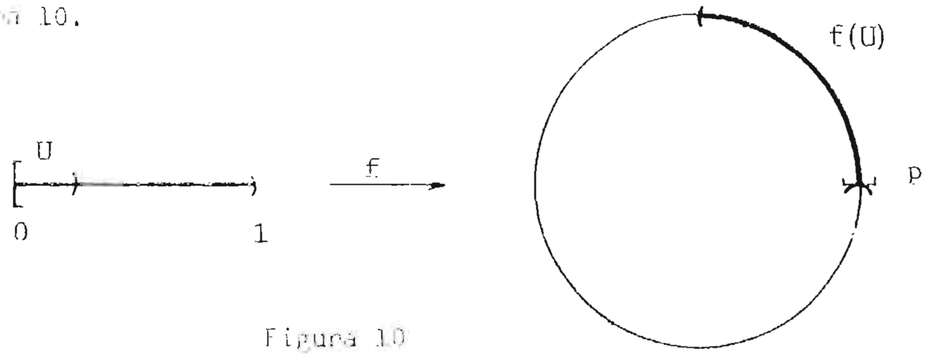


Figura 10

Ejemplo 1.25. :

Consideremos la función

$$g : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

obtenida de la función f del ejemplo anterior expandiendo el rango. La función g es un ejemplo de una función inyectiva contínua que no es una inmersión.

FUNCION ABIERTA, CERRADA

Definición 1.19. :

Llamaremos a una función, función abierta, ssi la imagen de todo conjunto abierto es un conjunto abierto.

Definición 1.20. :

Una función es cerrada ssi la imagen de todo conjunto cerrado es un conjunto cerrado.

LA TOPOLOGIA PRODUCTO GENERALIZADA

Previamente, definimos una topología en el producto X x Y de dos espacios topológicos. Ahora generalizaremos esta definición a productos cartesianos arbitrarios. Existen dos formas de generalizar la definición. Una forma para determinar una topología en un espacio producto es la siguiente : esta es una generalización directa de la forma que definimos una base para la topología producto en X x Y.

Definición 1.21. :

Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in j}$ una familia de espacios topológicos. Tomemos como una base para una topología en el espacio producto

$$\Pi_{\alpha \in j} X_\alpha$$

La colección de todos los conjuntos de la forma

$$\Pi_{\alpha \in j} U_\alpha$$

donde U_α es abierto en X_α para todo $\alpha \in j$. La topología generada por esta base es llamada la topología de las cajas.

Esta colección satisface la primera condición para una base porque ΠX_α es él mismo un elemento básico; y satisface la segunda condición porque la intersección de cualquier par de elementos básicos es otro elemento básico.

$$(\Pi_{\alpha \in j} U_\alpha) \cap (\Pi_{\alpha \in j} V_\alpha) = \Pi_{\alpha \in j} (U_\alpha \cap V_\alpha)$$

Esta topología no es la más utilizada para el espacio producto ΠX_α , como veremos.

Una segunda forma de generalizar la definición previa es generalizar la formulación de subbase de la definición. Sea :

$$\Pi_\beta : \Pi_{\alpha \in j} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$$

La función que asigna a cada elemento del espacio producto su β coordenada,

$$\pi_\beta\left((x_\alpha)_{\alpha\in J}\right) = x_\beta$$

es llamada la función proyección asociada con el índice β.

Definición 1.22. :

Sea δ_β que denota la colección

$$\delta_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \mid U_\beta \text{ abierto en } X_\beta\}$$

y sea δ que denota la unión de estas colecciones,

$$\delta = \bigcup_{\beta\in J} \delta_\beta .$$

La topología generada por la subbase δ es llamada la topología producto. En esta topología $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ es llamado el espacio producto.

¿Cómo difiere la topología producto de la topología de la caja?. Es fácil contestar esta pregunta si vemos la base β que δ genera. La colección β consiste de todas las intersecciones finitas de elementos de δ. Si intersecamos elementos que pertenecen al mismo de los conjuntos δ_β - no obtenemos nada nuevo, porque

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap \pi_\beta^{-1}(V_\beta) = \pi_\beta^{-1}(U_\beta \cap V_\beta)$$

La intersección de dos elementos de δ_β, o de un número finito de - elementos, es de nuevo un elemento de δ_β. Obtenemos algo nuevo solamente cuando intersecamos elementos de diferentes conjuntos δ_β. El elemento típico de la base β puede así ser descrito como sigue : Sea $\beta_1, \ldots,$ β_n un conjunto finito de índices distintos del conjunto de índices J, y sea U_{β_i} un conjunto abierto en X_{β_i} para $i = 1, \ldots\ldots, n$. Entonces :

$$B = \pi_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap \pi_{\beta_2}^{-1}(U_{\beta_2}) \cap \ldots \cap \pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$$

es un elemento de $\mathcal{B}$.

Existe una forma de describir estos elementos básicos que es particularmente útil. Nótese que un punto $x = (x_\alpha)$ está en B si y sólo si su β_1^a coordenada está en U_{β_1}, su β_2^a coordenada está en U_{β_2}, y así sucesivamente. No existe ninguna restricción en la coordenada α de x, si α no es ninguno de los índices $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Como un resultado, podemos escribir B como el producto

$$B = \Pi_{\alpha\in J} U_\alpha$$

donde U_α denota el espacio entero X_α, si $\alpha \neq \beta_1, \ldots, \beta_n$.

Todo esto es resumido en el siguiente

Teorema 1.11. : (Comparación de la topología de la caja y topología producto).

La topología de la caja ΠX_α tiene como base todos los conjuntos de la forma ΠU_α, donde U_α es abierto en X_α para todo α. La topología producto en ΠX_α tiene como base todos los conjuntos de la forma ΠU_α, donde U_α es abierto en X_α para cada α y U_α igual a X_α excepto para un número finito de índices α.

Dos cosas son inmediatamente claras. Primero, para productos finitos $\Pi_{\alpha=1}^{n} X_\alpha$ las dos topologías son precisamente las mismas. Segundo, la topología de la caja es en general más fina que la topología producto.

Teorema 1.12. :

Supóngase que la topología en cada espacio X_α es dado por una base $\mathcal{B}_\alpha$. La colección de todos los conjuntos de la forma

$$\Pi_{\alpha\in J} B_\alpha$$

donde $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para todo α, servirá como una base para la topología de -

la caja en $\Pi_{\alpha\in J} X_\alpha$

La colección de todos los conjuntos de la misma forma, donde $B_\alpha \in \beta_\alpha$ para un número finito de índices α y $B_\alpha = X_\alpha$ para todos los índices restantes, servirá como una base para la topología producto en $\Pi_{\alpha\in J} X_\alpha$.

<u>Teorema 1.13.</u> :

Sea A_α un subespacio de X_α, para cada $\alpha \in J$. Entonces ΠA_α es un subespacio de ΠX_α si ambos productos son dados en la topología de la caja, o si ambos productos son dados en la topología producto.

Dado que se utiliza en el teorema siguiente daremos la definición de espacio Hausdorff que será tratado específicamente en los capítulos 2 y 3.

<u>Definición 1.23.</u>

Un espacio topológico X es un espacio Hausdorff si para todo par x_1, x_2 de puntos distintos de X, existen vecindarios U_1 y U_2 de x_1 y x_2, respectivamente, que son disjuntos.

<u>Teorema 1.14.</u> :

Si cada espacio X_α es un espacio Hausdorff, entonces ΠX_α es un espacio Hausdorff en la topología de la caja y en la topología producto.

<u>Teorema 1.15.</u> :

Sea $f : A \to \Pi_{\alpha\in J} X_\alpha$ dada por la ecuación

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha\in J}$$

donde $f_\alpha : A \to X_\alpha$ para cada α. Sea ΠX_α con la topología producto. Entonces la función f es continua si y sólo si cada función f_α es continua.

CAPITULO II : CONEXIDAD Y COMPACIDAD

ESPACIOS CONEXOS

Definición 2.1. :

Sea X un espacio topológico. Una separación de X es un par U, V de subconjuntos abiertos no vacíos disjuntos de X cuya unión es X. El espacio X es llamado conexo si no existe una separación de X.

Conexidad es obviamente una propiedad topológica, ya que está formulada en términos de la colección de conjuntos abiertos de X. Dicho de otra manera, si X es conexo, también lo es cualquier espacio homeomorfo a X.

Otra manera de formular la definición de conexidad es la siguiente :

"Un espacio X es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez son el conjunto vacío y el espacio mismo".

Si A es un subconjunto propio de X que es abierto y cerrado en X, entonces los conjuntos U = A y V = X \ A constituyen una separación de X porque ellos son abiertos, disjuntos, y no vacíos, y su unión es X. Conversamente, si U y V forman una separación de X, entonces U es no vacío y diferente de X, y además abierto y cerrado en X.

Para un subespacio Y de un espacio topológico X, existe otra forma útil de formular la definición de conexidad :

Lema 2.1. :

Si Y es un subespacio de X, una separación de Y es un par de conjuntos no vacíos A y B cuya unión es Y, ninguno de los cuales contiene un punto límite del otro. El espacio Y es <u>conexo</u> si no existe separación de Y.

<u>Ejemplo 2.1.</u> :

Sea X un espacio de dos elementos con la topología indiscreta. Obviamente no hay separación de X, así que X es conexo.

<u>Ejemplo 2.2.</u> :

Sea Y que denota el espacio $[-1, 0) \cup (0, 1]$ de la recta real $\mathbb{R}$. Cada uno de los conjuntos $[-1, 0)$ y $(0, 1]$ es no vacío y abierto en Y (aunque no lo es en $\mathbb{R}$); por consiguiente ellos forman una separación de Y.

Alternativamente, note que ninguno de estos conjuntos contiene punto límite del otro. (Ellos tienen un punto límite 0 en común, pero eso no importa).

<u>Lema 2.2.</u> :

Si los conjuntos C y D forman una separación de X y si Y es un subconjunto conexo de X, entonces Y está enteramente contenido en C ó D.

<u>Prueba</u> :

Como C y D son ambos abiertos en X, los conjuntos $C \cap Y$ y $D \cap Y$ son abiertos en Y. Estos dos conjuntos son disjuntos y su unión es Y; si ellos son ambos no vacíos, constituirían una separación de Y. Por consiguiente, uno de ellos es vacío. Por lo tanto Y debe estar enteramente en C o en D.

<u>Teorema 2.1.</u> :

La unión de una colección de conjuntos conexos que tienen un punto en común es conexa.

Prueba :

Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subconjuntos conexos de un espacio X; sea $x \in \bigcap A_\alpha$. Probaremos que el conjunto $Y = \bigcup A_\alpha$ es conexo. Supongamos que $Y = C \cup D$ es una separación de Y. El punto x está en uno de los conjuntos C ó D; supongamos que $x \in C$ como el conjunto A_α es conexo, debe estar enteramente contenido en C ó D, y no puede estar en D porque este contiene el punto x de C. Por consiguiente $A_\alpha \subseteq C$ para todo α. Por lo tanto $\bigcup A_\alpha \subset C$, contradiciendo el hecho que D es no vacío.

Teorema [illegible] :

Sea A un subconjunto conexo de X. Si $A \subseteq B \subseteq C(A)$ entonces B es conexo.

ESPACIOS COMPACTOS

<u>Definición 2.[illegible]</u> :

Una colección A de subconjuntos de un espacio X es una cubierta de X, o un recubrimiento de X, si la unión de los elementos de A es igual a X. A es llamado un recubrimiento abierto de X si sus elementos son conjuntos abiertos de X.

<u>Definición 2.[illegible]</u> :

Un espacio X es compacto si toda cubierta abierta A de X contiene una subcolección finita que también cubre a X.

<u>Ejemplo 2.3.</u> :

La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta, porque la cubierta abierta de $\mathbb{R}$ por intervalos abiertos

$$A = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

no contiene subcolección finita que cubra a $\mathbb{R}$.

<u>Ejemplo 2.4.</u> :

El siguiente subespacio de $\mathbb{R}$ es compacto

$$X = \{0\} \cup \{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

Dada una cubierta A de X, existe un elemento U de A que contiene a 0. El conjunto U contiene un número infinito de puntos $\frac{1}{n}$; escojamos para cada punto de X que no está en U, un elemento de A conteniéndolo. La colección que consiste de estos elementos de A, junto con el elemento U, es una subcolección finita de A que cubre a X.

<u>Ejemplo 2.5.</u> :

Cualquier espacio X que contiene un número finito de puntos es compacto trivialmente, porque en este caso todo cubrimiento abierto de X es finito.

Ejemplo 3.

El intervalo $(0, 1]$ no es compacto; la cubierta abierta

$$\mathcal{A} = \{(\tfrac{1}{n}, 1] \mid n \in Z_+\}$$

no contiene una subcolección finita que cubra a $(0, 1]$. Ni tampoco es compacto el intervalo $(0, 1)$; se aplica el mismo argumento. Por otra parte, el intervalo $[0, 1]$ es compacto.(*)

Si Y es un subespacio de X, una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se dice que cubre a Y si la unión de sus elementos contiene a Y.

Lema [illegible] :

Sea Y un subespacio de X. Entonces Y es compacto si y sólo si todo cubrimiento de Y por conjuntos abiertos en X contiene una subcolección finita que cubre a Y.

Prueba :

Supongamos que Y es compacto y $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una cubierta de Y por conjuntos abiertos en X. Entonces la colección

$$\{A_\alpha \cap Y \mid \alpha \in J\}$$

es un cubrimiento de Y por conjuntos abiertos en Y; por consiguiente, una subcolección finita

$$\{A_{\alpha_1} \cap Y, \ldots, A_{\alpha_n} \cap Y\}$$

cubre a Y. Entonces $\{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$ es una subcolección de $\mathcal{A}$ que cubre a Y.

Conversamente, supongamos que todo cubrimiento de Y por conjuntos

---

(*) Ver teorema [illegible] más adelante.

abiertos en X contiene una subcolección finita que cubre a Y y probemos que Y es compacto.

Sea $A' = \{A'_\alpha\}$ un cubrimiento de Y por abiertos en Y. Para cada α, sea A_α un abierto de X tal que $A'_\alpha = A_\alpha \cap Y$. La colección $A = \{A_\alpha\}$ es cubierta abierta de Y por abiertos de X. Por hipótesis, alguna subcolección finita $\{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$ cubre a Y. Entonces $\{A'_{\alpha_1}, \ldots, A'_{\alpha_n}\}$ es una subcolección de A' que cubre a Y. Así Y es compacto.

<u>Teorema 2.3.</u> :

Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto, es compacto.

<u>Definición 2.4.</u> :

Un espacio topológico es llamado un espacio Hausdorff si para cada par x_1, x_2 de puntos distintos de X, existen vecindarios disjuntos U_1 y U_2 que contienen a x_1 y x_2 respectivamente.

<u>Teorema 2.4.</u> :

Todo conjunto finito en un espacio Hausdorff X es cerrado.

<u>Teorema 2.5.</u> :

Sea X un espacio Hausdorff; sea A un subconjunto de X. Entonces el punto x es un punto límite de A si y sólo si todo vecindario de x contiene un número infinito de puntos de A.

<u>Teorema 2.6.</u> :

Todo conjunto simplemente ordenado es un espacio Hausdorff con la topología del orden. El producto de dos espacios Hausdorff es un espacio Hausdorff. Un subespacio de un espacio Hausdorff es un espacio Hausdorff.

Teorema 2.7. :

Todo subconjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado.

Lema 2.8. :

Si Y es un subconjunto compacto del espacio Hausdorff X y x no pertenece a Y, entonces existen conjuntos abiertos disjuntos U y V de X que contienen a x y Y respectivamente.

Ejemplo 2.7. :

Una vez probado que el intervalo $[a, b]$ es compacto en $\mathbb{R}$, se sigue del Teorema 2.6., que cualquier subconjunto cerrado de $[a, b]$ es compacto. Por otra parte, se sigue del Teorema 2.7 ., que el intervalo $(a, b]$ y (a, b) en $\mathbb{R}$ no pueden ser compactos porque ellos no son cerrados en el espacio Hausdorff $\mathbb{R}$.

Teorema 2.8. :

La imagen de un espacio compacto bajo una función continua es compacto.

Prueba :

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua; sea X compacto. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento del conjunto $f(X)$ por conjuntos abiertos en Y. La colección

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

es una colección de conjuntos que cubren a X; estos conjuntos son abiertos en X ya que f es continua. Por lo tanto un número finito de ellos, digamos

$$f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_n)$$

cubre a X. Entonces los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ cubren a $f(X)$.

Teorema 2.9. :

Sea $f : X \to Y$ una función continua biyectiva. Si X es compacto y Y es Hausdorff, entonces f es homeomorfismo.

Teorema 2.10. :

El producto finito de espacios compactos es compacto.

Lema 2.5. : (Lema del tubo)

Consideremos el espacio producto $X \times Y$, donde Y es compacto. Si N es un conjunto abierto de $X \times Y$ que contiene la recta $x_0 \times Y$ de $X \times Y$, entonces N contiene un tubo $W \times Y$ alrededor de $x_0 \times Y$, donde W es un vecindario de x_0 en X.

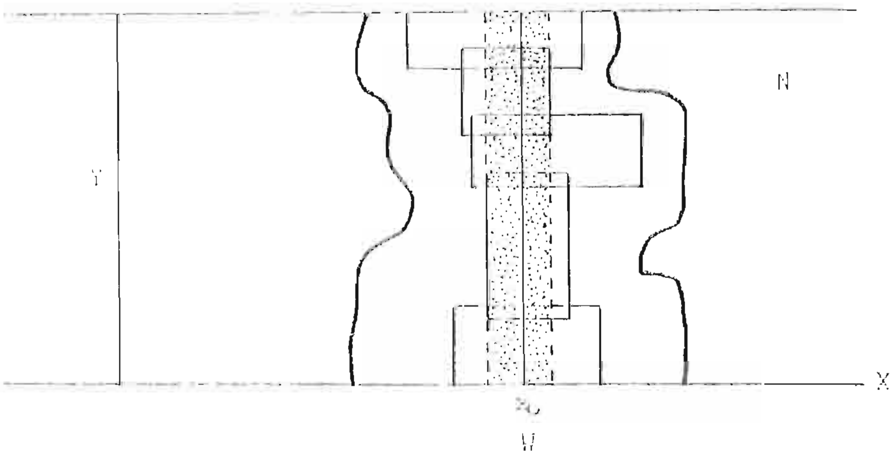


Figura 1

Existe un criterio para que un espacio sea compacto, un criterio que es formulado en términos de conjuntos cerrados más bien que de conjuntos abiertos. Primero, antes de seguir adelante, necesitamos la siguiente

<u>Definición 2.5.</u> :

Una colección $\mathbf{C}$ de subconjuntos de X se dice que satisface la <u>propiedad de intersección finita</u> si para toda subcolección finita

$$\{C_1, \ldots, C_n\}$$

de $\mathbf{C}$, la intersección $C_1 \cap \ldots \cap C_n$ es no vacía.

<u>Teorema 2.11.</u> :

Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si y sólo si para toda colección $\mathbf{C}$ de conjuntos cerrados en X que satisfacen la propiedad de intersección finita, la intersección $\bigcap_{C\in\mathbf{C}} C$ de todos los elementos de $\mathbf{C}$ es no vacía.

<u>Corolario 2.1.</u> :

El espacio X es compacto si y sólo si para toda colección $\mathbf{A}$ de subconjuntos de X que satisface la propiedad de intersección finita, la intersección

$$\bigcap_{A\in\mathbf{A}} c(A)$$

de sus clausuras es no vacía.

<u>Teorema 2.12.</u> : (El teorema de Tychonoff)

El producto arbitrario de espacios compactos es compacto en la topología producto.

Antes de seguir adelante en el estudio de los espacios compactos se hace necesario introducir nuevos conceptos.

LA TOPOLOGIA METRICA

Una de las formas más importantes y frecuentemente usadas para determinar una topología en un conjunto, es definir la topología en términos de una métrica en el conjunto.

Definición 2.6. :

Una métrica en un conjunto X es una función

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que tiene las siguientes propiedades :

(1) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$; la igualdad se da si y sólo si $x = y$.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$

(3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ para todo $x, y, z \in X$. Esta propiedad se conoce como desigualdad triangular.

Dada una métrica d en X, el número $d(x, y)$ es a menudo llamado la distancia entre x e y en la métrica d. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos el conjunto

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

de todos los puntos cuya distancia a x es menor que ε. Este conjunto será llamado, la bola de centro x y radio ε. Algunas veces omitimos la métrica d de la notación y escribimos esta bola simplemente como $B(x, \varepsilon)$, cuando no dé lugar a confusión.

Definición 2.7. :

Si d es una métrica en el conjunto X, entonces la colección de todas las bolas $B_d(x, \varepsilon)$, para $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, es una base para una topología en X, llamada, la <u>topología métrica</u> inducida por d.

La primera condición para una base es trivial, ya que $x \in B(x, \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$. Antes de comprobar la segunda condición para una base, mostraremos que si y es un punto del elemento básico $B(x, \varepsilon)$, entonces existe un elemento básico $B(y, \delta)$ con centro en y que está contenido en $B(x, \varepsilon)$. Definimos δ como el número positivo $\varepsilon - d(x, y)$. Entonces $B(y, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon)$, porque si $z \in B(y, \delta)$, entonces $d(y, z) < \varepsilon - d(x,y)$ de lo cual concluimos que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon \text{ . Ver figura 2}$$

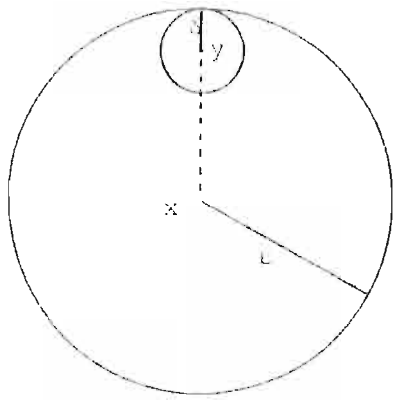


Figura 2

Ahora comprobemos la segunda condición para una base. Sean B_1 y B_2 dos elementos básicos y sea $y \in B_1 \cap B_2$. Tenemos probado precisamente que podemos escoger números positivos δ_1 y δ_2 tal que $B(y,\delta_1) \subseteq B_1$ y $B(y,\delta_2) \subseteq B_2$. Tomando δ como el más pequeño de δ_1 y δ_2, concluimos que $B(y, \delta) \subseteq B_1 \cap B_2$.

Usando lo que hemos probado podemos dar la definición de topología métrica de otra manera, podemos definir los abiertos así :

Un conjunto U es abierto en la topología métrica inducida por d si y sólo si para cada $y \in U$, existe un $\delta > 0$ tal que $B_d(y, \delta) \subseteq U$.

Claramente esta condición implica que U es abierto. Conversamente, si U es abierto, contiene un elemento básico $B = B_d(x, \varepsilon)$ que contiene a y, y B a su vez contiene un elemento básico $B_d(y, \delta)$ con centro en y.

Ejemplo 1.-

Dado un conjunto X, definimos :

$$d(x, y) = 1 \quad \text{si } x \neq y$$

$$d(x, y) = 0 \quad \text{si } x = y$$

Es fácil comprobar que d es una métrica. La topología que induce es la topología discreta; el elemento básico $B(x, 1)$, por ejemplo, consiste del punto x solamente.

Ejemplo 2.-

La métrica usual en los números reales $\mathbb{R}$ está definida por:

$$d(x, y) = |x - y|$$

La topología que induce es la misma que la topología del orden : cada elemento básico (a, b) para la topología del orden es un elemento básico para la topología métrica; precisamente

$$(a, b) = B(x, \varepsilon)$$

donde $x = \frac{a+b}{2}$ y $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Conversamente, cada bola $B(x, \varepsilon)$ es igual a un intervalo abierto: el intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Definición 2.-

Si X es un espacio topológico, X será metrizable si existe una métrica d en el conjunto X que induce la topología de X. Un espacio métrico es un espacio metrizable X junto con una métrica específica d que da la topología de X.

Definición 2.[illegible] :

Sea X un espacio métrico con métrica d. Un subconjunto A de X es acotado si existe un número M tal que

$$d(a_1, a_2) \leq M$$

para todo par a_1, a_2 de puntos de A. Si A es acotado, el diámetro de A se define como el número

$$\text{diám } A = \sup \{ d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A \}$$

El acotamiento de un conjunto no es una propiedad topológica, porque depende de la métrica particular d que es usada para X. Por ejemplo, si X es un espacio métrico con métrica d, entonces existe una métrica $\bar{d}$ que da la topología de X, en la que todo subconjunto de X es acotado. Se define como sigue :

Teorema 2.13. :

Sea X un espacio métrico con métrica d. Definimos $\bar{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ por la ecuación

$$\bar{d}(x, y) = \min \{ d(x, y), 1 \}$$

Entonces $\bar{d}$ es una métrica que induce la topología de X.

La métrica $\bar{d}$ es llamada métrica acotada usual correspondiente a d.

Prueba :

Es fácil ver que las primeras dos condiciones para una métrica se cumplen. Comprobemos la desigualdad triangular :

$$\bar{d}(x, z) \leq \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z) \quad (*)$$

Ahora si $d(x, y) \geq 1$ o $d(y, z) \geq 1$, entonces el lado derecho de la inecuación (*) es al menos 1; como el lado izquierdo es (por definición) a lo sumo 1, la desigualdad es válida. Sólo consideramos el caso en que -

$d(x, y) < 1$, $d(y, z) < 1$. En este caso, tenemos

$$\bar{d}(x, z) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z)$$

Como $\bar{d}(x, z) \leq d(x, z)$ por definición, la desigualdad triangular se cumple para $\bar{d}$.

El hecho que $\bar{d}$ y d inducen la misma topología se sigue de las inclusiones :

$$B_{\bar{d}}(x, \varepsilon) \subset B_d(x, \varepsilon)$$

$$B_d(x, \delta) \subset B_{\bar{d}}(x, \varepsilon)$$

donde $\delta = \min \{\varepsilon, 1\}$. Hemos aplicado para la conclusión del teorema el siguiente

<u>Lema 2.9.</u> :

Sean d y d' dos métricas en el conjunto X; sean τ y τ' las topologías que ellas inducen, respectivamente. Entonces τ' es más fina que τ si y sólo si para cada x en X y todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon)$$

<u>Definición 2.10.</u> :

Dado $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$, definimos la norma de x por la ecuación

$$\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2} ;$$

y definimos la <u>métrica euclideana</u> d en $\mathbb{R}^n$ por la ecuación

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left[(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2\right]^{1/2}.$$

Definimos la <u>métrica cuadrada</u> ρ por la ecuación

$$\rho(x, y) = \mathrm{Max}\,\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

En la recta real $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, estas dos métricas coinciden con la métri-

... usual en el plano $\mathbb{R}^2$, los elementos básicos bajo d pueden ser representados por discos circulares, mientras los elementos básicos bajo ρ pueden ser representados por regiones cuadradas.

Podemos ahora ver que cada una de estas métricas induce la topología usual en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.16.

