UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

INTRODUCCION A LOS ESPACIOS METRICOS

TRABAJO DE GRADUACION PRESENTADO POR

RAMON ARISTIDES PAZ S.

PREVIO A LA OPCION DEL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICA

Octubre de 1983

SAN SALVADOR EL SALVADOR CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR INTERINO: DR. MIGUEL ANGEL PARADA

SECRETARIO GENERAL: LIC. RICARDO ERNESTO CALDERON

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO: ING. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

SECRETARIO: LIC. ADOLFO FLORES CIENFUEGOS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE DEL DEPARTAMENTO: ING. CARLOS MAURICIO CANJURA

TRABAJO DE GRADUACION

ASEROR: LIC. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

TRABAJO DESARROLLADO POR:

RAMON ARISTIDES PAZ S.

PREVIO A LA OPCION DE

SU TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICA

DEDICATORIA

El presente trabajo es el fruto de cinco años interrumpi-- dos de sincera meditación a fin de contribuir en la orientación de la enseñanza de la Topología de Espacios Métri-- cos y ha sido elaborada sobre la base de una educación con sentido humano que he recibido del esfuerzo conjunto de mi familia, mis profesores y amigos. Como depositarios de esta educación lo dedico a mi(s);

Padres: Enrique Paz Sánchez y Matilde Sánchez de Paz,
por su insansable e insustituible apoyo que me ha permitido una educación cuyo pensamiento reflejo - en este trabajo.

Esposa e hijos:
por su apoyo moral y con verdadero orgullo.

Hermanos: con todo cariño

Profesores: con profundo agradecimiento.

Amigos; con todo respeto.

I N D I C E

Página

I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo no es exactamente todo un estudio enfocado sobre la Topología de Espacíos Métricos; esto es más bién una introducción en este campo, el cual es presentado por Módulos.

Cada Módulo se inicia con definiciones claras, principios y teoremas pertinentes a los que se anexan una variedad de problemas resueltos gradualmente.

Los problemas resueltos ilustran y amplian las definiciones enfocan los puntos principales sin los cuales un estudiante se sentiría continuamente inseguro en su trabajo y permiten la repetición de los principios básicos, tan vital en un aprendizaje efectivo.

En su desarrollo el análisis clásico era tan variado y complejo, lo cual hacía difícil su estudio. Como el análisis es enfocado con procesos de límite y continuidad; es claro estos no son sorprendentes pensamientos matemáticos, esto hace el estudio de dos conseptos fundamentales: la convergencia de una sucesión de números reales y la continuidad de una función real contínua.

La numeración de las definiciones, lo mismo las letras para cada teorema es correlativa para cada módulo y si en determinado momento se hace referencia a un teorema o defini ción se mensiona el número o la letra, únicamente si co--- rresponde al mismo módulo y en cada caso el número correspondiente a cada módulo.

La elaboración de este trabajo se ha hecho así para que - sea una motivación o es decir útil para el estudio a la Topología de los Espacios Métricos.

No me resta más por patentizar, mi sincero agradecimiento a quienes contribuyeron, de una manera u otra en la realización de este trabajo principalmente a la señora Miriam - de Yánez, quien realizó la parte mecanográfica con dedicada paciencia y esmero.

Atentamente.

RAMON ARISTIDES PAZ S.

M O D U L O I

DEFINICIÓN Y ALGUNOS EJEMPLOS

DEFINICION 1.1

Sea X un conjunto no vacío.

Una Métrica en X es una función real d de pares ordenados de elementos de X los cuales satisfacen las siguientes - condiciones:

(1) $d(x,y) \geq 0$, y $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(2) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetría)

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (desigualdad triangular).

Aclaración: la función d asigna a cada par (x,y) de ele-- mentos de X un número real no negativo $d(x,y)$, la cual por simetría no depende de el orden de elementos; $d(x,y)$ es - llamada la distancia de x a y.

Un espacio métrico consiste en dos objetos: un conjunto - no vacío X y una métrica d en X.

Los elementos de X son llamados los puntos del espacio métrico (X,d), siempre que no podamos causar confución denotaremos el espacio métrico (X,d) por el símbolo X el cual es usado como el conjunto fundamental de puntos.

Hay muchas clases de espacios métricos diferentes algunos de los cuales desempeñan muchos papeles en geometría y análisis. Nuestro primer ejemplo es un poco trivial, pero es aveces usado en pruebas de ciertas declaraciones que - deseamos hacerla no verdadera. Lo que muestra que cada conjunto no vacío puede ser considerado como un espacio métrico.

EJEMPLO 1.

Sea X un conjunto no vacío arbitrario y d definido por:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0; & \text{si } x = y \\ 1; & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

El lector puede ver facilmente que con esta definición X es un espacio Métrico.-

EJEMPLO 2.

Considere la recta real $\mathbb{R}$ y la función real $|x|$ definida en $\mathbb{R}$. Analizar si esta función junto a $\mathbb{R}$ es un espacio métrico. Para ver esto son importantes las tres propiedades de la función valor absoluto.

(i) $|x| \geq 0$, y $|x| = 0 <=> x = 0$

(ii) $|-x| = |x|$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Ahora definamos una métrica en $\mathbb{R}$ así:

$$d(x,y) = |x - y|$$

la cual es llamada métrica usual en $\mathbb{R}$. El resultado que d es una métrica se sigue de las propiedades establecidas -

anteriormente. Esta es una pieza de razonamiento que ocurre frecuentemente en nuestro trabajo, luego:

para i) $d(x,y) = |x - y|$ es un número real no negativo igual a cero $\iff x - y = 0$

$\iff x = y$

para ii) $d(x,y) = |x - y| = |-(x - y)| = |y - x| = d(y,x)$

para iii) $d(x,y) = |x - y|$

$= |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$

$= d(x,z) + d(z,y)$ •

Los espacios NORMADOS podemos caracterizarlos como sigue:

I. Los elementos de cada espacio métrico pueden ser sumados o restados en forma natural y cada elemento tiene un negativo. Cada espacio métrico tiene un elemento especial denotado por 0, o llamado el origen, o cero elemental

II. En cada espacio NORMADO hay definido una noción de distancia de un elemento arbitrario al origen, que es una noción de tamaño de un elemento arbitrario. El tamaño de un elemento x es un número real denotado por $||x||$ y es llamado norma. El uso de las dobles barras es usado para enfatizar que la norma es la generalización de la función valor absoluto como en el ejemplo dos, puesto que se satisfacen las siguientes tres condiciones.

(i) $||x|| \geq 0$ y $||x|| = 0 \iff x = 0$

(ii) $\|-x\| = \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

III Fundamentalmente cada métrica aparece como la norma - de la diferencia entre dos elementos: $d(x,y) = \|x - y\|$. Como en el ejemplo dos, los resultados que esta es - una métrica se siguen las propiedades de la norma dadas en II. Esta métrica es llamada LA METRICA INDUCIDA por la norma.

Ahora volvamos a ver los principios fundamentales ralativos a espacios métricos en general.

DEFINICION

Sea X, un espacio métrico con métrica d.

Sea Y un subconjunto no vacío de X

Si la función d es considerada definida solo para puntos en Y, entonces (Y,d) es evidentemente un espacio métrico. Y con d restringido en esta forma es llamado SUB-ESPACIO DE X.

Esta tecnica de formar subespacios de un espacio métrico dado nos hace capaces de encontrar una infinidad de ejemplos adicionales con el manejo descrito anteriormente. - Por ejemplo el intervalo cerrado $[0,1]$ es un subespacio - de la linea real; el conjunto que contiene todos los puntos normales; y el círculo unitario; el disco unitario cerrado y disco unitario abierto son subconjuntos del plano complejo.

Se considera en este modulo introducir la extensión de los Números Reales, para lo cual denotaremos el sistema ordinario de los números reales $\mathbb{R}$ con los símbolos adjuntos:

$$-\infty \quad y \quad +\infty$$

Un número real extendido es un número real o cualquiera de estos simbolos. Decimos que también por definición.

$$-\infty < +\infty$$

Si x es cualquier número real entonces:

$$-\infty < x < +\infty$$

Los símbolos $-\infty$ y $+\infty$ no suman nada a nuestro entendimiento de los números reales. Ellos son usados principalmente como una notación conveniente.

DEFINICIONES

Sean a y b dos números reales cualquiera tales que $a \leq b$; entonces:

* El intervalo cerrado de a a b es el subconjunto de la línea real $\mathbb{R}$ definido así:

$$[a,b] = \{x: a \leq x \leq b\}$$

* Si b es un número real y a es un número real extendido tal que $a < b$ entonces el intervalo abierto-cerrado de extremos a y b es $(a,b] = \{x: a < x \leq b\}$
* Si a es un número real y b es un número real extendido

tal que $a < b$ entonces el intervalo cerrado-abierto de extremos a y b es:

$$[a,b) = \{x: a \leq x < b\}$$

* Si a y b son extensiones de los números reales tales que $a < b$ entonces el intervalo abierto de a y b es:

$$(a,b) = \{x: a < x < b\}$$

En el resto de este libro el término de intervalo significará uno de los cuatro tipos definidos en este párrafo.

Cada definición de un espacio métrico nos presenta el concepto de distancia de un punto a otro. Ahora definamos la distancia de un punto a un conjunto y el diámetro de un conjunto.

DEFINICION

Sea X un espacio métrico con métrica d y sea A un subconjunto de X. Si $x \in X$, entonces la distancia de x a A es denotada por:

$$d(x,A) = \inf \{d(x,a): a \in A\}$$

que es esta la menor de las cotas superiores de las distancias de x a puntos de A.

De la misma forma definimos EL DIAMETRO DE un conjunto A por:

$$d(A) = \sup \{d(a_1,a_2): a_1 \text{ y } a_2 \in A\}$$

el diámetro de A es la menor cota superior de las distancias entre pares de puntos de A.

OBSERVACIONES

i) A se dice que tiene DIAMETRO FINITO o DIAMETRO INFINITO, si d(A) es un número real o es $\pm \infty$.

ii) El conjunto vacio tiene diámetro infinito, es decir $d(\phi) = -\infty$.

iii) Un conjunto es acotado si su diámetro es infinito .

DEFINICION

Una función de un conjunto no vacio en un espacio métrico es llamado función acotada, si su rango es un conjunto acotado.

PROBLEMAS RESUELTOS

Sea X un espacio métrico con métrica d. Muestre que d_1 definida por:

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{[1 + d(x,y)]} ,$$

es también una métrica en X

PRUEBA

Veamos en primer lugar que d esta bien definida puesto que $1 + d(x,y) > 0$, con lo cual se dice que d_1 existe...
Mostremos que así definida es un espacio métrico.

I. "$d_1(x,y) \geq 0 \wedge d_1(x,y) \iff x = y$"

a) "$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{[1 + d(x,y)]} \geq 0$"

Por definición $d(x,y) \geq 0$ luego se cumple que:

$$\frac{d(x,y)}{[1 + d(x,y)]} \geq 0$$

b) $d_1(x,y) = 0 \iff x = y$

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{[1 + d(x,y)]} = 0$$

luego $d(x,y) = 0$

así $x = y$

II. "$d_1(x,y) = d_1(y,x)$"

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{[1 + d(x,y)]} = \frac{d(y,x)}{[1 + d(y,x)]} = d_1(y,x),$$ porque d es métrica en X.

