UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES EN ESPACIOS DE BANACH

Trabajo de Graduación previo a la opción
del Título de
LICENCIADO EN MATEMATICA

Presentado por

JULIO CESAR GUILLEN CARDONA

SEPTIEMBRE 1979
SAN SALVADOR - EL SALVADOR - CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR a.i. : Lic. JOSE LUIS ARGUETA ANTILLON

SECRETARIO a.i. : Lic. OSCAR ARMANDO ACEVEDO VELASQUEZ

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO a.i. : Ing. JOSE FRANCISCO AGUIRRE TOVAR

SECRETARIO a.i. : Ing. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

DIRECTOR DEL DEPTO. : Ing. CARLOS MAURICIO CANJURA

TRABAJO DE GRADUACION

ASESOR : Ing. CARLOS MAURICIO CANJURA

dedicado a

Astrid Lindo

I N D I C E

INTRODUCCION

El estudio de las Ecuaciones Diferenciales ha entusiasmado a muchos profesores y estudiantes de Matemática, muestra de la anterior afirmación es que en el transcurso de este año son dos los trabajos de graduación que tocan este tema y existen apuntes inéditos de profesores del Departamento de Matemática sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Actualmente los cursos de Ecuaciones Diferenciales están dirigidos a estudiantes de segundo y tercer año; por tal razón el fundamento teórico que contienen es mínimo, reduciéndose los cursos al conocimiento y dominio de métodos de resolución de Ecuaciones Diferenciales.

Se ve entonces la necesidad de contar con una nueva forma de estudiar las Ecuaciones Diferenciales que consista en un estudio, a un nivel superior del actual, en el cual se presenten las Ecuaciones Diferenciales como un ente sólidamente estructurado cuyos componentes estén lógica y formalmente ligados.

En el presente trabajo se propone una manera de tratar las Ecuaciones Diferenciales, con los lineamientos antes dados, inspirada en las obras de Henri Cartán y Jean Dieudonné.

El trabajo se divide en cuatro capítulos:

1. Espacios de Banach
2. Descomposición de Jordán
3. Ecuaciones Diferenciales. Teoremas Fundamentales
4. Ecuaciones Diferenciales Lineales

En los tres primeros se da una base teórica que nos garantizará nuestra manera de proceder al resolver ecuaciones diferenciales lineales y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Es justo reconocer que la fuente principal de motivación para hacer este trabajo fue un curso sobre Ecuaciones Diferenciales impartido por Carlos Canjura, profesor que fue capaz de cambiar un poco el tradicional esquema de estudio de esta materia; agradezco al mismo tiempo la valiosa asesoría de Carlos.

Hago extensivo mi reconocimiento y agradecimiento a los eternos anónimos: la mecanógrafa y el impresor.

San Salvador, Septiembre de 1979

1	ESPACIOS DE BANACH

1.0 INTRODUCCION

Como es de esperarse, un trabajo sobre "Ecuaciones Diferenciales en Espacios de Banach", debe comenzar con un breve estudio acerca de - los Espacios de Banach. Muchos de los resultados que aparecen en este - Capítulo son conocidos ampliamente; pero, con intención de obtener al final de los cuatro capítulos un trabajo más completo, con más unidad, se dedica esta primera parte a hacer un recuento de los resultados más importantes, en nuestro caso, de los Espacios de Banach.

1.1 NORMAS SOBRE UN ESPACIO VECTORIAL E.

Cuando hablemos de un espacio vectorial E entenderemos siempre - un espacio vectorial (de dimensión finita o infinita) sobre un cuerpo K que será $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Cuando no se especifique el cuerpo de escalares, - entenderemos que las definiciones y los resultados son válidos para ambos.

Un espacio vectorial complejo (cuando $K = \mathbb{C}$) se puede considerar también como un espacio vectorial real ($K = \mathbb{R}$) restringiendo los escalares a $\mathbb{R}$; en este caso decimos que E posee la estructura subyacente de espacio vectorial real. Si E tiene dimensión n, su estructura subyacente tiene dimensión 2n.

Para ilustrar la afirmación anterior, consideremos el caso $n = 2$:

Sea $x \in E$, entonces existen α_1 y $\alpha_2 \in \mathbb{C}$ tales que :

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

luego :

$$x = (a_1 + b_1 i)e_1 + (a_2 + b_2 i)e_2$$

$$x = a_1 e_1 + i b_1 e_1 + a_2 e_2 + i b_2 e_2$$

es decir, $\{ e_1 , ie_1 , e_2 , ie_2 \}$ es una base del espacio subyacente de E .

1.1.1 Definición

Sea E un espacio vectorial sobre K .

Una función $\| \ \|$,

$$\| \ \| : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

Se llama una norma si :

N1) $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$

N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, para todo $x \in E$ y todo escalar λ

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; $x, y \in E$

N2 se llama propiedad de homogeneidad, y N3, desigualdad triangular.

Cuando sea necesario especificar el espacio vectorial usaremos : la notación $\| \ \|_E$.

1.1.2 Definición

Un espacio vectorial E sobre K se denomina espacio vectorial normado sobre K (EVNK) si está dotado de una norma.

Por comodidad, se dirá "espacio normado" y se denotará E ó - (E; $\| \ \|$) cuando sea necesario especificar la norma.

1.1.3 Ejemplos de Espacios Normados

a) i) $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$, con $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

ii) $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$, siendo $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_2 = \sup_{i=1,2,\ldots,n} |X_i|$

iii) $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_3)$, $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right\}^{1/2}$

(norma euclídea)

b) Sea $X = [0,1]$, $C(X) = \{ f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f$ es contínua $\}$

$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$,

el par $(X, \| \ \|)$ es un espacio normado .

c) Sea $M(n;K)$ el conjunto de matrices cuadradas de orden n con coeficientes en K ; sea

$A \in M(n;K)$, $A = (a_{ij})_{n\times n}$; $\| \ \|$ definida por :

$$\|A\| = \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right]^{1/2} ;$$

el par $(M(n;K), \| \ \|)$ es un espacio normado .

1.1.4 Definición

Sea E un conjunto. Una función d,

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_o^+$$

Se llama una métrica si : para todos X, Y, Z $\in$ E ,

M1) $d(X,Y) = 0$ ssi $X = Y$

M2) $d(X,Y) = d(Y,X)$

M3) $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$

Al par (E d) se le llama espacio métrico.

Comparando 1.1.4 con 1.1.1 se notan muchas semenjanzas; éstas tienen su razón de ser debido al siguiente lema:

1.1.5 Lema

Sea E un EVNK . Entonces $d(X,Y) = \| X - Y \|_E$ es una métrica sobre E . Se le llama métrica inducida por la norma $\| \ \|_E$.

El lema anterior afirma lo siguiente:

- Todo espacio normado es un espacio métrico y, por lo tanto, un espacio topológico.
- La norma de un vector x, $\|x\|$, coincide con su distancia a cero, es decir

$$\|x\| = d(x,0)$$

1.1.6 Observación

i) Todo espacio normado E es, de modo natural, un espacio topo lógico; es decir, en E tienen sentido los conceptos de conjuntos abiertos, cerrados, límites, etc.. Se llama a la Topología obtenida, a partir de la métrica inducida, topología natural.

ii) El recíproco del lema 1.1.5 no es cierto, es decir no todo espacio métrico es normado. En efecto, consideremos un espacio vectorial E sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ con la métrica discreta:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Se tendría entonces para todo $x \neq 0$, $\lambda = 0$

$d(\lambda x, 0) = 1$, mientras que

$|\lambda| d(x,0) = |\lambda|$

y se tendría para $|\lambda| \neq 1$,

$$\|\lambda x\| = d(\lambda x, 0) \neq |\lambda| \, d(x,0) = |\lambda| \, \|x\|$$

Conocidos ya los elementos que definen a los espacios vectoriales normados, pasemos a tratar un caso particular de éstos : los espacios de Banach .

1.1.7 Definición

Sea E un EVNK . Una función $Q : \mathbb{N} \longrightarrow E$ se llama una sucesión sobre E .

Notación: $Q \equiv (Q(n))_{n \in \mathbb{N}}$, se usa también $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$; o sea, $Q(n) = x_n$, $\forall n$.

Se dice que la sucesión Q es convergente en E si existe $x_o \in E$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_o$, $\| x_n - x_o \| < \varepsilon$.
En este caso escribimos $x_o = \lim_{n \longrightarrow \infty} Q(n)$.

Llamamos a Q una sucesión de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_o \in \mathbb{N}$ t.q. $(m \geq n_o$ y $n \geq n_o) \Rightarrow \| x_m - x_n \| < \varepsilon$, es decir ,

$$\lim_{\substack{n \longrightarrow \infty \\ m \longrightarrow \infty}} \| x_m - x_n \| = 0$$

El espacio E es llamado espacio de Banach si es completo con respecto a la métrica deducida de la norma ; en otras palabras, si toda sucesión de Cauchy es convergente en E .

1.1.8 Ejemplos de Espacios de Banach

a) Consideremos el espacio numérico real $\mathbb{R}^n$ y las normas dadas en el ejemplo 1.1.3 - a .
$\mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach . Lo mismo ocurre con $\mathbb{C}^n$. (En 1.4.5 se trata nuevamente este caso) .

b) Sea X un espacio topológico. Sea $C_b(X)$ el conjunto de todas las aplicaciones continuas y acotadas de X a $\mathbb{R}$. - $C_b(X)$ con la norma $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$ es un espacio de Banach .

Demostración

a) El resultado es inmediato a partir del hecho siguiente: Una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$ es convergente si y sólo si las sucesiones coordenadas convergen en $\mathbb{R}$.

b) i) $C_b(X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Como $C_b(X)$ está incluido en el conjunto de las funciones de X a $\mathbb{R}$, y se cumple el cierre para la suma de funciones continuas acotadas y el producto por un escalar, se sigue que $C_b(X)$ es un espacio vectorial.

ii) $C_b(X)$ es un EVN $\mathbb{R}$:

definamos la aplicación $\|\ \|$:

$$\|\ \| : C_b(X) \longrightarrow \mathbb{R}_o^+$$
$$f \longmapsto \sup_{x\in X} |f(x)|$$

$\|\ \|$ así definida es una norma :

N 1) $\|f\| = 0$ ssi $\sup_{x\in X} |f(x)|$

ssi $f(x) = 0 \ , \ \forall x \in X$

ssi $f \equiv 0$

$$N2)\quad \|\lambda f\| = \operatorname*{Sup}_{x\in X} |(\lambda f)(x)|$$

$$= |\lambda| \operatorname*{Sup}_{x\in X} |f(x)|$$

$$= |\lambda|\ \|f\|$$

$$N3)\quad \|f+g\| = \operatorname*{Sup}_{x\in X} |(f+g)(x)|$$

$$= \operatorname*{Sup}_{x\in X} |f(x)+g(x)|$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{x\in X} \left\{ |f(x)| + |g(x)| \right\}$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{x\in X} |f(x)| + \operatorname*{Sup}_{x\in X} |g(x)|$$

$$\leq \|f\| + \|g\|$$

iii) $C_b(X)$ es un espacio de Banach .

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C_b(X)$. Entonces, $\forall\ \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n_0$ y $n \geq n_0$ implican que $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$; es decir ,

$$(m \geq n_0 \text{ y } n \geq n_0) \Longrightarrow \operatorname*{Sup}_{x\in X} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon\ ,$$

o sea , $\forall\ x \in X$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$(m \geq n_0$ y $n \geq n_0) \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$,

por lo tanto, $\forall\ x \in X$, la sucesión $(f_n(x))$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$; además, por ser $\mathbb{R}$ de Banach, existe en $\mathbb{R}$ el límite $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$

Sea f tal que $x \in X$, $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

Hay que probar que $f \in C_b(X)$.

a) f es continua .

Se tiene que $\forall\, x \in X$, $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, $\forall\, m,n \geq n_o$ haciendo tender n a infinito se obtiene: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_o$; o sea, existe convergencia uniforme de funciones continuas; así, f es continua .

b) f es acotada .

Sea $x \in X$,

sea $\varepsilon > o$, existe entonces $n_o \in \mathbb{N}$ t.q.

$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_{n_o}(x)| +$

$+ |f_{n_o}(x)| < \varepsilon + \varepsilon + M$.

Las desigualdades $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, $|f_{n_o}(x)| < M$ y

$|f_n(x) - f_{n_o}(x)| < \varepsilon$

Se siguen de que $f_n \longrightarrow f$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y que para n_o, $|f_{n_o}(x)| < M$.

Finalmente, se debe probar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en $C_b(X)$. Por ser $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy se tiene : dado $\varepsilon > o$, $\exists\, n_o \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall\, m, n \geq n_o$ $\| f_m - f_n \| < \varepsilon$. Hagamos tender n a infinito , entonces $\|fm - f\| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_o$; luego, $\lim\limits_{n \to \infty} fn = f$

En la siguiente proposición se generaliza el ejemplo 1.1.8 - b .

1.1.9 Proposición

Sean X un espacio topológico y F un espacio de Banach . El conjunto C_b (X) de las aplicaciones continuas y acotadas de X en F es un espacio de Banach.

1.2 Aplicaciones Lineales Continuas

Conocer las aplicaciones lineales (y multilineales) continuas nos va a servir en los capítulos 3 y 4 de este trabajo, especialmente en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales. Vamos siempre a mantenernos, en este capítulo, en el contexto de espacios de Banach en general; en los capítulos siguientes trabajaremos de preferencia con los espacios $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{R}^n$.

1.2.1 Definición

Sean E y F dos EVNK , f una aplicación de E en F , $\| \ \|_E$ la norma en E y $\| \ \|_F$ la norma en F . Sea $a \in E$. Diremos que f es continua en a si para todo $\varepsilon > o$, existe $\delta > o$ t.q. $\| x - a \|_E < \delta$ implica $\| f(x) - f(a) \|_F < \varepsilon$. Diremos también que f es continua en E si lo es en todos los puntos de E .

La Proposición siguiente nos proporciona un "criterio de continuidad" que nos facilitará en muchos casos el análisis de la continuidad de - una aplicación lineal.

1.2.2 Proposición

Sean E y F EVNK y $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes :

i) f es continua en E

ii) f es continua en cero.

iii) f es acotada en la bola $\bar{B}(o,r)$.

Demostración

" iii) $\Longrightarrow$ ii)"

Supongamos $\| f(x) \|_F < M$ para todo $x \in \bar{B}(o,r)$ y sea $\varepsilon > o$. Hagamos $\| Y \|_E \leq \frac{r\,\varepsilon}{M}$, entonces $\| \frac{MY}{\varepsilon} \|_E \leq r$, como $\frac{MY}{\varepsilon} \in \bar{B}(o,r)$ se tiene que $\| f (\frac{MY}{\varepsilon}) \|_F \leq M$, de donde $\| f(Y) \|_F < \varepsilon$; o sea, f es continua en 0 .

" ii) $\Longrightarrow$ i)"

Como f es contínua en 0 , a todo $\varepsilon > o$ corresponde un $\delta > o$ t.q. $\|Y\|_E < \delta \Longrightarrow \|f(Y)\|_F < \varepsilon$,

Sea $a \in E$, entonces $\|x - a\|_E < \delta \Longrightarrow \| f(x-a) \|_F < \varepsilon$ (2)

por otro lado , $\| f(x-a) \|_F = \| f(x) - f(a) \|_F$ (3) ,

de (2) y (3) : $\|x-a\|_E < \delta \Longrightarrow \| f(x) - f(a) \| < \varepsilon$, es - decir, f es continua en a ; y por ser a fijo y arbitra -

rio se concluye que f es contınua en E .

" i) $\Longrightarrow$ iii) "

Sea f contínua en E y $\varepsilon > o$; entonces existe $\delta > o$ t.q. $\|y\|_E < \delta$ implica $\|f(y)\|_F < \varepsilon$.

Sea $x \in \bar{B}(o,r)$, o sea , $\|x\|_E \leq r$

Tomemos $y = \frac{\delta}{r} x$, $\|y\|_E = \frac{\delta}{r} \|x\|_E \leq \frac{\delta}{\|X\|_E} \|x\|_E$;

entonces $\|y\|_E \leq \delta$ implica $\|f(y)\|_F = \|f(\frac{\delta}{r} x)\|_F < \varepsilon$,

de donde, $\|f(x)\|_F < \frac{r\varepsilon}{\delta}$

Es decir, f es acotada para todo $x \in \bar{B}(o,r)$.

Siguiendo con nuestra búsqueda de "criterios de continuidad" - vamos a referirnos al espacio $L(E;F)$, de las aplicaciones lineales y contînuas de E en F , y a la norma "sup" definida en él.

1.2.3 Definición

Dada $f \in L(E;F)$, E y F EVNK ; para todo $x \in \bar{B}(o,1)$ las - normas $\|f(x)\|_F$ son acotadas, por 1.2.2 ; luego, existe el - $\sup\limits_{x \in \bar{B}(o,1)} \|f(x)\|_F$.

Llamaremos a este supremo la norma de f y lo denotaremos $\|f\|_F$. También, por comodidad usaremos B en lugar de $\bar{B}(o,1)$.
En la siguiente proposición demostraremos que, efectivamente, $\|f\|_F$ - es una norma en $L(E;F)$ y se probará también la relación $\|f(x)\|_F \leq \|f\|_F \|x\|_E$ que se convierte en un auxiliar valioso en futuras demostraciones .

1.2.4 Proposición

Con las notaciones de la definición 1.2.3 se tiene :

i) $\forall\, x \in E$, $\| f(x) \|_F \leq \| f \|_F \; \| x \|_E$

ii) el número $\| f \|_F = \sup\limits_{x \in \bar{B}} \| f(x) \|_F$ es una norma sobre $L(E;F)$.

Demostración

i) Por 1.2.2 , para todo $x \in B$ se tiene $\| f(x) \|_F \leq \| f \|_F$. Consideremos $x \in E$, $x \neq 0$. Si $Y = \dfrac{x}{\| x \|_E}$, entonces

$$\| f(y) \|_F = \frac{1}{\| x \|_E} \| f(x) \|_F < \| f \|_F \quad , \quad (4)$$

luego, de (4) $\| f(x) \|_F \leq \| x \|_E \; \| f \|_F$.

ii) $\| \;\; \|_F$ está bien definida ya que f está acotada en B y el supremo es único ; $\| \;\; \|_F$ es positiva, luego

$$\| \;\; \|_F : L(E;F) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

N1) $\| f \|_F = 0 \quad$ ssi $\| f(x) \|_F = 0 \;\; , \forall\, x \in E$

$\qquad\qquad\qquad$ ssi $\;\; f(x) \quad = 0 \;\; , \forall\, x \in E$

$\qquad\qquad\qquad$ ssi $\;\; f \doteq 0$

N2) $\| \lambda f \|_F = \sup\limits_{x \in B} \| \lambda f(x) \|_F = |\lambda| \; \| f \|_F$

N3) $\| f + g \|_F = \sup\limits_{x \in B} \| (f + g)(x) \|_F \leq \| f \|_F + \| g \|_F$

El criterio, finalmente, de continuidad aparece en la proposición siguiente:

1.2.5 Proposición

Sea f una aplicación lineal de E en F ; E y F EVNK .
f es continua en E ssi existe $M \in \mathbb{R}^+$ t.q.
$\| f(x) \|_F \leq M \| x \|_E \quad \forall x \in E \quad (5)$

Demostración

Si f es continua, es acotada en B , luego

$$\| f(x) \|_F \leq \| f \|_F \| x \|_E \text{ , para todo } x \in E.$$

Sea $M = \| f \|_F$.
Recíprocamente, si existe M t.q. se cumple (5) ,
entonces $\| f(x) \|_F \leq M \| x \|_E$ implica que f es continua en cero, luego, en E .

Dadas las aplicaciones f y g , $f \in L(E;F)$ y $g \in L(F;G)$. se sabe que $g \circ f \in L(E;G)$. La relación entre $\| g \circ f \|_G$ y $\| f \|_F$, $\| g \|_G$ aparece en la siguiente proposición:

1.2.6 Proposición

$$\| g \circ f \|_G \leq \| g \|_G \| f \|_F \qquad (6)$$

Demostración

Sea $x \in E$ fijo y arbitrario .

$$\|g\circ f\|_G = \sup_{x\in B} \|(g\circ f)(x)\|_G$$

$$= \sup_{x\in B} \|g(f(x))\|_G$$

$$\leq \sup_{x\in B} \|g\|_G \ \|f(x)\|_F$$

$$\leq \sup_{x\in B} \|g\|_G \ \|f\|_F \ \|x\|_E$$

$$< \|g\|_G \ \|f\|_F$$

En el teorema 1.2.7 veremos que el espacio $L(E;F)$ es de Banach si F lo es . Este será el último resultado de la sección 1.2 . En 1.3 trataremos un tema muy útil e importante : normas equivalentes.

1.2.7 Teorema

Sean E y F E.V.N.K. Si F es un espacio de Banach, entonces $L(E;F)$ es otro espacio de Banach.

Demostración

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L(E;F)$, debemos demostrar que es convergente en $L(E;F)$. Sea $\varepsilon > 0$, existe -

entonces $n_o \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall\, n, m \geq n_o$, $\| f_n - f_m \|_F < \varepsilon$.

Por 1.2.4, para todo $x \in E$ y para $n, m \geq n_o$, se tiene

$$\| f_n (x) - f_m (x) \|_F \leq \varepsilon \, \|x\|_E \qquad (7)$$

Consideremos ahora $x \in E$ fijo y arbitrario, entonces la suce - sión de Cauchy $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en F , por ser éste de Banach.

Sea la aplicación f, $f : E \longrightarrow F$

$$x \longmapsto f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n (x)$$

probemos que $f \in L(E;F)$.

f es lineal, ya que :

a) $f(x + y) = \lim_{n \to \infty} f_n (x + y) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) + \lim_{n} f_n(Y) = f(x)+f(Y)$

b) $f(\;\; x) = \lim_{n \to \infty} f_n(\lambda x) = \lambda \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lambda f(x)$

Se debe probar ahora que f es acotada en B .

Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ t.q. $\| f_m - f_n \|_F < 1$, $\forall m,n \geq n_o$;

o sea, para todo $x \in E$:

$$\| f_n(x) - f_m(x) \|_F < \| x \|_E \quad , \text{por} \quad (7) ,$$

entonces, $\| f(x) - f_m(x) \|_F = \| \lim_{n \to \infty} f_n(x) - f_m(x) \|_F$

$$= \lim_{n \to \infty} \| f_n(x) - f_m(x) \|_F$$

$$\leq \| x \|_E$$

Por otro lado, $\| f(x) \|_F \leq \| f(x) - f_m(x) \|_F + \| f_m(x) \|_F$

$$\leq \|x\|_E + \| f_m \|_F \|x\|_E$$

$$\leq (1 + \| f_m \|_F) \|x\|_E \ , \ \forall x \in E$$

es decir, f es acotada en B; luego, por la proposición 1.2.2, f es contínua .

Se tiene hasta el momento que f es lineal y contínua . Pro - bemos, para finalizar, que $f_n \longrightarrow f$, sea $\varepsilon > 0$; existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. para todo $n, m \geq n_0$:

$$\| f_n - f_m \|_F < \varepsilon$$

o sea, $\| f_n(x) - f_m(x) \|_F \leq \varepsilon \|x\|_E$; $\forall x \in E$, $\forall n, m \geq n_0$;

haciendo que m tienda a infinito:

$$\| f_n(x) - f(x) \|_F \leq \varepsilon \|x\| \ ; \ \forall x \in E \ , \ \forall n, m \geq n_0$$

es decir, $\| f_n - f \|_F \leq \varepsilon$, para $n \geq n_0$

Luego, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f .

1.3 Isomorfismos entre espacios vectoriales normados; isometrías y normas equivalentes.

La noción de isomorfismo entre espacios vectoriales se va am - pliar, para espacios vectoriales normados , agregando la condición de que el isomorfismo sea un homeomorfismo . Se entiende, en el presente contexto, que al decir "isomorfismo" nos estaremos refiriendo a iso - morfismos entre espacios normados.

1.3.1 Definición :

Sean E y F EVNK y $f : E \longrightarrow F$

1) f es un isomorfismo si :

i) f es lineal continua

ii) existe una aplicación g lineal y continua t.q.

$g \circ f = id_E$ y $f \circ g = id_F$

2) f es una isometría si :

i) f es lineal

ii) f es biyectiva

iii) $\| f(x) \|_F = \| x \|_E$, $\forall x \in E$.

1.3.2 Observaciones

a) Toda isometría es un isomorfismo entre EVNK .

En efecto : f y su recíproca g están acotadas en la bola unidad, $\| f \|_F = \operatorname{Sup}_{x \in B} \| f(x) \|_F = \operatorname{Sup}_{x \in B} \| x \|_E = 1$,

$\| g(f(x)) \|_E = \| x \|_E$; que equivale a afirmar que son continuas y, por 1.3.1 , se sigue que f es un isomorfismo.

b) No todo isomorfismo es una isometría .

En efecto : Una homotecia $f : x \longrightarrow f(x) = \lambda x$, $|\lambda| \neq 1$, no cumple iii) de 1.3.1-2 :

$\| f(x) \|_F = \| \lambda x \|_E = |\lambda| \, \| x \|_E \neq \| x \|_E$.

1.3.3 Definición

Sea E un EVNK y $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ dos normas en E.
Se dice que $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ son equivalentes si definen la misma topología en E.

La definición anterior no es práctica para ser utilizada como "criterio de equivalencia". La proposición 1.3.4 nos dará información para saber si las normas dadas son equivalentes.

1.3.4 Proposición

Dos normas $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ en E son equivalentes si y sólo si el cociente $\dfrac{\|x\|_2}{\|x\|_1}$, $x \neq o$, está mayorado y minorado por números positivos.

Demostración

Definamos las dos aplicaciones biyectivas lineales siguientes:

$id_1 : E_{\| \ \|_1} \longrightarrow E_{\| \ \|_1}$ $id_2 : E_{\| \ \|_2} \longrightarrow E_{\| \ \|_2}$

si se demuestra que son contínuas tendremos que id es un homeomorfismo y ésto garantiza que $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ definen la misma topología.

id_1 e id_2 son contínuas ssi existen constantes positivas tales que

$$\begin{aligned} \| id_1 (x) \|_2 &\leq P \|x\|_1 \\ \| id_2 (x) \|_1 &\leq Q \|x\|_2 \end{aligned} \tag{8}$$

(8) se cumple ssi $\|x\|_2 \leq P\|x\|_1$ y $\|x\|_1 \leq Q\|x\|_2$

$$\text{ssi } \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \leq P \text{ y } \frac{1}{Q} \leq \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}$$

$$\text{ssi } m \leq \frac{\|x\|_2}{\|x_1\|} \leq M \text{ ; } M = P \text{ , } m = \frac{1}{Q} \text{ .}$$

En un espacio vectorial normado de dimensión finita la "cuestión de equivalencia" se simplifica mucho . Tal afirmación se basa - en el siguiente teorema:

1.3.5 Teorema

En un EVNK de dimensión finita todas las normas son equivalentes.

Demostración

Sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de E y $\|\ \|$ una norma sobre E . Tomemos $x \in E$, fijo y arbitrario,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \tag{9}$$

consideremos la norma $\|x\|' = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{1/2}$

bastará probar que $\|\ \|$ y $\|\ \|'$ son equivalentes .

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \|e_i\| \leq$$

$$\leq \left(\sum |\alpha_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|\right)^{1/2}$$

haciendo $M = \left(\sum_{i=1}^{n} \| e_i \|\right)^{1/2}$ se tiene $\|x\| \leq M \|x\|'$ (10)

Falta ahora encontrar una constante $m > 0$ tal que

$$m\|x\|' \leq \|x\|$$

Supongamos que no existe esta constante m. Entonces, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, existe $Y_n \in E$ t.q. $\|Y_n\|' > n\|Y\|$; entonces $\frac{\|Y_n\|}{\|Y_n\|'} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$

Sea $x_n = \frac{Y_n}{\|Y_n\|'}$; claramente $\|x_n\|' = 1$, $\forall n$ y $\|x_n\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$

Como todos los x_n tienen norma $\| \;\|'$ igual a 1, el teorema de Bolzano-Weistrass dice que existe una subsucesión x_n' de x_n que converge a un punto x'.

Entonces:

$$\|x_n' - x'\| \longrightarrow 0$$
$$n \longrightarrow \infty$$

luego $\|x_n'\|' \longrightarrow \|x'\|'$, de donde $\|x'\|' = 1$, o sea, $x' \neq 0$.

Usando la relación $\|x\| < M\|x\|'$ tenemos :

$$\left| \|x_n'\| - \|x\| \right| < M \|x_n' - x'\|'$$

Por lo tanto, $\|x_n'\| \longrightarrow \|x'\|$

Por otro lado, $\|x_n'\|$ es una subsucesión de $\|x_n\| \longrightarrow 0$; luego, debe de ser $\|x'\| = 0$, o sea $x' = 0$. Lo cual es contradictorio .

Resultados que se obtienen a partir del teorema 1.3.5 son los siguientes:

1.3.6 Corolario

Las normas $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ y $\| \ \|_3$, dadas en 1.1.3 , sobre $\mathbb{R}^n$, son equivalentes .

1.3.7 Corolario

Sea F un EVNK . Toda aplicación lineal biyectiva f,

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow F$ es un isomorfismo .

Demostración

Por 1.3.1 basta demostrar que f y su recíproca son continuas.

Sea $\rho : F \longrightarrow \mathbb{R}_o^+$ una norma sobre F . La composición $\rho \circ f$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.

En efecto :

N1) $(\rho \circ f)(x) = o$ ssi $\rho(f(x)) = o$

ssi $f(x) = o$

ssi $x = o$

N2)
$$
\begin{aligned}
(\rho \circ f)(\lambda x) &= \rho(f(\lambda x)) \\
&= \rho(\lambda f(x)) \\
&= |\lambda| \rho(f(x)) \\
&= |\lambda| (\rho \circ f)(x)
\end{aligned}
$$

N3) $(\rho o f)(x+y) = \rho(f(x+y)) = \rho(f(x) + f(y))$

$\leq \rho(f(x)) + \rho(f(y))$

$\leq (\rho o f)(x) + (\rho o f)(y)$

Así, $\rho o f$ es equivalente a la norma euclídea (1.1.3-iii) ; luego, por 1.3.4 existen reales positivos m y M tales que $\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$,

$$m \leq \frac{(\rho o f)(x)}{\|x\|_3} \leq M \qquad (11)$$

$$\therefore \quad m \leq \frac{\rho(f(x))}{\|x\|_3} \leq M \qquad (12)$$

de (12) : $\rho(f(x)) = \|f(x)\| \leq M\|x\|_3$

$\therefore \quad \|f(x)\| \leq M\|x\|_3$

luego, por 1.2.5, f es continua en x .

En forma similar se demuestra la continuidad de f^{-1} .

Siempre trabajando con espacios de dimensión finita, que serán los que nos interesen en los últimos capítulos, se tiene el siguiente teorema que nos ofrece otro "criterio de continuidad" .

1.3.8 <u>Teorema</u>

Sean E y F EVNK de dimensión finita n .

Entonces:

i) E es un espacio de Banach

ii) Toda aplicación lineal f, $f: E \longrightarrow F$, es continua .

Demostración

i) Sea $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ una base de E . La aplicación t ,

$$t: \mathbb{R}^n \longrightarrow E$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$$

es lineal y biyectiva, entonces, por 1.3.7 , es un isomofismo entre $\mathbb{R}^n$ y E . Luego E es de Banach, ya que si existe un iso morfismo entre dos espacios normados y si uno de ellos es completo, también lo es el otro.

ii) Sea $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y $x \in E$.

definamos $\|x\|^* = \operatorname{Sup}\{\|x\|_E, \|f(x)\|_F\}$.

$\| \ \|^*$ así definida es una norma . Por 1.3.5 , $\| \ \|_E$ y $\| \ \|^*$ son equivalentes ; por lo tanto, existe $M > 0$ t.q.

$$(13) \qquad \|x\|^* \leq M \|x\|_E , \forall x \in E .$$

La desigualdad (13) implica que $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$, $\forall x \in E$; luego, por 1.2.5 f es continua .

1.4 Producto Cartesiano, Sumas Directas y Productos Cartesianos - Normados .

Vamos a tratar primero el producto cartesiano y suma directa de espacios vectoriales arbitrarios para estudiar luego el caso de espacios vectoriales normados .

1.4.1 Definición

Sean E_1 y E_2 dos espacios vectoriales sobre K y E su producto cartesiano , $E = E_1 X E_2$. Definimos en E las siguientes operaciones:

$$X + Y = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2)$$
$$\alpha X = (\alpha x_1 , \alpha x_2)$$

E con las operaciones antes definidas es un E V K .

Se definen también las proyecciones de E con respecto a E_1 y E_2 a las aplicaciones

$$P_1 : E \longrightarrow E_1 \quad ; \quad P_2 : E \longrightarrow E_2$$
$$x \longmapsto x_1 \qquad\qquad x \longmapsto x_2$$

en donde $x = (x_1 , x_2) \in E$.

1.4.2 Definición

Sea E un EVK y sean E_1 y E_2 dos subespacios de E . Se dice que E es la suma directa de E_1 con E_2 , $E = E_1 \oplus E_2$, si todo elemento $x \in E$ se representa, de manera única, en la forma $x = x_1 + x_2$, con $x_i \in E_i$.

La definición anterior equivale a decir que $E = E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2 = \{ o \}$

Si E_1 y E_2 son espacios normados $E = E_1 X E_2$ también lo es, y la norma que se define en E es la siguiente:

$$\| \ \|_\infty : E \longrightarrow \mathbb{R}_o^+$$

$$x \longmapsto \text{Sup}\{ \|x_1\|_{E_1}, \|x_2\|_{E_2} \}$$

Se puede verificar fácilmente que $\| \ \|_\infty$ es una norma. Luego, el producto cartesiano de dos EVNK es otro EVNK . Más aún, la proposición que sigue afirma que si E_1 y E_2 son espacios - de Banach, también lo es su producto cartesiano.

1.4.4 <u>Proposición</u>

Si E_1 y E_2 son espacios de Banach, $E = E_1 X E_2$ es otro espa - cio de Banach.

Sea $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitaria de Cauchy en E , y - $\varepsilon > o$. Entonces existe $n_o \in \mathbb{N}$ t.q.

$$(m \geq n_o \text{ y } n \geq n_o) \Longrightarrow \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_\infty < \varepsilon \qquad (13)$$

o sea, $\|(x_n - x_m, y_n - y_m)\|_\infty < \varepsilon$

de donde $\quad \text{Sup}\{ \|x_n - x_m\|_{E_1} , \|y_n - y_m\|_{E_2} \} < \varepsilon \qquad (14)$

(14) implica que $\|x_n - x_m\|_{E_1} < \varepsilon$ y $\|y_n - y_m\|_{E_2} < \varepsilon$, $\forall$ n, m $\geq n_o$.

Luego, $\exists !\ x_o \in E_1$, $y_o \in E_2$ t.q. $x_n \longrightarrow x_o \quad y_n \longrightarrow y_o$.

Probemos que $(x_n, y_n) \longrightarrow (x_o, y_o)$.

Tenemos que

$$\|x_n - x_m\|_{E_1} < \varepsilon$$

$$\|y_n - y_m\|_{E_2} < \varepsilon \qquad , \forall\ n, m \geq n_o$$

Definamos, con n fijo ;

$$\Gamma_m = \| x_n - x_m \|_{E_1} \text{ y } \alpha_m = \| y_n - y_m \|_{E_2} \qquad (15)$$

entonces, por continuidad de las normas $\| \quad \|_{E_1}$ y $\| \quad \|_{E_2}$

existen $\lim\limits_{m \to \infty} \Gamma_m$ y $\lim\limits_{m \to \infty} \alpha_m$

$$\text{y } \lim_{m \to \infty} \Gamma_m = \| x_n - x_o \|_{E_1} < \varepsilon \ , \ \forall\, n \geq n_o \ ;$$

$$\lim_{m \to \infty} \alpha_m = \| y_n - y_o \|_{E_2} < \varepsilon \ , \ \forall\, n \geq n_o$$

Luego, $(x_n, y_n) \longrightarrow (x_o, y_o) \in E$.

Consecuencia inmediata de la proposición anterior son los siguientes resultados :

1.4.5 Corolario

a) $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{C}^m$ son completos con $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sup\limits_{i=1,2,\ldots,n} \|x_i\|$

b) El producto finitos de espacios de Banach sobre K, es de Banach, dotándolo de la norma Sup .

La sección 1.5 amplía lo estudiado en 1.2 y nos da "herramientas" , junto con 1.6 , para entrar al estudio de las ecuaciones diferenciales lineales.

1.5 El Espacio de las Aplicaciones Lineales Contínuas

Consideraremos primero el caso algebraico bilineal.

Sean E_1 , E_2 y F EVK .

1.5.1 Definición

Una aplicación f, $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$, se llama bilineal si:

1) $f(x_1 + y_1 , x_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, x_2)$

   $f(\lambda x_1, x_2) = \lambda f(x_1, x_2)$

2) $f(x_1, x_2 + y_2) = f(x_1, {}_2) + f(x_1, y_2)$

   $f(x_1, \lambda x_2) = \lambda f(x_1, x_2)$

para $x_1, y_1 \in E_1$; $x_2, y_2 \in E_2$; $\lambda \in K$

La definición anterior equivale a lo siguiente;

Las aplicaciones parciales f_1 y f_2 :

$$f_1 : E_1 \longrightarrow F \qquad\qquad f_2 : E_2 \longrightarrow F$$
$$x_1 \longmapsto f_1(x_1, a_2) \qquad\qquad x_2 \longmapsto f(a_1, x_2)$$

son lineales, con $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$.

En general:

1.5.2 Definición

Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ y F EVK . Una aplicación f ,

$f : E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$ se llama <u>multilineal</u> si, $\forall k$, $k = 1,2,\ldots,n$ y toda n - ada :

$(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$, con a_i , $i = 1,2,\ldots n$, - $i \neq k$, son fijos, la aplicación parcial f_k ,

$$\begin{aligned} f_k : E_k &\longrightarrow F \\ x_k &\longrightarrow f_k\,(a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

es lineal .

Sea ahora el caso que $E_1, \ldots, E_n$ y F son EVN . La siguiente proposición es una generalización de la proposición 1.2.2 .

1.5.3 <u>Proposición</u>

Sean $E_1, \ldots, E_n$ y F EVNK , y $f : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$ una aplicación multilineal . Las siguientes condiciones son equivalentes :

i) f es contínua en $E_1 \times \ldots \times E_n = E$

ii) f es contínua en el origen $(o,o,\ldots,o) \in E$

iii) $\| f(x_1, \ldots x_n) \|$ está acotada en el producto de bolas unidad $\|x_1\|_1 \leq 1, \ldots, \|x_n\|_n \leq 1$.

<u>Demostración</u>

" i) $\Longrightarrow$ ii) "

inmediata

" ii) $\Rightarrow$ iii) "

Como f es continua en (o,o,...o), la imagen recíproca de la bola unidad en F , $\bar{B}_F$ (0,1) es un vecindario de (o,o,...,o) en E, entonces existe r >o t.q.

$$(\|x_i\|_i \leq r \ ,\ i=1,2,\ldots,n) \Longrightarrow \|f(x_1,\ldots,x_n)\| \leq 1$$

Si los x_i están en bolas unidad : $\|x_i\|_i = 1$; i = 1,2,...,n

$$(\|r\,x_i\|_i \leq r\ ) \Longrightarrow \|f(rx_1,\ldots,rx_n)\| \leq 1 \Longrightarrow f(x_1,\ldots,x_n) \leq \frac{1}{r^n}$$

se sigue así iii) .

" iii) $\Rightarrow$ i) "

Sea M >o t.q. $(\|x_i\|_i \leq 1\ ;\ i=1,2,\ldots,n) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \|f(x_1,\ldots,x_n)\| \leq M \quad , \quad y$$

sea $(x_1,\ldots,x_n) \in E$ fijo y arbitrario ; $x_i \neq 0$, $i=1,2,\ldots,n$;

$$\frac{xi}{\|xi\|_i} \in \bar{B}\ (0,1) \text{ , luego por iii),}$$

$$\left\| f\left(\frac{x_1}{\|x_1\|_1},\ldots,\frac{x_n}{\|x_n\|_n}\right)\right\| \leq M$$

entonces $\|f(x_1,\ldots x_n)\| \leq M\ \|x_1\|_1 \ \ldots\ \|x_n\|_n$, $\forall\ (x_1,\ldots,x_n) \in E$, por ser f multilineal . (16)

Sea $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E$ un punto fijo y arbitrario . Probemos que f es continua en a .

$$f(x_1,\ldots,x_n) - f(a_1,\ldots,a_n) = f(x_1 - a_1,\ldots,a_n) + \ldots$$
$$\ldots + f(x_1,\ldots,x_{n-1}\ ,\ x_n - a_n)$$

$$\|f(x_1,\ldots,x_n) - f(a_1,\ldots,a_n)\| \leq \|f(x_1 - a_1,\ldots,a_n)\| + \ldots +$$
$$\|f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n - a_n)\|$$

$\leq M \| x_1 - a_1 \|_1 \ldots \| a_n \|_n + \ldots + M \| x_1 \|_1 \ldots \| x_n - a_n \|_n$, por (16)

si $\| x_i - a_i \|_i < \varepsilon$; $i=1,2,\ldots,n$; entonces $\| x_i \|_i - \| a_i \|_i \leq \varepsilon$,

$\therefore \; \| x_i \|_i < \| a_i \|_i + \varepsilon$; o sea, existe un número $A > 0$ t.q.

$(\| x_i - a_i \|_i \leq \varepsilon \; ; \; i=1,2,\ldots,n) \Longrightarrow \| x_i \|_i \leq A \; ; \; \forall \; i=1,2,\ldots,n$

luego,

$$\| f(x_1,\ldots,x_n) - f(a_1,\ldots,a_n) \| \leq MA^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \| x_i - a_i \|_i \leq nMA^{n-1}\varepsilon \quad (17)$$

De (17) se sigue que a medida que $x_i \longrightarrow a_i$, $\forall \; i$,

$$f(x_1,\ldots x_n) \longrightarrow f(a_1,\ldots,a_n)$$

luego, f es continua en a ; por lo tanto, en E .

Si denotamos $L(E_1,\ldots,E_n;F)$ al conjunto de las aplicaciones multilineales continuas, y tenemos en cuenta que :

a) $L(E_1,\ldots,E_n;F)$ es subespacio vectorial del espacio vectorial de todas las aplicaciones de $E_1 x\ldots x E_n$ en F

b) la aplicación $\| \; \|$:

$$\| \; \| : L(E_1,\ldots,E_n;F) \longrightarrow \mathbb{R}_o^+$$

$$f \longrightarrow \sup_{x \in \bar{E}_{E_i}(0,1)} \| f(x_1,\ldots x_n) \|$$

es una norma en $E_1 x\ldots x E_n$

se obtiene el siguiente resultado:

1.5.4 <u>Observación</u>

$L(E_1,\ldots,E_n;F)$ es un EVNK .

1.6 La Isometría Natural

Sean E,F y G EVNK . Nuestro interés es mostrar que los espacios vectoriales normados $L(E,F;G)$ y $L(E;L(F;G))$ son isomorfos . Para lograrlo, se demostrará que existe una isometría Γ entre los dos espacios mencionados .

Sea $f\in L(E,F;G)$, nuestra "candidata" a isometría es Γ :

$$\Gamma: L(E,F;G) \longrightarrow L(E;L(F;G))$$

$$\begin{array}{lcl} f: E\times F \longrightarrow G & & x \longrightarrow g(x)=f_x : F \longrightarrow G \\ \quad (x,y) \longrightarrow f(x,y) & & \qquad\qquad y \longrightarrow f(x,y) \end{array}$$

$$f \longrightarrow \Gamma(f) = g$$

$$[\Gamma(f)(x)](y)=(g(x))(y)=f_x(y)=f(x,y)$$

A continuación, probaremos que tiene sentido la forma de definir Γ .