La topología en $\mathbb{R}^n$ inducida por la métrica euclídea d y la métrica cuadrada ρ son las mismas que la topología producto en $\mathbb{R}^n$.

El teorema anterior es un teorema de metrización para $\mathbb{R}^n$. Buscamos generalizarlo a $\mathbb{R}^\omega$.

Como una primera prueba para una métrica en $\mathbb{R}^\omega$, es natural tratar de generalizar la métrica euclídea o la métrica cuadrada, por definición

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$

$$\rho(x, y) = \sup\{|x_i - y_i|\}.$$

Pero ni las fórmulas anteriores tienen sentido en $\mathbb{R}^\omega$, las series no necesariamente convergen y el conjunto $\{|x_i - y_i|\}$ puede no ser acotado.

Podemos superar esta dificultad con la métrica ρ reemplazando la métrica $|x - y|$ de $\mathbb{R}$ por su métrica acotada. Esta idea nos da nuestra segunda prueba para una métrica en $\mathbb{R}^\omega$.

Supongamos que tomamos la métrica estándar acotada en $\mathbb{R}$,

$$\bar{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\};$$

para dos puntos $x = (x_1, x_2, \ldots)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots)$ de $\mathbb{R}^\omega$, definimos $\bar{\rho} = \sup\{\bar{d}(x_i, y_i)\}$.

Es fácil probar que $\bar{\rho}$ es una métrica en $\mathbb{R}^\omega$. Desafortunadamente és-

Definición [illegible] :

Una sucesión $(x_1, x_2, \ldots)$ de puntos de X, converge al punto $x \in X$ si para toda vecindad U de x existe un entero positivo N tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$.

Si la sucesión (x_n) converge a x, escribimos

$$x_n \longrightarrow x$$

Lema [illegible] (Lema de la sucesión)

Sea X un espacio métrico, sea $A \subset X$. Si existe una sucesión de puntos de A que converge a x, entonces $x \in c(A)$; el converso se cumple si X es metrizable.

Teorema [illegible] :

Sea X un espacio métrico y sea $f : X \to Y$. La función f es continua si y sólo si para cada sucesión convergente $x_n \to x$ en X, se tiene que $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

Definición [illegible] :

Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones del conjunto X al espacio métrico Y. Sea d la métrica para Y. Decimos que la sucesión (f_n) converge uniformemente a la función $f : X \to Y$ si dado $\varepsilon > 0$, existe un entero N, tal que

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

para todo $n > N$, y todo $x \in X$.

La uniformidad de la convergencia depende no solamente de la topología de Y, sino también de su métrica.

Teorema [illegible] :

Supongamos que (f_n) es una sucesión de funciones definidas en E, supongamos:

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad (x \in E,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

En estas condiciones, $\sum f_n$ converge uniformemente en E si $\sum M_n$ converge.

Obsérvese que no se afirma la inversa (y de hecho no es cierta).

<u>Teorema 2.20.</u> :

Si (f_n) es una sucesión de funciones continuas en E, y si $f_n \to f$ uniformemente en E, f es continua en E.

CONJUNTOS COMPACTOS EN LA RECTA REAL

Teorema 2.21. :

Sea X un conjunto simplemente ordenado que tiene la propiedad del supremo. En la topología del orden, cada intervalo cerrado en X es compacto.

Corolario 2.7. :

Todo intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es compacto.

Teorema 2.22. :

Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado en la métrica euclídea d ó en la métrica cuadrada ρ.

Ejemplo 2.10 :

La esfera unitaria $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) = 1$ para un $y \in \mathbb{R}^n\}$ y la bola cerrada unitaria $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) \leq 1$ para un $y \in \mathbb{R}^n\}$ en $\mathbb{R}^n$ son compactos, ya que son conjuntos cerrados y acotados. El conjunto

$$A = \{x \times (\tfrac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}^2$, pero no es compacto porque no es acotado. El conjunto

$$S = \{x \times (\operatorname{sen} (\tfrac{1}{x})) \mid 0 < x \leq 1\}$$

es acotado en $\mathbb{R}^2$ pero no es compacto porque no es cerrado.

Definición 2.14. :

Sea X un espacio métrico con métrica d; sea $A \subseteq X$, definimos la distancia de un punto $x \in X$ al conjunto A como sigue :

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) \mid a \in A\}$$

PUNTO LIMITE COMPACTO

Definición 2.15. :

Un espacio X es punto límite compacto, si todo subconjunto infinito de X tiene un punto límite.

Algunos autores dan a esta propiedad el nombre de "propiedad de Bolzano-Weierstrass" ó "Compacidad de Fréchet".

Teorema 2.23. :

Compacidad implica punto límite compacto, pero no conversamente.

Prueba :

Sea X un espacio compacto. Dado un subconjunto A de X, queremos probar que si A es infinito, entonces A tiene un punto límite. Probaremos el contrapositivo. Si A no tiene punto límite, entonces A debe ser finito.

Supongamos pues que A no tiene punto límite. Entonces A contiene todos sus puntos límites y es por lo tanto cerrado. Siendo un subconjunto cerrado de un espacio compacto, A es compacto. Para cada a en A, podemos escoger un vecindario U_a de a tal que U_a no interseca a $A \setminus \{a\}$, ya que a no es punto límite de A. El conjunto A es cubierto por los conjuntos abiertos U_a; siendo compacto, puede ser cubierto por un número finito (n) de ellos. Como cada U_a contiene sólo un punto de A, el conjunto A contiene n puntos.

El ejemplo siguiente describe un espacio que es punto límite compacto pero no compacto.

Ejemplo 2.11. :

Consideremos el conjunto bien ordenado no contable S_Ω, en la topología del orden. El espacio S_Ω no es compacto, porque no es cerrado en $\overline{S}_\Omega$. No obstante es punto límite compacto : Sea A un subconjunto infinito de S_Ω. Escojamos un subconjunto B de A que es infinito contable. Siendo contable, el conjunto B tiene una cota superior b en S_Ω; entonces B es un subconjunto del intervalo $[a_0, b]$ de S_Ω, dónde a_0 es el más pequeño elemento de S_Ω. Como S_Ω tiene la propiedad del supremo, el intervalo $[a_0, b]$ es compacto. Por el teorema anterior, B tiene un punto límite x en $[a_0, b]$. El punto x es también un punto límite de A. Así S_Ω es punto límite compacto.

Lema 2.8. :

Sea X un espacio topológico que es punto límite compacto, entonces toda sucesión infinita (x_n) en X tiene una subsucesión convergente. Esto es, existe una sucesión creciente

$$n_1 < n_2 < \ldots\ldots < n_i < \ldots.$$

de enteros positivos tal que

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_i}, \ldots$$

converge.

Prueba :

Dada la sucesión (x_n), consideremos el conjunto

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

Primero consideremos que el conjunto A es finito. En este caso, aseguramos que existe un punto x tal que $x = x_n$ para un número infinito de valores de n. [Para probar esta afirmación, sea $f : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow A$ la función -

definida por $f(n) = x_n$. Entonces como Z_+ es la unión de la colección finita de conjuntos $f^{-1}(x)$, ya que x varía en A, al menos uno de los conjuntos $f^{-1}(x)$ debe ser infinito]. Entonces la sucesión (x_n) tiene una subsucesión que es constante, y por consiguiente converge automáticamente. Supongamos que A es infinito. Entonces A tiene un punto límite x. Definimos una subsucesión de (x_n) que converge a x como sigue : Escogemos n_1 tal que

$$x_{n_1} \in B(x, 1)$$

Entonces supongamos que el entero positivo n_{i-1} es dado. Ya que la bola $B(x, \frac{1}{i})$ interseca a A en un número infinito de puntos, podemos escoger un índice $n_i > n_{i-1}$ tal que

$$x_{n_i} \in B(x, \frac{1}{i})$$

Entonces la subsucesión $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ converge a x.

<u>Lema 2.9.</u> :

Sea el espacio secuencialmente compacto X, entonces toda cubierta abierta A de X tiene un número de Lebesgue δ. (*)

<u>Prueba</u> :

Probaremos el contrapositivo : Supongamos que no existe $\delta > 0$ tal que todo conjunto de diámetro menor que δ está en al menos un elemento de A. Entonces X no es secuencialmente compacto.

Así asumamos que no existe tal δ. Esto significa que para todo $\delta > 0$, existe un subconjunto de X que tiene un diámetro menor que δ el cual no está dentro de ningún elemento de A. En particular, para cada $n \in Z_+$, podemos escoger un punto C_n que tenga un diámetro menor que $\frac{1}{n}$ el cual no esté contenido en ningún elemento de A. Escojamos para

(*) Ver Lema del Número de Lebesgue.

cada n, un punto x_n de C_n. Aseguramos que esta sucesión (x_n) no tiene subsucesión convergente.

Supongamos que (x_n) tiene una subsucesión convergente (x_{n_i}), que converge a x. Ahora x pertenece a algún elemento de A de $\mathcal{A}$, y como A es abierto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Escojamos i suficientemente grande que

$$d(x_{n_i}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad \frac{1}{n_i} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora C_{n_i} está en $B(x_{n_i}, \frac{1}{n_i})$; se sigue que

$$C_{n_i} \subseteq B(x, \varepsilon)$$

Entonces $C_{n_i} \subseteq A$, contradiciendo la forma en que se escogieron los conjuntos C_n.

Definición 2.16. :

Si toda sucesión en un espacio X tiene una subsucesión convergente, decimos que X es secuencialmente compacto.

Lema 2.10. : (El lema del número de Lebesgue)

Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta del espacio métrico (X, d). Si X es compacto, existe un $\delta > 0$ tal que para todo subconjunto de X que tiene diámetro menor que δ, existe un elemento de $\mathcal{A}$ que lo contiene.

El número δ es llamado un número de Lebesgue para la cubierta $\mathcal{A}$.

Prueba :

Como X es compacto, por teorema 2.23, X es punto límite compacto, entonces por lema 2.8 toda sucesión infinita (x_n) en X tiene una subsucesión convergente, es decir X es secuencialmente compacto. Y por lema 2.9. toda cubierta abierta $\mathcal{A}$ de X tiene un número de Lebesgue δ.

Teorema 2.24. : (Teorema de continuidad uniforme)

Sea $f : X \to Y$ una función contínua del espacio métrico compacto (X, d_X) al espacio métrico (Y, d_Y). Entonces f es uniformemente contínua. Esto es dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier par de puntos x_1, x_2 de X,

$$d_X(x_1, x_2) < \delta \implies d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Prueba :

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos la cubierta abierta de Y por bolas $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$. Sea A la cubierta abierta de X por las imágenes inversas de estas bolas bajo f. Escojamos δ como un número de Lebesgue para la cubierta A.- Entonces si x_1 y x_2 son dos puntos de X tal que $d_X(x_1, x_2) < \delta$, el conjunto $\{x_1, x_2\}$ tiene diámetro menor que δ, así que su imágen $\{f(x_1), f(x_2)\}$ está en alguna bola $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$. Entonces $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$, como queríamos.

Ahora probaremos que compacidad y punto límite compacto son equivalentes en espacios metrizables.

Teorema 2.25. :

Sea X un espacio metrizable. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes :

(1) X es compacto

(2) X es punto límite compacto

(3) X es secuencialmente compacto

Prueba :

Por teorema 2.23 y lema 2.8 tenemos que se cumple (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3). Resta pues que probemos (3) $\implies$ (1).

Paso 1 : Primero probaremos que para todo $\varepsilon > 0$, existe una cubierta finita de X por bolas de radio ε. Y una vez más probaremos el contrapositivo: Si para algún $\varepsilon > 0$, X no puede ser cubierto por un número finito de bolas de radio ε, entonces X no es secuencialmente compacto.

Supongamos pues que X no puede ser cubierto por un número finito de bolas de radio ε. Construimos una sucesión de puntos x_n de X como sigue : Primero escogemos x_1 un punto cualquiera de X. Notando que la bola $B(x_1, \varepsilon)$ no es todo X(de otra forma X podría ser cubierta por una sola bola de radio ε), escogemos x_2 un punto de X que no pertenece a $B(x_1, \varepsilon)$. En general, dados $x_1, \ldots, x_n$, escogemos x_{n+1} un punto que no está en la unión

$$B(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \varepsilon),$$

usando el hecho que las bolas estas no cubren a X. Nótese que por construcción $d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$ para $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, la sucesión (x_n) no puede tener subsucesión convergente; en efecto, toda bola de radio $\frac{\varepsilon}{2}$ puede contener x_n para lo sumo un valor de n.

Paso 2 : Ahora probaremos que X es compacto. Sea A una cubierta abierta de X. Como X es secuencialmente compacto, la cubierta A tiene un número de Lebesgue δ. Usando paso 1, escogemos una cubierta finita de X por bolas de radio $\frac{\delta}{3}$. Cada una de estas bolas tiene diámetro de a lo sumo $\frac{2\delta}{3}$, así podemos escoger para cada una de estas bolas un elemento de A que la contenga. Hemos obtenido así una subcolección finita de A que cubre a X.

COMPACIDAD LOCAL

Definición 2.17. :

Un espacio X es localmente compacto en x si existe algún subconjunto compacto C de X que contiene un vecindario de x. Si X es localmente compacto en cada uno de sus puntos, se dice que X es localmente compacto.

Nótese que un espacio compacto es automáticamente localmente compacto.

Ejemplo 2.12. :

La recta real $\mathbb{R}$ es localmente compacta. El punto x está en un intervalo (a, b), que está contenido en el compacto $[a, b]$. El subespacio Q de los números racionales no es localmente compacto.

Lema 2.11.:

Sea X un espacio Hausdorff. Entonces X es localmente compacto en x si y sólo si para cada vecindario U de x, existe un vecindario V de x tal que c(V) es compacto y $c(V) \subseteq U$.

Corolario 2.3. :

Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto, sea Y un subespacio de X. Si Y es cerrado en X o abierto en X, entonces Y es localmente compacto.

Corolario 2.4. :

Un espacio X es homeomorfo a un subconjunto abierto de un espacio Hausdorff compacto si y sólo si X es Hausdorff localmente compacto.

CAPITULO III : AXIOMAS DE CONTABILIDAD Y SEPARACION

LOS AXIOMAS DE CONTABILIDAD

Definición 3.1. :

Se dice que un espacio X tiene una base contable en x si existe una colección contable β de vecindarios de x tal que cada vecindario de x contiene al menos uno de los elementos de β. Un espacio que tiene una base contable en cada uno de sus puntos se dice que satisface el primer axioma de contabilidad o que es un espacio primero numerable.

Nótese que un espacio metrizable es primero numerable : Sea X un espacio metrizable, sea d la métrica que induce a su topología, entonces para todo $x \in X$, la colección de bolas $B(x, \frac{1}{n})$ es una base contable en x.

Teorema 3.1. :

Sea X un espacio que satisface el primer axioma de contabilidad.

(a) El punto x pertenece a la clausura c(A) del subconjunto A de X si y sólo si existe una sucesión de puntos de A que converge a x.

(b) La función $f : X \longrightarrow Y$ es contínua si y sólo si para toda sucesión convergente (x_n) en X, que converge a x, la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x)$.

Definición 3.2. :

Un espacio topológico X se dice que satisface el segundo axioma de contabilidad o que es segundo numerable, si X tiene una base contable para su topología.

Ejemplo 3.1. :

La recta real $\mathbb{R}$ tiene una base contable, la colección de todos los intervalos abiertos (a, b) con a y b racionales. Así mismo $\mathbb{R}^n$ tiene una base contable, la colección de todos los productos de intervalos (a_i, b_i) con $a_i < b_i$ y a_i, b_i, números racionales. Aún $\mathbb{R}^w$ tiene una base contable. La colección de todos los productos $\prod_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n$, donde U_n es un intervalo abierto con racionales en los extremos para un número finito de valores de n, y $U_n = \mathbb{R}$ para todos los otros valores de n.

Ejemplo 3.2. :

En la topología uniforme, $\mathbb{R}^w$ satisface el primer axioma de contabilidad (siendo metrizable). Pero no satisface el segundo. Consideremos el subconjunto incontable C de $\mathbb{R}^w$ que consiste de todas las sucesiones de 0's y 1's. Si β es una base para la topología uniforme en $\mathbb{R}^w$, podemos escoger, para cada $x \in C$, un elemento B_x de β que contiene a x y que esté en la bola de radio 1 con centro en x. Si x y y son puntos distintos de C, entonces $B_x \neq B_y$; como $\bar{\rho}(x, y) = 1$, se tiene que $y \notin B_x$. Concluimos que β es incontable.

Teorema 3.2. :

Un subespacio de un espacio primero contable es primero contable. Un subespacio de un espacio segundo contable es segundo contable, y un producto contable de espacios primero contables es primero contable, y un producto contable de espacios segundo contables es segundo contable.

Definición 3.3. :

Un subespacio A de un espacio X es denso en X si $c(A) = X$.

Teorema 3.3. :

Supóngase que X tiene una base contable. Entonces :

(a) Toda cubierta abierta de X contiene una subcolección contable que cubre a X.

(b) Existe un subconjunto contable de X que es denso en X.

Prueba :

Sea $\{B_n\}$ una base contable para X.

(a) Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de X. Para cada entero positivo n para el cual es posible, escogemos un elemento A_n de $\mathcal{A}$ que contiene el elemento básico B_n. La colección $\mathcal{A}'$ de los conjuntos A_n es contable, ya que tiene índices en un subconjunto de Z_+. Además cubre a X : Dado un punto $x \in X$, podemos escoger un elemento A de $\mathcal{A}$ que contiene a x. Como A es abierto, existe un elemento básico B_n tal que $x \in B_n \subseteq A$. Como B_n está en un elemento de $\mathcal{A}$, el conjunto A_n está definido para el índice n; como A_n contiene a B_n, contiene a x, así $\mathcal{A}'$ es una subcolección contable de $\mathcal{A}$ que cubre a X.

(b) De cada elemento básico no vacío B_n, escogemos un punto x_n. El conjunto $D = \{x_n \mid n \in Z_+\}$ es denso en X; dado $x \in X$, todo elemento básico alrededor de x interseca al conjunto D.

Definición 3.4. :

Un espacio para el cual toda cubierta abierta contiene una subcubierta contable es usualmente llamado un espacio Lindelöf

Ejemplo 3.3. :

El espacio $\mathbb{R}_1$ satisface todos los axiomas de contabilidad salvo el segundo.

Dado $x \in \mathbb{R}_1$, el conjunto de todos los elementos básicos de la Forma $\left[x,\ x + \frac{1}{n}\right)$ es una base contable en x.

Para ver que $\mathbb{F}_1$ no tiene base contable, sea β una base para $\mathbb{F}_1$. Escojamos para cada x, un elemento B_x de β tal que $x \in B_x \subseteq [x,\ x+1)$. Si $x \neq y$, entonces $B_x \neq B_y$, ya que $x = \inf B_x$ y $y = \inf B_y$. Por consiguiente, β debe ser no contable.

Para probar que $\mathbb{F}_1$ es Lindelöf se requiere más trabajo. Bastará probar que todo cubrimiento abierto de $\mathbb{F}_1$ por elementos básicos, contiene una subcolección contable que cubre a $\mathbb{F}_1$ (ya que para cualquier colección de abiertos que cubre a $\mathbb{F}_1$, cada uno de ellos es unión de básicos. Siendo la subcolección de básicos contables que cubre a $\mathbb{F}_1$, la subcolección contable de abiertos cualesquiera serán los abiertos en los cuales está un básico de la subcolección que cubre).

Así, sea $\Lambda = \{[a_\alpha, b_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ un cubrimiento de $\mathbb{F}$ por elementos básicos para la topología del límite inferior. Queremos encontrar una subcolección contable que cubra a $\mathbb{F}$.

Sea C el conjunto

$$C = \bigcup_{\alpha\in J} (a_\alpha,\ b_\alpha),$$

considerado como subespacio de $\mathbb{F}$. Entonces C satisface el segundo axioma de contabilidad. Como la colección $\{(a_\alpha,\ b_\alpha)\}$ consiste de abiertos de C debe contener una colección contable que cubre a C, que consiste, digamos, de los elementos $(a_\alpha,\ b_\alpha)$ para $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Entonces la colección

$$\Lambda' = \{[a_\alpha,\ b_\alpha) \mid \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$$

también cubre a C.

Aseguramos que el conjunto $\mathbb{F} \setminus C$ es contable. De esto sigue nuestro resultado : Escogemos para cada punto de $\mathbb{F} \setminus C$ un elemento de Λ conteniéndolo; adjuntando este elemento a Λ', uno obtiene una subcolección conta ble de A que cubre todo $\mathbb{R}_l$.

Así sea x un punto de $\mathbb{R}\setminus C$. Necesariamente $x = a_\alpha$ para un $\alpha \in J$. Escojamos q_x un número racional que pertenece al intervalo (a_α, b_α); ya que este intervalo está contenido en C. También lo está el intervalo (x, q_x). Se sigue que la función tal que $x \to q_x$ es inyectiva que va de $\mathbb{R}\setminus C$ al conjunto Q de los números racionales, así que $\mathbb{R}\setminus C$ es contable. [porque si x y y son dos puntos de $\mathbb{R}\setminus C$ y $x < y$, entonces necesariamente $q_x < q_y$, ya que de otra manera y pertenecería a (x, q_x), aunque y está en $\mathbb{R}\setminus C$ y (x, q_x) está contenido en C.]

<u>Ejemplo 3.4.</u> :

El producto de dos espacios Lindelöf no necesariamente es Lindelöf. Porque el espacio $\mathbb{R}_l$ es Lindelöf y mostraremos que $\mathbb{R}_l^2$ no lo es.

Consideremos el subespacio

$$L = \{x \times (-x) \mid x \in \mathbb{R}_l\}$$

de $\mathbb{R}_l^2$. L es cerrado en $\mathbb{R}_l^2$. Cubramos $\mathbb{R}_l^2$ por los conjuntos abiertos $\mathbb{R}_l^2 \setminus L$ y todos los elementos básicos de la forma

$$[a, b) \times [-a, d)$$

Cada uno de estos elementos básicos interseca a L en a lo sumo un punto. Como L es incontable, ninguna subcolección contable cubre a $\mathbb{R}_l^2$. Ver Figura 1.

<u>Ejemplo 3.5.</u>:

Un subespacio de un espacio que tiene un subconjunto denso contable, no tiene necesariamente un subconjunto denso contable. Es fácil ver que el conjunto de puntos que tienen coordenadas racionales es -

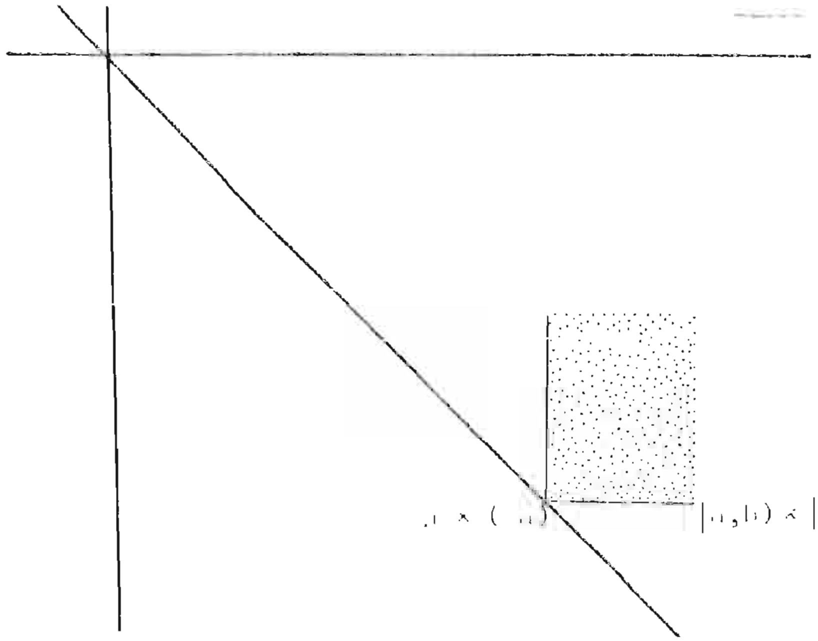


Figura 1

denso en $\mathbb{R}_l^2$. Pero el subespacio L que tiene la topología discreta; siendo incontable, no puede tener un subconjunto denso contable.

LOS AXIOMAS DE SEPARACION

Ya hemos definido en el capítulo dos lo que es un espacio Hausdorff, pero no está demás que demos nuevamente esta definición junto con otras dos nuevas y más fuertes que son las de espacios regulares y espacios normales.

Definición 3.5. :

Se dice que el espacio X es Hausdorff, si para cada par x, y de puntos distintos de X, existen conjuntos abiertos disjuntos U, V que contienen a x y a y respectivamente.

Definición 3.6. :

Supongamos que los conjuntos unitarios son cerrados en X. Entonces X será regular si para cada par que consiste de un punto x y un conjunto cerrado B que no contiene a x, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a x y a B respectivamente.

El espacio X es normal si para cada par A, B de conjuntos cerrados disjuntos de X, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B respectivamente.

Es claro que un espacio regular es Hausdorff, y que un espacio normal es regular.

Nótese que incluimos en la definición de espacio regular y espacio normal la condición de que en el espacio los conjuntos unitarios son cerrados, porque si no podría darse un caso como el siguiente : Un espacio de dos puntos con la topología indiscreta satisface la otra parte de la definición de regularidad y normalidad, aunque no es Hausdorff.

Estos axiomas son llamados de separación por la razón que ellos in-

volucran "separación" de ciertas clases de conjuntos de otros por conjun_
tos abiertos.

Usamos la palabra "separación" antes, cuando estudiamos espacios co_
nexos. Pero en este caso, tratamos de encontrar conjuntos abiertos cuya unión fuera el espacio. El presente caso es diferente, porque los conjun_
tos abiertos no satisfacen esta condición.

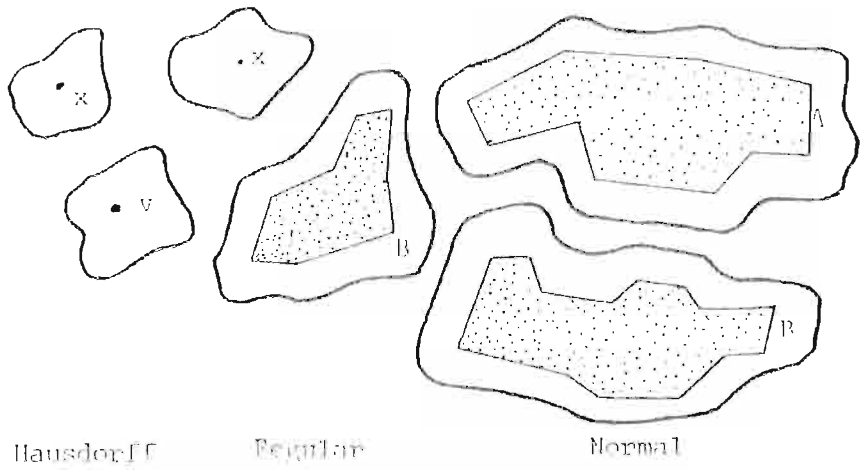


Figura 2

Hay otras formas de formular los axiomas de separación. Una formula_
ción que es algunas veces útil es dada en el siguiente

<u>Lema 3.1.</u> :

Sea X un espacio topológico. Sean los conjuntos unitarios ce_
rrados en X.