III. "$d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y)$"

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{[1 + d(x,y)]} \leq \frac{d(x,z) + d(z,y)}{[1 + d(x,z) + d(z,y)]}$$

$$= \frac{d(x,z)}{[1 + d(x,z) + d(z,y)]} + \frac{d(z,y)}{[1 + d(x,z) + d(z,y)]}$$

Mayorizando tenemos:

$$\frac{d(x,z)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+ d(x,z)}$$

$$\frac{d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \leq \frac{d(z,y)}{1+ d(z,y)}$$

luego:

$$\frac{d(x,z)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

$$= d_1(x,z) + d_1(z,y) \bullet$$

Sea X un conjunto no vacío, y sea d una función real de pares ordenados de elementos de X que satisfacen las 2 siguientes condiciones:

a) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

b) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

Muestre que d es una métrica en X

SOLUCION

Bastaría con demostrar que:

i) $d(x,y) \geq 0$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Para i) $d(x,y) \geq 0$ se debe probar que I) $d(x,y) = 0$ ^ II) $d(x,y) > 0$

I) $d(x,y) = 0$ para $d(x,y) = 0 \iff x = y$

II) $x \neq y \Rightarrow d(x,y) \neq 0 \Rightarrow d(x,y) > 0$ por definición se cumple

Para ii) $d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ $d(y,x) \leq d(y,z) + d(x,z)$

si $x = z$ o   si $y = z$

tenemos $d(x,y) \leq d(z,z) + d(y,x)$ $d(y,x) \leq d(z,z) + d(x,y)$

$d(x,y) \leq d(y,x)$ $d(y,x) \leq d(x,y)$

$\Rightarrow d(x,y) = d(y,x)$ (antisimétrica)

Para iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

por ii) tenemos:

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

$\leq d(x,z) + d(z,y)$ por ii).

Sea X un conjunto no vacío, y sea d una función real de pares ordenados de elementos de X que satisfacen las siguientes tres condiciones:

i) $d(x,y) \geq 0$; $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Una función d con estas tres propiedades es llamado SEUDO METRICO en X. De donde que un espacio métrico es obviamente un Seudométrico.

Sea d un seudométrico en X que define una relación $\sim$ en X así:

$$x \sim y \iff d(x,y) = 0 .$$

Muestre que esta es una relación de equivalencia la cual corresponde a clases de equivalencia que puede ser un espacio métrico en forma natural.

PRUEBA

Probaremos que:

i) $x \sim x$

ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

iii) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z.$

para i) $x \sim x$

$\forall x \in X$ se cumple que $x = x \Rightarrow d(x,x) = 0$

$\Rightarrow x \sim x$

para ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x.$

$x \sim y \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow d(y,x) = 0 \Rightarrow y \sim x$

luego $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

para iii) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$x \sim y \Rightarrow d(x,y) = 0$ (I)

$y \sim x \Rightarrow d(y,x) = 0$ (II)

de I y II tenemos:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

$$d(x,z) \leq 0 + 0$$

$$d(x,z) \leq 0 \iff x \sim z$$

luego:

$$x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z .$$

Sean X_1, X_2, ..., X_n una clase finita de espacios métri-- cos con métrica d_1, d_2, ..., d_n.
Muestre que las funciones d y $\overline{d}$ definidas como siguen son una métrica en el producto $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n$.

$$\text{i) } (\{x_i\}, \{y_i\}) = \max d_i(x_i,y_i)$$

$$\text{ii) } \overline{d}(\{x_i\}, \{y_i\}) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)$$

PRUEBA:

i) $d(\{x_i\},\{y_i\}) \geq 0 \wedge d(\{x_i\},\{y_i\}) = 0 \iff x_i = y_i$

$d(\{x_i\},\{y_i\}) \geq 0$

$d(\{x_i\},\{y_i\}) = \max d_i(x_i,y_i) \geq 0, \ \forall_i$

ya que la máxima distancia es sin duda mayor o igual a cero.

$d(\{x_i\},\{y_i\}) = 0 \iff x_i = y_i$

$d(\{x_i\},\{y_i\}) = \max d_i(x_i,y_i) = 0$

tenemos que:

$$d_i(x_i,y_i) = 0, \ \forall_i$$
$$d_i(x_i,y_i) = 0 \Rightarrow x_i = y_i \ , \ \forall_i$$

$*d(\{x_i\},\{y_i\}) = d(\{y_i\},\{x_i\})$

$$\begin{aligned} d(\{x_i\},\{y_i\}) &= \max d_i(x_i,y_i) \\ &= \max d_i(y_i,x_i) \\ &= d(\{y_i\},\{x_i\}) \end{aligned}$$

$*d(\{x_i\},\{y_i\}) = d(\{x_i\},\{z_i\}) + d(\{z_i\},\{y_i\})$

$$d(\{x_i\},\{y_i\}) = \max d_i(x_i,y_i) \leq \max\ [d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i)]; \ \forall_{zi};\ t_i \leq z_i \leq y_i$$

$$\leq \max d_i(x_i,z_i) + \max d(z_i,y_i) = d(\{x_i\},\{z_i\}) + d(\{z_i\},\{y_i\})$$

ii) $*\overline{d}(\{x_i\},\{y_i\}) = \sum d_i(x_i,y_i) \geq 0$, evidente por que se suman distancias y - por definición:

$$d_i(x_i,y_i) \geq 0$$

$$\overline{d}(\{x_i\},\{y_i\}) = \sum d_i(x_i,y_i) = 0 \Rightarrow d_i(x_i,y_i) = 0 \Rightarrow x_i = y_i,\ \forall_i$$

$$\overline{d}(\{x_i\},\{y_i\}) = d(\{y_i\},\{x_i\})$$

$$\overline{d}(\{x_i\},\{y_i\}) = \sum d_i(x_i,y_i) = \sum d_i(y_i,x_i) = \overline{d}(\{y_i\},\{x_i\})$$

$$\overline{d}(\{x_i\},\{y_i\}) \leq \overline{d}(\{x_i\},\{z_i\}) + \overline{d}(\{z_i\},\{y_i\})$$

$$\overline{d}(\{x_i\},\{y_i\}) = \sum d_i(x_i,y_i) \leq \sum [d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i)]$$

$$\leq d_i(x_i,z_i) + \sum d_i(z_i,y_i)$$

$$= \overline{d}(\{x_i\},\{z_i\}) + \overline{d}(\{z_i\},\{y_i\}).$$

Sea I un subconjunto de la línea real muestre que:

a) I es un intervalo <=>. Este es un vacío y contiene (un) punto entre dos cualquiera

b) Si $\{I_i\}$ es una clase no vacía de intervalos de la línea real tal que $\cap_i I_i$ es un vacío ($\cap_i I_i \neq \phi$); muestre que $\cup_i I_i$ es - un intervalo.

PRUEBA.

Para a)

"$\Longrightarrow$"

Sea I un intervalo y probemos que es no vacío y contiene puntos entre dos cualquiera de estos.

Como I es un intervalo significa que para $a \leq b$ $(a < b)$ - existe un número $\frac{a + b}{2}$ que pertenece a I cuyos extremos - son a y b; por lo tanto este I es no vacío y contiene (un) punto entre a y b.

"$\Longleftarrow$"

Sea I un suconjunto no vacío en la línea real puntos entre dos cualquiera (a y b); mostremos que I es un intervalo.

Como I es no vacío en la línea real.

Sea $a = \inf \{x \in \mathbb{R}: x \in I\}$

$b = \sup \{x \in \mathbb{R}: x \in I\}$

En este caso hay cuatro posibles formas de a y b, ya que estos son los extremos de un subconjunto I de la recta -- real es decir:

Caso 1) $a = -\infty$, $b = +\infty$, Caso 3) $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$

Caso 2) $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$, Caso 4) $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

Para caso 1)

Sea $x \in \mathbb{R}$, como $I \neq \phi$ entonces, Sea $m \in I$ tal que:

i) $x \leq m$ ó ii) $m \leq x$

Si i) $x \leq m$ existe $z \leq x$ tal que $z \in I$, luego $z \leq x \leq m$, entonces $x \in I$.

Si ii) $m \leq x$ existe $p \in I$ tal que $x \leq p$ luego $m \leq x \leq p$, entonces $x \in I$.

Luego como $I \subset \mathbb{R} \wedge \mathbb{R} \subset I$, se concluye que $I = \mathbb{R}$

Para caso 2)

Tenemos que el subconjunto I presenta las siguientes condiciones así:

$$\text{I) si } b \in I \text{ entonces } I =]-\infty, b]$$

$$\text{II) si } b \notin I \text{ entonces } I =]-\infty, b[$$

En I) lo haremos por doble inclusión así:

$$\text{i) } I \subset]-\infty, b] \text{ y}$$

$$\text{ii) }]-\infty, b] \subset I$$

" $\subset$ "

Sea $x \in I$ probemos que $x \in]-\infty, b]$. Como $x \in I$ y $b = \sup I$ entonces $x \leq b$, luego $x \in]-\infty, b]$, así $I \subset]-\infty, b]$

" $\supset$ "

Como $\inf\{x \in \mathbb{R} \mid x \in I\} = -\infty$, entonces x no es el infimo de I, por lo tanto existe $z \in I$ tal que $z \leq x$. Luego $z \leq x \leq b$ así $]-\infty, b[\subset I$.

con $x \in I$.

El mismo caso se presenta en II. Así i) $I \subset]-\infty, b[$,

ii) $]-\infty, b[\subset I$

" $\subset$ "

Sea $x \in I$ probemos que $x \in]-\infty, b[$, como $x \in I \wedge b = \sup I$ - tal que $x < b$ entonces $x \in]-\infty, b[$ así $I \subset]-\infty, b[$.

" $\supset$ "

Sea $x \in]-\infty, b[$ entonces probemos que $x \in I$; si $x \in]-\infty, b[$

entonces $x \leq m$, tal que $m < b$; $m \varepsilon I$; pero x no es el ínfimo ya que el $\inf \{x \varepsilon \mathbb{R} \mid x \varepsilon I\} = -\infty$, entonces existe $z \leq I$ tal que $z \leq x$, luego:

$$z \leq x \leq m, \text{ si } x \varepsilon I \text{ de donde }]-\infty, b[\, \subset I.$$

Se concluye que $I =]-\infty, b[$

Para el caso 3). El subconjunto I presenta las siguientes condiciones I) si $a \varepsilon I$ entonces $I = [a, +\infty[$

II) si $a \notin I$ entonces $I =]a, +\infty[$

En I) lo haremos por doble inclusión

" $\subset$ "

Sea $x \varepsilon I$ y $a = \inf \{x \varepsilon \mathbb{R} : x \varepsilon I\}$ entonces $a \leq x$ así $x \varepsilon [a, +\infty[$ luego $I \subset [a, +\infty[$

" $\supset$ "

Como $\sup \{x \varepsilon \mathbb{R} : x \varepsilon I\} = +\infty$, entonces x no es el sup de I, luego existe $z \varepsilon I$ tal que $x \leq z$, así $a \leq x \leq z$, luego, $[a, +\infty[\, \subset I$ con $x \varepsilon I$.

Similarmente para II como $a \notin I$ tenemos que:

i) $I \subset]a, +\infty[$

ii) $]a, +\infty[\, \subset I$.

" $\subset$ "

Si $x \varepsilon I$ probemos que $x \varepsilon]a, +\infty[$. Como $x \varepsilon I \wedge a = \inf I$ tal que $a < x$, entonces $x \varepsilon]a, +\infty[$ luego $I \subset]a, +\infty[$

" $\supset$ "

Si $x \in \,]a, +\infty[$ probemos que $x \in I$, si $x \in \,]a, +\infty[$ entonces existe $m \leq x$ tal que $m > a$, $m \in I$, pero x no es el supremo de I ya que $\sup\{x \in \mathbb{R}: x \in I\} = +\infty$ entonces existe en $z \in I$ tal que $z \geq x$ luego $m < x < z$, así $x \in I$ de donde que, $]a, +\infty[\, \subset I$.

$$\therefore \quad I = \,]a, +\infty[$$

Caso 4) si $a < \mathbb{R}$ ^ $b \in \mathbb{R}$ se presentan las siguientes características:

I) Si $a \notin I$ ^ $b \notin I$ tenemos $I = \,]a,b[$,

II) Si $a \notin I$ ^ $b \in I$ tenemos $I = \,]a,b]$,

III) Si $a \in I$ ^ $b \notin I$ tenemos $I = [a,b[$,

IV) Si $a \in I$ ^ $b \in I$ tenemos $I = [a,b]$.