1) Sea $x\in E$ fijo y arbitrario . Probemos que $g(x) \in L(F;G)$.

i) $g(x)$ es lineal, puesto que

$$\begin{aligned} [g(x)](\lambda y_1+y_2) &= f(x,\lambda y_1+y_2) \\ &= \lambda f(x,y_1)+f(x,y_2) \\ &= \lambda[g(x)](y_1) + [g(x)](y_2) \end{aligned}$$

ii) $g(x)$ es continua .

$$\|[g(x)](y)\| = \|f(x,y)\| \leq \|f\| \; \|x\| \; \|y\|$$

$$\therefore \quad \|g(x)\| \leq \|f\| \; \|x\| \qquad (18)$$

luego, $g(x)$ es continua en F.

2) Probemos ahora que $\Gamma(f) = g \in L(E;L(F;G))$

i) g lineal, ya que

$$g(\alpha x_1 + x_2)(y) = f(\alpha x_1 + x_2, y)$$
$$= \alpha f(x_1,y) + f(x_2,y)$$
$$= [\alpha g(x_1) + g(x_2)](y) \quad ; \ x_i \in E, \ y \in F \ .$$

ii) g es continua . En efecto :

$\| g(x) \| \leq \| f \| \ \| x \|$, por (18)

$\therefore \ \| g \| \leq \| f \|$, luego g es continua .

De i) e ii) se sigue que $\Gamma(f) \in L(E ; L(F;G))$

3) Γ es lineal y continua

i) Sean : $x \in E$; $y \in E$; $f_1, f_2 \in L(F;G)$; $\lambda \in K$, fijos y arbitrarios.

$$[[\Gamma(\alpha f_1 + f_2)](x)](y) = [\alpha f_1 + f_2](x,y)$$
$$= \alpha f_1(x,y) + f_2(x,y)$$
$$= \alpha [[\Gamma(f_1)](x)](y) +$$
$$+ [[\Gamma(f_2)](x)](y)$$
$$= \{ \alpha [\Gamma(f_1)](x) +$$
$$+ [\Gamma(f_2)](x) \}(y), \ \forall y, \forall x$$

de donde : $\Gamma(\alpha f_1 + f_2) = \alpha \Gamma(f_1) + \Gamma(f_2)$

ii) $\| \Gamma(f) \| = \| g \| \leq \| f \|$

Por lo tanto, Γ es continua y $\| \Gamma \| < 1$

Definamos ahora una aplicación ψ en sentido inverso:

$$\psi: L(E;L(F;G)) \longrightarrow L(E,F;G)$$

$$g:E \longrightarrow L(F;G) \qquad (x,y) \longrightarrow \psi(g)(x,y)=f(x,y)=g(x)y$$

$$x \longrightarrow g(x):F \longrightarrow G$$

$$y \longrightarrow g(x)y$$

$$g \longrightarrow \psi(g) = f$$

se demuestra que : si $g\in L(E;L(F;G))$ y dados $x\in E$ e $y\in F$ - arbitrarios, la aplicación $f = \psi(g)$

$$f : E\times F \longrightarrow G$$

$$(x,y) \longrightarrow g(x)y$$

es tal que : $f\in L(E,F;G)$

$$\|f\| = \|\psi(g)\| \leq \|g\|$$

$$\|\psi\| \leq 1$$

Finalmente, se prueba que

$$\Gamma\circ\psi = id\ (L(E;L(F;G)) \quad y$$

$$\psi\circ\Gamma = id\ (L(E,F;G))$$

$$(\Gamma\circ\psi)(f) = \Gamma(\psi(f)) = \Gamma(g) = f$$

$$(\psi\circ\Gamma)(g) = \psi(\Gamma(g)) = \psi(f) = g$$

Por último, hay que verificar que Γ preserva las normas:

tenemos: $1= \|\psi\circ\Gamma\| \leq \|\psi\| \ \|\Gamma\|$

por otro lado, $\|\Gamma\| \leq 1$ y $\|\psi\| \leq 1$; luego, $\|\psi\| =1$ y $\|\Gamma\| =1$

$$\|\Gamma(f)\| \leq \|\Gamma\| \ \|f\| \leq \|f\|$$

$$\|f\| = \|\psi(g)\| \leq \|\psi\| \ \|g\| \leq \|g\| = \|\Gamma(f)\|$$

o sea, $\|\Gamma(f)\| = \|f\|$, luego Γ es una isometría .

2	DESCOMPOSICION DE JORDAN

2.0 Introducción

Dado un endomorfismo μ en un espacio vectorial E de dimensión finita, es a menudo indispensable encontrar una base de E tal que la matriz asociada a μ, con respecto a tal base, sea lo más simple posible. La mayor "simplicidad" la encontraremos en las matrices diagonales. La herramienta más útil en esta ocasión es la teoría de los vectores propios, que suele ser suficiente en la mayoría de los casos.

Cuando no sea posible encontrar una matriz diagonal, nuestra "mayor simplicidad" la encontraremos en las matrices de Jordán. Es necesario recordar, en nuestro "contexto jordánico", la noción de subespacio estable por un endomorfismo: Sea $\mu : E \longrightarrow E$ un endomorfismo y D un subespacio de E. Se dice que D es estable por μ si $\mu(D) \subset D$.

2.1 Vectores propios y valores propios

2.1.1 Definición

Sea E un EVK, K conmutativo ; $\mu : E \longrightarrow E$ un endomorfismo. Decimos que $x \in E$, $x \neq 0$, es un vector propio (eigen vector) de μ

si $\mu(x) = \lambda x$, $\lambda \in K$. Al escalar λ se le llama <u>valor propio</u> (eigen valor) asociado al vector propio x .

2.1.2 Observaciones

a) Si x es un vector propio de μ , el subespacio vectorial D de E engendrado por x es estable por μ .
   En efecto: sea $y \in D$, y es de la forma αx, con $\alpha \in K$.
   $\mu \in K$. $\mu(y) = \mu(\alpha x) = \alpha\mu(x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$, de donde $\mu(y) \in D$, o sea, $\mu(D) \subset D$, por ser y fijo y arbitrario .
   Recíprocamente, si una recta D pasa por el origen de E verifica $\mu(D) \subset D$ y todo vector contenido en D es un vector propio de μ .

b) La relación $\mu(x) = \lambda x$ equivale a decir que x es anulado por el endomorfismo $\mu - \lambda I$; luego, para que λ sea un valor propio de μ es necesario y suficiente que $\mathrm{Ker}(\mu - \lambda I) \neq \{0\}$.

De aquí en adelante el cálculo de determinantes será muy frecuente, especialmente cuando estemos a la "caza" de valores propios. La razón de este hecho la da el siguiente teorema.

2.1.3 Teorema

Sean E un EVK, K conmutativo, y $\mu : E \longrightarrow E$ un endomorfismo . Para que $\lambda \in K$ sea un valor propio de μ es necesario y suficiente que

$$\det (U - \lambda 1_n) = 0$$

Demostración

Sea U la matriz asociada a μ con respecto a una base dada .

λ es valor propio de μ ssi $\exists x \in Ker(\mu-\lambda I),\ x \neq 0$

ssi $(\mu-\lambda I)\ (x) = 0$

ssi $(U- \lambda 1n)x = 0$

ssi $\det(U-\lambda 1_n) = 0$, ya que $x \neq 0$

El resultado anterior nos permite ver que los valores propios de μ son las raíces de una ecuación algebraica con coeficientes en K . Por ejemplo:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ a_{ij} \in K \ ; \qquad U - \lambda 1_2 = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det\ (U-\lambda 1_2) = 0 \qquad \text{ssi} \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{ssi} \quad (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\text{ssi} \quad \lambda^2 + (a_{11}+ a_{22})\ \lambda - a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

El polinomio, en λ , encontrado se llama polinomio característico de U . El tema central de la siguiente sección es este polinomio.

2.2 Polinomio característico de una Matriz

Sea E un EVK y μ un endomorfismo en E .

Escojamos una base $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de E , y sea $U = (\alpha_{ij})$, $1 \leq i,j \leq n$, la matriz asociada a U relativa a B . Consideremos también el endomorfismo I identidad de E y su matriz asociada $1_n = (\delta_{ij})$ $1 \leq i,j \leq n$.

La matriz asociada al endomorfismo $\mu - \lambda I$ es :

$$U - \lambda 1_n = \begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda \cdots & \alpha_{2n} \\ & \cdots\cdot & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \cdots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Por el teorema 2.1.3, los valores propios de μ se obtienen a - partir de la ecuación (1) :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} \cdots & \alpha_{1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda \cdots & \alpha_{2} \\ & \cdots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

Esta ecuación define un polinomio en una indeterminada con coefi cientes en K .

Para ilustrar la afirmación anterior consideremos al campo K in merso en el anillo $K[x]$ de los polinómios en una indetermina- da con coeficientes en K , y formemos la matriz $U - x1_n$ con - coeficientes en el anillo conmutativo $K[x]$. Su determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-x & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-x & \cdots & \alpha_{2n} \\ & \cdots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-x \end{vmatrix}$$

es un elemento de $K[x]$, se denota $P_U(x)$ y se le llama <u>polinomio característico de la matriz U</u> , o sea ,

$$P_U(x) = \det(U - x1_n) \tag{2}$$

Por las observaciones anteriores concluimos que los valores propios de μ son las raíces en K de la ecuación (3).

$$P_U(\lambda) = 0 \tag{3}$$

Llamaremos <u>polinomio característico del endomorfismo μ</u> al polinomio $P_U(x)$, donde U es la matriz asociada a μ con respecto a una base cualquiera de E . En ciertas ocasiones se trabaja con $P_\mu(x)$ en vez de $P_U(x)$.

2.2.1 <u>Ejemplo</u>

Consideremos un endomorfismo μ cuya matriz en la base canónica es :

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de μ son 1 y -1 . En efecto:

$$P_U(x) = \begin{vmatrix} 3-x & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5-x & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3-x & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1-x \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Al resolver (4) se obtiene :

$$P_U(x) = (x-1)^2\,(x+1)^2 \qquad (5)$$

y las raîces reales de (5) son $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$.

Dado que a un endomorfismo μ se le puede asociar más de una matriz, dependiendo de la base en cuestión, se puede plantear la siguiente pregunta: ¿Depende $P_U(x)$ de la base escogida para determinar U ? . La respuesta la da el teorema siguiente:

2.2.2 Teorema

Sea E un EVK; U y U^1 matrices asociadas al endomorfismo $\mu : E \longrightarrow E$, relativas a las bases (a_i) $1 \leq i \leq n$ y (b_i) $_{1 \leq i \leq n}$, respectivamente . Entonces

$$P_U(x) = P_{U^1}(x)$$

Demostración

Sea P la matriz de cambio de base, entonces

$U^1 = PUP^{-1}$,

$$
\begin{aligned}
P_{U^1}(x) &= \det(U^1 - x1_n) \\
&= \det(PUP^{-1} - x1_n) \\
&= \det(PUP^{-1} - xPP^{-1}) \\
&= \det(P[U - x1_n]\, P^{-1}) \\
&= \det P \det(U - x1_n) \det P^{-1} \\
&= \det P \det P^{-1} \det(U - x1_n) \\
&= \det(U - x1_n) \\
&= P_U(x)
\end{aligned}
$$

2.3 Forma de un Polinomio característico

Al desarrollar el determinante (6)

$$
P_U(x) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \dots & \alpha_{2n} \\ & \dots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - x \end{vmatrix} \tag{6}
$$

Se obtiene una suma de $n!$ términos; el término "principal" es el producto (7):

$$
(\alpha_{11} - x)\,(\alpha_{22} - x) \dots\dots (\alpha_{nn} - x) \tag{7}
$$

Cada uno de los sumandos restantes, es también un producto de n elementos del determinante, conteniendo a lo sumo $(n-2)$ - elementos de la diagonal principal .

Por consiguiente, $P_U(x)$ es la suma de (7) y de un polinomio de grado, a lo sumo, $n-2$ en x ; se tiene entonces :

$$(-1)^n P_U(x) = x^n-(\alpha_{11}+\ldots+\alpha_{nn})x^{n-1}+\ldots \tag{8}$$

o bien :

$$(-1)^n P_U(x) = x^n - \tau_1(U)x^{n-1} + \tau_2(U)x^{n-2} +\ldots+ (-1)^n \tau_n(U) \tag{9}$$

o sea, $P_U(x)$ es un polinomio de grado n en la indeterminada x . Los coeficientes $\tau_i(U)\in K$ son las funciones polinomiales de los coeficientes α_{ij} de U .

El coeficiente $\tau_1(U) = \alpha_{11} + \alpha_{22}+\ldots+\alpha_{nn}$ se llama <u>Traza</u> de la matriz U y lo denotaremos $T_r(U)$.

Por otra parte, si $x = 0$,

$$P_U(x) = \det(U - 0 1_n) = \det(U) \tag{10}$$

de (9) y (10) :

$$\tau_n(U) = \det(U) \tag{11}$$

2.3.1 <u>Ejemplo</u>

Con la matriz U de 2.2.1 :

$$P_U(x) = (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$P_U(x) = x^4 + (0)x^3 - 2x^2 + 1 \tag{12}$$

en (12) : $0 = T_r(U)$

$1 = \det(U)$

o sea, (12) tiene la forma (9)

2.4 Existencia de Valores Propios

2.4.1 Definición

Sea K un cuerpo conmutativo . Se dice que K es algebraicamente cerrado si todo polinomio no constante de $K|x|$ posee por lo menos una raíz en K ; o, equivalente, si todas las raíces del polinomio están en K .

La estrecha relación entre raíces del polinomio característico y valores propios de un endomorfismo queda de manifiesto nuevamente en el teorema 2.4.2 .

2.4.2 Toerema

Sea K algebraicamente cerrado, E un EVK de dimensión finita $n > o$. Todo endomorfismo $\mu : E \longrightarrow E$ posee al menos un valor propio en K .

Demostración

Por lo visto en 2.2 , los valores propios de μ son las raíces de $P_U(x)$. Como el grado de $P_U(x)$ es $n > o$, ver 2.3 , y K está supuesto algebraicamente cerrado, este polinomio tiene al menos una raíz en K , esta raíz es entonces un valor propio de μ .

2.4.3 Observaciones

a) Una matriz con coeficientes en un campo no algebraicamente cerrado puede no tener sus valores propios en K .

Por ejemplo :

$$K = \mathbb{R}, \quad U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

los valores propios son $\cos\theta \pm i\operatorname{sen}\theta$, que no son reales cuando $\operatorname{sen}\theta \neq 0$.

b) Sea E un EVK de dimensión finita; K conmutativo y algebraicamente cerrado; y $\mu : E \longrightarrow E$ un endomorfismo. Se dice que μ tiene todos sus valores propios en K si el polinomio $P_\mu(x)$ tiene todas sus raíces en K , o sea si podemos escribir la relación :

$$(-1)^n P_\mu(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \dots (x - \lambda_q)^{r_q} \tag{13}$$

donde λ_i son las raíces de $P(x)$ en K y los r_i son, respectivamente, sus órdenes de multiplicidad. De la misma manera decimos que una matriz cuadrada U, con coeficientes en K , tiene todos sus valores propios en K si su polinomio característico tiene todas sus raíces en K .

Vamos a estudiar, en la sección 2.5, las matrices triangulares y los endomorfismo triangulizables; en 2.6, matrices diagonales y endomorfismos diagonizables, hasta llegar, 2.12, al Teorema de Jordán. En todo este trayecto los "valores propios" jugarán un papel importante.

2.5 Reducción a la Forma Triangular

2.5.1 Definición

Una matriz cuadrada $U = (\alpha_{ij})$ con coeficientes en un anillo se dice que es triangular si $\alpha_{ij} = 0$ para $i > j$ ó $i < j$. En el primer caso se llama triangular superior , y en el segundo, inferior .

2.5.2 Definición

Sea E un EVK de dimensión finita . K cuerpo conmutativo. Un endomorfismo $\mu : E \longrightarrow E$ se dice que es triangulizable si existe una base de E , $(x_i)_{1 \le i \le n}$, tal que la matriz U asociada a μ , con respecto a esta base, es triangular.

La definición 2.5.2 equivale a decir que existe una base tal que:

$$\begin{aligned} \mu(x_1) &= \alpha_{11}\, x_1 \\ \mu(x_2) &= \alpha_{12}\, x_1 + \alpha_{22}\, x_2 \\ &\dots \\ \mu(x_n) &= \alpha_{1n}\, x_1 + \alpha_{2n} x_2 + \dots + \alpha_{nn}\, x_n \end{aligned} \tag{14}$$

las igualdades de (14) se obtienen de la siguiente manera :

$$\mu(x_1) = Ux_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_{11}\, x_1$$

$$\mu(x_2) = Ux_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_{12}\, x_1 + \alpha_{22}\, x_2$$

....

$$\mu(x_n) = Ux_n = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_{1n}x_1 + \dots + \alpha_{nn}\, x_n$$

Además, a partir de (14), se concluye que μ tiene al menos un valor propio en K , a saber : α_{11}

En los siguientes teoremas veremos criterios para determinar cuándo - un endomorfismo es triangulizable; en qué condiciones se puede obte - ner una matriz triangular a partir de una matriz U dada, etc.

2.5.3 <u>Teorema</u>

Sea E un EVK de dimensión finita; K conmutativo y $\mu : E \longrightarrow E$ un endomorfismo . μ es triangulizable si y sólo si μ tiene todos sus valores propios en K .

<u>Demostración</u>

Supongamos que μ es triangulizable, entonces existe una base $(x_i)_{1 \le i \le n}$ tal que la matriz U es triangular .

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

luego,

$$P_U(x) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22}-x & \dots & \alpha_{2n} \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & & \alpha_{nn}-x \end{vmatrix} = (\alpha_{11}-x)\dots(\alpha_{nn}-x)$$

como los α_{ij} son elementos de K se sigue que μ tiene todos sus valores propios en K .

Para demostrar en el otro sentido vamos a considerar primero que K es algebraicamente cerrado. Debemos probar que todo endomorfismo de E es triangulizable.

Consideremos el endomorfismo $\mu : E \longrightarrow E$. Como K es algebraicamente cerrado, μ posee al menos un valor propio, es decir, existe un escalar α_{11} y un vector no nulo $x_1 \in E$ t.q. $\mu(x_1) = \alpha_{11}$ (15)

Sea D el subespacio vectorial de E generado por x_1 , D es estable por μ (ver 2.12-a), y sea F un suplementario de D en F , de suerte que E es la suma directa de F y D , $E = D \oplus F$, (ver definición 1.4.2) . Designemos por p el homomorfismo de E sobre F obtenido proyectando cada $x \in E$ paralelamente a D , o sea:

$$\begin{aligned} p: E &\longrightarrow F \\ x = y_1 + y_2 &\longrightarrow Y_2 \end{aligned}$$

consideremos también el endomorfismo ν t.q.

$$\begin{aligned} \nu : F &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow \nu(x) \\ f \subset E &\xrightarrow{\mu} E \xrightarrow{p} F \\ x &\longrightarrow \mu(x) \longrightarrow p(\mu(x)) = \nu(x) \end{aligned}$$

Como F es de dimensión $n-1$ podemos, razonando por recurrencia, suponer que el teorema se cumple para F y ν; entonces, existe una base $x_2,\dots,x_n$ de F t.q. se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\nu(x_2) &= \alpha_{22}x_2\\ \nu(x_3) &= \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3\\ &\dots\\ \nu(x_n) &= \alpha_{n2}x_2 + {}_{n3}x_3+\dots+ \alpha_{nn}x_n\end{aligned} \tag{16}$$

tomando en cuenta la definición de ν , tenemos :

$$\nu(x_2) = p(\mu(x_2)) = p(y_1 + y_2) = y_2$$

con $\mu(x_2) = y_1 + y_2$; $y_1 \in D$, $y_2 \in F$; de donde

$$\mu(x_2) = \alpha_{21}x_1 + y_2$$

$$\mu(x_2) = \alpha_{21}x_1 + \nu(x_2)$$

similarmente, se obtiene

$$\mu(x_3) = \alpha_{31}x_1 + \nu(x_3)$$

y así sucesivamente hasta formar el conjunto de relaciones :

$$\begin{aligned}\mu(x_2) &= \alpha_{21}x_1 + \nu(x_2)\\ \mu(x_3) &= \alpha_{31}x_1 + \nu(x_3)\\ &\dots\\ \mu(x_n) &= \alpha_{n1}x_1 + \nu(x_n)\end{aligned} \tag{17}$$

Como $x_2,\dots,x_n$ forman una base de F es claro que $x_1,x_2,\dots,x_n$ constituyen una base de E , por ser $E = D \oplus F$, luego usando (15), (16) y (17) se obtiene :

$$\begin{aligned}\mu(x_1) &= \alpha_{11}x_1\\ \mu(x_2) &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2\\ \mu(x_3) &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3\\ &\dots\\ \mu(x_n) &= \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n\end{aligned}$$

entonces, por (14) de la definición 2.5.2, μ es triangulizable.

El teorema está demostrado para el caso K algebraicamente cerrado.

Consideremos ahora el caso de un cuerpo conmutativo K cualquiera y razonemos por recurrencia sobre la dimensión n de E ; sea $\mu : E \longrightarrow E$ un endomorfismo. Para $n=1$ la demostración es inmediata, ya que la base $\{x_1\}$ es tal que $U=(\alpha_{11})$ es triangular.

Supongamos que el teorema se cumple para $n-1$ y verifiquemos que se cumple para n .

Como, por hipótesis, μ tiene todos sus valores propios en K , tomemos un valor propio α_{11} y un vector propio x_1 asociado a él. Sea D la recta generada por x_1 y F el subespacio de dimensión $n-1$ suplementario de D , $E = D \oplus F$. Consideremos, como en el caso K algebraicamente cerrado, las funciones p y ν :

$$
\begin{aligned}
p: E &\longrightarrow F \\
y=y_1+y_2 &\longrightarrow y_2 \\
\nu: F &\longrightarrow F \\
x &\longrightarrow \nu(x) = p(\mu(x))
\end{aligned}
$$

para aplicar la hipótesis de recurrencia debemos primero demostrar que el endomorfismo ν tiene todos sus valores propios en K .