(a) X es regular si y sólo si dado un punto x de X y un vecindario U de x, existe un vecindario V de x tal que $c(V) \subseteq U$.

(b) X es normal si y sólo si dado un conjunto cerrado A y un conjunto abierto U que contiene a A, existe un conjunto abierto V que contie_
ne a A tal que $c(V) \subseteq U$.

<u>Prueba</u> :

(a) Supongamos que X es regular, y supongamos que son dados el punto x y el vecindario U de x. Sea $B = X \setminus U$; entonces B es un conjunto cerrado. Por hipótesis existen conjuntos abiertos V y W que contienen a x y a B respectivamente. El conjunto $c(V)$ es disjunto de B, ya que si $y \in B$, el conjunto W es un vecindario de y disjunto de V. Por lo tanto, $c(V) \subseteq U$, como queríamos.

Conversamente, supongamos el punto x y el conjunto cerrado B que no contiene a x son dados. Sea $U = X \setminus B$. Por hipótesis, existe un vecindario V de x tal que $c(V) \subseteq U$. Los conjuntos abiertos V y $X \setminus c(V)$ son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a x y a B respectivamente. Así X es regular.

(b) Esta prueba usa exactamente el mismo argumento; solamente reemplazamos el punto x por el conjunto A.

<u>Teorema 3.4.</u> :

(a) Un subespacio de un espacio Hausdorff es Hausdorff; un producto de espacios Hausdorff es Hausdorff.

(b) Un subespacio de un espacio regular es regular; un producto de espacios regulares es regular.

(c) Un subespacio de un espacio normal, no necesariamente es normal; un producto de espacios normales, no necesariamente es normal.

<u>Prueba</u> :

(a) Sea X un espacio Hausdorff. Sean x y y dos puntos del subespacio Y de X. Si U y V son vecindarios disjuntos en X de x y y, respectivamente, entonces $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son vecindarios disjuntos de x y y en Y.

Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios Hausdorff. Sea $x = (x_\alpha)$ y $y = (y_\alpha)$ puntos distintos del espacio producto ΠX_α. Como $x \neq y$, existe un índice β tal que $x_\beta \neq y_\beta$. Escogemos conjuntos abiertos disjuntos U y V en X_β que contienen x_β y y_β, respectivamente. Entonces los conjuntos $\pi_\beta^{-1}(U)$ y $\pi_\beta^{-1}(V)$ son conjuntos abiertos disjuntos en ΠX_α que contienen a x y a y respectivamente.

(b) Sea Y un subespacio del espacio regular X. Como Y es Hausdorff, los conjuntos unitarios son cerrados en Y. Sea x un punto de Y y sea B un subconjunto cerrado de Y disjunto de x. Ahora $c(B) \cap Y = B$, donde $c(B)$ denota la clausura de B en X. Por consiguiente, $x \notin c(B)$, así, usando regularidad de X, podemos escoger conjuntos abiertos disjuntos U y V de X que contienen a x y $c(B)$, respectivamente. Entonces $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son conjuntos abiertos disjuntos en Y que contienen a x y a B, respectivamente.

Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios regulares; sea $X = \Pi X_\alpha$. Por (a), X es Hausdorff, así los conjuntos unitarios son cerrados en X. Usamos el lema anterior para probar regularidad de X. Sea $x = (x_\alpha)$ un punto de X y sea U un vecindario de x en X. Escojamos un elemento básico ΠU_α alrededor de x contenido en U. Escogemos, para cada α, un vecindario V_α de x_α en X_α tal que $c(V_\alpha) \subseteq U_\alpha$; si sucede que $U_\alpha = X_\alpha$, escogemos $V_\alpha = X_\alpha$. Entonces $V = \Pi V_\alpha$ es un vecindario de x en X. Aseguramos que $c(V) = \Pi c(V_\alpha)$. Se sigue que $c(V_\alpha) \subseteq \Pi U_\alpha \subseteq U$, así que X es regular.

(c) Encontrar un ejemplo de un subespacio de un espacio normal que no es normal es un poco difícil, así como el problema de encontrar un producto de espacios normales que no es normal. Sucede que un sólo espacio será suficiente para ambos propósitos: está dado en el ejemplo 3.7.

Los siguientes tres teoremas dan tres conjuntos de hipótesis muy importantes bajo las cuales podemos asegurar la normalidad de un espacio.

Teorema 3.5. :

Todo espacio metrizable es normal.

Prueba :

Sea X un espacio metrizable con métrica d. Sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Para cada $a \in A$, escogemos ε_a tal que la bola $B(a, \varepsilon_a)$ no intersecta a B. Similarmente para cada $b \in B$, escogemos ε_b tal que la bola $B(b, \varepsilon_b)$ no intersecta a A.

Definimos :

$$U = \bigcup_{a \in A} B\left(a, \frac{\varepsilon_a}{2}\right) \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{b \in B} B\left(b, \frac{\varepsilon_b}{2}\right).$$

Entonces U y V son conjuntos abiertos conteniendo a A y B respectivamente. Aseguramos que son disjuntos. Porque si $z \in U \cap V$, entonces

$$z \in B\left(a, \frac{\varepsilon_a}{2}\right) \cap B\left(b, \frac{\varepsilon_b}{2}\right)$$

para un $a \in A$ y un $b \in B$. La desigualdad triangular se aplica para mostrar que $d(a, b) < \frac{(\varepsilon_a + \varepsilon_b)}{2}$. Si $\varepsilon_a \leq \varepsilon_b$, entonces $d(a, b) < \varepsilon_b$, así que la bola $B(b, \varepsilon_b)$ contiene el punto a. Si $\varepsilon_b \leq \varepsilon_a$, entonces $d(a, b) < \varepsilon_a$, así que la bola $B(a, \varepsilon_a)$ contiene el punto b. Ninguna de estas situaciones es posible.

Teorema 3.6. :

Todo espacio Hausdorff y compacto es normal.

Prueba :

Sea X un espacio Hausdorff y compacto. Hemos probado ya esencialmente que X es regular. Porque si x es un punto de X y B es un conjunto cerrado en X que no contiene a x, entonces B es compacto, así que se aplica el Lema 2.4., para mostrar que existen conjuntos abiertos disjuntos alrededor de x y B respectivamente.

Esencialmente el mismo argumento dado en este lema puede ser usado para mostrar que X es normal : Dados los conjuntos cerrados disjuntos A y B en X, escogemos, para cada punto a de A, conjuntos abiertos disjuntos U_a y V_a conteniendo a a y B respectivamente. (Aquí usamos regularidad de X.) La colección $\{U_a\}$ cubre a A; ya que A es compacto, A puede ser cubierto por un número finito de conjuntos $U_{a_1}, \ldots., U_{a_m}$. Entonces

$$U = U_{a_1} \cup \ldots. \cup U_{a_m} \quad y \quad V = V_{a_1} \cap \ldots. \cap V_{a_m}$$

son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B respectivamente.

Teorema 3.7. :

Todo espacio regular con una base contable es normal.

Prueba :

Sea X un espacio regular con una base contable β. Sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Cada punto x de A tiene un vecindario U que no interseca a B. Usando regularidad, escojamos un vecindario V de x cuya clausura está en U; Finalmente, escojamos un elemento de β que contiene a x y está contenido en V. Escogiendo tales elementos básicos para cada x en A, construimos una cubierta contable de A por conjuntos abiertos cuya clausura no interseca a B. Como esta cubierta de A es contable, podemos asignarle el conjunto de los enteros positivos como su conjunto de índices; denotemos tal cubierta por $\{U_n\}$.

Similarmente, escogemos una colección contable $\{V_n\}$ de conjuntos abiertos que cubren a B, tal que cada conjunto $c(V_n)$ es disjunto de A.

Los conjuntos $U = \bigcup U_n$ y $V = \bigcup V_n$ son conjuntos abiertos que contienen a A y B, respectivamente, pero ellos no necesariamente son disjuntos. Ejecutamos el siguiente artificio para construir dos conjuntos abiertos que son disjuntos. Dado n, definimos :

$$U'_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} c(V_i) \quad y \quad V'_n = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} c(U_i)$$

Ver Figura 3. Nótese que cada conjunto U'_n es abierto ya que es la diferencia de un conjunto abierto U_n y un conjunto cerrado $\bigcup_{i=1}^{n} c(V_i)$. Similarmente, cada conjunto V'_n es abierto. La colección $\{U'_n\}$ cubre a A, porque cada x en A pertenece a U_n para algún n, y x no pertenece a ninguno de los conjuntos $c(V_i)$. Similarmente, la colección $\{V'_n\}$ cubre a B.

Finalmente, los conjuntos abiertos

$$U' = \bigcup_{n\in Z_+} U'_n \qquad y \qquad V' = \bigcup_{n\in Z_+} V'_n$$

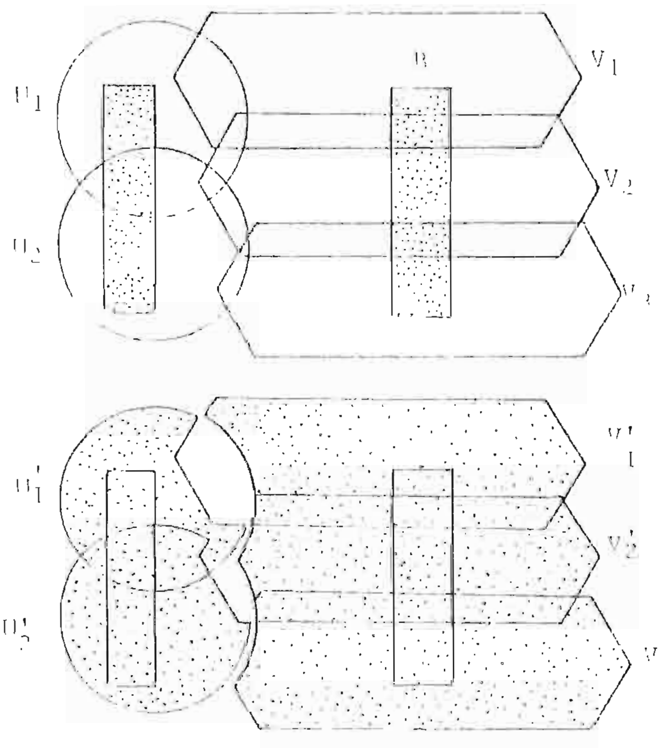


Figura 3

son disjuntos. Porque si $x \in U' \cap V'$, entonces $x \in U_j' \cap V_k'$ para un j y un k. Supongamos que $j \leq k$. Se sigue de la definición de U_j' que $x \in U_j$; y como $j \leq k$ se sigue de la definición de V_k' que $x \notin \bar{U}_j$. Una contradicción similar se obtiene si $j \geq k$.

Usaremos el siguiente teorema en relación con algunos ejemplos.

Teorema 3.8. :

Todo conjunto bien ordenado X es normal con la topología del orden.

Prueba :

Sea X un conjunto bien ordenado. Aseguramos que todo intervalo de la forma $(x, y]$ es abierto en X : Si X tiene un elemento más grande y y y es ese elemento, $(x, y]$ es precisamente un elemento básico alrededor de y. Si y no es el elemento más grande de X, entonces $(x, y]$ es igual al conjunto abierto (x, y'), donde y' es el sucesor inmediato de y.

Ahora sean A y B conjuntos cerrados disjuntos en X; asumimos por el momento que ni A ni B contienen el elemento más pequeño a_0 de X. Para cada $a \in A$, existe un elemento básico alrededor de a disjunto de B; éste contiene un intervalo de la forma $(x, a]$. (Aquí es donde usamos el hecho que a no es el elemento más pequeño de X). Escogemos para cada $a \in A$, un intervalo $(x_a, a]$ disjunto de B. Similarmente, para cada $b \in B$, escogemos un intervalo $(y_b, b]$ disjunto de A. Los conjuntos

$$U = \bigcup_{a \in A}(x_a, a] \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{b \in B}(y_b, b]$$

Son conjuntos abiertos que contienen a A y B, respectivamente; aseguramos que ellos son disjuntos. Porque supongamos que $z \in U \cap V$. Entonces $z \in (x_a, a] \cap (y_b, b]$ para algún $a \in A$ y algún $b \in B$. Asumimos que -

$a < b$. Entonces si $a \leq y_0$, los dos intervalos son disjuntos, mientras que si $a > y_0$, tenemos que $a \in (y_0, b]$, contrariamente al hecho que $(y_0, b]$ es disjunto de A. Una contradicción similar ocurre si $b < a$.

Finalmente, asumimos que A y B son conjuntos cerrados disjuntos en X, y A contiene el elemento más pequeño a_0 de X. El conjunto $\{a_0\}$ es abierto y cerrado en X. Por el resultado del párrafo anterior, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V que contienen los conjuntos cerrados $A \setminus \{a_0\}$ y B, respectivamente. Entonces $U \cup \{a_0\}$ y V son disjuntos que contienen a A y B, respectivamente.

Ejemplo 3.6. :

Este es un ejemplo que muestra que el axioma de regularidad es más fuerte que el axioma de Hausdorff. Sea K el subconjunto

$$K = \{ \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_+ \}$$

de la recta real $\mathbb{R}$. Definimos una topología para $\mathbb{R}$ tomando como base todos los conjuntos de la forma :

(1) Todo intervalo abierto (a, b)

(2) Todo conjunto $(a, b) \setminus K$.

Es fácil mostrar que ésta es una base para una topología en $\mathbb{R}$; la intersección de dos elementos básicos es siempre otro elemento básico o vacío. El espacio es Hausdorff, porque cualquier par de puntos distintos de $\mathbb{R}$ tienen intervalos abiertos alrededor de ellos que son disjuntos.

Pero este espacio no es regular. El conjunto K es cerrado en esta topología y no contiene el punto cero. Supongamos conjuntos abiertos disjuntos U y V que contienen a 0 y K, respectivamente. Escogimos un elemento básico que contiene a 0 y está en U. Debe ser un elemento básico del tipo (2): $(a, b) - K$, como cada elemento básico del tipo (1) que contiene a 0 interseca a K. Entonces escogemos n lo suficientemente grande tal que $\frac{1}{n} \in (a, b)$. Escojamos un elemento básico alrededor de $\frac{1}{n}$ contenido en V; este debe ser un elemento básico (c, d) del tipo (1). Finalmente, escojamos z tal que $z < \frac{1}{n}$ y $z > \max\{c, \frac{1}{(n+1)}\}$. Entonces z pertenece a U y V, así que ellos no son disjuntos.

Ver figura 8.

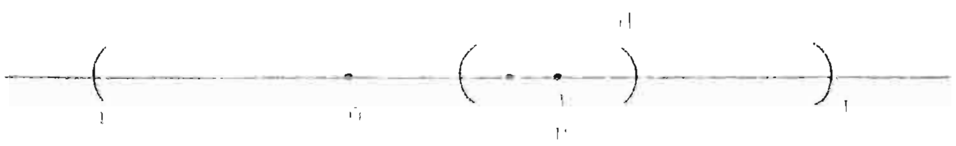


Figura 8

Ejemplo 3.7. :

El espacio producto $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ no es normal.

Consideremos el conjunto bien ordenado $\bar{S}_\Omega$, en la topología del orden y consideremos el subconjunto S_Ω, en la topología del subespacio (que es la misma que la topología del orden). Ambos espacios son normales, por teorema 3.8. Mostraremos que el espacio producto $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ no es normal.

Este ejemplo sirve para tres propósitos. Primero, muestra que un espacio regular no es necesariamente normal, porque $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ es un producto de espacios regulares y por consiguiente regular. Segundo, muestra que un subespacio de un espacio normal no necesariamente es normal, porque $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ es un subespacio de $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$, que es un espacio Hausdorff compacto y por consiguiente normal. Tercero, muestra que el producto de dos espacios normales no necesariamente es normal.

Primero, consideremos el espacio $\overline{S}_\Omega \times \overline{S}_\Omega$, y su "diagonal"

$$A = \{x \times x \mid x \in \overline{S}_\Omega\}$$

Ya que $\overline{S}_\Omega$ es Hausdorff, A es cerrado en $\overline{S}_\Omega \times \overline{S}_\Omega$: si U y V son vecindarios disjuntos de x y y, respectivamente, entonces $U \times V$ es un vecindario de $x \times y$ que no intersecta a A.

Por lo tanto, en el subespacio $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$, el conjunto

$$A_0 = A \cap (S_\Omega \times \overline{S}_\Omega) = A \setminus \{\Omega \times \Omega\}$$

es cerrado. Del mismo modo, el conjunto

$$B = S_\Omega \times \{\Omega\}$$

es cerrado en $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$, siendo una "recta" del espacio producto. Ver Figura 5. Los conjuntos A_0 y B son disjuntos. Asumiremos que existen conjuntos abiertos disjuntos U y V de $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ que contienen a A_0 y B, respectivamente, y derivamos una contradicción.

Dado $x \in S_\Omega$, consideremos la "recta" vertical $x \times \overline{S}_\Omega$. Aseguramos que existe un punto β con $x < \beta < \Omega$ tal que $x \times \beta$ está fuera de U. Porque si U contiene todos los puntos $x \times \beta$ para $x < \beta < \Omega$, entonces el punto $x \times \Omega$ de la "recta" sería un punto límite de U, el cual no lo es porque V es un conjunto abierto disjunto de U que contiene este punto tope.

Escogemos $\beta(x)$ como tal punto; precisamente para ser definitivos, sea $\beta(x)$ el elemento más pequeño de S_Ω tal que $x < \beta(x) < \Omega$ y $x \times \beta(x)$ está fuera de U. Definimos una sucesión de puntos de S_Ω como sigue : Sea x_1 cualquier punto de S_Ω. Sea $x_2 = \beta(x_1)$, y en general, $x_{n+1} = \beta(x_n)$. Tenemos :

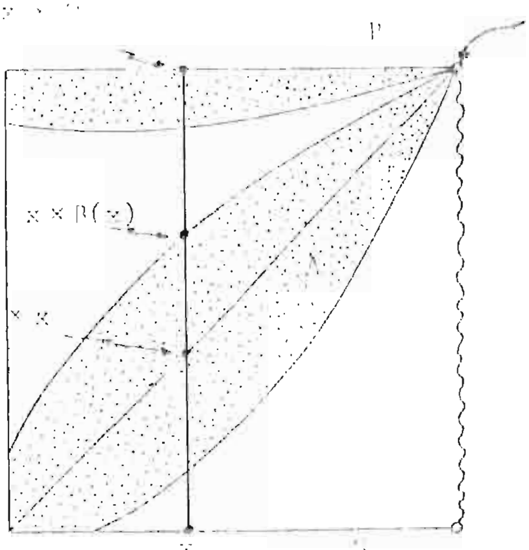


Figura 5

$$x_1 < x_2 < \ldots\ldots .$$

porque $\beta(x) > x$ para todo x. El conjunto $\{x_n\}$ es contable y por consiguiente tiene una cota superior en S_Ω; sea $b \in S_\Omega$ su supremo. Ya que la sucesión es creciente, debe converger a b; así $x_n \to b$. Pero $\beta(x_n) = x_{n+1}$ así que $\beta(x_n) \to b$ también. Entonces

$$x_n \times \beta(x_n) \to b \times b$$

en el espacio producto. Ver figura 6. Ahora tenemos una contradicción porque el punto $b \times b$ está en el conjunto A, el cuál está contenido en el conjunto abierto U; y U no contiene ninguno de los puntos $x_n \times \beta(x_n)$.

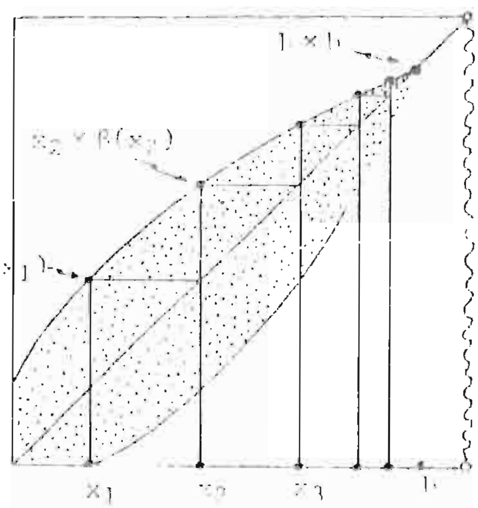


Figura 6

Escribiremos los siguientes dos ejemplos a manera de enunciados :

Ejemplo 3.8. :

El espacio $\mathbb{R}_l$ es normal, pero el espacio $\mathbb{R}_l^2$ no lo es. Este ejemplo sirve para dos propósitos. Muestra que un espacio regular $\mathbb{R}_l^2$, no necesariamente es normal, y muestra que el producto de dos espacios normales no necesariamente es normal.

Ejemplo 3.9. :

Si J es no contable, el espacio producto $\mathbb{R}^J$ no es normal.

Este ejemplo sirve para tres propósitos. Muestra que un espacio regular $\mathbb{R}^J$ no necesariamente es normal. Muestra que un subespacio de un espacio normal no necesariamente es normal porque $\mathbb{R}^J$ es homeomorfo al subespacio $(0, 1)^J$ de $[0, 1]^J$, que (asumiendo el teorema de Tychonoff) es Hausdorff compacto y por consiguiente normal. Y muestra que un producto no contable de espacios normales no necesariamente es normal.

EL LEMA DE URYSOHN

El siguiente teorema es una herramienta muy útil para la prueba de algunos teoremas importantes, entre ellos el Teorema de Extensión de Tietze y el teorema de Metrización de Urysohn.

Teorema 3.9. (Lema de Urysohn)

Sea X un espacio normal; sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado en la recta real. Entonces existe una función continua

$$f : X \to [a, b]$$

tal que $f(x) = a$ para todo x en A, y $f(x) = b$ para todo x en B.

Prueba :

Necesitamos considerar solamente el caso donde el intervalo en cuestión es $[0, 1]$; el caso general se sigue de éste.

El primer paso de la prueba es construir, usando normalidad una cierta familia U_p de conjuntos abiertos de X, cuyo conjunto de índices son los números racionales. Entonces usamos este conjunto para definir la función continua f.

Paso 1 :

Sea P el conjunto de todos los números racionales en el intervalo $[0, 1]$. Definiremos, para cada p en P, un conjunto abierto U_p de X, de tal forma que siempre que $p < q$, tenemos

$$c(U_p) \subseteq U_q$$

Así los conjuntos U_p serán simplemente ordenados por inclusión en la misma forma que sus subíndices son ordenados por el orden usual en la recta real.

Ya que P es contable, podemos usar inducción para definir los conjuntos U_p (o mejor dicho, el principio de la definición recursiva). Ordenamos los elementos de P en una sucesión infinita de alguna manera; por conveniencia, suponemos que los números 0 y 1 son los dos primeros elementos de esta sucesión.

Ahora definimos el conjunto U_p como sigue : Primero, definimos $U_1 = X \setminus B$. Segundo, como A es un conjunto cerrado contenido en el conjunto abierto U_1, podemos por normalidad de X escoger un conjunto abierto U_0 tal que

$$A \subseteq U_0 \quad \text{y} \quad c(U_0) \subseteq U_1$$

En general, sea P_n que denota el conjunto que consiste de los primeros n racionales de la sucesión. Supóngamos que U_p está definido para todos los números racionales p que están en el conjunto P_n, que satisfacen la condición

$$(*) \qquad p < q \Rightarrow c(U_p) \subseteq U_q.$$

Sea r que denota el próximo número racional en la sucesión, queremos definir U_r.

Consideremos el conjunto $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$. Este es un subconjunto finito del intervalo $[0, 1]$, y, como tal, tiene un orden simple derivado de la relación de orden usual < en la recta real. En un conjunto finito simplemente ordenado, todo elemento (otro que no sea el menor ni el mayor) tiene un inmediato antecesor y un inmediato sucesor. (Ver teorema 10 apéndice). El número 0 es el más pequeño elemento, y 1 es el elemento más grande, del conjunto simplemente ordenado P_{n+1}, y r no es ni 0 ni 1. Así r tiene un inmediato antecesor p en P_{n+1} y un inmediato sucesor q en

P_{n+1}. Los conjuntos U_p y U_q son ya definidos, y $c(U_p) \subseteq U_q$ por la hipótesis de inducción. Usando normalidad de X, podemos encontrar un conjunto abierto U_r de X tal que

$$c(U_p) \subseteq U_r \qquad y \qquad c(U_r) \subseteq U_q$$

Aseguramos que (*) es válida ahora para todo par de elementos de P_{n+1}. Si ambos elementos están en P_n, (*) vale por la hipótesis de inducción. Si uno de ellos es r y el otro es un punto s de P_n, entonces ó $s \leq p$, en cuyo caso

$$c(U_s) \subseteq c(U_p) \subseteq U_r ,$$

ó $s \geq q$, en cuyo caso

$$c(U_r) \subseteq U_q \subseteq U_s .$$

Así para todo par de elementos de P_n, la relación (*) es válida.

Por inducción, tenemos U_p definido para todo $p \in P$. Para ilustrar, supongamos que comenzamos con la forma usual de ordenar los elementos de P en una sucesión infinita :

$$P = \left\{1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \ldots\right\}$$

Después de definir U_0 y U_1, podríamos definir $U_{1/2}$ tal que

$$c(U_0) \subseteq U_{1/2} \qquad y \qquad c(U_{1/2}) \subseteq U_1 .$$

Entonces podríamos encajar $U_{1/3}$ entre U_0 y $U_{1/2}$; y $U_{2/3}$ entre $U_{1/2}$ y U_1. Y así sucesivamente. Al 8º paso de la prueba, tendríamos la situación ilustrada en la figura 7. Y el 9º paso podría consistir en escoger un conjunto abierto $U_{2/5}$ para encajarlo entre $U_{1/3}$ y $U_{1/2}$. Y así sucesivamente.