En I) por doble inclusión.

" $\subset$ "

Si $x \in I$ probemos que $x \in \,]a,b[$

Si $x \in I$, $a = \inf I$ entonces $a < x$; $b = \sup I$ entonces $b > x$ luego $a < x < b$ entonces $x \in \,]a,b[$ de donde que $I \subset \,]a,b[$.

" $\supset$ "

Si $x \in \,]a,b[$ probemos que $x \in I$. Si $x \in \,]a,b[$ decimos que - $a < x$, pero x no es el sup de I ya que $\sup\{x \in \mathbb{R}: x \in I\} = b$, así $a < b$, entonces $a < x < b$ luego $x \in I$. Por lo tanto:

$$]a,b[\, \subset I$$

Con lo que se concluye que $I =]a,b[$

En II) por doble inclusión.

" $\subset$ "

Si $x \in I$, probemos que $x \in]a,b]$;

Si $x \in I$, $a = \inf I$ entonces $a < x$, $b = \sup I$ entonces $b \geq x$ luego $a < x \leq b$ así $x \in]a,b]$

" $\supset$ "

Si $x \in]a,b]$ probar que $x \in I$; si $x \in]a,b]$ decimos que $a < x$, pero x no es el sup de I ya que $\sup I = b$ entonces $x \leq b$. Luego $x \in I$, así $]a,b] \subset I$.

Con lo que se concluye que $I =]a,b]$

En caso III) por doble inclusión se tiene:

" $\subset$ "

Si $x \in I$ probemos que $x \in [a,b[$

Si $x \in I$, $a = \inf I$ entonces $a \leq x$, $b = \sup I$ entonces $b > x$. Luego $a \leq x < b$, así $x \in [a,b[$

De donde se concluye $I \subset [a,b[$

" $\supset$ "

Si $x \in [a,b[$ probemos que $x \in I$.

Si $x \in [a,b[$ entonces $x \geq a \wedge x < b$, entonces $a \leq x < b$. entonces $x \in I$, luego $[a,b[\subset I$

así se dice que $I = [a,b[$

En caso IV) por doble inclusión

" $\subset$ "

Si $x \in I$ probemos que $x \in [a,b]$

Si $x \in I$; $a = \inf I$ entonces $x \geq a$, $b = \sup I$ entonces $x \leq b$ en todo caso $a \leq x \leq b$, así $x \in [a,b]$. Luego $I \subset [a,b]$

" $\supset$ "

Si $x \in [a,b]$ probemos que $x \in I$.

Si $x \in [a,b]$ entonces $x \geq a \wedge x \leq b$ y tenemos que $a \leq x \leq b$ entonces $x \in I$ luego $[a,b] \subset I$

Se concluye que $I = [a,b]$, y en general se demostró que I es un intervalo.

Para b)

$\{I_i\}$ una clase no vacia de intervalos de la línea real tal que $\cap_i I_i$ es no vacía; muestre que $\cup_i I_i$ es un intervalo

Sea Ω el conjunto de índices, así la clase $\{I_i\}$ $i \in \Omega$ es - no vacía y sean k y l en Ω así. I_k, $I_l \in \{I_i\} i \in \Omega$.

Sea x, z elementos de alguna clase, así: $x \in I_k$, $z \in I_l$.

Cómo $\bigcap_{i \in \Omega} I_i$ es no vacío entonces $m \in \bigcap_{i \in \Omega} I_i$, de donde que $m \in I_k$, $m \in I_l$.

Se puede ver facilmente que si $x \leq y \leq z$, entonces $y \leq m$ ó $m \leq y$.

Si $y \leq m$ tenemos que $x \leq y \leq m$, entonces $y \in I_k$.

Si $m \leq y$ tenemos que $m \leq y \leq z$, entonces $y \in I_1$.

En todo caso $y \in \bigcup_{i \in \Omega} I_i$ con lo cual se muestra que esta -- unión es un intervalo.

Sea X un espacio métrico con métrica d. Si A es un subconjunto de X y x es un punto de X, muestre lo siguiente:

$$\text{i) } A \neq \phi = \; d(x,A) \geq 0$$

$$\text{ii) } d(x,A) = +\infty \Rightarrow A = \phi$$

PRUEBA

Para i) $A \neq \phi \Rightarrow d(x,A) \geq 0$

Si $A \neq \phi$ en X puede suceder:

$$\text{I) } d(x,a) = 0 \Leftrightarrow x = a$$

$$\text{II) } d(x,a) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq a \Rightarrow d(x,a) > 0$$

luego vemos que en ambos casos

$d(x,a) \geqq 0$; si tomamos $\inf \{d(x,a),\ a \in A\} \geq 0$

lo que significa que $d(x,A) \geq 0$

Para ii) $d(x,A) = +\infty \Rightarrow A = \phi$

De nuestra hipótesis

$$d(x,A) = +\infty \Rightarrow d(x,A) = \inf \{d(x,a),\ a \in A\} = +\infty$$

$$\Rightarrow d(x,a) = +\infty$$

$$\Rightarrow d(A) = +\infty$$

y por definición sucede que $A = \phi$ •

Sea X un espacio métrico con métrica d y A un subconjunto de X.

Muestre lo siguiente:

a) $A \neq \phi \Rightarrow d(A)$ es es un no negativo de la <u>extensión</u> de de los reales.

b) $d(A) = -\infty \Leftrightarrow A = \phi$

c) Si A está limitado este es no vacío

PRUEBA

a) $A \neq \phi \Rightarrow \exists\ a_1, a_2, \ldots, a_n$ en A tal que la distancia entre dos pares consecutivos existe también; así: $d(a_1,a_2), d(a_3,a_4), \ldots, d(a_{n-1},a_n)$ y por definición de d esta es no negativa, luego cualquier distancia entre dos pares es no negativa.

$\Rightarrow \sup \{d(a_1,a_2),\ a_1,a_2 \varepsilon A\} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad d(A) \geq 0$

b) $d(A) = -\infty \Leftrightarrow A \neq \phi$

"<u>Definición el conjunto vacío posee diámetro infinito</u>"

c) Si A tiene límite

$\Rightarrow d(A) \geq 0 \quad \Rightarrow A \neq \phi$.

M O D U L O I I

CONJUNTOS ABIERTOS

DEFINICION 2.1

Sea un espacio métrico con métrica d. Si x_0 es un punto de X y r es un número real positivo. Entonces llamaremos ESFERA - ABIERTA $S_r(x_0)$ con centro x_0 y radio r al subconjunto definido por:

$$S_r(x_0) = \{x: d(x,x_0) < r\}$$

Se observa además que $S_r(x_0)$ es no vacío, ya que esta contiene su centro. Lo mismo que una esfera abierta esta en la línea real es un intervalo abierto $(x_0 - r, x_0 + r)$ con x_0 como punto medio y 2r como su ancho.

DEFINICION 2.2

Un subconjunto G de un espacio métrico X es llamado CONJUNTO ABIERTO si dado cualquier punto x en G, existe un número real positivo r tal que $S_r(x) \subseteq G$.

Lo que en otras palabras significa que cada punto de G es el centro de alguna esfera abierta contenida en G.

El siguiente teorema nos orienta sobre el comportamiento de dos conjuntos conocidos, demostrarlo en base a las definiciones dadas.

TEOREMA A

En cualquier espacio métrico X, el conjunto vacío ϕ y el espacio completo X son conjuntos abiertos

PRUEBA

Para mostrar que ϕ es abierto, debemos mostrar que cada punto de ϕ es el centro de una esfera abierta contenida en ϕ ; pero como en ϕ no hay puntos, lo que automaticamente satisface. X es claramente abierto ya que cada esfera abierta centrada en cada uno de sus puntos está contenida en X.

En el siguiente teorema se justifica el objetivo " ESFERA ABIERTA ".

TEOREMA B

En cualquier espacio métrico X, cada esfera abierta es un conjunto abierto.

PRUEBA

Sea $S_r(x_0)$ una esfera abierta en X y

Sea x un punto en $S_r(x_0)$

Ahora bién debemos producir una esfera abierta centrada en x y contenida en $S_r(x_0)$

En este caso se ve que $d(x,x_0) < r$ hagamos $r_1 = r - d(x,x_0)$ un número real positivo. Luego mostremos que:

$$S_{r_1}(x) \subseteq S_r(x_0)$$

Si y es un punto de $S_{r_1}(x)$, tenemos que $d(y,x) < r$, entonces:

$$d(y,x_o) \leq d(y,x) + d(x,x_o) < r + d(x,x_o) = [r-d(x,x_o)] + d(x,x_o) = r$$

se concluye que $d(y,x_o) < r$.

Así se demuestra que y está en $S_r(x_o)$.

Luego se cumple la inclusión $S_{r_1}(x) \subseteq S_r(x_o)$.

TEOREMA C

Sea X un espacio métrico. Un subconjunto G de X es abierto.

<=> este es una unión de esferas abiertas.

PRUEBA

" => "

Asumamos primero que G es abierto y mostremos que este es una unión de esferas abiertas.

Si G es vacío, este es la unión de clases vacías de esferas abiertas.

Si G no es vacío, entonces como este es abierto y cada uno de sus puntos es el centro de una esfera abierta que lo contiene, y esta es la unión de todas las esferas abiertas que lo contienen.

" <= "

Ahora asumamos que G es la unión de una clase S de esferas abiertas. Mostremos que G es abierto.

Si S es vacía, entonces G es también vacío, y por Teorema A, G es abierto.

Supongamos que S no es vacía, entonces G es también no vacío.

Sea x un punto en G. Como G es la unión de esferas abiertas en S, x pertenece a una esfera $S_r(x_0)$ en S. Por Teorema B, x es el centro de una esfera abierta $S_{r_1}(x) \subseteq S_r(x_0)$. Como $S_r(x_0) \subseteq G$, entonces $S_{r_1}(x) \subseteq G$, luego tenemos una esfera abierta centrada en x y contenida en G. Así G es abierta.

Las propiedades fundamentales de los conjuntos abiertos en un espacio métrico son los siguientes resultados.

TEOREMA D

Sea X un espacio métrico. Entonces

1) Cualquier unión de conjuntos abiertos en X es abierto.
2) Cualquier intersección finita de conjuntos abiertos en X es abierta.

PRUEBA

Para 1)

Sea $\{G_i\}$ una clase arbitraria de conjuntos abiertos en X. Debemos mostrar que $G = \cup_i G_i$ es abierta.
Si $\{G_i\}$ es vacía, entonces G es vacía, y por Teorema A, G es abierto.

Supongamos que $\{G_i\}$ no es vacío. Por Teorema C, cada G_i - (es una esfera abierta) es una unión de esferas abiertas; G es la unión de todas las esferas en esta forma y por - otra aplicación del Teorema C. G es abierta.

Para 2)

Sea $\{G_i\}$ una clase finita de esferas abiertas en X. Mostremos que:

$$G = \cap_i G_i \text{ es abierto.}$$

Si $\{G_i\}$ es vacío, entonces G = X; y por Teorema A, G es - abierto.

Supongamos que G_i no es vacío y que $\{G_i\} = \{G_1, G_2, \ldots G_n\}$ para algún entero positivo n. Si ocurre que G es vacío entonces este es vacío por Teorema A. Sumamos que G no es - vacío.

Sea x un punto en G. De donde que x está en cada G_i, y cada G_i es abierto para cada i existe un número real positivo r_i tal que:

$$S_{r_i}(x) \subseteq G_i.$$

Sea $r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$

Este número r es un número real positivo tal que:

$$S_r(x) \subseteq S_{r_i}(x)$$

para cada i, así $S_r(x) \subseteq G_i$ para cada i, y además $S_r(x) \subseteq G$.

De donde que $S_r(x)$ es una esfera abierta centrada en x, y contenida en G, luego G es abierto.

Dentro de una diversidad de conjuntos abiertos estudiaremos también EL INTERIOR DE UN CONJUNTO.

DEFINICION 2.3

Sea X un es pacio métrico arbitrario, y sea A un subconjunto de X.

Un punto en A es llamado PUNTO INTERIOR de A, si este es el centro de alguna esfera abierta totalmente contenida en A.

DEFINICION 2.4

Sea X un espacio métrico cualquiera y sea A un subconjunto de X.

Llamaremos INTERIOR DEL CONJUNTO A, al conjunto formado por todos los puntos interiores de A y lo denotamos por Int (A) ó $\overset{\circ}{A}$, es decir:

$\text{Int}(A) = \{x: x \in A \wedge S_r(x) \subseteq A \text{ para algún } r\} = \overset{\circ}{A}$

Las propiedades básicas de los conjuntos interiores son los siguientes:

1) Int (A) es un subconjunto abierto de A el cual contiene todos los subconjuntos abiertos de A. (Esto es muy frecuente expresarlo diciendo que el interior de A es el más grande subconjunto abierto de A).
2) A es abierto <=> A = Int (A).

3) Int (A) es igual a la unión de todos los subconjuntos abiertos de A.

Estas propiedades son demostradas en los problemas resueltos.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Sea X un e.m y muestre que 2 puntos distintos cualquiera en X, pueden ser separados por esferas abiertos en el si-- guiente caso. Si "x" y "y" son puntos distintos de X, En- tonces existe un par disjunto de esferas abiertas cada - una de las cuales está centrada en los puntos ("x","y").

SOLUCION

Sea $x \neq y$ en X

Si $x \neq y$ entonces $d(x,y)$ $\begin{cases} \text{es mayor que cero} \\ < \\ \text{es menor que cero (no se da def "d")} \end{cases}$

Sea r tal que $0 \quad r \quad d(x,y)$

Si queremos bolas al rededor de $x \wedge y$ de tal forma que - sean disjuntos formemos los radios así:

$$r_1 = \frac{d(x,y)}{3} \wedge r_2 = \frac{d(x,y)}{3}$$

de donde temenos que $B_1(x, r_1)$ y $B_2(x, r_2)$.

Así $B_1(x, r_1) \cap B_2(x, r_2) = \phi$ lo que muestra que son dis juntos también $B_1(x, r_1) \wedge B_2(x, r_2) \subset X$ son abiertos.

2. Sea X un e.m.. Si $\{x\}$ es un subconjunto de X consistente de un punto unitario, muestre que este complemento $\{x\}'$ - es abierto.

Mas generalmente que A' es abierto si A es cualquier sub- conjunto finito de X.

SOLUCION

Sea $\{x\}$ un subconjunto finito de X

Sea $a \in X - \{x\}$ luego por definición de diferencia $a \notin \{x\}$ así que la bola formada al rededor de "a" con un radio,

$$r = \frac{d(a,x)}{2}$$

no contiene algún elemento de $\{x\}$, por lo tanto sólo debe contener sólo puntos de $X - \{x\}$ y $X - \{x\}$ es abierto que no es más que $\{x\}'$.

Nota: de la misma manera se procede en la forma generalizada.

3. Sea X un espacio métrico y $S_r(x)$ la esfera abierta en X - con centro x y radio r; sea A un subconjunto de X, con - díametro menor que r el cual intersecta a $S_r(x)$. Prueba - que $A \subseteq S_{2r}(x)$.

PRUEBA.

Como A intersecta a $S_r(x)$

tenemos que $A \cap S_r(x) \neq \phi$

Sea $a \in A \cap S_r(x)$ y

probemos que $A \subseteq S_{2r}(x)$

Sea $y \in A$

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y)$$

$$d(x,y) \leq r + r \qquad \text{ya que } d(x,a) < r \wedge d(a,y) < r$$

de donde tenemos que:

$$d(x,y) \leq 2\, r$$

Se ve claramente que $A \subseteq S_{2_r}(x)$.

4. Sea X un espacio métrico. Muestre que cada subconjunto de X es abierto, si cada subconjunto de X consiste de un solo punto y es abierto.

PRUEBA

" => "

Sea $x \in X$; $\{x\}$ es abierto por ser subconjunto de X.

" <= "

Sea $A \subset X$; $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ y este es abierto.

5. Sea Y un sub-espacio de un espacio métrico X, y A un subconjunto de un espacio métrico Y.

Muestre que si $A \subset Y$, A es abierto en Y $\Longleftrightarrow$ este es la intersección de Y con un abierto en X.

SOLUCION

Para la demostración es necesario tomar en cuenta que:

I. En cualquier espacio métrico, cada esfera abierta es un conjunto abierto.

II. La unión abierta de conjuntos abiertos es abierta.

Nota:

Una esfera abierta $(B(x,r))$ = Vecindario o entorno $N_r(p)$

" => "

Supongamos que A es abierto en Y.

Para cada $p \varepsilon A$ hay un número positivo r_p tal que se cum-pla que $d(p,q) < r_p$ y $q \varepsilon Y$ => $q \varepsilon A$.

Sea V_p el conjunto de todos los $q \varepsilon X$, tales que $d(p,q) < r_p$ y definamos.

$$G = \bigcup_{p \varepsilon E} V_p .$$

y por I, II tenemos que G así definido es un conjunto abierto de X.

Como $p \varepsilon V_p$ para todo $p \varepsilon A$, se cumple que $A \subset G \cap Y$.

Así elegido V_p tenemos que $V_p \cap Y \subset E$. para todo $p \varepsilon A$.

De modo que $G \cap Y \subset A$. Así, pues $A = G \cap Y$

" <= "

Si G es abierto en X y $A = G \cap X$, cualquier $p \varepsilon A$ tiene un entorno $V_p \subset G$. De donde:

$V_p \cap Y \subset A$, así A es abierto en Y.

6. Pruebe las propiedades básicas de conjuntos interiores dados anteriormente; estas son:

a) Int (A) es un subconjunto abierto de A que contiene a cada subconjunto abierto de A.

(Es decir: el interior de A es el más grande subconjunto abierto de A).

b) A es abierto <=> A = Int (A).

c) Int (A) es igual a la unión de todos los subconjuntos abiertos de A.

PRUEBA

Para a)

Sea B $\subset$ A un abierto basta mostrar que B $\subset$ Int (A).

Sea B un subconjunto $\{B_i\}$ i ε I.

por lo tanto $B \subset \bigcup_{i \varepsilon I} B_i$ = Int (A) $\subset$ A. (usando T. c)

$$\therefore B \subset \mathrm{Int}(A)$$

Para b)

" => "

Int (A) $\subset$ A, como A es abierto entonces A $\subset$ Int (A), luego:

$$A = \mathrm{Int}\ (A)$$

" <= "

A = Int (A), como Int (A) es abierto entonces A es abierto.

Para c)

Sea (A_i) i ε I la familia de todos los abiertos incluidos en A.

Por teorema C la unión de abiertos es abierta.

Y tenemos $\bigcup A_i$ es abierta. Entonces $\underline{\bigcup A_i \subset \mathrm{Int}\ (A)}$.

Sea Int (A) abierto $\Longrightarrow$ Int (A) es un A_i, i ε I y Int (A) $\subset$ A.

$$\therefore \quad \mathrm{Int}\ (A) = \bigcup A_i,\ i\ \varepsilon\ I.$$

Describa el interior de cada uno de los siguientes subconjuntos de (los reales) la línea real:

7. * El conjunto de los enteros.

$$\text{Int } (Z) = \{x \in Z \mid N_r (x) \subset Z\} = \phi$$

* El conjunto de todos los racionales.

$$\text{Int } (Q) = \{x \in Q \mid N_r (x) \subset Q\} = \phi$$

* El conjunto de todos los irracionales.

$$\text{Int } (Q') = \{x \in Q' \mid N_r (x) \subset Q'\} = \phi$$

* $(0,1)$

$$\text{Int } ((0,1)) = \{x \in (0,1) \mid 0 < x < 1\}$$

* $[0,1]$

$$\text{Int } ([0,1]) = \{x \in [0,1] \mid 0 < x < 1\}$$

* $[0,1) \cup \{1,2\}$

$$\text{Int } ([0,1) \cup \{1,2\}) = \{x \in [0,1) \cup \{1,2\} \mid 0 < x < 1\}$$

8. Sean A y B dos subconjuntos de un espacio métrico X, probar lo siguiente.

a) $\text{Int } (A) \cup \text{Int } (B) \subseteq \text{Int } (A \cup B)$

b) $\text{Int } (A) \cap \text{Int } (B) = \text{Int } (A \cap B)$

* Dar un ejemplo de dos conjuntos A y B de la línea real tal que:

$$\text{Int } (A) \cup \text{Int } (B) \neq \text{Int } (A \cup B)$$

PRUEBA

Para a)

Según propiedad a) de interiores, el interior de $A \cup B$ es un subconjunto el cual contiene a cada subconjunto abierto de $A \cup B$ de donde que los abiertos son:

$$A \subset A \cup B \quad \wedge \quad B \subset A \cup B$$

y por propiedad b) de Interior: $\text{Int}\,(A) \subset \text{Int}\,(A \cup B)$

$\text{Int}\,(B) \subset \text{Int}\,(A \cup B)$

luego $\text{Int}\,(A) \cup \text{Int}\,(B) \subseteq \text{Int}\,(A \cup B)$

Para b)

$\left.\begin{array}{l}\text{Int}\,(A) \subset A \\ \text{Int}\,(B) \subset B\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Int}\,(A) \cap \text{Int}\,(B) \subset A \cap B \\ \text{así } \underline{\text{Int}\,(A) \cap \text{Int}\,(B) \subset \text{Int}\,(A \cap B)}\end{array}$

I. Int (A B) c A B c A = Int (A B) c Int (A)

II. Int (A B) c A B c B = Int (A B) c Int (B)

De I y II tenemos que: <u>Int (A B) c Int (A)   Int (B)</u>

luego Int (A)   Int (B) = Int (A B).

Para * Sean $A = (0,1) \wedge B = \ 1,2)$

$\left.\begin{array}{l}\text{Int}\,[(0,1)] = (0,1) \\ \text{Int}\,[\,[1,2)] = (1,2)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Int}\,(0,1) \cup \text{Int}\ 1,2) = (0,2) - \{1\}$

$A \cup B = (0,1) \cup [1,2) = (0,2)$

De donde que $\text{Int}\,(A \cup B) = (0,2)$

$$\therefore (0,2) - \{1\} \neq (0,2)$$

M O D U L O I I I

CONJUNTOS CERRADOS

Estamos estudiando los conjuntos por su naturaleza desde el punto de vista topológico (METRICA)

DEFINICION 3.1

Sea X un espacio métrico con métrica d.
Si A es un subconjunto de X, un punto x en X es llamado - un PUNTO LIMITE de A si cada esfera abierta centrada en x contiene al menos un punto de A diferente de x.

EJEMPLOS A LA DEFINICION

1) Encuentre el punto límite del siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$. $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots,\}$.

   Al aplicarle la definición el punto límite es cero (0) y en efecto es único este punto límite.