Sea una base cualquiera $\{y_2, y_3, \ldots, y_n\}$ de F y sea V la matriz asociada a ν , con respecto a la base dada :

$$
V = \begin{pmatrix} \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \beta_{32} & \cdots & \beta_{3n} \\ & \cdots & \\ \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}
$$

como se tiene la relación

$\mu(y_i) = \alpha_{i1}x_1 + \nu(y_i)$, $2 \leq i \leq n$, por (16), es claro,que con respecto a la base $\{x_1, y_2, \ldots, y_n\}$ de E, el endomorfismo μ admite la matriz U.

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ 0 & \beta_{22} \ldots \beta_{2n} \\ & \ldots \\ 0 & \beta_{n2} \ldots \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P_U(x) = \det(U - x1_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-x & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \beta_{22}-x & \ldots & \beta_{2n} \\ & \ldots & & \\ 0 & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn}-x \end{vmatrix}$$

al desarrollar por la primera columna :

$$P_U(x) = (\alpha_{11}-x) \begin{vmatrix} \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn}-x \end{vmatrix} = (\alpha_{11}-x)\ P_V(x)$$

de donde : $\quad P_U(x) = (\alpha_{11} - x)\ P_V(x) \qquad (18)$

La relación (18) implica que el polinomio P_V divide al P_U, y como este último, por hipótesis, tiene sus valores propios en K ; luego, por hipótesis de recurrencia, ν es triangulizable en cierta base $\{y_2^1, \ldots, y_n^1\}$. Luego, en la base $\{x_1, y_2^1, \ldots, y_n^1\}$ U es triangular .

En la primera parte del teorema se ha demostrado el siguiente corolario :

2.5.4 Corolario

Sea E un EVK , $\dim(E)=n$ y K algebraicamente cerrado .

Todo endomorfismo $\mu: E \longrightarrow E$ es triangulizable .

Hemos tratado hasta el momento la "triangulización" de endomorfismos. Veamos a continuación la "triangulización" de matrices .

2.5.5 Corolario

Sea $U \in \mathcal{M}(n;k)$, $n \geq 1$, K algebraicamente cerrado. Existe entonces una matriz inversible P tal que PUP^{-1} es triangular.

Demostración

La matriz P es la matriz de cambio de base, que nos permite pasar a una base en la cual PUP^{-1} es triangular .

2.5.6 Corolario

En las mismas condiciones de 2.5.5 se tiene que las siguientes afirmaciones son equivalente:

a) Existe una matriz P inversible tal que PUP^{-1} es triangular.

b) U tiene todos sus valores propios en K .

Una matriz que cumple 2.5.6-a) se llama triangulizable sobre K y la matriz P puede, en general, no tener sus coeficientes en K , pero sí dentro de un cuerpo algebraicamente cerrado que contenga a K .

En esta sección, teorema 2.5.3, no se parte de hipótesis concernientes a la multiplicidad de los valores propios del endomorfismo μ . En la sección 2.6 vamos a considerar sólo valores propios simples y en 2.7 valores propios con multiplicidad mayor que uno; también se estudiará la relación entre las multiplicidades de los valores propios y la dimensión del espacio E . Cuando se tengan valores propios simples, vamos a tener matrices diagonales y endomorfismos diagonizables .

2.6 Caso en el Cual Todos los Valores Propios son Simples .

2.6.1 Teorema

Sea E un EVK, K conmutativo. Sea $\mu : E \longrightarrow E$ un endomorfismo y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vectores propios de μ asociados a valores propios $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ distintos dos a dos . Entonces los vectores $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente independientes .

Demostración

Sea F el subespacio vectorial de E generado por $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ las relaciones $\mu(x_i) = \lambda_i x_i$, $1 \leq i \leq n$ muestran que si $x \in F$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, entonces $\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i \in F$, es decir, F es estable por μ .

Sea ahora el endomorfismo ν de F inducido por μ :

$$\begin{aligned} \nu : F &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow \nu(x) = \mu(x) \end{aligned}$$

Dado $x_i \in F$, $\nu(x_i) = \lambda_i x_i$, o sea que los λ_i son valores propios de ν ; como los λ_i están supuestos distintos dos a dos se ve que ν posee al menos n valores propios. Se tiene también que la matriz V asociada a ν es de orden dim(F) es decir , $P_V(x)$ es un polinomio de grado dim(F); de donde, $n \leq \dim(F)$.

Por otro lado, $\dim(F) \leq n$ ya que F es generado por $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Así, $\dim(F) = n$, por lo tanto el conjunto $\{x_1,\ldots x_n\}$ es una base de F y ésto implica que $x_1,\ldots x_n$ son linealmente independientes.

2.6.2 Observación

La hipótesis de que los valores propios λ_i son diferentes dos a dos es esencial para asegurar la validez del teorema anterior.

Por ejemplo, si μ es la aplicación nula o la aplicación identidad y si $\{x_1,\ldots,x_n\}$ es un conjunto de vectores no nulos, es claro que los x_i , $1 \leq i \leq n$, son vectores propios de μ pero no se tiene ninguna garantía de que sean linealmente independientes, tanto para la aplicación nula como para la identidad, que tienen un solo valor propio, cero y uno, respectivamente.

2.6.3 Teorema

Sea E un EVK, K conmutativo, $\dim(E) = n \geq 1$.

Supongamos que el polinomio característico P_μ tiene n raíces simples $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en K, entonces existe una base de E con respecto a la cual la matriz de μ es diagonal,

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Demostración

Para cada i escojamos en E un vector propio correspondiente al valor propio λ_i. Aplicando el teorema 2.6.1 los n vectores así obtenidos son linealmente independientes y como su número es $n = \dim(E)$, éstos forman una base de E; además se tiene, con respecto a la base $\{x_1, \ldots, x_n\}$:

$$\mu(x_1) = \lambda_1 x_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mu(x_2) = \lambda_2 x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mu(x_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

es decir,

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2.6.4 <u>Corolario</u>

Sea $U \in \mathcal{M}(n;K)$, K conmutativo. Supongamos que el polinomio característico de U, P_U, posee todas sus raíces simples $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en K y éstas son diferentes dos a dos; entonces existe una matriz $P \in \mathcal{M}(n;K)$ inversible t.q.

$$PUP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

<u>Demostración</u>

Basta considerar el endomorfismo μ asociado a U, $\mu : K^n \longrightarrow K^n$ y aplicar el teorema anterior. La matriz P es la de cambio de bases.

Conocidos ya algunos resultados sobre matrices diagonales, pasaremos a estudiar un poco los endomorfismos diagonizables. Muchos de los resultados de 2.7 se basarán en los de 2.6 .

2.7 Caracterización de Endomorfismos Diagonizables.

2.7.1 <u>Definición</u>

Sea E un EVK, $\dim(E)=n$; $\mu: E \longrightarrow E$ un endomorfismo. Se dice que μ es diagonizable si existe una base E tal que la matriz U asociada a μ , con respecto a la base dada, es diagonal.

2.7.2 Observación

El teorema 2.6.3 da una condición suficiente para que un endomorfismo μ sea diagonizable; ésta es: que el polinomio característico de μ tenga todas sus raíces en K y que sean todas simples o, en otras palabras, que el polinomio admita n raíces distintas dos a dos en K .

La condición anterior es suficiente mas no necesaria. En efecto, el endomorfismo identidad es diagonizable pero sólo tiene un valor propio.
En esta sección 2.7 vamos a tratar la condición necesaria y suficiente para que un endomorfismo sea diagonizable.

2.7.3 Definición

Sea E un EVK, $\dim(E)=n$, $\mu: E \longrightarrow E$ un endomorfismo y λ un valor propio de μ . Se llama multiplicidad de λ como valor propio a la multiplicidad de λ como raíz de $P_U(x)$. Se llama subespacio propio de E asociado al valor propio λ , $E(\lambda)$, al conjunto de vectores propios de μ asociados a λ ; es decir,

$$E(\lambda) = \operatorname{Ker}(\mu - \lambda I)$$

El siguiente teorema nos proveerá de criterios para analizar cuándo un endomorfismo es diagonizable.

2.7.4 Teorema

En las mismas condiciones de la definición 2.7.3 .

Para que μ sea diagonizable es necesario y suficiente que cumplan las siguientes condiciones:

a) El polinomio P_U tenga todas sus raíces en K.

b) Para todo valor propio λ , la dimensión del subespacio propio $E(\lambda)$ es igual a la multiplicidad de λ como raíz de P_μ .

Demostración

Supongamos que se cumplen a) y b) .

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ las raíces de P_μ y $r_1, r_2, \ldots, r_q$ sus respectivas multiplicidades; $\dim(E(\lambda_i) = r_i$, por b) .

Afirmación : Los subespacios vectoriales $E(\lambda_i)$ son linealmente independientes.

En efecto: sea $x \in E$, probemos que x puede escribirse en forma única como $x = \sum_{i=1}^{q} x_i$; $x_i \in E(\lambda_i)$, $\forall i$.

Supongamos que x puede escribirse también de la forma :

$$x = y_1 + y_2 + \ldots + y_q$$

$$x - x = 0$$

$$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \ldots + (x_n - y_n) = 0$$

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_q = 0 \; ; \; z_i = x_i - y_i \in E(\lambda_i) \tag{19}$$

Se tiene una combinación lineal, no trivial, nula de elementos de E. Como los z_i son vectores propios asociados a valores propios λ_i, distintos dos a dos, entonces son linealmente independientes y por (19) debe cumplirse que $z_i = 0$, $\forall i$, de donde $x_i = y_i$, $\forall i$.

Como los $E(\lambda_i)$ son linealmente independientes y $\sum_{i=}^{q} r_i = n$, entonces

$$E = E(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus E(\lambda_n) .$$

En estas condiciones, una base de E es la reunión de bases de $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_q)$ y está formada sólo de vectores propios :

$\{ x_1^1, \ldots, x_{r_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{r_2}^2, \ldots, x_1^q, \ldots, x_{r_q}^q \}$. La matriz asociada a μ en esta base es :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \lambda_1 \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_q & \\ & 0 & & & & & & & \ddots \; \lambda_q \end{bmatrix}$$

o sea, μ es diagonizable .

Supongamos ahora que μ es diagonizable . Existe entonces una base de E t.q.la matriz asociada a μ es diagonal. Así, se tiene :

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_q \end{pmatrix}$$

entonces : $P_U(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \ldots (x - \lambda_q)^{r_q}$

Así, la multiplicidad de λ_i como valor propio de μ es r_i ; además, la dimensión de $E(\lambda_i)$ es r_i . Por otra parte, los valores propios λ_i están todos en K .

2.7.5 Observación

La condición b) del teorema anterior significa que $E(\lambda)$ posee la más grande dimensión posible, en otras palabras, se cumple la desigualdad:

$\dim(E(\lambda)) \leq P$; P: multiplicidad de λ , (20)

Para todo valor propio λ de μ .

Para probar el resultado anterior sea $F = E(\lambda)$.

Es claro que $\mu(F) \subset F$ y que el endomorfismo ν de F inducido por μ es la homotecia de razón λ ; el polinomio característico ν es:

$$P_\nu(x) = (\lambda - x)^{\dim(E(\lambda))}$$

En estas condiciones, para demostrar (20) basta probar que el polinomio $P_\nu(x)$ divide a $P_\mu(x)$.

En general : Sea F un subespacio de E estable por μ y sea ν el endomorfismo de F inducido por μ , entonces P_ν divide a P_μ .

El objetivo de las secciones siguientes es demostrar el Teorema de Jordán. Este teorema trata sobre la reducción a la forma triangular de matrices no diagonizables; su utilidad, en nuestro caso, se dará en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales.

2.8 El Teorema de Hamilton-Cayley

2.8.1 Teorema

Sea E un EV$\mathbb{C}$, $\dim(E) = n \geq 1$ y $\mu : E \longrightarrow E$ un endomorfismo . Si $P_\mu(x)$ es el polinomio característico de μ , entonces $P_\mu(\mu) = 0$

Demostración

Como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado existe una base $B = \{ x_1, x_2, \ldots x_n \}$ tal que la matriz U asociada a μ , con respecto a B , es triangular :

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \dots \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} \dots \alpha_{2n} \\ & \dots \\ 0 & 0 \quad\quad \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

o sea :

$$\begin{aligned} \mu(x_1) &= \alpha_{11}\, x_1 \\ \mu(x_2) &= \alpha_{12}\, x_1 + \alpha_{22}\, x_2 \\ &\dots \\ \mu(x_i) &= \alpha_{1i}\, x_1 + \dots + \alpha_{ni} x_i \qquad (21) \\ &\dots \\ \mu(x_n) &= \alpha_{1n}\, x_1 + \dots + \alpha_{nn} x_n \end{aligned}$$

Sea X_i , $1 \leq i \leq n$, el subespacio vectorial generado por $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i$. Se tiene así que $x \in X_i$, $\mu(x) \in X_i$, ya que $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_i$ y $\mu(x) = \mu\left(\sum_{j=1}^{i} a_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{i} a_j \mu(x_j)$, en donde los $\mu(x_j)$ sólo dependen de $x_1, \dots, x_i$.

Además como

$$P_\mu(x) = (\alpha_{11}-x)\dots(\alpha_{nn}-x) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11}-x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22}-x & \dots & \alpha_{2n} \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn}-x \end{pmatrix}$$

entonces $P_\mu(\mu) = (\alpha_{11}I-\mu)\dots(\alpha_{nn}I-\mu)$

se tiene:

$$\mu : E \longrightarrow E$$

$$P_\mu(\mu) : E \longrightarrow E$$

Para probar que $P_\mu(\mu) = 0$, hay que probar que

$\forall v \in E$, $\left[P_\mu(\mu)\right]$ $(v) = 0$, es decir, demostrar que $\forall v \in E$,

$$\left[P_\mu(\mu)\right](v) = (\alpha_{11}I-\mu)\ldots(\alpha_{nn}I-\mu)(v) = 0$$

probaremos lo anterior demostrando que $\forall i$, $1 \leq i \leq n$,

$(\alpha_{1i}I-\mu)\ldots(\alpha_{ii}I-\mu)$ $(x) = 0$, $\forall$ $x \in X_i$, puesto que si se cumple para todo i , se cumple para $X_n = E$.

Por inducción en i :

a) para $i = 1$:

$(\alpha_{11}I-\mu)$ $(x_1) = \alpha_{11}x_1 - \mu(x_1) = 0$. En este caso basta probar con el vector de la base.

b) Supongamos que la afirmación se cumple para $i-1$, $i > 1$, es decir:

$$(\alpha_{11}I-\mu)\ldots(\alpha_{(i-1)(i-1)}I-\mu)\ (x) = 0, \ \forall x \in X_{i-1}$$

Demostremos que es cierta para i , o sea :

$$(\alpha_{11}I-\mu)\ldots(\alpha_{ii}I-\mu)(x) = 0, \quad \forall x \in X_i \ .$$

Sea $x \in X_i$, entonces x se escribe en la forma :

$$x = \kappa\ x_i + x^1$$

con $x^1 \in X_{i-1}$, $\kappa \in \mathbb{C}$.

afirmación : $(\alpha_{ii}I-\mu)$ $(x^1) \in X_{i-1}$. En efecto,

$$\alpha_{ii}I(x^1) = \alpha_{ii}x^1 \in X_{i-1}$$

y $\mu(x^1) \in X_{i-1}$ porque x_{i-1} es estable por μ .

Además, $(\alpha_{ii}I-\mu)$ $(\kappa x_i) = \alpha_{ii}(\kappa x_i) - \mu(\kappa x_i)$

$$= \kappa(\alpha_{ii}x_i - \mu(x_i)) \in X_{i-1}$$

Hemos probado que

$[\alpha_{ii}I-\mu]\ (\kappa x_i + x^1) \in X_{i-1}$, o sea

$[\alpha_{ii}I-\mu]\ (x) \in X_{i-1}$; y por lo tanto, por hipótesis de inducción, es anulado por $(\alpha_{11}I-\mu)\ (\alpha_{(i-1)(i-1)}I-\mu)$ y entonces

$(\alpha_{11}I-\mu)(\alpha_{22}I-\mu)\dots(\alpha_{(i-1)(i-1)}I-\mu)\,[(\alpha_{ii}I-\mu)(x)] = 0$

$\forall x \in X_i$. El teorema se sigue del hecho que para $i = n$, $X_n = E$.

La sección 2.9 servirá solamente como una "memoria" de resultados. Los teoremas que se estudiarán solamente serán mencionados puesto que, por el momento sólo nos interesa su aplicación.

2.9 Teorema de Bezoot

2.9.1 Definición

Se dice que dos polinomios f y g son primos entre sí, si su MCD es un polinomio de grado cero; es decir, si su único común divisor es una constante no nula.

2.9.2 Teorema (Bezoot)

Si f y g son dos polinomios primos entre sí, existen otros dos polinomios F y G tales que

$$f(x)\,F(x) + g(x)\,G(x) = 1$$

2.9.3 <u>Teorema</u>

Sea E un EV , $\dim(E) = n$ y $\mu: E \longrightarrow E$ un endomorfismo. Si F es un subespacio de E estable por μ , entonces el polinomio característico del endomorfismo $\nu: F \longrightarrow F$ inducido por μ , divide a $P_\mu(x)$, es decir ,

$$P_\nu(x) / P_\mu(x)$$

2.10 Descomposición en Endomorfismos nilpotentes

2.10.1 Definición

Sea $U \in \mathcal{M}(n;k)$. Se dice que U es nilpotente, de índice de nilpotencia p si $U^p = \mathbb{O}$, pero $U^{p-1} \neq \mathbb{O}$.

2.10.2 Lema

Sea U una matriz triangular con coeficientes en un campo conmutativo K . Si U es nilpotente, entonces $\alpha_{ii} = 0$, para $i = 1,2,\ldots,n$.

<u>Demostración</u>

Sea la matriz

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots\alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces $U^{\ell} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{\ell} & & & \cdots \\ & \alpha_{22}^{\ell} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_{nn}^{\ell} \end{pmatrix}$ $,\forall\ \ell \in \mathbb{N}$

por hipótesis $U^n = 0$, o sea : $\begin{pmatrix} \alpha_{11}^{n} & \cdots & \\ & \alpha_{22}^{n} & \\ & & \alpha_{nn}^{n} \end{pmatrix} = 0$

$\therefore \quad \alpha_{ii}^{n} = 0$, $\forall i$, luego $\alpha_{ii} = 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$.

El primero paso dentro del estudio del Teorema de Jordán consiste en considerar el siguiente teorema.

2.10.3 Teorema

Sea E un EVK de dimensión finita , K cuerpo conmutativo y $\mu : E \longrightarrow E$ un endomorfismo.

Supongamos que μ tiene todos sus valores propios en K y sea

$$P_{\mu}(x) = (\lambda_1 - x)^{r_1} \ldots (\lambda_q - x)^{r_q}$$

su polinomio característico, donde los λ_i son los diversos valores propios de μ y las r_i sus respectivas multiplicidades.

Sea
$$E_i = \mathrm{Ker}(\mu - \lambda_i I)^{r_i} \quad , \ i = 1,2,\ldots,q$$

Entonces E es la suma directa de los E_i y

$\dim E_i = r_i$, $1 \leq i \leq q$.

Demostración

Para simplificar la notación pongamos:

$$P_\mu(x) = P(x)$$

$$f_i(x) = (\lambda_i - x)^{r_i}$$

$$g_i(x) = f_1(x)\dots f_{i-1}(x)\ f_{i+1}(x)\dots f_q(x)$$

$$g_i(x) = (\lambda_1 - x)^{r_1}\dots(\lambda_{i-1} - x)^{r_{i-1}}(\lambda_{i+1} - x)^{r_{i+1}}\dots(\lambda_q - x)^{r_q}$$

Como los λ_i son dos a dos distintos, los polinomios g_i , $1 \leq i \leq q$, son primos entre sí, entonces por el teorema 2.9.2 existen polinomios $h_i \in K[x]$ tales que:

$$\sum_{i=1}^{q} h_i(x)\ g_i(x) = 1$$

para $x = \mu$ tendremos $\sum_{i=1}^{q} h_i(\mu) . g_i(\mu) = I_E$

Así , para cada $x \in E$ poniendo

$$\mu_i = f_i(\mu)$$

$$\nu_i = g_i(\mu)$$

$$\omega_i = h_i(\mu) \quad ,$$

se tendrá :

$$\sum_{i=1}^{q} \omega_i(\nu_i(x)) = x$$

es decir , $x = \omega_1\ (\nu_1(x)) + \dots + \omega_q(\nu_q(x))$, en otras palabras, los $\omega_i(\nu_i(x))$ engendran a E . Probemos ahora que cada $\omega_i(\nu_i(x)) \in E_i$, $1 \leq i \leq q$.

Como $P(x) = f_i(x)\ g_i(x)$, $f_i(\mu)\ g_i(\mu) = P(\mu) = 0$, por 2.8.1 , o sea, $\mu_i \circ \nu_i = 0$, $1 \leq i \leq q$, entonces $\omega_i \circ \mu_i \circ \nu_i = 0$.

Ya que los g_i , h_i y f_i son polinomios en μ , conmutan, luego

$$\mu_i \circ \omega_i \circ \nu_i = 0$$

Esto muestra que para todo x ,

$$\mu_i(\omega_i(\nu_i(x))) = 0$$

es decir, $\omega_i(\nu_i(x)) \in \operatorname{Ker} \mu_i = \operatorname{Ker} f_i(\mu)$

$$= \operatorname{Ker} [(\lambda_i - \mu)^{r_i}]$$

$$= E_i$$

Hemos demostrado hasta el momento que

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_q ,$$

resta demostrar que

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_q$$

y que $\quad \dim(E_i) = r_i$

Probemos primero que $\dim(E_i) = r_i$. Sea $x \in E_i$, como $E_i = \operatorname{Ker}(\mu - \lambda_i I)^{r_i}$ y como μ conmuta con μ_i se tiene que:

$$(\lambda_i - \mu)^{r_i} (\mu(x)) = \mu(\lambda_i - \mu)^{r_i} (x) = \mu(o) = 0 ,$$

o sea , $\mu(x) \in E_i$; es decir, $\mu(E_i) \subset E_i$, o en otras palabras, E_i es estable por el endomorfismo μ .