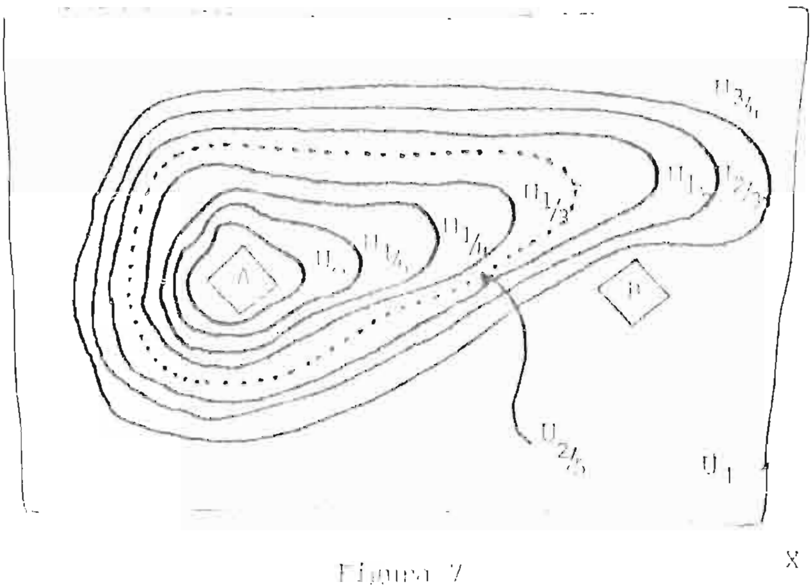


Figura 7

Paso 2 :

Ahora hemos definido U_p para todos los números racionales p en el intervalo $[0, 1]$. Extendemos esta definición a todos los números racionales p en $\mathbb{P}$ por definición

$$U_p = \phi \quad \text{si } p < 0,$$
$$U_p = X \quad \text{si } p > 1.$$

Es todavía cierto que para cualquier par de números racionales p y q

$$p < q \Rightarrow c(U_p) \subseteq U_q .$$

Paso 3 :

Dado un punto x de X, definimos $Q(x)$ como el conjunto de aquellos números racionales p tal que el correspondiente conjunto abierto U_p contiene a x :

$$Q(x) = \{p \mid x \in U_p\}$$

Este conjunto no contiene números menores que 0, ya que ningún x está en U_p para $p < 0$. Y contiene todo número mayor que 1, ya que todo x está en U_p para $p > 1$ del intervalo $[0, 1]$. Definimos

$$f(x) = \inf Q(x) = \inf \{p \mid x \in U_p\}$$

Paso 4 :

Mostraremos que f es la función deseada. Si $x \in A$, entonces $x \in U_p$ para todo $p \geq 0$, así que $Q(x)$ es igual al conjunto de todos los racionales no negativos, y $f(x) = \inf Q(x) = 0$. Similarmente, si $x \in B$, entonces $x \in U_p$ para ningún $p \leq 1$, así que $Q(x)$ consiste de todos los números racionales mayores que 1, y $f(x) = 1$.

Para probar que f es continua, probamos primero el siguiente hecho elemental :

(1) $\quad x \in c(U_r) \implies f(x) \leq r$

(2) $\quad x \notin U_r \implies f(x) \geq r$.

Para probar (1), nótese que si $x \in c(U_r)$, entonces $x \in U_s$ para todo $s > r$. Por consiguiente, $Q(x)$ contiene todos los números racionales más grandes que r, así que por definición tenemos

$$f(x) = \inf Q(x) \leq r.$$

Para probar (2), nótese que si $x \notin U_r$, entonces x no está en U_s para todo $s < r$. Por consiguiente, $Q(x)$ no contiene números racionales menores que r, así que

$$f(x) = \inf Q(x) \geq r.$$

Ahora probamos continuidad de f. Dado un punto x_0 de X y un intervalo abierto (c, d) en $\mathbb{R}$ que contiene el punto $f(x_0)$, queremos encontrar un vecindario U de x_0 tal que $f(U) \subseteq (c, d)$. Escogemos números racionales p y q tal que

$$c < p < f(x_0) < q < d$$

Aseguramos que el conjunto abierto

$$U = U_q \setminus c(U_p)$$

es el vecindario deseado de x_0. Ver Figura 8.

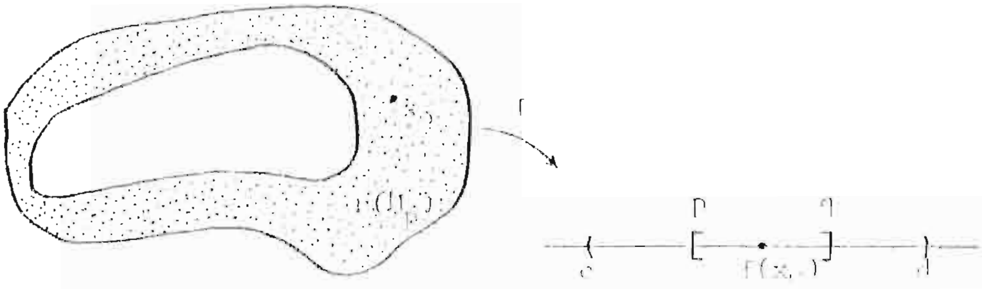


Figura 8

Primero, probamos que $x_0 \in U$. Necesariamente $x_0 \in U_q$, porque si $x_0 \notin U_q$ implica por (2) que $f(x_0) \geq q$. También, $x_0 \notin c(U_p)$, porque $x_0 \in c(U_p)$ implica por (1) que $f(x) \leq p$. Por consiguiente $x_0 \in U$.

Segundo, mostraremos que $f(U) \subseteq (c, d)$. Sea $x \in U$. Entonces $x \in U_q \subseteq c(U_q)$, así que $f(x) \leq q$, por (1). Y $x \notin c(U_p)$, así que $x \notin U_p$ y $f(x) \geq p$, por (2). Así $f(x) \in [p, q] \subseteq (c, d)$, como queríamos.

<u>Definición 3.7.</u> :

Si A y B son dos subconjuntos de un espacio topológico X, y si existe una función contínua $f: X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$, decimos que A y B pueden ser <u>separados por una función contínua</u>.

El lema de Urysohn dice que si todo par de conjuntos cerrados disjuntos en X puede ser separado por conjuntos abiertos disjuntos, entonces cada uno de estos pares pueden ser separados por una función contínua. El converso es trivial, porque si $f : X \to [0, 1]$ es la función, entonces $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B, respectivamente.

Un corolario inmediato del lema de Urysohn es el útil teorema llamado Teorema de Extensión de Tietze.

<u>Teorema 3.10.</u> : (Teorema de Extensión de Tietze).

Sea X un espacio normal; sea A un subconjunto cerrado de X.

(a) Toda función contínua de A en el intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ puede ser extendida a una función contínua de todo X en $[a, b]$.

(b) Toda función contínua de A en los reales $\mathbb{R}$ puede ser extendida a una función contínua de todo X en $\mathbb{R}$.

TEOREMA DE METRIZACION DE URYSOHN

Hay dos versiones de la prueba del Teorema de Metrización de Urysohn y cada una de ellas tiene una útil generalización que aparecerán adelante; la primera versión se utiliza para probar un teorema de inmersión para espacios completamente regulares. La segunda versión se generaliza cuando probemos en el capítulo IV el Teorema de Metrización de Nagata Smirnov.

<u>Teorema 3.11.</u> : (Teorema de Metrización de Urysohn)

Todo espacio regular X con una base contable es metrizable.

<u>Prueba</u> :

Probaremos que X es metrizable por inmersión de X en un espacio metrizable Y; esto es mostrando que X es homeomorfo con un subespacio de Y.

Las dos versiones de la prueba difieren en la escogitación del espacio metrizable Y. En la primer versión, Y es el espacio $\mathbb{R}^{\omega}$ con la topología producto, (Teorema 2.16). En la segunda versión, el espacio Y es también $\mathbb{R}^{\omega}$, pero esta vez con la topología dada por la métrica uniforme $\bar{\rho}$. En cada caso resulta que nuestra prueba sumerge a X en $[0,1]^{\omega}$

Sea $\{B_n\}$ una base contable para X.

<u>Paso 1</u> :

Probaremos lo siguiente : Existe una colección contable de funciones continuas $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ que tienen la propiedad que dado un punto x_0 de X y dado un vecindario U de x_0, existe un índice n tal que f_n es positiva en x_0 y nula fuera de U.

La construcción de las funciones f_n es la siguiente :
Para cada par n, m de índices para el cual $c(B_n) \subseteq B_m$, aplicamos el lema de Urysohn para escoger una función continua $g_{n,m} : X \to [0, 1]$ tal que $g_{n,m}(\ (B_n)) = \{1\}$ y $g_{n,m}(X \setminus B_m) = \{0\}$. Entonces la colección $\{g_{n,m}\}$ satisface nuestros requerimientos : Dado $x \in U$, uno puede escoger un elemento básico B_m tal que $x \in B_m \subseteq U$. Usando regularidad, podemos entonces escoger B_n tal que $x_0 \in B_n$ y $c(B_n) \subseteq B_m$. Entonces la función $g_{n,m}$ está definida, y $g_{n,m}$ es positiva en x_0 y nula fuera de U. Ya que esta colección tiene índices en un conjunto de $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, el cual es contable, se le pueden asignar como conjunto de índices los enteros positivos dándonos la familia deseada $\{f_n\}$.

<u>Paso 2</u> : (Primera versión de la prueba)

Dada la función f_n del paso 1, tomemos $\mathbb{I}^\omega$ con la topología producto y definamos una función $F : X \longrightarrow \mathbb{I}^\omega$ por la regla

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots)$$

Aseguramos que F es una inmersión.

Primero, F es continua porque $\mathbb{I}^\omega$ tiene la topología producto y cada f_n es continua. Segundo, F es inyectiva porque dado $x \neq y$, sabemos que existe un índice n tal que $f_n(x) > 0$ y $f_n(y) = 0$; por consiguiente, $F(x) \neq F(y)$.

Finalmente, debemos probar que F es un homeomorfismo de X sobre su imagen, el subespacio $Z = F(X)$ de $\mathbb{I}^\omega$. Sabemos que F define una biyección continua de X con Z, así que necesitamos probar solamente que para cada conjunto abierto U de X, el conjunto $F(U)$ es abierto en Z. Sea z_0 un punto de $F(U)$. Encontraremos un conjunto abierto W de Z tal que

$$z_0 \in W \subseteq F(U)$$

Sea x_0 el punto de U tal que $F(x_0) = z_0$. Escojamos un índice N para el cual $f_N(x_0) > 0$ y $f_N(X \setminus U) = \{0\}$.

Tomamos el rayo abierto $(0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$, y sea V el conjunto abierto

$$V = \pi_N^{-1}((0, +\infty))$$

de $\mathbb{R}^W$. Sea $W = V \cap Z$; entonces W es abierto en Z, por definición de la topología del subespacio. Ver Figura 9. Aseguramos que $z_0 \in W \subseteq F(U)$. Primero, $z_0 \in W$ porque

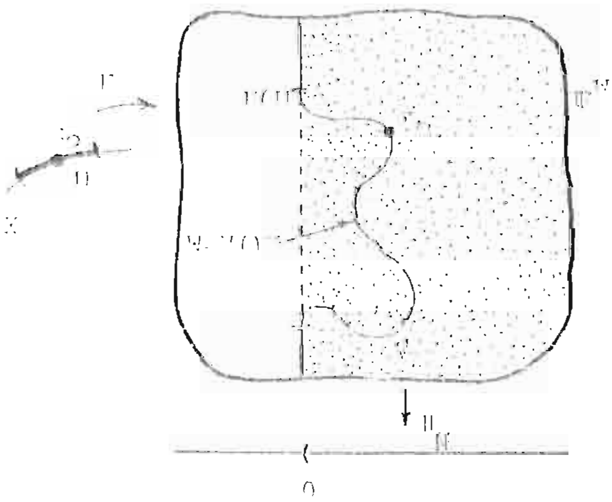


Figura 9

$$\pi_N(z_0) = \pi_N(F(x_0)) = f_N(x_0) > 0$$

Segundo, $W \subseteq F(U)$. Porque si $z \in W$, entonces $z = F(x)$ para algún $x \in X$, y $\pi_N(z) \in (0, +\infty)$. Como $\pi_N(z) = \pi_N(F(x)) = f_N(x)$, y f_N es nula fuera de U, debemos tener x en U. Entonces $z = F(x)$ está en $F(U)$, como queríamos.

Así F es una inmersión de X en $\mathbb{R}^W$.

Paso 3 : (Segunda versión de la prueba)

En esta versión, trataremos de obtener una inmersión de X en el espacio métrico $(\mathbb{R}^\omega, \bar{\rho})$. Verdaderamente haremos una inmersión de X en el subespacio $[0, 1]^\omega$, en el cual $\bar{\rho}$ es la métrica.

$$\rho(x, y) = \sup\{|x_i - y_i|\}$$

Usamos la colección contable de funciones $f_n : X \to [0, 1]$ construida en paso 1. Pero ahora agregamos la condición adicional que $f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ para todo x. (Esta condición es fácil de satisfacer; podemos precisamente dividir cada función f_n por n.)

Definimos $F : X \longrightarrow [0, 1]^\omega$ por la ecuación

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots)$$

como antes. Aseguramos que F es ahora una inmersión relativa a la métrica ρ en $[0, 1]^\omega$. Sabemos de paso 2 que F es inyectiva. Además, sabemos que si usamos la topología producto en $[0, 1]^\omega$, la función F lleva conjuntos abiertos de X sobre conjuntos abiertos de Z = F(X). Este enunciado resulta cierto si uno pasa a la topología más fina (más grande) en $[0, 1]^\omega$ inducida por la métrica ρ.

La única cosa que queda por hacer es probar que F es continua. Esto no se sigue del hecho que cada función componente es continua, porque no estamos usando la topología producto en $\mathbb{R}^\omega$ ahora. Aquí es donde la condición $f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ juega un papel importante.

Sea x_0 un punto de X, y sea $\varepsilon > 0$. Para probar continuidad, necesitamos encontrar un vecindario U de x_0 tal que

$$x \in U \Rightarrow \rho(F(x), F(x_0)) < \varepsilon .$$

Primero escogemos N suficientemente grande tal que $\frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces para cada $n = 1, \ldots, N$, usamos la continuidad de f_n para encontrar un vecindario U_n de x_0 tal que

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

para $x \in U_n$. Sea $U = U_1 \cap \ldots \cap U_N$; mostraremos que U es el vecindario de x_0 deseado. Sea $x \in U$. Si $n \leq N$,

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

por la escogitación de U. Y si $n > N$, entonces

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ya que f_n lleva a X en $[0, \frac{1}{n}]$. Por lo tanto para todo $x \in U$, $\rho(F(x), F(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, como queríamos.

Teorema 3.12. : (Teorema de Inmersión)

Sea X Hausdorff. Supongamos que $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una colección de funciones continuas $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ que satisfacen los requerimientos que para cada punto x_0 de X y cada vecindario U de x_0, existe un índice α tal que f_α es positivo en x_0 y nulo fuera de U. Entonces la función $F : X \to \mathbb{R}^J$ definida por

$$F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$$

es una inmersión de X en $\mathbb{R}^J$.

La prueba es una copia del paso 2 de la demostración anterior; uno simplemente reemplaza n por α y $\mathbb{R}^\omega$ por $\mathbb{R}^J$.

Una colección $\{f_\alpha\}$ de funciones continuas que satisface las condiciones de este teorema se dice que separa puntos de conjuntos cerrados en X.

PARTICIONES DE LA UNIDAD

A continuación estudiaremos las condiciones bajo las cuales un espacio X puede ser sumergido en un espacio euclídeo de dimensión finita E^n.

Definición 3.8. :

Si $\phi : X \to \mathbb{R}$, entonces el soporte de ϕ es definido como la clausura del conjunto $\phi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

Así si x está fuera del soporte de ϕ, existe un vecindario de x en el cual ϕ es nula.

Definición 3.9. :

Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ una cubierta abierta finita del espacio X. Una familia con índices de funciones continuas

$$\phi_i : X \to [0, 1] \quad \text{para } i = 1, \ldots, n,$$

es llamada partición de la unidad dominada por $\{U_i\}$ si :

(1) $(\text{Soporte } \phi_i) \subseteq U_i$ para todo i.

(2) $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$ para cada x.

Teorema 3.13. : (Existencia de particiones finitas de la unidad).

Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ una cubierta abierta finita del espacio normal X. Entonces existe una partición de la unidad dominada por $\{U_i\}$.

CAPITULO IV : METRIZACION Y PARACOMPACIDAD

METRIZACION Y PARACOMPACIDAD

El Teorema de Metrización de Urysohn nos establece las condiciones bajo las cuales un espacio topológico es metrizable: que sea regular y que tenga una base contable.

En el presente capítulo se trata de establecer una condición necesaria y suficiente para que un espacio topológico X sea metrizable.

En el Teorema de Metrización de Urysohn, regularidad es una condición necesaria, pero no así la condición de poseer una base contable. Así que nuestro problema consiste en sustituir la condición de base contable por una condición lo suficientemente fuerte que implique metrizabilidad y lo suficientemente débil que todo espacio metrizable la satisfaga.

Tal condición que fue encontrada formulada independientemente por J. Nagata y Y. Smirnov, involucra una nueva noción, que es la de localidad finita.

LOCALIDAD FINITA

Definición 4.1. :

Sea X un espacio topológico. Una colección A de subconjuntos de X es localmente finita si todo punto de X tiene un vecindario que interseca a lo sumo un número finito de elementos de A.

Ejemplo 4.1. :

La colección de intervalos:

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

es localmente finita en el espacio topológico $\mathbb{R}$, ya que el punto $x \in X = \mathbb{R}$ tiene un vecindario $(x - 1, x + 1)$ que interseca solamente un número finito de elementos de A. El punto x con seguridad pertenece a $[n, n+2]$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto el vecindario $(x - 1, x + 1)$ interseca a lo sumo a los siguientes elementos de A : $(n - 1, n + 1)$, $(n, n + 2)$ y $(n + 1, n + 3)$.

También es localmente finita la colección

$$B = \{(n, 2n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

ya que para todo $x \in \mathbb{R}$, éste tiene un vecindario $(x - 1, x + 1)$ que contacta o interseca a lo sumo los siguientes elementos:

$$\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right), \left(\frac{n+1}{2} + 1, n+3\right), \ldots, (2n - 1, 4n - 2) \text{ si } n \text{ es impar;}$$

$$\left(\frac{n}{2}, n\right), \left(\frac{n}{2} + 1, n+2\right), \ldots, (2n - 1, 4n - 2) \text{ si } n \text{ es par.}$$

La colección $C = \{(0, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ no es localmente finita en $\mathbb{R}$, ya que el elemento 0 no tiene vecindario que interseque solamente un número finito de elementos de C.

La colección $D = \{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$, no es localmente finita en $\mathbb{R}$, ya que el elemento cero la caracteriza porque todo vecindario de él, interseca un número infinito de elementos de D.

<u>Lema 4.4.</u> :

Sea A una colección localmente finita de subconjuntos de X. Entonces :

(a) Toda subcolección de A es localmente finita.

(b) La colección $B = \{c(A)\}_{A \in A}$ de las clausuras de los elementos de A

es localmente finita.

(c) $c(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} c(A)$.

<u>Prueba</u> :

a) Sea $\mathcal{B}$ una subcolección de $\mathcal{A}$, como para todo $x \in X$, existe un vecindario que interseca solamente un número finito de elementos de $\mathcal{A}$, entonces este mismo vecindario intersecará solamente un número finito de elementos de $\mathcal{B}$ ya que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Por tanto $\mathcal{B}$ es localmente finita.

b) Notemos que cualquier conjunto abierto U que interseca al conjunto $c(A)$, necesariamente interseca a A. Por consiguiente, si U es un vecindario de x que interseca solamente un número finito de elementos A de $\mathcal{A}$, entonces U puede intersecar a lo sumo el mismo número de elementos de la colección $\mathcal{B}$. (Podría intersecar menos elementos de $\mathcal{B}$, ya que $c(A_1)$ y $c(A_2)$ pueden ser iguales aun cuando A_1 y A_2 sean diferentes).

c) Sea Y la unión de los elementos de $\mathcal{A}$:

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = Y$$

En general, $\bigcup c(A) \subseteq c(Y)$; probaremos la inclusión

$$c(Y) \subseteq \bigcup c(A),$$

suponiendo que $\mathcal{A}$ es localmente finita. Sea $x \in c(Y)$; sea U un vecindario de x que interseca solamente un número finito de elementos de $\mathcal{A}$, digamos $A_1, \ldots, A_k$. Afirmamos que x pertenece a uno de los conjuntos $c(A_1), \ldots, c(A_k)$, y por lo tanto pertenece a $\bigcup c(A)$. En caso de otra manera, el conjunto $U \setminus c(A_1) \setminus \ldots \setminus c(A_k)$ sería un vecindario de x que no interseca elemento alguno de $\mathcal{A}$ y por lo tanto no intersecaca a Y, contrario a que $y \in c(Y)$.

Definición 4.7. :

Una colección β de subconjuntos de X es contablemente localmente finita si β puede ser escrita como la unión contable de colecciones β_n, cada una de las cuales es localmente finita.

Notemos que ambas, una colección contable y una colección localmente finita son contablemente localmente finitas.

EL TEOREMA DE METRIZACION DE NAGATA-SMIRNOV

(CONDICION SUFICIENTE)

Ahora probaremos que regularidad y la condición de Nagata-Smirnov es suficiente para probar que un espacio X es metrizable. Antes de comenzar necesitamos lo siguiente.

Definición 4.8. :

Un subconjunto A de un espacio X es llamado un conjunto G_δ en X si es la intersección de una colección contable de subconjuntos abiertos de X.

Ejemplo 4.2. :

Cada subconjunto abierto de X es trivialmente un conjunto G_δ.

Ejemplo 4.3. :

En un espacio Hausdorff primero-contable, cada conjunto unitario es un conjunto G_δ.

Prueba :

Como X es primero-contable, existe una base contable $\{B_n(x)\}_{n=1}$ en cada punto x de X. Para probar que el conjunto unitario $\{x\}$ es G_δ, basta probar que $\{x\} = \bigcap_{n\geq 1} B_n(x)$. La inclusión $\{x\} \subset \bigcap_{n\geq 1} B_n(x)$ es trivial, ya que $x \in B_n(x)$, por ser $B_n(x)$ vecindario de x para todo $n \geq 1$.

Probemos la inclusión $\bigcap_{n\geq 1} B_n(x) \subset \{x\}$, es decir, $z \in \bigcap_{n\geq 1} B_n(x)$ $z \in \{x\}$ o de otra forma $z \in \bigcap_{n\geq 1} B_n(x)$ $z = x$.

Supongamos que $z \neq x$, como X es Hausdorff, existen G_z y G_x abiertos de X que contienen a z y a x respectivamente tal que $G_z \cap G_x = \emptyset$. Pero G_x es un vecindario de x, y por lo tanto G_x contiene a $B_n(x)$ para algún n. Y como $z \in B_n(x)$ para todo n, entonces $z \in G_z \cap G_x$, lo cual es una contradicción, debe ser pues que $z = x$. Así $\{x\}$ es G_δ.

Ejemplo 4.4. :

El subconjunto unitario $\{\Omega\}$ de $\overline{S}_\Omega$ no es un conjunto G_δ.

Sea $\{B_n\}_{n\geq 1}$ una colección contable donde $B_n = (a_n, \Omega]$, $\{a_n\}_{n\geq 1}$, $a_n \in S_\Omega$.

Existe $\beta \in S_\Omega$ tal que $\beta > a_n$ $\forall n \geq 1$, porque $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es un subconjunto contable de S_Ω, luego $(\beta, \Omega] \subseteq (a_n, \Omega]$ para todo $n \geq 1$, así tendremos que $(\beta, \Omega] \subseteq \bigcap_{n\geq 1} B_n$ y $(\beta, \Omega] \neq \{\Omega\}$, por lo que $\{\Omega\} \neq \bigcap_{n\geq 1} B_n$ y así podemos concluir que $\{\Omega\}$ no es un conjunto G_δ en $\overline{S}_\Omega$.

Ejemplo 4.5. :

En un espacio métrico X, cada conjunto cerrado es un conjunto G_δ. Dado $A \subseteq X$, definimos:

$$U(A, \varepsilon) = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon)$$

Si A es cerrado, se tiene que

$$A = \bigcap_{n \in Z_+} U(A, \frac{1}{n})$$

Sea $x \in A$, entonces $x \in B(x, \frac{1}{n})$, así $x \in \bigcup B(x, \frac{1}{n})$ para todo -

$n \in \mathbb{Z}_+$; de esta manera $x \in U(x, \frac{1}{n})$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, por lo que $x \in \bigcap U(A, \frac{1}{n})$ por lo tanto $A \subset \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} U(A, \frac{1}{n})$.

Sea $m \in \bigcap U(A, \frac{1}{n})$, entonces $m \in U(A, \frac{1}{n})$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, así $m \in \bigcup B(x, \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, y de ahí que $m \in B(x, \frac{1}{n})$ para algún $x \in A$, esto implica que $d(x, m) < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ de donde se deduce que $d(m, A) = 0$ y esto es equivalente a afirmar que $m \in c(A) = A$. De donde A es G_δ en el espacio métrico X.

Lema 4.2. :

Sea X un espacio regular con una base β que es contablemente localmente finita. Entonces X es normal, y todo conjunto cerrado en X es un conjunto G_δ en X.

Prueba :

Paso 1 – Sea W abierto en X. Mostraremos que existe una colección contable $\{U_n\}$ de conjuntos abiertos de X tal que

$$W = \bigcup U_n = \bigcup c(U_n)$$

Como la base β para X es contablemente localmente finita, podemos escribir $\beta = \bigcup \beta_n$, donde cada colección β_n es localmente finita. Sea C_n la colección de aquellos elementos básicos B tal que $B \in \beta_n$ y $c(B) \subset W$. Entonces C_n es localmente finita ya que es una subcolección de β_n. Definimos

$$U_n = \bigcup_{B \in C_n} B$$

Entonces U_n es un conjunto abierto, y por Lema 4.1.

$$c(U_n) = \bigcup_{B \in C_n} c(B)$$

Por consiguiente, $c(U_n) \subset W$, así que

$$\bigcup U_n \subset \bigcup c(U_n) \subset W$$

Asegurarnos que la igualdad es válida. Dado $x \in W$, existe por regularidad un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $c(B) \subset W$. Ahora $B \in \mathcal{B}_n$ para algún n. Entonces $B \in \mathcal{C}_n$ por definición, así que $x \in U_n$. Así $W \subset \bigcup U_n$, como queríamos.

Paso 2 - Mostraremos que todo conjunto cerrado C en X, es un conjunto G_δ en X. Dado C, sea $W = X \setminus C$. Por paso 1, existen conjuntos U_n en X tal que $W = \bigcup c(U_n)$. Entonces

$$C = \bigcap (X \setminus c(U_n)),$$

así que C es la intersección contable de conjuntos abiertos de X.

Paso 3 - Ahora probaremos que X es normal. Sean C y D conjuntos cerrados disjuntos en X. Aplicando paso 1 al conjunto abierto $X \setminus D$, construimos una colección contable $\{U_n\}$ de conjuntos abiertos tal que

$$\bigcup (U_n) = \bigcup c(U_n) = X \setminus D.$$

Entonces $\{U_n\}$ cubre a C y cada conjunto $c(U_n)$ es disjunto de D. Similarmente, construimos una cubierta contable $\{V_n\}$ de D por conjuntos abiertos cuyas clausuras son disjuntas de C. Estamos ahora en una situación semejante a la del teorema 3.7. Definimos

$$U'_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} c(V_i) \quad \text{y} \quad V'_n = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} c(U_i)$$

En cuyo caso los conjuntos

$$U' = \bigcup_{n \in Z_+} U'_n \quad \text{y} \quad V' = \bigcup_{n \in Z_+} V'_n$$

son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a C y a D respectivamente.