2) Razonar si los puntos extremos son puntos límites del intervalo cerrado - abierto $[0,1)$

   * Cero (0) es un punto límite del conjunto y le pertenece.
   * Uno (1) es un punto límite del conjunto y no le pertenece.

Note que en este ejemplo cada número real tal que $0 < x < 1$ es también punto límite.

De la misma manera decimos que el conjunto de los números enteros en la línea real no son puntos límites; sin embargo cada número real es un punto límite de los números racionales.

DEFINICION 3,2

Sea X un espacio métrico y F un subconjunto de el espacio métrico X.

Llamaremos CONJUNTO CERRADO a F en X si este contiene a todos sus puntos límites.

Igual que en el módulo anterior para el conjunto vacío (ϕ) y para X, se expone el siguiente teorema que es también pura aplicación de las definiciones 31 y 3,2 simultáneamente.

TEOREMA A.

En cualquier espacio métrico X, el conjunto vacío y el espacio ENTERO X son cerrados.

PRUEBA

El conjunto vacío no tiene puntos límites, así este los contiene a todos ellos y por tal es cerrado.

El espacio ENTERO X contiene todos los puntos, automáticamente contiene todos sus puntos límites y esto es ser cerrado.

El siguiente teorema caracteriza a los conjuntos cerrados en términos de conjuntos abiertos.

TEOREMA B

Sea X un espacio métrico. Un subconjunto F de X es cerrado si y solamente si su complemento C F es abierto.

PRUEBA

" => "

Asumamos primero que F es cerrado. Mostremos que C F es - abierto.

Si C F es vacío, entonces este es abierto por teorema 2.A,

Supongamos primero que C F no es vacío.
Sea x un punto en C F .
Como F es cerrado y x no está en F, x no es un punto límite de F.

Como x no está en F y x no es un punto límite de F, existe una esfera abierta $S_r(x)$ la cual es disjunta de F.

$S_r(x)$ es una esfera abierta centrada en x y contenida C F. para todo x en C F , así C f es cerrada.

" <= "

Asumamos que C F es abierto y mostremos que F es cerrada. La única forma que F puede fallar para ser cerrada es teniendo un punto límite en C F . Lo cual no puede suceder, porque C F es abierto, donde cada uno de sus puntos es el centro de una esfera abierta disjunta de F, y no es tal - que puede ser un punto límite de F.

DEFINICION 3.3

Si $x_0$es un punto de nuestro espacio métrico X, y r es un número real positovo; llamaremos ESFERA CERRADA $S_r[x_0]$ - con centro x_0 y radio r, al subconjunto de x definido por:

$$S_r[x_0] = \{x: d(x,x_0) \leq r\}$$

Observe que: $S_r[x_0]$ contiene solo su centro cuando r = 0

: $S_r[x_0]$ en la línea real es un intervalo cerrado

: Las esferas abiertas en la línea real son intervalos, hay un intervalo abierto el cual no es una - esfera abierta es decir $(-\infty, +\infty)$

El siguiente teorema justifica el objetivo en la frase ES FERA CERRADA.

TEOREMA C.

En cualquier espacio métrico X, cada esfera cerrada es un conjunto cerrado.

PRUEBA.

Sea $S_r[x_0]$una esfera cerrada en X.

Por el teorema B es suficiente mostrar que su complemento C $S_r[x_0]$ es abierto.

C $S_r[x_0]$ es abierto si es vacío por teorema A.

Supongamos que C $S_r[x_0]$ no es vacío. Luego sea x un punto C $S_r[x_0]$, así $d(x,x_0)$, así $d(x,x_0)$, hagamos $r_1 = d(x,x_0)-r$ un número real positivo.

Tomemos r_1 como el radio de una esfera abierta $S_r(x)$ centrada en x y mostremos que $C\,S_r\,x_0$ es abierto, mostrando que:

$$S_{r_1}(x) \subseteq C\,S_r\,[x_0]$$

Sea y un punto en $S_r\,(x)$ tal que $d(y,x)\quad r$.

En base a esto y el resultado $d(x_0,x) \leq d(x_0,y) + d(y,x)$ vemos que:

$$d(y,x_0) \geq d(x,x_0) - d(y,x) > d(x,x_0) - r_1 = d(x,x_0) - [d(x,x_0)-r] = r$$

y con lo cual se prueba que y estan en $C\,S_r[x_0]$

Concluimos esta sección definiendo dos conceptos adicionales que son usados muy a menudo.

DEFINICION 3.4

Sea X un espacio métrico arbitrario,

Sea A un subconjunto de X

La clausura de A denotada por $\overline{A}$ es la unión de A y el conjunto de todos los puntos límites; es decir:

$\overline{A} = A \cup A'$; A' = conjunto de puntos límites.

Los principales resultados de la clausura son los siguientes.

1) $\overline{A}$ es un superconjunto cerrado de A el cual está contenido en cada superconjunto de A (expresaremos esto diciendo que $\overline{A}$ es el más pequeño superconjunto de A)

2) $\overline{A}$ es cerrado $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$

DEFINICION 3.5

Sea X un espacio métrico y A un subconjunto de X. Un punto en X es llamado PUNTO FRONTERA de A si cada esfera -- abierta centrada en el punto intercepta ambos conjuntos - A y CA.

DEFINICION 3.6

Sea A un subconjunto de nuestro espacio métrico.
A es llamado CONJUNTO FRONTERA si este es el conjunto de todos los puntos frontera.

El concepto anterior posee las propiedades siguientes:

1) La frontera de A es igual $\overline{A} \cap \overline{CA}$

2) La frontera de A es un conjunto cerrado

3) A es cerrado si este contiene su frontera.

PROBLEMAS RESUELTOS

Sea X un espacio métrico y extendiendo el problema 10-1. Pruebe los siguientes resultados:

a) Cualquier punto y conjunto cerrado disjuntos en X pueden ser separados por esferas abiertas en el significado siguiente.

   Si x es un punto y F un conjunto cerrado el cual no contiene a x; entonces existe un par disjunto de conjuntos abiertos G_1 y G_2 tal que $x \in G_1$ y $F \subseteq G_2$.

SOLUCION

Sea x un punto, "F" un conjunto cerrado, "y" un punto de F, tal que si $x \notin F$ entonces $d(x,y) \neq 0$ de donde que

$d(x,F) = r_x > 0$ y $d(y,x) = r_y > 0$

hagamos

$S_x = G(x,\frac{r_x}{3})$, $x \in S_x$ $\wedge$ $S_y = G(y,\frac{r_y}{3})$, $y \in S_y$

Llamemos a $S_x = G_1$ y $G_2 = \cup\{S_y, \forall_y, y \in F\}$

En esta forma los conjuntos G_1 y G_2 cumplen ser abiertos; para G_2 es la unión de abiertos. También $F \subset G_2$ ya que:

$y \in F \Rightarrow y \in S_y \Rightarrow y \in \cup S_y \Rightarrow y \in G_2 \Rightarrow F \subset G_2$

Mostremos ahora que G_1 y G_2 son disjuntos ($G_1 \cap G_2 = \phi$)

Queremos ver que:

$$G_1 \cap G_2 = \phi$$

como $y \in F$ entonces $G_1 \cap S_y = \phi$

Supongamos que $a \in G_1 \cap S_y$ para algún $y \in F$,

entonces $a \in G_1$ y $a \in S_y$ así $d(a,x) < \frac{r_x}{3}$ y $d(a,y) < \frac{r_y}{3}$

se ve que $\frac{r_x}{3} < \frac{r_y}{3}$

de la desigualdad triangular tenemos que

$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < \frac{r_x}{3} + \frac{r_y}{3}$

$\frac{r_y}{3} < \frac{r_x}{3} + \frac{r_y}{3} \leq \frac{r_y}{3} + \frac{r_y}{3}$

$\frac{r_y}{3} \leq \frac{2r_y}{3}$

Contradicción entonces $G_1 \cap G_2 = \phi$

b) Cualquier par disjunto de conjuntos cerrados en X pueden ser separados por conjuntos abiertos en el sentido siguiente: si F_1 y F_2 son conjuntos cerrados disjuntos entonces hay un par de conjuntos abiertos G_1 y G_2 tal que:

$F_1 \subseteq G_1$ y $F_2 \subseteq G_2$ y $G_1 \cap G_2 = \phi$

SOLUCION

Si alguno de los conjuntos F_1 ó F_2 son vacíos por ejemplo; $F_1 = \phi$ entonces ϕ y X seran abiertos disjuntos tales que:

$$F_1 \subset \phi \wedge F_2 \subset X.$$

Supongamos que F_1 y F_2 son no vacíos entonces; si $a \in F_1$, $b \in F_2$, F_1 y F_2 cerrados entonces $d(a,F_2) \neq 0 \Rightarrow d(a,F_2) = r_a > 0$

$d(b,F_1) \neq 0 \Rightarrow d(b,F_1) = r_b > 0$

Sean: $S_a = S(a, \frac{r_a}{3})$, $a \in S_a$

$$S_b = S(b, \frac{r_b}{3}), \quad b \in S_b$$

Así formemos los conjuntos de tal forma que cumplan las - condiciones del teorema.

$G_1 = \cup\{S_a, \forall_a, a \in F_1\} \wedge \quad G_2 = \cup\{S_b, \forall_b, b \in F_2\}$

es decir G_1, G_2 son abiertos porque es la unión de abier- tos también $a \in F_1 \Rightarrow a \in S_a \Rightarrow a \in G_1 \Rightarrow F_1 \subset G_1$

$$b \in F_2 \Rightarrow b \in S_b \Rightarrow b \in G_2 \Rightarrow F_2 \subset G_2$$

Moestremos ahora que $G_1 \cap G_2 = \phi$

supongamos que $G_1 \cap G_2 \neq \phi$ entonces existe $p \in G_1 \wedge p \in G_2$

Sea $d(a,b) = \varepsilon > 0$ entonces $d(a,F_2) = r_a \leq \varepsilon \wedge d(b,F_1) = r_o \leq \varepsilon$

Sean $a \in F_1, b \in F_2$ tal que $p \in S_a \wedge p \in S_b$ entonces $d(a,p) < \frac{r_a}{3} \wedge d(b,p) < \frac{r_b}{3}$

luego $d(a,b) = \varepsilon \leq d(a,p) + d(p,b) < \frac{r_a}{3} + \frac{r_b}{3} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$

$$\varepsilon \leq \frac{2\varepsilon}{3}$$

lo cual no es posible

entonces G_1 y G_2 son disjuntos.

Sea X un espacio métrico y sea A un subconjunto de X. Si x es un punto límite de A, muestre que cada esfera abier- ta centrada en x contiene un infinito número de puntos - distintos de A.

SOLUCION

Sea $S_r(x)$ una esfera abierta centrada en x que solamente contiene un número finito de puntos de A así:

$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ tal que pertenecen a $S_r(x) \cap A$ que son distintos de x y hagamos:

$r = \text{mínimo } \{d(x,P_1), d(x,p_2), d(x,p_3), \ldots, d(x,p_n)\}$

sabemos que el mínimo de un conjunto de números positivos siempre es positivo, luego $r > 0$

Así la esfera abierta $S_r(x)$ no contiene ningún punto p de A, tal que $p \neq x$. Así x no es punto límite de A ><

por lo tanto esta contradicción demuestra el teorema.

Dar un ejemplo de una clase infinita de conjuntos cerra-- dos donde la unión no es cerrada

$$\bigcup_{n\in N} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1[$$

Dar un ejemplo de un conjunto donde

a) sea abierto y cerrado ϕ , $\mathbb{R}$

b) no es cerrado ni abierto $[1 , \infty)$

c) contiene un punto límite el cual no es del conjunto

$(0,1) \cup \{2\}$

d) No contine puntos los cuales no son puntos límites del conjunto $[0,1]$

Describa el interior del conjunto de Cantor ϕ

Pruebe los resultados sobre clausura

a) $\bar{A}$ es un superconjunto cerrado de A el cual está contenido en cada super conjunto cerrado de A.

b) A es cerrado $\Longleftrightarrow A = \bar{A}$

c) $\overline{A}$ es igual a la intersección de todos los superconjuntos cerrados de A.

SOLUCION

Para a) probemos primero que $\overline{A}$ es cerrado así por teorema basta ver que "$\overline{A}$ es cerrado si $(\overline{A})^c$ es abierto.

$x \in (\overline{A})^c \Rightarrow x \notin A$ significa que x no es punto de acumulación de A

$\Rightarrow$ existe S_x tal que $S_x \cap \overline{A} = \phi$

$\Rightarrow S_x \subset (\overline{A})^c$

$\Rightarrow x \in \text{Int}\,((\overline{A})^c)$

$\Rightarrow (\overline{A})^c$ es abierto luego $\overline{A}$ es cerrado

Mostremos ahora que $\overline{A}$ está contenido en cada superconjunto cerrado de A.

" F es cerrado, $A \subset F \Rightarrow \overline{A} \subset F$ "

Como $\overline{A} = A \cup A'$ entonces probemos que $A' \subset F$

Si $x \in A'$ entonces existe $B(x,r)$ tal que

$B(x,r) \cap A \neq \phi$, $\forall\, r > 0$

$B(x,r) \cap F \neq \phi$

entonces $x \in F'$, de donde que $x \in F$; ya que F es cerrado -- luego $\overline{A} \subset F$.

b) A es cerrado $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

" $\Rightarrow$ "

$A' \subset A \Rightarrow A' \cup A \subset A \Rightarrow \overline{A} \subset A$

" <= "

$A = \overline{A} \Rightarrow A = A \cup A' \Rightarrow A' \subset A$

se muestra que $A = \overline{A}$ entonces A es cerrado.

c) $\overline{A}$ es igual a la intersección de todos los superconjuntos cerrados de A (llamemos a A^* = la intersección de todos los superconjuntos cerrado de A) por doble inducción.

" $\subset$ "

$\overline{A} \subset A^*$ se cumple por a) ya que $\overline{A}$ es un cerrado y $A^* = \cap A$ cerrados.

" $\supset$ "

$A^* \subset A^*$ por definición de A^* y por a) se cumple.

Sea X un espacio métrico y A un subconjunto de X.

Probar los siguientes resultados.

a) $(\overline{A})^c = \text{Int}(A^c)$ y

b) $\overline{A} = \{x: d(x,A) = 0\}$

SOLUCION

a) $(\overline{A})^c = \text{Int}(A^c)$ lo probaremos por doble inclusión

" $\subset$ "

$(\overline{A})^c \subseteq (A \cup A')^c \subset (A^c \cap (A')^c) \subset A^c$

luego $\overline{A}^c$ es un abierto contenido en A^c entonces $(\overline{A})^c$ $\text{Int}(A^c)$

" $\supset$ "

$\text{Int}(A^c) \subset (\overline{A})^c$

Sea $x \varepsilon \mathrm{Int}\ (A^c)$ entonces existe $B(x,r)$ tal que $B(x,r) \subset A^c$

luego $x \notin A \cup A'$ entonces $x \varepsilon (a \cup A')^c$ así $x \varepsilon (\overline{A})^c$

con lo cual se conluye a)

b) $\overline{A} = \{x: d(x,A) = 0\}$ por doble inclusión

" $\subset$ "

Supongamos $p \varepsilon X$ y que $d(p,A) = \varepsilon > 0$. Entonces la esfera abierta $S(p, \varepsilon/2)$ de centro p no tiene ningún punto de A de donde $p \notin A'$ consecuentemente $p \notin \overline{A}$ así pues

$$A \subset \{x | d(x,A) = 0\}$$

" $\supset$ "

Supongamos que $d(p,A) = 0$

Entonces toda esfera abierta de centro p contiene al me-- nos un punto de A, por tanto $p \varepsilon A$ ó $p \varepsilon A'$

luego $p \varepsilon A \cup A'$ así pues $p \varepsilon \overline{A}$ entonces

$$\{x: d(x,A) = 0\} \subset \overline{A}$$

se concluye entonces que $\overline{A} = \{x | d(x,A) = 0\}$

Describa la clausura de cada uno de los siguientes subconjuntos de la línea real.

SOLUCION

a) $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}'$

$= \mathbb{Z} \cup \phi$

$= \mathbb{Z}$

b) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

$= \overline{\mathbb{Q}} \cup \overline{\mathbb{I}}$

$= \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

c) $\overline{(0, +\infty)} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\} = [0, +\infty[$

d) $\overline{(-1,0) \cup (0,1)} = \{(-1,0) \cup (0,1)\} \cup \{[-1,0] \cup [0,1]\}$

$= \{(-1,0) \cup (0,1)\} \cup [-1,1]$

$= [-1,1]$

Sea X un espacio métrico y x un punto de X, sea r un número real positivo. Uno de inclina a pensar que la clausura de $S_r(x)$ es $S_r[x]$,. De un ejemplo que muestra que no es necesariamente cierto.

SOLUCION

Sea d definido así:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } y \neq x \end{cases}$$

luego

$$B(x,1) = \{x\}$$

$$\overline{B(x,1)} = \{x\}$$

$$B[x,a] = X$$

ya que:

$$y \in X,\ x \neq y \Rightarrow d(y,x) = 1 \quad , \quad y \in B[x,1]$$

$$x = y \Rightarrow d(y,x) = 0 \quad , \quad y \in B[x,1]$$

Muestre que:

a) La frontera de A es igual a $\overline{A}\cap\overline{A^c}$; $(F_r(A) = \overline{A}\cap\overline{A^c})$

b) La frontera de A es un conjunto cerrado

c) A es cerrado <=> este contiene su frontera

SOLUCION

a) $F_r(A) = \overline{A}\cap\overline{A^c}$

$F_r(A) = \overline{A} - \text{Int}\ (A) = \overline{A}\cap(\text{Int}\ A)^c = \overline{A}\cap\overline{A^c}$

b) $F_r(A)$ es cerrado

basta probar que $(F_r(A))^c$ es abierto porque por el teorema que dice que "La unión arbitraria de abiertos es abierta".

$(F_r(A))^c = (\overline{A}\cap\overline{A^c})^c = (\overline{A})^c\cup(\overline{A^c})^c$

luego $(F_r(A))^c$ es abierto por lo tanto $F_r(A)$ es cerrado.

c) A es cerrado <=> $F_r(A) \subset A$

" => "

Supongamos que A es cerrado entonces $A = \overline{A}$

y como $F_r(A) \subset \overline{A}$, así $F_r(A) \subset A\cup A'$

por lo tanto $F_r(A) \subset A$ ó $F_r(A) \subset A'$

luego $F_r(A) \subset A$.

" <= "

Probemos primero que.

$\overline{A} = \overset{\circ}{A}\cup(\overline{A}\cap\overline{A^c})$ y luego $A = \overline{A}$ lo cual significa que A es cerrado.

$\overline{A} = \overset{\circ}{A}\cup(\overline{A}\cap\overline{A^c})$

$$\text{Int}(A) \cup (A \cap \bar{A}) = (\text{Int}(A) \cup \bar{A}) \cap (\text{Int}(A) \cup \overline{A}^c)$$

$$= \bar{A} \cap X = \bar{A}$$

$\bar{A} = \text{Int}(A) \cup (\bar{A} \cap \overline{A^c}) = \text{Int}(A) \cup F_r(A) \subset \text{Int}(A) \cup A = A$

Luego $A = \bar{A}$

Describa la frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de la linea real.

SOLUCION

Según a) del anterior ejercicio

a) Racionales Q

$$F_r Q = \bar{Q} \cap Q^c$$
$$= (Q \cup Q') \cap \phi$$
$$= \phi$$

b) entonces tenemos $\mathbb{Z}$

$$F_r(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cap \bar{\mathbb{Z}}^c$$
$$= (\mathbb{Z} \cup \phi)$$
$$= \mathbb{Z} \cap \phi$$
$$= \phi$$

c) $[0,1]$

$$f_r([0,1]) = \overline{[0,1]} \cap \overline{[0,1]^c}$$
$$= [0,1] \cap (]\infty,0] \cup [1,\infty]$$
$$= \{0,1\}$$

d) $(0,1)$

$$f_r(0,1) = \overline{(0,1)} \cap \overline{(0,1)^c}$$

$$= [0,1] \cap (]\infty,0] \cup [1,\infty])$$

$$= \{0,1\}$$

M O D U L O   I V

CONVERGENCIA, COMPLEJITUD Y TEOREMA DE BAIRE

Como enfatizamos en la introducción de este trabajo uno - de nuestros principales objetivos en consideración de los espacios métricos es estudiar las sucesiones convergentes en un contexto más general que el análisis clásico.

Los frutos de este estudio son muchos, y entre ellos tenemos la convergencia ordinaria tal como es usada en análisis.

DEFINICION 4.1

Sea X un espacio métrico con métrica d, y sea

$\{X_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$

una sucesión de puntos en X.

Decimos que $\{x_n\}$ es convergente si existe un punto x en X tal que cumple una u otra de los siguientes resultados:

1) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo n_0 tal que $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$

2) Para cada esfera abierta $S_\varepsilon(x)$ centrada en x, existe un número entero positivo n_0 tal que x_n está en $S_\varepsilon(x)$ - para $n \geq n_0$.

   Observese que el resultado uno es una generalización directa de convergencia para las sucesiones de los números y el segundo se puede conseptuar diciendo que ca da esfera abierta centrada en x contiene todos los puntos de la sucesión en cualquier lugar.

Si nosostros confiamos en nuestra capacidad acerca del significado de una sucesión convergente de números reales, la exposición que $\{x_n\}$ es convergente puede igualmente ser definida como sigue:

Existe un punto x en X tal que $d(x_n\ x)n \quad 0$ generalmente simbolizamos esto excribiendo

$$x_n \rightsquigarrow x \qquad y$$

Vervalmente lo expresamos diciendo que "x_n se aproxima a x, o que x_n converge a x"

DEFINICION 4.2

Cada sucesión convergente tiene la siguiente propiedad:

Para cada $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo n_o tal que:

$$m,\ n \geq n_o \Rightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon$$

Pero si $x_n \longrightarrow x$ entonces existe un entero positivo n_o tal que $n \geq n_o \Rightarrow d(x_n,x) < \varepsilon/2$ y de esto tenemos que:

$m,\ n \geq n_o \Rightarrow d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x) + d(x,x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Una sucesión con esta propiedad es llamada SUCESION DE CAUCHY.

La propiedad enunciada anteriormente muestra de una manera clara que toda sucesión convergente es de CAUCHY.

DEFINICION 4.3

Un ESPACIO METRICO COMPLETO es un espacio métrico en el - cual toda sucesión de Cauchy es convergente .

TEOREMA A

Sea X un espacio métrico completo y

Sea Y un subespacio métrico.

Entonces Y es completo <=> es cerrado.

PRUEBA

" => "

Asumamos primero que Y es completo como un subespacio de X y mostremos que es cerrado.

Sea y un punto límite de Y.

Para cada entero positivo n, $S_{1/n}(y)$ contiene un punto y_n en Y.

Es claro que $\{Y_n\}$ converge a y en X y es una sucesión de Cauchy en Y y como Y es completo, y está en Y, Y es además cerrado.

" <= "

Asumamos ahora que Y es cerrado y mostremos que Y es completo.

Sea Y_n una sucesión de Cauchy en Y. Esta es también una sucesión de Cauchy en X, X es también completo, $\{Y_n\}$ converge a un punto x en X.

Mostremos entonces que x está en Y.

Si $\{Y_n\}$ tiene solamente un número finito de puntos distintos, entonces x está en infinitos puntos repetidos distintos estos estan en Y.

En otra forma, si $\{Y_n\}$ tiene infinitos puntos distintos - entonces x es un punto límite del conjunto de puntos límites de la sucesión; este es también un punto límite de Y, y Y es además cerrado, x está en Y.

DEFINICION 4.4

Sea X un espacio métrico y

A un subconjunto cualquiera de X ($A \subset X$)

1) A es DENSO en X si todo punto de X es punto límite de A.

2) $A \subset X$ se dice que es NUNCA DENSO si el interior de su clausura es vacío.

TEOREMA B

Si $\{A_n\}$ es una sucesión de conjuntos nunca denso en un espacio métrico completo X, entonces existe un punto en X el cual no está en ninguno de los A_n's.

PRUEBA

Por la duración de esta prueba, abandonaremos la notación usual de esferas abierta y cerrados.

Puesto que X es abierto y A_1 es nunca denso, hay una esfera abierta S_1 de radio menor que 1 la cual es disjunta -

con A_1.

Sea F_1 la esfera cerrda concentrica cuyo racio es la mi--tad que la de S y considrela en su interior.

Puesto que A_2 es nunca denso, el interior de (F_1) $(\text{Int }(F_1))$ contiene una espera abierta S de radio menor que 1/2 la cual es disjunta con A_2.

Sea F_2 una esfera cerrada concentrica cuyo racio es la mitad de S_2 y considrela en su interior.

Puesto que A_3 es nunca denso, Int (F_2) contiene una esfera abierta S_3 de radio menor que 1/4 lo cual es disjunta con A_3.

Sea F_3 una esfera cerrada concentrica cuyo racio es la mitada de S_3.

Continuando esta forma, obtenemos una sucesión decreciente $\{F_n\}$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X tal que $d(F_n) \longrightarrow 0$. Como X es completo existe un punto x en X el cual está en todos los F_n's. Este punto está claramente también en todos los $S_{n's}$ y además (ya que S_n es disjunto con A_n) este no está en ninguno de los $A_{n's}$.

Otra forma equivalente de expresar el teorema anterior es

TEOREMA B'

Si un espacio métrico completo es la unión de una sucesión de subconjuntos, entonces la clausura de al menos uno de ellos tiene su interior no vacío.

Las dos formas expresadas en teoremas anteriores se refie ren ambas al TEOREMA DE BAIRE.

PROBLEMAS RESUELTOS

1) Si $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son sucesiones en X tal que:

$\{X_n\} \to x$, $\{Y_n\} \to Y$; muestre que $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$.

PRUEBA

Si $\{X_n\}$ una sucesión y $X_n \to x$, tenemos que:
Dado un $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{Z}^+$, tal que para
$n \geq n_1 \to d(x_n,x) < \varepsilon/2$.

Si $\{Y_n\}$ una sucesión y $Y_n \to y$, tenemos que:
Dado un $\varepsilon > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{Z}^+$, tal que para.
$n \geq n_2 \to d(y_n,y) < \varepsilon/2$.

Demostremos que $d(X_n,y_n) \to d(x,y)$, es decir que para ---
$\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que m, $n \geq n_0 \Rightarrow |d(x_n,y_n) - d(x,y)| < \varepsilon$

Lo cual haremos de la siguiente manera:
tomemos $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$
Así tenemos que de $|d(x_n,y_n) - d(x,y)| < \varepsilon$; resulta
a) $d(x_n,y_n) - d(x,y) < \varepsilon$

b) $-\varepsilon < d(x_n,y_n) - d(x,y)$

Para a)

$d(x_n,y_n) - d(x,y) < \varepsilon$ entonces $d(x_n,y_n) < \varepsilon + d(x,y)$ y

por la desigualdad triangular

$$d(x_n,y_n) \leq d(x_n,x) + d(x,y) + d(y_n,y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + d(x,y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$d(x_n,y_n) - d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$; luego $d(x_n,y_n) - d(x,y) < \varepsilon$

Para b)

$-\varepsilon < d(x_n,y_n) - d(x,y)$ entonces $d(x,y) < \varepsilon + d(x_n,y_n)$

por la desigualdad triangular

$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y_n,y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + d(x_n,y_n) + \frac{\varepsilon}{2}$

$d(x,y) - d(x_n,y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =$; luego $d(x,y) - d(x_n,y_n) < \varepsilon$

así $-\varepsilon < d(x_n,y_n) - d(x,y)$

De donde que por a) y b) se conluye

$|d(x_n,y_n) - d(x,y)| < \varepsilon$; bastaba demostrar para que

$d(x_n,y_n) \to d(x,y)$

2) Muestre que una sucesión de Gauchy es convergente <=> - tiene una subsucesión convergente.

PRUEBA

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de Cauchy convergente y sea x el valor de la convergencia; como es de Gauchy tenemos que: dado un $\varepsilon > 0$, existe $n_\circ \in \mathbb{Z}^+$, tal que $m,n \geq n_\circ \to d(x_m,x_n) < \varepsilon/2$

Sea$\{ x_{n_k} \}$ $k \in n$ una subsucesión de $\{x_n\}$ convergente y sea "x" el valor de convergencia.

" => "

Trivial; ya que si hacemos $\{x_n\} = \{x_{n_k}\}$ $k \in N$: como $\{x_n\}$ es Cauchy entonces es convergente luego la subsucesión es también convergente y converge al punto x_0.

" <= "

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy. Mostremos que si $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$ convergente a un punto x entonces $x_n \to x$.

Sea $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $m \geq n_0$ $(m,n \geq n_0)$ entonces $d(x_m,x_n) < \varepsilon/2$, ya que $\{x_n\}$ es de Cauchy.

Por otra parte como $\{x_{n_k}\} \to x$ existe k suficientemente grande tal que $n_k \geq n_0 \to d(x_{n_k},x) < \varepsilon/2$:

Luego como $n \geq n_0$ y la desigualdad triangular se cumple que

$d(x_n,x) \leq d(x_n,x_{n_k}) + d(x_{n_k},x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

De lo cual se muestra que $x_n \to x$.

3) Si $X = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_n$ es el espacio métrico producto y si cada uno de los espacios coordinados $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ es completo muestre que X es completo con respecto a cada uno de las métricas d y $\bar{d}$ definidos así:

$$d(\{x_i\}, \{y_i\}) = \max d_i(x_i,y_i)$$

$$\bar{d}(\{x_i\}, \{y_i\}) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)$$

PRUEBA

La demostración sera hecha solo para dos espacios coordena dos así; sea $X = X_1 \times X_2$; $\{X_n\} = \{(a_n,b_n)\}$ $n \varepsilon \mathbb{N}$, $a_n \varepsilon X_1$ y $b_n \varepsilon X_2$

$\{X_n\}$ $n \varepsilon \mathbb{N}$ es de Cauchy, $n,m > n_0$ para $\varepsilon > 0$ ó lo que es

$d((a_n,b_n), (a_m,b_m)) = d_1(a_n,b_n) + d_2(b_n,b_m) < \varepsilon$

entonces $d_1(a_n,a_m) < \varepsilon$, $n, m > n_0$ y $\varepsilon > 0$ y

$d_2(b_n,b_m) < \varepsilon$, $n, m > n_0$ y $\varepsilon > 0$

con lo cual se ve que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son de Cauchy luego

$\{a_n\}$ $n \varepsilon \mathbb{N}$ de Cauchy, existe $a \varepsilon X_1$ tal que $a_n \to a$ (por ser X_1 completo)

$\{b_n\}$ $n \varepsilon \mathbb{N}$ de Cauchy, existe $b \varepsilon X_2$ tal que $b_n \to b$ (por ser X_2 completo)

Ahora probemos que $(a_n,b_n) \to (a,b)$

Dado $\varepsilon > 0$

Como $a_n \to a$, existe $n_1 \varepsilon \mathbb{N}$ tal que $n > n_1 \Rightarrow d_1(a_n,a) < \frac{\varepsilon}{2}$

Como $b_n \to b$, existe $n_2 \varepsilon \mathbb{N}$ tal que $n > n_2 \Rightarrow d_2(b_n,b) < \frac{\varepsilon}{2}$

Sea $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$; entonces para $n \geq n_0$

$d_1(a_n,a) + d_2(b_n,b) < \varepsilon$; es decir $d((a_n,b_n), (a,b)) < \varepsilon$

luego converge y es de Cauchy

4) Mueste que un conjunto es nunca denso <=> su compemento es siempre denso.

PRUEBA

Sea X un eapacio métrico y sea $A \subset X$ nunca denso ($\mathring{\overline{A}} = \phi$) demostremos que CA es denso en X.

Si $x \in X$, existe $\delta > 0$ tal que

$B(x,\delta) \cap CA = \phi$

$\Rightarrow B(x,\delta) \subset A$

$\Rightarrow x \in \mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}}$ (I)

ya que $A \subset A' \cup A = \overline{A} \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}}$
se sigue de (I) que $x \in \mathring{\overline{A}}$

luego $\mathring{\overline{A}} \neq \phi$ (contradice que es nunca denso)

por lo tanto $x \in CA$; entonces $\overline{CA} = X$

M O D U L O V

MAPEOS CONTINUOS

En la sección previa extendemos la idea de convergencia al contexto de un espacio métrico general. Haremos lo mismo - para la continuidad.

DEFINICION 5.1

Sean X y Y espacio métricos con métrica d_1 y d_2 y sea f un mapeo de X en Y.

Se dice que f es continua en un punto x_0 en X si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

1) Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$d_1(x,x_0) < \delta \Rightarrow d_2\,(f(x),\ f(x_0)) < \varepsilon$$

2) Para cada esfera abierta $S\varepsilon\,(f(x_0))$ centrada en $f(x_0)$ existe una esfera abierta $S\ (x_0)$ centrada en x_0 tal que

$$f(S\ \ (x_0)) \subseteq S\varepsilon\,(f(x_0))$$

Debe hacerce notar que la primera condición generaliza la definición elemental dada en la introducción de el - presenta trabajo, y la segunda traduce la primera al - lenguaje de esferas abiertas.

Nuestro primer teorema expresa continuidad a un punto - en términos de las sucesiones, los cuales convengen a - un punto.

TEOREMA A

Sean X y Y espacios métricos y f un mapeo de X en Y, Entonces f es continua en x_0 si y sólo si $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x) \to (x_0)$

PRUEBA

Asumamos que f es continua en x_0.

Si $\{X_n\}$ es una sucesión en X tal que $x_n \to x_0$, debemos mostrar que $f(x_n) \to f(x_0)$.

Sea $S\varepsilon\,(f(x_0))$ una esfera abierta centrada en $f(x_0)$,

Según nuestra hipótesis existe una esfera abierta $S_\delta(x_0)$ - centrada en x_0 tal que:

$$f(S_\delta(x_0)) \subseteq S\varepsilon\,(f(x_0))$$

Puesto que $x_n \to x_0$, todos los x_n's a partir de cierto índice n_0 caen en $S_\delta(x_0)$. De donde $f(S_\delta(x_0)) \subseteq S\varepsilon\,(f(x_0))$, todos los $f(x_n)$'s a partir de cierto índice n_0 caen en - $S_\delta(x_0)$.

Luego $f(x_n) \to f(x_0)$

" <= "

Para probar la otra parte de nuestro teorema; asumamos que f no es contínua en x_0, y mostremos que $x_n \to x_0$ no inplica que $f(x_m) \to f(x_0)$.