Designemos con μ_i^1 al endomorfismo de E_i inducido por μ :

$$\begin{aligned} \mu_i^1 : \; & E_i \longrightarrow E_i \\ & x \longrightarrow \mu_i^1(x) = \mu(x) \end{aligned}$$

Por la observación 2.7.5 $P_{\mu_i^1}(x) / q(x)$. Como el polinomio P_μ

tiene todos sus valores propios en K entonces $P^1_{\mu_i}$ también los tiene y se puede triangulizar . Por construcción de E_i tenemos que

$$(\mu_i^1 - \lambda_i)^{r_i} = 0$$

entonces la matriz de

$$\mu_i^1 - \lambda_i I$$

que trianguliza a μ_i^1 es de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & - & - & - & - \\ & 0 & & & - \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ \mathbb{0} & & & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & & - & - & - \\ & \ddots & & & \vdots \\ \mathbb{0} & & \ddots & & \vdots \\ & & & \kappa_{1n} & \cdots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_i & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

lo que significa que la matriz de μ_i^1 en esta base es de la forma :

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & \lambda_i \end{pmatrix}_{\dim(E_i)}$$

y el polinomio

$$P^1_{\mu_i}(x) = (\lambda_i - x)^{\dim(E_i)}$$

debe dividir al polinomio $P_\mu(x)$, o sea, $\dim(E_i) \leq r_i$.

Por otra parte :

$$n = \dim(E) = \dim(E_1 + \ldots + E_q) \leq \dim(E_1) + \ldots + \dim(E_q) \leq r_1 + \ldots + r_q = n$$

luego, $\dim(E) = \dim(E_1) + \ldots + \dim(E_q)$ (22)

de donde : $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_q$

y $\dim(E_i) = r_i$, $1 \leq i \leq q$, ya que si existe E_i t.q.

$\dim(E_i) < r_i$, entonces

$$\dim(E_1) + \ldots + \dim(E_i) + \ldots + \dim(E_q) < r_1 + \ldots + r_i + \ldots + r_q$$

contrario a (22) .

2.11 Estructura de los Endomorfismos Nilpotentes

El segundo paso en el estudio del teorema de Jordán lo constituye la siguiente proporsición :

2.11.1 Proposición

Sea E un EVK, K conmutativo, $\dim(E) = n \leq 1$ y $\mu: E \longrightarrow E$ un endomorfismo. Si μ es nilpotente con índice de nilpotencia $q + 1$, entonces existe una base de E con respecto a la cual la matriz de μ es de la forma :

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

en donde los escalares α_i , $1 \leq i \leq n$, son iguales a 0 ó 1 .

Para demostrar esta proposición, dada su "sencillez" , veremos primero tres lemas auxiliares.

2.11.2 <u>Lema</u>

Con las mismas condiciones de 2.11.1 .

Definamos $E_r = \mathrm{Ker}(\mu^r)$, $o \leq r \leq q+1$. Entonces, la sucesión de subespacios (E_r) $o \leq r \leq q+1$ es estrictamente creciente,

$0 = E_\circ \subset E \subset \ldots \subset E_q \subset E_q + 1$, y $\mu(E_{i+1}) \subset E_i$, $\forall i \geq 0$.

<u>Demostración</u>

Sea $x \in E_i$, entonces $\mu^{i+1}(x) = \mu(\mu^i(x)) = \mu(o) = 0$,

luego $x \in E_{i+1}$, es decir, $E_i \subset E_{i+1}$. Probemos que la in - clusión es estricta . Supongamos que se cumple $E_i = E_{i+1}$, para algún i , y sea $x \in E$; entonces

$$0 = \mu^{q+1}(x) = \mu^{i+1}(\mu^{q-i}(x))$$

de donde ,

$$\mu^{q-1}(x) \in E_{i+1} = E_i$$

luego, $\mu^i(\mu^{q-i}(x)) = 0$, o sea , $\mu^q(x) = 0$, lo que no puede ser dado que el índice de nilpotencia de μ es q + 1 .

Probemos ahora que $\mu(E_{i+1}) \subset E_i$.

Sea $x \in E_{i+1}$, entonces :

$\mu^{i+1}(x) = 0 \Longrightarrow \mu^i(\mu(x)) = 0 \Longrightarrow \mu(x) = E_i$, $\forall\, x \in E_{i+1}$;

luego, $(E_{i+1}) \subset E_i$.

Las condiciones de los lemas 2.11.3 y 2.11.4 son las mismas dadas en 2.11.2 .

2.11.3 Lema

Si i es un entero , $1 \leq i \leq q$, y F un subespacio de E t.q. $F \cap E_i = \{o\}$, entonces $\mu(F) \cap E_{i-1} = \{o\}$ y μ induce un isomorfismo de F en $\mu(F)$.

Demostración

Sea $x \in \mu(F) \cap E_{i-1}$; existe un $y \in F$ t.q. $x = \mu(y)$; y como $0 = \mu^{i-1}(x) = \mu^{i}(y)$ se sigue que $y \in F \cap E_i = \{o\}$, luego $y = 0$ y $x = 0$, de donde $\mu(F) \cap E_{i-1} = \{o\}$.

La aplicación ν ,

$$\begin{aligned} \nu : F &\longrightarrow \mu(F) \\ x &\longrightarrow \nu(x) = \mu(x) \end{aligned}$$

es biyectiva . En efecto, ν es lineal y sobreyectiva; falta probar que es inyectiva. Sea $y \in F$ t.q. $\nu(y) = \mu(y) = 0$, entonces $y \in E_i$, algún i , luego $y \in F \cap E_i = \{o\}$, es decir $y = 0$.

2.11.4 Lema

Existen subespacios vectoriales $F_1, \ldots, F_{q+1}$ de E que cumplen las propiedades siguientes:

a) $E_i = E_{i-1} \oplus F_i$, $1 \leq i \leq q+1$

b) μ aplica inyectivamente F_i en F_{i-1} ; $2 \leq i \leq q+1$

Demostración

Sabemos, por 2.11.2 , que $E_o \subset E_1 \subset \ldots \subset E_{q+1} = E$.

Sea F_{q+1} suplementario de E_q en E_{q+1} , se dan entonces las siguientes relaciones :

$$E_{q+1} = F_{q+1} \oplus E_q \tag{23}$$

$$F_{q+1} \cap E_q = \{ o \} \tag{24}$$

$$\mu(F_{q+1}) \cap E_{q-1} = \{ o \} \text{ , por 2.11.2 ,} \tag{25}$$

$$F_{q+1} \subset E_{q+1} \tag{26}$$

$$\mu(E_{q+1}) \subset E_q \text{ , por 2.11.1 ,} \tag{27}$$

Las relaciones (26) y (27) implican $\mu(F_{q+1}) \subset E_q$ (28)

Sea ahora F_q un suplementario en E_q de E_{q-1} t.q.

$\mu(F_{q+1}) \subset F_q$. (29)

La relación (29) es posible por (25) . Siguiendo el razona - miento utilizdo al principio de la demostración se prueba que $\mu(F_q) \subset F_{q-1}$ y que $\mu(F_q) \subset F_{q-1}$. En forma similar se obtienen los subespacios F_i que verifican la condición a) y la relación $\mu(F_i) \subset F_{i-1}$.

La parte b) del lema se sigue de la segunda aserción del lema 2.11.3 .

<u>Demostración</u> de la proposición 2.11.1

Sean F_i los subespacios mencionados en el lema 2.11.4 ; de - signemos por $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1r_1}$ una base de F_{q+1} como estos vectores son linealmente independientes y μ aplica inyectivamente F_{q+1} en F_q , por 2.11.4 , los vectores imágenes forman parte de una base de F_q ; en otras palabras, existe una base de F_q de la forma:

$$x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2r_1}, x_{2r_1+1}, \ldots, x_{2r_2}$$

en donde $\mu(x_{1j}) = x_{2j}$, para $1 \leq j \leq r_1$.

similarmente, existe una base de F_{q-1} t.q.

$$\mu(x_{2j}) = x_{3j} \text{ , para } 1 \leq j \leq r_2$$

se repite el proceso anterior hasta tener una base de $F_1 = E_1$,

$$x_{(q+1)1}, \ldots, x_{(q+1)(r_{q+1})}$$

tal que $\mu(x_{qj}) = x_{(q+1)j}$ para $1 \leq j \leq r_q$.

$$\begin{array}{llr}
x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1r_1} & & \text{base de } F_{q+1} \\
\left.\begin{array}{l} \mu(x_{11}), \ldots, \mu(x_{1r_1}), x_{2(r_1+2)}, \ldots, x_{2r_2} \\ x_{21}, \ldots, x_{2r_1}, x_{2(r_1+1)}, \ldots, x_{2r_2} \end{array}\right\} & & \text{base de } F_q \\
x_{31}, \ldots, x_{3r_2}, x_{3(r_2+1)}, \ldots, x_{3r_3} & & (30) \\
\ldots & & \\
x_{(q+1)1}, \ldots, x_{(q+1)r_{q+1}} \Big\} & \text{base de } F_1 = E_1 &
\end{array}$$

Los vectores de (30) pueden expresarse de la siguiente manera:

$$x_{11} \quad , \quad x_{12} \quad , \quad \ldots , x_{1}r_{1}$$

$$\mu(x_{11}) \quad , \quad \mu(x_{12}) \; , \; \ldots \; , \mu(x_1r_1) \; , x_{2(r_{1+1})}, \ldots, x_2r_2$$

$$\mu^2(x_{11}), \mu^2(x_{12}), \ldots, \mu^2(x_{1n}), \mu(x_{2(r_{1+1})}), \ldots, \mu(x_2, r_2), x_{3(r_2+1)},$$

$$\ldots, x_3r_3 \tag{31}$$

$$\ldots\ldots$$

$$\mu^q(x_{11}), \mu^q(x_{12}), \ldots, \mu^q(x_{1r_1}), \mu^{q-1}(x_{2(r_1+1)}, \ldots\ldots, x_{(q+1)(r_{q+1})}$$

Al escribir los vectores de (31) en columnas, comenzando por la parte inferior, tenemos :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \mu^q(x_{11}) \\
x_2 &= \mu^{q-1}(x_{11}) \\
&\ \ \cdots \\
x_q &= \mu(x_{11}) \\
x_{q+1} &= x_{11} \\
x_{q+2} &= \mu^q(x_{12}) \\
x_{q+3} &= \mu^{q-1}(x_{12}) \\
&\ \ \cdots \\
&\ \ \text{etc.}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Los vectores x_i , $1 \leq i \leq n$, de (32), son tales que forman una base de E y cumplen :

o bien $\mu(x_i) = 0$ o bien $\mu(x_{i+1}) = x_i$, $\forall i$.

Con respecto a esta base, la matriz asociada a μ posee la forma

$$
\begin{pmatrix}
0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\
 & & \cdots & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

en donde $\alpha_i = 0$ ó $\alpha_i = 1$, $1 \leq i \leq n$.

Después del "rodeo" que hemos dado el Teorema de Jordán viene a ser un resultado casi inmediato, pero su aplicación, como veremos, es bastante amplia.

2.12 El Teorema de Jordán

2.12.1 Definición

Se llama matriz reducida (o matriz de Jordán), con coeficientes en un campo conmutativo K a toda matriz cuadrada de la forma :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Por ejemplo :

(λ) , $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, son matrices reducidas de órdenes 1, 2 y 3 , respectivamente.

2.12.2 Teorema (Jordán)

Sea E un EVK, $K = \mathbb{C}$, $\dim(E) = n \geq 1$ y $\mu: E \longrightarrow E$ un endomorfismo. Entonces existe una base de E con respecto a la cual la matriz de μ es de la forma :

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & & & \mathbb{0} \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{0} & & & U_r \end{pmatrix}$$

en donde U_i , $\forall i$, es una matriz reducida.

Demostración

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ los valores propios de μ y $r_1, r_2, \ldots, r_q$ sus respectivas multiplicidades . E puede descomponerse de la siguiente manera :

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_q$$

donde $E_i = \mathrm{Ker}(\mu - \lambda_i I)^{r_i}$; $1 \leq i \leq q$.

Por otra parte, $\mu - \lambda_i I$ actuando sobre E_i es nilpotente, existe entonces una base de E_i con respecto a la cual la matriz asociada a $\mu - \lambda_i I$ es de la forma pedida, con $\lambda = 0$,

$$U_i - \lambda_i 1_m = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & & \mathbb{O} \\ & 0 & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \alpha_m \\ \mathbb{O} & & & & 0 \end{pmatrix}, \; m = \dim(E_i)$$

actuando $\mu - \lambda_i I$ sobre E_i se tiene :

$$U_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \alpha_1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_m \\ \mathbb{O} & & & \lambda_i \end{pmatrix} \qquad (32)$$

Al reunir las bases de los E_i se obtiene la matriz U asociada a μ :

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & & & \mathbb{0} \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{0} & & & U_q \end{pmatrix}$$

con U_i de la forma (32) , $1 \leq i \leq q$.

2.12.3 Ejemplo :

Encontrar la forma de Jordán del endomorfismo μ cuya matriz en la base canónica es:

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_U(x) = \begin{vmatrix} 3-X & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5-X & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3-X & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1-x \end{vmatrix}$$

$$P_U(x) = (3-x) \begin{vmatrix} -5-X & -2 & 4 \\ 0 & 3-X & -2 \\ 0 & 2 & -1-X \end{vmatrix} -4 \begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 3-X & -2 \\ 0 & 2 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$P_U(x) = (x-1)^2(x+1)^2$$

Así, los valores propios de μ son 1 y -1, ambos con multi - plicidad 2 .

Trabajemos con $(\mu - 1)$

$$U-1 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculemos entonces el núcleo de $\mu - 1$, es decir los X tales que $(\mu - 1)(X) = 0$.

$(\mu - 1)(X) = 0$ equivale a $(U - 1)X = \mathbb{0}$, es decir :

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando operaciones fundamentales en filas tenemos :

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que origina las ecuaciones

$$\begin{matrix} 2x_3 - 2x_4 = 0 & & x_3 = x_4 & & x_1 = x_4 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 & \Longrightarrow & x_2 = x_3 & \Longrightarrow & x_2 = x_3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 0 & & x_1 = 2x_2 - x_4 & & x_3 = x_4 \end{matrix}$$

y no tenemos más que una variable libre : $\underline{x_4}$ así, elegimos :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{, o sea } \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trabajemos ahora con $(\mu - 1)^2$

$$(U-1)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 16 & 12 & -16 \\ -16 & 20 & 16 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y el rango de $(\mu - 1)^2 = 2$

$$(U-1)^2 X=0 \begin{pmatrix} -12 & 16 & 12 & -16 \\ -16 & 20 & 16 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad -12x_1 + 16x_2 + 12x_3 - 16x_4 = 0$$

$$-16x_1 + 20x_2 + 16x_3 - 20x_4 = 0$$

fijando $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$ obtenemos $x_3 = 1$ y $x_4 = 0$ y re - sulta entonces el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; fijando ahora $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$

obtenemos el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, luego :

$$E_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \operatorname{Ker}(\mu-1)^2 ,$$

ya que dim $\operatorname{Ker}\left[(\mu-1)^2\right] = 2$. Pongamos entonces F_1 un suplementario de E_1 en $E_2 = \operatorname{Ker}(\mu-1)^2$, y como base de F_1 elijamos $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$; como μ aplica inyectivamente F_1 en $F_\circ$ tenemos

$$(\mu-1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2\\ 4 & -6 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 2 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$$ y como

dim $\operatorname{Ker}(\mu-1)^2 = 2$, tenemos que $\operatorname{Ker}(\mu-1)^2 = F_1 \oplus F_\circ$, donde $F_\circ$ es el subespacio engendrado por $\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$, y una base de $\operatorname{Ker}(\mu-1)^2$ está formada entonces por

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix} = (\mu-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Busquemos ahora una base de $\operatorname{Ker}(\mu+1)^2$

$$(\mu+1) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2\\ 4 & -4 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

El $\operatorname{Ker}(\mu+1)$ puede encontrarse resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Haciéndolo por operaciones elementales en fila tenemos:

$$\begin{matrix} 4 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 4 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{matrix}$$

lo que da :

$$x_3 = 0$$

$$4x_3 - 2x_4 = 0 \quad \text{o sea} \quad x_4 = 0$$

$$\text{y} \quad 4x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 0 \quad \text{o sea} \quad 4x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\therefore \quad x_1 = x_2$$

y no hay más que una variable libre, digamos x_1 .

Hagamos entonces $x_1 = 1$ y resulta el vector

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{base de } E_1 = \operatorname{Ker}(\mu+1)$$

Además:

$$(\mu+1)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Encontremos $\operatorname{Ker}(\mu+1)^2$, haciendo operaciones elementales en fila,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore \text{ el rango de } (\mu+1)^2 \text{ es } 2, \text{ y}$$

las ecuaciones que se obtienen son :

$$\begin{matrix} 12x_3 - 8x_4 = 0 \\ 8x_3 - 4x_4 = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix}$$

y x_1 , x_2 resultan ser variables libres. Pongamos entonces los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ como base de $E_2 = \operatorname{Ker}(\mu+1)^2$. Busquemos

entonces su suplementario de E_1 en $E_2 = \operatorname{Ker}(\mu+1)^2$,

$E_1 = \operatorname{Ker}(\mu+1)$. Elijamos como base de F_1 el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Una base de F_0 es entonces obtenida con el vector

$(\mu+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, como $\dim \operatorname{Ker}(\mu+1)^2 = 2$, tenemos que

$$\operatorname{Ker}(\mu+1)^2 = F_1 \oplus F_0$$

y una base de $\operatorname{Ker}(\mu+1)^2$ está formada por

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\mu+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por otra parte $E = \operatorname{Ker}(\mu-1)^2 \oplus \operatorname{Ker}(\mu+1)^2$

y una base de E se obtiene reuniendo las bases ya obtenidas para $Ker(\mu-1)^2$ y $Ker(\mu+1)^2$, resultando así que

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}4\\4\\0\\0\end{pmatrix}$ es la base de E . Ordenemos esta base en la forma siguiente :

$$f_1 = \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix}4\\4\\0\\0\end{pmatrix} \text{ y } f_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

ya que $\mu-1$ restringido a $Ker(\mu-1)^2$ es $(\mu-1)(f_1) = 0$, $(\mu-1)\ (f_2) = f_1$ y $(\mu+1)$ restringido a $Ker(\mu+1)^2$ es $(\mu+1)\ (f_3) = 0$ y $(\mu-1)(f_4) = f_3$ tenemos que la matriz de μ en la base $\{ f_1 , f_2 , f_3 , f_4 \}$ es :

$$U = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

con los bloques de Jordán

$$J_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\ J_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix}U_1 & 0\\0 & U_2\end{pmatrix}$$

La sección 2.13, última de este capítulo, pretende enseñarnos a calcular la exponencial de una matriz dada. Esta exponencial vuelve a aparecer en el capítulo 4 cuando estemos resolviendo sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

2.13 Exponencial de una Matriz

Nuestro interés en este momento es calcular e^A , siendo

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

para lograrlo, necesitamos primero tratar sobre la norma en el espacio $\mathbb{M}(n;\mathbb{C})$ y el límite de una sucesión de matrices. Como cada matriz de $\mathbb{M}(n;\mathbb{C})$ puede identificarse con un punto de $\mathbb{C}^{n^2}$, usamos la norma en $\mathbb{C}^{n^2}$ para definir la norma en $\mathbb{M}(n;\mathbb{C})$, (ver 1.1.2-c) .

2.13.1 Recordar:

Sea $A\in \mathbb{M}(n;k)$, $A=(a_{ij})$. La aplicación

$$\| \ \| : \mathbb{M}(n;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}_o^+$$

$$A \longrightarrow \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right\}^{1/2}$$

es una norma en $\mathbb{M}(n;\mathbb{C})$

2.13.2 Definición

Sea $(A_n)_{n\in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{M}(n;\mathbb{C})$. Se dice que la sucesión es convergente y que converge a la matriz $A\in \mathbb{M}(n;\mathbb{C})$, si $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_o\in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n > n_o$, $\| A_n - A\| < \varepsilon$.

Recordemos que el límite de una función vectorial está determinado por los límites de las funciones componentes. En las sucesiones de matrices, el límite de una sucesión es la matriz de los límites de las sucesiones de las entradas.

La afirmación anterior se probará en el siguiente teorema.

2.13.3 Teorema

Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $M(n;\mathbb{C})$ y $A \in M(n;\mathbb{C})$. Entonces :

$$\lim_{n\to\infty}(A_n) = A \quad \text{ssi} \quad \mathrm{Lim}(A^n_{ij}) = A_{ij}$$

A_{ij} representa la i,j -ésima entrada de A y $(A^n_{ij})_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de componentes en la i,j -ésima entrada de la suce - sión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración

Ver referencia bibliográfica (8)

2.13.4 Definición

Sea $A\in M(n;\mathbb{C})$. Definamos la matriz B_m por

$$B_m = 1_n + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^m}{m!} \tag{33}$$

Nuestro propósito ahora es definir $\exp(A) = e^A$ como el límite $\lim_{n\to\infty} B_n$, pero para poder hacerlo debemos probar primero que la sucesión de sumas parciales B_1 , B_2 ,..., tiene límite. Los teoremas 2.13.5, 2.13.7 y el corolario 2.13.6 nos garantizarán tal convergencia .

2.13.5 Teorema

Sean E y F E.V.N., $\dim(E) = n$ y $T: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Entonces T es continua y existe $K > 0$ tal que

$$\| T(x) \| \leq K \| x \| \ , \quad \forall x \in E \ .$$

Demostración:

Referencia bibliográfica (8) .

2.13.6 Corolario

Si $A \in \mathcal{M}(n;\mathbb{C})$, existe $K > 0$ tal que

$$\| A \|^n \leq K^{n-1} \| A \| \ .$$

Demostración: Ibid.