Teorema 4.1. :

Sea X un espacio regular con una base $\mathcal{B}$ que es contablemente localmente finita. Entonces X es metrizable.

Prueba :

Paso 1 - Primero mostraremos que si W es abierto en X, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) > 0$ para $x \in W$ y $f(x) = 0$ para $x \notin W$.

Por el lema anterior, cada conjunto cerrado de X es una intersección contable de conjuntos abiertos de X. Esto es

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n ,$$

donde C es cerrado de X y los G_n son abiertos de X.

Así,

$$W = X \setminus C = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus G_n) \text{ , es}$$

decir el conjunto abierto W es la unión contable de conjuntos cerrados $A_n = X \setminus G_n$ de X. Usando normalidad, escogemos para cada entero positivo n, una función continua $f_n : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f_n(A_n) = \{1\}$ y $f_n(X \setminus W) = \{0\}$. Definimos $f(x) = \sum f_n(x)/2^n$. La serie converge uniformemente, por comparación con $\sum \frac{1}{2^n}$, así que f es continua.(*) También, f es positiva en W y nula fuera de W.

Paso 2 - Sea $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$, donde cada colección $\mathcal{B}_n$ es localmente finita. Para cada entero positivo n, y cada elemento básico $B \in \mathcal{B}_n$, escogemos una función continua

$$f_{n,B} : X \longrightarrow \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

(*) Nota : Ver teoremas 2.19 y 2.20.

tal que $f_{n,B}(x) > 0$ para $x \in B$ y $f_{n,B}(x) = 0$ para $x \notin B$. La colección $\{f_{n,B}\}$ separa puntos de conjuntos cerrados en X: dado un punto x_0 y un vecindario U de x_0, existe un elemento básico B tal que $x_0 \in B \subset U$. Entonces $B \in \mathcal{B}_n$ para algún n, así que $f_{n,B}(x_0) > 0$ y $f_{n,B}$ es nula fuera de U.

Sea J el subconjunto de $Z_+ \times \mathcal{B}$ que consiste de todos los pares (n, B) tal que B pertenece a $\mathcal{B}_n$. Definimos

$$F : X \to [0, 1]^J$$

por la ecuación

$$F(x) = (f_{n,B}(x))_{(n,B)\in J} .$$

Relativo a la topología producto en $[0, 1]^J$, la función F es una inmersión, por el teorema de inmersión.

Claro que, $[0, 1]^J$, no es metrizable en general, así que no hemos probado todavía el teorema de metrización.

<u>Paso 3</u> - Ahora damos a $[0, 1]^J$ la topología inducida por la métrica uniforme $\bar{\rho}$ y mostraremos que F es una inmersión relativa a esta topología. La topología uniforme es más fina que la topología producto, por consiguiente, relativa a la métrica uniforme, la función F es inyectiva y lleva conjuntos abiertos de X sobre conjuntos abiertos del espacio imagen Z = F(X). Debemos dar una prueba aparte de la continuidad de F.

Nótese que en el subespacio $[0, 1]^J$ de $\mathbb{R}^J$ la métrica uniforme es igual a la métrica.

$$\rho((x_\alpha), (y_\alpha)) = \sup\{|x_\alpha - y_\alpha|\}$$

Para probar continuidad, tomamos un punto x_0 de X, un número -

$\varepsilon > 0$, y encontramos un vecindario W de x_0 tal que

$$x \in W \Rightarrow \rho(F(x), F(x_0)) < \varepsilon.$$

Sea n fijo por el momento. Escojamos un vecindario U_n de x_0 que intersecta solamente un número finito de elementos de la colección β_n. Esto significa que cuando B varía sobre β_n, todas salvo un número finito de las funciones $f_{n,B}$ son idénticamente iguales a cero en U_n. Porque cada función $f_{n,B}$ es continua, podemos escoger un vecindario V_n de x_0 contenido en U_n en el cual cada una de las funciones restantes $f_{n,B}$, para $B \in \beta_n$ varía a lo más $\frac{\varepsilon}{2}$.

Escojamos tal vecindario V_n de x_0 para cada $n \in Z_+$. Entonces escogemos N tal que $\frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, y definimos $W = V_1 \cap \ldots \cap V_N$. Afirmamos que W es el vecindario buscado de x_0. Sea $x \in W$. Si $n \leq N$, entonces

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

porque la función $f_{n,B}$ es idénticamente nula o varía a lo sumo $\frac{\varepsilon}{2}$ en W. Si $n > N$, entonces

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

porque $f_{n,B}$ lleva X a $\left[0, \frac{1}{n}\right]$. Por consiguiente

$$\rho(F(x), F(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ como queríamos.}$$

EL TEOREMA DE NAGATA SMIRNOV (Condición Necesaria)

En esta parte probaremos que todo espacio metrizable tiene una base contablemente localmente finita. Esto completa la prueba del teorema de metrización de Nagata Smirnov.

Definición 9.9. :

Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos del espacio X. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es un refinamiento de $\mathcal{A}$ (o refina a $\mathcal{A}$) si para cada elemento B de $\mathcal{B}$, existe un elemento A de $\mathcal{A}$ que contiene a B. Si los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos, llamaremos a $\mathcal{B}$ un refinamiento abierto de $\mathcal{A}$; si ellos son conjuntos cerrados llamaremos a $\mathcal{B}$ refinamiento cerrado.

Lema 9.10. :

Sea X un espacio metrizable. Si $\mathcal{A}$ es una cubierta abierta de X, entonces existe una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X tal que:

(1) $\mathcal{D}$ es una cubierta abierta de X.

(2) $\mathcal{D}$ es un refinamiento de $\mathcal{A}$.

(3) $\mathcal{D}$ es contablemente localmente finita.

Prueba :

Necesitaremos usar el teorema del buen ordenamiento para esta prueba. Escojamos un buen ordenamiento $<$ para la colección $\mathcal{A}$. Denotamos los elementos de $\mathcal{A}$ genéricamente por las letras U, V, W, ...

Escojamos una métrica para X. Sea n un entero positivo, fijo por el momento. Dado un elemento U de $\mathcal{A}$, definimos $S_n(U)$ como los subconjuntos de U obtenidos "encogiendo U una distancia de $\frac{1}{n}$".

Más precisamente, sea

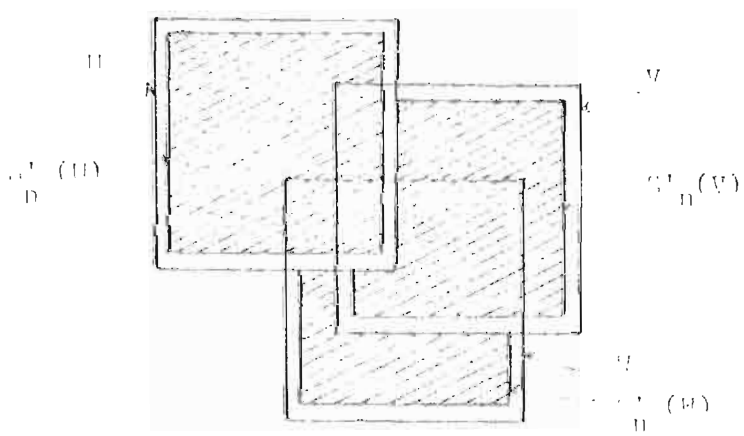
$$S_n(U) = \left\{x \mid B(x, \tfrac{1}{n}) \subset U\right\}$$

(Sucede que $S_n(U)$ es un conjunto cerrado, pero eso no es importante para nuestro propósito). Ahora usamos el buen ordenamiento $<$ de A para pasar a un conjunto aún más pequeño. Para cada U en A, definimos

$$S'_n(U) = S_n(U) - \bigcup_{V<U} V.$$

La situación donde A consiste de los tres conjuntos $U < V < W$ es ilustrada en la figura 1. Precisamente como la figura sugiere, los conjuntos que hemos formado son disjuntos. Realmente aseguramos que ellos están separados una distancia de por lo menos $\frac{1}{n}$. Esto es, si V y W son elementos distintos de A, aseguramos que

$$(*) \qquad x \in S'_n(V) \text{ y } y \in S'_n(W) \Rightarrow d(x, y) \geq \frac{1}{n}$$



$U < V < W$

Figura 1

Para probar este hecho, supongamos que la notación ha sido escogida de manera que $V \prec W$. Ahora $x \in S'_n(V)$ implica que $x \in S_n(V)$. Y $y \in S'_n(W)$ implica por definición que $y \notin V$ (ya que $V \prec W$). Como $x \in S_n(V)$ e $y \notin V$, debemos tener que $d(x, y) \geq \frac{1}{n}$.

Los conjuntos $S'_n(U)$ no son todavía los que deseamos, porque no sabemos que ellos sean conjuntos abiertos. (En efecto, son cerrados). Así que expandamos cada uno de ellos ligeramente para obtener un conjunto abierto $E_n(U)$. Específicamente, sea $E_n(U)$ el entorno de

$$E_n(U) = \bigcup \left\{ B(x, \tfrac{1}{3n}) \mid x \in S'_n(U) \right\}$$

de $S'_n(U)$.

En el caso que $U \neq V \neq W$, tenemos la situación ilustrada en la figura 2. Como la figura sugiere, los conjuntos que hemos formado son disjuntos, y realmente están separados una distancia de al menos $\frac{1}{3n}$. Esto es, si V y W son elementos distintos de A, afirmamos que

$$x \in E_n(V) \ \text{ y } \ y \in E_n(W) \Rightarrow d(x, y) \geq \frac{1}{3n}.$$

Esto se sigue de (*) y de la desigualdad triangular. Note también que para cada $V \in A$, el conjunto $E_n(V)$ está contenido en V.

Ahora definimos

$$E_n = \{ E_n(U) \mid U \in A \}$$

Afirmamos que E_n es una colección localmente finita de conjuntos abiertos y que E_n refina a A. El hecho que E_n refina a A sigue del hecho que $E_n(V) \subset V$ para todo $V \in A$. El hecho que E_n es localmente finito viene del hecho que para todo x en X, la vecindad $B(x, \frac{1}{6n})$ de x puede intersecar a lo sumo un elemento de E_n.

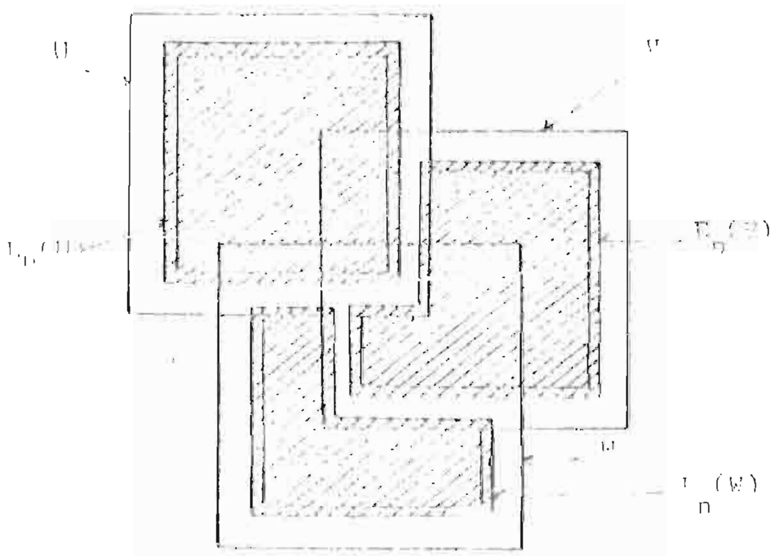


Figura 2

Claro que, la colección E_n no cubre a X. (La figura 2 ilustra este hecho).

Pero aseguramos que la colección

$$E = \bigcup_{n \in Z_+} E_n$$

cubre a X.

Sea x un punto de X, la colección A con la cual comenzamos a cubrir a X; escogimos U como el primer elemento de A (en el buen ordenamiento $<$) que contiene a x. Como U es abierto, podemos escoger n tal que $B(x, \frac{1}{n}) \subset U$. Entonces por definición, $x \in S_n(U)$. Ahora, porque U es el primer elemento de A que contiene a x, el punto $x \in T_n(U)$. Entonces x también pertenece al elemento $E_n(U)$ de E_n, como queríamos. E es la colección requerida de conjuntos abiertos.

Teorema 4.2. :

Sea X un espacio metrizable. Entonces [illegible] que es contablemente localmente finita.

Prueba :

Escojamos una métrica para X. Dado m, sea A^m la cubierta abierta de X por todas las bolas de radio $\frac{1}{m}$;

$$A^m = \{ B(x, \tfrac{1}{m}) \mid x \in X \}$$

Por el lema anterior, existe una cubierta abierta D^m de X que refina a A^m tal que D^m es contablemente localmente finita. Nótese que cada elemento de D^m tiene diámetro a lo más $\frac{2}{m}$.

Sea

$$D = \bigcup_{m \in Z_+} D^m$$

Ya que cada colección D^m es una unión contable de colecciones localmente finitas, también lo es D. Aseguramos que D es una base para X; en cuyo caso nuestro teorema estará probado.

Probaremos que dado $x \in X$ y dado $\varepsilon > 0$, existe un elemento D de D que contiene a x y contenido en $B(x, \varepsilon)$. Primero escogemos m tal que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, ya que D^m cubre a X, podemos escoger un elemento D de D^m que contiene a x. Como D contiene a x y tiene diámetro a lo más $\frac{2}{m} < \varepsilon$, está contenido en $B(x, \varepsilon)$.

Se sigue del lema 1.2, del capítulo 1 que D es una base para X.

PARACOMPACIDAD

El concepto de Paracompacidad es una de las generalizaciones más útiles de Compacidad. Utilizaremos tal concepto en un Teorema de metrización que probaremos en este mismo capítulo.

La clase de espacios paracompactos incluye las dos clases de espacios que hemos estudiado, los espacios Hausdorff compactos y los espacios metrizables.

<u>Definición 4.1.</u> :

Un espacio X es Paracompacto si es Hausdorff y si toda cubierta abierta A de X tiene un refinamiento abierto localmente finito ℬ que cubre a X.

<u>Ejemplo 4.2.</u> :

Cualquier espacio Hausdorff compacto es paracompacto, ya que en primer lugar es Hausdorff, y por ser compacto, toda cubierta abierta A tiene una subcubierta finita ℬ, con lo que tendríamos que para todo x de X existe una vecindad (en este caso todo X) de x que corta a lo sumo un número finito de elementos de ℬ. Entonces ℬ sería el refinamiento localmente finito que cubre a X.

La recta real es un espacio paracompacto que no es compacto. El hecho que ℝ es paracompacto es una consecuencia del Teorema que todo espacio metrizable es paracompacto. Pero una prueba directa puede hacerse como sigue :

Supóngase que damos una cubierta abierta A de ℝ. Para cada entero n, escogemos un número finito de elementos de A que cubran el intervalo $[n, n+1]$ e intersectémoslos con $(n-1, n+2)$.

Sea la colección resultante de conjuntos abiertos denotada por $\mathcal{B}_n$.

Entonces la colección

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{B}_n$$

es un refinamiento abierto de $\mathcal{A}$ localmente finito que cubre a $\mathbb{R}$.

<u>Prueba</u> :

Sea $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{B}_n \Rightarrow B \in \mathcal{B}_j$ para algún n, luego $B \subset A$ para algún $A \in \mathcal{A}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces $x \in [n, n+1]$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, tomamos el vecindario $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset [n, n+1]$, este vecindario intersecta a lo sumo los abiertos que cubren $[n-1, n]$, $[n, n+1]$ y $[n+1, n+2]$ que es un número finito por lo tanto $\mathcal{B}$ es localmente finito.

$\mathcal{B}$ cubre a $[n, n+1]$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, luego $\mathcal{B}$ cubre $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n, n+1]$ pero $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1]$, luego $\mathcal{B}$ cubre a $\mathbb{R}$.

$\therefore$ $\mathbb{R}$ es paracompacto.

Algunas de las propiedades de un espacio paracompacto son similares a las de un espacio Hausdorff compacto. Por ejemplo, un subespacio de un espacio paracompacto no necesariamente es paracompacto; pero un subespacio cerrado es paracompacto. También un espacio paracompacto necesariamente es normal. Hay casos en que un espacio paracompacto no es similar a un espacio Hausdorff compacto; en particular, el producto de dos espacios paracompactos no necesariamente es paracompacto.

Teorema 4.3.-

Todo espacio paracompacto X es normal.

Prueba :

La prueba es un tanto similar a la prueba de que un espacio Hausdorff compacto es normal.

Primero probamos regularidad. Sea a un punto de X y sea B un conjunto cerrado de X disjunto de $\{a\}$. La condición Hausdorff nos permite escoger, para cada b en B, un conjunto abierto U_b alrededor de b cuya clausura es disjunta de $\{a\}$. Cubramos X con los conjuntos abiertos U_b, junto con el conjunto abierto $X \setminus B$; tomemos un refinamiento abierto localmente finito $\mathbf{C}$ que cubre a X. Tomemos la subcolección $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$ que consiste de todo elemento de $\mathbf{C}$ que intersecta a B. Entonces $\mathbf{D}$ cubre a B. Además, si $D \in \mathbf{D}$, entonces $c(D)$ es disjunto de $\{a\}$. Efectivamente D intersecta a B, así está en algún conjunto U_b, cuya clausura es disjunta de $\{a\}$.

Sea

$$V = \bigcup_{D \in \mathbf{D}} D \; ;$$

entonces V es un conjunto abierto en X que contiene a B. Ya que $\mathbf{D}$ es localmente finita,

$$c(V) = \bigcup_{D \in \mathbf{D}} c(D),$$

y $c(V)$ es disjunto de $\{a\}$. Así la regularidad está probada.

Para probar normalidad, sean A y B dos conjuntos cerrados disjuntos, la condición de regularidad nos permite escoger un conjunto abierto U_b alrededor de $b \in B$ cuya clausura es disjunta de A. Cubramos a X con los conjuntos abiertos U_b, junto con el conjunto $X \setminus B$; tomemos un refinamiento abierto localmente finito $\mathbf{C}$ que cubra a X. Tomemos la subcolección $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$ que consiste de todo elemento de $\mathbf{C}$ que intersecta a B. Entonces $\mathbf{D}$ cubre a B. Además, si $D \in \mathbf{D}$, entonces $c(D)$ es disjunto de A. Efectivamente D intersecta a B, así está en algún conjunto U_b, cuya clausura es disjunta de A.

Sea

$$V = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$$

entonces V es un conjunto abierto en X que contiene a B. Ya que $\mathcal{D}$ es localmente finita,

$$c(V) = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} c(D),$$

así que $c(V)$ es disjunto de A, o lo que es lo mismo que $A \subset X \setminus c(V) = U$, con $U \cap V = \phi$.

<u>Teorema 4.4.</u> : (Teorema de Stone)

Todo espacio metrizable es paracompacto.

<u>Prueba</u> :

Si X es un espacio metrizable, sabemos del Lema 4.3. que toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto que cubre a X y que es contablemente localmente finito. Falta probar que la última condición implica que toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto que cubre a X y es localmente finito. Esto es una consecuencia del siguiente

<u>Lema 4.5.</u> :

Si X es regular. Entonces las siguientes condiciones en X son equivalentes :

Toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento que es :

(1) Una cubierta abierta de X y contablemente localmente finita

(2) Una cubierta de X y localmente finita.

(3) Una cubierta cerrada de X y localmente finita.

(4) Una cubierta abierta de X y localmente finita.

Prueba :

(0) ⇒ (1) es trivial, ya que localmente finito implica contablemente localmente finito, lo que no es [illegible] el converso. [illegible] (1) ⇒ (2) (2) ⇒ (3) [illegible] condiciones en el enunciado del lema.

(1) ⇒ (2). Sea A una cubierta abierta de X. Sea β un refinamiento abierto de A que cubre a X y que es contablemente localmente finito; sea

$$\beta = \cup \beta_n$$

donde cada β_n es localmente finito. Denotemos los elementos de β genéricamente por U, V, W, ...

Ahora usamos los mismos trucos que hemos usado antes para hacer a conjuntos de diferentes β_n's disjuntos. Dado i, sea

$$V_i = \cup_{U \in \beta_i} U.$$

Entonces para cada $n \in Z_+$ y cada elemento U de β_n, definimos

$$S_n(U) = U \setminus \cup_{i<n} V_i$$

[Nótese que $S_n(U)$ no es necesariamente ni abierto, ni cerrado]. Sea

$$C_n = \{ S_n(U) \mid U \in \beta_n \}$$

Entonces C_n es un refinamiento de β_n, ya que $S_n(U) \subset U$ para cada $U \in \beta_n$.

Sea $C = \cup C_n$. Aseguramos que C es el refinamiento localmente finito requerido de A, que cubre a X.

Sea x un punto de X; queremos probar que x está en un elemento de C, y que x tiene una vecindad que intersecta solamente un número finito de elementos de C. Consideremos la cubierta $\beta = \cup \beta_n$; sea N el más pequeño entero tal que x está en un elemento de $\mathcal{B}_N$. Sea U un elemento de $\mathcal{B}_N$ que contiene a x. Primero, notemos que como x no está en ningún elemento de $\mathcal{C}_i$ para $i < N$, el punto x está en el elemento $S_N(U)$ de $\mathcal{C}$. Segundo, notemos que como cada colección $\mathcal{B}_n$ es localmente finita, podemos escoger para cada $n = 1, \ldots, N$ un vecindario W_n de x que intersecta solamente un número finito de elementos de $\mathcal{B}_n$. Ahora si W_n intersecta al elemento $S_n(V)$ de $\mathcal{C}_n$, debe intersectar al elemento V de $\mathcal{B}_n$, ya que $S_n(V) \subset V$. Por lo tanto, W_n intersecta solamente un número finito de elementos de $\mathcal{C}_n$. Además, ya que U está en $\mathcal{B}_N$, U no intersecta elementos de $\mathcal{C}_n$ para $n > N$. De allí que el vecindario

$$W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_N \cap U$$

de x intersecta solamente un número finito de elementos de $\mathcal{C}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los conjuntos abiertos U de X tal que $\bar{U}$ está contenido en un elemento de $\mathcal{A}$. Por regularidad, $\mathcal{B}$ cubre a X. Usando (2), podemos encontrar un refinamiento $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}$ que cubre a X y es localmente finito. Sea

$$\mathcal{D} = \{\bar{C} \mid C \in \mathcal{C}\}$$

Entonces $\mathcal{D}$ también cubre a X; es localmente finito por Lema 4.1.1 y refina a $\mathcal{A}$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de X. Usando (3), escogemos $\mathcal{B}$ un refinamiento de $\mathcal{A}$ que cubre a X y que es localmente finito. (Podemos tomar $\mathcal{B}$ como un refinamiento cerrado si queremos, pero es irrelevante). Tratamos de expandir cada elemento B de $\mathcal{B}$ ligeramente a un conjunto abierto, haciendo la expansión lo suficientemente pequeña de tal manera que la colección resultante de conjuntos abiertos sea aún localmente finita y que todavía refine a $\mathcal{A}$.

Esta parte de la prueba usa [illegible] técnicas, las técnicas aplicadas, que ha algunas veces, con [illegible] ordenamos conjuntos de alguna forma y formamos un nuevo conjunto [illegible] de los conjuntos; pero cuando los necesitamos algo diferente, introducimos una subcolección [illegible] auxiliar, localmente finita $\mathcal{C}$ de la [illegible] para expandir los elementos de β.

Para cada punto x de X, existe un vecindario de x que intersecta solamente un número finito de elementos de β. La colección de todos los conjuntos abiertos que intersectan solamente un número finito de elementos de β es así una cubierta abierta de X. Usando (3) nuevamente, sea $\mathcal{C}$ un refinamiento cerrado de esta cubierta que cubre a X y es localmente finito. Cada elemento de $\mathcal{C}$ intersecta solamente un número finito de elementos de β.

Para cada elemento B de β, sea

$$\mathcal{C}(B) = \{C \mid C \in \mathcal{C} \ \text{ y } \ C \subseteq X - B\}$$

Definimos

$$E(B) = X - \bigcup_{C \in \mathcal{C}(B)} C$$

Ya que $\mathcal{C}$ es una colección localmente finita de conjuntos cerrados, la unión de elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{C}$ es cerrada, por Lema 4.1. Por consiguiente, el conjunto $E(B)$ es un conjunto abierto. Además, $E(B) \supseteq B$ por definición. (Ver Figura 3, en la cual los elementos de β son representados como regiones circulares cerradas y segmentos rectos, y los elementos de $\mathcal{C}$ son representados como regiones cuadradas cerradas).

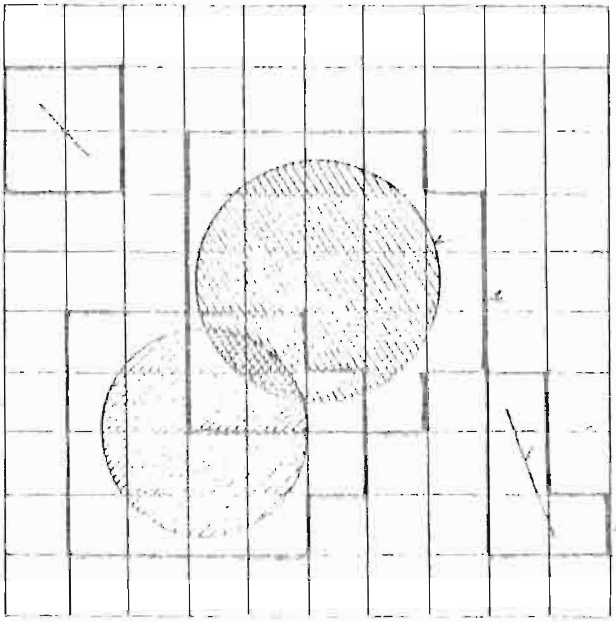


Figura 8

Podemos tener un problema; la colección $\{E(B)\}$ no puede ser un refinamiento de A.

Esto es fácilmente remediable. Para cada $B \in \mathcal{B}$, escogemos un elemento $F(B)$ de A que contiene a B. Entonces definimos

$$D = \{F(B) \cap E(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

La colección D es un refinamiento de A. Ya que $B \subset (F(B) \cap E(B))$ y $\mathcal{B}$ cubre a X, la colección D también cubre a X.

Finalmente, tenemos que probar que D es localmente finita. Dado un punto x de X, escogemos un vecindario W de x que intersecta solamente un número finito de elementos de C, digamos $C_1, \ldots, C_k$.

Entonces $W \subset C_1 \cup \ldots \cup C_k$, porque C es un cubrimiento de X. Ahora si un elemento C de C intersecta al conjunto $E(B) \cap F(B)$, no puede estar en $X \setminus B$ (por definición de $E(B)$); así C debe intersectar a B. Ya que el -

elemento C de $\mathcal{C}$ intersecta solamente un número finito de elementos B de $\mathcal{B}$, intersecta a lo sumo el mismo número de elementos de la colección

$$\mathcal{D} = \{E(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

Entonces como cada C_i intersecta solamente un número finito de elementos de $\mathcal{D}$, también el conjunto W, intersecta solamente un número finito de elementos de $\mathcal{D}$.