Por lo asumido, existe una esfera abierta $S\varepsilon\,(f(x_0))$ con - la propiedad que la imagen bajo f de cada esfera abierta - centrada en x_0 no la contiene.

Considere la sucesión de esferas abiertas así:

$S(x_\circ)$, $S_{1/2}(x_\circ)$ $S_{1/3}(x_\circ)$, ..., $S_{1/n}(x_\circ)$, ..., se forma una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in S_{1/n}(x_\circ)$ y $f(x_n) \notin S_\varepsilon(f(x_\circ))$ es claro que x_n converge a $x_\circ$ y que $f(x_n)$ no converge $f(x_\circ)$

DEFINICION 5.2

Un mapeo de un espacio métrico en otro espacio se dice que es contínuo si este es contínuo en cada uno de los puntos del dominio.

Con la definición 5.2 y el teorema anterior resulta una - concecuencia inmediata el siguiente enunciado.

Sean X y Y espacios métricos y f un mapeo de X en Y. Entonces f es contínua si $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x_\circ)$

Con lo cual se dice también que los mapeos contínuos son - aquellos que envian sucesiones convergentes a sucesiones - convergentes en otros palabras son aquellos que preservan la convergencia.

Nuestro sigueinte teorema caracteriza los mopeos continuos en términos de esferas abiertas.

TEOREMA B

Sean X y Y espacios métricos y f un mopeo de X en Y.

Entonces f es contínua $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(G)$ es abierto en X. Siempre que G sea abierto en Y.

PRUEBA

" => "

Primero asumamos que f es contínua. Si G es un conjunto - abierto en Y, debemos mostrar que $f^{-1}(G)$ es abierto en X. $f^{-1}(G)$ es abierta si es vacía, así podemos asumir que esta no es vacía.

Sea x un punto en $f^{-1}(G)$. Entonces f(x) está en G, y como G es abierto en Y, existe una esfera abierta S (f(x)) centrada en f(x) y contenida en G.

Por la definición de continuidad existe una esfera abierta $S_\delta(x)$ tal que $f(S_\delta(x)) \subseteq S\varepsilon(f(x)) \subseteq G$ luego:
$f(S_\delta(x)) \subset G$, se sabe que $S_\delta(x) \subset f^{-1}(G)$, por lo tanto $f^{-1}(G)$ - es abierta.

" <= "

Ahora asumamos que $f^{-1}(G)$ es abierto siempre que G lo sea, y mostremos que f es contínua.

Mostremos que f es contínua en un punto arbitrario x en X.

Sea S (f(x) una esfera abierta centrada en f(x).

Esta esfera abierta es un conjunto abierto, así su imagen inversa es un conjunto abierto el cual contiene a x. Por - lo tanto existe una esfera abierta $S_x(x)$ la cual estan contenido en la imagen inversa.

Es claro que $f(S\delta_{(x)})$ está contenida en $S\varepsilon(f(x))$, así f -

es contínua en x.

Finalmente como x se tomó siendo un punto aritrario en X, entonces f es contínua.

DEFINICION 5.3

Si X y Y son espacios métricos con métrica d_1 y d_2, entonces un mapeo de X en Y se dice que es uniformemente contínuo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$d_1(x,x') < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1) Sean X y Y eapacios métricos y f un mapeo de X a Y. Si f es una función constante, muestre que f es contínua. Use esto para mostrar que un mopeo contínuo no necesita tener la propiedad que la imagen de cada conjunto abierto es abierto.

PRUEBA

Sea $f: A \subset X \to Y$ tal que $x \to y = f(x) = b$, b = constante y mostremos que f es contínua es decir que para $\varepsilon < 0$ encontremos $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta \to d(f(x),f(y)) < \varepsilon$. Lo que es equivalente a probar que f es contínua en $a \in A$, si a cada entorno T de f(a) corresponde un entorno S de a tal que

$$f(s \cap a) \subset T.$$

es decir que para todo $x \in S \cap A$ entonces $f(x) \in T$.
Como f es una función constante tal que para todo $x,y \in A \Rightarrow f(x) = f(y) = b$ y en este caso cualquier entorno de un punto en A $(a \in A, \forall_a)$ satisface la definición sin importar cual sea el entorno de $f(a) = b$, se ve de inmediato que f es contínua en a, para a en A.

Ahora mostremos la segunda parte para todo conjunto G, así "f es contínua la inagen recíproca $(f^{-1}(G))$ de todo conjunto abierto G es también abierto"

Como $f(x) = b$, para todo $x \in X$; luego $f^{-1}(G)$ es vacío (ϕ) -

si $a \notin G$ y es X si $a \in G$; esto es para todo conjunto abierto G. En ambos casos $f^{-1}(G)$ es abierto puesto que ϕ y X son abiertos. (Teorema, A Módulo II). Se ve claro en nuestro caso que ϕ y X son cerrados por Teorema A, Módulo III.

2) Sea X un espacio métrico con métrica d y sea x_o un punto fijo en X. Muestre que la función real f_{x_o} definida en X por $f_{x_o}(x) = d(x,x_o)$ es contínua.

PRUEBA

De la definición 5.1

f_{x_o} es contínua en Y si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f_{x_o}(x), f_{x_o}(y)) < \varepsilon$

Veamos que $d(f_{x_o}(x), f_{x_o}(y)) = d(d(x,x_o), d(y,x_o)) < \varepsilon$ y encontremos ese $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta$, así:

$d(f_{x_o}(x), f_{x_o}(y)) = d(d(x,x_o), d(y,x_o))$, como f_{x_o} es una función real

$|f_{x_o}(x) - f_{x_o}(y)| = |d(x,x_o) - d(y,x_o)| \leq d(x,y) < \varepsilon$

Si $d(x,y) < \varepsilon$ entonces $d(f_{x_o}(x), f_{x_o}(y)) < \varepsilon$, luego $\delta = \varepsilon$ tal que:

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f_{x_o}(x), f_{x_o}(y)) < \varepsilon$$

3) Sean X y Y espacios métricos y A un subconjunto no vacío de X.

Si f y g son mapeos contínuos de X en Y tal que:

$f(x) = g(x)$, para cada x en A, muestre que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in \overline{A}$

PRUEBA

Sean f y g mapeos contínuos de X en Y tal que $f(x) = g(x)$, para cada $x \varepsilon A$, mostremos que $f(x) = g(x)$ para cada $x \varepsilon \overline{A}$. Hagamos el conjunto $B = \{x \varepsilon \overline{A}: f(x) = g(x)\}$ cerrado ya que $(\overline{A},d)$ es cerrado. Pero como $\overline{A}$ es cerrado entonces B es cerrado en (X,d) porque este depende de una métrica inducida.

Como f, g son contínuas en $A \subset X$ a Y tal que $f(x) = g(x)$ entonces $A \subset B$ de donde que $\overline{A} \subset B$ y como B lo hemos definido - cerrado y en todo caso $B \subset \overline{A}$, luego tenemos pues que $B = \overline{A}$.

Así se cumple $f(x) = g(x)$ para cada $x \varepsilon \overline{A}$.

4) Sean X y Y espacios métricos y f un mapeo de X en Y. Muestre que f es contínua <=> $f^{-1}(F)$ es cerrada en X; - siempre que: F sea conjunto cerrado en Y <=> $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

PRUEBA

Este teorema se resume diciendo que, si F es un conjunto - cerrado en Y tenemos:

a) f es contínua <=> $f^{-1}(G)$ es cerrada en X.

b) f es contínua <=> $f(\overline{A}) \subset f(A)$

Lo cual probaremos por medio de la equivalencia en las siguientes propiedades:

1) f es contínua en A.

2) si F es un conjunto abierto en Y entonces $f^{-1}(F)$ es -- abierto en A.

3) Si F es un conjuto cerrado en Y entonces $f^{-1}(F)$ es cerra-

do en A.

4) Para todo conjunto S con $S \subset A$ se cumple que:

$F(A \cap \overline{S}) \subset \overline{f(S)}$

Estableceremos la equivalencia probando la cadena de implicaciones siguiente:

$$1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$$

" 1 => 4 "

Sea f contínua en A, tomemos $S \subset A$. Si S es vacío la inclusión se verifica trivialmente ya que:

$A \cap \overline{S}$, $f(A \cap \overline{S})$ y $\overline{f(S)}$ son vacíos.

Así supongamos que S no es vacío entonces existe $x \in A \cap \overline{S}$, de donde que $x \in \overline{S}$ por lo tanto existe $\{x_n\}$ en S tal que $x_n \to x$ (Teorema A, módulo V). Pero f es contínua en $x \in \overline{S} \cap A$ lo cual implica que $f(x_n) \to f(x)$ (por Teorema A, módulo V) y de nuevo por una aplicación del problema 3, módulo V tenemos que $f(x) \in \overline{f(S)}$ si esto se cumple para todo $x \in A \cap \overline{S}$, entonces es equivalente a decir que $f(A \cap \overline{S}) \subset \overline{f(S)}$.

" 4 => 3 "

Para todo S en $S \subset A$ tal que $f(A \cap \overline{S}) \subset \overline{f(S)}$ y probemos que cuando F en Y. Se tiene que $f^{-1}(F) \subset A$ es cerrado.

Sea F un conjunto cerrado en Y. Se tiene entonces que:

$f^{-1}(F) \subset A$ y por 4) tenemos:

$f[A \cap \overline{f^{-1}(F)}] \subset \overline{f[f^{-1}(F)]} \subset \overline{F} = F$ por lo tanto también

$A\cap\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F)$ pero $f^{-1}(F) = A\cap f^{-1}(F) \subset A\cap\overline{f^{-1}(F)}$, - luego $f^{-1}(F) = A\cap\overline{f^{-1}(F)}$ y por Teorema c módulo III, tenemos que $f^{-1}(F)$ es cerrado en A.

" 3 => 2 "

La imagen inversa, bajo f, de todo conjunto cerrado en F - es cerrada en A. Probemos que esta es abierta si F es abierta.

Tenemos F un conjunto abierto en Y; luego Y - F es cerrado en Y por Teorema B módulo III, por una aplicación de hipótesis $f^{-1}(Y-F)$ es cerrda en A, y aplicando de nuevo el Teorema B del módulo III tenemos $f^{-1}(F)$ es abierta en A.

" 2 => 1 "

Nuestra hipótesis dice que, la imagen inversa bajo f, de - todo conjunto abierto en y es abierta en A y probemos que f es cotínua en A.

Tomemos un punto $x \in A$ cualquiera y sea F un entorno de - $f(x)$.

Como F es abierto en Y y $f^{-1}(F)$ es abierto en A y sea S un conjunto abierto en X, tal que $f^{-1}(F) = S\cap A$ de donde se - concluye que $f(S\cap A) \subset F$, y es un entorno de x, ya que; $x \in f^{-1}(F) = S\cap A$,

En síntesis se obtiene que f es, por definición contínua - en el punto x y, como este es cualquiera, f es contínua en

A.

5) Muestre que cualquier mapeo de el espacio métrico definido por:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

es contínuo.

PRUEBA

Sea $\varepsilon > 0$, encontremos $\delta > 0$ tal que

$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

veamos que si tomamos $0 < \delta < 1$ es suficiente ya que

$d(x,y) < \delta \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow f(x) = f(y)$

$\Rightarrow d(f(x), f(y) < \varepsilon$

luego f es contínua.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

INTRODUCTION TO TOPOLOGY AND MODERM ANALISIS
GEORGE F. SIMMONS.

TOPOLOGÍA DE ESPACIOS MÉTRICOS
IGNACIO L. IRIBARREN

NOTAS DE TOPOLOGÍA GENERAL
MAURICIO MARROQUIN ESCOTO

TOPOLOGÍA GENERAL
SEYMOUR LIPSCHUTZ, Ph. D.