2.13.7 Corolario

Sea $A \in \mathcal{M}(n;\mathbb{C})$. La serie $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$ es convergente .

Demostración:

Referencia bibliográfica (8)

2.13.8 Definición

Sea $A \in \mathcal{M}(n;\mathbb{C})$, la matriz $\exp(A)$ ó e^A se define :

$$e^A = \lim_{m \to \infty} (1_n + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^m}{m!})$$

ó $$e^A = \sum_{m=o}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$$

2.13.9 Consecuencia

A partir de la definición anterior se obtienen los siguientes resultados :

a) $e^{\mathbb{O}} = 1_n$. En efecto :

$$e^{\mathbb{O}} = \operatorname{Lim}\left(1_n + \mathbb{O} + \frac{\mathbb{O}^m}{2!} + \ldots + \frac{\mathbb{O}^m}{m!}\right) = 1_n$$

b) Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \lambda_n \end{pmatrix}$ entonces $e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

En efecto

$$e^A = \sum_{m=o}^{\infty} \frac{A^m}{m!} = \sum_{m=o}^{\infty} \frac{1}{m!} \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{m=o}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^m}{m!} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\lambda_n^m}{m!} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=o}^{\infty} \frac{\lambda_1}{m!} & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \sum \frac{\lambda_n^m}{m!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Los siguientes resultados son algunas propiedades de la exponen - cial de una matriz .

2.13.10 Teorema

Sean $A, B \in \mathbb{M}(n;\mathbb{C})$ tales que $AB = BA$, entonces :

a) $A.\, e^{B} = e^{B}\, .\, A$

b) $e^{A}.e^{B} = e^{B}.\, e^{A}$

Demostración:

Referencia bibliográfica (8)

Como sabemos la solución de la ecuación diferencial $y^{1} = \alpha y$ es $y = c\, e^{\alpha x}$. Nuestro interés es ampliar este resultado para sistemas de ecuaciones diferenciales. El primer paso es mostrar que para diferenciar la exponencial de una matriz podemos aplicar la misma regla que se usa para $f(x)=e^{\kappa x}$.

2.13.11 Teorema

Sea $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \exp_A : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{M}(n;\mathbb{C}) \\ t &\longrightarrow e^{tA} \end{aligned}$$

Entonces $\exp_A$ es diferenciable y se tiene

$$\frac{de^{tA}}{dt} = Ae^{tA}$$

Demostración:

Referencia Bibliográfica (8)

2.13.12 <u>Teorema</u>

Sean las aplicaciones f y g :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}(n;\mathbb{C}) \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}(n;\mathbb{C})$$
$$t \longrightarrow A(t) \qquad\qquad t \longrightarrow B(t)$$

f y g diferenciables . Entonces :

$$\frac{d}{dt}\left[(f.g)(t) \right] = \frac{d}{dt}\left[A(t)\ B(t) \right]$$

$$= \frac{d}{dt}\ A(t) + \frac{d}{dt}\ B(t)$$

<u>Demostración</u>:

Referencia bibliográfica (8)

2,13,13 <u>Teorema</u>

Sean $A, B \in \mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ con $A.B = B.A$. Entonces

a) e^{A} es inversible y su inversa es e^{-A}

b) $e^{A}\ e^{B} = e^{A+B}$

<u>Demostración</u>:

Referencia bibliográfica (8)

Con lo visto en los capítulos 1 y 2 estamos en condiciones para entrar al estudio de las ecuaciones diferenciales y su resolución, - especialmente en los sistemas de ecuaciones diferenciales .

3 ECUACIONES DIFERENCIALES. TEOREMAS FUNDAMENTALES

El objetivo de este capítulo es garantizar la existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales lineales. Con esta garantía se procederá, en el Capítulo 4, a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

El camino a seguir, en este tercer capítulo, es el siguiente:

1. Considerar el problema de soluciones aproximadas de la E.D. (ecuación diferencial)

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad (*)$$

2. Tratar el mismo problema planteado en (1) para el caso f K-lipschitziana.

3. Analizar el problema de existencia y unicidad, de la solución de $(*)$, cuando f es K-lipschitziana.

4. Como caso particular de 3, tratar las ecuaciones diferenciales lineales.

De aquí en adelante vamos a suponer que E es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$.

Si Φ es diferenciable y $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow E$, entonces la derivada Φ' estará también definida de $\mathbb{R}$ a E . En efecto: definiendo la isometría natural γ :

$$\begin{aligned} \gamma : E &\longrightarrow L(\mathbb{R};E) \\ A &\longrightarrow \gamma(A) \\ &\qquad \gamma(A) : \mathbb{R} \longrightarrow E \\ &\qquad\qquad \lambda \longrightarrow \lambda A \end{aligned}$$

tenemos que $L(\mathbb{R};E) \simeq E$.

Entonces : dado $t \in \mathbb{R}$, $\Phi'(t) \in L(\mathbb{R};E)$, es decir :

$$\begin{aligned} \Phi'(t) : \mathbb{R} &\longrightarrow E \\ x &\longrightarrow Ax \end{aligned}$$

3.1 Ecuación Diferencial de Primer Orden .

3.1.1 Definición

Sean los conjuntos U e I , $U \subset \mathbb{R} \times E$ e $I \subset \mathbb{R}$, y la función $f : U \longrightarrow E$ continua .

La solución de la ecuación diferencial (1)

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1}$$

es una función Φ de clase C^1 , $\Phi : I \longrightarrow E$ que satisface las dos condiciones siguientes:

i) $(t, \Phi(t)) \in U$, para todo $t \in I$

ii) $\Phi'(t) = f(t, \Phi(t))$, para todo $t \in I$.

Observar : si Φ es sólo diferenciable y satisface i) e ii) se sigue que Φ es clase C^1 , puesto que, por ser $f(t,\Phi(t))$ continua, Φ' es continua .

3.1.2 Definición

Si E es un producto finito de espacios de Banach,
$E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ y $f: U \longrightarrow E$; $U \subset \mathbb{R} \times E_1 \times \ldots \times E_n$ y f es una función de las $n+1$ variables
$t, x_1, \ldots, x_n$; $t \in \mathbb{R}$ y $x_i \in E_i$, $i = 1,2,\ldots,n$.

f está determinada por las n funciones, de variable vectorial, f_i :

$$f_i : U \longrightarrow E_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Una solución Φ de la ecuación (2)

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad (2)$$

debe ser tal que :

i) $(t,\Phi(t)) \in U \subset \mathbb{R} \times E$

ii) $\Phi'(t) = f(t,\Phi(t)) \in E = E_1 \times \ldots \times E_n$

es decir, Φ está determinada por n funciones Φ_i de clase C^1 tales que :

$$\Phi_i : I \longrightarrow E_i$$

$$\Phi(t) = (\Phi_1(t), \ldots, \Phi_n(t))$$

$$(t,\Phi(t)) = (t, \Phi_1(t), \ldots, \Phi_n(t)) \in U$$

$$\Phi_i'(t) = f_i(t, \Phi_1(t), \ldots, \Phi_n(t)) \text{ ; para todo } i \in I$$

Se forma, entonces, un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden con n funciones incógnitas :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t,x_1,\ldots,x_n) \ ; \ 1 \leq i \leq n \ .$$

3.2 Ecuación Diferencial de Orden n .

3.2.1 Definición

Se llama E.D. de orden n a toda ecuación de la forma :

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t,x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt}) \qquad (3)$$

en donde f es una función continua ,

$$f : U \subset \mathbb{R} \times \underbrace{E \times \ldots \times E}_{n\text{-veces}} \longrightarrow E$$

Una solución de (3) es una función Φ de clase C^n ,

$\Phi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$ que satisface :

i) $(t, \Phi(t), \Phi'(t), \ldots, \Phi^{(n-1)}(t)) \in U \ , \ \forall \ t \in I$

ii) $\Phi^{(n)}(t) = f(t, \Phi(t), \Phi'(t), \ldots, \Phi^{(n-1)}(t))$,

para todo $t \in I$

El problema de resolver la ecuación (3) puede reducirse a resolver ecuaciones de primer orden. En efecto :

haciendo

$$\frac{d^i x}{dt} = x_i \ ; \ 1 \leq i \leq n \ , \text{ tenemos:}$$

$$\frac{dx}{dt} = x_1$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3 = \frac{d^3x}{dt^3}$$

$$\cdots$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n = \frac{d^nx}{dt^n} = f(t,x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt})$$

formándose el sistema (4) de ecuaciones de primer orden :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ &\cdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= f(t,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}) \end{aligned} \tag{4}$$

Las soluciones de (4) son n funciones $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}$ de clase C^1 tales que :

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \Phi_1(t) \\ \Phi_1'(t) &= \Phi_2(t) \\ &\cdots \\ \Phi_{n-1}'(t) &= \Phi_n(t) \\ &= f(t, \Phi(t), \Phi_1(t), \ldots, \Phi_{n-1}(t)) \end{aligned}$$

siendo, claramente, $\Phi_i(t) = \frac{d^i \Phi}{dt^i}(t)$, para todo $t \in I$.

En estas condiciones podemos afirmar que el estudio de una ecuación diferencial de orden n se puede reducir al de una ecuación diferencial de primer orden, basta reemplazar E por E^n .

3.3. Soluciones Aproximadas

3.3.1 Definición

Sea $\varepsilon > o$. Una función de clase C^1 Φ , $\Phi : I \longrightarrow E$, se llama una solución *ε-aproximada* de la ecuación diferencial (1) si cumple :

$$\text{i)} \quad (t, \Phi(t)) \in U, \text{ para todo } t \in I \qquad (5)$$

$$\text{ii)} \quad \| \Phi'(t) - f(t, \Phi(t)) \| \leq \varepsilon \text{ , para todo } t \in I.$$

3.3.2 Observación

Supongamos que I es compacto . Entonces

$$I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

siendo los I_k intervalos compactos tales que el extremo derecho de I_{k-1} coincide con el izquierdo de I_k , y tales que Φ_{I_k} es de clase C^1 en I_k .

Nuestro interés es que Φ satisfaga (5) en cada intervalo

I_k . En los puntos en los que la derivada es discontinua se pide que:

$$\| \Phi'_-(t) - f(t,\Phi(t)) \| < \varepsilon \text{ y } \| \Phi'_+(t) - f(t,\Phi(t)) \| < \varepsilon$$

3.3.3 Teorema (Existencia de soluciones aproximadas)

Sea la bola cerrada $B(x_o,r)$ en E . Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto y $t_o \in I$ y sea f una función continua tal que:

$$f : I \times B(x_o,r) \longrightarrow E$$

$$\text{y} \quad \| f(t,x) \| \leq M \text{ , para } t \in I \text{ y } x \in B(x_o,r) \text{ .}$$

Sea J la intersección de I con el segmento

$$t_o - \frac{r}{M} \leq t \leq t_o + \frac{r}{M}$$

Entonces, para todo $\varepsilon > o$, la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad (1)$$

posee una solución ε-aproximada Φ , $\Phi : J \longrightarrow B(x_o,r)$ de clase C^1 a trozos tal que $\Phi(t_o) = x_o$. Se puede conside - rar también a Φ lineal a trozos .

Demostración

Construyamos la función Φ en el segumento de J definido por $t \geq t_o$. Análisis similar se puede hacer para $t \leq t_o$. Sea I' un segmento tal que $t_o \leq t \leq T \leq t_o + \frac{r}{M}$.

La longitud de I' es $T - t_o \leq r/M$

Definamos en I' la función Φ_o ,

$$\Phi_o : I' \longrightarrow E$$
$$t \longrightarrow x_o + (t-t_o)\ f\ (t_o,x_o)$$

Φ_o , así definida, cumple $\Phi_o(t_o) = x_o$ y $\Phi_o'(t_o) = f(t_o,x_o)$.

Debemos probar que Φ_o es una solución ε-aproximada en I .

Para ello :

Sea $t \in I'$, $\|\Phi_o(t) - x_o\| = \|x_o + (t-t_o)\ f\ (t_o,x_o) - x_o\|$

$$= \|(t-t_o)\ f\ (t_o,x_o)\|$$
$$= \|t-t_o\|\ \|f(t_o,x_o)\|$$
$$\leq \frac{r}{M} = r$$

o sea, $\Phi_o(t) \in B(x_o,r)$, para todo $t \in I'$; es decir ,

$(t, \Phi_o(t)) \in I' \times B(x_o,r)$.

Falta probar que $\|\Phi_o'(t) - f(t,\Phi_o(t))\| \leq \varepsilon$, para todo $t \in I'$.

Para demostrarlo consideremos subconjuntos de I' : Φ_o será una solución ε-aproximada en un segmento $[t_o,t_1]$ siempre que se tenga

$$\|f(t_o,x_o) - f(t,x_o + (t-t_o)\ f(t_o,x_o))\| \leq \varepsilon \qquad (6)$$

para $t \in [t_o, t_1]$. Por la continuidad de f , para cualquier $\varepsilon > o$ se tiene que existe un $\partial > o$ t.q. $[t-t_o] < \partial$ implica la desigualdad (6) . Si se cumple para $t_o \leq t \leq T$, entonces Φ_o es una solución aproximada en I' t.q. $\Phi_o(t_o) = x_o$, que es lo que queríamos probar . Si no es así, existe un mayor segmento $[t_o,t_1]$ en el cual se cumple (6). En efecto : supongamos que (6) se cumple para $[t_o,t_1[$, siendo t_1 el ínfimo de los t para los que (6) no es cierta . Por ser f continua, (6) se cumplirá también para $t = t_1$. Escribamos ahora $\Phi_o(t_1) = x_1$; entonces

$$x_1 - x_o = \Phi_o(t_1) - \Phi_o(t_o)$$

$$= x_o + (t_1 - t_o) f(t_o, x_o) - x_o$$

$$= (t_1 - t_o) f(t_o, x_o)$$

$$\| x_1 - x_o \| = \| (t_1 - t_o) f(t_o, x_o) \|$$

$$= \| t_1 - t_o \| \, \| f(t_o, x_o) \|$$

$$\leq \| t_1 - t_o \| M$$

$$\leq \frac{r}{M} = r$$

Sea $r_1 = r - \| x_1 - x_o \|$. Entonces f está definida y es continua para $t_1 \leq t \leq T, \| x - x_1 \| \leq r_1$, ya que se dan las siguientes inclusiones :

$$\{ t \in \mathbb{R} / t_1 \leq t \leq T \} \subset I'$$

$$\{ x \in E / \| x - x_o \| \leq r_1 \} \subset B(x_o, r) \, ,$$

además , $$\| f(t,x) \| \leq M \quad y \quad T - t_1 \leq \frac{r_1}{M} \qquad (7)$$

La desigualdad (7) se verifica de la siguiente manera :

$$t_1 - t_o \leq T - t_o \leq \frac{r}{M}$$

$$t_1 \leq T \leq \frac{r}{M} + t_o$$

$$T - t_1 \leq \frac{r}{M} + (t_o - t_1)$$

$$T - t_1 \leq \left\| \frac{r}{M} - (t_1 - t_o) \right\|$$

$$T - t_1 \leq \left\| \frac{r-M(t_1-t_o)}{M} \right\|$$

$$T - t_1 \leq \frac{1}{M} \| r - \| f(t_o,x_o) \| (t_1-t_o) \|$$

$$T - t_1 \leq \frac{1}{M} \left\| r - \frac{\| x_1-x_o \|}{| t_1-t_o |} (t_1-t_o) \right\|$$

$$T - t_1 \leq \frac{1}{M} \left\| r - \| x_1-x_o \| \right\|$$

$$\therefore \quad T - t_1 \leq \frac{r_1}{M}$$

con t_1 y x_1 repetimos el proceso hecho con t_o y x_o :

consideremos la función Φ_1 , $\Phi_1 : I'' \longrightarrow E$;

$I'' = \{ t \in \mathbb{R} \ / t-T \leq \frac{r_1}{M} \}$ con $\Phi_1(t) = x + (t-t_1) f(t_1,x_1)$, para todo $t \in I''$.

Se puede verificar fácilmente que Φ_1 toma sus valores en $B(x_1,r_1)$ y que existe un mayor segmento $[t_1,t_2]$, $t_1 < t_2 \leq T$, en el cual se verifica la desigualdad (8) :

$$\| \Phi_1' (t) - f(t,\Phi_1(t)) \| = \| f(t_1,x_1) - f(t,x_1+(t-t_1)f(t_1,x_1)) \| < \varepsilon \tag{8}$$

En estas condiciones, si $T = t_2$, la función Φ , igual a Φ_o en $[t_o,t_1]$ y a Φ_1 en $[t_1,t_2]$ es una solución ε-aproximada de la ecuación (1) en $[t_o,T]$ y se completa la demostración . Si, por el contrario, $t_2 \leq T$, se sigue el proceso hasta definir por recurrencia las sucesiones $\{ t_o,t_1,\ldots\}$ con $t_o < t_1 <\ldots< t_n \leq T$; $\{ x_o,x_1,\ldots\}$, $x_i \in E$, $o < i < n$; y las funciones Φ_i ,

$$\Phi_i : [t_i,t_{i+1}] \longrightarrow B(x_o,r) \ ; \ o \leq i \leq n-1$$

$$t \longrightarrow x_i + (t-t_i)f(t_i,x_i)$$

las Φ_i coinciden en los extremos comunes t_i , $1 \leq i \leq n-1$ y los x_i son tales que $x_i = \Phi_{i-1}(t_i)$.

A partir de las funciones lineales afines Φ_i se construye una función continua Φ ,

$$\Phi : [t_o,t_n] \longrightarrow B(x_o,r) \ ,$$

lineal por tramos, que es una solución ε-aproximada de la ecuación diferencial (1) . Si $t_n = T$, algún n , el teorema queda demostrado . Falta probar que efectivamente el proceso anterior tiene fin .

Supongamos que $\forall n$, $t_n < T$; ya sea t' la cota superior de la sucesión estrictamente creciente $t_o< t_1 <\cdots< t_n <\cdots$ se tiene :

$$\| x_{n-1} - x_n \| = \| (t_{n+1} - t_n)f(t_n,x_n) \|$$

$$= \| t_{n+1} - t_n \| \ \| f(t_n,x_n) \| \ , \ t_{n+1} - t_n > 0$$

$$\leq (t_{n+1} - t_n) M$$

La sucesión $\{ t_n \}_{n\in \mathbb{N}}$ es creciente y acotada por T , luego es convergente . Además $\{ t_n \}$ es una sucesión de números reales, por lo tanto es de Cauchy, o sea $\| t_{n+1} -t_n \|$ converge a cero; en consecuencia $\| x_{n+1} - x_n \|$ converge a cero.

Luego la sucesión $\{x_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ es de Cauchy . Posee, entonces un límite x' en la bola cerrada $B(x_o,r)$.

Por otro lado ,

$$\Phi_n(t) - x_n = (t-t_n)f(t_n,x_n) \; ; \forall \; t_n , t_n \leq t \leq t'$$

$$\therefore \quad \| \Phi_n(t) - x_n \| \leq M(t-t_n) \leq M(t'-t_n)$$

$$\| \Phi_n(t) - x' \| = \| \Phi_n(t) - x_n + x_n - x' \| \leq \| \Phi_n(t) - x_n \| + \| x_n - x' \| \leq \tag{9}$$

$\leq M(t'-t_n) + \| x_n - x' \|$ por ser f continua en el punto (t',x'); $(t',x') \in I \times B(x_o,r)$; existe $\eta > 0$ t.q.

$(|t-t'| < \eta$ y $\| x-x' \| \leq \eta) \Longrightarrow \| f(t',x') - f(t,x) \| \leq \varepsilon/2$

si $n \longrightarrow \infty$, tenemos por (9) : $\Phi_n(t) \longrightarrow x'$, para $t_n \leq t \leq t'$.

Entonces, por la continuidad de f :

$$\| f(t',x') - f(t, \Phi_n(t)) \| \leq \varepsilon/2 \; , \; t_n \leq t \leq t' \tag{10}$$

y

$$\| f(t',x') - f(t_n,x_n) \| = \| f(t_n,x_n) - f(t',x') \| \leq \varepsilon/2 \tag{11}$$

de (10) y (11) se concluye que :

$$\| f(t_n,x_n) - f(t, \Phi_n(t)) \| < \varepsilon \; , \; t_n \leq t \leq t'$$

Es decir, Φ_n es solución ε-aproximada en $[t_n,t']$, por otro lado, por la construcción de las funciones Φ_i , Φ_n debe estar definida en $[t_n,t_{n+1}]$, o sea $t' \leq t_{n+1}$. Este último resultado es contradictorio, puesto que t' es cota superior de la sucesión $\{t_n\}_{n\in \mathbb{N}}$.

3.4 Ecuación Diferencial Lineal

Un ejemplo de aplicación del teorema 3.3.3 lo veremos en las ecuaciones diferenciales lineales . En este caso, la existencia de la solución ε-aproximada se garantiza en todo el intervalo I de definición.

3.4.1 Definición

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación de la forma (12) :

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t) \tag{12}$$

con a y b funciones continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$,

$$a : I \longrightarrow L(E;E) \quad y \quad b : I \longrightarrow E \ .$$

La función f ,

$$f : I\times E \longrightarrow E$$
$$(t,x) \longrightarrow a(t)x + b(t)$$

es una función lineal afin continua en la segunda variable , para cada $t \in I$.

Sea $(t_0,x_0) \in I\times E$ y consideremos la bola cerrada $B(x_0,r)$, con r fijo y arbitrario . A partir del teorema 3.3.3 se demostrará el siguiente resultado:

3.4.2 Teorema

Sea $I \subset \mathbb{R}$ compacto . Entonces existe, $\forall\ \varepsilon > 0$, una solución ε-aproximada Φ , $\Phi : I \longrightarrow E$, de la ecuación (12) tal que $\Phi(t_0) = x_0$.

Demostración

Sea $t \in I$. La norma $\| a(t) \|$, norma en $L(E;E)$, es una función continua en t ; como I es compacto, $\| a(t) \|$ debe ser acotada superiormente. Lo mismo puede decirse de $\| b(t) \|$.