<u>Teorema 8.5.</u> :

(a) Todo subespacio cerrado de un espacio paracompacto es paracompacto.

(b) Un subespacio arbitrario de un espacio paracompacto no necesariamente es paracompacto.

(c) Un producto de espacios paracompactos no necesariamente es paracompacto.

<u>Prueba</u> :

(a) Sea Y un subespacio cerrado del espacio paracompacto X; sea $\mathcal{A}$ una cubierta de Y por conjuntos abiertos en Y. Para cada $A \in \mathcal{A}$, escogemos un conjunto A' de X tal que $A' \cap Y = A$. Cubrimos X con los conjuntos abiertos A', junto con el conjunto abierto $X \setminus Y$. Sea $\mathcal{B}$ un refinamiento abierto localmente finito de esta cubierta que cubre a X. La colección,

$$\mathcal{C} = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

es el refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{A}$ requerido.

Los siguientes dos ejemplos, demuestran (b) y (c).

<u>Ejemplo 8.7.</u> :

El espacio $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ es Hausdorff compacto (ver Teoremas 2.6, 1.14., 2.10.) así afirmamos que es paracompacto. El subespacio $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ -

no es paracompacto ya que ni siquiera es normal (ejemplo [illegible].7.)

Ejemplo 4.8. :

El espacio $\mathbb{R}_l$ es paracompacto pero $\mathbb{R}_l^2$ no lo es, ya que ni siquiera es normal (ejemplo 4.6.).

Veamos que $\mathbb{R}_l$ es paracompacto, probemos que $\mathbb{R}_l$ es Hausdorff y que para toda cubierta abierta de $\mathbb{R}_l$ existe un refinamiento abierto localmente finito que cubre a $\mathbb{R}_l$.

$\mathbb{R}_l$ es Hausdorff, ya que es regular. Sea A una cubierta abierta de $\mathbb{R}_l$. Como $\mathbb{R}_l$ es Lindelöf existe una subcubierta abierta contable de $\mathbb{R}_l$ que es un refinamiento de A. Esta subcubierta abierta contable es una colección contablemente localmente finita (ya que toda colección contable es contablemente localmente finita), luego tenemos que para toda cubierta abierta A de $\mathbb{R}_l$ existe un refinamiento que es una cubierta abierta de $\mathbb{R}_l$ y contablemente localmente finita. Como $\mathbb{R}_l$ es regular, podemos aplicar el lema 4.4., para afirmar que toda cubierta abierta de $\mathbb{R}_l$ tiene un refinamiento que es una cubierta abierta de $\mathbb{R}_l$ y localmente finita. Por tanto $\mathbb{R}_l$ es paracompacto.

EL TEOREMA DE METRIZACION DE SMIRNOV

El Teorema de Metrización de Nagata Smirnov nos da un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para metrizabilidad de un espacio. Ahora damos otro teorema de metrización que es un corolario del teorema de Nagata Smirnov y fue probado primeramente por Smirnov.

Definición 4.6. :

Un espacio es localmente metrizable si todo punto x de X tiene un vecindario U que es metrizable para la topología del subespacio.

Teorema 4.6. : (Teorema de Metrización de Smirnov)

Un espacio X es metrizable si y solamente si X es paracompacto y localmente metrizable.

Prueba :

Supongamos que X es metrizable. Entonces es localmente metrizable; es también paracompacto por el Teorema de Stone.

Conversamente, supongamos que X es paracompacto y localmente metrizable. Mostraremos que X tiene una base $\mathcal{B}$ que es contablemente localmente finita. Como X es regular (ya que es paracompacto), se seguirá entonces del teorema de Nagata Smirnov que X es metrizable.

La prueba es una adaptación del Teorema 4.2. Cubramos X por conjuntos abiertos que son metrizables; luego escojamos un refinamiento $\mathcal{C}$ abierto localmente finito de esta cubierta que cubra a X. Cada elemento C de $\mathcal{C}$ es metrizable; sea la función

$$d_C : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$$

una métrica que da la topología de C. Dado $x \in C$, sea $B_C(x, \varepsilon)$ que denota el conjunto de puntos y de C tal que $d_C(x, y) < \varepsilon$. Siendo abierto en C, el conjunto $B_C(x, \varepsilon)$ será también abierto en X.

Dado $m \in Z_+$, sea A^m la cubierta de X por bolas abiertas de radio $\frac{1}{m}$ en conjuntos C de $\mathcal{C}$;

$$A^m = \{B_C(x, \tfrac{1}{m}) \mid C \in \mathcal{C} \text{ y } x \in C\}$$

Sea D^m un refinamiento abierto localmente finito de A^m que cubre a X. (Aquí usamos paracompacidad).

Sea

$$D = \bigcup D^m ;$$

entonces D es numerablemente localmente finita. Aseguramos que D es una base para X; nuestro teorema estará probado con ello.

Sea x un punto de X y sea U un vecindario de x. Queremos encontrar un elemento D de D tal que $x \in D \subset U$. Ahora x pertenece a solamente un número finito de elementos de $\mathcal{C}$, digamos $C_1, \ldots, C_k$.

Entonces $U \cap C_i$ es un vecindario de x en el conjunto C_i, así existe un $\varepsilon_i > 0$ tal que

$$B_{C_i}(x, \varepsilon_i) \subset (U \cap C_i).$$

Escogemos m tal que $\frac{1}{m} < \frac{1}{2} \min \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$. Ya que la colección D^m cubre a X, debe haber un elemento D de D^m que contiene a x. Y como D^m refina a A^m, debe haber un elemento $B_C(y, \frac{1}{m})$ de A^m, para algún $C \in \mathcal{C}$ y un $y \in C$, que contiene a D. Entonces x pertenece a C, así que C debe ser uno de los conjuntos $C_1, \ldots, C_k$, digamos que $C = C_i$. Entonces, usando la desigualdad triangular tenemos:

$$D \subseteq B_{C_i}(y, \tfrac{1}{m}) \subset B_{C_i}(x, \varepsilon_i) \subseteq U$$

como queríamos.

Ejemplo 4. 9. :

Probaremos que el espacio S_Ω no es paracompacto. Veremos primero que S_Ω es localmente metrizable: sea $x \in S_\Omega$, escojamos y tal que $x < y$ y $\in \Omega$ el conjunto abierto U_y tiene una base contable, además, la colección de todos los intervalos con puntos extremos en U_y es contable. Seguimos del teorema de metrización de Urysohn que U_y es metrizable.

Si S_Ω fuera paracompacto, se seguiría del teorema de Smirnov que S_Ω es metrizable, pero nosotros sabemos que S_Ω no es metrizable, ya que $\Omega \in \bar{S}_\Omega$ y sin embargo no existe una sucesión en S_Ω que converja a Ω.

CAPITULO V : APLICACIONES

APLICACIONES

Las siguientes dos proposiciones son una consecuencia inmediata de la definición de colección localmente finita y contablemente localmente finita respectivamente.

<u>Proposición 5.1.</u> :

Toda colección finita A de subconjuntos de un espacio topológico X es localmente finita.

<u>Proposición 5.2.</u> :

Toda colección finita A de subconjuntos de un espacio topológico X es contablemente localmente finita.

<u>Ejemplo 5.1.</u> :

Encontrar una cubierta abierta <u>punto-finita</u> A de $\mathbb{R}$ tal que no es localmente finita. [La colección A es punto-finita si cada punto de $\mathbb{R}$ está solamente en un número finito de elementos de A].

<u>Solución</u> :

Sea

$$A = \{(-\infty, \tfrac{1}{4})\} \cup \{(0, \tfrac{1}{n})\}_{n\geq 1} \cup \{(\tfrac{7}{8}, +\infty)\}$$

A es un cubrimiento abierto de $\mathbb{R}$ punto-finito ya que todo punto de X pertenece a un número finito de elementos de A y A no es localmente finita ya que no existe un vecindario de cero que intersecte solamente un número finito de elementos de A.

<u>Proposición 5.3.</u> :

Muestre que si X tiene una base contable, una colección A de subconjuntos de X es contablemente localmente finita ssi es -

contable.

Prueba :

Sea $\mathcal{A}$ contable, entonces $\mathcal{A} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n$ donde $\mathcal{A}_n$ es unitario y por lo tanto localmente finito.

Conversamente, sea $\mathcal{A}$ una colección contablemente localmente finita, esto es $\mathcal{A} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n$, con $\mathcal{A}_n$ localmente finita. Para mostrar que $\mathcal{A}$ es contable, basta probar que $\mathcal{A}_n$ es contable para todo $n \geq 1$.

Como X tiene una base contable, $\beta = \{B_n\}_{n \geq 1}$, tal que $X = \bigcup_{n \geq 1} B_n$ y como $\mathcal{A}_n$ es localmente finita, para todo $x \in X$, existe una vecindad U_x de x que corta a lo sumo un número finito de elementos de $\mathcal{A}_n$. Para U_x, existe un básico B_{n_x} tal que $B_{n_x} \subseteq U_x$, entonces $\bigcup_{x \in X} B_{n_x} = X$.

Como cada U_x corta solamente un número finito de elementos de $\mathcal{A}_n$, su correspondiente básico B_{n_x} corta a lo sumo el mismo número de elementos de $\mathcal{A}_n$. Tenemos pues que $\bigcup B_{n_x}$ corta cada uno de los conjuntos de $\mathcal{A}_n$ y como B_{n_x} corta un número finito de elementos de $\mathcal{A}_n$, entonces $\bigcup B_{n_x}$ corta un número contable de elementos de $\mathcal{A}_n$ ya que la unión es contable. Por lo tanto $\mathcal{A}_n$ es contable.

Definición 5.1. :

Un subconjunto W de un espacio topológico X es un conjunto F_σ en X, si W es la unión contable de conjuntos cerrados en X.

Proposición 5.2. :

Un subconjunto W del espacio topológico X es un conjunto F_σ en X si $X \setminus W$ es un conjunto G_δ en X.

Prueba :

Como W es un conjunto F_σ, entonces $W = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, con A_n cerrado en X. Luego

$$X \setminus W = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n), \text{ donde}$$

los $X \setminus A_n$ son abiertos en X, así, $X \setminus W$ es la intersección contable de abiertos en X. Por consiguiente $X \setminus W$ es un conjunto G_δ en X.

Conversamente, si $X \setminus W$ es un conjunto G_δ en X, entonces $X \setminus W = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, con G_n abierto en X, para todo n. Aplicando complemento a ambos lados de la igualdad anterior, tendremos que

$$W = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

y por De-Morgan

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus G_n),$$

donde $X \setminus G_n$ es cerrado para todo n. Así W es un conjunto F_σ en X.

Las siguientes tres proposiciones son una consecuencia inmediata de la definición del conjunto G_δ y F_σ respectivamente.

<u>Proposición 5.5.</u> :

Si X es un espacio topológico, X y ϕ son conjuntos G_δ en X.

<u>Proposición 5.6.</u> :

Si X es un espacio topológico, X y ϕ son conjuntos F_σ en X.

<u>Proposición 5.7.</u> :

Si X es un espacio topológico, todo conjunto cerrado en X es un conjunto F_σ en X.

<u>Lema 5.1.</u> :

Sea X un espacio métrico con métrica d; sea $A \subset X$ entonces -

$x \in c(A)$ si y sólo si $d(x, A) = 0$.

Prueba :

Sea $x \in c(A) = A \cup d(A)$. Si $x \in A$, tenemos evidentemente por definición que $d(x, A) = 0$. Supongamos pues que $x \in d(A)$, tomemos un número real cualquiera $\varepsilon > 0$, como $B(x, \varepsilon)$ es un vecindario de x, tendremos $A \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \neq \phi$, es decir, existe algún $y \in A$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$, entonces $d(x, A) \leq d(x, y) < \varepsilon$, esto es $d(x, A) < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Podemos concluir por lo tanto que $d(x, A) = 0$.

Conversamente supongamos que $d(x, A) = 0$. Sea U un vecindario cualquiera de x. Como U es abierto y contiene a x, existe un real $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Pero $\varepsilon > 0 = d(x, A)$, luego ε no es cota inferior del conjunto $\{d(x, y)\}_{y \in A}$, lo cual implica que $d(x, y) < \varepsilon$, para algún $y \in A$. Es decir, existe algún $y \in A$ tal que $y \in B(x, \varepsilon)$. Es decir

$$\phi \neq A \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \subseteq U \cap A .$$

Tenemos pues que $U \cap A \neq \phi$ para todo vecindario U de x. Así tendremos que si $x \in A$, entonces $x \in c(A)$.

En caso de que $x \notin A$, entonces por hipótesis $x \in d(A)$, y también en este caso $x \in c(A)$.

Proposición 5.2. :

Sea (X, d) un espacio métrico. Muestre que si U es abierto en X, entonces la función

$$f(x) = d(x, X \setminus U)$$

es positiva en U y nula fuera de U.

Prueba :

Por definición tenemos que

$$d(x, X \setminus U) = \inf \{ d(x, a) \mid a \in X \setminus U \} .$$

Supongamos que $x \in X \setminus U$. Por ser U abierto, $X \setminus U$ es cerrado, esto es $X \setminus U = c(X \setminus U)$ por lo tanto el x que nos hemos dado pertenece a $c(X \setminus U)$ y por lema 5.1., $d(x, X \setminus U) = 0$.

Ahora supongamos que $x \in U$, entonces $x \notin c(X \setminus U)$ y por lema 5.1., $d(x, U) \neq 0$.

De donde $d(x, U) = 0$.

<u>Proposición 5.2.</u> :

El espacio topológico $\mathbb{R}$ tiene una base que es contablemente localmente finita.

<u>Prueba</u> :

Como $\mathbb{R}$ es metrizable, por teorema 4.2., capítulo 4, $\mathbb{R}$ tiene una base que es contablemente localmente finita.

<u>Ejemplo 5.2.</u> :

Sea A la siguiente colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

$$A = \{ (n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

¿Cuáles de las siguientes colecciones refinan a A?

a) $B = \{ (x, x + 1) \mid x \in \mathbb{R} \}$

b) $C = \{ (n, n + \frac{3}{2}) \mid n \in \mathbb{Z} \}$

c) $D = \{ (x, x + \frac{3}{2}) \mid x \in \mathbb{R} \}$

<u>Solución</u> :

a) B refina a A ya que para todo intervalo $(x, x+1) \in B$, existe $(n, n+2) \in A$, con n el entero menor más próximo a x.

b) C refina a A ya que cada $(n, n + \frac{3}{2}) \in C$ está incluido en $(n, n+2) \in A$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

c) B no es refinamiento de A, ya que para el intervalo (0.3, 1.8) ∈ B no existe ningún intervalo de la forma (n, n+2) ∈ A que lo contenga.

<u>Definición 5.9.</u> :

Una colección A de subconjuntos del espacio topológico X es localmente discreta, si cada punto x de X tiene un vecindario que intersecta a lo sumo un elemento de A. Una colección β es contablemente localmente discreta si es la unión contable de colecciones localmente discretas.

<u>Proposición 5.10.</u>: (Teorema de Bing)

Un espacio topológico X es metrizable sii es regular y tiene una base que es contablemente localmente discreta.

<u>Prueba</u> :

Supongamos que X es regular y tiene una base que es contablemente localmente discreta. Claramente una base que es contablemente localmente discreta, es contablemente localmente finita. Tenemos pues un espacio X que es regular y tiene una base contablemente localmente finita, lo cual implica por el teorema de Nagata-Smirnov que X es metrizable.

Conversamente, si X es metrizable, X es normal (Teorema 3.5.) y como normal implica regular, tenemos pues que X es regular. Nos resta pues, probar que X tiene una base que es contablemente localmente discreta.

X es metrizable, entonces por Nagata-Smirnov, X tiene una base contablemente localmente finita. Esto es

$$\beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n,$$

donde β_n es localmente finito.

Para todo $n \in Z_+$, y todo $x \in X$ existe un vecindario U_x que corta un lo sumo un número finito de elementos básicos de β_n, digamos:

$$\beta' = \{B_1, \ldots, B_m\}$$

Como U_x es abierto, existe un básico B' que contiene a x tal que $B' \subseteq U_x$. Hemos escogido B' de tal manera que no contenga ningún otro básico de β_n que contenga a x (ya que U_x corta a un número finito de ellos) excepto la intersección de los elementos de β que contienen a x con B'. Afirmamos que la colección

$$A_n = \{B \setminus (\bigcap_{i=1}^{n}(A_i \cap B')) \mid B \in \beta_n\} \cup \{\bigcap_{i=1}^{n}(A_i \cap B')\} \cup \{B'\}$$

es localmente discreta, ya que el vecindario $B' \cap (\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$ donde A_i son los elementos de β que contienen a x, corta a lo sumo un elemento de la colección A_n.

∴ X tiene una base que es contablemente localmente discreta, denotada por $\beta^* = \bigcup_{n \geq 1} A_n$

Probaremos que β^* es una base.

Sea $x \in X$, entonces $x \in B$ un básico, con $B \in \beta$. Si B no es uno de los A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ que intersecan al vecindario de x, entonces B es un elemento de β^*. Si B es uno de los A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces x pertenece a $\bigcap_{i=1}^{n}(A_i \cap B')$. Así $x \in B_i^*$ con $B^* \in \beta^*$.

Supongamos que $x \in X$ y $x \in B_1^* \cap B_2^*$, con B_1^*, B_2^* elementos de β^*. Encontraremos un básico B_3^* tal que $x \in B_3^* \subseteq B_1^* \cap B_2^*$.

Si $x \in B_1^* \cap B_2^*$, entonces si $B_1^* = \bigcap_{i=1}^{n}(A_i \cap B')$, y $B_2^* = \bigcap_{i=1}^{n}(A_i \cap B')$; así $B_3^* = \bigcap_{i=1}^{n}(A_i \cap B')$.

Si $B_1^* \neq \bigcap_{i=1}^{n}(A_i \cap B')$, entonces $B_2^* \neq \bigcap_{i=1}^{n}(A_i \cap B')$; así B_1^* y B_2^* son elementos de β y como β es una base, existe $B_3^* \neq \bigcap_{i=1}^{n}(A_i \cap B')$ con $B_3^* \in \beta$ tal que $x \in B_3^* \subseteq B_1^* \cap B_2^*$. Así $B_3^* \in \beta^*$. Por lo tanto β^* es una base.

Definición 5.1. :

Dos métricas d y d^* de un conjunto X son equivalentes si y sólo si inducen la misma topología de X, es decir si las bolas abiertas bajo la métrica d y las bolas abiertas bajo la métrica d^* son bases de la misma topología de X.

Ejemplo 5.3. :

La métrica usual d en $\mathbb{R}^2$ es equivalente a las métricas d_1 y d_2, definidas por

$$d_1(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

donde $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$, y $d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ ya que las tres inducen la misma topología de $\mathbb{R}^2$, puesto que la colección de las bolas abiertas de cada una de dichas métricas es una base para la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Ver Figura 1.

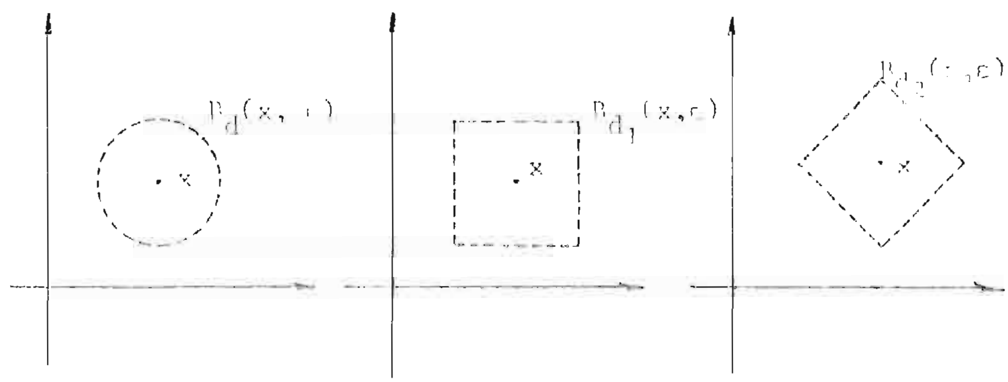


Figura 1

Proposición 5.11. :

Sea d una métrica de un conjunto no vacío X. Demostrar que la función d' definida por

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$$

donde $x, y \in X$, también es una métrica de X.

Prueba :

Puesto que d es una métrica, $d'(x, y) \geq 0$ y $d'(x, y) = d'(x, y)$ probaremos la desigualdad triangular.

$$\frac{d(x,y)}{1 + d(x,y) + d(y,z)} \leq \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} = d'(x, y), \quad y$$

$$\frac{d(y,z)}{1 + d(x,y) + d(y,z)} \leq \frac{d(y,z)}{1 + d(y,z)} = d'(y, z)$$

Como d es una métrica, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ por tanto,

$$d'(x, z) = \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} \leq \frac{d(x,y) + d(y,z)}{1 + d(x,y) + d(y,z)}$$

$$= \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y) + d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1 + d(x,y) + d(y,z)}$$

$$\leq d'(x, y) + d'(y, z).$$

Así d' es una métrica.

Proposición 5.12. :

Sean d y d' métricas de un conjunto X tales que, para toda bola abierta $B_d(x, \varepsilon)$ existe una bola abierta $B_{d'}(x, \delta)$ tal que $B_{d'}(x, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$ y, para cada bola $B^*_{d'}(x, \delta^*)$, existe una bola $B^*_d(x, \varepsilon^*)$ tal que $B^*_d \subseteq B^*_{d'}(x, \delta^*)$. Demostrar que d y d' son métricas equivalentes, es decir que inducen la misma topología de X.

Prueba :

Según Lema 2.6., la topología τ_d inducida por d es menos fina que la topología $\tau_{d'}$ inducida por d', es decir $\tau_d \subseteq \tau_{d'}$. Además, también según el Lema 2.6., $\tau_{d'} \subseteq \tau_d$, por tanto $\tau_d = \tau_{d'}$.

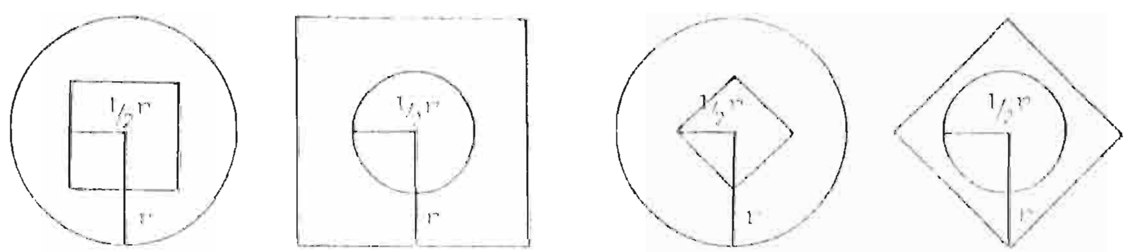
Proposición 5.13. :

Demostrar que la métrica usual d del plano $\mathbb{R}^2$ es equivalente a las métricas d_1 y d_2 de $\mathbb{R}^2$ definidas anteriormente.

Prueba :

Vemos que siempre es posible construir un cuadrado que está contenido en un círculo dado cualquiera, según se muestra en la figura (a) abajo, o construir un círculo contenido en un cuadrado cualquiera según la figura. Ahora bien los puntos interiores de un círculo forman una bola $B_d(x, \epsilon)$, con $\epsilon > 0$ el radio, y los puntos interiores de un cuadrado forman una bola $B_{d_1}(x, \epsilon)$ abierta, con $\epsilon > 0$. Luego las métricas d y d_1 son equivalentes por proposición anterior.

Además otro tanto se puede decir respecto a un diamante y un círculo, según se muestra en la figura (c) y (d). Como los puntos interiores de un "diamante" forman una bola abierta $B_{d_2}(x, \epsilon)$, con $\epsilon > 0$, las métricas d_1 y d_2, son equivalentes según proposición anterior.



(a) (b) (c) (d)

Figura

Proposición 5.14. :

Metrizabilidad es una propiedad topológica.

<u>Prueba</u> :

Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo del espacio metrizable X en el espacio topológico Y. Sea d la métrica que induce a la topología de X. - Como f es biyectiva, podemos definir una métrica que induzca a la topología de Y como sigue :

$$d' : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(m, n) \dashrightarrow d(f^{-1}(m), f^{-1}(n))$$

Aseguramos que las bolas $B_{d'}(y, \varepsilon)$ con $y \in Y$ forman una base para - la topología de Y, ya que para todo abierto G de Y tenemos $f^{-1}(G)$ es un abierto en X en el cual existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(x, \varepsilon) \subseteq f^{-1}(G)$ para $x \in f^{-1}(G)$.

Por ser f homeomorfismo tenemos

$$f(B_d(x, \varepsilon)) = B_{d'}(f(x), \varepsilon) = \{m \in Y \mid d(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(m)) < \varepsilon\} \subseteq G.$$

<u>Proposición 5.15.</u> :

Todo espacio topológico X con la topología discreta es metrizable.

<u>Prueba</u> :

La métrica definida en X por

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

induce la topología de este espacio. Aseguramos que las bolas $B(x, \varepsilon)$ - forman una base para la topología discreta, ya que para todo abierto U que contiene a x, existe la bola $B(x, \varepsilon)$ con $\varepsilon < 1$ que contiene a x tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Proposición 5.16. :

Un espacio topológico X con la topología indiscreta, tal que X contenga más de un punto no es metrizable.

Prueba :

X y ϕ son los únicos conjuntos cerrados del espacio X y como todo conjunto finito de un espacio métrico, es cerrado y como X tiene más de un punto, los conjuntos unitarios no son cerrados, contrario a que en un espacio metrizable, los unitarios son cerrados, por lo que X no es metrizable.

Proposición 5.17. :

El espacio topológico $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología del orden del diccionario es metrizable.

Prueba :

La función siguiente es una métrica en $\mathbb{R}^2$ que induce la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$

$M : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que :

$$M(x_1 \times y_1, x_2 \times y_2) = \frac{d_d(x_1, x_2)}{2[1 + d_d(x_1, x_2)]} + \frac{d(y_1, y_2)}{4[1 + d(y_1, y_2)]}$$

$M(x_1 \times y_1, x_2 \times y_2) \geq 0$ ya que $d_d(x_1, x_2) \geq 0$ y $d(y_1, y_2) \geq 0$

$M(x_1 \times y_1, x_2 \times y_2) = M(x_2 \times y_2, x_1 \times y_1)$ ya que $d_d(x_1, x_2) = d_d(x_2, x_1)$

y $d(y_1, y_2) = d(y_2, y_1)$

d_d es la métrica discreta, d es la métrica usual en $\mathbb{R}$.

Desigualdad Triangular:

$$M(x_1 \times y_1, x_2 \times y_2) = \frac{d_d(x_1, x_2)}{2\left[1 + d_d(x_1, x_2)\right]} + \frac{d(y_1, y_2)}{4\left[1 + d(y_1, y_2)\right]}$$

$$M(x_1 \times y_1, x_2 \times y_2) \leq \frac{1}{2}\left[\frac{d_d(x_1, x_3)}{1 + d_d(x_1, x_3)} + \frac{d_d(x_3, x_2)}{1 + d_d(x_3, x_2)}\right] +$$

$$+ \frac{1}{4}\left[\frac{d(y_1, y_3)}{1 + d(y_1, y_3)} + \frac{d(y_3, y_2)}{1 + d(y_3, y_2)}\right]$$

$$M(x_1 \times y_1, x_2 \times y_2) \leq \frac{1}{2}\left[\frac{d_d(x_1, x_3)}{1 + d_d(x_1, x_3)}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{d(y_1, y_3)}{1 + d(y_1, y_3)}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{d_d(x_3, x_2)}{1 + d_d(x_3, x_2)}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{d(y_3, y_2)}{1 + d(y_3, y_2)}\right]$$

$$M(x_1 \times y_1, x_2 \times y_2) \leq M(x_1 \times y_1, x_3 \times y_3) + M(x_3 \times y_3, x_2 \times y_2)$$

$\therefore$ M es una métrica.

Analicemos las bolas $B_M(x_1 \times y_1, r)$.

Si $\quad B_M(x_1 \times y_1, \frac{1}{2}) = \{a \times b \in \mathbb{R}^2 \mid M(x_1 \times y_1, a \times b) < \frac{1}{2}\}$

$$= \left\{a \times b \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{d_d(x_1, a)}{2\left[1 + d_d(x_1, a)\right]} + \frac{d(y_1, b)}{4\left[1 + d(y_1, b)\right]} < \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \mathbb{R}^2$$

Así $\quad B_M(a \times b, r) = \mathbb{R}^2$ si $r \geq \frac{1}{2}$

$$B_M(a \times b, 0{,}05) = \{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \mid M(x_1 \times y_1, a \times b) < 0{,}05\}$$

$$= \left\{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{d_d(x_1, a)}{2\left[1 + d_d(x_1, a)\right]} + \frac{d(y_1, b)}{4\left[1 + d(y_1, b)\right]} < 0{,}05\right\}$$

$$= \left\{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{4} + \frac{d(y_1, b)}{4\left[1 + d(y_1, b)\right]} < 0{,}05\right\} \text{ si } x_1 \neq a$$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{d(y_1, b)}{4\left[1 + d(y_1, b)\right]} \geq 0.45 - \frac{1}{4} \right\} \cup B'$$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{d(y_1, b)}{4\left[1 + d(y_1, b)\right]} \geq 0.20 \right\} \cup B'$$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(y_1, b) \geq 0.20 \left[4(1 + d(y_1, b))\right] \right\} \cup B'$$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(y_1, b) \geq 0.8 \left[1 + d(y_1, b)\right] \right\} \cup B'$$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(y_1, b) \geq 0.8 + 0.8\, d(y_1, b) \right\} \cup B'$$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0.2\, d(y_1, b) \geq 0.8 \right\} \cup B'$$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(y_1, b) \geq 4 \right\} \cup B' \quad \text{con}$$

$$B' = \left\{ a \times y_1 \mid y_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

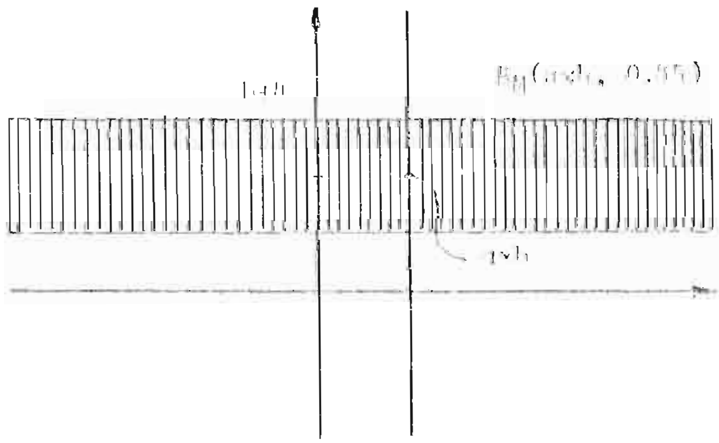


Figura 4

$$B_H(a \times b,\ 0.40) = \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{d_1(x_1, a)}{4\left[1 + d_1(x_1, a)\right]} + \frac{d(y_1, b)}{4\left[1 + d(y_1, b)\right]} \geq 0.40 \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{4} + \frac{d(y_1, b)}{4\left[1 + d(y_1, b)\right]} \geq 0.40 \right\} \cup B'$$

$$= \left\{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{d(y_1, b)}{2\left[1 + d(y_1, b)\right]} < 0,48\right\} \cup R'$$

$$= \left\{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{d(y_1, b)}{1 + d(y_1, b)} < 0,96\right\} \cup R'$$

$$= \left\{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(y_1, b) < 0.96 + 0.96\, d(y_1, b)\right\} \cup R'$$

$$= \left\{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0.04\, d(y_1, b) < 0.96\right\} \cup R'$$

$$= \left\{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(y_1, b) < \frac{96}{4}\right\} \cup R'$$

$$B_M(a \times b,\ 0.99) = \left\{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(y_1, b) < 24\right\} \cup R'$$

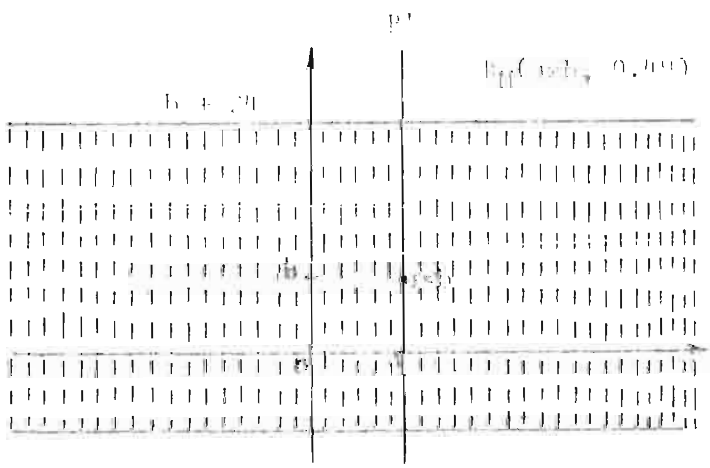


Figura [illegible]

Si $x_1 = a$, $d(y_1, b) < 1.96 + 1.96\, d(y_1, b) \Longrightarrow d(y_1, b) > -\frac{1.96}{.96}$

de donde $R' = \{a \times y \mid y \in \mathbb{R}\}$

$$B_M(a \times b,\ 0.3) = \left\{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{d_1(x_1, a)}{2\left[1 + d_1(x_1, a)\right]} + \frac{d(y_1, b)}{2\left[1 + d(y_1, b)\right]} < 0.3\right\}$$

$$= \left\{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{2} + \frac{d(y_1, b)}{2\left[1 + d(y_1, b)\right]} < 0.3\right\} \cup R'$$

$$= \left\{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{d(y_1, b)}{2\left[1 + d(y_1, b)\right]} < 0.5,\ x_1 \neq a\right\} \cup R'$$

$$= \{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \mid d(y_1, b) < \frac{1}{n} , x_1 \neq a\} \cup B'$$ [illegible]

$$B' = \{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{d(y_1, b)}{n[1 + d(y_1, b)]} < 0.2, x_1 = a\}$$

$$B' = \{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \mid d(y_1, b) < 1.2 + 1.2\, d(y_1, b), x_1 = a\}$$

$$B' = \{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \mid -0.2\, d(y_1, b) < 1.2 , x_1 = a\}$$

$$B' = \{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \mid d(y_1, b) > -6 , x_1 = a\}$$

$\therefore$ $B_n(a \times b, 0.2) = \{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \mid d(y_1, b) < \frac{1}{n}, x_1 \neq a\} \cup B'$

con $B' = \{a \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \in \mathbb{R}\}$

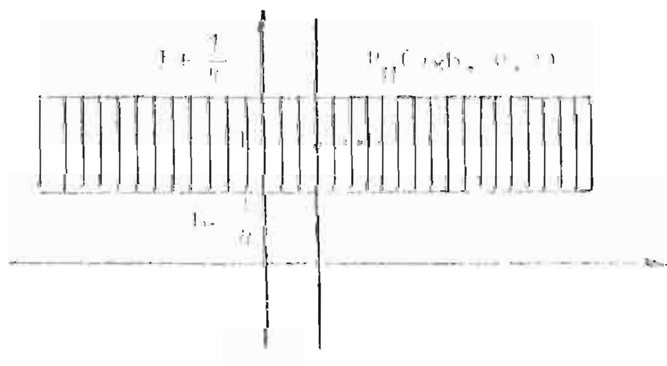


Figura 5

$B_n(a \times b, r)$ [illegible] $r > \frac{1}{n}$ y [illegible] $r < \frac{1}{n}$. Entonces $B(a \times b, r)$

$$= \{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{d(x_1, a)}{n[1 + d(x_1, a)]} + \frac{d(y_1, b)}{n[1 + d(y_1, b)]} < r\}$$

$$= \{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{d(y_1, b)}{n[1 + d(y_1, b)]} < r - \frac{1}{n}\} \cup B'$$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{d(y_1, b)}{1 + d(y_1, b)} < 4\varepsilon - 1 \right\} \cup B'$$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(y_1, b) < 4\varepsilon - 1 + (4\varepsilon - 1)\, d(y_1, b) \right\} \cup B'$$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; [1 - 4\varepsilon + 1]\, d(y_1, b) < 4\varepsilon - 1 \right\} \cup B'$$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(y_1, b) < \frac{4\varepsilon - 1}{2 - 4\varepsilon} \right\} \cup B' \quad .$$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(y_1, b) < \varepsilon' \,,\; \varepsilon' = \frac{4\varepsilon - 1}{2 - 4\varepsilon} \right\} \cup B'$$

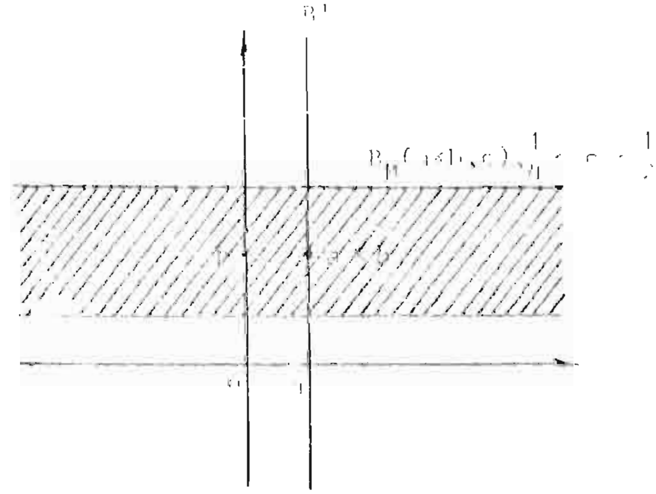


Figura 6

$B_H(a \times b, 0.2)$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{d_1(x_1, a)}{2[1 + d_1(x_1, a)]} + \frac{d(y_1, b)}{4[1 + d(y_1, b)]} < 0.2 \,,\; x_1 \ldots \right.$$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{d(y_1, b)}{4[1 + d(y_1, b)]} < 0.2 \,,\; x_1 = a \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{d(y_1, b)}{1 + d(y_1, b)} < 0.8 \,,\; x_1 = a \right\}$$

$$= \{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \mid d(y_1, b) < 0.8 + 0.8\, d(y_1, b),\ x_1 = a\}$$

$$= \{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \mid 0.2\, d(y_1, b) < 0.8,\ x_1 = a\}$$

$$= \{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \mid d(y_1, b) < 4,\ x_1 = a\}$$

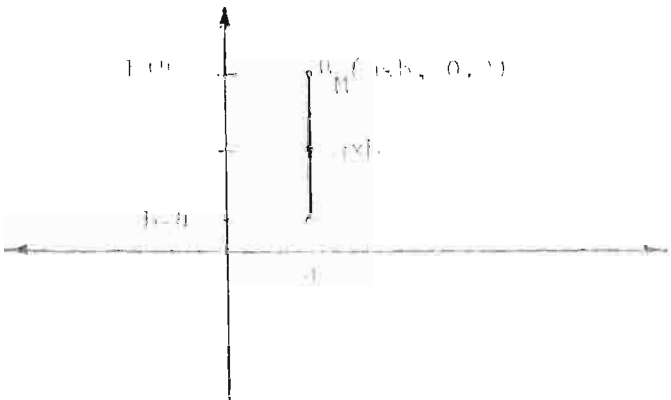


Figure 7

$B_M(a \times b, \epsilon)$ for $\epsilon < \frac{1}{4}$

$$B_M(a \times b, \epsilon) = \left\{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{d_1(x_1, a)}{4[1 + d_1(x_1, a)]} + \frac{d(y_1, b)}{4[1 + d(y_1, b)]} < \epsilon\right\}$$

$$= \left\{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{d(y_1, b)}{4[1 + d(y_1, b)]} < \epsilon,\ x_1 = a\right\}$$

$$= \{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \mid d(y_1, b) < 4\epsilon + 4\epsilon\, d(y_1, b),\ x_1 = a\}$$

$$= \{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \mid (1 - 4\epsilon)\, d(y_1, b) < 4\epsilon,\ x_1 = a\}$$

$$= \left\{x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(y_1, b) < \frac{4\epsilon}{1 - 4\epsilon},\ x_1 = a\right\}$$

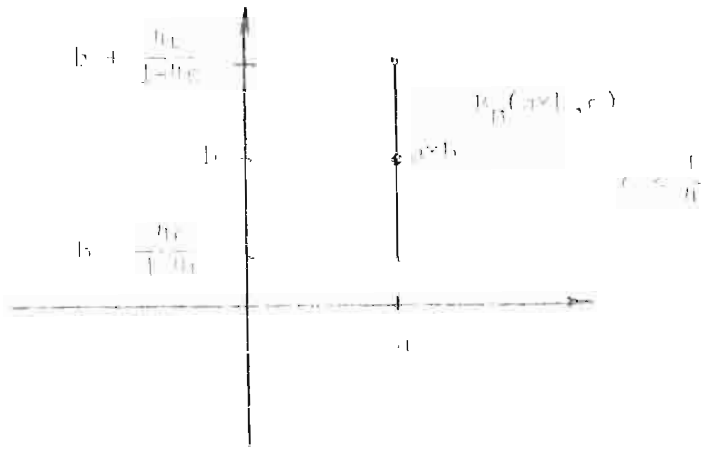


Figura 2

Para cada elemento $b' \in (a \times b - \varepsilon', a \times b + \varepsilon')$ existe una bola abierta $B_n(a \times b, \varepsilon)$, con $\varepsilon = \frac{1}{n[\varepsilon' + 1]}$ tal que $B_n(a \times b, \varepsilon) \subset (a \times b - \varepsilon', a \times b + \varepsilon')$, $\varepsilon < \frac{1}{n}$.

Sea $x_1 \times y_1 \in B_n(a \times b, \varepsilon) \Rightarrow \dfrac{d_n(x_1, a)}{[1 + d_n(x_1, a)]} + \dfrac{d(y_1, b)}{n[1 + d(y_1, b)]} < \varepsilon$

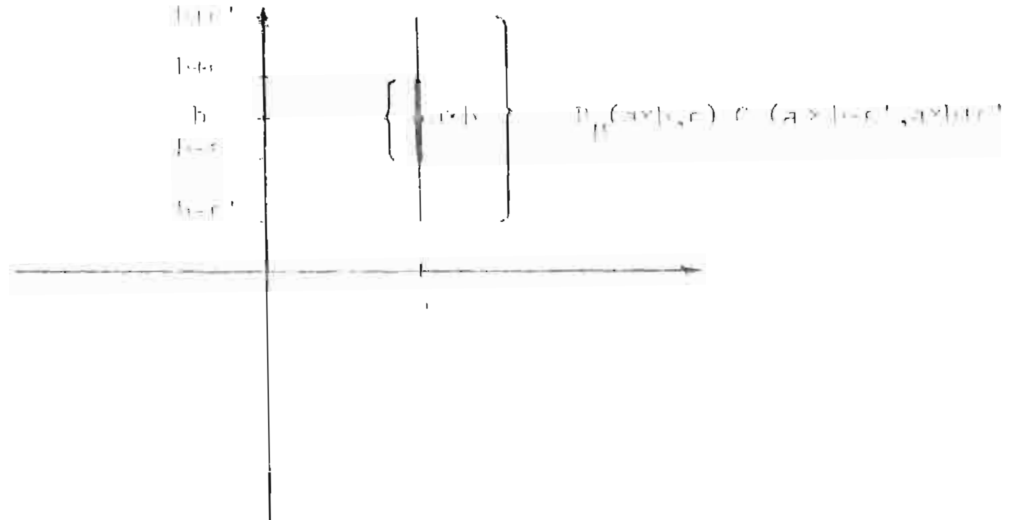
$$\Longrightarrow x_1 = a \Rightarrow \frac{d(y_1, b)}{n[1 + d(y_1, b)]} < \varepsilon \Rightarrow \frac{d(y_1, b)}{1 + d(y_1, b)} < n\varepsilon$$

$$\Longrightarrow d(y_1, b) < n\varepsilon + n\varepsilon\, d(y_1, b) \Longrightarrow (1 - n\varepsilon)\, d(y_1, b) < n\varepsilon$$

$$\Rightarrow d(y_1, b) < \frac{n\varepsilon}{1 - n\varepsilon} \Rightarrow d(y_1, b) < \varepsilon'$$

$$\Longrightarrow x_1 \times y_1 \in (a \times b - \varepsilon', a \times b + \varepsilon')$$

$$\therefore B_n(a \times b, \varepsilon) \subset (a \times b - \varepsilon', a \times b + \varepsilon')$$



Figura

Si $x_1 \times y_1 \in \mathbb{R}^2$, existe $B_H(x_1 \times y_1, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ tal que $x_1 \times y_1 \in B_H(x_1 \times y_1, \varepsilon)$

Si τ es la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$, sea $U \in \tau$ y sea $x \in U$, $x = x_1 \times y_1$. Entonces existe un básico $(a \times b, a \times d)$ tal que $x \in (a \times b, a \times d) \subset U$. Pero existe

$$B_H\left(a \times \frac{b+d}{2}, \varepsilon\right), \quad \varepsilon = \frac{1}{4\left[|b-d|+1\right]}$$

tal que

$$B_H\left(a \times \frac{b+d}{2}, \varepsilon\right) \subset (a \times b, a \times d) \text{ y } x \in B_H\left(a \times \frac{b+d}{2}, \varepsilon\right)$$

Por tanto $B_H\left(a \times \dfrac{b+d}{2}, \varepsilon\right) \subset U$.

$\therefore$ La colección de bolas $B_H(a \times b, \varepsilon)$ es una base para la topología del orden.

Por tanto $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico es metrizable.

Proposición 5.18. :

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es paracompacto en la topología del orden lexicográfico.

Prueba :

Como $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es metrizable en la topología del orden lexicográfico, entonces por Teorema de Stone $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es paracompacto en la topología del orden lexicográfico.

Proposición 5.19. :

El subconjunto $[0, 1] \times [0, 1]$ de $\mathbb{R}^2$ es paracompacto en la topología del orden lexicográfico.

Prueba :

Como $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es paracompacto en el orden lexicográfico y $[0, 1] \times [0, 1]$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, entonces $[0, 1] \times [0, 1]$ es paracompacto.

Proposición 5.20. :

El subconjunto $[0, 1) \times [0, 1]$ es paracompacto en la topología del orden lexicográfico.

Prueba :

Como $\mathbb{R}$ es paracompacto y $[0, 1) \times [0, 1]$ es un subconjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$, ya que su complemento es abierto, podemos afirmar que $[0, 1) \times [0, 1]$ es paracompacto.

Probaremos que $[0, 1) \times [0, 1]$ es cerrado en la topología del orden lexicográfico sea $x \times y$ que pertenece al complemento de $[0, 1) \times [0, 1]$.

Entonces si $x < 0$, existe el básico $B_0 = (x \times y - 1, x \times y + 2)$ -

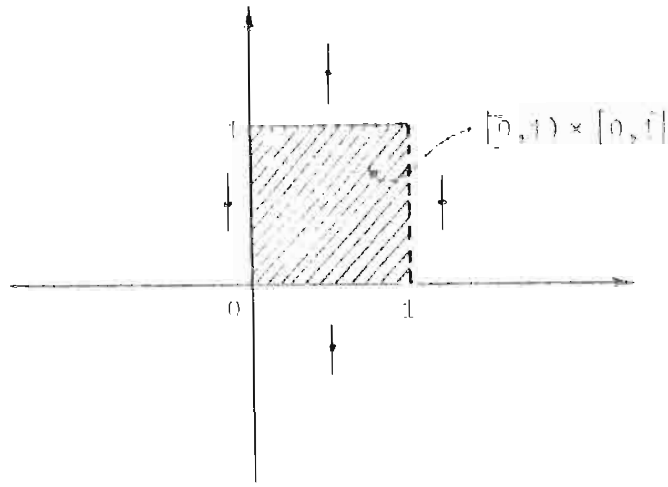


Figura 10

que contiene a $x \times y$ y está contenido en el complemento de $[0, 1) \times [0, 1]$.

Si $x \geq 1$, entonces existe el básico $(x \times y - 1, x \times y + 1)$ que contiene a $x \times y$ y está contenido en el complemento de $[0, 1) \times [0, 1]$.

Si $x \in [0, 1)$ y $y > 1$, existe el básico $(x \times y - \frac{y-1}{2}, x \times y + 1)$ que contiene a $x \times y$ está contenido en el complemento de $[0, 1) \times [0, 1]$.

Si $x \in [0, 1)$ y $y < 0$, existe el básico $(x \times y - \frac{y}{2}, x \times y - 1)$ que contiene a $x \times y$ y está contenido en el complemento de $[0, 1) \times [0, 1]$.

Así el complemento de $[0, 1) \times [0, 1]$ es abierto, por lo tanto $[0, 1) \times [0, 1]$ es cerrado.

Por lo que $[0, 1) \times [0, 1]$ es paracompacto.

<u>Proposición 5.21.</u> :

El intervalo $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ es paracompacto.

<u>Prueba</u> :

Como $\mathbb{R}$ es paracompacto, y $[a, b]$ es cerrado en $\mathbb{R}$, entonces $[a, b]$ es paracompacto.

Proposición 5.22 . :

El conjunto de los números reales es localmente metrizable.

Prueba :

Como $\mathbb{R}$ es metrizable, por Teorema de Metrización de Smirnov, se tiene que $\mathbb{R}$ es localmente metrizable.

Proposición 5.23. :

$$\mathbb{R} \times (\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega) \text{ es paracompacto.}$$

Prueba :

Como $\mathbb{R}$ es paracompacto y $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ es compacto y Hausdorff, entonces $\mathbb{R} \times (\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega)$ es paracompacto.

Proposición 5.24. :

Muestre que si X es paracompacto, no se sigue que para toda cubierta $\mathcal{A}$ de X, existe una subcolección localmente finita de $\mathcal{A}$ que cubre a X.

Solución :

$\mathbb{R}$ es paracompacto. Sea la colección

$$\mathcal{A} = (-n, n) , n \in \mathbb{Z}_+$$

no tiene una subcolección localmente finita que cubra a $\mathbb{R}$.

Proposición 5.25. :

Sea X un espacio Hausdorff. Supongamos que existe una cubierta abierta contable $\{U_n\}$ de X tal que para cada n, $c(U_n)$ es compacto y $c(U_n) \subseteq U_{n+1}$. Muestre que X es paracompacto.

<u>Prueba</u> :

Como X es Hausdorff, bastará probar que para toda cubierta abierta A de X, existe un refinamiento abierto localmente finito β de A que cubre a X. Como $c(U_n)$ es compacto para todo $n \in Z_+$, tomemos un número finito de los elementos de A que cubre al compacto $c(U_n) \setminus U_{n-1}$ e intersequémoslo con el abierto $U_{n+1} \setminus c(U_{n-2})$. Sea β_n la colección resultante. Entonces afirmamos que $\beta = \bigcup_{n \in Z_+} \beta_n$ es un refinamiento de A que cubre a X, ya que cada elemento de β es un elemento de A o un subconjunto de un elemento de A, y también que $\bigcup_{n \in Z_+} \beta_n \subset X$. Probemos que $X \subset \bigcup_{n \in Z_+} \beta_n$. Sea $x \in X$, entonces $x \in (c(U_n) \setminus U_{n-1})$ para algún $n \in Z_+$, así $x \in B \in \beta_n$ para algún $n \in Z_+$, entonces $x \in \bigcup_{B \in \beta_n} B$, así $X \subset \bigcup_{n \geq 1} \beta_n$. Por tanto β cubre a X.

El abierto $U_{n+1} \setminus c(U_{n-2})$ intersecta a lo sumo los abiertos que cubren a $c(U_{n-1}) \setminus U_{n-2}$, $c(U_n) \setminus U_{n-1}$ y $c(U_{n+1}) \setminus U_n$. Por consiguiente β es localmente finito y como X es Hausdorff se concluye que X es paracompacto.

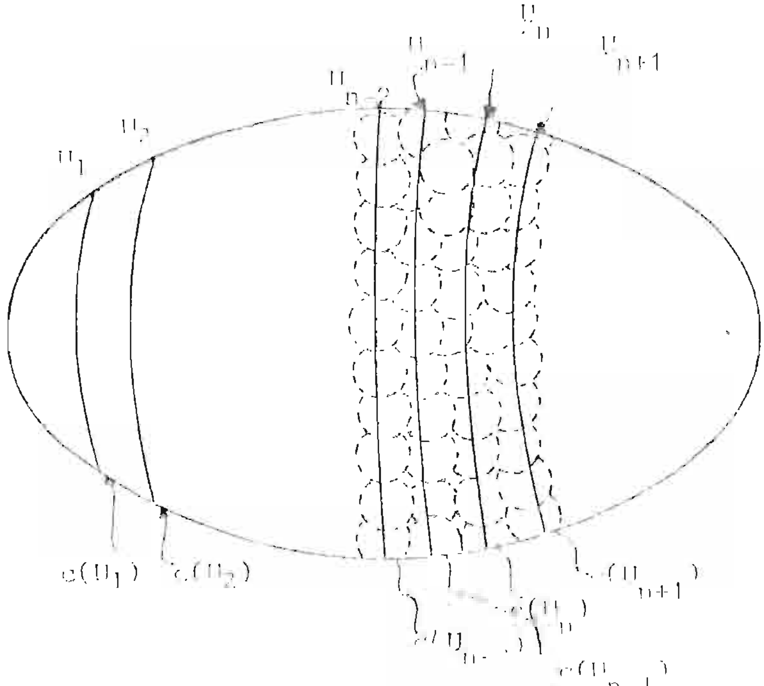


Figura 11

<u>Proposición 5.26.</u> :

Sea X un espacio topológico paracompacto, y sea Y un espacio topológico compacto Hausdorff. Entonces $X \times Y$ es un espacio topológico paracompacto.

<u>Prueba</u> :

Sea G una cubierta abierta de $X \times Y$. Para cada punto $w = x \times y$ en $X \times Y$, existen conjuntos abiertos V_w y Z_w en X y Y, respectivamente, tales que $x \times y \in V_w \times Z_w$ con $V_w \times Z_w \subset G$ para algún $G \in G$.

Denotamos para cada $x \in X$ el conjunto $\{x \times y : y \in Y\} = \{x\} \times Y$ por L_x. La familia $\{Z_w : w \in L_x\}$ formará una cubierta abierta del conjunto compacto Y, y así existe un subconjunto finito F_x de L_x tal que $\{Z_w : w \in F_x\}$ cubre a Y.

Sea $V_x = \cap \{V_w : w \in F_x\}$, y entonces $H = \{V_x : x \in X\}$ será una cubierta abierta de X. Como X es paracompacto H tiene un refinamiento localmente finito abierto H^*, el cual cubre a X. Luego para cada $V \in H^*$, existe un punto $x_V \in X$ tal que $V \subseteq V_{x_V}$. Por tanto $G^* = \{V \times Z_w : V \in H^*$ y $w \in F_{x_V}\}$ es una cubierta abierta de $X \times Y$, la cual refina a G. Así $X \times Y$ es paracompacto.

<u>Proposición 5.27.</u> :

El conjunto S_Ω no es paracompacto.

<u>Prueba</u> :

Sabemos que $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ no es paracompacto y que $\bar{S}_\Omega$ es Hausdorff-compacto, entonces, se tiene necesariamente que S_Ω no es paracompacto.

<u>Proposición 5.28.</u> :

$S_\Omega \times [0, 1)$ en el orden lexicográfico no es paracompacto.

Prueba :

$S_\Omega \times \{0\}$ no es paracompacto ya que es homeomorfo a S_Ω y como $S_\Omega \times \{0\}$ es subconjunto cerrado de $S_\Omega \times [0, 1)$, entonces $S_\Omega \times [0, 1)$ no es paracompacto.

Proposición 5.29. :

El subconjunto $[a, b]$ es un conjunto C_δ en $\mathbb{R}$.

Prueba :

Por Ejemplo 4.5., directamente.

Proposición 5.30. :

S_Ω no posee una base B que sea contablemente localmente finita.

Prueba :

S_Ω es bien ordenado, entonces S_Ω es normal y por tanto regular, pero S_Ω no es metrizable, entonces S_Ω no posee base contablemente localmente finita (por Teorema 4.[illegible].).

Proposición 5.31. :

Para $A = \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ existe una colección D de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que D es una cubierta abierta de $\mathbb{R}$, D es un refinamiento de A y D es contablemente localmente finita.

Prueba :

A es una cubierta abierta de $\mathbb{R}$, y $\mathbb{R}$ es metrizable, entonces por Lema 4.3., existe una colección D de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que D es una cubierta abierta de $\mathbb{R}$, D es un refinamiento de A y D es contablemente localmente finita.

Proposición 5.32. :

$\mathbb{R}^2$ en la topología del orden lexicográfico tiene una base que es contablemente localmente finita.

Prueba :

Como $\mathbb{R}^2$ es metrizable en la topología del orden lexicográfico, por teorema [illegible], $\mathbb{R}^2$ posee una base contablemente localmente finita.

Proposición 5.33. :

El conjunto $[0, 1] \times [0, 1]$ en la topología del orden lexicográfico es normal.

Prueba :

Como $[0, 1] \times [0, 1]$ en el orden lexicográfico es paracompacto, entonces es normal por teorema 4.3.

Proposición 5.34. :

Cada subconjunto unitario de $\mathbb{R}$ es paracompacto.

Prueba :

Como los conjuntos unitarios en $\mathbb{R}$ son cerrados y como $\mathbb{R}$ es paracompacto entonces los conjuntos unitarios son paracompactos en $\mathbb{R}$.

Proposición 5.35. :

$S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ no es metrizable.

Prueba :

Como $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ no es paracompacto, por teorema de Stone, $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ no es metrizable.

Proposición 5.36. :

Los dos enunciados siguientes son equivalentes :

a) Cada cubierta abierta de $\mathbb{R}$ tiene un refinamiento que es una cubierta abierta de $\mathbb{R}$ y contablemente localmente finita.

b) Cada cubierta abierta de $\mathbb{R}$ tiene un refinamiento que es una cubierta cerrada de $\mathbb{R}$ y localmente finita.

<u>Prueba</u> :

Como $\mathbb{R}$ es regular, entonces por Lema [illegible] :

a) $\equiv$ b), es decir a) equivalente a b).

<u>Proposición [illegible]</u> .

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es paracompacto y localmente metrizable en el orden lexicográfico.

<u>Prueba</u> :

Como $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es metrizable en el orden lexicográfico, entonces por aplicación directa del teorema de metrización de Smirnoff $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es paracompacto y localmente metrizable.

CAPITULO VI : A P E N D I C E

A P E N D I C E

A continuación damos algunas definiciones y teoremas que ayudarán al lector para recordar algunos conceptos de los cuales se hace uso para el desarrollo del presente trabajo.

<u>Definición 1</u> :

Una relación en un conjunto A es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times A$.

Si R es una relación en A, usamos la notación xRy para expresar que $x \times y \in R$, que se lee "x se relaciona con y".

<u>Definición 2</u> :

Una relación R en un conjunto A es llamada <u>relación de orden</u> (o un orden simple, o un orden lineal) si tiene las siguientes propiedades :

(1) (Comparabilidad). Para todo $x, y \in A$ tal que $x \neq y$, se tiene que xRy o yRx, (en el sentido exclusivo).

(2) (No reflexiva). Para todo $x \in A$, no ocurre que xRx.

(3) (Transitiva). Si xRy y yRz, entonces xRz.

<u>Ejemplo 1</u> :

Consideremos la relación en el conjunto de los números reales formada de todos los pares $x \times y$ de números reales tales que $x < y$. Esta es una relación de orden llamada "<u>relación de orden usual</u>" en $\mathbb{R}$.

<u>Definición 3</u> :

Si X es un conjunto y $<$ es una relación de orden en X usamos la notación (a, b) para denotar el conjunto

$$\{x \mid a < x < b\};$$

este es llamado un intervalo abierto en X. Si este conjunto es vacío, llamaremos a "a" el inmediato antecesor de "b", y a "b", el inmediato sucesor de "a".

Definición 4 :

Supongamos que A y B son dos conjuntos con relaciones de orden $<_A$ y $<_B$, respectivamente. Decimos que A y B tienen el mismo tipo de orden si existe una función biyectiva entre ellos que preserva el orden; esto es, si existe una función biyectiva $f : A \to B$ tal que

$$a_1 <_A a_2 \Rightarrow f(a_1) <_B f(a_2)$$

Definición 5 :

Supongamos que A y B son dos conjuntos con relaciones de orden $<_A$ y $<_B$, respectivamente. Definimos una relación de orden $<$ en $A \times B$ así :

$$a_1 \times b_1 < a_2 \times b_2$$

si $a_1 <_A a_2$, o si $a_1 = a_2$ y $b_1 <_B b_2$. Esta es llamada "relación del orden lexicográfico" en $A \times B$.

Ejemplo 2 :

Consideremos el orden lexicográfico en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En este orden, el punto p es menor que todo punto que está arriba sobre la recta vertical que pasa por p, y p es menor que todo punto a la derecha de esta recta vertical.

Definición 6 :

Una relación que sólo cumple no reflexividad y transitividad se llama relación de orden parcial estricto.

Definición 7 :

Un conjunto ordenado A se dice que tiene la propiedad del supremo, si todo subconjunto no vacío A_0 de A que es acotado superiormente tiene una mínima cota superior.

Análogamente, el conjunto A se dice que tiene la propiedad del ínfimo, si todo subconjunto no vacío A_0 de A que es acotado inferiormente, tiene una mayor cota inferior.

Teorema 1 : (propiedad del buen ordenamiento)

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+$ tiene un elemento más pequeño.

Definición 8 :

Sea A una colección de conjuntos. Una función con índices para A es una función sobreyectiva f de algún conjunto J, llamado el conjunto de índices, hacia A. La colección A, junto con la función con índices f, es llamada una familia con índices en J de conjuntos.

Dado el elemento α de J, denotamos el conjunto $f(\alpha)$ por el símbolo A_α . Y denotaremos la familia con índices en J por

$$\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$$

Definición 9 :

Un conjunto A es llamado finito si se puede establecer una biyección entre A y el subconjunto $\{1, \ldots\ldots, n\}$ de $\mathbb{Z}_+$ o A es vacío.

Definición 10 :

Un conjunto A es llamado infinito si no es finito. Es llamado contablemente infinito si existe una correspondencia biyectiva

$$f : Z_+ \longrightarrow A$$

Definición 11 :

Un conjunto es llamado contable si este es finito o contablemente infinito. Un conjunto A que no es contable es llamado incontable.

Teorema 2 :

Sea $B \neq \phi$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

i) Existe $f : Z_+ \to B$ sobreyectiva

ii) Existe $g : B \to Z_+$ inyectiva

iii) B es contable

Corolario 1 :

El conjunto $Z_+ \times Z_+$ es contablemente infinito.

Teorema 3 :

Una unión contable de conjuntos contables es contable.

Prueba :

Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de conjuntos contables, donde el conjunto de índices J es contable. El caso de $J = \phi$ es trivial, así asumimos que $J \neq \phi$. Asumimos también que cada conjunto A_α es no vacío, por conveniencia; esta suposición no cambia nada.

Ya que cada A_α es contable, podemos escoger, para cada α, una función sobreyectiva $f_\alpha : Z_+ \to A_\alpha$.

Similarmente podemos escoger una función sobreyectiva $g : Z_+ \to J$. Ahora definimos

$$h : Z_+ \times Z_+ \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$$

por

$$h(n, m) = f_{g(n)}(m)$$

Es fácil comprobar que h es sobreyectiva. Ya que $Z_+ \times Z_+$ está en correspondencia biyectiva con Z_+, la contabilidad de la unión se sigue del teorema 3.

<u>Teorema 4</u> :

Un producto finito de conjuntos contables es contable.

<u>Teorema 5</u> :

Sea $X = \{0, 1\}$. Entonces el conjunto X^{ω} es no contable.

<u>Prueba</u> :

Mostraremos que, dada cualquier función

$$g : Z_+ \longrightarrow X^{\omega} ,$$

no es sobreyectiva. Para este propósito, denotemos $g(n)$ por :

$$g(n) = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots, x_{nm}, \ldots),$$

donde cada x_{ij} es 0 ó 1, entonces definimos un punto $y = (y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n, \ldots)$ de X^{ω} por

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{nn} = 1 , \\ 1 & \text{si } x_{nn} = 0 . \end{cases}$$

(Si escribimos los números x_{ij} en un arreglo rectangular, los elementos particulares x_{nn} aparecen en la diagonal principal en este arreglo; escogimos y tal que su n-ésima coordenada difiera de la diagonal principal x_{nn}).

Ahora y es un punto de X^{ω}, y y no está en la imagen de g; dado n, el punto $g(n)$ y el punto y difieren en al menos una coordenada, esto es, la n-ésima.

Así g no es sobreyectiva.

El producto cartesiano $\{0, 1\}^{w}$ es un ejemplo de un conjunto no contable. Otro es el siguiente :

<u>Teorema 6</u> :

El conjunto $P(Z_+)$ de todos los subconjuntos de Z_+ es no contable.

<u>Teorema 7</u> :

Sea A un conjunto, los siguientes enunciados acerca de A son equivalentes :

(1) Existe $f : Z_+ \longrightarrow A$ función inyectiva.

(2) Existe una biyección de A con un subconjunto propio de él mismo.

(3) A es infinito.

<u>Definición 12</u> :

Un conjunto A con una relación de orden es llamado bien ordenado si cada subconjunto no vacío de A tiene un elemento más pequeño.

<u>Ejemplo 2</u> :

$Z_+ \times Z_+$ es un conjunto bien ordenado con el orden lexicográfico.

<u>Teorema 8</u> (del buen ordenamiento)

Si A es un conjunto, existe una relación de orden en A que es un buen ordenamiento.

<u>Corolario 2</u> :

Existe un conjunto no contable bien ordenado.

<u>Definición 13</u> :

Sea X un conjunto ordenado. Dado α en X, el conjunto

$$S_\alpha = \{x \mid x \in X \text{ y } x < \alpha\}$$

es llamado, la sección de X por α.

Teorema 1 :

Existe un conjunto bien ordenado no contable tal que cada sección de él es contable.

Prueba :

Por el análisis anterior, existe un conjunto no contable bien ordenado X. De este hecho se sigue que existe un conjunto no contable bien ordenado Y, con al menos una sección no contable. El conjunto $Y = \{1, 2\} \times X$ en el orden lexicográfico es tal conjunto; su sección por cualquier elemento de la forma $2 \times x$ no es contable. Consideremos el subconjunto de Y formado por los elementos α para los cuales S_α no es contable; sea Ω el elemento más pequeño de este subconjunto de Y. Entonces S_Ω es un conjunto bien ordenado, que no es contable, y cada sección de S_Ω es contable.

El conjunto S_Ω es llamado un conjunto bien ordenado no contable mínimo.

Definición 14 :

Se define $\bar{S}_\Omega = S_\Omega \cup \{\Omega\}$

Corolario 3 :

Si A es un subconjunto contable de S_Ω, entonces A tiene una cota superior.

Prueba :

Sea A un subconjunto contable de S_Ω. Para cada $a \in A$, la sección S_a es contable. Por tanto, la unión $B = \bigcup_{a \in A} S_a$ es también contable. Como S_Ω no es contable, el conjunto B no es todo S_Ω; sea x un punto de

S_Ω que no está en B. Entonces, α es una cota superior para A. Por que si $x \in a$ para algún a en A, entonces $x \in S_\Omega$ y por consiguiente a B, contrariamente a como se ha supuesto.

<u>Definición 15</u> :

Supongamos que $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ es una colección de conjuntos con índices en el conjunto $\{1, \dots, m\}$.

Sea $X = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$. El producto cartesiano de esta colección de conjuntos se denota por

$$\prod_{i=1}^{m} A_i \quad o \quad A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$$

es definido como el conjunto de las m-uplas $(x_1, \dots, x_m)$ de elementos de X tal que $x_i \in A_i$ para cada i.

<u>Definición 16</u> :

Definimos una ω-upla de elementos de X como una función $x : Z_+ \to X$; llamamos también a tal función una sucesión, o una sucesión infinita de elementos de X. Si x es una ω-upla, algunas veces denotamos el valor de x en i por x_i en lugar de $x(i)$ y denotamos x por el símbolo

$$(x_1, x_2, \dots) \quad o \quad (x_n)_{n \in Z_+}$$

Tomamos X^ω para denotar el conjunto de todas las ω-uplas de elementos de X.

<u>Definición 17</u> :

Supongamos que $\{A_1, \dots, A_n, \dots\}$ es una colección de conjuntos cuyo conjunto de índices son los enteros positivos. Sea X la unión de los conjuntos de esta colección. El <u>producto cartesiano</u> de esta colección de conjuntos, denotado por

$$\prod_{i \in Z_+} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots\ldots ,$$

es definido como el conjunto de todas las w-uplas $(x_1, x_2, \ldots)$ de elementos de X tales que $x_i \in A_i$ para todo i.

Nada en esta definición exige que los conjuntos A_i sean diferentes uno de otro. Realmente, ellos pueden ser el mismo conjunto X. En este caso, el producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ es precisamente el conjunto X^m de todas las m-uplas de elementos de X; y el producto $A_1 \times A_2 \times \ldots$ es justamente el conjunto X^w de todas las w-uplas de elementos de X.

Ejemplo 4 :

Si $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, entonces $\mathbb{R}^m$ denota el conjunto de todas las m-uplas de números reales; es a menudo llamado m-espacio euclídeo. Análogamente $\mathbb{R}^w$ es algunas veces llamado "espacio euclídeo de dimensión infinita"; este es el conjunto de todas las w-uplas $(x_1, x_2, \ldots)$ de números reales, que es el conjunto de todas las funciones $x : Z_+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definición 18ª :

Sea J un conjunto de índices. Dado un conjunto X, definimos una j-upla de elementos de X como una función $x : J \to X$. Si α es un elemento de J, denotamos el valor de x en α por x_α en lugar de $x(\alpha)$. Y denotamos la función x por

$$(x_\alpha)_{\alpha \in J}$$

la cual es tan similar que podemos pensar una "upla-notación" para un conjunto de índices arbitrario J. Denotamos el conjunto de todas las j-uplas por X^J.

Definición 19ª :

Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de conjuntos; sea

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

El producto cartesiano de esta familia, denotado por

$$\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$$

es definido como el conjunto de todas las I-uplas $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ de elementos de X tal que $x_\alpha \in A_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.

Dicho de otra manera, este producto cartesiano es precisamente el conjunto de todas las funciones

$$x : I \to \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

tal que $x(\alpha) \in A_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.

Si todos los conjuntos A_α son iguales a un conjunto X, entonces el producto cartesiano $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ es precisamente el conjunto X^I de todas las I-uplas de elementos de X.

Teorema 10 :

Todo conjunto ordenado no vacío finito tiene el tipo de orden de una sección $\{1, 2, \ldots, n\}$ de Z_+, así, éste es necesariamente bien ordenado.

Prueba :

Primero mostramos que cada conjunto ordenado finito A tiene un elemento más grande : si A tiene un elemento, esto es trivial. Suponiendo que es verdadero cuando se tienen conjuntos con n-1 elementos. Si A tiene n elementos y sea $a_0 \in A$. Entonces $A \setminus \{a_0\}$ tiene un elemento más grande a_1, y el más grande de $\{a_0, a_1\}$ es el más grande de A.

Segundo mostraremos que existe una biyección preservando el orden, de A con el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ para algún n : Si A tiene un elemento, este hecho es trivial. Supongamos que es verdadero para los conjuntos -

que tienen $n-1$ elementos. Sea b el elemento más grande de A. Por hipótesis existe una biyección que preserva el orden

$$f' : A \setminus \{b\} \longrightarrow \{1, \ldots\ldots, n-1\}$$

Definamos una función biyectiva que preserva el orden $f : A \to \{1, \ldots\ldots, n\}$ tal que

$$f(x) = f'(x) \quad \text{para } x \neq b$$

$$f(b) = n$$

EL PRINCIPIO DE DEFINICION RECURSIVA

Definición 20 :

Un subconjunto A de los números reales es inductivo, si para todo x en A, el número x + 1 también está en A.

Antes de considerar la forma general del principio de definición recursiva, consideremos primero el siguiente caso :

Dado un subconjunto infinito C de Z_+, consideremos la función

$$h : Z_+ \longrightarrow C \quad \text{dada por}$$

$$(*) \quad \begin{cases} h(1) = \text{ el elemento más pequeño de } C \\ h(i) = \text{ el elemento más pequeño de } \left[C \setminus h(\{1, \ldots, i-1\})\right] \\ \qquad \text{para } i > 1 \end{cases}$$

Probaremos que existe una función única $h : Z_+ \longrightarrow C$ que satisface (*).

El primer paso es probar que existen funciones definidas en la sección $\{1, \ldots, n\}$ de Z_+ que satisfacen (*) :

Lema 1 :

Dado $n \in Z_+$, existe una función

$$f : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow C$$

que satisface (*) para todo i en su dominio.

Prueba :

En el lema se establece un enunciado que depende de n, y por consiguiente puede ser probado por inducción. Sea Z_0 el conjunto de todos los n para los cuales el lema es válido. Mostraremos que Z_0 contiene a 1 y que es inductivo. Se sigue entonces que $Z_0 = Z_+$.

El lema es cierto para $n = 1$, ya que la función $f: \{1\} \to C$ definida por

$$f(1) = \text{el más pequeño elemento de } C$$

satisface (*).

Supongamos que el lema es cierto para $n - 1$, probaremos que es cierto para n. Por hipótesis existe una función $f' : \{1, \ldots, n-1\} \to C$ que satisface (*) para todo i en su dominio. Definimos

$$f : \{1, \ldots, n\} \to C \quad \text{por}$$

$$f(i) = f'(i) \quad \text{para } i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

$$f(n) = \text{el más pequeño elemento de } \left[C \setminus f'(\{1, \ldots, n-1\})\right]$$

Como C es infinito, f' no es sobreyectiva; por consiguiente el conjunto $C \setminus f'(\{1, \ldots, n-1\})$ es no vacío, y $f(n)$ está bien definido. Nótese que esta definición es aceptable; no define a f en términos de ella misma pero sí en términos de la función dada f'.

Es fácil comprobar que satisface (*) para todo i en su dominio. La función f satisface (*) para $i \leq n - 1$ porque para estos valores, f es igual a f'. Y f satisface (*) para $i = n$ porque, por definición,

$$f(n) = \text{el más pequeño elemento de } \left[C \setminus f'(\{1, \ldots, n-1\})\right]$$

$$\text{y} \quad f'(\{1, \ldots, n-1\}) = f(\{1, \ldots, n-1\})$$

<u>Lema 2</u> :

Supongamos que $f : \{1, \ldots, n\} \to C$ y $g : \{1, \ldots, m\} \to C$ ambas satisfacen (*) para todo i en sus respectivos dominios. Entonces $f(i) = g(i)$ para todo i en ambos dominios.

<u>Prueba</u> :

Supongamos que no se cumple que para todo i en ambos dominios

$f(i) = g(i)$. Sea i el entero más pequeño para el cual $f(i) \neq g(i)$. El entero no es 1, porque

$$f(1) = \text{el más pequeño elemento de } C = g(1), \text{ por } (*).$$

Por consiguiente $i > 1$, y para todo $j < i$, tenemos $f(j) = g(j)$. Ya que f y g satisfacen $(*)$,

$$f(i) = \text{el más pequeño elemento de } \left[C \setminus f(\{1, \ldots, i-1\})\right]$$

$$g(i) = \text{el más pequeño elemento de } \left[C \setminus g(\{1, \ldots, i-1\})\right].$$

Ya que $f(\{1, \ldots, i-1\}) = g(\{1, \ldots, i-1\})$, tenemos $f(i) = g(i)$, contrario a como se escogió i.

Teorema 11 :

Existe una función única $h : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow C$ que satisface $(*)$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$.

Prueba :

Por lema 1, existe para cada n una función que lleva $\{1, \ldots, n\}$ a C y satisface $(*)$ para todo i en su dominio. Dado n, lema 2 mostró que esta función es única; dos de estas funciones que tienen el mismo dominio deben ser iguales. Sea $f_n : \{1, \ldots, n\} \to C$ que denota esta única función.

Ahora viene el paso crucial. Definimos una función $h : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow C$ definiendo su regla de asignación como la unión U de las reglas de las funciones f_n. La regla para f_n es un subconjunto de $\{1, \ldots, n\} \times C$; por consiguiente, U es subconjunto de $\mathbb{Z}_+ \times C$. Debemos mostrar que U es la regla para una función $h : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow C$.

Esto es, debemos probar que cada elemento i de $\mathbb{Z}_+$, aparece como la primera coordenada de exactamente un elemento de U. Esto es fácil. El entero i está en el dominio de f_n si y sólo si $n \geq i$. Por consiguiente, el conjunto de elementos de H de los cuales i es la primer coordenada es precisamente el conjunto de todos los pares de la forma $i \times f_n(i)$, para $n \geq i$. Ahora el lema 2 nos dice que $f_n(i) = f_m(i)$ si $n, m \geq i$. Por lo tanto, todos estos elementos de H son iguales; esto es, existe solamente un elemento de H que tiene a i como su primer coordenada.

Para mostrar que h satisface (*) es también fácil; es una consecuencia del siguiente hecho,

$$h(i) = f_n(i) \quad \text{para } i \leq n,$$

$$f_n \text{ satisface (*) para todo } i \text{ en su dominio.}$$

La prueba de que es única es una copia de la prueba del lema 2.

<u>Teorema 12</u> : (Principio de definición recursiva)

Sea A un conjunto; sea a_0 un elemento de A. Supongamos que ρ es una función que asigna, a cada función f que mapea una sección de los enteros positivos a A, un elemento de A. Entonces existe una función única

$$h : Z_+ \longrightarrow A$$

tal que

$$(*) \begin{cases} h(1) = a_0, \\ h(i) = \rho(h|\{1, \ldots, i-1\}) \quad \text{para } i > 1 \end{cases}$$

La fórmula (*) es llamada fórmula recursiva para h. Determina $h(1)$ y expresa el valor de h para $i > 1$ en términos de los valores de h para enteros positivos menores que i.

<u>Ejemplo 4</u> :

Mostremos que el Teorema 11 es un caso especial de este Teorema.

Dado un subconjunto infinito C de $\mathbb{Z}_+$, sea a_0 el elemento más pequeño de C, y definamos ρ por

$$\rho(f) = \text{el más pequeño elemento de}$$
$$[C \setminus (\text{conjunto imagen de } f)]$$

Ya que C es infinito y f es una función que mapea una sección de $\mathbb{Z}_+$ en C, el conjunto imagen de f no es todo C; por consiguiente, ρ está bien definida. Por Teorema 12 existe una función $h : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow C$ tal que $h(1) = a_0$, y para $i > 1$,

$$\begin{aligned} h(i) &= \rho(h \mid \{1, \ldots, i-1\}) \\ &= \text{el más pequeño elemento de} \\ &\quad [C \setminus (\text{el conjunto imagen de } h \mid \{1, \ldots, i-1\})] \\ &= \text{el más pequeño elemento de} \\ &\quad [C \setminus h(\{1, \ldots, i-1\})] \end{aligned}$$

como queríamos.

<u>Ejemplo 6</u> :

Dado $a \in \mathbb{R}$, "definimos" a^n por la fórmula recursiva

$$a^1 = a,$$
$$a^n = a^{n-1} \cdot a$$

queremos aplicar Teorema 12 para definir una función $h : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ rigurosamente tal que $h(n) = a^n$. Para aplicar este teorema, sea a_0 que denota el elemento a de $\mathbb{R}$, y definamos ρ por $\rho(f) = f(m) \cdot a$, donde f mapea una sección de $\mathbb{Z}_+$ en $\mathbb{R}$ y m es el elemento más grande del dominio de f. Entonces existe una función única $h : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h(1) = a_0,$$
$$h(i) = \rho(h \mid \{1, \ldots, i-1\}) \text{ para } i > 1$$

Esto significa que $h(1) = a$, y $h(i) = h(i-1) \cdot a$ para $i > 1$. Si denotamos h(i) por a^i, tendremos

$$a^1 = a$$

$$a^i = a^{i-1} \cdot a,$$

como queríamos.

B I B L I O G R A F I A

1. TOPOLOGY A FIRST COURSE

   James E. Munkres.

2. FOUNDATIONS OF GENERAL TOPOLOGY

   William J. Pervin

   Ed. Academic Press, 1964.

3. TEORIA Y PROBLEMAS DE TOPOLOGIA GENERAL

   Seymour Lipschutz, Ph. D.

   Ed. McGraw-Hill, 1970.

4. TOPOLOGIA DE ESPACIOS METRICOS

   Ignacio L. Iribarren I.

   Ed. Limusa, México, 1984.