Sean α y β :

$$\alpha = \sup_{t \in I} \| a(t) \| \quad , \quad \beta = \sup_{t \in I} \| b(t) \|$$

$\| f(t,x) \| = \| a(t)x + b(t) \| \leq \| a(t)\, x \| + \| b(t) \| \leq \alpha \| x \| + \beta$

sea $\| x - x_0 \| \leq r$, entonces :

$\| f(t,x) \| \leq \alpha \ \| x_0 \| + \alpha r + \beta$. En efecto , $\| x - x_0 \| < r$ implica

$$\| x \| - \| x_0 \| \leq r$$

$$\| x \| \leq \| x_0 \| + r$$

$$\alpha \ \| x \| \leq \alpha \| x_0 \| + \alpha r$$

$$\alpha \ \| x \| + \beta \leq \alpha \ \| x_0 \| + \alpha r + \beta$$

Entonces, para $t \in I$ y $\| x - x_0 \| \leq r$, se tiene : $\| f(t,x) \| \leq M$, con $M = \alpha \| x_0 \| + \beta + \alpha r$. Luego ,

$$\frac{M}{r} = \frac{\alpha \| x_0 \| + \beta}{r} + \alpha$$

En estas condiciones, fijado x_o, podemos escoger r tal que $\frac{M}{r} \leq 2\alpha$; según el teorema 3.3.3 , existe una solución ε-aproximada Φ (lineal a trozos) en el intervalo compacto J;

$$J = I \cap [t_o - \frac{1}{2\alpha} , t_o + \frac{1}{2\alpha}]$$

ya que

$$[t_o - \frac{r}{M} , t_o + \frac{r}{M}] \supset [t_o - \frac{1}{2\alpha} , t_o + \frac{1}{2\alpha}] \quad ;$$

tal que $\Phi(t_o) = x_o$.

A partir de este resultado podemos encontrar una solución ε-aproximada y lineal a trozos en todo I . La construcción de esta solución es similar a la hecha en la demostración del teorema 3.3.3 . La solución Φ se forma a partir de la sucesión de funciones $\Phi_o , \Phi_1 , \ldots, \Phi_{n-1}$.

3.5 Caso Lipschitziano. Lema Fundamental

3.5.1 Definición

Sea la función f, $f : U \subset \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$

f es k-lipschitziana en x , si se cumple :

$$\| f(t,x_1) - f(t,x_2) \| \leq k \| x_1 - x_2 \| \qquad (13)$$

3.5.3 Lema Fundamental

Sean las funciones Φ_1 y Φ_2 ; $\Phi_i : I \longrightarrow E$; soluciones

ε_1-aproximada y ε_2-aproximada, respectivamente, de la ecua - ción diferencial (1) . Sean $x_1 = \Phi_1(t_o)$ y $x_2 = \Phi_2(t_o)$ sus valores iniciales para $t_o \in I$. Entonces, si f es k-lipschitziana en x , se tiene, para $t \in I$:

$$\| \Phi_1(t) - \Phi_2(t) \| \leq \| x_1 - x_2 \| \, e^{k|t-t_o|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \, \frac{e^{k|t-t_o|} - 1}{k} \quad (14)$$

Demostración

Neceistamos conocer primero la "desigualdad de los incrementos finitos" y un lema auxiliar .

3.5.3.1 Desigualdad de los Incrementos Finitos

Sean las funciones f y g :

$$f : [a,b] \longrightarrow F$$

$$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

f y g son diferenciables en todo punto de $]a,b[$ y continuas en $[a,b]$ y F es un espacio de Banach. Supongamos que para $x \in]a,b[$ su cumple $\| f'(x) \| \leq g'(x)$; entonces

$$\| f(b) - f(a) \| \leq g(b) - g(a) \text{ .}$$

Demostración : Ver referencia bibliográfica B1 .

3.5.3.2 Lema Auxiliar

Sea U una función continua ; $U : [o,T] \longrightarrow \mathbb{R}^+_o$, $T \geq o$;

que satisface (15) :

$$U(t) \leq at + k \int_{o}^{t} U(y)dy \qquad (15)$$

entonces :

$$U(t) \leq \frac{a}{k}\,(e^{kt}-1) \text{ , para } \begin{array}{l} o \leq t \leq T \text{ ,} \\ a \geq o \text{ , } k \geq o \text{ .} \end{array}$$

Demostración : Ver B1 .

Demostración del Lema Fundamental :

Por comodidad, sea $t_o = o$. Haremos la demostración para el caso $t > o$, pasándose al otro caso con sólo cambiar t por $-t$.

Por hipótesis ,

$$\| \phi_1'(t) - f(t, \phi_1(t)) \| < \varepsilon_1 \text{ y } \| \phi_2'(t) - f(t, \phi_2(t)) \| < \varepsilon_2 \text{ ,}$$

entonces :

$$\| \phi_1'(t) - \phi_2'(t) \| = \| (\phi_1'(t) - f(t, \phi_1(t)) + (-\phi_2'(t) + f(t, \phi_2(t)) +$$
$$+ f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_2(t)) \|$$
$$\leq \| \phi_1'(t) - f(t, \phi_1(t)) \| + \| \phi_2'(t) - f(t, \phi_1'(t)) \| +$$
$$+ \| f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_2(t)) \|$$
$$\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \| f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_2(t)) \|$$

Tomando en cuenta (13), con $x_i = \phi_i(t)$, se obtiene :

$$\| \phi_1'(t) - \phi_2'(t) \| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k \| \phi_1(t) - \phi_2(t) \| \qquad (16)$$

Escribamos $\phi \equiv \phi_1 - \phi_2$ $\qquad$ (17)

Φ es de clase C^1 a trozos por serlo Φ_1 y Φ_2 . Aplicando 3.5.3.1 a (16) , $t > o$, obtenemos :

$$\| \Phi_1(t) - \Phi_2(t) - \Phi_1(o) + \Phi_2(o) \| \leq \int_o^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k \| \Phi_1(y) - \Phi_2(y) \|) \, dy$$

usando (17) :

$$\| \Phi(t) - \Phi(o) \| \leq \int_o^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k \| \Phi(y) \|) \, dy \qquad (18)$$

por otro lado ,

$$\| \Phi(y) \| = \| \Phi(y) + \Phi(o) - \Phi(o) \| \leq \| \Phi(o) \| + \| \Phi(y) - \Phi(o) \| \qquad (19)$$

sustituyendo (19) en (18) y haciendo $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, tenemos :

$$\| \Phi(t) - \Phi(o) \| \leq \int_o^t (\varepsilon + k(\| \Phi(o) \| + \| \Phi(y) - \Phi(o) \|) \, dy$$

$$\leq t(\varepsilon + k \| \Phi(o) \| + k \int_o^t \| \Phi(y) - \Phi(o) \| \, dy \qquad (19')$$

hagamos, por comodidad ,

$$\left. \begin{array}{l} \| \Phi(t) - \Phi(o) \| = U(t) \geq 0 \\ \varepsilon + k \| \Phi(o) \| = a > 0 \end{array} \right\} \qquad (20)$$

sustituyendo (20) en (19') :

$$\| \Phi(t) - \Phi(o) \| \leq at + k \int_o^t U(y) dy \qquad (21)$$

Aplicando 3.5.3.2 a (21) se tiene :

$$U(t) \leq \frac{a}{k} (e^{kt} - 1) \tag{22}$$

Sustituyendo (20) en (22)

$$\| \Phi(t) - \Phi(o) \| \leq \frac{1}{k} (\varepsilon + k\| \Phi(o) \|) (e^{kt} - 1) \text{ , para } t > o$$

$$\| \Phi(t) - \Phi(o) \| < (\frac{\varepsilon}{k} + \| \Phi(o) \|) (e^{kt} - 1)$$

$$\| \Phi(t) \| \leq \| \Phi(t) - \Phi(o) + \| \Phi(o) \| \leq (\frac{\varepsilon}{k} + \| \Phi(o) \|) (e^{kt} - 1) + \| \Phi(o) \|$$

$$\therefore \quad \| \Phi(t) \| \leq \frac{\varepsilon}{k} (e^{kt} - 1) + \| \Phi(o) \| e^{kt} \tag{23}$$

Usando (17) y sustituyendo en (23) :

$$\| \Phi_1(t) - \Phi_2(t) \| \leq \frac{\varepsilon}{k} (e^{kt} - 1) + \| \Phi_1(o) - \Phi_2(o) \| e^{kt}$$

$\therefore$

$$\| \Phi_1(t) - \Phi_2(t) \| \leq \frac{\varepsilon}{k} (e^{kt} - 1) + \| x_1 - x_2 \| e^{kt}$$

$$\therefore \| \Phi_1(t) - \Phi_2(t) \| \leq \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(e^{k|t-t_o|} - 1)}{k} + \| x_1 - x_2 \| e^{k|t-t_o|}$$

q.e.d.

3.6 Aplicación del Lema Fundamental : Teorema de Unicidad

En la sección 3.5 vimos que la diferencia de dos soluciones aproximadas, de una ecuación diferencial de la forma (1) , puede ser mayorada. Ahora, se probará que si se tienen dos soluciones exactas de (1) , éstas son iguales .

3.6.1 <u>Teorema</u>

Sea $f : U \subset \mathbb{R}\times E \longrightarrow E$ una función continua, k-lipschitziana en $x\in E$. Si ϕ_1 y ϕ_2 ; $\phi_i : I \longrightarrow E$; son dos soluciones exactas de la ecuación diferencial (1) , y si $\phi_1(t_o)= \phi_2(t_o)$, $t_o\in I$, entonces

$$\phi_1 \equiv \phi_2 \text{ en } I .$$

<u>Demostración</u>

El lema fundamental garantiza que :

$$\| \phi_1(t) - \phi_2(t) \| \leq \| x_1-x_2 \| e^{k(t-t_o)} + (\varepsilon_1+\varepsilon_2) \frac{e^{k|t-t_o|}-1}{k} ;$$

en nuestro caso, $\phi_1(t_o) = x_1 = \phi_2(t_o) = x_2$; $\varepsilon_1= \varepsilon_2= 0$, luego

$$\| \phi_1(t) - \phi_2(t) \| = 0 , \ t\in I$$

$$\therefore \quad \phi_1 \equiv \phi_2$$

3.7 <u>Teorema de existencia en el Caso Lipschitziano</u> :

Nuestro interés en esta sección es garantizar la existencia de una solución de la ecuación diferencial (1) para el caso en que f es lipschitziana.

3.7.1 <u>Teorema</u>

Sea $f : U \subset \mathbb{R}\times E \longrightarrow E$ una función continua k-lipschitziana en la segunda variable; U cerrado. Sea $(t_o,x_o)\in U$ y sea $I\subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto conteniendo t . Supongamos que, para todo

$\varepsilon > o$, existe en I una solución ε-aproximada $\Phi : I \longrightarrow E$, de clase C^1 a trozos, de la ecuación diferencial (1) :

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad (1)$$

tal que $\Phi(t_o) = x_o$

Entonces, existe en I una solución exacta, $\Phi : I \longrightarrow E$, de (1) tal que $\Phi(t_o) = x_o$.

Demostración

Consideremos la sucesión de número positivos $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fijos tal que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Sean n y p fijos y arbitrarios . Consideremos las funciones

$$\Phi_n : I \longrightarrow E \ , \ \Phi_p : I \longrightarrow E$$

soluciones ε_n , ε_p-aproximadas de (1) , respectivamente, tales que

$$\Phi_n(t_o) = x_o, \quad \Phi_p(t_o) = x_o \ .$$

Aplicando el lema 3.5.3 tenemos

$$\|\Phi_n(t) - \Phi_p(t)\| \leq (\varepsilon_n+\varepsilon_p)\,\frac{e^{k|t-t_o|}-1}{k}\ , \text{ para todo } t\in I\ .$$

La función $g(t) = \dfrac{e^{k|t-t_o|}-1}{k}$ es continua en el compacto I , luego es acotada . Sea K una cota superior. Se tiene entonces

$$\|\Phi_n(t) - \Phi_p(t)\| \leq K(\varepsilon_n+\varepsilon_p)\ , \text{ para } t\in I\ .$$

Por la convergencia de $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se sigue que la sucesión $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy . Luego, la sucesión $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y converge a una función ϕ ,$\phi : I \longrightarrow E$. ϕ es continua, por ser el límite de funciones continuas con convergencia uniforme .

Por hipótesis, $(t,\phi_n(t))\in U$, $\forall n$, $\forall\, t\in I$. Además U es cerrado, luego

$$(t, \phi(t))\in U \text{ , para } t\in I \tag{23}$$

Por otro lado, $\phi_n(t_o) \longrightarrow \phi(t_o) = x_o$, o sea, $\phi(t_o) = x_o$

(24)

Falta probar que ϕ es diferenciable en I , y que

$$\phi'(t) = f(t,\phi(t)) \quad (25) \text{ , para } t\in I \quad .$$

Probar (25) equivale a probar que

$$\phi(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(y,\phi(y))dy \tag{26}$$

Tenemos, por hipótesis, que

$$\| \phi_n'(t) - f(t,\phi_n(t)) \| \leq \varepsilon_n$$

de donde, aplicando 3.5.3.1 , en $]a,b[\; = \;]t_o,t[$:

$$\| \phi_n(t) - \int_{t_o}^{t} f(y,\phi_n(y))dy - \phi_n(t_o) + \int_{t_o}^{t_o} f(y,\phi_n(y))dy \| \leq \varepsilon_n |t-t_o|$$

$$\therefore \; \| \Phi_n(t) - x_o - \int_{t_o}^{t} f(y,\Phi_n(y)dy \| \leq \varepsilon_n |t-t_o| \; , \qquad (27)$$

si en (27) $n \longrightarrow \infty$, se obtiene :

$$\| \Phi(t) - x_o - \int_{t_o}^{t} f(y,\Phi(y))dy \| = 0$$

o sea,

$$\Phi(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(y,\Phi(y))dy$$

q.e.d.

3.7.2 Corolario (Existencia Local)

Sea $f : V \subset \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ una función continua en V y k-lipschitziana en la segunda variable. V es un vecindario de $(t_o,x_o) \in \mathbb{R} \times E$.

Existe entonces un $\alpha > o$ tal que la ecuación diferencial (1)

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad (1)$$

posee en el intervalo $I = [\, t_o-\alpha \, , \, t_o+\alpha \,]$ una y sólo una solución Φ , $\Phi : I \longrightarrow E$, tal que $\Phi(t_o) = x_o$.

En una forma más detallada :

si $r > o$ y $\tau > o$ se eligen suficientemente pequeños para que se den las condiciones de (26) :

$$\left. \begin{array}{l} [\, t_o-\tau \, , \, t_o+\tau \,] \times B(x_o,r) \subset V \\ \| f(t,x) \| \leq M \; , \end{array} \right\} \qquad (26)$$

para $|t-t_o| \leq \tau$ y $\|x-x_o\| \leq r$, se pueda tomar

$\alpha = \inf\{\tau, \frac{r}{M}\}$ y $\Phi : [t_o-\alpha, t_o+\alpha] \longrightarrow B(x_o,r)$

Demostración

Como V es abierto y $f: U \longrightarrow E$ es continua, las relaciones $|t-t_o| \leq \tau$ y $\|x-x_o\| \leq r$ garantizan que, para todo $(t,x) \in V$ y $\|f(t,x)\| \leq M$.
El teorema 3.3.3 garantiza que en el intervalo compacto $|t-t_o| \leq r$, la ecuación diferencial (1) admite, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, una solución ε-aproximada $x = \Phi(t)$, lineal a trozos tal que $\Phi(t_o) = x_o$. Aplicamos ahora el teorema 3.7.1 tomando como U el cerrado $I \times B(x_o,r)$.

3.8 Caso en que f es Localmente Lipschitziana

3.8.1 Definición:

Sea la función f, $f: U \subset \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$. Se dice que f es localmente lipschitziana si para todo punto $(t_o,x_o) \in U$ existe un vecindario V de (t_o,x_o), $V \subset U$, y un $k > 0$ tales que : $\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$, con $(t,x_1) \in V$ y $(t,x_2) \in V$ (en otras palabras, la restricción de f a V es k-lipschitziana en la segunda variable) .

3.8.2 Teorema

Sea $f : U \longrightarrow E$, f continua y localmente lipschitziana, y sea (t_o, x_o) un punto interior de U . Entonces existe un $\alpha > o$ tal que la ecuación diferencial (1)

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad (1)$$

tiene una solución exacta ϕ , $\Phi : [\, t_o-\alpha \,, t_o+\alpha \,] \longrightarrow E$

Demostración

Basta aplicar el colorario 3.7.2 a un entorno V de (t_o,x_o), $V \subset U$, en el cual f sea k-lipschitziana con respecto a la segunda variable .

3.8.3 Teorema (Unicidad Global)

Sea $f : U \longrightarrow E$ una función localmente lipschitziana ; sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo . Si se tienen dos soluciones , ϕ_1 y ϕ_2 , de la ecuación diferencial (1) ; $\phi_i : I \longrightarrow E$; tales que $\phi_1(t_o) = \phi_2(t_o)$, $t_o \in I$, entonces son idénticas en todo I .

Demostración

Tenemos que I , por ser un intervalo real, es un espacio conexo . Consideremos el conjunto J ,

$$J = \{t \in I \;/\; \phi_1(t) = \phi_2(t)\}$$

$J \neq \emptyset$ ya que $t_o \in J$. Si probamos que J es abierto y cerrado entonces se tendrá $I = J$ que demuestra el teorema.

J es cerrado . En efecto, la función $\Phi_1 - \Phi_2$ es continua y $(\Phi_1 - \Phi_2)^{-1}(\{0\}) = J$.

Para probar que J es abierto demostraremos que es vecindario de todos sus puntos . Sea $t' \in J$; probemos que si $\Phi_1(t') = \Phi_2(t')$, existe $\alpha > o$ t.q. $t \in I$ y $|t-t'| \leq \alpha$ implican $\Phi_1(t) = \Phi_2(t)$. Sea $x_o = \Phi_1(t') = \Phi_2(t')$; por ser la función localmente lipschitziana existe un vecindario V de (t', x_o) en U y $k > o$ tales que f es k-lipschitziana en V .

En estas condiciones, podemos encontrar un $\alpha > o$ t.q. si $t \in I$ y $|t-t'| \leq \alpha$ entonces $(t, \Phi_1(t))$ y $(t, \Phi_2(t))$ pertenecen a V . Luego, por teorema 3.6.1 , $\Phi_1(t) = \Phi_2(t)$, para todo t , $t \in [t' - \alpha ; t' + \alpha] \cap I$.

Para completar la resolución de nuestro "problema de valores iniciales", para f localmente lipschitziana, falta la cuestión de la existencia global. El teorema siguiente trata este punto.

3.8.4 Teorema (Existencia Global)

Sea $f : U \longrightarrow E$ continua y localmente lipschitziana. Sea (t_o, x_o) un punto interior de U . Existe entonces un mayor intervalo J, $t_o \in J$, en el cual existe una solución ψ .

$\psi : J \longrightarrow E$ de la ecuación diferencial (1), satisfaciendo la condición inicial $\psi(t_o) = x_o$

Demostración :

El teorema 3.8.2 garantiza la existencia de un intervalo I, $t_o \in I$, tal que la ecuación diferencial (1) tiene una solución $\Phi : I \longrightarrow E$, con $\Phi(t_o) = x_o$.

Sea $S = \{(I,\Phi) / t_o \in I,\ \Phi : I \longrightarrow E$, solución de (1) y $\Phi(t_o) = x_o\}$ si (I_1, Φ_1), (I_2, Φ_2) pertenecen a S, entonces $I_1 \cap I_2$ tiene al menos el punto t_o, luego $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, y, por el teorema 3.8.3, $\Phi_1 \equiv \Phi_2$ en $I_1 \cap I_2$.

Sea $J = \bigcup_{(I,\Phi)\in S} I$. Existe una y sólo una función ψ tal que $\psi : I \longrightarrow E$ y para toda $(I,\Phi) \in S$, la restricción de ψ a I es Φ. Esta función ψ es solución de (1) y satisface $\psi(t_o) = x_o$.

q.e.d.

3.8.5 Nota:

La función ψ construida en 3.8.4 es llamada la solución máxima para las condiciones iniciales (t_o, x_o)

3.9 Caso de una Ecuación Diferencial Lineal.

Nuestro interés, en esta sección, es plantear el "problema de valores iniciales" para una ecuación diferencial lineal de la forma (12) :

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t) \qquad (12)$$

Como primera tarea se probará que f es localmente lipschitziana en la segunda variable ; $f : I\times E \longrightarrow E$, $f(t,x) = a(t)x + b(t)$; luego se demostrará la existencia y la unicidad de la solución de (12) .

3.9.1 Afirmación

Sea la función f, $f : I\times E \longrightarrow E$, continua en $I\times E$ y definida por $f(t,x) = a(t)x + b(t)$, en donde a y b se definen como en 3.4.1 .

Entonces, f es localmente lipschitziana.

En efecto : Sea $J\subset I$, J un intervalo compacto . Sea $t\in J$,

$$f(t,x_1) - f(t,x_2) = a(t)(x_1 - x_2)$$

$$\| f(t,x_1) - f(t,x_2)\| = \| a(t) \| \, \| x_1 - x_2 \|$$

$$\therefore \quad \| f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \le K_J \| x_1 - x_2 \| \, .$$

con $K_J = \sup_{t\in J} \|a(t)\|$

3.9.2 Teorema (Existencia Global para una Ecuación Diferencial Lineal)

Sea $(t_0,x_0)\in I\times E$. Existe una solución exacta ϕ , y sólo una de la ecuación diferencial (12) , $\phi : I \longrightarrow E$, definida en todo el intervalo I , t.q. $\phi(t_o) = x_o$.

Demostración :

Según el teorema 3.8.4 , la ecuación (12) tiene una solución "máxima" para un valor inicial (t_o,x_o) . Sea J un intervalo compacto , $J \subset I$. Por el teorema 3.4.2 , existe, $\forall\ \varepsilon > o$, una solución ε-aproximada en J que toma el valor x_o para $t = t_o$. El teorema 3.7.1 garantiza, la existencia de una solución exacta en J, que satisface la misma condición inicial . Como esta solución existe en todo el intervalo compacto J, $J \subset I$ y $t_o \in J$, la solución "máxima" está definida en todo I .

4 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

4.1 Dominio de Existencia de una Solución de una Ecuación Diferencial Lineal .

En el capítulo 3 se llamó ecuación diferencial lineal de primer orden a una como :

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t) \tag{1}$$

estando a y b definidas como en 3.4.1 .

Consideremos ahora un sistema de ecuaciones del tipo (1) :

4.1.1 Definición

Un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se llama lineal si es de la forma (2) :

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ &\ldots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{aligned} \tag{2}$$

en donde $t \in I \subset \mathbb{R}$; a_{ij} y b_j son continuas en I ; y las funciones x_j son reales ; $1 \leq i, j \leq n$.

El sistema (2) en notación matricial tiene la forma (3) :

$$X' = A(t)X + B(t) \tag{3}$$

siendo $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdots \\ x_n' \end{pmatrix}$; $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \cdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$.

4.1.2 <u>Observación</u>

Vimos en el capítulo 3 que las ecuaciones diferenciales lineales como (3) tienen la propiedad importante de tener soluciones definidas en todo el intervalo I donde A y B son continuas. La continuidad de las funciones vectoriales A y B está garantizada por la continuidad de las funciones a_{ij} y b_j , $1 \le i, j \le n$. Es esta entonces la garantía de la existencia y unicidad de soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales lineales (2) .

En esta "coyuntura matricial" es donde retomaremos todo lo tratado en los capítulos anteriores, especialmente el 2 cuando estemos tratando las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

4.1.3 <u>Afirmación</u>

Una ecuación lineal diferencial de orden n

$$X^{(n)} = a_1(t)X^{(n-1)} + a_2(t)X^{(n-2)}+\ldots+ a_n(t)X + b(t) \qquad (4)$$

es equivalente a un sistema lineal como (2) .

En efecto :

Dada, en general, una ecuación diferencial de orden n :

$$X^{(n)} = f(t,X,X',\ldots,X^{(n-1)}) \qquad (5)$$

siendo f continua en un abierto $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Una solución de (5) , en un abierto $I \subset \mathbb{R}$ es una función real U de clase C^{n-1} en I, tal que se cumplen las siguientes condiciones:

i) $(t,U(t), U'(t),\ldots,U^{(n-1)}(t)) \in D$

ii) $U^{(n)}(t) = f(t,U(t),U'(t),\ldots,U^{(n-1)}(t))$

si hacemos $v_1= U$, $v_2= U'$,...,$v_n = U^{(n-1)}$ tenemos que estas n funciones son continuas y derivables en I y constituyen el conjunto solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden siguiente:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\cdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(t,y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}) \end{aligned} \qquad (6)$$

Recíprocamente, si el conjunto $\{v_1,v_2,\ldots, v_n\}$ es solución de (6) , la función $U = v_1$ es continua y n veces derivable en I , y es una solución de (5) .

La afirmación se sigue como un caso particular de la ecuación (5).

4.1.4 Cambio de Variables

Si en la ecuación (3) se hace el cambio de variables $Y = PX$, donde P es una matriz inversible constante, se obtiene :

$$Y = PX$$

$$P^{-1}Y = X \tag{7}$$

$$P^{-1}Y' = X' \tag{8}$$

sustituyendo (7) y (8) en (3) :

$$P^{-1}Y' = A(t)P^{-1}Y + B(t)$$

$$\therefore \quad Y' = PA(t)P^{-1}Y + PB(t) \tag{9}$$

En algunas ocasiones, mediante cambio de variables puede llegarse al caso en el cual la matriz $A(t)$ es de la forma

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & A_2(t) \end{pmatrix}$$

siendo $A_1(t)$ y $A_2(t)$ matrices cuadradas de orden P y $n-P$, respectivamente .

En estas condiciones la ecuación (3) queda :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1p}(t) \\ a_{p1}(t) & \cdots & a_{pp}(t) \end{matrix} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \begin{matrix} a_{p+1,p+1}(t) & \cdots & a_{p+1,n}(t) \\ a_{n,p+1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \cdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \tag{10}$$

y se puede descomponer en el siguiente sistema :

$$X_1' = A_1(t)X_1 + B_1(t)$$

$$X_2' = A_2(t)X_2 + B_2(t)$$

con $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ xp \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ x_{p+1} \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, etc.

4.1.3.1 Caso Particular

Si la matriz A es constante y $A = \begin{pmatrix} J_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & J_2 \end{pmatrix}$, donde J_1 y J_2 son bloques de Jordán, entonces la ecuación diferencial homogénea (11) :

$$\frac{dX}{dt} = AX \tag{11}$$

es equivalente al sistema (12) :

$$\frac{dX_1}{dt} = J_1X_1 \tag{12}$$

$$\frac{dX_2}{dt} = J_2X_2$$

4.2 Matriz Resolvente de un Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales .

Consideremos la ecuación lineal homogénea asociada a (3) :

$$X' = A(t)X \tag{13}$$

con A definida y continua en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Sabemos, por 4.1.2 , que dado $(t_o,X_o) \in I \times \mathbb{R}^n$, existe en I una y sólo una solución Y de (13) tal que :

$$\text{i) } Y(t_o) = X_o$$

$$\text{ii) } (t,y(t)) \in I \times \mathbb{R}^n \text{ , } \forall\, t \in I$$

$$\text{iii) } Y'(t) = A(t)Y$$

Las tres condiciones anteriores son equivalentes a afirmar que existe una función U , tal que :

$$t \longrightarrow U(t,t_o,X_o)$$

y que $U(t_o,t_o,X_o) = X_o$ (14)

4.2.1 Proposición

Supongamos t y t_o fijos . Entonces la aplicación U ,

$$\begin{aligned} U : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X &\longrightarrow U(t,t_o,X) \end{aligned}$$

es lineal .

<u>Demostración</u>

La función vectorial M :

$$M : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longrightarrow \alpha U(t,t_o,x_1) + \beta U(t,t_o,x_2)$$

con $X_i \in \mathbb{R}^n$; $i=1,2$; es una solución de (13) que toma el valor $\alpha x_1 + \beta x_2$, para t_o.

Por otro lado ,

$$U(t_o,t_o,\alpha x_1+\beta x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$$

Luego, por la unicidad del problema de valores iniciales constituido por la ecuación (13) y la condición

$$X(t_o) = \alpha y_1 + \beta y_2$$

se concluye que :

$$U(t,t_o, \alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha U(t,t_o,x_1) + \beta U(t,t_o,x_2)$$

4.2.2 <u>Observación</u>

La proposición anterior nos garantiza la existencia de una matriz R relativa a la base canónica tal que :

$$U(t,t_o,x) = R(t,t_o)x \tag{15}$$

La j-ésima columna de $R(t,t_o)$ es, por definición, $R(t,t_o) \cdot e_j$, o sea, la solución U_j de (13) tal que

$$U_j(t_o) = e_j \quad .$$

Se llama a $R(t,t_o)$ la <u>matriz resolvente</u> de (13) (ó (3)) .

4.2.3 Proposición

La matriz resolvente $R(t,t_o)$ es invertible .

Demostración

De (14) resulta que

$$R(t_o,t_o) = 1n \tag{16}$$

Además, dados t,t_o y r en I , se tiene :

$$R(t,t_o)\, R(t_o,r) = R(t,r) \tag{17}$$

ya que, dado $x_o \in \mathbb{R}^n$ la función P ,

$$\begin{aligned} P : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longrightarrow R(t,t_o)\cdot(R(t_o,r)\cdot x_o) \end{aligned}$$

es la solución de (13) que, para $t = t_o$, toma el valor :

$$P(t_o) = R(t_o,r)\cdot x_o$$

Por otro lado, la función Q ,

$$\begin{aligned} Q : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longrightarrow R(t,r)\cdot x_o \end{aligned}$$

es también solución de (13) e igualmente cumple la condición $Q(t_o) = R(t_o,r)\cdot x_o$;

luego, por la unicidad de la solución de (13) debe cumplirse que

$$R(t,t_o)\cdot(R(t_o,r)\cdot x_o) = R(t,r)x_o \ ,$$

por ser x_o fijo y arbitrario, se sigue que

$$R(t,t_\circ)\cdot R(t_\circ,r) = R(t,r) \tag{17}$$

En particular, para $r=t$, en virtud de (16) , se tiene :

$$R(t,t_\circ)\cdot R(t_\circ,t) = R(t,t) = 1_n \tag{18}$$

de donde, la matriz $R(t,t_\circ)$ es invertible y se tiene :

$$R(t_\circ,t) = \left[R(t,t_\circ) \right]^{-1} \tag{19}$$

4.2.4 Definición

Se llama sistema fundamental de soluciones de la ecuación (13) a un sistema de n soluciones $v_1, v_2,\ldots,v_n$, tales que, para todo $t\in I$, los n vectores $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ formen una base de $\mathbb{R}^n$.

4.2.5 Observación

Dado que $v_j(t) = R(t,t_\circ)\cdot v_j(t_\circ)$; $1\leq j\leq n$; por ser solución de (13) , y por ser $R(t,t_\circ)$ invertible, basta que las $v_j(t_\circ)$ sean linealmente independientes en $t_\circ\in I$, para que el conjunto $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ sea un sistema fundamental .

Además, si $V(t)$ es la matriz cuyas columnas son $v_1(t),\ldots,v_n(t)$, entonces :

$$R(t,t_\circ) = V(t)V^{-1}(t_\circ) \tag{20}$$

En conclusión, el conocimiento de un sistema fundamental de solu ciones equivale al conocimiento de una matriz resolvente.

Se dice que la matriz de soluciones, $V(t)$, es una matriz fundamental de (13) (ó (3)) .

4.2.6 Proposición

Si $\Delta(t,t_o) = \det R(t,t_o)$, entonces

$$\Delta(t,t_o) = \exp\left[\int_{t_o}^{t} T_r(A(\xi))d\xi\right] \tag{21}$$

Demostración

La función Q ,

$$\begin{aligned} Q : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longrightarrow R(t,t_o)x_o \end{aligned}$$

es una solución de (13) . Designando por $R'(t,t_o)$ la derivada de $R(t,t_o)$ con respecto a t , obtenemos:

$$R'(t,t_o)x_o = A(t)\ (R(t,t_o)x_o) \tag{22}$$,

y como x_o es fijo y arbitrario, se sigue que

$$R'(t,t_o) = A(t)\ R(t,t_o) \tag{22'}$$

En otras palabras, la función Φ ,

$$\begin{aligned} \Phi : I &\longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ t &\longrightarrow R(t,t_o) \end{aligned}$$

es la solución del problema de valores iniciales siguiente :

$$\begin{cases} U'(t) = A(t)\,U(t) & (23) \\ U(t_\circ) = 1n & (24) \end{cases}$$

Por otro lado, haciendo $U(t) = R(t,t_\circ)$ y $\Delta(t) = \Delta(t,t_\circ)$,

se tiene, para todo $t \in I$ y todo h bastante pequeño :

$$\Delta(t) = \det U(t) \qquad (25)$$

$$\Delta(t+h) = \det U(t+h) \qquad (26)$$

$$\begin{aligned} \Delta(t+h) &= \det\,(U(t+h)1n) \\ &= \det U(t+h)\,\det\,(U(t)U^{-1}(t)) \\ &= \det U(t+h)\,\det U(t)\,\det U^{-1}(t) \\ &= \det U(t)\,\det U(t+h)\,\det U^{-1}(t) \\ &= \Delta(t)\,\det\,[U(t+h)U^{-1}(t)] \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \Delta(t+h) = \Delta(t)\,\det\,[U(t+h)U^{-1}(t)] \qquad (27)$$

También

$$U(t+h) = U(t) + h\,\frac{U'(t)}{1!} + h^2\,\frac{U''(t)}{2!} + \ldots$$

$$\therefore \quad U(t+h) = U(t) + A(t)\,U(t)h + o(h)$$

$$U(t+h)U^{-1}(t) = 1n + A(t)h + o(h)$$

$$\det\,[U(t+h)U^{-1}(t)] = \det \begin{vmatrix} 1 + a_{11}(t)h + P_{11}(h) & \ldots\ldots\ldots & \\ a_{21}(t)h + P_{21}(h) & 1+a_{22}(t)+P_{22}(h) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \\ & & 1+a_{nn}(t)h+P_{nn}(h) \end{vmatrix}$$

las $P_{ij}(h)$ son tales que $\begin{array}{l} P_{ij}(h) \longrightarrow 0 \\ \quad h \longrightarrow 0 \end{array}$

$$\det\left[U(t+h)U^{-1}(t)\right] = 1 + (a_{11}(t) + \ldots + a_{nn}(t))h + o(h)$$
$$= 1 + T_r(A(t))h + o(h)$$

$$\Delta'(t) = \lim_{h \to o} \frac{\det U(t+h) - \det U(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{\det U(t) \det\left[U(t+h)U^{-1}(t)\right] - \det U(t)}{h}$$

$$= \det U(t) \lim_{h \to o} \frac{T_r(A(t))h}{h}$$

$$\therefore \qquad \Delta'(t) = \Delta(t)\, T_r(A(t)) \qquad (29)$$

cuya solución, con la condición inicial $\Delta(t_o) = 1$, es (21)

4.2.7 Método de Lagrange

Hasta el momento hemos trabajado solamente con la ecuación homogénea (13) . Se ha estudiado la matriz resolvente asociada a (13) . En esta sección veremos como obtener todas las soluciones de la ecuación no homogénea (3) a partir del conocimiento de la matriz resolvente de (13) . El método de Lagrange (llamado también de "variación de las constantes") nos servirá para tal fin. Debemos recordar, 4.2.5, que el conocimiento de una matriz resolvente equivale a conocer un sistema fundamental de n soluciones de (13) .

Método de Lagrange

Sea ν una solución de (3) y sea ω tal que

$$\omega(t) = R(t_o,t)\ \nu(t) \tag{29}$$

Por (19) , (29) se convierte en :

$$R(t,t_o)\ \omega(t) = \nu(t) \tag{30}$$

como ω es continuamente derivable, tenemos :

$$\begin{aligned} R'(t,t_o)\ \omega(t) + R(t,t_o)\ \omega'(t) &= \nu'(t) \\ &= A(t)\nu(t) + B(t) \\ &= A(t)R(t,t_o)\omega(t)+B(t) \end{aligned} \tag{31}$$

sustituyendo (22') en (31) se obtiene :

$$R(t,t_o)\ \omega'(t) = B(t)$$

$$\therefore \quad \omega'(t) = R(t_o,t)\ B(t) \tag{32}$$

integrando (32) :

$$\omega(t) = \omega(t_o) + \int_{t_o}^{t} R(t_o,y)\ B(y)dy$$

haciendo $\omega(t_o) = X_o$ y tomando en cuenta (18) y (30) tenemos :

$$\nu(t) = R(t,t_o)\left[X_o + \int_{t_o}^{t} R(t_o,y)\ B(y)dy\right]$$

$$\nu(t) = R(t,t_o)X_o + \int_{t_o}^{t} R(t,y)\ B(y)dy \tag{33}$$

La igualdad (33) , suponiendo continua la matriz resolvente, es la expresión explícita de la única solución de (3) que toma el valor X_o en t_o .

Si $V(t)$ es una matriz fundamental cualquiera, tenemos, por (20) y (33) :

$$\nu(t) = V(t)\, V^{-1}(t_o)X_o + V(t) \int_{t_o}^{t} V^{-1}(y)\, B(y)dy \qquad (34)$$

si $I = [\, t_o, +\infty\, [$,

$$\int_{t_o}^{t} V^{-1}(y)\, B(y)dy = \int_{t_o}^{+\infty} V^{-1}(y)\, B(y)dy - \int_{t}^{+\infty} V^{-1}(y)\, B(y)dy \qquad (35)$$

de (34) y (35) :

$$\nu(t) = V(t)K - V(t) \int_{t}^{+\infty} V^{-1}(y)\, B(y)dy \quad ; \qquad (36)$$

$$\text{con} \quad K = V^{-1}(t_o)X_o + \int_{t_o}^{+\infty} V^{-1}(y)\, B(y)dy$$

siendo (36) una expresión explícita para la solución ν de (3) en términos de matrices fundamentales .

4.3 Ecuaciones Diferenciales Lineales con Coeficientes Constantes

Consideremos la ecuación diferencial lineal (3) considerando constante la matriz A, (37) :

$$X' = AX + B(t) \tag{37}$$

Vamos a considerar también que X y $B(t)$ son elementos de $\mathbb{C}^n$ y $A \in \mathbb{M}(n;\mathbb{C})$.

La matriz resolvente de (37) es $R(t,t_\circ) = e^{(t-t_\circ)A}$ (38)

ya que verifica las condiciones (23) y (24) :

$$U'(t) = A\,U(t) \quad y \quad U(t_\circ) = 1n$$

La matriz (38) se "desarrolla" fácilmente cuando A está referida a la forma canónica de Jordán (Capítulo 2) .

Recordemos, según lo visto en 2.12.2 , que existe una matriz invertible P , tal que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} J_1 & & & \mathbb{O} \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & J_r \end{pmatrix} \tag{39}$$

donde cada J_i , $1 \leq i \leq r$, es un bloque (matriz) de Jordán de orden i , de la forma

$$\lambda_i \, 1n + N$$

siendo N una matriz nilpotente , $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, (40)

y los λ_i son los valores propios de A , raíces (en general complejas) de la ecuación característica

$$\det(\lambda 1n - A) = 0$$

4.3.1 Proposición

Si J es una matriz de Jordán de orden n , de la forma $J = \lambda 1n + N$, entonces

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

N es de la forma (40)

Demostración

$$e^{tJ} = e^{t(\lambda 1n+N)}$$
$$= e^{t\lambda 1n} \, e^{tN}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t\lambda 1n)^m}{m!} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tN)^m}{m!} \right\}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m \lambda^m 1n^m}{m!} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tN)^m}{m!} \right\}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^m}{m!} 1n \left\{ 1n + \frac{tN}{1!} + \frac{t^2N^2}{2!} + \ldots + \frac{t^{n-1}N^{n-1}}{(n-1)!} \right\}$$

$$= 1n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^m}{m!} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & t & \ldots & 0 \\ & & & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2!} & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t^2/2! \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ldots & \frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!} \\ & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{l.q.q.d}$$

4.4 Cambio de Variables

Una aplicación de 4.1.4 es la siguiente :

4.4 Cambio de Variables

Una aplicación de 4.1.4 es la siguiente:

4.4.1 Proposición

Dada la ecuación diferencial (41)

$$X' = A X \tag{41}$$

en donde A es una matriz constante. Una solución de (41) es e^{tA}. Supóngase que existe la matriz B inversible tal que

$$J = B^{-1} AB$$

donde J es una matriz de Jordán .

Si Y es solución de (41) , entonces

$$Z = B^{-1} Y \tag{42}$$

es solución de

$$Z' = J Z \tag{43}$$

Demostración

Demostramos primero que e^{tA} es solución de (41) :

Sea $X = e^{tA}$. $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} = AX$.

En segundo lugar, probemos que Z es solución de (43)

Tenemos :

$$J = B^{-1}AB$$

$$\therefore \quad e^{tJ} = B^{-1}\, e^{tA}\, B$$

$$y \quad e^{tA} = Be^{tJ}\, B^{-1}$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dB^{-1}Y}{dt} = B^{-1}\,\frac{dx}{dt} = (B^{-1}A\ B)Z = J\,Z$$

4.5 Aplicación

En esta última sección vamos a aplicar lo estudiado hasta el momento. En la práctica, los capítulos 2 y 4 serán de mayor utilidad.

Ejemplo

Resolver el siguiente problema de valores iniciales :

$$Y' = AY \ , \tag{44}$$

con

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

La ecuación (44) equivale al sistema (45) :

$$\begin{aligned} Y_1' &= Y_1 \\ Y_2' &= Y_2 \\ Y_3' &= Y_1 + Y_3 \end{aligned}$$

En primer lugar, encontremos la matriz de Jordán asociada a la matriz A .

Al proceder, como en 2.12.3, obtenemos

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, encontremos la matriz C , invertible, de cambio de base tal que

$$J = C^{-1} A C$$

$$\begin{array}{ccc} \beta_n & \longrightarrow & \beta_c \\ (1,0,0) & \longrightarrow & (0,0,1) \\ (0,1,0) & \longrightarrow & (1,0,0) \\ (0,0,1) & \longrightarrow & (0,1,0) \end{array} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{A_{dj} C}{|C|} = \frac{(C_c)^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede verificar fácilmente que $J = C^{-1} A C$.

Utilizando 4.4 tenemos :

$$Z' = J Z \quad , \quad Z' = C^{-1} Y$$

Cálculo de e^{tJ}

$$e^{tJ} = e^{t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \text{ por } 4.3.1$$

$Y' = A Y$, $Y = CZ$

$J = C^{-1} A C$

$e^{J} = e^{C^{-1}AC} = C^{-1} e^{A} C$

$e^{tJ} = C^{-1} e^{tA} C$, de donde, la solución buscada e^{tA} es :

$$e^{tA} = C \, e^{tJ} \, C^{-1} \tag{45}$$

Al efectuar (45) se obtiene :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ te^{t} & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Las soluciones buscadas son :

$$Y_1 = e^t$$

$$Y_2 = e^t$$

$$Y_3 = te^t + e^t$$

-o-o-o-

cv.

BIBLIOGRAFIA

B1 CARTAN, H. "Cálculo Diferencial"

B2 GODEMENT, R. "Cours D' Algebre"

B3 DIEUDONNE, J. "Cálculo Infinitesimal"

B4 DIEUDONNE, J. "Fundamentos de Análisis Moderno"

B5 NABCHIN, L. "Introducao a Analise Funcional: Espacos de Banach e Calculo Diferencial"

B6 FEEMAN-GRABOIS, "Linear Algebra and Multivariable Calculus"

B7 COTLAR, M. "Nociones de Espacios Normados"

B8 CANJURA, C. "Apuntes sobre la Exponencial de una Matriz"

B9 IMAZ-VOREL, "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias"