UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

TEORIA DE CAUCHY

TRABAJO DE GRADUACION PRESENTADO POR

CARLOS FRANCISCO CHAVEZ ORTIZ

PREVIO A LA OPCION DEL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICA

OCTUBRE DE 1984

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, C.A.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR

Dr. MIGUEL ANGEL PARADA

SECRETARIO GENERAL

Dra. ANA GLORIA CASTANEDA DE MONTOYA

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO

Ing. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

SECRETARIO

Ing. RENE MAURICIO MEJIA MENDEZ

DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Lic. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

COORDINADOR Y ASESOR: Ing. CARLOS MAURICIO CANJURA.

P R O L O G O

Todo trabajo de graduación previo a la opción del título de grado en la especialidad de Matemática se reduce en nuestro medio, por su propia naturaleza, a un trabajo de investigación bibliográfica, donde la selección del tema, más que a objetivos claramente definidos obedece a criterios de naturaleza subjetiva, las que se insertan dentro de un amplio espectro de motivaciones, dentro de las cuales las condiciones de conocimiento del objeto matemático a tratar no juegan, casi siempre, un papel relevante. Estas condiciones van desde nuestra relación personal más o menos casual con el objeto matemático, hasta un conocimiento aceptable del mismo, emprendiendo entonces la tarea investigativa con el deseo de penetrar en la intrincada red de sus relaciones, que determinan y conforman su estructura. La motivación, casi siempre apriorística, obedece pues a un deseo, ya sea para dar un modesto aporte al desarrollo de esta bella disciplina, o bien para incentivar futuras investigaciones sobre el tema, motivar su estudio; o en última instancia, brindar los fundamentos teóricos que coadyuven a dar respuesta a alguno de los ingentes problemas que plantea y confronta nuestra cambiante realidad. Es en este último contexto en el que se inscribe el presente trabajo y el que alienta su desarrollo, debido a la riqueza de sus resultados y a sus múltiples aplicaciones.

Una visión panorámica del contenido del trabajo se da en el siguiente resumen:

El el primer capítulo se aborda la construcción del sistema de números complejos utilizando para ello un método bastante novedoso: mediante la extensión cuadrática de un cuerpo conmutativo. Se analiza en seguida la geometría de $\mathbb{C}$, la ampliación del plano complejo, para luego enfocar el estudio de la Topología del plano, finalizando con un estudio de límites, continuidad y diferenciabilidad de funciones de variable compleja.

En el presente trabajo la teoría de funciones de una variable compleja se desarrolla partiendo de la noción de serie de potencias y tomando como idea fundamental la de función analítica. Con tal fin, el capítulo II está dedicado al estudio de las series de números complejos y criterios de convergencia, destacándose aquí interesantes resultados, como el lema de Abel y el principio de los ceros aislados. El capítulo III se dedica íntegramente al desarrollo de la teoría de funciones analíticas, haciendo énfasis en algunos aspectos como diferenciabilidad, existencia de primitivas y su comportamiento peculiar; mereciendo poner de relieve dos importantes resultados, el principio de prolongación analítica y el principio del máximo.

En el capítulo IV se aborda lo que constituye el tema central de este trabajo: la teoría de Cauchy. La integración de funciones de una variable compleja se introduce aquí de una forma totalmente novedosa, definiendo para ello las nociones de "camino" y a partir de ella, la de "lazo", las cuales resultan básicas para la definición de integración a lo largo de un camino. Estas nociones básicas juntamente con la relación de equivalencia que se introduce a continuación, desempeñan un papel fundamental a lo largo de toda la teoría. Se retoma en seguida el problema de las primitivas de una función analítica, esta vez a la luz de un nuevo y potente instrumento, la integral a lo largo de un camino. En la sección 5 se demuestra el teorema integral de Cauchy, desarrollando previamente las nociones de homotopía de caminos y homotopía de lazos. Otros resultados relevantes son: la fórmula integral de Cauchy, (uno de los más importantes diría yo), el teorema de Liouville, condiciones de analiticidad de funciones de una variable compleja y el teorema de convergencia de Weierstrass.

Por último en el capítulo V, que es un breve estudio de la teoría de resíduos, se estudia la serie de Laurent (desarrollo en serie de una función analítica en la vecindad de un punto singular aislado), síntesis de lo cual, es el teorema de Laurent. Se pasa luego, a la caracterización, análisis y cálculo de resíduos, para culminar en la sección 5, con la aplicación del teorema de resíduos al cálculo de integrales.

La elaboración de este trabajo se fundamenta en la obra "Cálculo Infinitesimal" de Jean Dieudonné.

Deseo expresar mi especial agradecimiento al Ingeniero Carlos Mauricio Canjura por su valiosa asesoría en la preparación del trabajo; quiero asimismo expresar mis sinceros agradecimientos a la Señora Miriam de Yánez por la paciencia y gentileza de mecanografiar el documento.

I N D I C E

Página

CAPITULO IV: TEORIA DE CAUCHY

CAPITULO V: TEORIA DE RESIDUOS

Capítulo I

EL CUERPO $\mathbb{C}$ DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Los números reales y números complejos constituyen las herramientas esenciales del Análisis, de ahí la importancia que cobra un adecuado manejo de estas nociones, así como tener presente a cada instante su significación geométrica, en particular, para los números complejos. La utilidad de la representación geométrica deriva fundamentalmente de lo intuitivas que resultan las imágenes mentales asociadas al lenguaje geométrico, sobre todo en el caso complejo.

§ 1. RELACIONES DE EQUIVALENCIA

DEFINICION 1.1.1

Sea E un conjunto y $R\{x,y\}$ una relación en que intervienen 2 variables x,y, definida sobre E. Diremos que $R\{x,y\}$ es una relación de equivalencia si se verifican las siguientes condiciones:

R_1) $R\{x,y\}$ implica $x \in E$ e $y \in E$.

R_2) $R\{x,x\}$ es verdadera para todo $x \in E$.

R_3) $R\{x,y\}$ implica $R\{y,x\}$

R_4) $R\{x,y\}$ y $R\{y,z\}$ implican $R\{x,z\}$.

EJEMPLO 1.1.2

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Si escribimos

(1) existe un entero k tal que $x-y = 2\pi k$

se obtiene una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}$, llamada congruencia módulo 2Π. Esta relación de equivalencia es básica en la definición matemática de ángulo.

DEFINICION 1.1.3

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto E. Dado un $x \varepsilon E$, llamaremos clase de x módulo R al conjunto $F_x \subset E$ formado por los $y \varepsilon E$ tales que la relación

$$x \equiv y (\text{mód } R)$$

(x es congruente a y módulo R) sea verdadera, de manera que las relaciones

$$x \equiv y(\text{mód } R), \quad y \varepsilon F_x$$

son equivalentes.

DEFINICION 1.1.4

Si en el conjunto $\mathcal{P}(E)$ de las partes de E, consideramos el conjunto formado por las partes F de E tales que

$$F = F_x$$

para al menos un $x \varepsilon E$, esto es, el conjunto de las clases de equivalencia de los distintos elementos de E, denotado por E/R, diremos que E/R es el cociente del conjunto E por la relación de equivalencia R.

DEFINICION 1.1.5

Si con las mismas notaciones de (1.1.4) consideramos una aplicación f definida por

$$f: E \longrightarrow E/R$$
$$x \longmapsto f(x) = F_x$$

es decir, la aplicación que asocia a cada $x \in E$ su clase módulo R, diremos que f es la <u>aplicación canónica de E sobre E/R</u>. Por su misma construcción, es claro que f es sobreyectiva. Por otro lado, para $x, y \in E$, puede probarse que las relaciones

$$x \equiv y (\text{mód } R) \quad y \quad F_x = F_y$$

son equivalentes, por lo que, por la definición anterior, puede escribirse

$$f(x) = f(y)$$

EJEMPLO 1.1.6

En el caso del ejemplo (1.1.2) el conjunto cociente se denota por

$$\mathbb{R}/2\Pi\mathbb{Z},$$

y sus elementos se llaman <u>números reales módulo 2Π</u>. Un número real módulo 2Π es, por tanto, un conjunto de números reales: todos los que se deducen de un número real dado por adición de un múltiplo de 2Π. Es claro que la medida de un ángulo es, precisamente, un número real módulo 2Π y no un número real ordinario.

§ 2. RAICES CUADRADAS

DEFINICION 1.2.1

Sea K un anillo conmutativo. Se dice que un elemento $a \in K$

es un cuadrado si existe un $x \in K$ tal que

$$x^2 = a;$$

se dice entonces que x es una raíz cuadrada de a en K. Resulta evidente que si x es una raíz cuadrada de a en K, también lo es $-x$; si además K es un anillo entero, a admite a lo sumo dos raíces cuadradas en K, puesto que para $x,y \in K$ se tendrá

$$\begin{aligned} x^2 = y^2 &\Rightarrow x^2-y^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x-y)(x+y) = 0 \\ &\Rightarrow x = y \quad \text{ó} \quad x = -y. \end{aligned}$$

Puede suceder, desde luego, que un elemento a de un anillo conmutativo K no sea un cuadrado en K. Así por ejemplo, si K es el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales, a es un cuadrado en K si y solo sí $a \geq 0$. Si K es el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales, 3 no será un cuadrado en K y sin embargo, 3 es un cuadrado en el cuerpo $\mathbb{R}$.

Tenemos entonces planteado el siguiente problema: dados un anillo conmutativo K y un elemento $a \in K$ que no es un cuadrado, debemos construir un anillo conmutativo L con las siguientes propiedades:

i) K es un subanillo de L, y

ii) a es un cuadrado en L.

§ 3. EL ANILLO $K[\sqrt{a}]$

(1.3.1) Sea a un elemento de un anillo conmutativo K; vamos a construir un nuevo anillo L, tradicionalmente denotado por

$$K[\sqrt{a}],$$

y que se define como sigue:

$L = K \times K = \{(x,y) \ / \ x \in K, y \in K\}$,

y las dos operaciones fundamentales en L,

$$\text{i)} \quad +: \begin{array}{rcl} L \times L & \longrightarrow & L \\ (w_1,w_2) & \longmapsto & w_1+w_2 \end{array}$$

$$\text{ii)} \quad \cdot: \begin{array}{rcl} L \times L & \longrightarrow & L \\ (w_1,w_2) & \longmapsto & w_1 \cdot w_2 \end{array}$$

vienen definidas por las fórmulas

(1) $(x,y) + (x',y') = (x+x', \ y+y')$

(2) $(x,y) \cdot (x',y') = (xx'+ayy', \ xy'+x'y)$

las cuales hacen intervenir a la vez al elemento dado a y a - las leyes de composición del anillo K (haciendo $w_1 = (x,y)$ y $w_2 = (x',y')$).

Por supuesto, no resulta en absoluto evidente que las -- fórmulas (1.3.1.(1)) y (1.3.1.(2)) conviertan al conjunto $K \times K$ en un anillo conmutativo, por lo que, es algo que se debe de- mostrar.

PROPOSICION 1.3.2

$\langle L, +, \cdot \rangle$ es un anillo conmutativo con identidad.

DEMOSTRACION

En efecto, $\langle L, + \rangle$ es un grupo conmutativo. Esto resulta de que $L = K \times K$ es un producto directo de grupos y del hecho de que el conjunto K, dotado de la adición dada, es un grupo conmutativo

Mostremos ahora que la multiplicación (1.3.1.(2)) es asociativa. Se tiene, en efecto, por definición

$$(x,y)\left[(x',y')(x'',y'')\right] = (x,y)(x'x''+ay'y'',x'y''+x''y') =$$
$$= (x(x'x''+ay'y'')+ay(x'y''+x''y'),\ x(x'y''+x''y')+y(x'x''+ay'y''))$$

y por otra parte,

$$\left[(x,y)(x',y')\right](x'',y'') = (xx'+ayy',xy'+x'y)(x'',y'') =$$
$$= ((xx'+ayy')x''+a(xy'+x'y)y'',(xx'+ayy')y''+(xy'+x'y)x'');$$

la asociatividad se obtiene comparando los resultados obtenidos (y por supuesto, utilizando las reglas de cálculo de K). Por medio de cálculos análogos se puede establecer la conmutatividad y su distributividad respecto de la suma.

Por último, la relación

$$(1,0)(x,y) = (x,y)$$

muestra que el conjunto $K \times K$ dotado de la ley de composición (1.3.1.(2)) admite un elemento neutro.

Por consiguiente, el anillo $\langle L, +, \cdot\rangle$ es efectivamente - un anillo conmutativo con identidad.

PROPOSICION 1.3.3

$K[\sqrt{a}]$ contiene un subanillo isomorfo a K.

DEMOSTRACION

En efecto, consideremos la aplicación

$$\Phi: K \longrightarrow K[\sqrt{a}]$$
$$x \longmapsto \Phi(x) = (x,0)$$

y verifiquemos que Φ así definida es un isomorfismo.

i) $\Phi(x + x') = (x + x', 0) = (x, 0) + (x', 0) = \Phi(x) + \Phi(x')$

ii) $\Phi(x \cdot x') = (xx', 0) = (x, 0) \cdot (x', 0) = \Phi(x) \cdot \Phi(x')$

iii) $\Phi(1) = (1, 0)$ (la identidad de $K[\sqrt{a}]$).

iv) Φ es inyectiva:

$$\Phi(x) = \Phi(x') \Longrightarrow (x, 0) = (x', 0)$$
$$\Longrightarrow x = x'$$

Luego, Φ es un isomorfismo de K sobre un subanillo ($\Phi(K)$) de $K[\sqrt{a}]$

Puesto que Φ transforma las leyes de composición de K en las del subanillo $\Phi(K)$ de $K[\sqrt{a}]$, no existe inconveniente alguno en identificar cada $x \in K$ con el elemento $\Phi(x)$ de $K[\sqrt{a}]$; esto es lo que haremos. Para mostrar que se ha resuelto el problema planteado en (§ 2) basta con verificar que el elemento $a \in K$ es un cuadrado en $L = K[\sqrt{a}]$. Para ello consideremos el elemento

(1) $$w = (0,1)$$

de L; un cálculo elemental muestra que

$$w^2 = (0,1)(0,1) = (0.0+a.1.1, 0.1+1.0) = (a,0) = \Phi(a)$$

y como se ha convenido de manera general en identificar cada $x \in K$ con el elemento $\Phi(x)$ de L, nuestra afirmación queda demostrada.

Hemos resuelto así, no sólo el problema planteado, sino incluso constituido una solución "canónica" de este problema, esto es, el anillo $K[\sqrt{a}]$.

DEFINICION 1.3.4

Si K es un anillo conmutativo, diremos que un anillo de la forma $K[\sqrt{a}]$ se llama una <u>extensión cuadrática de K</u>. Se dice que se obtiene por adjunción a K de una raíz cuadrada de a.

(1.3.5) Para concluir estas construcciones, indiquemos una notación cómoda para los elementos de $K[\sqrt{a}]$. La identificación de todo $x \in K$ con el elemento $(x,0)$ de $K[\sqrt{a}]$ permite escribir

(1) $$(x,0) = x.$$

Un cálculo inmediato muestra que, para todo $x,y \in K$, se tiene la fórmula

$$(x,y) = (x,0) + (0,1)(y,0);$$

ésta se escribe, teniendo en cuenta (1.3.3.(1)) y (1.3.4.(1)), en la forma

(2) $$(x,y) = x + wy$$

En conclusión, todo elemento del anillo $K[\sqrt{a}]$ se escribe de una manera y de una sola en la forma $x + wy$, y este hecho unido a los axiomas de anillos conmutativos y a la relación

(3) $$w^2 = a,$$

basta para efectuar todos los cálculos que se puedan necesitar.

EJEMPLO 1.3.5

El caso más importante se presenta cuando $K = \mathbb{R}$, cuerpo de los números reales, y $a = -1$. El anillo $\mathbb{R}[\sqrt{-1}]$ obtenido así se denota usualmente por $\mathbb{C}$ y sus elementos se llaman números complejos; un número complejo es, por tanto, un par (x,y) de números reales. Se calcula con los números complejos por medio de las fórmulas (1.3.1.(1)) y (1.3.1.(2)) para $a = -1$, es decir, se pone

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$
$$(x,y) \cdot (x',y') = (xx'-yy', xy'+x'y).$$

En la práctica sólo se utilizan las propiedades siguientes:

P_1) Los números complejos forman un anillo conmutativo $\mathbb{C}$ (más adelante se verá que $\mathbb{C}$ es un cuerpo).

P_2) El cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales es un subanillo de $\mathbb{C}$.

P_3) Existe un número complejo i (notación clásica que sustituye a la notación w utilizada para las extensiones cuadráticas generales) tal que $i^2 = -1$.

P_4) Todo número complejo z se escribe de manera única en la forma

$$z = x + iy$$

donde x, y son números reales.

DEFINICION 1.3.6

Dado un número complejo $z = x + iy$, con $x,y \in \mathbb{R}$, se dice que x es la parte real e y la parte imaginaria de z; se designan por las notaciones

$$x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z).$$

§ 4. ELEMENTOS INVERSIBLES DE UNA EXTENSION CUADRATICA

DEFINICION 1.4.1

Sean K un anillo conmutativo y a un elemento de K; consideremos la extensión cuadrática $L = K[\sqrt{a}]$ construida anteriormente. Dado un elemento

$$z = z + wy \quad (x, y \in K)$$

de L, llamaremos:

i) Conjugado de z, al elemento

(1) $\bar{z} = z - wy,$

ii) Norma de z al elemento

(2) $N(z) = \bar{z} \cdot z = (x - wy)(x + wy) = x^2 - ay^2$

La conjugación es una transformación cuyas propiedades fundamentales son:

(3) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,$

cualesquiera que sean $z_1, z_2 \in L$; que muestran cómo calcular el conjugado de una suma o de un producto. Por otra parte se tiene

(5) $\bar{\bar{z}} = z$

lo que demuestra que la conjugación es una transformación involutiva.

La relación (1.4.1.(4)) muestra que

(6) $\quad N(z_1 z_2) = N(z_1)\cdot N(z_2)$

cualesquiera que sean $z_1, z_2 \in L$. En efecto,

$$N(z_1 z_2) = \overline{z_1 z_2}\cdot z_1 z_2 = \overline{z}_1 . \overline{z}_2 \cdot z_1 \cdot z_2 = \overline{z}_1 \cdot z_1 \cdot \overline{z}_2 \cdot z_2 = N(z_1)N(z_2)$$

como habíamos afirmado. Es evidente que también se tiene

(7) $\quad N(1) = 1$

TEOREMA 1.4.2

Sean K un anillo conmutativo, $a \in K$ y z un elemento del anillo $K[\sqrt{a}]$. Para que z sea inversible en $K[\sqrt{a}]$ es necesario y suficiente que N(z) lo sea en K; se tiene entonces

(1) $\quad z^{-1} = N(z)^{-1} . \overline{z}$

DEMOSTRACION

"$\Longrightarrow$" Supongamos que z es inversible; entonces la relación $z^{-1}z = 1$ proporciona, teniendo en cuenta (1.4.1.(6)) y (1.4.1.(7)), la relación

$$N(z^{-1}).N(z) = 1,$$

con lo que N(z) es efectivamente un elemento inversible del anillo K.

"$\Longleftarrow$" Asumamos ahora que N(z) es inversible en K; la relación

$$\overline{z}\, z = N(z)$$

implica entonces

$$N(z)^{-1}\, \overline{z} . z = 1$$

lo que muestra que z es inversible y que su inverso viene dado por la relación (1.4.2.(1)), de donde, resulta nuestra --- afirmación.

§ 5. EXTENSIONES CUADRATICAS DE CUERPOS

Damos aquí un paso adelante en nuestro plan constructivo y de generalización, a fin de dotar al anillo $K[\sqrt{a}]$ de la estructura de cuerpo, con las ventajas adicionales que ello implica.

TEOREMA 1.5.1

Sea a un elemento de un cuerpo conmutativo K; las propiedades siguientes son equivalentes:

a) El anillo $K[\sqrt{a}]$ es un cuerpo.

b) a no es un cuadrado en K.

DEMOSTRACION

a) $\Longrightarrow$ b)

Procederemos por reducción al absurdo, suponiendo que - existe un $x \in K$ tal $x^2 = a$.

Se tiene entonces que $x^2 = w^2$, y en consecuencia $(x - w)(x + w) = 0$; si $K[\sqrt{a}]$ es un cuperpo, y por tanto un - anillo entero, entonces, o bien $x = w$ o bien $x = -w$, lo que - es imposible porque para $z,y \in K$ la relación $x + wy = 0$ implica $x = y = 0$.

b) $\Longrightarrow$ a)

Sea $z = x + wy$ un elemento no nulo de $K[\sqrt{a}]$; para demostrar que z es inversible basta con demostrar N(z) es inversible en K (1.4.2); como K es un cuerpo, todo consiste en demostrar que la relación N(z) = 0 implica z = 0, a lo que es lo mismo, que

$$x^2 - ay^2 = 0 \Longrightarrow x = y = 0;$$

ahora bien, si se tuviera $y \neq 0$, $y \in K$ sería inversible, y por consiguiente se tendría

$$a = (y^2)^{-1}x^2 = (y^{-1}x)^2,$$

contrario a la hipótesis de que a es un elemento no cuadrado de K. Se tiene entonces y = 0, y por tanto $x^2 = 0$, es decir, x = 0, lo que completa la demostración del teorema.

EJEMPLO 1.5.2

El anillo $L = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es un cuerpo conmutativo. Se puede identificarlo con un subcuerpo de $\mathbb{R}$: basta asociar a cada $u \in L$ el número real $x + y\sqrt{2}$; la aplicación de L en $\mathbb{R}$ así definida es inyectiva y además, compatible con las leyes de composición que intervienen en la cuestión (morfismo).

EJEMPLO 1.5.3

Tomando $K = \mathbb{R}$ y $a = -1$ vemos que el anillo $\mathbb{C}$ de los números complejos es un cuerpo conmutativo; por esta razón se dice que es el <u>cuerpo de los números complejos</u>. Dado un número complejo

$$z = z + iy$$

no nulo, su inverso viene dado por la relación (1.4.2.(1)) y como aquí se tiene

$$N(z) = x^2 + y^2$$

resulta

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} ;$$

el denominador no puede anularse (1.5.1) más que si $x = y = 0$, esto es, si $z = 0$.

§ 6. REPRESENTACION GEOMETRICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

(1.6.1) Consideremos en el plano dos ejes coordenados rectangulares Ox y Oy; es natural asociar a todo número complejo $z = z + iy$ el punto de coordenadas x,y en el plano; recíprocamente, se puede asociar a todo punto del plano de coordenadas x,y el número complejo $z = x + iy$, que se llama tradicionalmente el afijo del punto P. Se establece así una biyección del conjunto $\mathbb{C}$ sobre el conjunto de puntos del plano, una vez elegidos los ejes coordenados, lo que tiene por objeto, identificar el plano con el conjunto $\mathbb{R}^2$.

Esta representación geométrica de los números complejos permite interpretar fácilmente la adición de los números complejos (Fig. 1): si P y Q son puntos del plano de afijos u y v, entonces el punto R de afijo u + v viene dado por la relación

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ},$$

puesto que para sumar vectores de origen O basta con sumar sus componentes respecto de los ejes coordenados Ox, Oy.

Sea P el punto de afijo $z = x + iy$; el número

$$N(z) = \bar{z}\,z = x^2 + y^2$$

viene dado evidentemente por

$$N(z) = OP^2,$$

en virtud del teorema de Pitágoras. La distancia de P al punto 0, es decir, el número

(1) $$r = OP = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\bar{z}\,z}$$

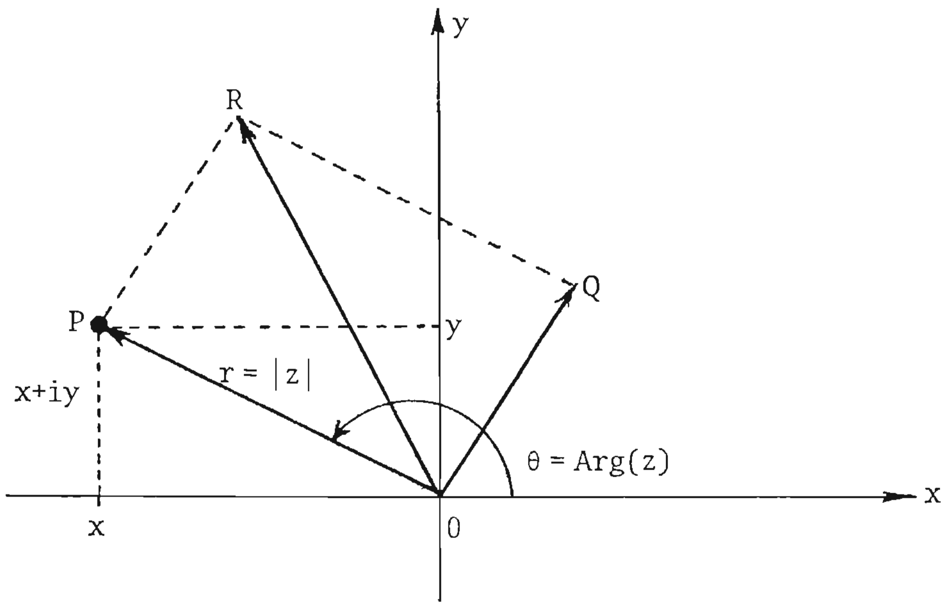

Figura 1.

se llama el <u>módulo</u> o el <u>valor absoluto</u> de z y se denota por $|z|$; se cumple siempre $|z| \geq 0$, y $|z| = 0$ si y sólo sí $z = 0$; además las desigualdades clásicas entre los lados de un triángulo muestran, si se examina la figura, que se tiene $|u+v| \leq |u| + |v|$ cualesquiera que sean $u,v \in \mathbb{C}$, y con mayor generalidad.

(2) $$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|.$$

cualesquiera que sean los complejos $z_1, z_2, \ldots, z_n$; este resultado se conoce como desigualdad triangular.

DEFINICION 1.6.2

Sea $z \neq 0$. El ángulo

$$\theta = \widehat{(\vec{Ox}, \vec{Oy})},$$

que es un número real módulo 2π (1.1.6) se llama el argumento ó amplitud del número $z \neq 0$, y se denota por

$$\mathrm{Arg}(z).$$

La figura (1) muestra que las partes real e inaginaria de z - vienen dadas en función del módulo r y del argumento θ de z - por las fórmulas

(1) $$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

de manera que se puede escribir también

(2) $$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

o bien utilizando la notación

(3) $$z = r\,\mathrm{cis}\,\theta,$$

donde $\mathrm{cis}\,\theta$ es la contracción de $\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, fórmula que recibe el nombre de representación trigonométrica de z. Recíprocamente, la relación

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \text{ con } r > 0 \Rightarrow r = |z|,\ \theta = \mathrm{Arg}(z);$$

ya que la relación considerada muestra que las partes real e imaginaria de z son

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

de donde resulta que $r^2 = x^2 + y^2$ y puesto que r es positivo, $r = |z|$; denotando por θ' el argumento de z, se tiene entonces $\cos\theta = \cos\theta'$, $\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,\theta'$, de donde $\theta = \theta'$, salvo un múltiplo entero de 2Π, lo que establece nuestra afirmación.

(1.6.3) Para obtener una interpretación geométrica del producto de dos números complejos, consideremos los números complejos

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2).$$

su producto puede escribirse en la forma

(1) $z_1z_2 = r_1r_2(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$

y como r_1r_2 es positivo, de (1.6.1.(1)) se deduce que

(2) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

Por otro lado, según las reglas de multiplicación de números complejos, se tiene

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\mathrm{sen}\,\theta_2) + i(\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\mathrm{sen}\,\theta_2)]$$

Mediante los teoremas de adición del seno y el coseno, esta expresión se reduce a

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)],$$

resultado que establece que

(3) $\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2).$

Este resultado se puede extender naturalmente a un producto de varios factores, en la forma

(4) $\prod_{k=1}^{n} (\cos\theta_k + i\ \mathrm{sen}\,\theta_k) = \cos\theta + i\ \mathrm{sen}\,\theta$, donde $\theta = \sum_{k=1}^{n} \theta_k$.

En particular, si los θ_k se suponen iguales a un mismo ángulo, se obtiene la célebre fórmula de De Moivre

(5) $(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\ \mathrm{sen}(n\theta)$

Por otro lado, puesto que la división es un caso especial de la multiplicación, si en (1.6.3.(1)) hacemos $z_2 = z^{-1}$, se tendrá

$$z_1 z^{-1} = \frac{z_1}{z} = \frac{r_1}{r}\,\frac{(\cos\theta_1 + i\ \mathrm{sen}\,\theta_1)}{(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\,\theta)}$$

$$= \frac{r_1}{r}\,(\cos(\theta_1-\theta) + i\ \mathrm{sen}\,(\theta_1-\theta))$$

lo que muestra claramente que

(6) $\left|\frac{z_1}{z}\right| = \frac{|z_1|}{|z|}$ y $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z}\right) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z)$.

Así, las fórmulas

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$$

permiten dar una interpretación geométrica de la multiplicación de números complejos. Sea

$$z = r(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\,\theta), \qquad r \geq 0,$$

un número complejo; asociemos a todo punto P del plano el punto P' cuyo afijo es el producto por z del afijo de P (la aplicación P ⟶ P' corresponde entonces, en el plano, a la aplicación $u \longrightarrow zu$ de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$); entonces la transformación que hace pasar de P a P' es una semejanza y, de manera más precisa, es el producto de la homotecia de centro O y de razón r y de la rotación del ángulo θ alrededor de O.

De manera similar, las relaciones

$$|z^{-1}| = |z|^{-1}, \quad \operatorname{Arg}(z^{-1}) = -\operatorname{Arg}(z),$$

que se obtienen haciendo $z_1 = z$, $z_2 = z^{-1}$ en (1.6.3.(2)), -- muestran que se pasa del punto de afijo $z \neq 0$ al punto de afijo z^{-1} por una inversión de centro O y potencia 1, seguida de una simetría respecto al eje Oy.

Estas interpretaciones geométricas de las operaciones -- con números complejos son de aplicación muy usual en Análisis.

En la teoría de funciones de una variable compleja, la - función exponencial e^z desempeña un rol fundamental. En la definición que damos a continuación se supone conocida la fun-- ción e^x, para $x \in \mathbb{R}$ (cf.3.4.3).

DEFINICION 1.6.4

Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo cualquiera. Por (P_4) de -- (1.3.5), z es de la forma $z = x + iy$, entonces el valor de e^z está dado por la fórmula

(1) $$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Para $z = iy$, se tiene entonces $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$. Por tanto (1.6.2.(2)) se puede escribir en la forma

(2) $$z = re^{i\theta} \quad (r = |z|,\ \theta = \operatorname{Arg}(z))$$

(1.6.5) La determinación de las raíces de un número complejo es uno de los temas centrales de la teoría de ecuaciones, y - es precisamente la labor desarrollada en la solución de este problema lo que engendra la cración del sistema de los números complejos.

Para hallar la raíz n - ésima de un número complejo a tenemos que resolver la ecuación

(1) $$z^n = a$$

En el supuesto de que $a \neq 0$, escribimos $a = r\,(\cos\Phi + i\,\mathrm{sen}\,\Phi)$ y $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Entonces (1.6.5.(1)) adopta la forma

(2) $$\rho^n(\cos n\,\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\,\theta) = r(\cos\Phi + i\,\mathrm{sen}\,\Phi)$$

Esta ecuación se verifica ciertamente si $\rho^n = r$ y $n\,\theta = \Phi$. De aquí se obtiene la raíz

$$z = r^{1/n}(\cos\frac{\Phi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{\Phi}{n}),$$

donde $r^{1/n}$ denota la raíz enésima positiva del número r, no - siendo esta la única solución. En efecto, también se verifica (1.6.5.(2)) si $n\theta$ difiere de Φ en un múltiplo del ángulo total. Si se expresan los ángulos en radianes, el ángulo total es 2Π, y tenemos que se verifica (1.6.5.(2)) si (y solo sí)

$$\theta = \frac{\Phi}{n} + K\cdot\frac{2\Pi}{n}$$

donde $K = 0,1,\ldots,n-1$. Por tanto la solución completa de la ecuación (1.6.5.(1)) viene dada por

(3) $$z = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\Phi}{n} + \frac{2K\Pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\Phi}{n} + \frac{2K\Pi}{n}\right)\right],\quad K = 0,\ \ldots,\ n-1.$$

Existen n raíces n-ésimas de cualquier número complejo - $a \neq 0$. Todas tienen el mismo módulo y sus argumentos difieren en múltiplos de $\frac{2\Pi}{n}$ (Arg mód 2Π).

Geométricamente, las raíces n- ésimas son los vértices - de un polígono regular de n- lados.

De particular importancia es el caso en que a = 1. Las - raíces de la ecuación $z^n = 1$ se denominan raíces n- ésimas de la unidad, y si ponemos

(4) $$w = \cos \frac{2\Pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\Pi}{n}$$

todas las raíces pueden expresarse mediante $1, w, \ldots, w^{n-1}$. Es claro que si $a^{1/n}$ denota cualquier raíz enésima de a, entonces todas las raíces pueden expresarse en la forma
$w^k \cdot a^{1/n}$, $K = 0, 1, \ldots, n-1$.

Si se sustituye (1.6.5.(1)) en (1.6.4.(1)), se tendrá

$$e^{z^n} = e^{nz} .$$

En particular, si $z = i\theta$ se tiene

$$(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta},$$

obteniéndose de nuevo la fórmula de De Moivre (1.6.3.(5)).

(1.6.6) Para muchos propósitos es útil ampliar el sistema $\mathbb{C}$ - de los números complejos mediante la introducción de un símbolo ∞ que representa al infinito. Su relación con los números finitos se establece escribiendo

(1) $a + \infty = \infty + a = \infty$, para todo a finito .

(2) $b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty$, para todo $b \neq 0$ (incluyendo $b = \infty$).

Es imposible, sin embargo, definir $\infty + \infty$ y $0 . \infty$ sin violar las reglas aritmética. No obstante, por convenio especial escribi remos

(3) $\frac{a}{0} = \infty$, para $a \neq 0$.

(4) $\frac{b}{\infty} = 0$, para $b \neq \infty$.

En el plano no hay lugar para un punto correspondiente a ∞, pero podemos, naturalmente, introducir un punto "ideal", - que llamaremos punto del infinito. La posibilidad de hacer esto es consecuencia de que para conocer un punto es suficiente conocer todos sus r- entornos (discos de centro z_0 y radio - $r > 0$). No es posible definir un r- entorno de ∞ mediante una desigualdad del tipo $\|z - z_0\| < r$, pero sí es posible hacerlo por la condición $\|z\| > 1/r$. Desde el punto de vista geométrico, un r- entorno de ∞ es el exterior del disco de radio - $1/r$ y de centro en el origen. Se dice que una región contiene al punto del infinito si tiene al menos un punto común con cada entorno de ∞. Esto ocurre si y solamente si la región no - está acotada. Se dice entonces que la región es no acotada o infinita. Convenimos en que toda recta pasa por el punto del infinito.

Cuando al plano complejo se le adjunta el punto del infinito se le llama plano complejo ampliado o plano complejo entero, y algunas veces, también plano completo.

En ocasiones, el plano complejo sin el punto $z = \infty$ se -- llama plano complejo finito y se designa por $\|z\| < \infty$. El plano complejo ampliado puede aplicarse mediante la proyección - estereográfica sobre la superficie de la esfera unidad S ---

(Fig. 2). Consideremos la esfera unidad centrada en el origen $z = 0$ del plano complejo. El plano z corta a la esfera por el ecuador de ésta, que es la circunferencia $\|z\| = 1$. Cada punto P del plano z se aplica en un punto P' de la esfera por el siguiente procedimiento: se unen el polo norte N de la esfera y el punto P mediante una línea recta. Entonces P' es el punto de intersección de la esfera y la recta NP. Los puntos para los que $\|z\| < 1$ se aplican en el hemisferio inferior, mientras que aquellos para los que $\|z\| > 1$ lo hacen en el hemisferio superior. El punto $z = \infty$ corresponde con el polo norte N de la esfera, y el origen $z = 0$ se transforma en el polo sur. De esta manera se establece una biyección entre la esfera y el plano complejo ampliado. Si P_o está próximo a P_1 entonces P'_o está próximo a P'_1, lo cual es también válido para $z = \infty$, es decir, un r-entorno de ∞ del plano z corresponde a una región pequeña de la esfera cuando r es pequeño. En la teoría de funciones la esfera S se llama esfera de Riemann.

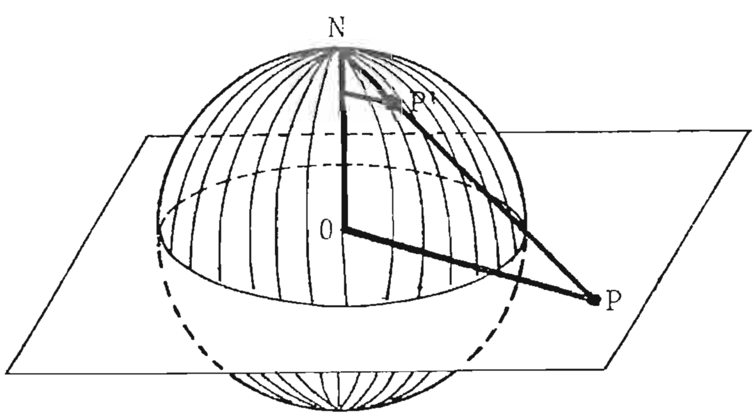

Figura 2

§ 7. TOPOLOGIA DEL PLANO

DEFINICION 1.7.1

Llamaremos vecindad de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ a todo conjunto V que contiene un disco abierto

$$\Delta: \|z - z_0\| < r$$

de centro z_0 y radio $r > 0$.

El disco Δ es, naturalmente, una vecindad de z_0.

DEFINICION 1.7.2

Sea $S \subset \mathbb{C}$. Se dice que un punto $z_0 \in S$ es un punto interior a S si existe una vecindad V de z_0 tal que $V \subset S$. El conjunto de todos los puntos interiores a S se llama el interior de S y se denota por $\overset{\circ}{S}$. S se llama un conjunto abierto si $S = \overset{\circ}{S}$.

En otras palabras, un conjunto S es abierto si y sólo si, todo punto de S es un punto interior de S.

TEOREMA 1.7.3

i) La unión de una familia cualquiera de conjuntos abiertos en $\mathbb{C}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$.

ii) La intersección de un número finito de conjuntos abiertos en $\mathbb{C}$ es un conjunto abierto.

DEMOSTRACION

i) Sean A una clase de subconjunto abiertos de $\mathbb{C}$, y $M = \cup\{G/G \in A\}$, y sea $p \in M$. Debemos mostrar que p es un punto interior de M, es decir, que existe un disco abierto D_p tal que $p \in D_p$ y $D_p \subset M$.

Puesto que $p \in M$, existe G_o en A tal que $p \in G_o$. Como además, G_o es un conjunto abierto, entonces existe un disco abierto D_p que contiene a p y tal que $p \in D_p \subset G_o$.

Puesto que G_o es un subconjunto de $M = \cup\{G/G \in A\}$, D_p es también un subconjunto de M. Así, pues, M es abierto.

ii) Tómense dos subconjuntos de $\mathbb{C}$. La prueba se completa por inducción.

EJEMPLO 1.7.4

El anillo $S = \{z/r_1 < \|z\| < r_2,\ r_1,\ r_2 > 0\}$ es un conjunto abierto.

DEFINICION 1.7.5

Un conjunto $F \subset \mathbb{C}$ se dice cerrado si su complemento $\mathbb{C} - F$ es abierto.

Obsérvese que es posible que un conjunto sea abierto y cerrado al mismo tiempo, como sucede con $\mathbb{C}$ y ϕ.

EJEMPLOS 1.7.6

i) Un conjunto finito es cerrado.

ii) El disco cerrado Δ: $\|z - z_o\| \leq r$, $r > 0$ es cerrado.

TEOREMA 1.7.7

i) Toda intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

ii) La unión de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

DEMOSTRACION

Probaremos ii). Para ello consideremos una familia $(F_i)_{i \varepsilon I}$ de conjuntos abiertos. Por (1.7.3.(ii)) $\bigcap_{i\varepsilon I} Fi$ es un - conjunto abierto. Se tiene entonces que

$$\complement \bigcap_{i\varepsilon I} F_i = \bigcup_{i\varepsilon I} \complement F_i$$

es un conjunto cerrado.

DEFINICION 1.7.8

Un punto z_o se llama punto de acumulación de un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ si cada vecindad V de z_o contiene un punto de S diferente de z_o.

OBSERVACION 1.7.9

Si z_o es un punto de acumulación de un conjunto S, z_o -- puede no pertenecer a S. Por otra parte, un punto z_o de S no tiene por qué ser un punto de acumulación de S. En efecto, -- $z = 1$ es un punto de acumulación del disco S: $\|z - z_o\| < 1$, y sin embargo $1 \notin S$.

PROPOSICION 1.7.10

Si z_o es un punto de acumulación de un conjunto $S \subset \mathbb{C}$, entonces todo vecindario de z_o contiene un número infinito de - puntos de S.

DEMOSTRACION

En efecto, si la vecindad $\|z - z_o\| < r$ contiene un punto $z_1 \neq z_o$ perteneciente a S, entonces, en forma semejante, - la vecindad $\|z - z_o\| < \|z_1 - z_o\|$ contendrá un punto z_2, distinto de z_0 y z_1, que pertenece a S. Repitiendo este proceso en forma indefinida, se obtiene que la vecindad $V = \|z-z_0\| < r$ contiene un número infinito de puntos de S.

DEFINICION 1.7.11

El conjunto de puntos de acumulación de S se llama conjunto derivado de S y se denota por S'.

TEOREMA 1.7.12

Si S es un conjunto cerrado en $\mathbb{C}$, todo punto de acumulación de S pertenece a S.

DEMOSTRACION

En efecto, si z_0 es un punto de acumulación de S, z_0 no puede estar en $\mathbb{C}$ - S, pues $\mathbb{C}$ - S es abierto. Recíprocamente, si todo punto de acumulación de S pertenece a S, entonces todo $z_0 \varepsilon (\mathbb{C} - S)$, debe tener una vecindad V tal que $V \subset (\mathbb{C} - S)$, pues de otro modo z_0 sería un punto de acumulación de S que no está en S. Por consiguiente $(\mathbb{C} - S)$ es abierto, o sea S es cerrado.

Si denotamos por $\overline{S}$ la unión $S \cup S'$, el resultado anterior puede expresarse: S es cerrados ssi $\overline{S} \subset S$. Se cumple siempre $S \subset \overline{S}$.

El conjunto $\overline{S}$ se llama la cerradura o adherencia de S.

TEOREMA 1.7.13

i) Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ sea cerrado es que S sea igual a $\overline{S}$.

ii) Para un conjunto S cualquiera, $\overline{S}$ es siempre cerrado.

DEMOSTRACION

Inmediata.

DEFINICION 1.7.14

Sea A un subconjunto de un conjunto $S \subset \mathbb{C}$. Se dice que A es abierto en S o con relación a S, si existe un conjunto --- abierto B tal que $A = B \cap S$.

Cuando $S = \mathbb{C}$ entonces coinciden ambas nociones de abierto y de abierto con respecto a $\mathbb{C}$. Si $S \neq \mathbb{C}$, entonces A puede ser abierto en S, sin que A en sí sea abierto.

DEFINICION 1.7.15

Un conjunto S se llama <u>conexo</u> si no existen conjuntos no vacíos H_1, H_2 y abiertos en S tales que

i) $H_1 \cap H_2 = \phi$

ii) $H_1 \cup H_2 = S$

Cuando S es abierto, la condición de que H_1, H_2 sean -- abiertos en S se puede reemplazar por la condición de que H_1, H_2 sean abiertos. (En (3.3.3) se da una noción equivalente de conexidad).

El conjunto $\mathbb{C}$ es conexo. Es inmediato que esto equivale a decir que en $\mathbb{C}$ los únicos conjuntos que son abiertos y ce-- rrados al mismo tiempo son ϕ y $\mathbb{C}$.

EJEMPLO 1.7.16

El disco abierto $\|z\| < 1$ y el disco cerrado $\|z\| \leq 1$, son ambos conexos.

DEFINICION 1.7.17

Todo conjunto abierto y conexo del plano complejo se llama dominio (o región abierta).

De esta definición y de (1.7.15) de deduce unmediatamente que o bien $H_1 = \phi$, o bien $H_2 = \phi$.

DEFINICION 1.7.18

La cerradura de una región abierta o dominio se llama región cerrada.

Si a una región abierta agregamos alguno, todos o ninguno de sus puntos de acumulación, obtenemos un conjunto llamado región.

EJEMPLOS 1.7.19

1) El disco $\|z - z_0\| < r$ $(r > 0)$, es un dominio.

2) Los semiplanos $Re(z) > 0$ y $Re(z) < 0$ son ambos dominios.

DEFINICION 1.7.20

Un punto z_0 se llama punto frontera de un conjunto S si cada vecindad del punto z_0 contiene al menos un punto del conjunto S y al menos un punto que no pertenece a S.

DEFINICION 1.7.21

Un conjunto S de dice acotado si existe un número $k > 0$ tal que $\|z\| \leq k$ para todo $z \in S$.

DEFINICION 1.7.22

Llamaremos <u>recubrimiento abierto</u> de un conjunto $E \subset \mathbb{C}$ a la familia $(G_i)_{i\in I}$ de subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$, tales que $E \subset \bigcup_{i\in I} G_i$.

DEFINICION 1.7.23

Se dice que un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ es compacto si es a la vez cerrado y acotado. De forma más precisa, diremos que un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ es compacto si todo recubrimiento abierto de K contiene un subrecubrimiento finito.

Más explícitamente, la condición es que si $(G_i)_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de K, existe un número finito de índices $i_1, i_2, \ldots, i_n$, tales que

$$K \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \ldots \cup G_{i_n},$$

definición motivada por el enunciado del clásico teorema de Heine-Borel:

TEOREMA 1.7.24 (Heine-Borel)

Sea $K \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto y $(G_i)_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de K, entonces $(G_i)_{i\in I}$ contiene un subrecubrimiento finito de K.

Haremos referencia a esta propiedad, como la propiedad de Heine-Borel.

Antes de proceder a la demostración del teorema consideremos algunas observaciones que serán de mucha utilidad.

OBSERVACION 1.7.25

Si K tiene la propiedad de Heine-Borel y si K_o es un subconjunto cerrado de K, entonces K_o tiene la misma propiedad.

DEMOSTRACION

En efecto, supongamos que $(G_i)_{i\varepsilon I}$ es un recubrimiento abierto de K_o. Entonces el recubrimiento abierto de K es de la forma $[(G_i)_{i\varepsilon I}] \cup [K-K_o]$. De acuerdo con nuestra hipótesis, existe un subrecubrimiento finito $(G_{i_k})_{1\leq k\leq n}$ de K, que puede incluir a $K-K_o$. El mismo subrecubrimiento, sin $K-K_o$, recubre a K_o.

Como consecuencia de la observación anterior, bastará probar el teorema (1.7.24) para un cuadrado $||x|| \leq M$, $||y|| \leq M$ en el caso del plano.

OBSERVACION 1.7.26

El caso del plano ampliado se reduce fácilmente al del plano. En efecto, si el conjunto cerrado K no incluye ∞, está acotado; si lo incluye, uno de los conjuntos abiertos recubridores contiene a ∞, y bastará considerar el subconjunto cerrado acotado de K exterior a este conjunto abierto particular.

(1.7.24) DEMOSTRACION

Mostraremos ahora que un cuadrado C_1 tiene la propiedad de Heine-Borel. (La demostración es indirecta y por el método de bisección). Consideremos un recubrimiento abierto $(G_i)_{i\varepsilon I}$ de C_1 y supongamos que C_1 no tiene un subrecubrimiento finito.

Si dividimos C_1 en 4 cuadrados de lado $\ell/2$ (llamando ℓ al valor del lado de C_1), al menos uno de los cuadrados no tiene - un subrecubrimiento finito. Denotemos este cuadrado por C_2 y asumamos que C_2 es el cuadrado del ángulo superior izquierdo de C_1. Repitiendo indefinidamente este proceso, obtenemos una sucesión C_n de cuadrados encajados sin subrecubrimiento finitos. Es claro que C_n converge hacia un punto común $\xi \in C_1$, ya que $\frac{\ell}{2^n} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por hipótesis, ξ pertenece a un conjunto G_i, y puesto que G_i es un recindario abierto de ξ, está contenido en G_i. Se tiene entonces que para n suficientemente grande $C_n \subset G_i$, lo que contradice el hecho de que C_n no puede recubrirse por un número finito de abiertos de $(G_i)_{i\in I}$. La -- contradicción prueba el teorema.

TEOREMA 1.7.27 (Bolzano-Weierstrass)

Si K es un conjunto compacto, toda sucesión infinita --- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos $a_n \in K$ tiene al menos un punto de acumula--- ción en K.

DEMOSTRACION

Consideremos la colección formada por todos los conjun-- tos U, tales que $a_n \in U$, como máximo para un número finito de subíndices n. Todo punto que no es de acumulación de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un entorno con esta propiedad. Por consiguiente, si no hay punto de acumulación en K, los conjuntos U forman un recubrimiento abierto de K. Podríamos entonces recubrir a K con un número finito de conjuntos U. Se sigue de esto que $a_n \varepsilon K$ únicamente para un número finito de subíndices, contrario a la hipótesis. Por consiguiente debe existir al menos un punto de acumulación en K.

TEOREMA 1.7.28

Todo conjunto con la propiedad de Heine-Borel es compacto.

DEMOSTRACION

Basta probar este recíproco del teorema de Heine-Borel - para el caso del plano ampliado. En efecto, si un conjunto es cerrado con respecto al plano ampliado y no contiene el punto del infinito, es por lo mismo acotado.

Sea $K \subset \mathbb{C}$ un conjunto con la propiedad de Heine-Borel y - consideremos un punto $z \varepsilon (\mathbb{C}-K)$. Denotemos $(U_i)_{i\varepsilon I}$ la colec--- ción de todos los conjuntos abiertos U, cuyo cierre $\overline{U}$ no contiene a z. Es evidente que todo punto z tiene una vecindad -- con esta propiedad. Por consiguiente, la colección $(U_i)_{i\varepsilon I}$ es un recubrimiento abierto de K, pudiéndose extraer un subrecubrimiento finito $(U_{i_k})_{1\leq k\leq n}$. Entonces $z \varepsilon \bigcap_{k=1}^{n}(\mathbb{C} - \overline{U}_{i_k})$, y esta - intersección es un subconjunto abierto de $(\mathbb{C}-K)$. Puesto que z es un punto arbitrario de $(\mathbb{C}-K)$, se tiene que $(\mathbb{C}-K)$ es abierto y, por tanto K es cerrado.

§ 8. FUNCIONES COMPLEJAS DE VARIABLE COMPLEJA.

En la teoría de variables complejas se consideran funciones de cuatro típos distintos: funciones reales de una variable real, funciones reales de una variable compleja, funcio--

nes complejas de una variable real y funciones complejas de - una variable compleja. Estas últimas constituyen el objeto de la presente sección.

Adoptaremos el convenio de que las letras z y w denotan siempre variables complejas; así por ejemplo, para indicar -- una función compleja de una variable compleja escribiremos -- $w = f(z)$.

DEFINICION 1.8.1

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto arbitrario. Se llama función de la variable compleja z a toda regla o aplicación que a todo elemento $z \in D$ hace corresponder otro elemento $w \in \mathbb{C}$ y que se denota por $f(z)$. Se dice entonces que f está definida en D. La interpretación precisa de la palabra "regla" no es muy importante. Lo que sí es importante es que una función asocia un número complejo a cada punto de su dominio de definición.

Como ilustración, consideremos los siguientes ejemplos:

(1) $w = z$

que define una función en cualquier región.

(2) $w = \dfrac{2}{4 - \|z\|}$,

que define una función en toda región que no contenga ningún punto de la Circunferencia $\|z\| = 4$.

(1.8.2) Tal como ocurre en el Análisis real, las operaciones algebraicas con las funciones, se definen efectuando las co-- rrespondientes operaciones con sus valores. Por ejemplo, el - producto fg de dos funtiones f y g es la función cuyo valor -

en z es f(z) g (z). Es obvio que f y g deben tener un dominio común.

Cualquier función f puede ser expresada mediante dos funciones reales, descomponiéndola en sus partes real e imaginaria. Por ejemplo, si $w = u + iv$ y $z = x + iy$, la ecuación $w = z^2$ da

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

que es equivalente al sistema

(1) $u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$

En el caso general, f tiene una parte real u y una parte imaginaria v que son funciones de z y por consiguiente, también de (x,y). Así pues, $w = f(z)$ es equivalente a

$$w = u(x,y) + iv(x,y).$$

Se puede considerar que una función f, de la variable z, establece una transformación de los puntos del plano z en que esté definida, en puntos del plano w. Estas transformaciones se llaman también aplicaciones y, a veces, representaciones. Por ejemplo, para $w = z^2$, las ecuaciones (1.8.2.(1)) establecen la correspondencia entre el punto (x,y) del plano z y el punto (u,v) del plano w. Se dice entonces que (u,v) es la imagen de (x,y) en la transformación, o lo que es igual, que w es la imagen de z. De igual forma puede hablarse de la imagen de un conjunto de puntos, de una región, por ejemplo.

DEFINICION 1.8.3

Si f es una función definida por $w = f(z)$, diremos que f es una <u>función unívoca</u> de z, si a cada valor de z corresponde sólo un valor de w. Si por el contrario, más de un valor de w corresponde a cada valor de z, diremos que f es una función - <u>multívoca o multiforme</u> de z.

Una función multivaluada puede considerarse como una colección de funciones unívocas, cada uno de cuyos miembros será llamado <u>una rama de la función</u>. Se acostumbra a considerar un miembro particular como una <u>rama principal</u> de la función - multívoca y el valor de la función correspondiente a esta rama como el <u>valor principal</u>.

EJEMPLOS 1.8.4

(1) Si $w = z^2$, entonces para cada valor de z existe un solo valor de w. Por ello $w = f(z) = z^2$ es una función unívoca de z.

Aunque $w = z^2$ asigna un único valor de w a cada valor de z, no es necesariamente cierto que al transformar una región del plano z se cubra su imagen en el plano w exactamente una vez; puede ocurrir que la transformación asigne un mismo valor w a dos puntos distintos del plano z, pues $(z)^2 = (-z)^2$ - son iguales.

La función $w = z^2$ aplica el semiplano superior del plano z en una región del plano w. Como $\|w\| = \|z\|^2$ y $\operatorname{Arg}(w) = 2\operatorname{Arg}(z)$ mód 2Π, las circunferencias $\|z\| = r$ se --- aplican sobre las circunferencias $\|w\| = r^2$ y un rayo que partiendo del origen forme un ángulo θ con el eje x se aplica sobre un rayo que forma un ángulo doble con el eje u. El efecto de la aplicación es abrir el semiplano superior como si fuera un abanico, de tal manera que su imagen cubre exactamente una vez el plano w, como se muestra en la figura 3.

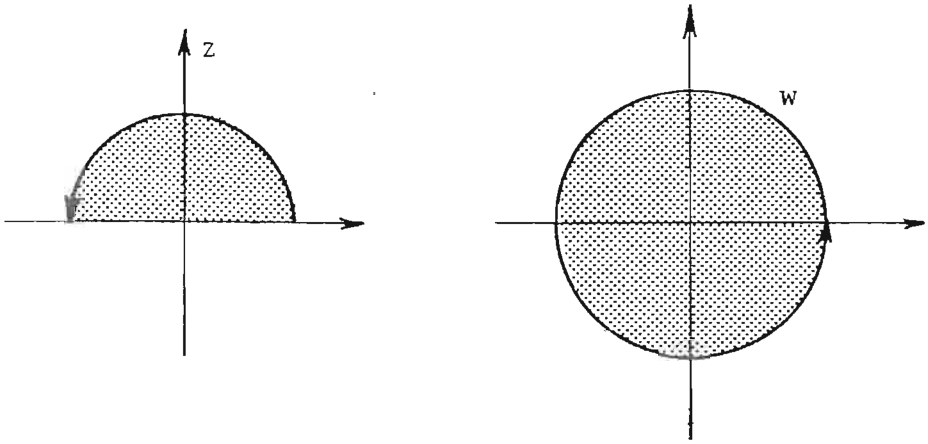

Figura 3.

Si se transforma de esta manera una región mayor que el semiplano superior se recubrirán 2 veces algunos puntos; la imagen de todo el plano z recubre el plano w, con excepción del origen, exactamente 2 veces. La razón de este comportamiento obedece a que la ecuación $w = z^2$ tiene dos soluciones cuando $w \neq 0$; en otras palabras, a que $\sqrt{w}$ tiene 2 valores.

(2) Si $w = z^{1/2}$, entonces para cada valor de z existen dos valores de w. De donde $f(z) = z^{1/2}$ es una función multivaluada (bivaluada en este caso) de z.

§ 9. LIMITES Y CONTINUIDAD

Se define en el Análisis de variable compleja el concepto de límite de la misma forma que en el Análisis real, con la única salvedad que ahora el valor absoluto tiene el sentido de la definición (1.6.1.(1)).

DEFINICION 1.9.1

Sea f una función definida en un conjunto D del plano -- complejo, excepto tal vez en el punto $z_o \varepsilon D$. Se dice que el número L es el límite de f(z) cuando z tiende a z_o ó sea

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|f(z) - L\| < \varepsilon$ para todo $z \varepsilon D$ que satisfaga $0 < \|z - z_o\| < \delta$.

Obsérvese que para que existe el límite L no es necesario que f esté definida en el punto z_o.

EJEMPLO 1.9.2

Sea $f(z) = \dfrac{z^2+4}{z-2i}$. La función f está definida solamente - para $z \neq 2i$. Sin embargo $\lim\limits_{z \to 2i} f(z) = 4i$. En efecto, si $z \neq 2i$, entonces se tiene

$$\|f(z) - 4i\| = \|z - 2i\|$$

Por consiguiente, tomando $\delta = \varepsilon$ se obtiene $\|f(z) - 4i\| < \varepsilon$ - si $0 < \|z - 2i\| < \delta$, o sea

$$\lim_{z \to 2i} \frac{z^2+4}{z-2i} = 4i.$$

TEOREMA 1.9.2

Sean f y g dos funciones definidas sobre el mismo conjunto $D \subset \mathbb{C}$, tales que

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = \alpha \quad y \quad \lim_{z \to z_o} g(z) = \beta,$$

entonces se tiene que

i) $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z) + g(z)] = \alpha + \beta$

ii) $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z) - g(z)] = \alpha - \beta$

iii) $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = \alpha\beta$

iv) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (si $\beta \neq 0$).

Las demostraciones de estas propiedades son similares a las del Análisis real.

Se demuestra por inducción que

i) $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z)+g(z)+\ldots+p(z)] = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)+\lim\limits_{z\to z_0} g(z)+\ldots+ \lim\limits_{z\to z_0} p(z)$

ii) $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z)g(z)\ldots p(z)] = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \lim\limits_{z\to z_0} g(z)\ldots \lim\limits_{z\to z_0} p(z)$

donde $f,g,\ldots,p$ son funciones definidas en la misma región, tales que los límites del segundo miembro existen. Puesto que se verifica también que

$$\lim_{z\to z_0} cf(z) = c\lim_{z\to z_0} f(z)$$

para toda constante c, concluimos que

$$\lim F[f(z), g(z),\ldots, p(z)] = F[\lim f(z), \lim g(z),\ldots, \lim p(z)]$$

para todo polinomio $F(\alpha, \beta, \ldots, \sigma)$.

DEFINICION 1.9.3

Sea $D \subset \mathbb{C}$. Al igual que en el Análisis real, se dice que una función f definida en D es continua en el punto $z_0 \in D$ si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Si f es contínua en cada punto $z \in D$, se dice que f es continua en D.

Las funciones de variable compleja y de variable real presentan comportamientos análogos con respecto a la continuidad. Las propiedades de las funciones continuas son las mismas, razón por la cual sólo enunciaremos tales propiedades, pues su demostración es similar a la de funciones de variable real.

TEOREMA 1.9.4

Si f es contínua en z_0, entonces cf es contínua en z_0.

TEOREMA 1.9.5

Si f y g son funciones contínuas en un conjunto $D \subset \mathbb{C}$, entonces $f + g$, $f - g$, fg son también funciones contínuas en D. De igual forma $\frac{f}{g}$ es contínua en aquellos puntos $z_0 \in D$ para los cuales $g(z_0) \neq 0$.

Es una consecuencia inmediata de (1.9.2).

TEOREMA 1.9.6

Si f es contínua en z_0 y g es contínua en $f(z_0)$, entonces la función compuesta $h = g \circ f$ es contínua en z_0.

DEMOSTRACION

Inmediata. En efecto, como f es contínua en z_0 se tiene

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

De igual forma, puesto que g es contínua en $f(z_0)$, entonces

$$\lim_{z\to f(z_0)} g(z) = g(f(z_0)) = (g \circ f)(z_0),$$

lo que muestra nuestra afirmación.

OBSERVACION 1.9.7

Como evidentemente las funciones $f(z) = k$ (k constante) y $f(z) = z$ son ambas contínuas en $\mathbb{C}$, de (1.9.5) se deduce que todo polinomio

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

es contínuo en $\mathbb{C}$. De igual manera, toda función racional $\frac{P(z)}{Q(z)}$ es contínua en todo punto z_0 en que $Q(z_0) \neq 0$.

OBSERVACION 1.9.8

Puesto que $\|f(z) - f(z_0)\| = \|\overline{f(z)} - \overline{f(z_0)}\|$, es evidente que las condiciones

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \quad y \quad \lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{f(z_0)}$$

son equivalentes. Por consiguiente $\overline{f(z)}$ es contínua en z_0 si lo es $f(z)$.

Teniendo en cuenta que

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{f(z)+\overline{f(z)}}{2}, \quad \mathrm{Im}(f(z)) = \frac{f(z) - \overline{f(z)}}{2i}, \|f(z)\| = (f(z)\overline{f(z)})^{1/2}$$

observamos que las tres funciones

$$\mathrm{Re}(f(z)), \; \mathrm{Im}(f(z)), \; \|f(z)\|$$

son contínuas en todo z_0 donde lo sea $f(z)$.

OBSERVACION 1.9.10

Dada una función $f = u + iv$ se verifica sin dificultad que f es contínua en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$ si, y sólo si, u y v son ambas contínuas en el punto (x_0, y_0), es decir, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|u(z,y) - u(x_0,y_0)\| < \varepsilon, \|v(x,y) - v(x_0,y_0)\| < \varepsilon$$

cada vez que

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$$

EJEMPLO 1.9.11

Apliquemos ahora el criterio a la función $\log z$, definida para $z \neq 0$.

Puesto que $\log z = \log|z| + i\theta$ ($|z| > 0$ y $\theta = \mathrm{Arg}(z)$), se tiene:

$$u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \theta = \mathrm{Arc\ tg}\,\frac{y}{x}, \quad -\Pi < \theta \leq \Pi$$

La función $u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ es contínua en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$. En cuanto a la función $v(x,y) = \theta$, ella es contínua en todo punto $(x,y) = (0,0)$ que no esté sobre el semieje negativo del eje real. En efecto, si $x_0 < 0$ es un punto de dicho semieje, entonces para $y > 0$ se tiene

$$\lim_{y\to 0} \mathrm{Arg}(x_0+iy) = \Pi, \quad \lim_{y\to 0} \mathrm{Arg}(x_0-iy) = -\Pi$$

Por consiguiente, la función $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ es discontinua en cada punto $x_0 < 0$. Se deduce entonces que la función $\log z$ es contínua en el plano complejo si se exceptúa el semieje real negativo.

Las funciones contínuas gozan de propiedades especiales cuando se las considera en conjuntos compactos o conexos. Haremos una breve reseña de esta interesante teoría.

TEOREMA 1.9.12

Si f es una función contínua en un conjunto compacto K, entonces f(K) es también un conjunto compacto.

DEMOSTRACION

Sea f contínua en el compacto K. Mostraremos que f(K) posee la propiedad de Heine-Borel; por el teorema (1.7.28) f(K) será entonces compacto.

Sea $(G_i)_{i\varepsilon I}$ un recubrimiento abierto cualquiera de F(K). Consideremos la familia $(V_j)_{j\varepsilon J}$ de todos los conjuntos abiertos V_j tales que $f(K \cap V_j)$ está contenido en un conjunto G_i. Si $z_o \varepsilon K$, sabemos que $f(z_o)$ pertenece a algún G_i, y por la -- continuidad existe un disco abierto $\|z - z_o\| < r$ (vecindario de z_o) que es un conjunto V_j. Por consiguiente $(V_j)_{j\varepsilon J}$ es un recubrimiento abierto de K, y podemos seleccionar un subrecubrimiento finito $(V_{j_p})_{1 \leq p \leq n}$. Si $f(K \cap V_{j_p}) \subset G_{i_p}$, es obvio que $(G_{i_p})_{1 \leq p \leq n}$ es un subrecubrimiento finito de f(K).

COROLARIO 1.9.13 (Teorema de Bolzano)

Sea f una función que toma valores reales y es contínua en un compacto K. Entonces existen puntos z_o, z_1 en K tales que

$$f(z_0) \leq f(z) \leq f(z_1) \quad \text{para todo } z \in K.$$

z_0 es el punto de K donde f alcanza su mínimo y z_1 el punto en donde f alcanza su máximo.

DEMOSTRACION

En virtud de (1.9.12) y de la hipótesis, se tiene que f(K) es un conjunto cerrado y acotado de números reales. Por ser f(K) acotado existen el extremo superior M y el extremo inferior m de f(K), y por ser f(K) cerrado, M y m son puntos de f(K). Por consiguiente, existen los puntos z_0, $z_1 \in K$ tales que $f(z_0) = m$, $f(z_1) = M$. De esto se deduce que se cumple:

$$f(z_0) \leq f(z) \leq f(z_1) \;\forall z \in K,$$

que es lo que se quería probar.

(1.9.14) El concepto de continuidad uniforme desempeña un papel esencial en la teoría de funciones de variable compleja. En general, se dice que una condición se verifica de manera uniforme con respecto a un parámetro si puede expresarse mediante desigualdades que no implican al parámetro.

Cuando se considera la continuidad de una cierta función en una región dada, por lo general, el δ necesario para un valor dado de ε depende no sólo de ε sino también del punto z_0 considerado. Si es posible elegir δ de manera que no dependa de z_0, se dice que la función es uniformemente contínua. Formalizamos a continuación la discusión anterior:

DEFINICION 1.9.15

Se dice que una función f es uniformemente contínua en una región D si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, que no depen de más que de ε y tal que $\|f(z_1) - f(z_2)\| < \varepsilon$, para todos -- los pares $z_1, z_2 \in D$ que satisfagan $\|z_1 - z_2\| < \delta$.

TEOREMA 1.9.16

Toda función contínua en un conjunto compacto es uniformemente continua.

DEMOSTRACION

Sea f continua en el conjunto compacto K. Entonces todo $z_\circ \in K$ tiene un entorno $\|z - z_\circ\| < r$, en el que $\|f(z) - f(z_\circ)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Los entornos más pequeños $\|z - z_\circ\| < \frac{r}{2}$ forman un recubrimiento abierto de K, siendo posible extraer un subrecubrimiento finito compuesto por entornos de la forma $\|z - z_{\circ_n}\| < \frac{r_n}{2}$. Sea δ el menor de los números $\frac{r_n}{2}$. Consideremos un par $z_1, z_2 \in K$ de modo que $\|z_1 - z_2\| < \delta$. Existe un $z_{\circ_n}$ tal que $\|z_1 - z_{\circ_n}\| < \frac{r_n}{2}$ y obtenemos

$$\|z_2 - z_{\circ_n}\| \leq \|z_1 - z_{\circ_n}\| + \|z_1 - z_2\| < \frac{r_n}{2} + \delta \leq r_n$$

En consecuencia, $\|f(z_1) - f(z_{\circ_n})\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\|f(z_2) - f(z_{\circ_n})\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Por la desigualdad triangular se deduce que $\|f(z_1) - f(z_2)\| < \varepsilon$, lo que prueba la continuidad uniforme de f en K.

En conjuntos no compactos, algunas funciones continuas - son uniformemente continuas, mientras que otras no lo son. - Así por ejemplo, la función z es uniformemente continua en todo el plano, pero no lo es la función z^2.

De especial importancia resulta el hecho de que una función uniformemente continua en un conjunto K lo es también en todo subconjunto de K. Por tanto, si f está definida en K_o y puede prolongarse a una función sobre un conjunto compacto -- $K \supset K_o$, entonces f es uniformemente continua en K_o.

TEOREMA 1.9.17

Si f es una función contínua en un conjunto conexo D, entonces f(D) es también conexo.

DEMOSTRACION

Supongamos que f es continua en el conjunto conexo D. Si D es abierto, la demostración resulta bastante sencilla. En - efecto, sean H_1 y H_2 conjuntos abiertos tales que

$$f(D) \subset H_1 \cup H_2 \quad y \quad f(A) \cap (H_1 \cap H_2) = \phi.$$

Entonces $f^{-1}(H_1)$ y $f^{-1}(H_2)$ son también abiertos (puesto que - si f es definida en un abierto, condición necesaria y suficiente para que sea continua, es que la imagen inversa de todo conjunto abierto sea abierta), de donde

$D = f^{-1}(H_1) \cup f^{-1}(H_2)$, $f^{-1}(H_1) \cap f^{-1}(H_2) = \phi$. Dado que D es - conexo, $f^{-1}(H_1) = \phi$ ó $f^{-1}(H_2) = \phi$ y esto es cierto sólo si $f(D) \cap H_1 = \phi$ ó $f(D) \cap H_2 = \phi$. Por tanto, f(D) es conexo.

En general, $f^{-1}(H_1)$ y $f^{-1}(H_2)$ no son abiertos; pero por la continuidad cada punto de $f^{-1}(H_1)$ tiene un entorno cuya intersección con D está contenida en $f^{-1}(H_1)$. La unión de todos estos entornos es un conjunto abierto H_1' tal que

$H_1' \cap D = f^{-1}(H_1)$; el conjunto H_2' puede definirse de manera --

análoga. El mismo razonamiento hecho anteriormente muestra que, ó bien $H_1' \cap D = \phi$ o bien $H_2' \cap D = \phi$, y esto implica que $f(D) \cap H_1 = \phi$ ó $f(D) \cap H_2 = \phi$, lo que completa la demostración.

COROLARIO 1.9.18

Sea f una función continua en un conjunto conexo D que toma valores reales. Si $a = f(z_1) < f(z_2) = b$, con $z_1, z_2 \varepsilon D$, entonces para todo número real c, $a < c < b$, existe $z_o \varepsilon D$ en donde f toma el valor c.

DEMOSTRACION

En virtud de (1.9.17) y de la hipótesis que f toma valores en $\mathbb{R}$, f(D) es un conjunto conexo de la recta real y por consiguiente f(D) es un intervalo I. Si a y b son puntos de I, entonces $[a,b] \subset I = f(D)$ y, por lo tanto, $c \varepsilon f(D)$, es decir, existe $z_o \varepsilon D$ tal que $f(z_o) = c$.

COROLARIO 1.9.19

Sea f una función contínua en un conjunto conexo D y que toma en D valores enteros. Entonces f es una función constante.

DEMOSTRACION

Basta aplicar a f el corolario (1.9.18) y tener en cuenta que un conjunto de números enteros es conexo si, y solo si, el conjunto se reduce a un punto.

§ 10. LA DIFERENCIACION DE VARIABLE COMPLEJA

DEFINICION 1.10.1

Se dice que la función f definida en un dominio D es diferenciable en el punto $z_0 \in D$ cuando existe el límite

(1) $$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Tal límite se denota por $f'(z_0)$ y se llama la derivada (compleja) de f en el punto z_0.

De la relación siguiente

$$f(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) + f(z_0), \quad (z \neq z_0)$$

se deduce que $\lim f(z) = f'(z_0) \cdot 0 + f(z_0) = f(z_0)$ cuando - $z \to z_0$, y por lo tanto, una función que es diferenciable en - z_0 es también contínua en ese punto. Sin embargo, la recíproca no es verdadera; la diferenciabilidad es una condición mucho más fuerte que la continuidad.

Si en la definición anterior hacemos $z - z_0 = h$, obtenemos la forma equivalente

(2) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

en la que se ha sustituido z_0 por z. Es importante recordar - que ahora h es complejo. Denotando h por Δz se tiene

(3) $$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z).$$

Si $w = f(z)$, se define a veces

(4) $$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z)$$

escribiéndose la derivada en la forma $\frac{dw}{dz}$ ó $\frac{d}{dz} w$; así pues

(5) $$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

Esta notación, sin embargo, sólo tiene sentido cuando se tiene presente (1.10.1.(4)).

(1.10.2) Si el límite (1.10.1.(2)) existe para todo z de una - región dada R, el proceso anterior le asocia el número f'(z) a cada punto $z \varepsilon R$, determinándose así una función, la cual se denota por f' ó f'(z). Las ecuaciones en las que intervienen derivadas, como en (1.10.2.(1)), pueden interpretarse en dos sentidos, bien como una igualdad de funciones, o como una -- igualdad de valores de funciones.

Tal como podría esperarse, teniendo en cuenta las defini ciones anteriores, las derivadas de funciones complejas se - comportan de manera muy parecida a las derivadas de funciones reales. Por ejemplo, si $f(z) = z^n$, siendo n un entero positivo, entonces

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = n\,z^{n-1} + c_2 z^{n-2} h + \ldots + c_n h^{n-1}$$

donde las c_k son coeficientes binomiales. Haciendo que $h \to 0$ se tiene

(1) $$\frac{d}{dz}\, z^n = n z^{n-1}$$

Las mismas demostraciones que se dan en el Análisis real permiten establecer que si f y g son diferenciables, entonces

(2) $$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

(3) $$(f \cdot g)' = f g' + f' g$$

(4) $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g f' - f g'}{g^2}$$

suponiéndose en este último caso que $g(z) \neq 0$ en la región -

considerada. Si las derivadas del segundo miembro existen, por inducción se demuestra que

$$(f + g + \dots + p)' = f' + g' + \dots + p'.$$

Cuando se considera la fórmula obtenida al dividir $(fg)'$ por fg, se prevé la siguiente generalización

(5) $$\frac{(f\cdot g \dots p)'}{f\cdot g \dots p} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} + \dots + \frac{p'}{p},$$

resultado que se demuestra por inducción, suponiendo que no se anule ningún denominador y que existan todas las derivadas que figuran en los numeradores. A modo de verificación, haciendo $f = z$, $g = z$, ..., $p = z$ en (1.10.2.(5)) se obtiene otra vez (1.10.2.(1)) para $z \neq 0$. Los resultados anteriores indican que los polinomios y las funciones racionales se derivan en forma análoga que en el Análisis real. También es válida la regla de la cadena: si g es diferenciable en z y f es diferenciable en $g(z)$, entonces $F(z) = f[g(z)]$ es diferenciable en z, y

(6) $$F'(z) = f'[g(z)]\cdot g'(z).$$

Si $u = g(z)$ y $w = f(u)$, la regla de la cadena puede escribirse en la forma:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dz}.$$

(1.10.3) Las comparaciones hechas hasta el momento, ponen de manifiesto la semejanza existente entre la derivación en el caso de variable real y en el de variable compleja. Sin embargo, el hecho de que en (1.10.1.(2)) h sea complejo, impone --

una restricción muy fuerte sobre la clase de funciones que tienen derivada compleja. Consideremos, por ejemplo, la función $f(z) = \overline{z}$ entonces

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h} - \overline{z}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}, \quad (h \neq 0).$$

Si $h \in \mathbb{R}$, entonces $h = h$ y el límite cuando $h \to 0$ es 1. Pero si $h = ik$ es imaginario puro, entonces $\overline{h} = - h$ y el límite es -1. Esta función no es diferenciable en ningún punto, a pesar de que sus partes real e imaginaria, x y $-y$, presentan muy buen comportamiento.

El ejemplo anterior muestra claramente la no existencia de $f'(z)$ haciendo que $h \to 0$ primero según valores reales y después según valores imaginarios. Estas dos posibilidades nos conducen a la principal condición que debe satisfacer una función compleja para poder admitir una derivada.

En efecto, si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y si h es real, entonces $f'(z)$ es el límite de

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\,\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h}.$$

Sin embargo, si $h = ik$, con $k \in \mathbb{R}$, entonces $f'(z)$ es el límite de

$$\frac{f(z+ik) - f(z)}{ik} = \frac{u(x,y+k) - u(x,y)}{ik} + i\,\frac{v(x,y+k) - v(x,y)}{ik}$$

Así pues, si $h \to 0$ en la primera expresión y $k \to 0$ en la segunda, se obtienen las dos fórmulas

(1) $\quad f'(z) = u_x + iv_x, \quad f'(z) = - iu_y + v_y$

expresiones en las que los subíndices indican derivación parcial, tomándose el valor de las funciones del segundo miembro en (x,y). Así, por ejemplo

$$u_x = u_x(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} .$$

En el proceso de demostración de (1.10.3.(1)) se ha establecido también que la existencia de f'(z) implica la existencia - de u_x, u_y, v_x, v_y.

Las dos expresiones de (1.10.3.(1)) son compatibles solamente si y y v satisfacen las ecuaciones

(2) $$u_x = v_y, \quad u_y = - v_x,$$

las cuales reciben el nombre de ecuaciones de Cauchy - Riemann, que caracterizamos y demostramos su existencia en (4.9.6). Encontraremos ya aquí una notable diferencia entre las deriva-- das de las funciones de variable real y las de variable com-- pleja. La existencia de una derivada real no es sino una condición de variación suave, mientras que la existencia de una derivada compleja conduce a un par de ecuaciones en derivadas parciales.

Observando el proceso por el cual se han deducido las - ecuaciones de Cauchy - Riemann, no es de esperar que estas - sean suficientes para garantizar la existencia de f'(z) y de hecho, no lo son. Pero si se supone que las derivadas parciales son contínuas, entonces las ecuaciones de Cauchy - Riemann sí son suficientes, como se demuestra en (4.9.7).

El resultado más importante de la discusión anterior es que en todo punto en el que exista f'(z) se satisface un cier to sistema de ecuaciones en derivadas parciales (ecuaciones de Cauchy - Riemann). Es claro que las ecuaciones en derivadas parciales son de escaso interés cuando sólo se satisfacen en un punto. Si por el contrario, se sastisfacen en toda una región, se pueden extraer de ellas consecuencias sumamente interesantes.

DEFINICION 1.10.4

Se dice que una función f es analítica en un punto z_0 si f es diferenciable en todos los puntos de un disco abierto de centro z_0 y de radio r(un r-entorno de z_0). Una función es analítica en una región cuando es analítica en todos los puntos de esa región.

Algunos aspectos relevantes de la teoría de funciones analíticas se tratan con algún detenimiento en el capítulo III.

Capítulo II

SERIES EN $\mathbb{C}$

§ 1. LA SERIE DE TAYLOR

DEFINICION 2.1.1

Sea $\sum_{k\geq 1} z_k$ una serie de números complejos. Se dice que la serie converge si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k - z\right| < \varepsilon \quad \forall n, n > n_o$$

DEFINICION 2.1.2

Una serie $\sum_{n\geq 1} z_n$ se dice absolutamente convergente, si converge la serie de módulos, es decir, si $\sum_{n\geq 1} \|z_n\|$ converge. Si una serie converge pero no absolutamente, se dice que converge condicionalmente.

(2.1.3) El estudio de la convergencia de una serie de términos positivos o de la convergencia absoluta de una serie de términos complejos se reduce a un problema de mayoración de su término general. Para las sumas de series absolutamente convergentes, se tienen las reglas de mayoración y de minoración

$$(1)\quad \left\|\sum_{n=1}^{k} u_n\right\| - \sum_{n=k+1}^{\infty} \|u_n\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|, \ \forall k$$

El interés de las series absolutamente convergentes es debido a que para una de estas series de término general u_n, las series obtenidas cambiando arbitrariamente el orden de los térmi minos, siguen siendo absolutamente convergentes y tienen la misma suma que la serie dada. El significado preciso de esta afirmación se da en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.1.4

Para toda función biyectiva $\sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ si se pone $v_n = u_{\sigma(n)}$, entonces la serie de término general v_n es absolutamente convergente y

$$s' = \sum_{n\geq 1} v_n \text{ es igual a } s = \sum_{n\geq 1} u_n.$$

DEMOSTRACION

Supongamos que m es el mayor de los enteros $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$. Se tiene entonces por definición

$$\| v_1 \| + \| v_2 \| + \ldots + \| v_n \| \leq \| u_1 \| + \| u_2 \| + \ldots + \| u_m \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| u_n \|$$

de donde, se deduce inmediatamente la convergencia absoluta de la serie de término general v_n.

Mostraremos ahora que $s = s'$.

Sean $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ y $s'_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Luego,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, se tiene

$\| u_{n+1} \| + \ldots + \| u_{n+p} \| \leq \varepsilon$ para todo $p \geq 1$; sea m_0 el mayor de los enteros $\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(n_0)$; entonces, si $n \geq m_0$, se tiene $\sigma(n) \geq n_0$, deduciéndose de esto y de la definición de v_n que, para $n \geq m_0$, se tiene

$$\| v_{n+1} \| + \ldots + \| v_{n+p} \| < \varepsilon, \ \forall p \geq 1$$

Por otra parte

$$s'_{m_o} - s_{n_o} = \sum_{k\geq 1}^{m_o} v_k,$$

si k no es la forma $\sigma^{-1}(h)$ con $h \leq n_o$. Esta suma es pues, la - suma de cierto número de términos u_h para cada uno de los cuales $h \geq n_o$, de donde $\| s'_{m_o} - s_{n_o} \| < \varepsilon$. Puesto que para $n \geq n_o$ y $n \geq m_o$ se tiene respectivamente $\| s_n - s_{n_o} \| \leq \varepsilon$ y $\| s'_n - s'_{m_o} \| \leq \varepsilon$, entonces

$$\| s'_n - s_n \| = \| (s'_n - s'_{m_o}) + (s'_{m_o} - s_{n_o}) + (s_{n_o} - s_n) \|$$

$$\leq \| s'_n - s'_{m_o} \| + \| s'_{m_o} - s_{n_o} \| + \| s_{n_o} - s_n \| \leq 3\,\varepsilon$$

y en el límite tenemos por tanto $\| s' - s \| \leq 3\,\varepsilon$ que es lo que queríamos demostrar, puesto que ε es arbitrario.

DEFINICION 2.1.5

Sea $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión infinita estrictamente creciente de números enteros ≥ 1; para toda serie de término general u_n, llamaremos serie parcial de la serie considerada, correspondiente a la sucesión parcial (subsucesión) (n_k), la serie - de término general $v_k = u_{n_k}$.

TEOREMA 2.1.6

Si $\sum_{n\geq 1} u_n$ es una serie absolutamente convergente, entonces toda serie parcial es absolutamente convergente, y se tiene

$$(1) \quad \| \sum_{k\geq 1} u_{n_k} \| \leq \sum_{k\geq 1} \| u_{n_k} \| \leq \sum_{n\geq 1} \| u_n \|$$

DEMOSTRACION

En efecto, es evidente que para todo $p \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{p} \| u_{n_k} \| \leq \| u_1 \| + \| u_2 \| + \ldots + \| u_{n_p} \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| u_n \|$$

lo que demuestra la convergencia absoluta de la serie parcial, lo mismo que la relación (1) al pasar al límite.

En general, una serie parcial de una serie convergente no es necesariamente convergente, como se demuestra mediante el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2.1.7

Sea la serie alternante $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ y consideremos la serie parcial de los términos de orden par $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{2n}}{2n}$

i) Verifiquemos que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Por el criterio de convergencia para series alternantes, se debe tener:

a) $\| u_{n+1} \| < \| u_n \|$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

Puesto que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ y $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, la serie converge.

ii) Verifiquemos ahora que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{2n}}{2n}$ diverge.

En efecto,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

y puesto que la serie armónica diverge, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{2n}}{2n}$ diverge.

(2.1.8) Es claro que la suma de la serie parcial $\sum_{n\geq 1} u_{n_k}$ es también la suma de la serie $\sum_{n\geq 1} w_n$, siendo $w_n = u_n$ si n es de la forma n_k, y $w_n = 0$ si n no es igual a alguna de las n_k. Si I designa el conjunto de los enteros de la forma n_k, la suma $\sum_{n\geq 1} w_n$ se puede escribir $\sum_{n\varepsilon I} u_n$, lo que no proporciona ninguna ambigüedad, puesto que el orden de los términos no interviene (por 2.1.3). Con esta notación, resulta claro que se tiene

(1) $$\left\| \sum_{n\varepsilon I} u_n \right\| \leq \sum_{n\varepsilon I} \| u_n \|$$

y si I y J son subconjuntos infinitos disjuntos de $\mathbb{N}$, se tiene

(2) $$\sum_{n\varepsilon I\cup J} u_n = \sum_{n\varepsilon I} u_n + \sum_{n\varepsilon J} u_n$$

DEFINICION 2.1.9

Se dice que una serie de funciones complejas de variable compleja definida en un conjunto E, es uniformemente convergente si la sucesión de sumas parciales

$$s_n = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

converge uniformemente en E hacia una función f, llamada suma de la serie de funciones.

DEFINICIÓN 2.1.10

Una serie de funciones complejas $\sum_{n\geq 1} f_n(z)$ de variable compleja se dice normalmente convergente, si existe una serie convergente de números reales positivos $\sum_{n\geq 1} a_n$, tal que $\| f_n(z) \| \leq a_n$, $\forall z \varepsilon D_{f_n}$.

TEOREMA 2.1.11 (Fórmula de Taylor)

Sea f: $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $[a,b]$. Supongamos que f sea diferenciable hasta un orden n en $[a,b]$, y que la derivada $f^{(n+1)}$ exista en (a,b). Sea x_o - un punto fijo cualquiera en $[a,b]$. Entonces, para cada $x \in [a,b]$, existe un punto ξ entre x y x_o tal que

$$(1)\ f(x) = f(x_o) + \frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n + R_n(x),$$

$$\text{donde } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_o)^{n+1} \qquad (2)$$

OBSERVACION

Nótese que para $n = 0$, el teorema anterior es precisamente el teorema del valor medio.

DEMOSTRACION

Consideremos el caso en que $x > x_o$; el caso en que $x < x_o$ se demuestra por un razonamiento similar. El punto x quedará - fijo a lo largo de toda la demostración. Sea la función

$$F: [x_o, x] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \rightsquigarrow F(t)$$

definida por

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{K}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

donde K es una constante a ser determinada. Es claro que F así definida es contínua en $[x_o, x]$. F es asímismo diferenciable en (x_o, x). (F no es necesariamente diferenciable en $[x_o, x]$, pues x_o ó x podrían coincidir con a y b, donde $f^{(n)}$ puede no ser diferenciable). Por otro lado, $F(x) = 0$ y para K tomado convenientemente, es decir,

$$(3)\ K = \left(f(x) - f(x_o) - \frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n\right)\frac{(n+1)!}{(x-x_o)^{n+1}},$$

entonces $F(x_o) = 0$. Así, están satisfechas todas las condiciones para la aplicación del teorema de Rolle. Luego, existe $\xi \in (x_o, x)$ tal que $F'(\xi) = 0$. Derivando F y simplificando se tiene:

(4) $F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{k}{n!}(x-t)^n$

Luego, de (4) y $F'(\xi) = 0$ se sigue que

(5) $K = f^{(n+1)}(\xi)$

Por último, (3) y (5) nos proporcionan las expresiones (1) y (2) que se querían demostrar.

OBSERVACION 2.1.12 Si escribimos

(1) $P_n(x) = f(x_o) + \frac{f'(x_o)(x-x_o)}{1!} + \frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n$,

el teorema (2.1.10) nos dice que $f(x)$ difiere del polinomio $P_n(x)$ por $R_n(x)$, es decir:

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x),$$

llamada fórmula de error de Lagrange, donde $R_n(x)$ es llamada resto de Lagrange y $P_n(x)$ es llamado polinomio de Taylor.

Las funciones f indefinidamente diferenciables para las cuales los polinomios (1) convergen hacia f en un entorno de x_o, o que siguen siendo sumas de su serie de Taylor

$$f(x_o) + \frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n + \ldots$$

constituyen sólo una parte de las funciones indefinidamente diferenciables. Estas funciones poseen propiedades sumamente interesantes.

§ 2. SERIES ENTERAS

Consideremos una serie de la forma

$$(1) \quad \sum_{n\geq 0} c_n z^n = c_o + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

donde los coeficientes c_n son números complejos cualesquiera. Mientras no se diga lo contrario, supondremos que los c_n y z son números complejos, por el momento arbitrarios. Cuando una serie de este tipo converge, su suma $f(z)$ es por tanto un número complejo, función del número complejo z. Se denominan series enteras en z.

PROPOSICION 2.2.1 (Lema de Abel)

Supongamos que la serie entera (1) tenga sus términos uniformemente acotados para $z_o \neq 0$:

$$\| c_n z^n \| \leq M, \quad \forall n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

donde M es independiente de n. Entonces:

i) Para todo z tal que $\| z \| \leq \| z_o \|$, la serie (1) es absolutamente convergente.

ii) Para todo r tal que $0 < r < \| z_o \|$, la serie (1) es normalmente convergente en el disco cerrado $\| z \| \leq r$.

DEMOSTRACION

i) De $\| c_n z^n \| \leq M$ resulta que para $\| z \| \leq \| z_o \|$, se tiene

$$\| c_n z^n \| = \| c_n z_o^n \cdot \frac{z^n}{z_o^n} \|$$

$$= \| c_n z_o^n \| \cdot \left\| \left(\frac{z}{z_o} \right)^n \right\|$$

$$\leq M \cdot \left\| \frac{z}{z_o} \right\|^n = M \left(\frac{\|z\|}{\|z_o\|} \right)^n$$

$$\leq M \cdot r^n, \text{ con } r = \frac{\|z\|}{\|z_o\|}$$

como la serie $M + Mr + Mr^2 + \ldots + Mr^i + \ldots$ es una serie geométrica con razón $0 \leq r < 1$ es convergente por el criterio de comparación para las series de términos positivos, la serie $\|c_o\| + \|c_1 z\| + \|c_2 z^2\| + \ldots + \|c_i z^i\| + \ldots$
es convergente. Por tanto, la serie (1) es absolutamente convergente.

ii) De la misma forma, para $\|z\| \leq r$ se tiene

$$\|c_n z^n\| \leq M \cdot r^n$$

Sea $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \|c_n z^n\| \leq M$, para algún $M \in \mathbb{R}^+$, $\forall i = 1,2,\ldots\}$

Sea $R = \sup\{\|z\| \mid z \in B\}$. Si $z_o \in B$, $z \in B$, entonces
$\|z\| < \|z_o\|$, $\forall z$.

Por el lema de Abel, si $0 \leq \|z\| < R$, la serie (1) es normalmente convergente en el disco cerrado $\|z\| \leq R$

Si $\|z\| > R$, los términos de la serie
$\|c_o\| + \|c_1 z\| + \|c_2 z^2\| + \ldots$

no están acotados y por tanto, ella no puede ser convergente.

El límite superior R del conjunto B es un número ≥ 0 ó $+\infty$, llamado <u>radio de convergencia</u> de la serie (1).

El disco abierto $\|z\| < R$ se denomina disco de convergencia de la serie.

El plano $\mathbb{C}$ está dividido entonces en 3 partes disjuntas -

dos a dos:

a) El disco $\|z\| < R$, donde la serie converge,

b) El exterior del disco de convergencia: $\|z\| > R$, donde la serie no sólo no converge, sino que sus términos no están acotados.

c) El círculo $\|z\| = R$, en cuyos puntos la serie puede o no converger.

OBSERVACION 2.2.2 (Regla de Cauchy)

Supongamos que la sucesión $\left(\|c_n\|^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite (finito o no) $\rho > 0$. Si $0 < \rho < +\infty$, para todo par de números ρ', ρ'' tales que

(1) $0 < \rho' < \rho'' < \infty$

se tiene $N \in \mathbb{N}$ tal que

$0 < \rho' < \|c_n\|^{1/n} < \rho'' < \infty$

$0 < \rho' \|z\| < \|c_n\|^{1/n} \|z\| < \rho'' \|z\| < \infty$

$0 < (\rho')^n \|z\|^n < \|c_n\| \|z\|^n < (\rho'')^n \|z\| < \infty$

$0 < (\rho')^n \|z\|^n < \|c_n z^n\| < (\rho'')^n \|z\|^n < \infty$

Si $\|z\| \leq \frac{1}{\rho''}$, para todo ρ'' con la condición (1), $\|c_n z^n\| \leq 1$.

Por tanto, $\|c_n z^n\| < 1$ siempre que $\|z\| < \frac{1}{\rho}$.

Así, para $r < \frac{1}{\rho}$, la serie $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$ es normalmente convergente en el disco

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < \frac{1}{\rho}\}$$

Si $\|z\| > \frac{1}{\rho}$, $\rho' \|z\| > 1$ para ρ' suficientemente próximo a ρ.

Entonces $(\rho' \|z\|)^n = (\rho')^n \|z\|^n$ no sería una sucesión acotada,

como tampoco lo sería la sucesión $\|c_n z^n\|$, y la serie sería divergente, y se tiene para el radio de convergencia $R = \frac{1}{\rho}$.
Si $\rho = 0$, la sucesión $\|c_n z^n\|$ no está acotada para todo $r > 0$, por lo que $R = +\infty$. De igual forma, si $\rho = +\infty$, $\|c_n z^n\|$ no está acotada para todo $r > 0$, por tanto $R = 0$. El valor de ρ está dado por:

$$\lim_{n\to\infty} \|c_n\|^{1/n}$$

EJEMPLO 2.2.3

i) La serie de término general $(n^\alpha z^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo, tiene por radio de convergencia $R = 1$.

$$\text{Lím } \|c_n\|^{1/n} = \rho \quad ; \quad R = \frac{1}{\rho}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} (n^\alpha)^{1/n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} (n^{\alpha/n})$$

$$\ell n\ \rho = \ell n \lim_{n\to\infty} (n^{\alpha/n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ell n\ (n^{\alpha/n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \alpha . \frac{\ell n\ n}{n}$$

$$= \alpha . \lim_{n\to\infty} \frac{\ell n\ n}{n}$$

$$= \alpha . \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}$$

$$= \alpha . \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \alpha . 0 = 0$$

$$\ell n\ \rho = 0 \Rightarrow \rho = 1$$

$$R = \frac{1}{\rho} = 1$$

ii) La serie $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ tiene por radio de convergencia R = 1 y para todo z en $\|z\| = 1$ la serie es absolutamente convergente.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n}$$

$$\ell n\ \rho = \ell n \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ell n \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ell n(\frac{1}{n})}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \left(-\frac{2n}{n^4}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{2n^3}{n^4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{2}{n} = 0$$

$$\ell n\ \rho = 0 \Rightarrow \rho = 1$$

$$R = \frac{1}{\rho} = 1$$

iii) La serie $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^n}$ tiene por radio de convergencia $R = \infty$ y, por lo tanto, es absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C}$.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^n}\right)^{1/n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{n/n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

$$R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{0} = \infty$$

iv) La serie $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$

tiene por radio de convergencia $R = \infty$.

En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} \|c_n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} = 0$$

$$R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{0} = \infty$$

Es de notarse que esta serie converge uniformemente en todo disco $\|z\| < r$, sin embargo, esta condición no se cumple en todo el plano $\mathbb{C}$.

§ 3. PRINCIPIO DE LOS CEROS AISLADOS

LEMA 2.3.1

Sean $\sum_{n\geq 0} f_n$ una serie de funciones complejas de variable compleja normalmente convergente, tal que

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a f en D. Entonces $\sum_{n\geq 0} f_n$ es uniformemente convergente.

DEMOSTRACION

Por hipótesis se tiene:

(1) Existe una serie convergente $\sum_{n\geq 0}\alpha_n$, $0 < \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|f_n(z)\| \leq \alpha_n \ , \quad \forall z \in D_{f_n}$$

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \varepsilon \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$$

$$\text{Sup.} \|f_n(z) - f(z)\| < \varepsilon \ , \forall \ \varepsilon D.$$

Probaremos 1) => 2)

$$\sum_{n \geq 0} f_n \to f$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \ n_0 \varepsilon \mathbb{N}$ tal que

$$\|\sum_{i=0}^{n} f_i - f\| < \varepsilon, \ \forall n > n_0 \text{ (no dependiente de z)}$$

$$\|f - \sum_{i=0}^{n} f_i\| < \varepsilon$$

$$\|\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i\| < \varepsilon$$

$$\text{Sup } \|\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i\| < \varepsilon$$

$$\|\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(z)\| < \varepsilon, \forall z \ \varepsilon \ D$$

$$\|f(z) - \sum_{i=0}^{n} f_i(z)\| < \varepsilon, \ \forall z \ \varepsilon D.$$

LEMA 2.3.2 Sea f_n: D $\longrightarrow \mathbb{C}$

Sea $(f_n)_{n \varepsilon \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones complejas contí- nuas, y que converge uniformemente hacia una función f. Entonces f es contínua.

DEMOSTRACION

A probar que f es contínua en z_0. Es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \ \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$\|z - z_0\| < \delta \implies \|f(z) - f(z_0)\| < \varepsilon$$

Como f_n converge uniformemente a f, $\exists \ n_0 \varepsilon \mathbb{N}$ tal que

$$\|f - f_n\| < \varepsilon, \ \forall n > n_o$$

$$\|f(z) - f_n(z)\| < \varepsilon \quad \forall n > n_o ; \ \forall z \in D$$

En particular, $\|f(z_o) - f_n(z_o)\| < \varepsilon$

Por otra parte, las f_n son contínuas, luego

$\exists \ \delta > 0$ tal que

$$\|z - z_o\| < \delta \Rightarrow \|f_n(z) - f_n(z_o)\| < \varepsilon$$

Luego,

$$\|f(z) - f(z_o)\| = \| f(z) - f_n(z) + f_n(z) - f_n(z_o) + f_n(z_o) - f(z_o)\|$$

$$\leq \| f(z) - f_n(z)\| + \| f_n(z) - f_n(z_o)\| + \|f_n(z_o) - f(z_o)\|$$

De donde,

$$\| f(z) - f(z_o)\| < 3\varepsilon$$

por lo que f resulta ser contínua.

PROPOSICION 2.3.3 (Principio de los Ceros aislados)

Sea $f(z) = c_o + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$ una serie entera con radio de convergencia $R > 0$ y tal que no todos los c_i son nulos. Entonces, existe $0 < r_o < R$ tal que $f(z)$ no se anula en ningún punto del disco abierto $\|z\| < r_o$, salvo posiblemente en $z = 0$

DEMOSTRACION

Puesto que no todos los c_i son nulos, existe un índice k tal que $c_k \neq 0$; lo que significa:

$$f(z) = c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + \ldots + c_{k+p} z^{k+p} + \ldots$$

$$= z^k (c_k + c_{k+1} z + \ldots + c_{k+p} z^p + \ldots)$$

$$f(z) = z^k g(z), \text{ con } g(z) = c_k + c_{k+1} z + \dots$$

Es evidente que R es igualmente el radio de convergencia de g. Además $g(0) = c_k \neq 0$. Como g es contínua, en particular en 0, existe $r_o > 0$ t.q.

$$\|g(z)-g(0)\| < \frac{\|c_k\|}{2} \quad , \forall z \text{ en el disco } \Delta(0,r_o)$$

$$\Big|\|g(z)-g(0)\|\Big| < \|g(z)-g(0)\| < \frac{\|c_k\|}{2}$$

$$-\frac{\|c_k\|}{2} < \|g(z)\| - \|g(0)\| < \frac{\|c_k\|}{2}$$

$$\|g(0)\| - \frac{\|c_k\|}{2} < \|g(z)\| < \frac{\|c_k\|}{2} + \|g(0)\|$$

$$0 < \frac{\|c_k\|}{2} < \|g(z)\| < \frac{3}{2}\|c_k\|$$

Así $g(z) \neq 0$ en $\Delta(0,r_o)$. Puesto que $f(z) = z^k g(z)$, f no puede anularse sino, posiblemente en $z = 0$.

COROLARIO 1

Si $f(z) = c_o + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$ es una fun- ción normalmente convergente con radio de convergencia $R > 0$ y si existe una sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos distintos convergente a 0, para la cual $f(z_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $c_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACION

Supongamos que existe al menos un $k \in \mathbb{N}$ para el cual $c_k = 0$, luego, (por 2.3.3) se tiene $f(z) = z^k g(z)$, con

$$g(z) = c_k + c_{k+1} z + \dots + c_{k+p} z^p + \dots$$

Se tiene además que para $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$f(z_n) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Sea $z_r \neq 0$ un término arbitrario de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se tendrá entonces para este z_r

$$f(z_r) = z_r^k g(z_r)$$

Por hipótesis

$$f(z_r) = z_r^k g(z_r) = 0, \text{ es decir,}$$

$$z_r^k g(z_r) = z_r^k(c_k + c_{k+1}z_r + \dots + c_{k+p}z_r^p + \dots) = 0$$

Puesto que $z_r \neq 0$, con mayor razón $z_r^k \neq 0$, entonces debe ser

$$c_k + c_{k+1}z_r + \dots + c_{k+p}z_r^p + \dots = 0$$

por lo que

$$c_k = c_{k+1}z_r = \dots = c_{k+p}z_r^p = \dots = 0$$

es decir,

$$c_k = c_{k+1} = \dots = c_{k+p} = \dots = 0$$

contrario a lo supuesto de que $c_k \neq 0$, por consiguiente,

$c_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$

COROLARIO 2

Toda función obtenida por medio de una serie entera convergente se escribe de manera única.

DEMOSTRACION

Sea $f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k z^k = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$

convergente, $\|z\| < R$, $R > 0$ y supongamos que su representación no es unica. Se tiene entonces

$$\sum_{k\geq 0} b_k z^k = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots$$

como otra representación de $f(z)$. Luego,

$$\sum_{k\geq 0} c_k z^k - \sum_{k\geq 0} b_k z^k = \sum_{k\geq 0} (c_k - b_k)\ z^k = 0$$

$$= (c_0 - b_0)+(c_1-b_1)z+\ldots+(c_n-b_n)z^n+\ldots=0$$

y f se anula en todo su dominio.

Entonces

$$c_0 - b_0 = 0,\ c_1-b_1 = 0,\ \ldots,\ c_n - b_n = 0,\ \ldots$$

de donde:

$$c_0 = b_0,\ c_1 = b_1,\ \ldots,\ c_n = b_n,\ \ldots,$$

con lo que unicidad de la representación de f resulta evidente.

TEOREMA 2.3.4

Sea $f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$, una serie antera - de radio de convergencia $R > 0$ para valores de z en el disco - $\|z\| < R$. Entonces f es una función continua en este disco - abierto.

DEMOSTRACION

En efecto, para $0 < r < R$ la serie es normalmente conver- gente en el disco cerrado $\|z\| \leq r$ (por el lema de Abel). La - conclusión se sigue del lema (2.3.1) y se cumple para todo pun to z_0 tal que $\|z_0\| < R$ esté en el interior de un disco $\|z\| < r$ para $0 < r < R$.

TEOREMA 2.3.5

Las series enteras $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ y $\sum_{n\geq 0} n\, c_n z^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia.

DEMOSTRACION

Sea $R > 0$ el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$. -

Sea además $0 < \|z_0\| < R$.

Puesto que $\sum_{n\geq 0} c_n z_0^n$ converge, $\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$, y por lo tanto $\|c_n z_0^n\| < 1$ eligiendo n lo suficientemente grande, o sea

$$\|c_n\| < \frac{n}{\|z_0\|^n} \quad \text{para } n > n_0.$$

De modo que

$$\|nc_n z^{n-1}\| = n\|c_n\| \, \|z\|^{n-1}, \quad \forall n > n_0$$

$$\leq n \frac{\|z\|^{n-1}}{\|z_0\|^n}$$

Por el criterio del cociente, la serie $\sum_{n\geq 0} n \frac{\|z\|^{n-1}}{\|z_0\|^n}$ converge para $\|z\| < \|z_0\| < R$. De donde, $\sum_{n\geq 0} nc_n z^{n-1}$ converge absolutamente para todo z tal que $\|z\| < \|z_0\|$ (no importa que tan -- próximo esté $\|z_0\|$ de R), es decir, para $\|z\| < R$. De tal forma, R es el radio de convergencia $\sum_{n\geq 0} nc_n z^{n-1}$. Esto es igualmente válido si $R = 0$.

Por otro lado, si $\|z\| > R$, entonces $\lim_{n\to\infty} c_n z^n \neq 0$, y por consiguiente $\lim_{n\to\infty} nc_n z^{n-1} \neq 0$, de donde, $\sum_{n\geq 0} nc_n z^{n-1}$ no converge.

§ 4. SUSTITUCION DE UNA SERIE ENTERA EN UNA SERIE ENTERA

(2.4.1) Sean los polinomios

$$f(z) = \sum_{n\leq k} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n\leq k} b_n z^n$$

de coeficientes complejos y de grado $\leq k$. La función compuesta $f(g(z))$ sigue siendo un polinomio (de grado $\leq k^2$). Para calcularlo se calcula primeramente cada uno de los productos

(1) $(g(z))^m = \sum_{n_1 \leq k, \ldots, n_m \leq k} b_{n_1} b_{n_2} \ldots b_{n_m} z^{n_1+n_2+\ldots+n_m}$

donde para cada $m \leq k$, la suma se extiende a todos los sistemas $(n_j)_{1 \leq j \leq m}$ de enteros $n_j \leq k$. Se tiene por tanto

(2) $f(g(z)) = \sum_{m \leq k} a_m (g(z))^m$

y sustituyendo en cada término $(g(z))^m$ por su expresión -- (1), se obtiene el polinomio buscado

(3) $f(g(z)) = \sum_{p \leq k^2} c_p z^p$

donde los coeficientes c_p están dados por

(4) $c_p = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=p} a_m b_{n_1} b_{n_2} \ldots b_{n_m}$

estando extendida la suma a todos los valores de $m \leq k$, y, para cada m a todos los sistemas $(n_j)_{1 \leq j \leq m}$ tales que $n_1+n_2+\ldots+n_m = p$. Es decir,

$$f(g(z)) = \sum_{n \leq k} a_n (g(z))^n$$

$$= \sum_{n \leq k} a_n \left(\sum_{n \leq k} b_n z^n \right)^n$$

$$= \sum_{n \leq k} a_n \left[\left(\sum_{n \leq k} b_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n \leq k} b_n z^n \right) \cdots \left(\sum_{n \leq k} b_n z^n \right) \right]$$

$$= \sum_{n \leq k} a_n (b_0 z^0 + b_1 z + \ldots + b_k z^k)(b_0 z^0 + b_1 z + \ldots + b_k z^k) \ldots (b_0 z^0 + b_1 z + \ldots + b_k z^k)$$

$$= a_0 b_0^n + a_1 b^{n-1} b_1 z + a_2 b_0^{n-1} b_2 z^2 + a_2 b_0^{n-2} b_1^2 z^2 +$$

$$+ a_3 b_0^{n-1} b_3 z^3 + a_3 b_0^{n-2} b_1 b_2 z^3 + a_3 b_0^{n-3} b_1^3 z^3 + \ldots + a_k b_1^k z^k .$$

(2.4.2) Mediante hipótesis restrictivas, se puede generalizar a las series enteras convergentes las fórmulas (3) y (4). Una primera dificultad estriba en que ahora se tienen que considerar potencias $(g(z))^m$ de una serie entera de exponente arbitrariamente grande, y es necesario dar un sentido (cuando es posible) a las sumas

$$c_p = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=p} a_m b_{n_1} b_{n_2} \ldots b_{n_m}$$

cuando m y los n_j pueden tomar todos los valores enteros ≥ 0. Con la finalidad de fijar ideas, dispongamos en un orden fijo los términos que se pueden obtener de esta forma:

Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, sea A_k el conjunto de todas las sucesiones finitas de enteros $(n_j)_{1\leq j\leq m}$ tales que el número de términos m sea $\leq k$ y que cada uno de los términos n_j sea $\leq k$, es decir,

$$A_k = \{(n_j)_{1\leq j\leq m} \mid (n_j) < \infty;\ m \leq k;\ n_j \leq k\}$$

Es claro que $A_k \subset A_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, así como $A_k < \infty$ y por consiguiente

$$B_k = (A_{k+1} - A_K) < \infty$$

Por convención se tendrá $A_0 = \phi$. Se enumerarán todas las sucesiones $(n_j)_{1\leq j\leq m}$ fijando un orden arbitrario en cada conjunto B_k, después se enumerarán, en primer lugar las sucesiones de B_1 en el orden elegido, a continuación las sucesiones de B_2 en-el orden establecido, y así sucesivamente, teniéndose, por ejemplo, para los primeros términos:

B_1: (0), (1)

B_2: (2),(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)

B_3: (3),(0,3),(1,3),(2,3),(3,3),(3,0),(3,1),(3,2),...

Si para cada entero m y cada sucesión de m términos $(n_j)_{1\leq j\leq m}$ se da un número complejo $\Phi(m,n_1,...,n_m)$, decir que la suma

(1) $\sum_{(n_j)} \Phi(m,n_1,...,n_m)$

existe significará por definición que la serie obtenida disponiendo las sucesiones (n_j) en el orden elegido es convergente, y la suma de esta serie será por definición el número (1) precedente.

Si además esta serie es absolutamente convergente, se sabe que toda serie obtenida cambiando el orden de sus términos de manera arbitraria, será también absolutamente convergente y tendrá también la misma suma, por lo que la elección de un orden, no tiene importancia.

(2.4.3) Teniendo en consideración las condiciones previas, sean las series enteras

(1) $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$

(2) $g(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n$

que supondremos respectivamente convergentes en discos abiertos $||z|| < r$, $||z|| < r'$ $(r > 0,\ r' > 0)$. Si se quiere susti---

tuir z por g(z) en (1), es decir, formar la serie

$$f(g(z)) = \sum_{m\geq 0} a_m (g(z))^m$$

resulta claro que esto sólo tendrá sentido si $\|g(z)\| < r$. Para poder obtener f(g(z)) como una serie entera es necesario establecer una hipótesis más restrictiva. Consideremos la serie entera

(3) $G(z) = \|b_\circ\| + \|b_1\|z + \ldots + \|b_n\|z^n + \ldots$

Por el lema de Abel se tiene que la series g(z) y G(z) tienen el mismo disco de convergencia.

TEOREMA 2.4.4

Supongamos que existe r'' tal que $0 < r'' < r'$ y que para $\|z\| < r''$ se tenga $G(\|z\|) < r$. Entonces para $\|z\| < r''$, se tiene $\|g(z)\| < r$ y el número f(g(z)) es la suma de una serie convergente

(1) $f(g(z)) = c_\circ + c_1 z + \ldots + c_p z^p + \ldots$

donde cada c_p es suma de la serie absolutamente convergente.

$$c_p = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=p} a_m b_{n_1} b_{n_2} \ldots b_{n_m}$$

cuyos términos están ordenados según el orden descrito en (2.4.2).

En sentido práctico, se forman las potencias $(g(z))^m$ como si se tratara de un polinomio, reagrupando los monomios del mismo grado en z (de los cuales, para un m fijo, se obtiene un número finito de grado p dado); luego se suman "término a término" las series $a_m(g(z))^m$ obtenidas, cuyo número es infinito.

DEMOSTRACION

Se probará en primer lugar que la serie (en el sentido de 2.4.2)

(2) $h(z) = \sum_{(n_j)} a_m b_{n_1} b_{n_2} \ldots b_{n_m} z^{n_1 + \ldots n_m}$

es absolutamente convergente para $\|z\| < r''$.

Basta probar que existe un número fijo $C > 0$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}_0$ se tenga

(3) $\sum_{(n_j) \in A_k} \|a_m b_{n_1} b_{b_m} z^{n_1+\ldots+n_m}\| \leq C.$

Por definición de A_k se tiene, en la suma finita del primer miembro de (1), $0 \leq m \leq k$ y $0 \leq n_j \leq k$ para $j \leq k$, por tanto esta suma está dada por

$$\sum_{m=0}^{k} \|a_m\| \left(\sum_{n=0}^{k} \|b_n z^n\|\right)^m \leq \sum_{m=0}^{k} \|a_m\| G(\|z\|) \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|a_m\| G(\|z\|)^m = C$$

puesto que la última serie escrita es convergente, en virtud del lema de Abel.

Le relación $\|g(z)\| < r$ para $\|z\| < r''$ se deduce inmediatamente de que $\|g(z)\| \leq G(\|z\|)$ para $\|z\| < r'$ (por(2.1.3.(1))).

La serie $f(g(z) = \sum_{m\geq 0} a_m (g(z))^m$ es por tanto convergente para $\|z\| < r''$. Probaremos a continuación que su suma es igual a (2). Para ello, vamos a demostrar que la diferencia de estas dos sumas es arbitrariamente pequeña. Con ese fin, sea z fijo tal que $\|z\| < r''$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Puesto que la serie (2) es absolutamente convergente, existe un $k_1 \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo $k \geq k_1$ se tiene

$$(4)\quad \sum_{(n_j)\varepsilon A_k} \| a_m b_{n_1} \ldots b_{n_m} z^{n_1+\ldots n_m} \| - \sum_{(n_j)\varepsilon A_{k_1}} \| a_m b_{n_m} z^{n_1+\ldots n_m} \| \leq \varepsilon$$

Sea $g_k(z) = \sum_{n=0}^{k} b_n 2^n$, $\forall k$. De (4) se tiene entonces que se cumple

$$(5)\quad \| \sum_{m=0}^{k} a_m (g_k(z))^m - \sum_{m=0}^{k} a_m (g_{k_1}(z))^m \| \leq \varepsilon$$

puesto que al desarrollar el primer miembro, se obtiene el valor absoluto de una suma de un número finito de términos cuyos valores absolutos tienen por suma el primer miembro de (4). -- Por otro lado, (5) puede expresarse también como

$$(6)\quad \| \sum_{(n_j)\varepsilon A_k} a_m b_{n_1} \ldots b_{n_m} z^{n_1+\ldots n_m} - \sum_{m=0}^{k_1} a_m (g_{k_1}(z))^m \| \leq \varepsilon$$

y da por tanto haciendo tender k hacia $+\infty$

$$(7)\quad \|h(z) - \sum_{m=0}^{k_1} a_m (g_{k_1}(z))^m \| \leq \varepsilon.$$

Visto lo anterior, se tiene $\|g(z)\| < r$; sea $\delta > 0$ tal que -- $\delta < r - \|g(z)\|$; como la serie $\sum_{m\geq 0} a_m u^m$ es uniformemente convergente para $\|u\| \leq \|g(z)\| + \delta < r$ (por el lema de Abel), existe $k_2 \varepsilon \mathbb{N}_o$, $k_2 \geq k_1$ tal que para $k \geq k_2$ y $\|u\| \leq \|g(z)\| + \delta$, se tiene

$$(8)\quad \|f(u) - \sum_{m=0}^{k} a_m u^m \| \leq \varepsilon.$$

Por otra parte, como la serie de término general $b_n z^n$ tiene por suma $g(z)$, existe $k_3 \varepsilon \mathbb{N}_o$, $k_3 \geq k_2$ tal que, para todo $k \geq k_3$ se tiene $\| g(z) - g_k(z)\| \leq \delta$ y por consiguiente, en -

virtud de (8) se tiene

$$(9) \quad \| f(g_k(z)) - \sum_{m=0}^{k} a_m (g_k(z))^m \| \leq \varepsilon .$$

Por la continuidad de f(2.3.3), podemos suponer δ lo sufi-- cientemente pequeño para que

$$(10) \quad \| f(g(z)) - f(g_k(z)) \| \leq \varepsilon .$$

para $k \geq k_3$.

De (5), (7), (9) y (10) se deduce que

$$\| h(z) - f(g(z)) \| \leq 4\varepsilon$$

lo que muestra nuestra afirmación.

Falta probar que cada una de las series (2.4.1.(4)) converge - absolutamente.

Como $r'' > 0$, existe un $z \neq 0$ tal que $\|z\| > r''$, resulta - lo mismo probar que la serie obtenida multiplicando todos los términos de (2.4.1.(4)) por z^p, es absolutamente convergente; pero la serie obtenida de este modo es una serie parcial de -- h(z), de ahí el resultado esperado (2.1.3). Se ve del mismo modo que para todo entero k, se tiene, en virtud de (2.4.4.(3))

$$(11) \quad \|c_0\| + \|c_1 z\| + \dots + |c_k z^k\| \leq C$$

de otro modo, la serie de término general $c_p z^p$ es absolutamente convergente. En fin, para $p > k^2$, todos los términos de la suma

$$\sum_{(n_j) \varepsilon A_k} a_m b_{n_1} \dots b_{n_m} z^{n_1 + \dots + n_m}$$

figuran en la suma parcial

$c_o + c_1 z + \ldots + c_p z^p$

de la serie (2.4.4.(2)). De (2.4.4.(4)) y de (2.1.8.(2)) se deduce que se cumple

$\|h(z) - (c_o + c_1 z + \ldots c_p z^p)\| \leq \varepsilon$ para $p \geq k_1^2$

COROLARIO 2.4.5

En las mismas condiciones de (2.4.4), supongamos que se tiene

(1) $\|b_o\| = \|g(0)\| < r.$

Entonces existe un número r'' tal que $0 < r'' < r'$ y tal que se cumple $G(\|z\|) < r$ para $\|z\| < r''$; por consiguiente las conclusiones de (2.4.4) son válidas para $\|z\| < r''$.

DEMOSTRACION

En efecto, se tiene $G(\|0\|) = G(0) = \|b_o\|$ y la conclusión se sigue de la continuidad de G en 0, ya que G es contínua en su disco de convergencia, por ser la suma de una serie entera convergente con $R > 0$, (2.3.4).

Capitulo III

FUNCIONES ANALITICAS

§ 1. DEFINICION Y CARACTERISTICAS

El desarrollo del análisis infinitesimal precisó del establecimiento de un punto de vista cada vez más exacto para el concepto de función y para las distintas posibilidades de definir funciones en matemática. En los comienzos mismos del desarrollo del Análisis se comprobó ya que las funciones que aparecían con más frecuencia podían ser desarrolladas en serie de potencias en el entorno de cada punto del dominio de definición. La mayoría de los problemas concretos del Análisis conducían a funciones que son desarrollables en serie de potencias. Por otra parte, existía el deseo de conectar la definición de función "matemática" con una fórmula "matemática", y en este sentido las series de potencias representaban un tipo de fórmula "matemática" muy abarcador. Esta situación condujo incluso a serios intentos de restringir el Análisis al estudio de funciones que fueran dasarrollables en serie de potencias, razón por la cual se les llamó funciones analíticas. El desarrollo ulterior de la ciencia demostró que tal restricción es improcedente.

DEFINICION 3.1.1

Sea D un conjunto abierto en $\mathbb{C}$. Se dice que una función compleja $f: D \to \mathbb{C}$ definida en D es analítica (u holomorfa) en D si, para todo punto $z_0 \in D$, existe un disco abierto

Δ: $\|z - z_0\| < r$ contenido en D tal que se cumpla en este disco

(1) $$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

donde el segundo miembro es una serie entera en $z - z_0$, convergente en Δ (Fig. 4). De forma más breve se dice que f es analítica en D si ella es desarrollable en serie entera en $z - z_0$ en el vecindario de todo punto $z_0 \in D$. Teniendo en cuenta el corolario 2 de (2.3.3), esta serie entera (si existe) es necesariamente única. Una función compleja analítica en $\mathbb{C}$ todo entero se llama función entera.

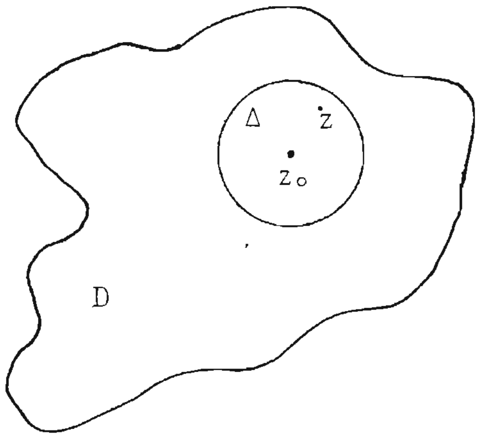

Figura 4

Es de observarse que, en virtud de esta definición, no resulta evidente a priori que una serie entera en z

(2) $$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

convergente en un disco $\|z\| < r$, sea analítica en este disco, puesto que la hipótesis hecha para f demuestra que la condición (1) se verifica para $z_0 = 0$, pero no prueba de manera inmediata que esta condición se verifique también en los otros puntos z_0 del disco. Sin embargo, esto es cierto. Formalizamos a continuación la observación precedente.

TEOREMA 3.1.2

Sea $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ una serie entera convergente en el disco D: $\|z\| < r$, entonces, para todo $z_0 \in D$, existe una serie entera (y sólo una) convergente para $\|z - z_0\| < r - \|z_0\|$ y que verifique (3.1.1.(1)). (Ver Fig. 5).

DEMOSTRACION

Por el teorema de substitución (2.4.4), haciendo $g(t) = z_0 + t$, se tiene $G(t) = \|z_0\| + t$ y la condición $G(\|t\|) < r$ se verifica para $\|t\| < r - \|z_0\|$. Puesto que por la fórmula del binomio se tiene

(1) $$(z_0 + t)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} z_0^{n-k} t^k,$$

el teorema de substitución demuestra que cada una de las series

(2) $$c_k = a_k + \binom{k+1}{1} a_{k+1} z_0 + \ldots + \binom{k+m}{m} a_{k+m} z_0^m + \ldots$$

es absolutamente convergente y que se cumple, para $\|t\| < r - \|z_0\|$

(3) $$f(z_0 + t) = \sum_{k \geq 0} c_k t^k$$

siendo la serie entera del segundo miembro convergente para $\|t\| < r - \|z_0\|$, (por otra parte, es posible que el radio de convergencia de (3) sea estrictamente mayor que $r - \|z_0\|$). Po demos seguir diciendo en forma abreviada que una serie entera en z es una función analítica en su disco de convergencia.

Es de notarse además, que no es de ningún modo evidente a priori que recíprocamente, si una función f es analítica en un disco abierto $\|z\| < r$, haya una serie entera en z convergente en este disco y de suma igual a f; la definición dice únicamente que existe una serie convergente de este tipo en un disco - $\|z\| < r'$ e igual a f en este disco, para un cierto $r' < r$, pero no que se pueda tomar $r' = r$. Posteriormente veremos que - efectivamente, se puede tomar $r' = r$.

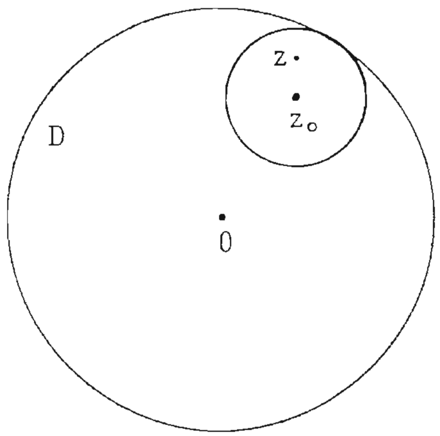

Figura 5

TEOREMA 3.1.3

Sean D y D' dos conjuntos abiertos en $\mathbb{C}$, f y g funciones analíticas en D y D' respectivamente; y supongamos que -- $g(D') \subset D$. Entonces la función compuesta $f \circ g$ está definida en D' y es analítica en D'. (Fig. 6)*.

DEMOSTRACION

Sea $z_o \varepsilon D'$. Por hipótesis existe un disco abierto

Δ': $\|z-z_\circ\| < r'$ tal que en Δ' se tiene

(1) $\quad g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n(z-z_\circ)^n$

siendo la serie convergente en Δ'. Por otra parte, el punto - $z_1 = g(z_\circ)$ pertenece a D por hipótesis, por tanto existe un disco abierto Δ: $\|z-z_\circ\| < r$ tal que en Δ se tiene

(2) $\quad f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_\circ)^n$

siendo la serie convergente en Δ. Puesto que la serie entera

$$g(z) - g(z_\circ) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_\circ)^n$$

tiene su término constante nulo, por (2.4.5) se tiene que existe $r'' \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r'' < r$ y que, en el disco Δ'': $\|z-z_\circ\| < r''$, se tiene $g(z) \in \Delta$ y

$$f(g(z)) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-z_\circ)^n$$

siendo la serie convergente en este disco.

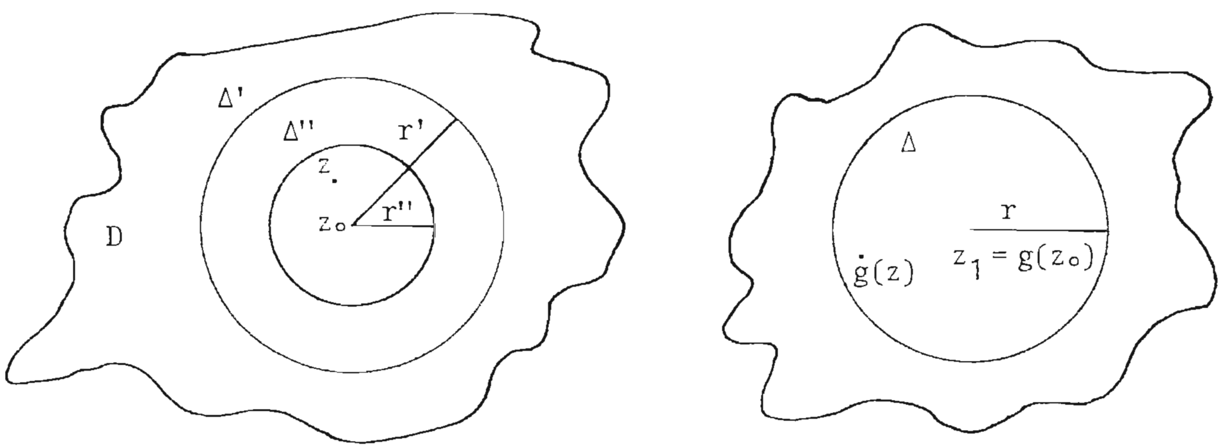

Figura 6

---

* A fin de tener figuras más comprensibles, se han representado los valores de z y de g(z) en dos planos diferentes.

DEFINICION 3.1.4

Sea $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ una función vectorial, donde D es un - abierto en $\mathbb{C}$. Diremos que f es analítica en D, si cada una de sus componentes f_j $(1 \leq j \leq n)$ es analítica en D. Es claro que resulta equivalente decir que para todo $z_0 \varepsilon D$, existe un disco abierto Δ: $\|z-z_0\| < r$ contenido en D y tal que en este disco se cumple

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{m \geq 0} a_m (z-z_0)^m$$

donde las a_m son vectores de $\mathbb{C}^n$ y la serie del segundo miembro es convergente en Δ. De esta definición y del lema de Abel resulta que, para todo r', tal que $0 < r' < r$ la serie del segundo miembro es normalmente convergente en el disco $\|z-z_0\| \leq r'$.

§ 2. DERIVADAS Y PRIMITIVAS DE UNA FUNCION ANALITICA

DEFINICION 3.2.1

Sea D un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y f una función compleja - contínua en D, definido en D. Se dice que la función f es diferenciable respecto a la variable compleja z, en un punto $z_0 \varepsilon D$ si, cuando $h = u + iv \to 0$ en $\mathbb{C}$ permaneciendo $\neq 0$ (es decir que $(u,v) \to (0,0)$ en $\mathbb{R}^2$ permaneciendo $\neq (0,0)$),

$$(1) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \text{ existe.}$$

El límite anterior se llama la derivada de f en el punto z_0 y se denota $f'(z_0)$ ó $D f(z_0)$.

OBSERVACION 3.2.2

Debe observarse que la expresión (3.2.1.(1)) tiene sentido a partir de $||h||$ bastante pequeño puesto que por hipótesis existe un disco $||z-z_0|| < r$ para $r > 0$ contenido en D.

OBSERVACION 3.2.3

Es de observarse que una función de $z = u + iv$ puede admitir derivadas parciales de todos los órdenes respecto a u y v, sin admitir derivada respecto a z. El ejemplo más sencillo es la función $f: z \to \overline{z} = u - iv$; en el punto $z_0 = 0$, la expresión (3.2.1.(1)) es $\overline{h}/h$; si $h = re^{i\theta}$, $\overline{h}/h = e^{-2i\theta}$; sobre cada radio $\rho = \rho_0$ esta función es constante, por tanto tiende a un límite cuando h tiende a 0 a lo largo del radio, pero el límite depende de ρ_0, por tanto no existe límite en $\mathbb{R}^2$ en el punto (0,0).

TEOREMA 3.2.4

Una función compleja analítica en un abierto $D \subset \mathbb{C}$ admite una derivada $f'(z)$ en todo punto $z \in D$ y la función f' es analíticaen D.

DEMOSTRACION

En efecto, sin pérdida de generalidad, siempre podemos limitarnos al caso en que D es un disco $||z|| < r$, en el cual se tiene

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

siendo la serie convergente en D. Se tiene entonces por (3.1.2) que para todo $z_0 \in D$ y todo $h \neq 0$ tal que $||h|| < r - ||z_0||$, se cumple

(2) $$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = c_1 + c_2h + \ldots + c_kh^{k-1} + \ldots$$

donde la serie del segundo miembro es convergente y las c_k vienen dadas por las series convergentes (3.1.2.(2)). Por (2.3.4) se tiene que toda serie entera convergente es contínua en su disco de convergencia, luego, el límite (3.2.1.(1)) existe y está dado por

(3) $$f'(z_0) = a_1 + 2a_2z_0 + \ldots + na_nz_0^{n-1} + \ldots$$

es decir, se obtiene simplemente derivando término a término la serie (1).

COROLARIO 3.2.5

Si f es una función analítica en un abierto $D \subset \mathbb{C}$, entonces f es indefinidamente diferenciable en $\mathbb{C}$ y todas sus derivadas son analíticas en D; además para todo $z_0 \in D$, existe un disco $\|z-z_0\| < \rho$ en el cual la función es igual a su serie de Taylor

(1) $$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \ldots$$

DEMOSTRACION

La primera afirmación es una consecuencia inmediata de (3.2.4) ya que f es la suma de una serie infinita y la derivada de f en cada punto $z \in D$, se obtiene derivando la serie término a término.

La segunda afirmación se sigue de la expresión (3.1.2.(2)) de los coeficientes de la serie entera (3.1.2.(3)) y de la fórmula (3.2.4.(3)) aplicada por recurrencia.

Posteriormente veremos que, recíprocamente, toda función compleja que posee una derivada contínua en un abierto $D \subset \mathbb{C}$, es analítica en D. Convendremos en que $f^{(\circ)} = f$.

DEFINICION 3.2.6

Sean f y F funciones analíticas en un abierto $D \subset \mathbb{C}$. Diremos que F es una primitiva de f si se cumple $F' = f(z)$ para todo $z \in D$.

Una función analítica en un abierto $D \subset \mathbb{C}$ no admite necesariamente una primitiva en D, contrariamente a lo que podría creerse, en vista de la definición precedente.

PROPOSICION 3.2.7

Si la serie entera

(1) $\quad f(z) = a_\circ + a_1(z-z_\circ) + \dots + a_n(z-z_\circ)^n + \dots$

es convergente en un disco $\|z-z_\circ\| < r$, entonces la serie

(2) $\quad F(z) = a_\circ(z-z_\circ) + \frac{a_1}{2}(z-z_\circ)^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}(z-z_\circ)^{n+1} + \dots$

es convergente en este disco y su suma es una primitiva de f.

DEMOSTRACION

Por (3.2.4.(3)) se tiene

$f'(z_\circ) = a_1 + 2a_2z_\circ + \dots + na_nz^{n-1}$

Basta entonces probar la convergencia de la serie (2) en el disco $\|z-z_\circ\| < r$. Es claro que para todo ρ tal que $0 < \rho < r$, la sucesión de números complejos $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada; asumamos que $\left\{\frac{a_n}{n+1}\rho^{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ también lo está. Del lema de Abel se sigue que la serie (2) es absolutamente convergente en el disco $\|z-z_\circ\| < r$

(normalmente convergente, si se consideran como funciones).

OBSERVACION 3.2.8

El cálculo de las derivadas es válido sin modificaciones para las funciones analíticas, así, para 2 funciones analíticas f y g, se tiene:

(1) $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$

(2) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$

(4) $(f^n)^1(z) = n(f(z))^{n-1}f'(z), \quad n \in \mathbf{Z}$

(5) $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))\, g'(z)$.

siempre que éstas tengan sentido.

Probaremos (5).

DEMOSTRACION

Para todo $\sigma \in]0, 1]$, existe un $r > 0$ tal que para $\|u\| \leq r$, $\|v\| \leq r$ se tiene

(1) $\|f(g(z) + u) - f(g(z)) - f'(g(z))\, u\| \leq \sigma \|u\|$

(2) $\|g(z + v) - g(z) - g'(z)v\| \leq \sigma \|v\|$.

Como g es contínua en el punto z, existe $r' < r$ tal que para - $\|v\| \leq r'$ se cumple $\|g(z+v) - g(z)\| \leq r$; sustituyendo $g(z + v) - g(z)$ en (1) y teniendo en cuenta (2), se tiene

$\|f(g(z+v)) - f(g(z)) - f'(g(z))g'(z)v\| \leq A\, \sigma \|v\|$

donde $A = \|g'(z)\| + \|f'(g(z))\| + 1$ no depende de σ, de donde el resultado esperado.

El mismo razonamiento demuestra que si f es analítica en un abierto D y γ es una función compleja de variable real t, - contínua y diferenciable en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y tal que $\gamma(I) \subset D$, la función compuesta $t \to f(\gamma(t))$ de la variable real t es diferenciable en I y se tiene

(6) $\qquad (f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t).$

§ 3. PRINCIPIO DE LA PROLONGACION ANALITICA

DEFINICION 3.3.1

Una función lineal afín con valores en un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$ es una función definida en $\mathbb{R}$ y de la forma

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightsquigarrow \sigma(t) = at + b \end{aligned}$$

donde a y b son vectores en E. Si $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo cerrado y acotado, llamaremos segmento cerrado en E a $\sigma([\alpha,\beta])$, donde $\sigma(\alpha)$ y $\sigma(\beta)$ son los extremos del segmento.

DEFINICION 3.3.2

Si $[\alpha,\beta]$ es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ y E es un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, diremos que la función

$$h: [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$$

es una función lineal afín a trozos, si existe un número finito de puntos

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = \beta$$

tales que h coincide con una función lineal afín en cada uno de los subintervalos $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ para $0 \leq k \leq n-1$. La imagen de

$[\alpha,\beta]$ según h se denomina línea quebrada en E.

DEFINICION 3.3.3

Se dice que un conjunto abierto $A \subset \mathbb{C}$ es conexo si, para dos puntos cualesquiera $a, b \in A$, existe una función lineal afín por intervalos h definida en un intervalo $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$, con valores en A, tal que $h(\alpha) = a$, $h(\beta) = b$; se dice también que dos puntos cualesquiera de A pueden estar unidos por una línea quebrada contenida en A.

Equivalentemente, se dice que A es conexo si no es posible escribir A como unión de dos abiertos no vacíos disjuntos B y C.

EJEMPLO 3.3.4

1) El conjunto abierto $H = \{z \in \mathbb{C} \,/\, Re(z) \neq 0\}$ no es conexo, pues $H = \{z \in \mathbb{C} \,/\, Re(z) > 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \,/\, Re(z) < 0\}$ que son abiertos no vacíos sin puntos comunes.

2) $\mathbb{C}$, un disco abierto, el exterior de un disco abierto, una corona abierta (o anillo abierto), son conexos.

(3.3.5) Una función f indefinidamente diferenciable de una variable real, definida en un intervalo abierto I, puede ser modificada en un intervalo arbitrariamente pequeño $J \subset I$, sin dejar de ser derivable indefinidamente. Existen funciones, digamos h, indefinidamente diferenciables aunque nulas en $I - J$ y distintas de cero en J, y la función indefinidamente diferenciable $f + \alpha h$, es por tanto igual a f en $I - J$ pudiendo tomar valores arbitrariamente grandes en J (para α bastante grandes) (ver Fig. 7). Como ejemplo de tales funciones tenemos

$$\sigma(x) = g(\alpha + x)\, g(\alpha - x)$$

donde
$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ |x| \leq 0 \end{cases}$$

que es contínua e indefinidamente diferenciable en $\mathbb{R}$ y mayor - que 0 en $-\alpha < x < \alpha$.

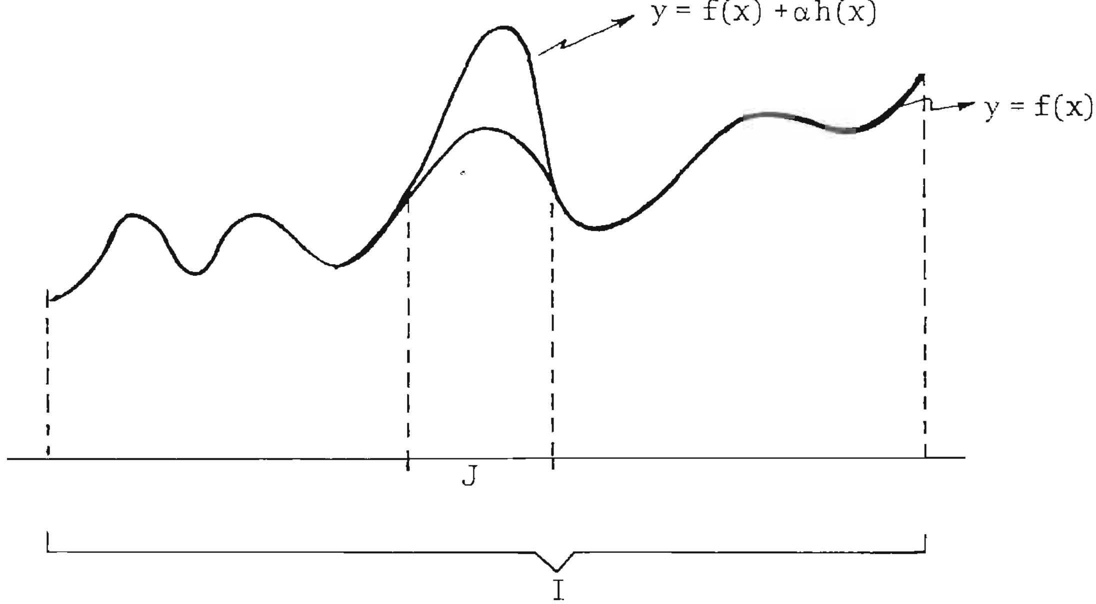

Figura 7

(3.3.6) Si f es una función analítica en un conjunto abierto D, se verá que contrariamente, los valores de f en diversos pun-- tos donde ella está definida, se comportan de algún modo en forma "solidaria" los unos con los otros; no es posible modificar la función en el entorno de un punto dado, sin que forzosamente (si continúa siendo analítica en D) no sea a su vez modificada en puntos muy alejados del punto considerado. Este hecho es lo que prueba ya el principio de los ceros aislados, que es precisamente un caso particular del principio de prolongación analítica.

Para enunciar este principio, sin embargo, es necesario restringir el conjunto abierto D que se considera. Supongamos, por ejemplo, que $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 son dos discos abiertos disjuntos, entonces una función f = a' = a'' en D, siendo a' y a'' constantes complejas, es evidentemente analítica y es claro que dos funciones con esta característica pueden ser iguales en D_1 y diferentes en D_2. La restricción a imponer al conjunto abierto D es que sea conexo.

TEOREMA 3.3.7 (Principio de la prolongación analítica)

Sean f, g dos funciones analíticas en un conjunto abierto conexo $D \subset \mathbb{C}$. Si existe un conjunto abierto no vacío (arbitrariamente pequeño) $U \subset D$ tal que $f|_U = g|_U$, entonces se tiene que $f = g$.

DEMOSTRACION

Sean $a \in U$ y $b \in D$ dos puntos cualesquiera. Por hipótesis existe una línea quebrada $L: t \to \lambda(t)$, contenida en D, imagen de $[0,1]$ según una función afín a trozos λ tal que $\lambda(0) = a$ y $\lambda(1) = b$ (Fig. 8). Sea A el conjunto de valores de t tales que para $0 \leq s \leq t$ se tiene $f(\lambda(s)) = g(\lambda(s))$. Puesto que λ es contínua y $a \in U$, para $\alpha > 0$ existe por hipótesis un intervalo $0 \leq t \leq \alpha$ tal que $[0,\alpha] \subset A$. Debemos probar que $1 \in A$, para lo cual consideremos el extremo superior $\rho \geq \alpha > 0$ de A en $[0,1]$. Supongamos que forzosamente se tiene $\rho \in A$. En efecto, existe una sucesión cre ciente $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de A que tienden a ρ, y como $f(\lambda(t_n)) = g(\lambda(t_n))$ para todo n, se tiene también, por continuidad, $f(\lambda(\rho)) = g(\lambda(\rho))$. Todo se reduce entonces a verificar que $\rho = 1$. Razonaremos por reducción al absurdo suponiendo que $\rho < 1$. Hagamos $z_o = \lambda(\rho) \in D$. Por hipótesis existe un disco Δ: $||z-z_o|| < r$ contenido en D en el cual f y g son iguales a series enteras convergentes en $z - z_o$. Luego, puesto que $\rho > 0$, existe una sucesión creciente $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales distintos que convergen a ρ y tal que las $\lambda(t_n)$ son distintas y tienden hacia z_o. Se tiene por tanto $\lambda(t_n) \in A$ a partir de un cierto n. Como por hipótesis $f(\lambda(t_n)) = g(\lambda(t_n)) \forall n$, por corolario 2 de (2.3.3) se tendrá que las restricciones de f y g en Δ son iguales.

Pero existe un intervalo $[\rho, \rho + h]$ para $h > 0$ tal que $\rho + h < 1$ y que $\lambda(t) \in \Delta$ para $\rho \leq t \leq \rho + h$, en virtud de la continuidad, lo que es contrario a la definición de extremo superior; por tanto $\rho = 1$, con lo que el teorema queda demostrado.

Nótese que el teorema se aplica a funciones analíticas vectoriales.

PROPOSICION 3.3.8

Sean f y g dos funciones analíticas en un conjunto abierto conexo $D \subset \mathbb{C}$. Si $a \in D$ y existe una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos distintos de D cuyo límite es a, y tal que $f(z_n) = g(z_n)$ para todo n, entonces $f = g$.

DEMOSTRACION

Puesto que f y g son iguales a unas series enteras conver gentes en un disco abierto Δ: $\|z - a\| < \alpha$ contenido en D, por Corolario 2 de (2.3.3) se tendrá que $f(z) = g(z)$ en Δ.

Esta proposición se aplicará, por ejemplo, cuando $f(z) = g(z)$ en todos los puntos de un segmento de recta no reducido a un punto (pero tan pequeño como se quiera) contenido en D.

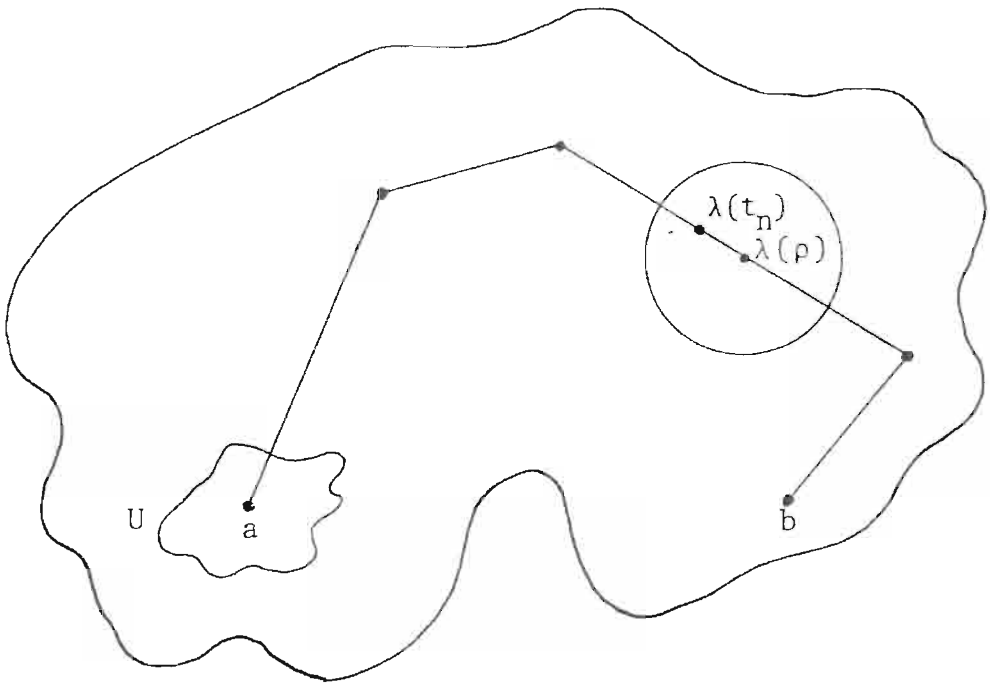

Figura 8

§ 4. EJEMPLOS DE FUNCIONES ANALITICAS

(3.4.1) Un polinomio $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ es claramente una serie entera que converge para todo $z \in \mathbb{C}$, y por consiguiente una función entera. De lo anterior y de (3.1.3) se deduce que para toda función f analítica en un abierto $D \subset \mathbb{C}$, toda potencia f^n $(0 \leq n \in \mathbb{N})$ es analítica en D; como la suma $f + g$ de dos funciones analíticas en D es asimismo analítica, se deduce que el producto fg es igualmente analítica, puesto que $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$.

Por (2.4.4) se ve que si se tienen los desarrollos de f y de g en series enteras en $z - z_0$ en el entorno de un punto $z_0 \in D$, se obtiene el desarrollo en serie entera de fg multiplicando término a término las dos series y reagrupando los monomios del mismo grado en $z - z_0$.

PROPOSICION 3.4.2

La función $\frac{1}{z}$ es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$.

DEMOSTRACION

Debemos mostrar que para todo $z_0 \neq 0$ la serie entera en $z - z_0$

$$(1) \quad \frac{1}{z_0} - \frac{(z - z_0)}{z_0^2} + \frac{(z - z_0)^2}{z_0^3} + \dots + (-1)^n \frac{(z - z_0)^n}{z_0^{n-1}} + \dots$$

es convergente para $\|z - z_0\|$ y tiene por suma $\frac{1}{z}$.

En efecto, para todo $u \in \mathbb{C}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene la identidad

$$\frac{1}{1+u} = a - u + u^2 - \dots + (-1)^n u^n + \frac{1-(-1)^{n+1}u^{n+1}}{1+u} .$$

Cuando $\|u\| < 1$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} u^{n+1} = 0$ y por tanto

$$(2) \quad \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \dots + (-1)^n u^n + \dots$$

siendo la serie convergente para $\|u\| \leq 1$; sustituyendo u por $\frac{z - z_0}{z_0}$ en (2) y multiplicando este resultado por $\frac{1}{z_0}$, se encuentra que (1) converge y tiene por suma $\frac{1}{z}$ para

$\|z - z_0\| \leq \|z_0\|$.

Del resultado precedente y de (3.1.3) se deduce que si f es analítica en un conjunto abierto D, $\frac{1}{f}$ es analítica en el conjunto abierto D' c D de puntos z en que $f(z) \neq 0$. Si D es conexo y si f no es idénticamente nula en D, el conjunto D - D' está constituído por puntos aislados en D, en virtud del principio de prolongación analítica.

Teniendo en cuenta este hecho y (3.4.1) se tiene que si f y g son analíticas en D, $\frac{f}{g}$ es analítica en el conjunto abierto D' c D de puntos en que $g(z) \neq 0$. En particular, una fracción racional $P(z) / Q(z)$, donde P y Q son polinomios (Q no idénticamente nulo), es una función analítica en el complemento del conjunto finito de las raíces de $Q(z) = 0$.

(3.4.3) Supondremos conocidas las definiciones de las funciones reales de variable real, e^x, sen x, cos x, las expresiones de sus respectivas derivadas y la relación fundamental $e^{x_1}e^{x_2}$ para x_1, x_2 reales.

Por la fórmula de Taylor se tiene, para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n > 0$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

donde $R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$. En el límite se tendrá

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!} = e^\xi \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^\xi . 0$$

si $|x| < 1$; es decir, que se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$

(1) $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

siendo la serie entera convergente.

Por el lema de Abel se tiene que la serie de término general $\frac{1}{n!} z^n$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$. Luego,

(2) $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$

define una función entera para todo $z \in \mathbb{C}$ y seguiremos diciendo que es la función exponencial; denotándose asimismo por exp(z). El empleo de esta notación y terminología encuentra justificación por un lado, en la fórmula (1) para $x \in \mathbb{R}$, y por otro, en la propiedad fundamental

(3) $\qquad e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$

cualesquiera que sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Para probar la validez de esta fórmula sin efectuar cálculo, se procede en 2 fases:

i) Si $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $e^{z+x} = e^z e^x$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

En efecto, los dos miembros son funciones enteras de z, - por (3.1.3), que coinciden para todo z real; luego, son idénticas en virtud del principio de prolongación analítica.

ii) Consideremos ahora las funciones

$$z \to e^{z+z_1} \quad y \quad z \to e^z e^{z_1}$$

para un $z_1 \in \mathbb{C}$ arbitrario fijo. Se deduce entonces de lo anterior y de (3.1.3) que son funciones enteras de z que coinciden para todo $z \in \mathbb{R}$, de donde, se tiene de nuevo $e^{z+z_1} = e^z e^{z_1}$ por el principio de prolongación analítica, donde z, z_1 son complejos cualesquiera.

Si en (3) hacemos $z_2 = -z_1$, se obtiene

(4) $\quad e^{-z_1} = \dfrac{1}{z_1}$

para todo $z_1 \in \mathbb{C}$. Por otra parte, al razonar por recurrencia del entero $n > 0$ deducimos de (3) que $e^{nz} = (e^z)^n$, y teniendo presente (4), se tiene

(5) $\quad (e^z)^n = e^{nz}$

para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $n \in \mathbb{Z}$.

(3.4.4) Por un razonamiento similar que en (3.4.3) se tiene para $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ los desarrollos en series enteras convergentes

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, al sustituir ix por x en (3.4.3.(1)) se obtiene para todo $x \in \mathbb{R}$, la conocida fórmula de Euler

(1) $\quad e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$

si en (1) se sustituye x por $(-x)$ se obtienen las ecuaciones

(2) $\quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$; $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

para $x \in \mathbb{R}$.

(3.4.5) Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo cualquiera tal que $z = x + iy$, donde x e y son respectivamente, las partes real e imaginaria, esto es, $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$. Por (3.4.3.(2)) y (3.4.4.(1)), se tiene

(1) $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y)$

es decir,

(2) $\mathrm{Re}(e^z) = e^{\mathrm{Re}(z)}\cos(\mathrm{Im}(z))$; $\mathrm{Im}(e^z) = e^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{sen}(\mathrm{Im}(z))$.

Se deduce entonces que

(3) $\|e^z\| = e^x = e^{\mathrm{Re}(z)} \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

(4) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}} = e^x(\cos y - i\,\mathrm{sen}\, y), \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

De manera particular se tiene

(5) $\|e^{iy}\| = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

(6) $\overline{e^{iy}} = e^{\overline{iy}} = e^{-iy} = \frac{1}{e^{iy}}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Para todo $z = x + iy$, la amplitud (o argumento) del número complejo e^z es un ángulo cuyo número real "y" es una medida en radianes (Fig. 9). En particular tenemos

(7) $e^{i\Pi/2} = i$; $e^{i\Pi} = -1$; $e^{\frac{3i\Pi}{2}} = -i$; $e^{2i\Pi} = 1$

de donde, por (3.4.3.(3))

(8) $e^{z+i\Pi} = -e^z$; $e^{z+2i\Pi} = e^z$.

La función exponencial es por lo tanto periódica, de período imaginario $2i\Pi$.

El estudio del problema de las raíces de la ecuación $e^z = a$, $\forall a \in \mathbb{C}$ ha sido abordado anteriormente. Consideremos aquí el caso particular de las raíces de la ecuación $e^z = 1$, con $z = x + iy$. Por (3.4.5.(1)) y (3.4.5.(3)) se tiene que $e^x = 1$, por lo que $x = 0$; es decir, en z es f(z) g (z). Es obvio que f y g deben tener un dominio común.

Cualquier función f puede ser expresada mediante dos funciones reales, descomponiéndola en sus partes real e imaginaria. Por ejemplo, si $w = u + iv$ y $z = x + iy$, la ecuación $w = z^2$ da

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

que es equivalente al sistema

$$(1) \qquad u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy$$

En el caso general, f tiene una parte real u y una parte imaginaria v que son funciones de z y por consiguiente, también de (x,y). Así pues, $w = f(z)$ es equivalente a

$$w = u(x,y) + iv(x,y).$$

Se puede considerar que una función f, de la variable z, establece una transformación de los puntos del plano z en que esté definida, en puntos del plano w. Estas transformaciones se llaman también aplicaciones y, a veces, representaciones. Por ejemplo, para $w = z^2$, las ecuaciones (1.8.2.(1)) establecen la correspondencia entre el punto (x,y) del plano z y el punto (u,v) del plano w. Se dice entonces que (u,v) es la imagen de (x,y) en la transformación, o lo que es igual, que w es la imagen de z. De igual forma puede hablarse de la imagen de un conjunto de puntos, de una región, por ejemplo.

DEFINICION 1.8.3

Si f es una función definida por $w = f(z)$, diremos que f

$$e^z = 1 \iff e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = 1$$
$$\iff e^x \cos y = 1 \text{ y } e^x \operatorname{sen} y = 0$$
$$\iff e^x = 1, \text{ ya que } \cos y = 1 \text{ y } \operatorname{sen} y = 0.$$

Puesto que

$\cos y = 1$, entonces $y = 2k\Pi$,

$\operatorname{sen} y = 0$, entonces $y = k\Pi$,

se tiene que $z = 2ki\Pi (k \in \mathbb{Z})$

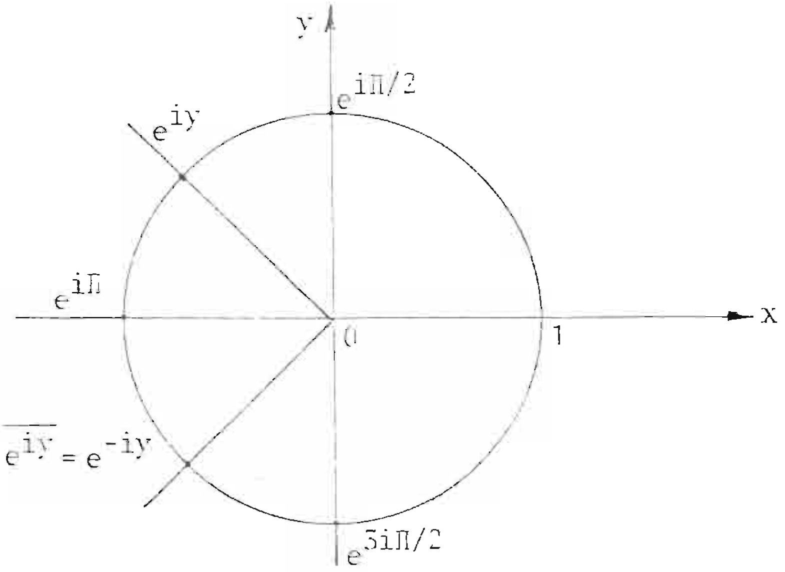

Figura 9

(3.4.6) La función $z \to e^{iz}$ es evidentemente una función entera igual en todo $\mathbb{C}$ a la serie entera convergente

(1) $e^{iz} = 1 + i \frac{1}{1!} - \frac{z^2}{2!} - i \frac{z^3}{3!} + \ldots + i^n \frac{z^n}{n!} + \ldots$

Por consiguiente, es posible prolongar completamente en $\mathbb{C}$ las funciones seno y coseno, poniendo por definición, para todo $z \in \mathbb{C}$

(2) $\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$; $\operatorname{sen} z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$

lo que da claramente

(3) $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$,

de lo cual no debe inferirse que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ sean las partes real e imaginaria de e^{iz}, para $z \in \mathbb{C}$. No es difícil, no obstante, descomponer en sus partes real e imaginaria las funciones trigonométricas prolongadas de esta manera. En efecto, para $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$(4) \quad \begin{cases} \cos z = \frac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) = \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + \frac{1}{2}e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x) \\ \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{ix-y} - e^{-ix+y}) = \frac{1}{2i}e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - \frac{1}{2i}e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x) \end{cases}$$

Finalmente, se tiene que las funciones $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son funciones enteras iguales en $\mathbb{C}$ completo a las series convergentes

$$(5) \quad \begin{cases} \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \\ \operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \end{cases}$$

y que verifican las conocidas relaciones

$$(6) \quad \cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$$

$$(7) \quad \begin{cases} \cos(z + \Pi/2) = -\operatorname{sen} z; & \operatorname{sen}(z + \Pi/2) = \cos z \\ \cos(z + \Pi) = -\cos z; & \operatorname{sen}(z + \Pi) = -\operatorname{sen} z \\ \cos(z + 2\Pi) = \cos z; & \operatorname{sen}(z + 2\Pi) = \operatorname{sen} z \end{cases}$$

$$(8) \quad \cos(-z) = \cos z; \quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$$

$$(9) \quad \begin{cases} \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 \\ \operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2 \end{cases}$$

lo que se ve directamente de las definiciones o por prolongación analítica como en (3.4.3).

Las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} z = 0$ son los números que verifican la relación $e^{iz} = e^{-iz}$, o lo que es equivalente $e^{2iz} = 1$; es decir, son los números $z = k\Pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

De este resultado y de (7) se deduce que las raíces de la -

ecuación $\cos z = 0$ son los números $z = (k+\frac{1}{2})\Pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Se tiene entonces

$$(10) \begin{cases} \tan z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, & z \neq (k+\frac{1}{2})\Pi,\ k \in \mathbb{Z}. \\ \cot z = \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, & z \neq k\Pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

que son funciones que prolongan a los valores no reales de z las funciones - conocidas para $x \in \mathbb{R}$, siendo cada una de ellas analítica en el abierto en que está definida.

De (2), (7) y (8) se deduce

$$(11) \quad \tan z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}\ ;\ \cot z = i\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}$$

$$(12) \quad \tan (z + \Pi/2) = -\cot z;\ \cot (z + \Pi/2) = \tan z$$

$$(13) \quad \tan(-z) = -\tan(z)$$

§ 5. PRINCIPIO DEL MAXIMO

Una función real indefinidamente diferenciable en un intervalo de $\mathbb{R}$ puede alcanzar un máximo relativo en un punto cualquiera de este intervalo. Las funciones analíticas de una variable compleja observan un comportamiento completamente diferente, como lo muestra el siguiente teorema.

TEOREMA 3.5.1 (Principio del máximo)

Sea D un conjunto abierto conexo en $\mathbb{C}$, y sea f una función compleja analítica en D. Si en un punto $z_0 \in D$ la función (positiva) $z \to \|f(z)\|$ alcanza - un máximo relativo (es decir, que existe un disco abierto $\|z-z_0\| < r$ contenido en D y tal que $\|f(z)\| \leq \|f(z_0)\|$ en este disco), entonces f es constante en D.

La razón de este comportamiento que parece muy sorprendente a primera - vista se ve fácilmente mediante el ejemplo particular siguiente.

EJEMPLO 3.5.2

Sea f un polinomio de dos términos definido por

$$f(z) = c_o + c_k(z-z_o)^k$$

siendo $c_o \neq 0$, $c_k \neq 0$ $(k \in \mathbb{N})$; si se escribe

$z - z_o = \rho e^{i\theta} (\rho > 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\Pi)$ se tiene

$$f(z) = c_o + c_k \rho^k e^{ki\theta} = c_o \left[1 + \left\|\frac{c_k}{c_o}\right\| \rho^k e^{i(k\theta+\alpha)}\right]$$

donde α es la amplitud de $\frac{c_k}{c_o}$. Cuando θ varía de 0 a 2Π, $k\theta$ varía de 0 a $2k\Pi$; en particular se puede hallar un θ tal que -- $k\theta + \alpha$ sea de la forma $2k\Pi$ y por consiguiente

$$1 + \left\|\frac{c_k}{c_o}\right\| \rho^k e^{i(k\theta+\alpha)} = 1 + \left\|\frac{c_k}{c_o}\right\| \rho^k$$

es real y mayor que 1; para el valor respectivo de z se tiene por tanto

$$\|f(z)\| > \|c_o\| = \|f(z_o)\|,$$

y esto para $\rho = \|z-z_o\|$ tan pequeño como se quiera. De manera intuitiva, cuando z "gira" alrededor de z_o, $f(z)$ "gira" alrededor de $f(z_o)$ y su valor absoluto toma por tanto valores estrictamente mayores que $\|f(z_o)\|$.

Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, procedemos a demostrar (3.5.1).

DEMOSTRACION

En virtud del principio de prolongación analítica (3.4.7), basta demostrar que si $\|f(z)\|$ alcanza un máximo relativo en el punto z_o, f es constante en un disco abierto $\|z-z_o\| < r$ contenido en D. Luego, existe por definición un disco en el -- cual se puede escribir

$$f(z) = c_\circ + c_1(z-z_\circ) + \dots + c_n(z-z_\circ)^n + \dots$$

siendo la serie convergente en el disco y $c_\circ = f(z_\circ)$. Basta demostrar entonces que la hipótesis implica $c_n = 0$ para todo $n \geq 1$.

Podemos limitarnos al caso en que $c_\circ \neq 0$, sin lo cual la hipótesis implica $\|f(z)\| \leq 0$, por tanto $f(z) = 0$ en una vecindad de $z_\circ$ y el teorema estará demostrado.

Supongamos por tanto que $c_\circ \neq 0$ y razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe un entero más pequeño $k \geq 1$ tal que $c_k \neq 0$. Para $\|z-z_\circ\| < r$ se puede escribir

(1) $f(z) = c_\circ(1 + b_k(z-z_\circ)^k(1 + (z-z_\circ)\, g(z)))$

donde hemos escrito $b_k = \dfrac{c_k}{c_\circ}$ y donde $g(z)$ es una función analítica para $\|z-z_\circ\| < r$; por consiguiente, podemos suponer que - para $\|z-z_\circ\| \leq r/2$, se tiene $\|g(z)\| \leq M$ (independiente de z). Tomemos $r' \leq r/2$ tal que $Mr' \leq 1/2$; hagamos $b_k = \rho e^{i\alpha}$

$(\rho > 0,\ 0 \leq \alpha \leq 2\Pi)$, $z - z_\circ = \|z-z_\circ\|\, e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\Pi)$

y escojamos θ de tal forma que $k\theta + \alpha$ sea múltiplo entero de 2Π, lo cual es posible puesto que $k \geq 1$. Se tiene entonces

$$b_k(z-z_\circ)^k = \rho\|z-z_\circ\|^k$$

y por consiguiente, si $\|z-z_\circ\| \leq r'$,

$$1 + b_k(z-z_\circ) = 1 + \rho\|z-z_\circ\|^k > 0, \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \|1 + b_k(z-z_\circ)^k + b_k(z-z_\circ)^{k+1}g(z)\| &\geq \|1 + b_k(z-z_\circ)^k\| - \|b_k(z-z_\circ)^k g(z)\| \\ &\geq 1 + \rho\|z-z_\circ\|^k - \tfrac{1}{2}\rho\|z-z_\circ\|^k \\ &\geq 1 + \tfrac{1}{2}\rho\|z-z_\circ\| > 1 \end{aligned}$$

Dicho de otro modo, para todo z tal que $\|z-z_\circ\| \leq r'$ y para el -

cual θ toma el valor determinado anteriormente, se tiene, según (1), $\|f(z)\| > \|c_0\| = \|f(z_0)\|$, lo que es contrario a la hipótesis, de donde, nuestro resultado. En virtud del siguiente teorema, ya demostrado en (1.9.13) es válida la subsiguiente afirmación.

TEOREMA 3.5.3

Sea h una función real contínua en un conjunto compacto $A \subset \mathbb{C}$. Entonces h está acotada en A, y existe al menos un punto $a \in A$ (respectivamente $a' \in A$) tal que $h(a) = \sup_{z \in A} h(z)$ (respectivamente $h(a') = \inf_{z \in A} h(z)$).

Pueden existir infinitos puntos que gocen de esta propiedad, así por ejemplo, cuando h es constante. Diremos que en uno de estos puntos a (respectivamente a') h alcanza su extremo superior (resp. su extremo inferior) en A.

Supuesto lo anterior, se tiene la siguiente consecuencia del principio del máximo.

COROLARIO 3.5.4

Sean $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo y f una función analítica no constante en D. Entonces para todo conjunto compacto $A \subset D$, los puntos de A en que $\|f(z)\|$ alcanza su extremo superior son puntos frontera de A.

DEMOSTRACION

Puesto que $\|f(z)\|$ es contínua en D, estos puntos existen siempre; razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\|f(z)\|$ alcanza su extremo superior en un punto z_0 tal que z_0

es no exterior a A ni punto frontera de A; luego z_0 es un punto interior a A. Existe entonces por definición un disco abierto $\|z-z_0\| < r$ $(r > 0)$, totalmente contenido en A (y por consiguiente en D), en el cual se cumple $\|f(z)\| \leq \|f(z_0)\|$, lo cual es contrario a (3.5.1) y a la hipótesis de que f no es constante; de donde el resultado esperado.

Es de observarse que $\|f(z)\|$ puede ser constante sobre toda la frontera de A, según el ejemplo en que $D = \mathbb{C}$, A es el -- disco unidad $\|z\| \leq 1$ y $f(z) = z$.

Una aplicación inmediata de (3.5.4) se da en la demostración del "teorema fundamental del Algebra" (o teorema de d'Alembert-Gauss).

TEOREMA 3.5.5 (Teorema fundamental del Algebra).

Sea

(1) $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^n + \ldots + a_n$

un polinomio no constante de coeficientes complejos $(n \geq 1,\ a_0 \neq 0)$. Entonces existe una sucesión finita $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$ de n números complejos (distintos o no) tales que

(2) $P(z) = a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$

DEMOSTRACION

Basta demostrar que existe un $z_1 \varepsilon \mathbb{C}$ tal que $P(z) = 0$, pues entonces el álgebra prueba que podemos escribir $P(z) = (z-z_1)Q(z)$, donde Q es un polinomio de grado n-1, y basta proceder por recurrencia de n. Para probar la existencia de z_1, vamos a razonar por reducción al absurdo, suponiendo que $P(z) \neq 0$ para todo $z \varepsilon \mathbb{C}$. Resultaría entonces que $1/P(z)$ sería analítica en $\mathbb{C}$; veremos que esto contradice el principio del máximo.

Por hipótesis se tiene que $P(0) = a_n \neq 0$; verificaremos en primer lugar que existe un número $R > 0$ tal que se tiene

(3) $\|P(z)\| \geq 2 \|a_n\|$ para todo z tal que $\|z\| \geq R$. En efecto, se puede escribir, para $z \neq 0$

$$P(z) = a_o z^n \left(1 + \frac{a_1}{a_o z} + \ldots + \frac{a_n}{a_o z^n}\right)$$

y por tanto

$$(4) \quad \|P(z)\| \geq \|a_o\| \|z\|^n \left(1 - \left\|\frac{a_1}{a_o z} + \ldots + \frac{a_n}{a_o z^n}\right\|\right)$$

Luego, para $\|z\| \geq 1$ se tiene entonces

$$(5) \quad \left\|\frac{a_1}{a_o z} + \ldots + \frac{a_n}{a_o z^n}\right\| \leq \left\|\frac{a_1}{a_o}\right\| \frac{1}{\|z\|} + \ldots + \left\|\frac{a_n}{a_o}\right\| \frac{1}{\|z\|}$$

$$\leq \frac{1}{\|z\|} \left(\left\|\frac{a_1}{a_o}\right\| + \ldots + \left\|\frac{a_n}{a_o}\right\|\right)$$

Tomemos entonces R de tal modo que se cumpla

$$R \geq 1; \quad \frac{1}{R} \left(\left\|\frac{a_1}{a_o}\right\| + \ldots + \left\|\frac{a_n}{a_o}\right\|\right) \leq \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} \|a_o\| R^n \geq 2 \|a_n\|$$

lo cual es posible. Para $\|z\| \geq R$, se tiene según (5)

$$\left\|\frac{a_1}{a_o z} + \ldots + \frac{a_n}{a_o z^n}\right\| \leq \frac{1}{2}$$

por tanto, en virtud de (4)

$$\|P(z)\| \geq \frac{1}{2} \|a_o\| R^n \geq 2 \|a_n\|$$

Apliquemos ahora a la función analítica $\frac{1}{P(z)}$ el resultado de (3.5.3) para $D = \mathbb{C}$, siendo A el disco cerrado $\|z\| \leq R$. No sien do constante la función $1/P$, su valor absoluto $1/\|P(z)\|$ debería alcanzar su extremo superior en A en un punto frontera, es decir, en un punto z tal que $\|z\| = R$; pero se ha visto que en uno de estos puntos se tiene $\frac{1}{\|P(z)\|} \leq \frac{1}{2\|a_n\|}$, mientras que $\frac{1}{P(0)} = \frac{1}{\|a_n\|}$, lo que resulta contradictorio puesto que $a_n \neq 0$.

Es de observarse que este razonamiento, no sólo prueba la existencia de una raíz de la ecuación $P(z) = 0$, sino que además da una mayoración para los valores absolutos de estas raíces:

$$(6) \quad \|z_i\| \leq R_o = \sup \left\{1, 2\left(\left\|\frac{a_1}{a_o}\right\| + \dots + \left\|\frac{a_n}{a_o}\right\|\right)\right\}$$

puesto que para $\|z\| \geq R_o$, se tiene $\|P(z)\| \geq \frac{1}{2} \|a_o\| \cdot \|z\|^n$

Nótese además que el teorema no se extiende a las funciones enteras puesto que $e^z \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Capítulo IV

TEORIA DE CAUCHY

La peculiaridad del comportamiento "solidario" entre los valores de una función analítica y los diferentes puntos de un conjunto abierto conexo donde está definida, lo que ha sido ya puesto de relieve por el principio de prolongamiento analítico, se manifiesta de manera todavía más explícita introduciendo, - como lo ha hecho Cauchy, la integral curvilínea de funciones - complejas a lo largo de "caminos" contenidos en $\mathbb{C}$; lo cual permite entre otras cosas, tanto teórica como practicamente, calcular - los valores de una función analítica en un disco, por ejemplo, cuando se les conoce únicamente sobre el círculo frontera del disco.

§ 1. CAMINOS Y LAZOS

DEFINICION 4.1.1

Sea $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado. Se dice que una función vectorial $f: I \to \mathbb{R}^n$ es contínua a trazos en I, si se puede descomponer I en un número finito de intervalos

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{m-1}\ a_m]$$

siendo $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{m-1} < a_m = b$, de modo que f -- sea contínua en cualquier punto x interior a cada uno de estos intervalos; y además que el límite a la derecha

$\lim\limits_{\substack{x \to a_k \\ x > a_k}} f(x) = f(a_k +)$ existe para $0 \le k \le m-1$ y el límite a la iz quierda $\lim\limits_{\substack{x\to a_k \\ x<a_k}} f(x) = f(a_k^-)$ existe para $1 \leq k \leq m$; no se impone -- ninguna condición a los valores de f en los puntos de discontinuidad.

DEFINICION 4.1.2

Sea f una función vectorial contínua por intervalos en $[a,b]$. Entonces la función

(1) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

es contínua en $[a,b]$ y tiene una derivada igual a f(x) en cualquier punto x distinto de los puntos de discontinuidad de f.

Si c es un punto de discontinuidad de f, interior a $[a,b]$, F tiene una derivada a la derecha igual a $f(c^+)$ y una derivada a la izquierda igual a $f(c^-)$. Se dice, además, que F es una primitiva de f igual que todas las funciones de la forma F(x) + k, donde k es un vector constante.

DEFINICION 4.1.3

Sea $I = [a,b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$, no reducido a un punto. Diremos que un camino es una aplicación contínua

(1) $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{C}$

de I en $\mathbb{C}$, diferenciable con continuidad a trozos, es decir, - que es una primitiva $\gamma(t) = \int_a^t \gamma'(s)\,ds + C$ de una función γ' - contínua a trozos en I.

Cuando t varía de a a b, el punto $\gamma(t)$ describe en el plano $\mathbb{C}$ una trayectoria $\gamma(I)$ que, en los puntos $\gamma(t)$ tales que γ'

es contínua y distinta de cero en el punto t, admite una tangente cuya dirección es el vector $\gamma'(t) \in \mathbb{C}$ (Fig. 10).

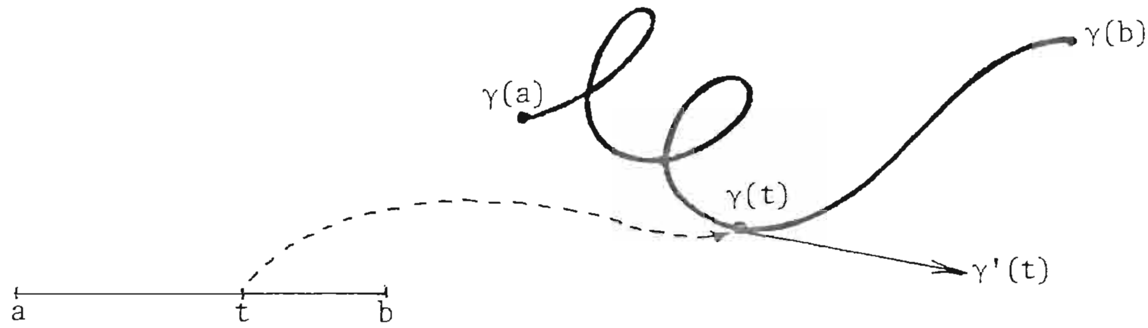

Figura 10

En los puntos t donde γ' es discontínua y tiene valores límites a derecha y a izquierda no nulos, corresponden "puntos angulosos". La trayectoria $\gamma(I)$ puede tener "puntos múltiples", que corresponden a valores distintos de t, donde γ toma el mismo valor; de igual forma puede hacerse que todos lo puntos de $\gamma(I)$ sean múltiples. Envirtud de (1.9.12), $\gamma(I)$ es cerrado.

OBSERVACION 4.1.4

El resultado anterior resulta inmediato en virtud de la continuidad de γ, y del hecho de ser I un conjunto cerrado y acotado de la recta real.

EJEMPLOS 4.1.5

1) Si γ es constante en I, $\gamma(I)$ se reduce a un solo punto ("camino constante").

2) Sean $I = [0,1]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$; la aplicación $\sigma_\alpha : t \to e^{2\Pi i\alpha t}$ definida en I es un camino tal que $\gamma(I)$ es una parte del círcu

lo unidad $\|z\| = 1$. Si α es un entero $n \neq 0$ (positivo o negativo), $\gamma(I)$ es el círculo unidad completo, pero todo punto del círculo se obtiene para $|n|$ valores distintos de t; seguiremos diciendo que σ_n "es el círculo unidad recorrido n veces".

3) Sean c,d dos puntos de $\mathbb{C}$; definamos para $0 \leq t \leq 2$ la función

$$\gamma(t) = \begin{cases} c(1 - t) + dt, & 0 \leq t \leq 1 \\ d(2 - t) + c(t - 1), & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

La imagen de γ es por tanto el segmento de extremos c, d, pero el camino γ puede estar descrito como el "segmento recorrido en los dos sentidos". El punto $t = 1$ es un punto de discontinuidad de γ'.

Los ejemplos anteriores muestran que es absolutamente necesario evitar confundir un camino γ y la "curva" $\gamma(I)$. El punto $\gamma(a)$ se llama el origen del camino γ y el punto $\gamma(b)$ su extremo; a menudo se dice también que $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son los extremos de γ, y que γ "une los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$". Para que dos puntos cualesquiera c, d de un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$ puedan estar unidos por un camino, es suficiente que D sea conexo; esta condición es también necesaria, en virtud de un teorema que admitiremos.

DEFINICION 4.1.6

Se dice que un camino es un lazo si $\gamma(a) = \gamma(b)$; se dice también que γ es un "lazo de origen $\gamma(a)$". Los ejemplos (4.1.5.(1)), (4.1.5.(3)) son lazos; también σ_α lo es, cuando -

α es un entero, pero no en los otros casos (aunque el camino - σ_α pueda "pasar" varias veces por su origen).

DEFINICION 4.1.7

Dado el camino γ: $I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, llamaremos camino opuesto a γ y lo denotaremos por γ° al camino

$$\gamma^\circ: t \longrightarrow \gamma(a+b-t)$$

definido en I; γ° tiene por origen el extremo $\gamma(b)$ de γ y por extremo el origen $\gamma(a)$ de γ; se dice que γ° es el "camino recorrido en sentido inverso".

DEFINICION 4.1.8

Dados los caminos

$$\gamma_1: I_1 = [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma_2: I_2 + [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$$

tales que el origen $\gamma_2(c)$ de γ_2 sea el extremo $\gamma_1(b)$ de γ_1: se llama yuxtaposición de γ_1 y γ_2 y se designa por $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ el camino

$$\gamma: [a,d+b-c] \longrightarrow \mathbb{C}$$

definido por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t-b+c), & b \leq t \leq d+b-c \end{cases}$$

(Fig. 11); el origen de $\gamma_1 \vee \gamma_2$ es el origen de γ_1 y el extremo de $\gamma_1 \vee \gamma_2$ es el extremo de γ_2. El ejemplo (4.1.5.(3)) puede escribirse $\gamma_1 \vee \gamma_2^\circ$, donde γ_2 es el camino $t \longrightarrow c(1-t) + dt$ definido en $[0,1]$ y γ_1 está dado por $t \longrightarrow d(2-t) + c(t-1)$ definido en $[1,2]$. En general, para todo camino γ, la yuxtaposición $\gamma \vee \gamma^\circ$ es un lazo cuyo origen es el de γ.

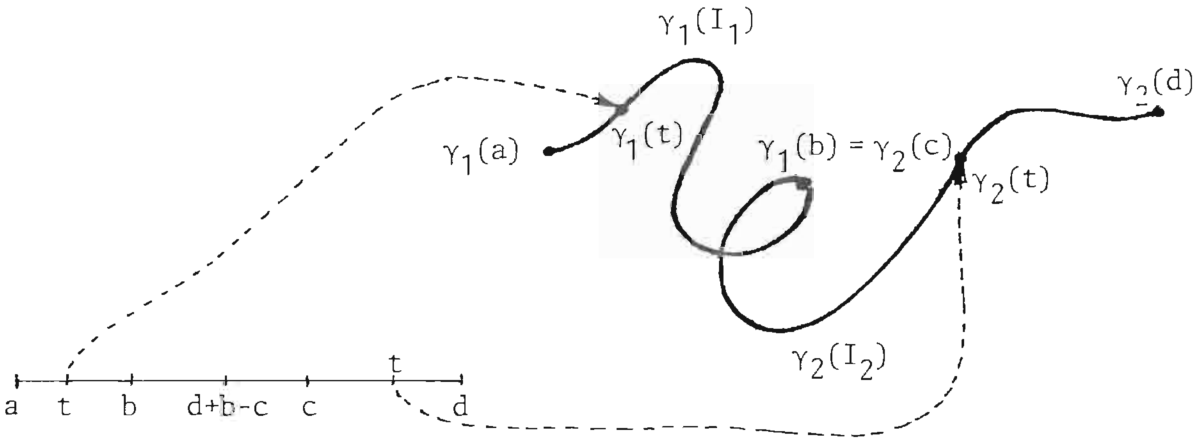

Figura 11

Para todo camino γ: $[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y todo punto c tal que $a < c < b$, γ es yuxtaposición de sus restricciones γ_1, γ_2 en $[a,c]$ y en $[c,b]$ respectivamente; en particular, un lazo es siempre la yuxtaposición de dos caminos (de infinitas maneras); si además, con la misma notación, γ es un lazo de origen $\gamma(a)$, el camino $\gamma' = \gamma_2 \vee \gamma_1$ está definido (puesto que el extremo de γ_2 es el origen de γ_1) y sigue siendo un lazo de origen $\gamma(c)$; se dice que es el lazo obtenido a partir de γ "tomando el punto $\gamma(c)$ por origen".

DEFINICION 4.1.9

Sean γ_1: $I_1 = [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, γ_2: I_2 $[c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ dos caminos. Diremos que γ_1 y γ_2 son equivalentes si existe una biyección creciente Φ: $I_2 \longrightarrow I_1$, contínua y derivable con continuidad a tro--

zos, lo mismo que la función recíproca Φ^{-1}, tal que $\gamma_2(t)=\gamma_1(\Phi(t))$ en I_2.

Las imágenes $\gamma_1(I_1)$ y $\gamma_2(I_2)$ son entonces las mismas y los orígenes y extremos de γ_1 y γ_2 son los mismos; pero el ejemplo (4.1.5.(2)) muestra que estas condiciones no son suficientes para que dos caminos sean equivalentes. Es de observarse que para todo camino

$$\gamma: I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

el camino $t \longrightarrow \gamma(\lambda t + \mu)$, donde $\lambda > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$ es arbitrario, es equivalente a γ. Como una aproximación, se puede por tanto, considerar únicamente los caminos definidos en un intervalo fijo $I \subset \mathbb{R}$, por ejemplo $[0,1]$. Siempre que no dé lugar a confusión, designaremos un camino por una figura que describa su imagen y su sentido de recorrido.

§ 2. INTEGRACION A LO LARGO DE UN CAMINO

TEOREMA 4.2.1 (Fórmula de cambio de variables).

Sea Φ una función numérica contínua por intervalos en $[a,b]$ y tal que $\Phi(x) > 0$ excepto en un número finito de puntos; entonces la función

$$\psi(x) = \int_a^x \Phi(t)\, dt + C$$

es estrictamente creciente en $[a,b]$; y para toda función vectorial f, contínua por intervalos en el intervalo $[\psi(a), \psi(b)]$, tenemos la fórmula de cambio de variable

$$(1) \qquad \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(u)\, du = \int_a^b f(\psi(t))\Phi(t)\, dt$$

como se ve descomponiendo el intervalo $[a,b]$ en un número finito de intervalos en cada uno de los cuales $f(\psi(t))$ y $\Phi(t)$ sean contínuas y aplicando a cada uno de estos intervalos la fórmula clásica.

(4.2.2) Si $a < b$ y si f y g son funciones reales contínuas a trozos en $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x)$ en todos los puntos de continuidad de f y g (y en consecuencia, excepto quizás en un número finito de puntos), tenemos

(1) $$\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)$$

donde la igualdad no podrá verificarse más que si $f(x) = g(x)$ en todos los puntos de continuidad de f y g. Subdividiendo el intervalo $[a,b]$ nos encontramos en el caso conocido en que f y g son ambas contínuas. En particular, si se sabe que

a) f es contínua a trozos en $[a,b]$.

b) $f(x) \geq 0$ excepto en los puntos de discontinuidad.

c) $\int_a^b f(t)\, dt = 0$

se puede entonces deducir $f(x) = 0$ en $[a,b]$ excepto en los puntos de discontinuidad.

(4.2.3) De la desigualdad (4.2.2.(1)) se deriva el procedimiento más importante para obtener las mayoraciones y minoraciones, el teorema del valor medio: si $a < b$ y $m \leq f(x) \leq M$ en $[a,b]$ (o únicamente en los puntos de continuidad de f), para toda función $g \geq 0$ en $[a,b]$, tenemos

(1) $$m\int_a^b g(t)\, dt \leq \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \leq M\int_a^b g(t)\, dt$$

y en particular para $g = 1$

(2) $m(b - a) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq M(b - a)$

La desigualdad (4.2.3.(1)) da en particular para toda función real f contínua a trozos

(3) $\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$

de donde, si $|f(t)| \leq M$ en los puntos de continuidad de f y si $g \geq 0$ en $[a,b]$,

(4) $\left| \int_a^b f(t)g(t)\, dt \right| \leq M \int_a^b g(t)\, dt.$

El teorema del valor medio se aplica a las integrales de funciones complejas en virtud del teorema siguiente:

TEOREMA 4.2.4

Para toda función compleja f contínua a trozos en $[a,b]$ se tiene

(1) $\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\, dt$

(es decir, (4.2.3.(3)) sigue siendo válida para funciones complejas).

DEMOSTRACION

En efecto, expresando el número complejo $\int_a^b f(t)\, dt$ en forma trigonométrica $re^{i\alpha}$ $(r \geq 0)$ y haciendo $g(t) = e^{-i\alpha} f(t)$, se tiene $\int_a^b g(t)\, dt = r$, o bien, descomponiendo g en sus partes real e imaginaria,

$$g = g_1 + ig_2,\ r = \int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b g_1(t)\,dt$$

ya que el primer miembro es real. Puesto que $g_1 \leq \|g\|$, se deduce de (4.2.2.(1)) que

$\int_a^b g_1(t)\,dt \leq \int_a^b \|g(t)\|\,dt$; pero puesto que $\|g\| = \|f\|$, esto prueba la desigualdad (4.2.4.(1)).

Es de observarse que sólo se cumple $\int_a^b g_1(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$

si $g_1(t) = \|g(t)\|$

excepto en los puntos de discontinuidad de g (o de f) por (4.2.2); es decir, la igualdad no se verifica en (4.2.4.(1)) más que si $f(t) = e^{i\alpha}\|f(t)\|$ para una constante α excepto en los puntos de discontinuidad de f.

DEFINICION 4.2.5

Sean γ: $[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino, f una función compleja contínua en $\gamma(I)$ (no se supone que f esté definida necesariamente fuera de $\gamma(I)$ y además, no se supone necesariamente que f sea analítica). Entonces la función compuesta $t \longrightarrow f(\gamma(t))\gamma'(t)$ es contínua a trozos en $[a,b]$ y por consiguiente su integral en este intervalo está definida (4.2.2). Por definición, se llama integral de f a lo largo del camino γ al número complejo

(1) $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$

entendiendo, según esta notación, que se puede reemplazar z por una letra cualquiera.

(4.2.6) La definición precedente muestra que la integral a lo largo de un camino depende no sólo del conjunto $\gamma(I)$, sino también de su parametrización (véase más adelante (4.2.7.(1)). -- Sin embargo, si $\gamma_1:[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma_2:[c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ son dos caminos equivalentes, se tiene

(1) $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$

En efecto, si $\Phi:[a,d] \longrightarrow [a,b]$ es una biyección creciente, - contínua y derivable con continuidad a trozos tal que $\gamma_2=\gamma_1 \circ \Phi$, se tiene $\gamma_2'(t) = \gamma_1'(\Phi(t))\Phi'(t)$ en I_2 excepto en un número finito de puntos y por consiguiente, por la fórmula de cambio de variables (4.2.1)

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} f(z)\, dz &= \int_c^d f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\, dt \\
&= \int_c^d f(\gamma_1(\Phi(t)))\gamma_1'(\Phi(t))\Phi'(t)\, dt \\
&= \int_{\Phi(c)}^{\Phi(d)} f(\gamma_1(u))\gamma_1'(u)\, du \\
&= \int_c^b f(\gamma_1(u))\gamma_1'(u)\, du \\
&= \int_{\gamma_1} f(z)\, dz.
\end{aligned}$$

Si la función f es tal que $\|f(z)\| \leq M$ para $z \in \gamma(I)$, se deduce de la definición (4.2.5.(1)) y de la fórmula del valor medio - (4.2.4.(1))

(2) $\displaystyle\left\| \int_\gamma f(z)\, dz \right\| \leq M\int_a^b \|\gamma'(t)\| = ML$

donde L no es otra cosa que la longitud de la "curva" $t \longrightarrow \gamma(t)$.

(4.2.7) De la definición (4.2.5.(1)) y de las reglas de cálculo de las integrales, se sigue inmediatamente que para dos caminos opuestos se tiene

(1) $$\int_{\gamma^\circ} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

y que para la yuxtaposición $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ de dos caminos se tiene

(2) $$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Puesto que el segundo miembro de (2) no cambia cuando se invierten los dos términos se deduce de (2) que si γ es un lazo, la integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ es independiente del origen de este lazo, en virtud de (4.1.8). Si γ es un lazo constante, se tiene

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

para toda función f.

Finalmente, supongamos que el camino γ está contenido en un abierto $D \subset \mathbb{C}$, y sea g una función analítica en D; entonces si Γ es el camino campuesto $t \longrightarrow g(\gamma(t))$, por (3.2.8.(6)), se tiene

(3) $$\int_\gamma f(g(z))\, g'(z)\,dz = \int_\Gamma f(w)\,dw.$$

§ 3. EL PROBLEMA DE LAS PRIMITIVAS DE LAS FUNCIONES ANALITICAS

(4.3.1) Sea $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo. Ya se ha señalado en (3.2.6) que es posible que determinadas funciones analíticas en D no admitan sin embargo una primitiva en D. La noción de integral a lo largo de un camino permite dar una condición necesaria y suficiente para que exista una de tales funciones primitivas, como se muestra en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.3.2

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo y f una función analítica en D. Para que f admita una primitiva en D, es necesario y suficiente que para todo lazo γ contenido en D, se tenga $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Cuando es así, toda primitiva F de f en D se obtiene de la forma siguiente:

(1) $$F(z) = C + \int_{\alpha(z)} f(u)\,du$$

donde $\alpha(z)$ es un camino cualquiera contenido en D de origen un punto fijo (arbitrario) $z_0 \in D$ y de extremo z. La diferencia de las dos primitivas f en D es una constante.

DEMOSTRACION

" $\Longrightarrow$ " Supongamos que F es una primitiva de f en D, entonces para todo camino $\gamma:[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ contenido en D, se tiene

$$f(\gamma(t))\,\gamma'(t) = \frac{d}{dt} F(\gamma(t))$$

en $[a,b]$ (por (3.2.7)), por tanto

$$\int_\gamma f(u)\,du = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

y en particular, si γ es un lazo, $\int_\gamma f(u)\,du = 0$. Esto demuestra también que si existe una primitiva F de f en D, se tiene $F(z) - F(z_0) = \int_{\alpha(z)} f(u)\,du$ (con las mismas notaciones del enunciado) para cualquier camino $\alpha(z)$ de origen z_0 y extremo z (es claro que siempre existe uno de tales caminos puesto que D es conexo); esto prueba en particular la última afirmación del enunciado.

" <== " Debemos mostrar que la condición del enunciado es suficiente para la existencia de una primitiva.

Supongamos que dicha condición se satisface. Debemos mostrar entonces, en primer lugar, que la integral del segundo miembro de (1) sólo depende de z y z_0, y no del camino $\alpha(z)$ de origen z_0 y extremo z.

En efecto, si $\alpha_1(z)$ y $\alpha_2(z)$ son dos de dichos caminos, $\gamma = \alpha_1(z) \vee \alpha_2(z)^\circ$ es un lazo de origen z_0, y por tanto

$$\int_{\alpha_1(z)} f(u)\,du - \int_{\alpha_2(z)} f(u)\,du = \int_\gamma f(u)\,du = 0,$$

de donde, se deduce nuestro resultado.

La fórmula (4.3.2.(1)) define por tanto una función F en D (una vez elegidos C y z_0).

En segundo lugar, queda por ver que F es analítica y tiene por derivada f. En efecto, para todo punto $z_1 \in D$, existe un disco Δ: $\|z-z_1\| < r$ contenido en D, en el cual f es desarrollable en serie entera en $\|z-z_1\|$, existe por tanto una primitiva (analítica) F_1 de f en Δ (por (3.2.7)), y se puede suponer que ella se anula en z_1. Para todo camino $\lambda(z)$ en Δ de origen z_1 y extremo z, se tiene por tanto $F_1(z) = \int_{\lambda(z)} f(u)\,du$. Luego , si $\alpha(z_1)$ es un camino en D de origen z_0 y de extremo z_1, la yuxtaposición $\alpha(z_1) \vee \lambda(z)$ es un camino en D de origen z_0 y de extremo z, y se tiene por tanto (por 4.2.7.(4)),

$$F(z) = F(z_1) + F_1(z)$$

para todo $z \in \Delta$, lo que demuestra el teorema.

(4.3.3) El ejemplo típico del caso en que la condición (4.3.2) no se satisface es cuando se considera $D = \mathbb{C} - \{0\}$ (el complemento de $\{0\}$ en $\mathbb{C}$, que es conexo), y $f(z) = \frac{1}{z}$, que es analítica en D; si se considera el lazo $\gamma: t \longrightarrow e^{it}$ definido en --- $[0,2\pi]$, que está contenido evidentemente en D, se tiene

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i\ \frac{e^{it}}{e^{it}}\ dt = 2i\pi = 2i\pi \neq 0.$$

En general, para un conjunto abierto conexo $D \subset \mathbb{C}$ dado, existen ciertas funciones analíticas en D que admiten una primitiva en D (las funciones polinomiales por ejemplo), pero pueden exis-- tir otras que no admitan primitiva. Veremos que si D verifica cierta condición de naturaleza geométrica, entonces todas las funciones analíticas en D admiten una primitiva.

§ 4. HOMOTOPIAS DE CAMINOS Y HOMOTOPIAS DE LAZOS. DOMINIOS SIMPLEMENTE CONEXOS.

(4.4.1) La idea intuitiva de homotopía de dos caminos es la de una "deformación contínua" que permite pasar del uno al otro. Esto puede precisarse por la definición matemática siguiente.

DEFINICION 4.4.2

Sea D un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, y sean $\gamma_1: I \longrightarrow \mathbb{C}$; --- $\gamma_2: I \longrightarrow \mathbb{C}$ dos caminos contenidos en D, definidos en el mismo intervalo $I = [a,b]$. Se llama homotopía de γ_1 a γ_2 en D a una aplicación contínua $\Phi: I \times J \longrightarrow D$, donde $J = [c,d]$ es un intervalo de $\mathbb{R}$, tal que $\Phi(t,c) = \gamma_1(t)$ y $\Phi(t,d) = \gamma_2(t)$ para todo - $t \in I$.

Debe observarse que se exige la continuidad de la función de dos variables $(t,s) \longrightarrow \Phi(t,s)$, y no sólo la continuidad de cada una de las funciones parciales; por el contrario no se impone ninguna condición de derivabilidad a Φ, salvo las que se imponen por la definición de un camino a γ_1 y γ_2.

EJEMPLO 4.4.3

A fin de lograr una mejor aproximación (desde el punto de vista intuitivo) al concepto de homotopía de dos caminos, consideremos la siguiente interpretación geométrica de (4.4.2), donde suponemos que γ_1 y γ_2 tienen por origen el punto $p \in D$ y por extremo el punto $q \in D$. (Fig. 12)

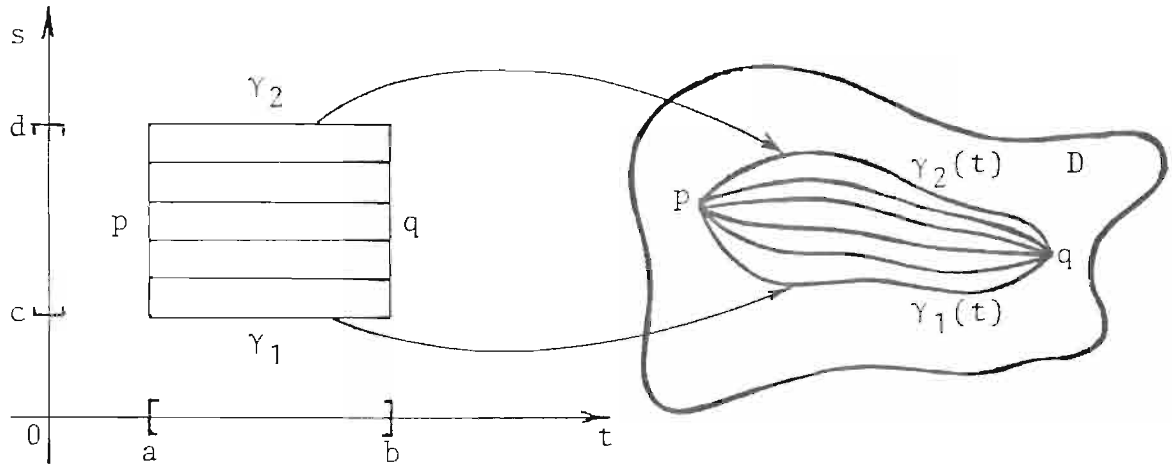

Figura 12

DEFINICION 4.4.4

Sean γ_1, γ_2 dos caminos con las mismas condiciones de (4.4.2). Diremos que γ_2 es homotopo de γ_1 en D si existe una homotoía de γ_1 a γ_2 en D.

Cuando γ_1 y γ_2 son lazos en D, se dice que γ_1 y γ_2 son homotopos como lazos en D si existe una homotopía $\Phi: I \times J \longrightarrow D$

de γ_1 a γ_2 en D teniendo la propiedad adicional de que -- $\Phi(a,s) = \Phi(b,s)$ cualquiera que sea $s \in J$: intuitivamente hablando, la homotopía Φ "no deshace" el lazo; dicha homotopía se sigue llamando homotopía de lazos.

Se deberá tener presente que dos lazos contenidos en D - pueden ser homotopos (como lazos) en un abierto D' tal que -- $D \subset D'$, sin ser homotopos en D.

PROPOSICION 4.4.5

La homotopía de caminos en un abierto $D \subset \mathbb{C}$ es una relación de equivalencia.

DEMOSTRACION

Sean $\gamma_1: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma_3: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ tres caminos contenidos en un abierto $D \subset \mathbb{C}$, y denotemos por -- " $\simeq$ " la relación de homotopía entre dos caminos. Debemos mostrar que $\simeq$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

i) $\gamma_1 \simeq \gamma_1$ (γ_1 es homotopo de γ_1 en D). En efecto, sea

$\Phi: I \times J \longrightarrow D$: $\Phi(t,s) = \gamma_1(t)$ $\forall s \in J$, que es evidentemente - una homotopía, donde $I = [a,b]$ y $J = [c,d]$.

ii) Si $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ entonces $\gamma_2 \simeq \gamma_1$

Puesto que $\gamma_1 \simeq \gamma_2$, existe una homotopía $\Phi: I \times J \longrightarrow D$ tal - que $\Phi(t,c) = \gamma_1(t)$ y $\Phi(t,d) = \gamma_2(t)$.

Para ver que $\gamma_2 \simeq \gamma_1$, sea la aplicación

$\Phi^\circ: I \times J \longrightarrow D$ tal $\Phi^\circ(t,s) = \Phi(t, c+d-s)$, que es claramente - una homotopía, ya que

$\Phi(t,c+d-s) = \gamma_1(t)$, si $s = d$

$\Phi(t,c+d-s) = \gamma_2(t)$, si $s = c$

iii) si $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ y $\gamma_2 \simeq \gamma_3$ entonces $\gamma_1 \simeq \gamma_3$.

Consideremos una homotopía $\Phi_1: I \times J_1 \longrightarrow D$ de γ_1 a γ_2 y una homotopía $\Phi_2: I \times J_2 \longrightarrow D$ de γ_2 a γ_3, siendo $J_1 = [c_1,d_1]$ y $J_2 = [c_2,d_2]$. Si se escribe $J = [c_1,d_1+d_2-c_2]$ y definimos $\Phi_3: I \times J_3 \longrightarrow D$ por las condiciones siguientes: $\Phi_3(t,s) = \Phi_1(t,s)$ en $I \times J_1$ y $\Phi_3(t,s) = \Phi_2(t,s+c_2-d_1)$ para $(t,s) \varepsilon I \times [d_1,d_1+d_2-c_2]$, es inmediato verificar que Φ_3 es una homotopía de γ_1 a γ_3 en D.

Por un razonamiento similar se demuestra que la homotopía de lazos es también una relación de equivalencia, siendo las homotopías Φ°, Φ_3 construídas anteriormente homotopías de lazos si también lo son Φ, Φ_1 y Φ_2.

DEFINICION 4.4.6

Se dice que un lazo γ contenido en D es homotopo de un punto en D si es homotopo como lazo en D de un lazo constante.

DEFINICION 4.4.7

Se dice que un conjunto abierto conexo D es simplemente conexo (o es un dominio simplemente conexo) si todo lazo en D es homotopo de un punto en D.

DEFINICION 4.4.8

Se dice que un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$ es estrellado respecto a un punto $a \varepsilon D$, si para todo $z \varepsilon D$ el segmento

$t \longrightarrow (1-t)a + tz$ $(0 \leq t \leq 1)$ que une a y z, está contenido en D.

PROPOSICION 4.4.9

Todo conjunto abierto estrellado respecto a un punto es simplemente conexo.

DEMOSTRACION

En efecto, sea $\gamma: I \longrightarrow D$ un lazo en D, para $D = [\alpha, \beta]$. Consideremos una homotopía $\Phi: I \times [0,1] \longrightarrow D$ definida por $\Phi(t,s) = sa + (1-s)\gamma(t)$. Es evidente que $\Phi(t,0) = \gamma(t)$ y $\Phi(t,1) = a$; Φ es evidentemente contínua y la hipótesis implica que los valores de Φ pertenecen a D, de donde se deduce nuestra afirmación.

Como ejemplo de conjuntos abiertos estrellados respecto a un punto, tenemos: todo el plano $\mathbb{C}$, un semiplano, un disco abierto, el interior de un rectángulo también es estrellado con respecto a cada uno de sus puntos (se dice entonces que es convexo). Como ejemplo distinto, citemos el caso del disco unidad $\|z\| < 1$ del que se ha suprimido un número finito de segmentos radiales:

$$z = te^{i\theta_k} \text{ con } \rho_k \leq t \leq 1$$

siendo ρ_k un número tal que $0 < \rho_k < 1$ (Fig. 13); se comprueba de inmediato que este conjunto abierto es estrellado respecto a 0.

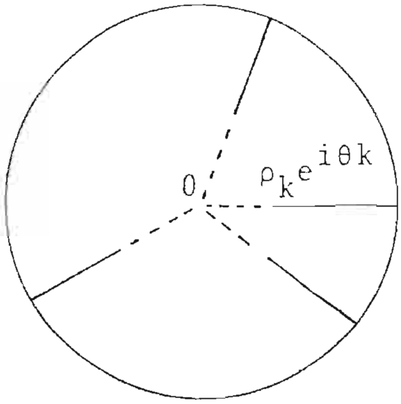

Figura 13

Admitiremos el siguiente teorema.

TEOREMA 4.4.10

Toda intersección de un número finito de conjuntos abiertos estrellados respecto a un punto a es un conjunto estrellado con respecto a a. (El teorema es válido también para conjuntos convexos).

Como ejemplo de conjunto simplemente conexo no estrellado, consideremos un semiplano abierto $\mathrm{Im}(z) > 0$ del cual se han suprimido un cierto número de semirrectas cerradas $z = t + i\beta_k$, siendo $-\infty < t \leq \alpha_k$ (Fig. 14).

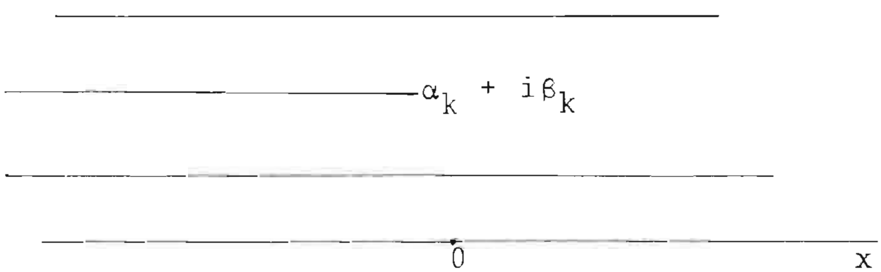

Figura 14

(4.4.11). Más adelante veremos como consecuencia del teorema -

de Cauchy y de (4.3.3), que el conjunto conexo $\mathbb{C} - \{0\}$ es homotopo de un punto en $\mathbb{C}$, pero no necesariamente en $\mathbb{C} - \{0\}$.

§ 5. EL TEOREMA INTEGRAL DE CAUCHY

LEMA 4.5.1 (Lema de Cauchy - Goursat)

Sean $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo, f una función analítica en D y R un rectángulo en D, cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados. Si γ es el lazo del borde de R, entonces

$$(1) \qquad \int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

DEMOSTRACION

Dividamos el rectángulo R en cuatro subrectángulos iguales R_i con bordes γ_i $(i = 1, \ldots, 4)$. Supongamos que tanto γ como los γ_i estén orientado positivamente (Fig. 15).

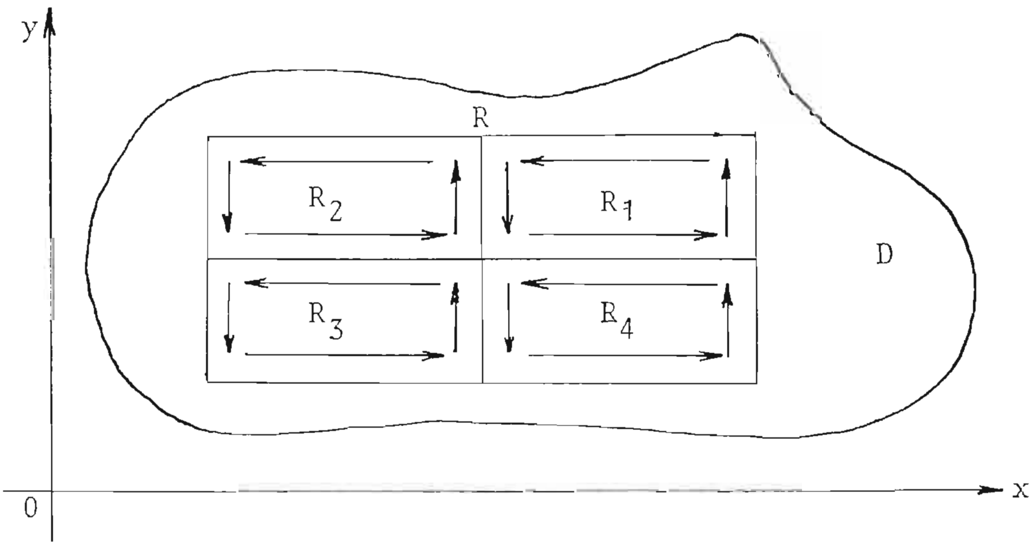

Figura 15

Es claro que $\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} f(z)dz$. Sea R_1 el rectángulo de borde γ_1 tal que

$$\left|\int_{\gamma_i} f(z)dz\right| \leq \left|\int_{\gamma_1} f(z)dz\right|,\ i = 1, \ldots, 4$$

y puesto que

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| = \left|\int_{\gamma_1 V\gamma_2 V\gamma_3 V\gamma_4} f(z)dz\right|$$

$$\leq \left|\int_{\gamma_1} f(z)dz\right| + \left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| + \left|\int_{\gamma_3} f(z)dz\right| + \left|\int_{\gamma_4} f(z)dz\right|$$

se tiene entonces

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leq 4\int_{\gamma_1} f(z)dz\right|$$

Denotando ahora γ_1 como Γ_1 y aplicando este resultado al rectángulo R_1 obtenemos nuevamente un subrectángulo R_2^* de borde Γ_2 tal que

$$\left|\int_{\Gamma_1} f(z)dz\right| \leq 4^2\left|\int_{\Gamma_2} f(z)dz\right|$$

Continuando este proceso indefinidamente, se obtiene una sucesión de rectángulos encajados $R \supset R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_n \supset \ldots$, además de las desigualdades

$$(2)\quad \left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{\Gamma_1} f(z)dz\right| \leq 4^2\left|\int_{\Gamma_2} f(z)dz\right| \leq \ldots \leq 4^n\left|\int_{\Gamma_n} f(z)dz\right|$$

de manera que el área del k-ésimo rectángulo (R_k) tiende a cero cuando $k \to +\infty$, y en consecuencia las longitudes de sus lados tienden a cero.

Como f es diferenciable en R, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$ se tiene

$$\left|\frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} - f'(z_o)\right|$$

para todo $z \in R_n$, donde R_n representa el n-ésimo rectángulo (y en el que Γ_n representa su borde). Denotemos por L el perímetro de R y por L_n el perímetro de R_n. Como $L_1 = \frac{1}{2}L$, $L_2 = \frac{1}{2}L_1$, ..., se obtiene

$$L_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n L, \quad n = 1,2,...$$

sea $\Phi(z) = f(z) - f(z_o) - f'(z_o)(z-z_o)$. Se tiene por tanto

$$|\Phi(z)| = |f(z) - f(z_o) - f'(z_o)(z-z_o)| < \varepsilon|z-z_o|$$

Por consiguiente

$$\int_{\Gamma_n} f(z)dz = \int_{\Gamma_n} f(z_o)dz + \int_{\Gamma_n} f'(z_o)(z-z_o)dz + \int_{\Gamma_n} \Phi(z)dz$$

Puesto que $F_1(z) = f(z_o)\cdot z$ y $F_2(z) = f'(z_o)\frac{(z-z_o)^2}{2}$ son primitivas de $f(z_o)$ y $f'(z_o)(z-z_o)$, respectivamente, en virtud de (4.3.2) se tendrá

$$\int_{\Gamma_n} f(z)dz = \int_{\Gamma_n} \Phi(z)dz$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\Gamma_n} \Phi(z)dz\right| &\leq \int_{\Gamma_n} |\Phi(z)|dz \\ &\leq \int_{\Gamma_n} \varepsilon|z-z_o|dz \\ &\leq \varepsilon\int_{\Gamma_n} |z-z_o|dz \\ &\leq \varepsilon\int_{\Gamma_n} \frac{L_n}{2}dz \\ &\leq \varepsilon\,\frac{L_n}{2}\int_{\Gamma_n} dz = \varepsilon\left(\frac{L}{2^n}\right)\int_{\Gamma_n} dz\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el cambio de γ por Γ, en virtud de (4.5.1.(2)), se tiene

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| &\leq 4^n \left|\int_{\Gamma_n} f(z)dz\right| \\ &\leq 4^n \cdot \varepsilon \frac{L}{2^n} \left|\int_{\Gamma_n} dz\right| \\ &\leq 4^n \cdot \varepsilon \frac{L}{2^n} \cdot L_n \\ &\leq 4^n \cdot \varepsilon \frac{L}{2^n} \cdot \frac{L}{2^n} \\ &\leq \left(\frac{4}{2}\right)^n \cdot \varepsilon \cdot L \cdot \frac{L}{2^n} = 2^n \varepsilon \cdot \frac{L^2}{2^n} = \varepsilon \cdot L^2\end{aligned}$$

pero puesto que $\frac{L}{2^n} \to 0$ cuando $n \to +\infty$, se tiene por tanto

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| = 0, \text{ esto es, } \int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

Admitiremos temporalmente el siguiente teorema, el cual - será demostrado en cada una de sus partes en la sección 9 (§ 9).

TEOREMA 4.5.2

Condición necesaria y suficiente para que una función -- $f = P + iQ$ sea analítica en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$ es que en cada punto $z = x + iy$, las derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial Q}{\partial y}$ existan, sean contínuas y satisfagan las condiciones de Cauchy (ecuaciones de Cauchy-Riemann):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

TEOREMA 4.5.3 (Teorema de Cauchy).

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo, y sea f una función analítica en D. Si γ_1, γ_2 son dos lazos contenidos en D y homotopos como lazos en D, se tiene

(1) $$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

En particular, si D es simplemente conexo (4.4.7), se tiene

(2) $$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

para todo lazo γ contenido en D.

DEMOSTRACION (para el caso de un disco).

Vamos a limitarnos a considerar el caso particular, esto es, cuando D es simplemente conexo.

La demostración consiste sencillamente en establecer que f posee una primitiva en el disco D: $\|z-z_0\| < \rho$, viniendo a ser entonces la fórmula (4.5.3.(2)) una consecuencia del teorema (4.3.2). Definamos una función F por

(3) $$F(z) = \int_{\sigma} f(z)dz$$

donde el camino de integración σ, que va de un punto fijo z_0 en D al punto variable $z \in D$, consta de un segmento horizontal y otro vertical. Naturalmente, para que F esté bien definida debemos verificar que si se conecta z_0 con z por medio de dos caminos σ_1, σ_2 de ese tipo (Fig. 16), entonces

(4) $$\int_{\sigma_1} f(z)dz = \int_{\sigma_2} f(z)dz.$$

En efecto, por el lema de Cauchy-Goursat (4.5.1), se tendrá

$$\int_{\sigma_1} f(z)dz - \int_{\sigma_2} f(z)dz = \int_{\sigma_1 - \sigma_2} f(z)dz = \int_{\sigma_1 V \sigma_2^{\circ}} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

donde el lazo γ, yuxtaposición de σ_1 y σ_2°, es el borde de un - rectángulo R contenido en D, orientado positivamente.

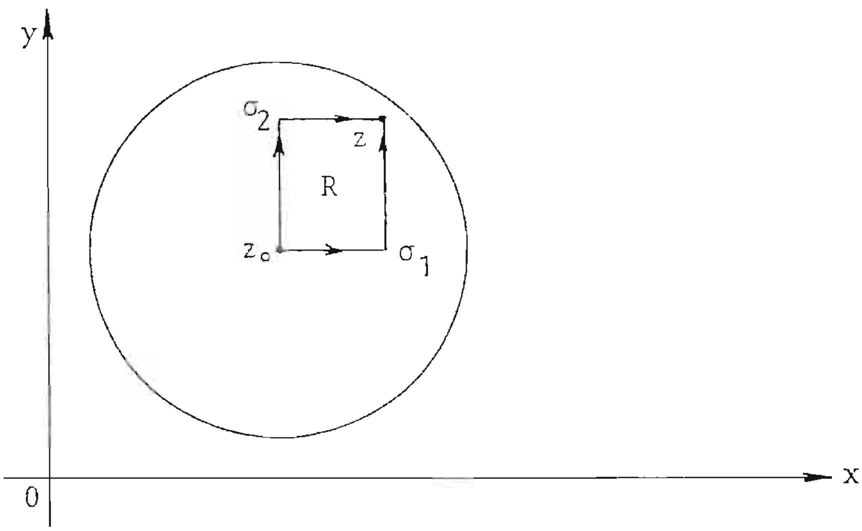

Figura 16

Para mostrar que F es analítica en D y F'(z) = f(z) para todo $z \in D$, basta establecer la relación

$$(5) \qquad f(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z) = -i\frac{\partial F}{\partial y}(z), \qquad (z \in D)$$

En efecto, si $F = P + iQ$, entonces de (4.5.3.(5)) se tendrá que

$$\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = -i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y}$$

de donde, resultará que se cumplen las condiciones de Cauchy:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Por otra parte, puesto que f es contínua en D, de (4.5.3.(5)) resultará la continuidad de $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial Q}{\partial y}$, lo cual probará que F es analítica en D y $F'(z) = f(z)$ (4.5.2).

Demostremos pues, que $f(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z)$, o sea que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \varepsilon, \text{ cuando } h \in \mathbb{R} \text{ y } 0 < |h| < \delta.$$

De la definición (4.5.3.(3)) resulta que

$$F(z+h) - F(z) = \int_\gamma f(\xi)d\xi$$

donde γ es el segmento, paralelo al eje real, de ecuación $\xi = z + ht$, $0 \leq t \leq 1$. Por tanto

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| &= \left|\int_0^1 f(z+ht)dt - \int_0^1 f(z)dt\right| \\ &= \left|\int_0^1 [f(z+ht) - f(z)]dt\right| \\ &\leq \max_{0\leq t\leq 1} |f(z+ht) - f(z)|\end{aligned}$$

Debido a la continuidad de f, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(z+ht) - f(z)| < \varepsilon$ si $|ht| < \delta$. Por lo tanto, si $|h| < \delta$, entonces $|ht| \leq |h| < \delta$, de modo que se cumple $|f(z+ht) - f(z)| < \varepsilon$ para todo t, $0 \leq t \leq 1$. De esto se sigue que para $|h| < \delta$ se tiene

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \varepsilon.$$

La demostración de $f(z) = -i\frac{\partial F}{\partial y}(z)$ se logra por un razonamiento similar.

TEOREMA 4.5.4

Si D es un dominio simplemente conexo, toda función analítica en D admite una primitiva en D.

DEMOSTRACION

Se sigue inmediatamente de (4.5.3) y (4.3.2).

§ 6. INDICE DE UN PUNTO RESPECTO A UN LAZO

DEFINICION 4.6.1

Sea γ: $J = [c,d] \to \mathbb{C}$ un lazo en $\mathbb{C}$ y sea a un punto de $\mathbb{C}$ que no pertenece a $\gamma(J)$. Llamarenos índice de a respecto al lazo γ al número

$$(1) \qquad I(a;\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} .$$

TEOREMA 4.6.2

$I(a;\gamma)$ es un número entero (positivo o negativo).

DEMOSTRACION

Sea $h(t) = \int_c^t \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s)-a}$ para todo $t \in J$, de manera que $2\pi i\, I(a;\gamma) = h(d)$. Como h es una primitiva de una función fragmentariamente contínua, se tiene que

$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$$

excepto en un número finito de puntos de J. Hagamos

$$g(t) = e^{-h(t)}(\gamma(t) - a),$$

se tiene entonces

$$g'(t) = -h'(t)e^{-h(t)}(\gamma(t)-a) + \gamma'(t)e^{-h(t)} = 0$$

excepto en un número finito de puntos de J, según el cálculo - efectuado anteriormente. Por consiguiente, la función contínua g es constante en J, y en particular se tiene g(c) = g(d). Pero h(c) = 0, por tanto

$$g(c) = \gamma(c) - a$$

se tiene entonces

$$e^{-h(d)}(\gamma(d) - a) = \gamma(c) - a$$

Pero por hipótesis γ es un lazo, por tanto $\gamma(d) = \gamma(c)$ y se obtiene para el número complejo h(d) la relación $e^{-h(d)} = 1$, de donde $h(d) = 2k\Pi i$ para un $k \in \mathbb{Z}$ en virtud de (3.4.5).

OBSERVACION 4.6.3

Es absolutamente necesario tener presente que el número - entero $I(a;\gamma)$ no está definido más que si $a \notin \gamma(J)$. Veremos que este número es la noción matemática precisa que corresponde a la idea intuitiva del "número de veces que el lazo γ gira alrededor de a".

Se tiene evidentemente, en virtud de (4.6.1.(1)) y de las fórmulas (4.2.5.(1)) y (4.2.7.(2))

(1) $\quad I(a;\gamma^{\circ}) = - I(a;\gamma)$

(2) $\quad I(a;\gamma_1 \vee \gamma_2) = I(a;\gamma_1) + I(a;\gamma_2)$

donde γ, γ_1 y γ_2 son lazos cuyas imágenes no contienen a a, suponiendo que los lazos γ_1 y γ_2 tienen el mismo origen (de manera que $\gamma_1 \vee \gamma_2$ sigue siendo un lazo del mismo origen).

PROPOSICION 4.6.4

Sean a un punto de $\mathbb{C}$, γ_1, γ_2 dos lazos en $\mathbb{C} - \{a\}$ homotopos como lazos en $\mathbb{C} - \{a\}$; entonces se tiene $I(a;\gamma_1) = I(a;\gamma_2)$.

DEMOSTRACION

Es una consecuencia del teorema de Cauchy (4.5.3) aplicado a la función $\frac{1}{z-a}$ que es analítica en $\mathbb{C} - \{a\}$ (3.4.2).

DEFINICION 4.6.5

Se dice que una función vectorial f definida en un abierto $D \subset \mathbb{C}$ es localmente constante si, para todo $z_0 \in D$, existe un número $\delta > 0$ tal que el disco $\|z-z_0\| < \delta$ esté contenido en D y que f sea constante en este disco. En un conjunto abierto conexo $D \subset \mathbb{C}$, una función f localmente constante, es constante.

TEOREMA 4.6.6

Sea γ un lazo en $\mathbb{C}$; para todo conjunto abierto conexo D contenido en $\mathbb{C} - \gamma(J)$, la función $z \to I(z;\gamma)$ es constante en D.

DEMOSTRACION

Basta probar que para todo $z_0 \in D$, en todo disco abierto $\Delta: \|z-z_0\| < r$ $(r > 0)$ contenido en D, se tiene $I(z;\gamma) = I(z_0;\gamma)$. Esto probará que la función $z \to I(z;\gamma)$ es localmente constante en D, y por ende constante, puesto que D es conexo (4.6.5). Demostremos, pues, que en todo disco abierto Δ de centro z_0 contenido en D, se tiene $I(z;\gamma) = I(z_0;\gamma)$. Para ello hagamos hincapié en que se tiene

$$I(z;\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{du}{u-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{du}{u-z_0} = I(z_0;\gamma)$$

designando por γ_1 el lazo $t \to \gamma(t) - (z-z_\circ)$. Luego γ_1 es homotopo como lazo de γ en $\mathbb{C} - \{z_\circ\}$, por la homotopía

$$\Phi(t,s) = \gamma(t) - s(z-z_\circ) \quad (0 \leq s \leq 1).$$

En efecto, si se cumpliera $\Phi(t,s) = z_\circ$, esto significaría que $\gamma(t) = sz + (1-s)z_\circ$ para $t \in J$ y un s tal que $0 \leq s \leq 1$. Pero el punto $sz + (1-s)z_\circ$ pertenece a Δ y por hipótesis $\gamma(J)$ no encuentra a Δ. Basta ahora aplicar (4.6.4).

TEOREMA 4.6.7

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo y sea γ un lazo contenido en D. Entonces para todo punto $a \notin D$ se tiene que $I(a;\gamma) = 0$.

DEMOSTRACION

En efecto sea la función $f\colon z \to \frac{1}{z-a}$, que es analítica en D. La conclusión se sigue del teorema de Cauchy (4.5.3) y de la definición de índice (4.6.1.(1)).

PROPOSICION 4.6.8

Sea $\sigma_n\colon t \to e^{nit} (0 \leq t \leq 2\Pi)$ el "círculo unidad recorrido n veces" (4.1.5.(2)) (n entero positivo o negativo). Entonces, para todo z tal que $\|z\| < 1$, se tiene $I(z;\sigma_n) = n$, y para todo z tal que $\|z\| > 1$, se tiene $I(z;\sigma_n) = 0$.

DEMOSTRACION

El disco unidad $\|z\| < 1$ y el exterior del disco unidad $\|z\| > 1$, son conjuntos abiertos conexos que no encuentran el círculo unidad $\|z\| = 1$. Bastará entonces mostrar que

$I(z_0;\sigma_n) = n$ para un punto z_0 del disco unidad $\|z\| < 1$ y - $I(z_1;\sigma_n) = 0$ para un punto z_1 exterior a este disco. Por tanto, si se toma $z_0 = 0$, se tiene

$$I(0;\sigma_n) = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\sigma_n}\frac{du}{u} = \frac{1}{2\Pi i}\int_0^{2\Pi}\frac{nie^{nit}dt}{e^{nit}} = n$$

Por otro lado, para $\|z_1\| > 1$, z_1 no está contenido en el disco abierto $\|z\| < \|z_1\|$, y el círculo unidad está contenido en este disco. Como se ha visto que un círculo abierto es simplemente conexo (4.4.9), la afirmación respecto a z_1 es una consecuencia de (4.6.7).

(4.6.9) METODO DE CALCULO DEL INDICE

En muchos casos es posible dar un método práctico de calcular el índice $I(a;\gamma)$ por el procedimiento que a continuación se describe:

Mediante una traslación podemos limitarnos al caso en que $a = 0$ (suponiendo, por supuesto, que $0 \notin \gamma(J)$). Vamos a suponer que el eje real $Im(z) = 0$ no encuentra a $\gamma(J)$ más que un número finito de puntos. Escribamos $\gamma(t) = u(t) + iv(t)$, donde $u(t)$ y $v(t)$ son reales; existe por tanto en J un número finito de - puntos

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_n$$

donde la función v cambia de signo; además se puede suponer, - cambiando el origen de γ(4.2.7), que $J = [t_1,t_n]$, de manera - que $\gamma(t_1) = \gamma(t_n)$ y $\gamma(t) \neq 0$ en J. Dado esto, prolonguemos γ a $\mathbb{R}$ por periodicidad de período $t_n - t_1$; los puntos t_k $(1 \leq k \leq n)$ -

se reparten en cuatro conjuntos:

M_1: se tiene $u(t_k) > 0$ y $v(t)$ pasa del signo - al signo + atravesando t_k en sentido creciente;

M_2: se tiene $u(t_k) > 0$ y $v(t)$ pasa del signo + al signo - atravesando t_k en sentido creciente;

M_3: se tiene $u(t_k) < 0$ y $v(t)$ pasa del signo + al signo - atravesando t_k en sentido creciente;

M_4: se tiene $u(t_k) < 0$ y $v(t)$ pasa del signo - al signo + atravesando t_k en sentido creciente (Fig. 17).

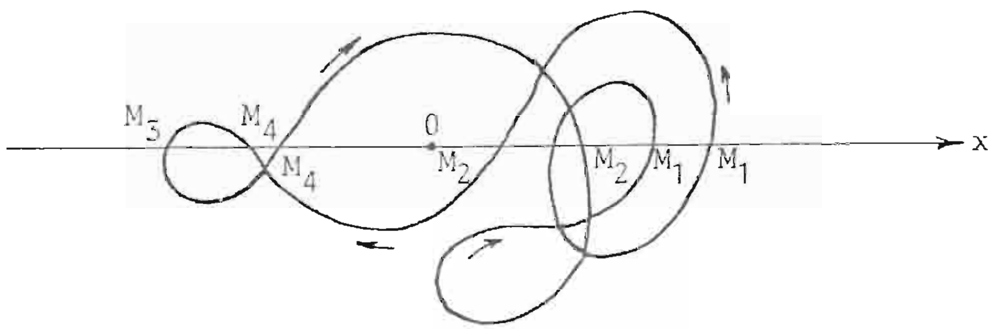

Figura 17

Se observará que t_1 y t_n pertenecen al mismo conjunto M_k y que n es impar, puesto que para $t = t_1 - h$ y $t = t_n + h$ para h bastante pequeño, v tiene signos diferentes y ha cambiado n veces de signo. Definamos ahora, para todo entero k tal que $1 \leq k \leq n$ un número

$$(1) \qquad \begin{cases} \delta_k = 1, \text{ si } t_k \varepsilon M_1 \text{ o bien } t_k \varepsilon M_3 \\ \delta_k = -1, \text{ si } t_k \varepsilon M_2 \text{ o bien } t_k \varepsilon M_4 . \end{cases}$$

Intuitivamente, δ_k es positivo si en el entorno de t_k, $\gamma(t)$ "gi ra en el sentido positivo" alrededor de 0, negativo en el caso contrario. Se tiene entonces

(2) $$I(0;\gamma) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \delta_k .$$

En efecto, en la integral

(3) $$I(0;\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{t_1}^{t_n} \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t)}$$

se descompone el intervalo de integración mediante los puntos t_k $(2 \leq k \leq n-1)$. Supongamos por ejemplo que $t_k \in M_2$; luego, - por definición se tiene $v(t) < 0$ para

$$t_k < t < t_{k+1}$$

y no se puede cumplir más que $t_{k+1} \in M_1$ ó $t_{k+1} \in M_4$. Por tanto, para $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ se puede escribir $u(t) + iv(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}\, e^{i\theta(t)}$, donde $\theta(t)$ es una función derivable bien determinada, con valo res en $[-\pi, 0]$, definida por

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = t_k \\ 0, & \text{si } t = t_{k+1},\ t_{k+1} \in M_1 \\ -\pi, & \text{si } t = t_{k+1},\ t_{k+1} \in M_4 \end{cases}$$

Por otra parte, podemos limitarnos a calcular la parte real de la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t)}$$

es decir

$$(4) \qquad \frac{1}{2\Pi}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{u(t)v'(t) - v(t)u'(t)}{v^2(t) + v^2(t)}\, dt$$

Pero, por un simple cálculo de derivadas se tiene

$$u' + iv' = e^{i\theta}\left\{ i\theta' \sqrt{u^2 + v^2} + \frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right\}$$

y como $e^{-i\theta} = \dfrac{u - iv}{\sqrt{u^2 + v^2}}$, se obtiene

$$(5) \qquad \theta' = \frac{uv' - vu'}{u^2 - v^2}$$

de donde, sustituyendo en (4)

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{2\Pi i}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t)} \right\} = \frac{1}{2\Pi}\left\{ \theta(t_{k+1}) - \theta(t_k) \right\}.$$

Si denotamos por I_t la integral (4.6.8.(4)), el resultado anterior también puede escribirse

$$\mathrm{Re}\,(I_t) = \frac{1}{2\Pi}\left\{ \theta(t_{k+1}) - \theta(t_k) \right\}$$

Luego, por definición de $\theta(t)$ se tendrá

$$\theta(t_{k+1}) - \theta(t_k) = \begin{cases} -\Pi - 0, & t_{k+1} \varepsilon M_4 \\ 0 - 0, & t_{k+1} \varepsilon M_1 \end{cases}$$

Así, para $\mathrm{Re}(I_t)$ hay dos posibilidades

$$\mathrm{Re}(I_t) = \frac{1}{2\Pi}\begin{Bmatrix} -\Pi \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \to -\frac{1}{2} \\ \to 0 \end{matrix}$$

obteniéndose finalmente la expresión $1/4\ (\delta_k + \delta_{k+1})$, como en efecto puede comprobarse mediante la definición de δ_k. Los otros casos se tratan de igual forma y dan finalmente la fórmula (4.6.8.(3)).

El caso inmediatamente a considerar es el de una recta cualquiera L que pasa por 0 y no corta a $\gamma(J)$ más que en un número finito de puntos, por rotación alrededor del origen.

Un caso interesante es aquel en que además el semieje real positivo $\mathbb{R}^+$: $\mathrm{Im}(z) = 0$, $\mathrm{Re}(z) \geq 0$, corta a $\gamma(J)$ en un solo punto (o los casos que se deducen por rotación); se puede suponer que este punto corresponde a $t = t_1$ y a $t = t_n$. Resulta entonces de las definiciones que las otras t_j $(2 \leq j \leq n-1)$ son en número impar; si por ejemplo $t_1 \in M_1$, se tiene necesariamente $t_2 \in M_3$ y las t_j tales que $2 \leq j \leq n-1$ están en M_3 y j es par, en M_4 si j es impar; la contribución de estos puntos en (4.6.8.(2)) es, pues, $\frac{1}{2}$ y se tiene por tanto

(6) $$I(0;\gamma) = 1$$

Si se cumpliera $t_1 \in M_2$, se demostraría de igual manera que

$$I(0;\gamma) = -1$$

§ 7. LA FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY

TEOREMA 4.7.1 (Fórmula de Cauchy)

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo, y sea $\gamma: I \to D$ un lazo en D (Fig. 18). Entonces, para toda función f analítica en D y todo punto $z_0 \in D - (I)$, se tiene

(1) $$I(z_0;\gamma)f(z_0) = \frac{1}{2\Pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-z_0}$$

DEMOSTRACION

Definamos en D la función g(z) por las condiciones

(2) $$\begin{cases} g(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{para } z \neq z_0 \\ g(z_0) = f'(z_0) & \end{cases}$$

y mostremos que esta función es analítica en D. Esto resulta evidente para $z \neq z_0$ (3.4.2); queda por ver lo que pasa en un entorno del punto z_0. Por consiguiente, sea Δ: $\|z-z_0\| < r$ un disco contenido en D, en el cual la serie de Taylor

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \ldots$$

es convergente (3.2.5). La definición (4.7.1.(2)) muestra que para todo $z \in \Delta$, g(z) es suma de la serie entera convergente en $z-z_0$

$$f'(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-1} + \ldots$$

por tanto g es analítica en D. Puesto que D es simplemente conexo, se obtiene

$$\int_\gamma g(z)dz = 0$$

por el teorema de Cauchy (4.5.3), lo que da, teniendo en cuenta que $z_0 \notin \gamma(I)$,

$$\int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz = 0, \text{ o también}$$

$$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-z_0} = f(z_0) \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i\ I(z_0;\gamma) f(z_0)$$

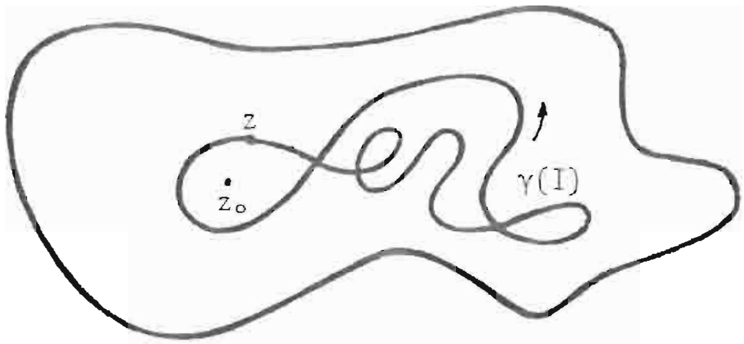

Figura 18

La fórmula de Cauchy resulta especialmente interesante -- cuando $I(z_0;\gamma) \neq 0$. Por ejemplo, si D contiene un disco cerrado $\|z-a\| \leq r$, se tiene, para todo punto z_0 del disco abierto $\|z_0-a\| < r$ del mismo centro y del mismo radio

(3) $$f(z_0) = \frac{1}{2\Pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-z_0}$$

donde γ es el lazo $t \to a + re^{it}$ definido en $[0,2\Pi]$ (4.6.8). Se tiene por consiguiente una fórmula explícita que da los valores de f en el disco $\|z_0-a\| < r$ cuando se les conoce sobre el círculo $\|z_0-a\| = r$.

Inversamente, las integrales del tipo que figura en el segundo miembro de (4.7.1.(1)) son funciones analíticas del parámetro z_0; de manera más general:

(4.7.2) Sea γ: $I = [b,c] \to \mathbb{C}$ un camino en $\mathbb{C}$ y sea g: $\gamma(I) \to \mathbb{C}$ una función definida y contínua en $\gamma(I)$ (no se supone a g definida fuera del conjunto $\gamma(I)$ y en última instancia, no se la supone analítica). Entonces la función

(1) $$f(z) = \int_\gamma \frac{g(u)du}{u-z}$$

está definida y es analítica en el conjunto abierto $\mathbb{C} - \gamma(I)$. De un modo más preciso, si hacemos

$$(2) \qquad c_n = \int_\gamma \frac{g(u)\,du}{(u-a)^{n+1}}$$

para todo punto $a \in \mathbb{C} - \gamma(I)$ y para todo entero $n \geq 0$, se tiene un desarrollo en serie entera convergente

$$(3) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

en todo el disco abierto de centro a y de radio igual a la distancia $d(a,\gamma(I))$ de a en el conjunto cerrado $\gamma(I)$. Por otra parte se tiene

$$(4) \qquad f^{(n)}(a) = n!\ c_n = n! \int_\gamma \frac{g(u)\,du}{(u-a)^{n+1}}$$

sea $\delta = d(a,\gamma(I)) > 0$ y supongamos que $\|z-a\| = q\delta$ para $0 \leq q < 1$. Como por definición se tiene

$$\delta = \inf_{u\varepsilon\gamma(I)} \|u-a\|$$

se tiene que $\|u-a\| \geq \delta$ para todo $u \varepsilon \gamma(I)$, y por consiguiente

$$\left\| \frac{z - a}{u - a} \right\| \leq q < 1$$

para todo $u \varepsilon \gamma(I)$ (Fig. 19). Podemos escribir, por tanto, para todo $u \varepsilon \gamma(I)$,

$$(5) \qquad \frac{1}{u-z} = \frac{1}{(u-a)\left(1 - \frac{z-a}{u-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}$$

donde la serie es convergente, con las mayoraciones

$$(6) \qquad \left\| \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}} \right\| \leq \frac{q^n}{\delta} \quad \text{para } n \geq 0.$$

Por definición, se tiene por tanto

$$f(z) = \int_b^c \frac{g(\gamma(t))\gamma'(t)dt}{\gamma(t)-z} = \int_b^c g(\gamma(t))\gamma'(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}} \right] dt$$

y las desigualdades (4.7.2.(6)) demuestran que cuando t recorre I, la serie integrada es normalmente convergente. En efecto, puesto que g es contínua y γ' contínua a trozos en $[b,c]$, existe un número M tal que

$$\| g(\gamma(t))\gamma'(t) \| \leq M$$

para todo $t \in I$, y por consiguiente

$$\left\| g(\gamma(t))\gamma'(t) \frac{(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}} \right\| \leq M\frac{q^n}{\delta}$$

para todo $t \in I$, lo que prueba nuestra afirmación. Integrando término a término, se obtiene el desarrollo en serie convergente

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \int_b^c \frac{g(\gamma(t))\gamma'(t)dt}{(\gamma(t)-a)^{n+1}}$$

es decir, (4.7.2.(3)).

Si $\|g(u)\| \leq M$ en $\gamma(I)$, se deduce de (4.7.2.(2)) una mayoración de los coeficientes c_n:

$$(7) \qquad \|c_n\| \leq \frac{ML}{\delta^{n+1}}$$

donde L es la longitud de la "curva" $\gamma(I)$ (véase 4.2.6.(2)).

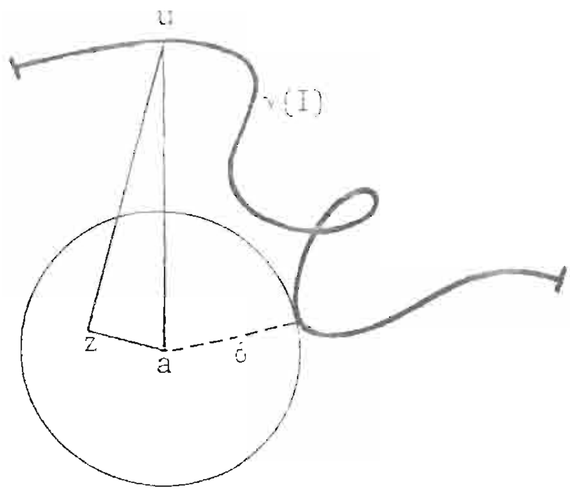

Figura 19

La combinación de (4.7.2) y la fórmula de Cauchy (4.7.1) permite responder a una pregunta planteada de manera natural - en (3.1.2):

TEOREMA 4.7.3

Si una función f es analítca en un conjunto abierto D, entonces para todo $a \in D$, la serie de Taylor de f en el punto a - es convergente y tiene por suma f(z) en todo el disco abierto de centro a y de radio igual a la distancia de a a $\mathbb{C} - D$ (dicho de otro modo, el mayor disco abierto de centro a contenido en D).

DEMOSTRACION

Si $0 < r < d(a, \mathbb{C} - D)$ es posible aplicar la fórmula de Cauchy (4.7.1.(1)) en el disco abierto $\|z-a\| < r$, tomando - $\gamma: t \to a + re^{it}$ en $0 \leq t \leq 2\Pi$, lo que da $I(a,\gamma) = 1$ (4.6.9). - Aplicando (4.7.2), se obtiene por tanto para f un desarrollo - en serie entera en z-a, convergente para $\|z-a\| < r$. Se sabe - por (3.2.5) que este desarrollo es necesariamente la serie de Taylor, y como t es arbitrariamente próximo a $d(a, \mathbb{C} - D)$, el -

teorema está demostrado.

En el capítulo V veremos que si no se hace ninguna hipótesis suplementaria sobre D ó f, el mayor disco abierto de centro a contenido en D es en general más pequeño que el disco de convergencia de la serie de Taylor de f en el punto a, es decir, este último "desborda" sobre D.

COROLARIO 4.7.4

Si f es una función entera, su serie de Taylor en todo punto $a \in \mathbb{C}$ es convergente en $\mathbb{C}$ completo.

OBSERVACION 4.7.5

Si se aplica la fórmula (4.7.2.(4)) al caso de (4.7.1), se ve que, bajo las hipótesis de (4.7.1), no solamente se tiene la fórmula (4.7.1.(1)), sino también, para todo entero $n \geq 1$

$$(1) \qquad I(x;\gamma) f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\Pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-x)^{n+1}}$$

para todo $x \notin \gamma(I)$; dicho de otro modo, en los puntos en que $I(x,\gamma) \neq 0$ están determinados explícitamente no sólo el valor de f, sino también el de todas sus derivadas por los valores de f en el conjunto $\gamma(I)$.

OBSERVACION 4.7.6

La consideración de valores complejos de la variable permite por si sola comprender fenómenos que serían sorprendentes si nos limitáramos a las funciones de variable real. Consideremos por ejemplo la función $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$. Si sólo se dan a z valores reales, se obtiene una función f(x) definida y contínua en $\mathbb{R}$, y, para cada punto $a \in \mathbb{R}$, en un intervalo abierto de centro a, f(x) es suma de una serie entera convergente en x-a, que no es otra que su serie de Taylor en a. Sin embargo, para cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ esta serie no es convergente en $\mathbb{R}$ completo, de lo contrario, la serie sería también convergente en $\mathbb{C}$ completo por el - lema de Abel y su suma sería una función entera g(z) que coincidiría con f(z) en un intervalo de $\mathbb{R}$, y por tanto, también en todo el conjunto abierto conexo $\mathbb{C} - \{i,-i\}$ donde f es analítica (3.3.8). Pero esto es absurdo puesto que $\|f(z)\|$ tiende a $+\infty$ cuando z tiende a i ó a -i en $\mathbb{C} - \{i,-i\}$ mientras que g sería contínua en estos puntos. La razón de este comportamiento de - las series de Taylor de la función de variable real $\frac{1}{x^2+1}$, que sin embargo es analítica en todo punto de $\mathbb{R}$, procede de que esta función no puede ser prolongada en una función entera de variable compleja (es decir, una función analítica en todo punto de $\mathbb{C}$); la función f(z) tiene, como se dirá en el capítulo V, - "singularidades" en los puntos $\pm$ i, que evidentemente no pueden aparecer mientras se consideren solamente valores reales de la variable.

§ 8. DESIGUALDADES DE CAUCHY. EL TEOREMA DE LIOUVILLE.

TEOREMA 4.8.1 (Desigualdades de Cauchy).

Sea f una función analítica en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$; sean a un punto de D, Δ: $\|z-a\| \leq r$ un disco cerrado de centro a contenido en D y sea M el extremo superior de $\|f(z)\|$ sobre el círculo Γ: $\|z-a\| = r$, frontera de Δ. Entonces para todo en tero $n \geq 0$, se tiene

$$(1) \qquad \left\| f^{(n)}(a) \right\| \leq \frac{n!M}{r^n}$$

con el convenio de que $f^{(0)} = f$.

DEMOSTRACION

En efecto, apliquemos la fórmula (4.7.5.(1)), tomando por γ el lazo

$$t \to a + re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\Pi) \quad y \ x = a;$$

se obtiene

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\Pi r^n} \int_0^{2\Pi} f(a + re^{it}) e^{-nit} dt$$

y puesto que $\|e^{-nit}\| = 1$ la desigualdad (4.8.1.(1)) es una consecuencia inmediata del teorema del valor medio (4.2.4).

TEOREMA 4.8.2 (TEOREMA DE LIOUVILLE)

Una función entera acotada en todo $\mathbb{C}$ es necesariamente constante.

DEMOSTRACION

En efecto, sea $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ una función entera, siendo la serie entera convergente en $\mathbb{C}$ (4.7.4). Si $\|f(z)\| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$, se puede aplicar (4.8.1.(1)) tomando por Δ un disco abierto de centro 0 y de radio r arbitrariamente grande; se tiene por tanto, para todo $n \geq 1$,

$$\|c_n\| \leq \frac{M}{r^n}$$

Pero cuando r tiende a $+\infty$, el segundo miembro tiende a cero - (puesto que $n \geq 1$) y como el primer miembro es independiente de r se tiene necesariamente $c_n = 0$ para todo $n \geq 1$, y por tanto $f(z) = c_0$ en $\mathbb{C}$.

OBSERVACION 4.8.3

En este caso tampoco existe un resultado análogo a (4.8.1) ó (4.8.2) cuando nos limitamos a valores reales de la variable. Por ejemplo, la función entera sen kz es tal que $|\operatorname{sen} kx| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pero no existe mayoración de su derivada en $\mathbb{R}$, que sólo dependa del extremo superior de la función en $\mathbb{R}$; por otro lado, esta función está acotada en $\mathbb{R}$ sin ser constante.

§ 9. CONDICIONES DE CAUCHY

DEFINICION 4.9.1

Llamaremos integral dependiente de un parámetro a una función de la forma

$$(1) \qquad I(t) = \int_a^b F(x,t)\, dx$$

donde F es una función de dos variables reales variando x en - un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, estando t en un intervalo abierto J de $\mathbb{R}$; F puede ser una función vectorial y es preciso para cada valor de $t \in J$, suponer $x \to F(x,t)$ contínua - por intervalos. Admitiremos los dos siguientes teoremas (propiedades de las integrales dependientes de un parámetro):

TEOREMA 4.9.2

Si la función de dos variables $(x,t) \to F(x,t)$ es contínua en el producto $[a,b] \times J \subset \mathbb{R}^2$, entonces $I(t)$ es contínua en J.

TEOREMA 4.9.3

Si la derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial t}$ (x,t) existe para todo punto de $[a,b] \times J$ y es contínua en este producto, entonces I(t) admite una derivada contínua en J, dada por la fórmula de Leibiz de "derivación bajo el signo $\int$":

$$(1) \qquad I'(t) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)dx$$

Estos teoremas se generalizan cuando hay varios parámetros: si

$$I(t,s) = \int_a^b F(x,t,s)dx$$

donde la función de tres variables $(x,t,s) \to F(x,t,s)$ es contínua, entonces $(t,s) \to I(t,s)$ es función contínua de dos variables.

Es interesante observar que el único hecho de ser continuamente diferenciable caracteriza las funciones analíticas de una variable compleja:

TEOREMA 4.9.4

Toda función compleja definida y continuamente derivable en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$ es analítica en D (y por consiguiente derivable en D).

DEMOSTRACION

Sea f una función continuamente derivable en D y probemos para todo disco cerrado Δ: $\|z-a\| \leq r$ contenido en D (Fig. 20), f(z) es igual a la suma de una serie entera convergente en z-a en el disco abierto $\|z-a\| < r$. Si se considera el lazo $\gamma: t \to a + re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\Pi)$, bastará, en virtud de (4.7.2), demostrar que para z tal que $\|z-a\| < r$ se tiene

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\gamma} \frac{f(u)du}{u-z}$$

Para ello, hagamos, para $0 \leq \lambda \leq 1$

$$(2) \qquad g(\lambda) = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z+\lambda(u-z))}{u-z}\,du$$

(Fig. 17); se tiene entonces

$$g(1) = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\gamma} \frac{f(u)du}{u-z}\ ,$$

$$g(0) = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)du}{u-z} = f(z)\cdot \frac{1}{2\Pi i}\int_{\gamma} \frac{du}{u-z} = f(z)$$

puesto que $I(z;\gamma) = 1$ (4.6.9). Para probar (4.9.4.(2)) basta por tanto demostrar que la función g es constante en $[0,1]$. Se expresa de la forma

$$g(\lambda) = \frac{r}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} \frac{f(z+\lambda(a+re^{it}-z))}{a+re^{it}-z}\, e^{it}dt.$$

Las propiedades de las integrales que dependen de un parámetro y la hipótesis de derivabilidad hecha sobre f demuestran que g es contínua en el intervalo cerrado $[0,1]$, y derivable en el intervalo abierto $]0,1[$, viniendo dada su derivada por la fórmula de derivación bajo el signo integral (4.9.3.(1))

$$(3) \qquad g'(\lambda) = \frac{r}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} f'(z+\lambda(a+re^{it}-z))e^{it}dt$$

pero se observa que se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f(z+\lambda(a+re^{it}-z))\right) = i\lambda re^{it}f'(z+\lambda(a+re^{it}-z)).$$

La fórmula (4.9.4(3)) da por tanto, para $0<\lambda<1$,

$$g'(\lambda) = \frac{1}{2\pi i\lambda}\, f(z+\lambda(a+re^{it}-z))\Big|_0^{2\pi} = 0$$

lo que demuestra que g es constante en el intervalo abierto $]0,1[$, y como es contínua en el intervalo cerrado $[0,1]$ se tiene $g(0) = g(1)$.

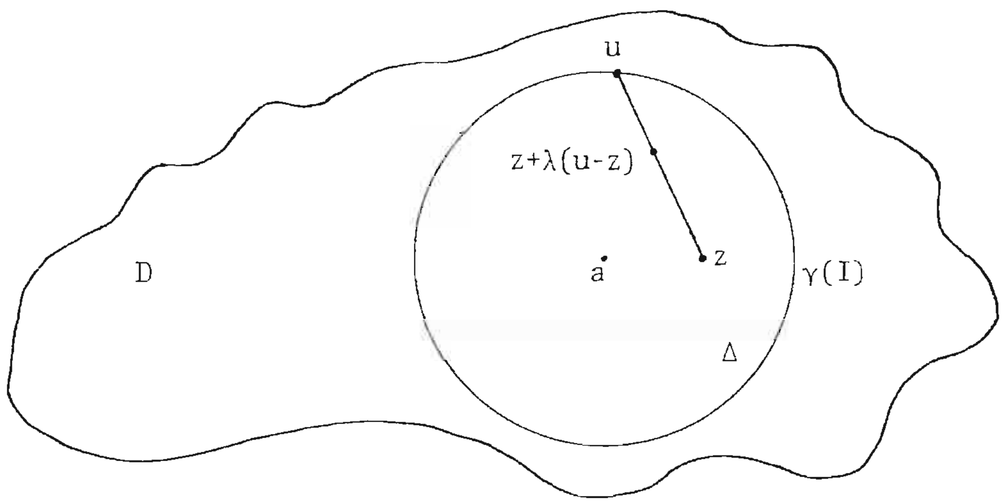

Figura 20

OBSERVACION 4.9.5

Es de observarse también aquí la diferencia de comportamiento entre las funciones de una variable compleja y las funciones de una variable real. Una función de una variable real puede perfectamente ser continuamente diferenciable sin tener incluso segunda derivada, como lo demuestra el ejemplo de la función $x|x|$.

TEOREMA 4.9.6

Condición necesaria para que una función $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ sea analítica en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$ es que existan las derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ y éstas satisfagan las condiciones de Cauchy.

DEMOSTRACION

Toda función compleja (analítica o no) definida en un -- abierto $D \subset \mathbb{C}$ puede escribirse

(1) $\quad f(x + iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$

donde P y Q son funciones reales definidas en D, e inversamente, para todo par de dichas funciones, la fórmula (4.9.6.(1)) define una función compleja en D; decir que f es contínua en D equivale a decir que P y Q lo son. Suponiendo a f contínua, busquemos las condiciones de P y Q para que f admita en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$ una derivada respecto a la variable compleja z. Por definición (3.2.1), la expresión

(2) $$\frac{P(x_0 + s, y_0 + t) + iQ(x_0 + s, y_0 + t) - P(x_0, y_0) - iQ(x_0, y_0)}{s + it}$$

debe tender a un límite cuando (s,t) tiende a $(0,0)$ en $\mathbb{R}^2$ permaneciendo $\neq (0,0)$ y forzosamente debe tender a un mismo límite a lo largo de cada recta $\alpha s + \beta t = 0$ que pasa por el origen. Tomenos en particular como rectas los dos ejes de coordenadas: si se hace $t = 0$ y se escribe que (4.9.6.(2)) tiende a un límite cuando s tiende a 0, se encuentra que las derivadas parciales

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) \quad y \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$$

deben existir y que el límite tiene por valor

$$(3) \qquad \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Si además se escribe que (4.9.6.(2)), donde se ha hecho $s = 0$, tiende a un límite cuando t tiende a 0, se encuentra que las derivadas parciales

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \quad y \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)$$

deben existir y que el límite es

$$(4) \qquad -\,i\,\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Comparando los valores encontrados, se ve que las derivadas parciales de P y Q deben verificar las condiciones de Cauchy

$$(5) \qquad \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0); \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -\,\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Recíprocamente, se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA 4.9.7

Supongamos que las funciones P y Q admiten derivadas parciales de primer orden contínuas en D y que estas derivadas verifican idénticamente en D las condiciones de Cauchy

$$(1) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\,\frac{\partial Q}{\partial x};$$

entonces la función $f(x + iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ es analítica en D.

DEMOSTRACION

Basta probar que en todo punto (x_0, y_0), el límite de -(4.9.6.(2)) existe; la función $f(z)$ tendrá entonces una derivada en todo punto de D, y la expresión (4.9.6.(3)) de esta derivada, unida a la hipótesis de continuidad de las derivadas parciales de P y Q, demostrará que $f'(z)$ es contínua en D, lo que permitirá para terminar, la aplicación de (4.9.4). Consideremos por tanto la diferencia

$$F(s,t) = P(x_0 + s, y_0 + t) + iQ(x_0 + s, y_0 + t) - P(x_0, y_0) - iQ(x_0, y_0) - (s + it)\left[\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)\right].$$

Se tiene entonces

$$Re(F(s,t)) = P(x_0 + s, y_0 + t) - P(x_0, y_0) - s\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

que, en virtud de las condiciones de Cauchy, podemos escribir

$$Re(F(s,t)) = P(x_0 + s, y_0 + t) - P(x_0, y_0) - s\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) - t\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$$

y de la misma forma se tiene

$$Im(F(s,t)) = Q(x_0 + s, y_0 + t) - Q(x_0, y_0) - s\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) - t\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Puesto que las derivadas parciales de primer orden de P y Q - son contínuas, se puede aplicar el teorema del valos medio: -- para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $r > 0$ tal que para $|s| \leq r$ y $|t| \leq r$, se tenga

$$|Re(F(s,t))| \leq \frac{\varepsilon}{2}|s + it|, \quad |Im(F(s,t))| \leq \frac{\varepsilon}{2}|s + it|$$

y por consiguiente

$$|F(s,t)| \leq |s + it|$$

lo que prueba la existencia del límite (4.9.6.(2)). Una fórmula equivalente y más breve de escribir (4.9.7.(1)) es:

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

(4.9.8) Cuando las funciones reales derivables continuamente P y Q, verifican en D las condiciones de Cauchy se deduce de -- (4.9.7) y del hecho de que una función analítica es indefinidamente diferenciable, que P y Q son ipso facto indefinidamente diferenciables en D y que se tiene

$$f^{(n)}(x+iy) = \frac{\partial^n Q}{\partial x^n} + i\,\frac{\partial^n Q}{\partial x^n} = (-i)^n \left\{\frac{\partial^n P}{\partial y^n} + i\,\frac{\partial^n Q}{\partial y^n}\right\}$$

Por otra parte, las funciones $\frac{\partial^n P}{\partial x^n}$ y $\frac{\partial^n Q}{\partial x^n}$ (lo mismo que $\frac{\partial^n P}{\partial y^n}$ y $\frac{\partial^n Q}{\partial y^n}$) verifican a su vez las condiciones de Cauchy; en particular, se tiene para n = 1

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \;; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$$

y puesto que $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$, se obtiene para P la ecuación de Laplace

(1) $$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y} = 0$$

y se verifica de manera similar que Q (que además es la parte real de - if), es también solución de esta ecuación.

Inversamente, una función P derivable dos veces que verifica en D la ecuación de Laplace (4.9.8.(1)) no es forzosamente la parte real de una función analítica en D.

PROPOSICION 4.9.9

Sea $P(x,y)$ una función dos veces continuamente diferenciable en un cuadrado D: $|x - x_o| < r$, $|y - y_o| < r$ y que verifique en D la ecuación de Laplace. Entonces existe una función analítica f en D tal que $\mathrm{Re}(f(x + iy)) = P(x,y)$ y todas las funciones que tengan esta propiedad son de la forma $f + c$, donde c es una constante.

DEMOSTRACION

Obsérvese que si $\mathrm{Re}(f(x + iy)) = P(x,y)$, se tiene, en virtud de las condiciones de Cauchy y de (4.9.6.(3)), $f'(x + iy) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ y la última afirmación se deduce de (4.3.2), siendo D conexo. Para porbar la existencia de f, en virtud de (4.9.4), basta demostrar que existe una función contínuamente diferenciable $Q(x,y)$ en D, que verifique las condiciones de Cauchy (4.9.6.(5)), luego, se define una tal función por la fórmula

$$Q(x_o + s, y_o + t) = -\int_0^s \frac{\partial P}{\partial y}(x_o + u, y_o)\,du + \int_0^t \frac{\partial P}{\partial x}(x_o + s, y_o + v)\,dv$$

En efecto, se tiene utilizando la fórmula de derivación bajo el signo de integración (4.9.3.(1))

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x_o + s, y_o + t) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_o + s, y_o + t)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_o + s, y_o + t) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_o + s, y_o) + \int_0^t \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x_o + s, y_o + v)\,dv$$

Pero en virtud de la ecuación de Laplace

$$\int_0^t \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x_0+s,y_0+v)dv = -\int_0^t \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x_0+s,y_0+v)dv$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0+s,y_0+t) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0+s,y_0)$$

lo cual, demuestra la proposición.

§ 10. EL TEOREMA DE CONVERGENCIA DE WEIERSTRASS

DEFINICION 4.10.1

Si f es una función definida en un intervalo abierto $]a,b[$ (a y b finitos o infinitos) y contínua a trozos (es decir, contínua por intervalos en todo intervalo cerrado y acotado $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$), se dice que la integral impropia $\int_a^b f(t)dt$ es igual a $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$, para un $a < c < b$, suponiendo que cada una de estas integrales impropias existan; es claro que esta definición no depende de la elección de c.

Es de hacerse notar aquí que cuando una función f contínua a trozos está definida en un intervalo acotado $[a,b]$, se escribe a menudo $\int_a^b f(t)dt$ bajo la forma $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ conviniendo que se prolonga por 0 la función f en $\mathbb{R}$ completo. La convergencia de estas integrales es evidente.

TEOREMA 4.10.2

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones complejas definidas en un conjunto E tomando todos sus valores en un subconjunto cerrado y acotado F del plano complejo $\mathbb{C}$; sea por otra parte h una función compleja contínua en F. Entonces, si la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente hacia una función g en E, la su cesión $(h \circ f_n)_{n \geq 1}$ de las funciones compuestas, converge uniformemente en E hacia f ∘ g.

DEMOSTRACION

En efecto, se tiene $g(E) \subset F$; por otra parte, un teorema que admitiremos dice que para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que si z, z_0 son dos puntos de F tales que $\|z - z_0\| \leq \delta$, entonces se tiene $\|h(z) - h(z_0)\| \leq \varepsilon$. Pero por hipótesis existe un número n_0 que no depende más que de δ, tal que para $n \geq n_0$ se cumple $\| g(x) - f_n(x)\| \leq \delta$ para todo $x \in E$. Se tiene por tanto $\| h(g(x)) - h(f_n(x))\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in E$ y todo $n \geq n_0$, de donde se deduce nuestra afirmación.

TEOREMA 4.10.3

Sea $I = [a,b]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ y sea $(g_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones complejas contínuas a trozos en I, que converge uniformemente en I hacia una función fragmentariamente contínua f. Entonces se tiene

$$(1) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_a^b g_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

DEMOSTRACION

Debemos probar que dado un número $\varepsilon > 0$, existe un entero n_0, que sólo depende de ε tal que para $n \geq n_0$, se cumpla

$$(2) \qquad \left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b g_n(t)dt \right| \leq \varepsilon$$

En efecto, aplicando el teorema del valor medio (4.2.4), se tiene

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g_n(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t) - g_n(t)|dt$$

La hipótesis de convergencia uniforme implica que existe un entero n_0 que sólo de ε, tal que, para $n \geq n_0$ y para todo $t \in I$, se cumpla

$$|f(t) - g_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

En virtud del teorema del valor medio (4.2.3.(4)) se tiene por tanto la desigualdad (4.10.2.(2)) para todo $n \geq n_0$, lo cual prueba el teorema.

TEOREMA 4.10.4 (Teorema de convergencia de Weierstrass)

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones analíticas en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$, y supongamos que para todo disco cerrado $\Delta \subset D$, la sucesión $\left(f_n(z)\right)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en Δ a un límite $f(z)$. Entonces la función f es analítica en D y para todo disco cerrado Δ contenido en D, y todo entero $k \geq 1$, la sucesión de las derivadas $\left(f_n^{(k)}(z)\right)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en Δ hacia $f^{(k)}(z)$.

DEMOSTRACION

Sea en efecto Δ: $\|z-z_0\| \leq r$ un disco cerrado contenido en D, y γ el lazo $t \to z_0 + re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\Pi)$; siendo la función f contínua en D, puesto que un límite uniforme de funciones contínua es contínuo, para probar que es analítica en el disco abierto $\|z-z_0\| < r$, basta demostrar que para todo punto z de este disco se tiene

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\Pi i}\int_\gamma \frac{f(u)du}{u-z}$$

en virtud de (4.7.2). Por consiguiente se tiene, por la fórmula de Cauchy (4.7.1)

$$f_n(z) = \frac{1}{2\Pi i}\int_\gamma \frac{f_n(u)du}{u-z} = \frac{r}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} \frac{f_n(z_o+re^{it})e^{it}dt}{z_o + re^{it}-z}$$

Pero, para z fijo, la sucesión de funciones $t \to \dfrac{f_n(z_o+re^{it})e^{it}}{z_o+re^{it}-z}$

converge uniformemente en $[0,2\Pi]$ hacia $t \to \dfrac{f(z_o+re^{it})e^{it}}{z_o+re^{it}-z}$, en efecto, se tiene

$$\|z - z_o - re^{it}\| \geq r - \|z-z_o\|$$

y por hipótesis, para todo $\varepsilon > 0$, existe un n_o tal que para - $n \geq n_o$ y para todo $t \in [0,2\Pi]$, se cumple

$$(2)\quad \left\|\frac{(f_n(z_o+re^{it}) - f(z_o+re^{it}))e^{it}}{z_o + re^{it}-z}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{r - \|z-z_o\|}$$

lo que demuestra nuestra afirmación. La relación (4.10.4.(1)) resulta entonces inmediatamente del paso al límite uniforme en una integral (4.10.3). Del mismo modo se obtiene la mayoración

$$(3)\quad \|f(z) - f_n(z)\| \leq \frac{\varepsilon r}{r-\|z-z_o\|}$$

para $n \geq n_o$, lo que prueba que bastaría suponer que la sucesión $(f_n(u))_{n\geq 1}$ converge uniformemente hacia $f(u)$ sobre el círculo $\|u-z_o\| = r$ para que se cumpliera la convergencia uniforme de la sucesión $(f_n(z))_{n\geq 1}$ hacia $f(z)$ en todo disco

$$\|z-z_o\| \leq r' \quad \text{donde } r' < r$$

Del mismo modo, partiendo de la relación (4.7.5.(1))

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(u)du}{(u-z)^{n+1}}$$

y de la fórmula análoga para $f^{(k)}(z)$, se obtiene la mayoración

$$\|f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)\| \leq \frac{k!\varepsilon r}{(r-\|z-z_0\|)^{n+1}}$$

para $n \geq n_0$, lo que demuestra la convergencia uniforme de $f_n^{(k)}(z)$ hacia $f^{(k)}(z)$ en todo disco $\|z-z_0\| \leq r'$ para $r' \leq r$.

Se puede considerar que el teorema de convergencia de Weierstrass generaliza el hecho de que una serie entera es una función analítica en su disco de convergencia (3.1.2). De igual forma, el siguiente resultado generaliza (4.7.2).

TEOREMA 4.10.5

Sea $\gamma: I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino en $\mathbb{C}$; sea por otra parte $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y supongamos dada una función compleja $(z,u) \to g(z,u)$ en $D \times \gamma(I)$, que tenga las siguientes propiedades:

1a) para todo $u \in \gamma(I)$, la función $z \to g(z,u)$ es analítica en D.

2a) las funciones $(z,u) \to g(z,u)$ y $(z,u) \to \frac{\partial g}{\partial z}(z,u)$ son contínuas en $D \times \gamma(I)$.

(Debe observarse que no existe ninguna relación necesaria entre los conjuntos D y $\gamma(I)$ en $\mathbb{C}$).

En estas condiciones, la función

(1) $f(z) = \int_\gamma g(z,u)du$

es analítica en D.

DEMOSTRACION

En efecto, hagamos

$$R(x,y) = f(x+iy) = \int_g^b g(x+iy,\gamma(t))\gamma'(t)dt;$$

las propiedades de las integrales dependientes de un parámetro demuestran que R es contínua y tiene derivadas parciales contínuas de primer orden

$\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$ y que se cumple

$$\frac{\partial R}{\partial x} + i\,\frac{\partial R}{\partial y} = \int_a^b \left\{ \frac{\partial}{\partial x} g(x+iy,\gamma(t)) + i\,\frac{\partial}{\partial y}\, g(x+iy,\gamma(t)) \right\} \gamma'(t)dt = 0$$

lo que demuestra (4.10.5).

El teorema de Weierstrass (4.10.4) permite extender (4.10.5) a integrales más generales.

DEFINICION 4.10.6

Llamaremos caminos sin fin en $\mathbb{C}$ a una aplicación γ: I = $]a,b[\longrightarrow \mathbb{C}$ definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ - (acotado o no) y tal que para todo intervalo cerrado $[c,d]$ contenido en I, la restricción de γ a $[c,d]$ sea un camino (en el sentido definido en § 1); no se supone que $\gamma(t)$ tienda hacia - un límite cuando t tiende a a ó a b.

DEFINICION 4.10.7

Si γ es un camino sin fin y f es una función compleja contínua en $\gamma(I)$, se llama integral de f a lo largo del camino -- sin fin γ, a la integral impropia (4.10.1)

$$\int_{\gamma} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

(cuando existe), que se sigue denominando $\int_{\gamma} f(z)dz$.

TEOREMA 4.10.8

Sea $\gamma: I =]a,b[\longrightarrow \mathbb{C}$ un camino sin fin en $\mathbb{C}$; sea además $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y supongamos dada una función compleja $(z,u) \to g(z,u)$ en $D \times \gamma(I)$, que tenga las propiedades 1a. y 2a. de (4.10.5) y que verifique por otra parte la siguiente condición:

3a) Cualesquiera que sean el disco cerrado $\Delta \subset D$, el intervalo cerrado $J \subset I$ y el número $\varepsilon > 0$, existe un intervalo cerrado $[c_o,d_o] \subset I$ conteniendo a J, tal que, si γ_o es la restricción de γ en $[c_o,d_o]$, se tenga para todo $z \in \Delta$,

$$\left\| \int_{\gamma} g(z,u)du - \int_{\gamma_o} g(z,u)du \right\| \leq \varepsilon.$$

En estas condiciones, la función $f(z) = \int_{\gamma} g(z,u)du$ es analítica en D.

DEMOSTRACION

Aplicando la hipótesis para $\varepsilon = \frac{1}{n}$ para todos los enteros $n > 1$, se obtiene una sucesión de caminos $\gamma_n: [c_n,d_n] \longrightarrow \mathbb{C}$, restricciones de γ en los intervalos $[c_n,d_n] \subset I$, donde $c_n \to a$ y $d_n \to b$, tales que

$$\left\| \int_{\gamma} g(z,u)du - \int_{\gamma_o} g(z,u)du \right\| \leq \frac{1}{n}$$

para todo $z \in \Delta$. Como en virtud de (4.10.5) la función $f_n(z) = \int_{\gamma_n} g(z,u)du$

es analítica en D y converge uniformemente hacia $f(z)$ en Δ, f es analítica en D en virtud de (4.10.4).

OBSERVACION 4.10.9

Bajo las hipótesis de (4.10.4), supongamos que para todo disco cerrado $\Delta \subset D$, los conjuntos $f_n(\Delta)$ estén todos contenidos en un conjunto cerrado y acotado $F \subset \mathbb{C}$, y sea u una función analítica en un conjunto abierto E que contiene a F. Entonces la sucesión de las funciones compuestas $u \circ f_n$ (analítica en D) converge uniformemente en todo disco cerrado $\Delta \subset D$ en virtud de (4.10.2), y tiene por límite la función analítica $u \circ f$.

Capítulo V

TEORIA DE RESIDUOS

§ 1. PROLONGACION ANALITICA Y SINGULARIDADES

Si f es una función analítica en un conjunto abierto conexo $D \subset \mathbb{C}$ y si z_0 es un punto de D, se sabe que la serie de Taylor de f en el punto z_0 converge en el mayor disco abierto Δ: $\|z-z_0\| < r$ de centro z_0 contenido en D(4.7.3); pero, como ya se ha señalado, puede suceder que el disco de convergencia de esta serie sea mayor que Δ (Fig. 21), y este será el caso más frecuente.

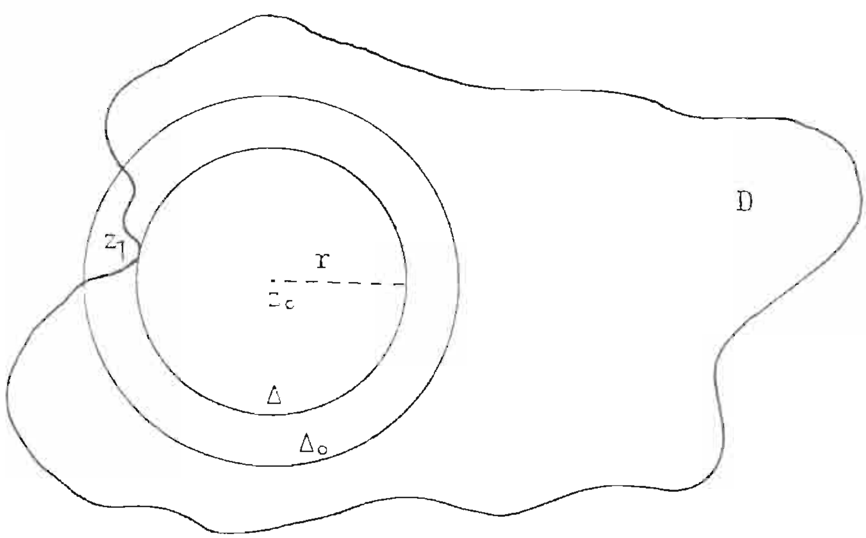

Figura 21.

Puesto que la frontera $\|z-z_0\| = r$ de Δ contiene por lo menos un punto z_1 de la frontera de D, se ve que existe una función g, analítica en el conjunto abierto (no vacío ya que z_1 es punto frontera de D) $\Delta_0 \cap D$.

La discusión precedente nos lleva a distinguir de manera general, entre los puntos frontera z_1 de D, dos clases de puntos:

DEFINICION 5.1.1

Diremos que z_1 es regular (para f) si existe un conjunto abierto conexo Δ_o que contenga a z_1 y una función analítica g en Δ_o, que coincide con f en un conjunto abierto $D_1 \subset D \cap \Delta_o$, del cual z_1 es punto frontera. Si no es así, diremos que z_1 es singular para f.

Cabe pensar que cuando z_1 es un punto frontera de D, regular para f, se puede (con las notaciones precedentes) prolongar la función analítica f al conjunto abierto $D \cup \Delta_o$ más grande que D, considerando la función igual a f en D y a g en Δ_o. Esto es posible cuando f y g coinciden en $D \cap \Delta_o$ completo; y este será automáticamente el caso en que $D \cap \Delta_o$ es conexo en virtud del principio de polongación analítica (3.3.7).

Pero puede suceder que z_1 sea un punto regular para f, que la intersección $D \cap \Delta_o$ no sea conexa (Fig. 22) y que f y g no coincidan en toda esta intersección completa, aunque por definición, coincidan en una parte abierta conexa de $D \cap \Delta_o$ de la cual z_1 es punto frontera; y puesto que una función no puede tener más que un valor en un punto, no es posible definir una función en $D \cup \Delta_o$ como se ha sugerido anteriormente.

Los ejemplos de este fenómeno, donde no es posible prolongar f, por más pequeño que sea el conjunto abierto Δ_o conteniendo a z_1, y aunque z_1 sea regular, no serán tratados en el presente trabajo.

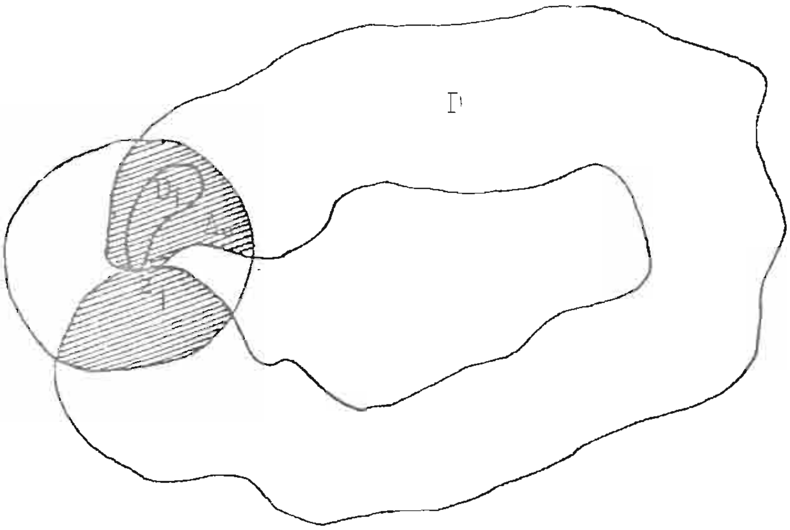

Figura 22

La posibilidad de la prolongación analítica de f en un abierto mayor que D, depende por tanto a la vez de f y de la geometría de D. Por ejemplo, cuando D es un disco abierto, o un semiplano abierto, o el interior de un rectángulo, $D \cap \Delta_o$ es conexo para todo disco abierto Δ_o que tenga por centro un punto frontera cualquiera z_1 de D, y si z_1 es regular para f, se puede por tanto prolongar f a $D \cup \Delta_o$ para un disco Δ_o bastante pequeño.

PROPOSICION 5.1.2

Sea $f(z) = c_o + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$ una serie entera en z, cuyo radio de convergencia $R > 0$ es finito. Entonces existe por lo menos un punto frontera del disco de convergencia D: $\|z - z_o\| < R$ de la serie que es singular para f.

DEMOSTRACION

Razonando por reducción al absurdo, supongamos lo contrario; entonces, para todo punto frontera u de D (tal que $\|u\| = R$), existiría un disco abierto Δ_u de centro u y de radio mayor que cero, tal que hubiera una función analítica g_u en Δ_u coincidente con f en $D \cap \Delta_u$. Además para dos puntos distintos y, u' tales que $\|u\| = \|u'\| = R$, si la intersección $\Delta_u \cap \Delta_{u'}$ no es vacía, las funciones g_u y $g_{u'}$ coinciden en $\Delta_u \cap \Delta_{u'}$: en efecto, la intersección $D \cap \Delta_u \cap \Delta_{u'}$ es un conjunto abierto no vacío (Fig. 23) en el cual por hipótesis las funciones g_u y $g_{u'}$ coinciden con f, y puesto que $\Delta_u \cap \Delta_{u'}$ es conexo, se tiene que f = g en virtud del principio de prolongación analítica (3.3.7)*. Sea entonces el conjunto abierto D', unión de D y de todos los Δ_u cuando u recorre el círculo $\|u\| = R$; se puede definir allí una función g por la condición de ser igual a f en D y a g_u en cada uno de los discos Δ_u; y puesto que en virtud de lo anterior, no se obtiene de esta forma más que un solo valor en un punto de D', esto define perfectamente una función en D', evidentemente analítica y que prolonga f. Por definición, los puntos del círculo $\|u\| = R$ pertenecen todos a D', por tanto el mayor disco abierto D_0 de centro 0 contenido en D' tiene un radio $R_0 > R$ (puesto que el círculo $\|u\| = R$ es compacto). La serie de Taylor de g en el punto 0 sería por tanto convergente en D_0 (4.7.3); pero esta serie es la misma que la de f, lo cual es contradictorio, de donde, nuestra conclusión.

---

* Fig. 23

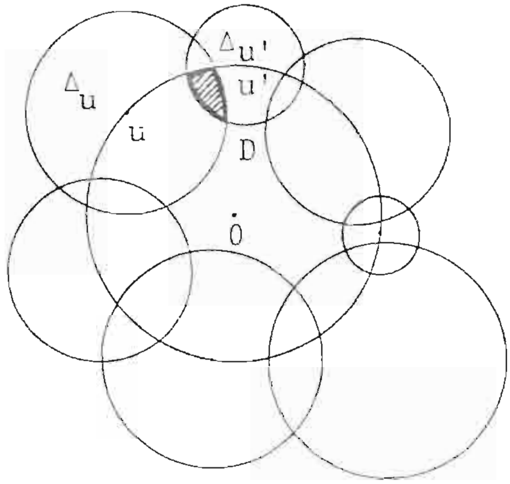

Figura 23.

OBSERVACION 5.1.3

Si f es una función analítica en un conjunto abierto conexo D, puede suceder que todos los puntos frontera de D sean singulares para f; cuando es así, no existe ninguna prolongación de f en una función analítica en un abierto mayor que D; se dice entonces que D es el "dominio natural de existencia" de la función f. Pero lo más corriente es que ciertos puntos frontera de D sean regulares y otros singulares. Estudiaremos a continuación un caso particular de las dificultades que puede presentar el problema de la prolongación analítica: el caso de los puntos frontera aislados.

§ 2. PUNTOS SINGULARES AISLADOS; LA SERIE DE LAURENT.

DEFINICION 5.2.1

Sea D un conjunto abierto en $\mathbb{C}$. Diremos que un punto frontera a un D es aislado si existe un disco abierto Δ: $\|z-a\| < r$ -

de centro a, el cual contenga todos los puntos pertenecientes a D excepto a.

Se puede demostrar que resulta lo mismo decir que en este disco no existe ningún punto frontera de D distinto de a.

Nos proponemos estudiar el comportamiento de las funciones analíticas en D en el entorno del punto a y podemos por tanto, limitarnos al caso en que $D = \Delta - \{a\}$.

Uno de dichos conjuntos abiertos es un caso particular de una corona abierta (o anillo abierto) S: $r_1 < \|z-a\| < r_2$, donde $0 \leq r_1 < r$ y generalmente vamoa a estudiar las funciones analíticas en una de dichas coronas (Fig. 24).

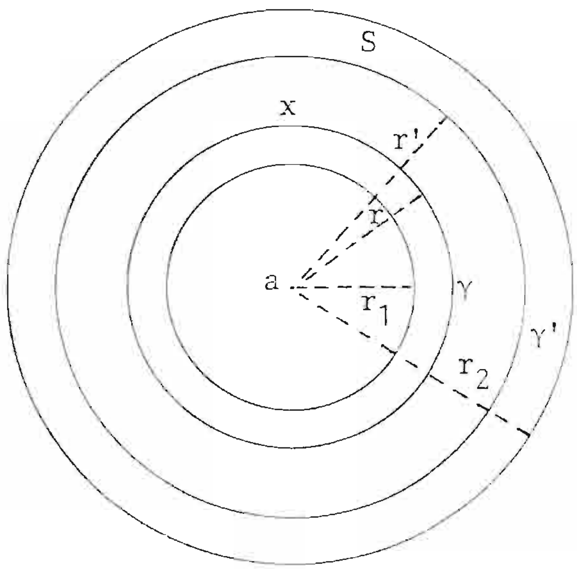

Figura 24.

PROPOSICION 5.2.2

Si S es una corona abierta, entonces S es un conjunto abierto conexo, pero no simplemente conexo.

DEMOSTRACION

En efecto, si $r_1 < r < r_2$ y si γ es el lazo $t \to a + re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\Pi)$, la integral $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ es igual a $2\Pi i$ (4.3.3), mientras que la función $1/(z-a)$ es analítica en S, luego, en virtud del teorema de Cauchy se tiene que S es no simplemente conexo.

En todo caso, se tiene el siguiente corolario del teorema de Cauchy:

COROLARIO 5.2.3

Sea S una corona abierta. Si $r_1 < r < r' < r_2$ y si se designa por γ y γ' los lazos $t \to a + re^{it}$ y $t \to a + r'e^{it}$, respectivamente $(0 \leq t \leq 2\Pi)$, entonces, para toda función f analítica en S se tiene

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma'} f(z)dz.$$

DEMOSTRACION

En virtud del teorema de Cauchy (4.5.3), basta probar que γ y γ' son homotopos como lazos en S. En efecto, si se considera la homotopía

$$\Phi(t,s) = a + (r(1-s) + s r')\, e^{it}$$

donde $0 \leq t \leq 2\Pi$ y $0 \leq s \leq 1$, el resultado es inmediato:

i) Si $t \in [0,2\Pi]$ es arbitrario, se tiene

$$\Phi(t,s) = a + re^{it} = \gamma(t), \text{ para } s = 0$$

$$\Phi(t,s) = a + r'e^{it} = \gamma'(t), \text{ para } s = 1$$

ii) Por otro lado, para $s \in [0,1]$ arbitrario se tiene:

$$\Phi(0,s) = a + (r(1-s) + sr') = \Phi(2\Pi,s).$$

De la proposición precedente se deduce la fórmula siguiente, que sustituye la fórmula de Cauchy (4.7.1), la cual no es aplicable en el conjunto no simplemente conexo S.

PROPOSICION 5.2.4

Sea f una función analítica en el anillo S: $r < \|z-a\| < r'$; con las mismas notaciones de (5.2.3), se tiene para S

$$(1)\quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(z)dz}{z-z_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-z_0}\ .$$

DEMOSTRACION

Si definimos todavía en S la función g(z) como en (4.7.1):

$$\begin{cases} g(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\ , & z \neq z_0 \\ g(z_0) = f'(z_0) \end{cases} ;$$

el mismo razonamiento que en (4.7.1) muestra que g es analítica en S. Por (5.2.3) se tendrá

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-z_0} - f(z_0)\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \int_{\gamma'} \frac{f(z)dz}{z-z_0} - f(z_0)\int_{\gamma'} \frac{dz}{z-z_0}$$

En virtud de la hipótesis de z_0 se tiene

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = 0 \quad y \quad \int_{\gamma'} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$$

por (4.6.8), de donde se obtiene (5.2.4.(1)).

De este resultado se deduce un desarrollo en serie que -- sustituye al desarrollo de Taylor:

TEOREMA 5.2.5 (Teorema de Laurent)

Sea f una función analítica en un anillo S alrededor de - un punto a. Entonces para todo $z \in S$ se cumple

$$(1)\qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n},$$

donde la serie entera $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ es convergente para $\|z-a\| < r_2$, y la serie entera en $\frac{1}{z-a}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}$ es convergente para $\|z-a\| > r_1$, y los coeficientes vienen dados por las fórmulas

$$(2)\qquad c_n = \frac{1}{2\Pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad d_n = \frac{1}{2\Pi i} \int_{\gamma} f(z)(z-a)^{n-1} dz$$

válidas para todo lazo $\gamma: t \to a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\Pi$ para $r_1 < r < r_2$ (desarrollo de Laurente de f en S).

DEMOSTRACION

En efecto, sea $z \in S$ un punto cualquiera; puesto que $r_1 < \|z-a\| < r_2$, es posible encontrar dos números r, r' tales que $r_1 < r < \|z-a\| < r' < r_2$. Por (4.7.2) resulta entonces que se tiene

$$\frac{1}{2\Pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(u)\,du}{u-z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

donde $c_n = \frac{1}{2\Pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(u)\,du}{(u-a)^{n+1}}$

siendo además la serie convergente para $\|z-a\| < r'$. Por otro lado, para $\|u-a\| = r$, podemos escribir

$$(3)\qquad \frac{1}{u-z} = -\frac{1}{z-a}\left[\frac{1}{1-\frac{u-a}{z-a}}\right] = -\left(\frac{1}{z-a} + \frac{u-a}{(z-a)^2} + \dots + \frac{(u-a)^{n-1}}{(z-a)^n} + \dots\right)$$

donde la serie es convergente, para

$$(4)\quad \left\| \frac{(u-a)^{n-1}}{(z-a)} \right\| = \frac{r^{n-1}}{\|z-a\|^{n}} = \frac{1}{r}\left\| \frac{r}{z-a} \right\|^{n}$$

Como la función f es contínua, y en consecuencia, acotada en - el círculo $\|u-a\| = r$ la serie de término general

$$\frac{r^n f(a+re^{it})\, e^{nit}}{(z-a)^n}$$

es normalmente convergente (2.1.9) para $0 \leq t \leq 2\Pi$ en virtud - de (5.2.5.(4)); luego, integrando esta serie término a término, se obtiene

$$-\frac{1}{2\Pi i}\int_{\gamma} \frac{f(u)\,du}{u-z} = \sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{(z-a)^n}$$

para

$$d_n = \frac{1}{2\Pi i}\int_0^{2\Pi} ir^n f(a+re^{it})e^{nit} = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\gamma} f(u)(u-a)^{n-1}du$$

siendo la serie convergente para $\|z-a\| > r$. Teniendo en cuenta (5.2.3) y el hecho de que las funciones $f(z)/(z-a)^{n+1}$ y -- $f(z)(z-a)^{n-1}$ son analíticas en S, se ve que en las expresiones de c_n y d_n dadas anteriormente, es posible reemplazar los ra-- dios r y r' por cualquier número r" tal que $r_1 < r'' < r_2$. Se - ve por tanto que las series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}$ conver-- gen para $\|z-a\| < r_2$ y $\|z-a\| > r_1$, respectivamente. Luego, de lo anterior y de (5.2.4.(1)) se deduce la fórmula (5.2.5.(1)).

PROPOSICION 5.2.6

Si S es una corona abierta y f una función analítica en S, entonces el desarrollo de Laurent de f en S es único.

DEMOSTRACION

Supongamos que el desarrollo de Laurent de f en S no es único. Sea entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d'_n}{(z-a)^n}$$

uno de tales desarrollos. Implícitamente está supuesta la convergencia de las dos series enteras, lo que implica, por el lema de Abel, que para $r_1 < r' < r'' < r_2$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c'_n (z-a)^n$ converge normalmente para $\|z-a\| < r''$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d'_n}{(z-a)^n}$ converge normalmente para $\|z-a\| > r'$. Luego, para todo número r tal que $r_1 < r < r_2$ y todo entero m, se puede escribir

$$\int_\gamma f(z)(z-a)^m dz = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n \int_\gamma (z-a)^{m+n} dz + \sum_{n=1}^{\infty} d'_n \int_\gamma (z-a)^{m-n} dz$$

en virtud del proceso de integración término a término de una serie uniformemente convergente, donde γ es un lazo definido como en (5.2.5). Pero,

$$(1) \quad \int_\gamma (z-a)^p dz = r^{p+1} i \int_0^{2\Pi} e^{(p+1)it} dt = \begin{cases} 0, & \text{si } p \neq 1 \\ 2\Pi i, & \text{si } p = -1 \end{cases},$$

por tanto se obtiene perfectamente $c'_n = c_n$ para $n \geq 0$ y $d'_n = d_n$ para $n \geq 1$ en virtud de (5.2.5.(2)).

EJEMPLO 5.2.7

Sea $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$. Como f es analítica en el anillo $1 < \|z\| < 2$, f se puede representar en dicho anillo por medio de una serie de Laurent. El cálculo de los coeficientes se pue de simplificar mucho en este caso si en vez de utilizar las fórmulas (5.2.5.(2)) se sigue el procedimiento siguiente, basado en la unicidad del desarrollo de Laurent. En primer lugar expresamos f en la forma

(1) $$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)} .$$

Se tiene entonces:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{\frac{1}{z}}{(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} , \text{ para } \|z\| > 1$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{z}{2})} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n, \text{ para } \|z\| < 2.$$

Por consiguiente, se tiene para $1 < \|z\| < 2$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2^{n+1}})\ z^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\ \frac{1}{z^n}$$

donde $c_n = -\frac{1}{2^{n+1}}$, para $n = 0,1,2,\dots$; $d_n = -1$ para $n = -1,-2,\dots$.

§ 3. ESTUDIO DE UNA FUNCION ANALITICA EN EL ENTORNO DE UN PUNTO SINGULAR AISLADO.

(5.3.1) Si f es una función analítica en un "disco punteado" $\Delta - \{a\}$: $0 < \|z-a\| < r$ se puede, en virtud de la proposición anterior (5.2.6), asociarle de un modo único su desarrollo de Laurent. La función

(1) $$u(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{(z-a)^n}$$

se llama la <u>parte singular o parte principal de f en el punto</u>

$\underline{a}$, y puesto que esta serie converge para $z - a \neq 0$, la función

(2) $$v(a + \frac{1}{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n$$

es una función entera de la variable compleja x. La función $f(z) - u(z)$ es por tanto la restricción en $\Delta - \{a\}$ de una función analítica en Δ. Para una función f dada, los puntos frontera aislados se clasifican según la naturaleza de la parte singular correspondiente:

1º) Supongamos en primer lugar que u sea idénticamente nula, es decir, $d_n = 0 \; \forall \; n \geq 1$. Entonces se tiene para $\|z-a\| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Pero la función del segundo miembro es analítica en todo el disco abierto Δ: $\|z-a\| < r$, por tanto prolonga f a Δ. Inversamente, si f puede ser prolongada en una función analítica en Δ, el teorema de Cauchy (4.5.3) demuestra que $d_n = 0 \; \forall \; n \geq 1$. El caso que examinamos es por tanto aquel en que a es un punto frontera regular para f (sección 1), razón por la cual $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ es llamada la <u>parte regular de f en a</u>. Si f no es idénticamente nula, el número más pequeño $m \geq 0$ tal que $c_m \neq 0$ se llama <u>orden de f en el punto a</u> y se denota $w(a;f)$. Decir que $w(a;f) = 0$ significa por tanto que la función f(prolongada en Δ) no se anula en el punto a; si $w(a;f) = m$, donde $m \geq 1$, se puede escribir

$f(z) = (z-a)^m f_1(z)$, donde $f_1(z) \neq 0$, y se dice que a es un cero múltiple de orden m de f.

2º) Supongamos en segundo lugar que la función entera (5.3.1.(2)) sea un polinomio no idénticamente nulo, por tanto

$$(3)\quad u(z) = \frac{d_1}{z-a} + \frac{d_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{d_n}{(z-a)^n}$$

para $d_n \neq 0$. Diremos entonces que a es un polo múltiple de f - de orden n (polo simple, doble, etc., para n = 1,2,...). Similarmente, el número -n se denominará orden de f en el punto a, denotándose de igual forma; se puede escribir

$f(z) = (z-a)^{-n} f_1(z)$, para

$$(4)\quad f_1(z) = d_n + d_{n-1}(z-a) + \dots + d_1(z-a)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^{n+k}$$

donde la serie del segundo miembro es convergente en Δ; por lo tanto f_1 es analitica en Δ, y se tiene $f_1(a) \neq 0$.

3º) Consideremos como último caso, que la función entera (5.3.1.(2)) no sea un polinomio, es decir, se trata de una función entera trascendente; o sea, existen infinitos valores de n tales que $d_n \neq 0$. Diremos en este caso que a es un punto singular esencial aislado de f. Para toda función entera trascendente v, la función $v(\frac{1}{z})$ tiene por tanto z = 0 como punto singular esencial.

OBSERVACION 5.3.2

Cuando f es una función analítica definida en un conjunto abierto conexo $D \subset \mathbb{C}$, el orden de f en un punto frontera aislado a de D está definido cuando f no es idénticamente nula y - cuando a no es un punto singular esencial de f. Este número entero (positivo o negativo) w(a;f) se caracteriza en el siguiente teorema.

TEOREMA 5.3.3

Para que una función f analítica en D tenga un orden --- igual a m en el punto a, es necesario y suficiente que, cuando z tienda a a permaneciendo en D, $\|(z-a)^k f(z)\|$ tienda a 0 para $k > -m$, a $+\infty$ para $k < -m$. Se puede decir también que $-m$ es - el entero más pequeño k (positivo o negativo) tal que $(z-a)^k f(z)$ permanezca acotado cuando z tiende a a permaneciendo en D.

DEMOSTRACION

La necesidad de las condiciones del enunciado se deducen inmediatamente de que

$$\|(z-a)^k f(z)\| = \|z-a\|^{k+m}\|f_1(z)\|$$

donde f_1, siendo analítica y distinta de 0 en el punto a, tiende al límite finito $f_1(a) \neq 0$.

Para ver que la condición es suficiente, observamos en - primer lugar que implica que f no es idénticamente nula en D; todo consiste por tanto en demostrar que a no es un punto singular esencial para f, y basta para ello ver que los coeficientes d_n del desarrollo de Laurent de f en a son todos nulos para $n > -m$. Luego, con las notaciones de (5.2.5), se tiene

$$(1) \quad d_n = \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{nit}dt$$

donde $r > 0$ puede tomarse arbitrariamente pequeño. Por hipótesis, para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $r_\circ > 0$ tal que, para - $0 < r < r_\circ$ se tenga

$$\|f(a+re^{it})\| \leq \varepsilon r^{-n};$$

en virtud de (5.3.3.(1)) y del teorema de la media, se tiene -

por tanto $\|d_n\| < \varepsilon$ y como ε es arbitrario, $d_n = 0$.

El interés de este criterio reside en que permite determinar el orden de f en a sin conocer por anticipado el desarrollo de Laurent de f en este punto.

OBSERVACION 5.3.4

Es de observarse que si a es un punto singular esencial aislado de f, $\|(z-a)^k f(z)\|$ no puede permanecer acotado cuando z tiende a a para ningún valor del entero k, en razón de (5.3.3). El ejemplo de la función sen(1/z) (para a = 0) demuestra que f puede tener infinitos ceros en un entorno de a, de forma que para la función 1/f, a no es ya un punto singular aislado. Cuando además $f(z) \neq 0$ en D, el punto a es un punto singular esencial aislado de 1/f (sin lo cual a sería un polo o un cero de f); se ve por tanto que $\|(z-a)^k f(z)\|$ ya no puede permanecer acotado para nigún valor de k.

OBSERVACION 5.3.5

El cálculo de las derivadas de una función analítica f (no idénticamente nula), en un punto a (3.2.4.(3)) demuestra inmediatamente que el orden w(a;f) es el entero más pequeño m tal que se cumpla $f^{(k)}(a) = 0$, para $0 \leq k \leq m-1$ y es $f^{(m)}(a) \neq 0$.

EJEMPLOS 5.3.6

1) En la función $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ considerada en (5.2.7), z = a y z = 2 son polos de primer orden. En efecto, aplicando la descomposición (5.2.7.(1)) se obtiene:

i) $f(z) = -\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{1-(z-1)} = -\dfrac{1}{z-1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)(z-1)^n, (0 < \|z-1\| < 1)$

ii) $f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{1-(2-z)} = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(z-2)^n, \; (0 < \|z-2\| < 1)$

2) Sea la función

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots,$$

la cual está definida para todo $\|z\| > 0$, sin embargo el origen, a pesar de ser un punto singular no es un polo de f, ya que su parte principal contiene un número infinito de términos.

PROPOSICION 5.3.7

Sean D un conjunto abierto conexo en $\mathbb{C}$, a un punto frontera aislado de D, f y g dos funciones analíticas en D que admiten cada una un orden en el punto a. Entonces:

i) La función fg es analítica en D y admite en el punto a un orden tal que

(1) $w(a;fg) = w(a;f) + w(a;g)$.

ii) La función f+g es analítica en D; si no es idénticamente nula admite en a un orden tal que

(2) $w(a;f+g) \geq \inf(w(a;f), w(a;g))$.

Si además $w(a;f) \neq w(a;g)$, se tiene

(3) $w(a;f+g) = \inf(w(a;f), w(a;g))$.

iii) Existe un disco abierto Δ de centro a tal que $1/f$ es analítica en $\Delta - \{a\}$, y admite en el punto a un orden tal que

(4) $w(a;1/f) = - w(a;f)$.

DEMOSTRACION

Todo se deduce de (5.3.3) y de que, si $w(a;f) = m$ y $w(a;g) = n$, se tiene

$$f(z) = (z-a)^m f_1(z), \quad g(z) = (z-a)^n g_1(z)$$

donde f_1 y g_1 son analíticas en un disco abierto de centro a y tales que $f_1(a) \neq 0$, $g_1(a) \neq 0$.

La afirmación (i) es entonces inmediata; si por ejemplo $n \geq m$ se tiene

$$f(z) = (z-a)^m f_1(z), \quad g(z) = (z-a)^n g_1(z)$$

y siendo la función $f_1(z) + (a-z)^{n-m} g_1(z)$ analítica en un entorno de a, tiende al límite $f_1(a) \neq 0$ si $n > m$, a $f_1(a) + g_1(a)$ si $n = m$. Finalmente, en virtud del principio de los ceros aislados, existe un disco abierto Δ de centro a tal que $f_1(z) \neq 0$ en Δ; de donde (iii).

OBSERVACION 5.3.8

Dados un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$ y una sucesión (finita o no) de puntos a_n que son puntos frontera aislados de D, el conjunto D' unión de D y del conjunto de los a_n, sigue siendo un conjunto abierto en $\mathbb{C}$.

DEFINICION 5.3.9

En las mismas condiciones de (5.3.8), se dice (por abuso de lenguaje) que una función compleja f analítica en D es <u>meromorfa en D'</u> si cada una de las a_n es un punto regular o un polo de f. Es decir, cuando sus únicas singularidades en D sean polos, siendo analítica en los demás puntos de D.

Es claro que la suma y el producto de dos funciones meromorfas en D' siguen siendo meromorfas en D'. Si D' es conexo también se pueden disponer en una sucesión $(b_n)_{n \geq 1}$, finita o no, los ceros de una función meromorfa f no idénticamente nula en D'; si D'' es el conjunto complementario en D del conjunto - de las b_n, las a_n y las b_n siguen siendo puntos frontera aislados de D''. En efecto, el hecho de que las b_n sean aisladas no es otro que el principio de los ceros aislados y por otra parte, puesto que $\|f(z)\|$ tiende a $+\infty$ cuando z tiende a un polo a_n (5.3.3), existe un entorno de ese polo que no contiene ninguno de los ceros de f. Se deduce que la función 1/f sigue --- siendo meromorfa en D'.

§ 4. EL TEOREMA DE LOS RESTOS

TEOREMA 5.4.1

Sea $v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ una función entera en $\mathbb{C}$. Entonces, para todo $a \in \mathbb{C}$ y todo lazo $\gamma : I \to \mathbb{C}$ tal que $a \notin \gamma(I)$, se tiene

$$(1) \quad \int_\gamma v\left(\frac{1}{z-a}\right) dz = 2\pi i\, d_1\, I(a;\gamma).$$

DEMOSTRACION

Sea $\delta > 0$ la distancia de a a $\gamma(I)$; como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ es normalmente convergente para $\|z\| < 2/\delta$, la serie de término general

$$\frac{d_n \gamma'(t)}{(\gamma(t)-a)^n}$$

es normalmente convergente para $t \in I$. En virtud del proceso de integración término a término de una serie uniformemente convergente, se tiene entonces

$$\int_\gamma v\left(\frac{1}{z-a}\right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n} .$$

Luego, para $n = 0$ y $n \geq 2$, la función $\frac{1}{(z-a)^n}$ admite una primitiva $(1-n)(z-a)^{1-n}$ en $\mathbb{C} - \{a\}$, por tanto la integral

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n}$$

es nula (4.3.2) y la fórmula (5.4.1.(1)) resulta por tanto de la definición del índice (4.6.1).

Como consecuencia del resultado precedente se tiene la siguiente definición.

DEFINICION 5.4.2

Si a es un punto frontera aislado de un conjunto abierto conexo $D \subset \mathbb{C}$, y f es una función analítica en D, llamaremos resto de f en el punto a, denotado por $\mathrm{Res}_a f$, al coeficiente d_1 de $\frac{1}{z-a}$ en el desarrollo de Laurent de f en el punto a.

Es el único término que aporta una contribución no necesariamente nula en la integral $\int_\gamma f(z)dz$ en virtud de (5.4.1) y de (5.2.5), de ahí su nombre.

TEOREMA 5.4.3 (Teorema de los restos)

Sean $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto simplemente conexo, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto de puntos distintos de D, de forma que los a_k son puntos frontera aislados del conjunto abierto $D' = D - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Para toda función compleja f analítica en D' y todo lazo γ contenido en D', se tiene

$$(1) \qquad \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} I(a_k;\gamma) \operatorname{Res}_{a_k} f.$$

DEMOSTRACIÓN

Como f admite un desarrollo de Laurent en un entorno de cada uno de los puntos a_k, sea $u_k(z)$ la parte singular de f en el punto a_k (5.3.1), la cual es una función entera de $\frac{1}{z-a_k}$ -- (que puede además ser idénticamente nula). Consideremos la función

$$g(z) = f(z) - u_1(z) - u_2(z) - \dots - u_n(z)$$

que es analítica en D' y demostremos que los a_k son puntos regulares para g.

En efecto, sea Δ un disco abierto de centro a_k contenido en D y que no contenga ningún $a_j \neq a_k$; entonces podemos escribir en $\Delta - \{a_k\}$

$$g(z) = (f(z) - u_k(z)) - \sum_{j\neq k} u_j(z).$$

Como para $k \neq j$ el punto a_k es regular para $u_j(z)$, lo es también para $\sum_{j\neq k} u_j(z)$; por otra parte, por definición el punto a_k es regular para $f(z) - u_k(z)$ (5.3.1), por consiguiente lo es para g. Se puede por tanto prolongar g en una función analítica en D; como D es simplemente conexo, el teorema de Cauchy (4.5.3) nos da

$$\int_\gamma g(z)dz = 0$$

Por otra parte, de (5.4.1) se deduce que para cada k se tiene,

$$\int_{\gamma} u_k(z)dz = 2\pi i \cdot I(a;\gamma) \cdot \operatorname{Res}_{a_k} u_k$$

y por definición $\operatorname{Res}_{a_k} u_k = \operatorname{Res}_{a_k} f$; de donde la fórmula (5.4.3.(1)).

(5.4.4). EL CALCULO DE RESIDUOS

El cálculo del resto de una función f en un punto singular aislado a consiste en encontrar el primer término del desarrollo de Taylor de la función entera v tal que $v(\frac{1}{z-a})$ sea la parte singular de f en el punto a. En el caso particular en que a es un polo de orden m, se puede escribir

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a)^m}$$

donde f_1 es analítica en un entorno de a y $f_1(a) \neq 0$ (5.3.1); sustituyendo f(z) por su desarrollo de Laurent en el punto a, se ve que $\operatorname{Res}_a f$ es el coeficiente de $(z-a)^{m-1}$ en el desarrollo de Taylor de $f_1(z)$ en el punto a (5.3.1,(4)). Un caso que se presenta con mucha frecuencia es el de un polo simple, es decir, el caso en que

(1) $$f(z) = \frac{f_1(z)}{z-a}$$

para f analítica en el punto a y $f_1(a) \neq 0$; entonces se tiene

(2) $$\operatorname{Res}_a f = f_1(a).$$

La función f se presenta muchas veces en la forma

(3) $$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

donde P y Q son analíticas en el punto a, $P(a) \neq 0$ y a es un cero simple de Q; se tiene en este caso

(4) $$\operatorname{Res}_a f = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

puesto que se puede escribir $Q(z) = (z-a)Q_1(z)$, donde Q_1 es analítica en a y $Q_1(a) \neq 0$, y se tiene

$Q'(z) = Q_1(z) + (z-a)Q_1'(z)$, por tanto

$$Q'(a) = Q_1(a),$$

y como se tiene la fórmula (5.4.4.(1)) para $f_1 = \frac{P}{Q_1}$, de (5.4.4.(2)) se deduce (5.4.4.(4)).

OBSERVACION 5.4.5

Deberá tenerse cuidado en no aplicar estas fórmulas en forma mecánica, así como tampoco deberá asumirse que cuando $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{(z-a)^m}$ para $m \geq 2$ y $f_1(a) \neq 0$ se tenga que $\operatorname{Res}_a f = f_1(a)$.

EJEMPLOS 5.4.6

Para el caso en que a es un polo de orden m, existe una fórmula simple para d_1 dada por

$$d_1 = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z) \right].$$

Si m = 1 (polo simple) el resultado es muy sencillo y está dado por

$$d_1 = \lim_{z \to a} (z-a)\, f(z),$$

que es un caso particular del anterior con $m = 1$, teniendo en cuenta que $0! = 1$.

1) Si $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$, entonces $z = 1$ y $z = -1$ son polos de primero y segundo orden, respectivamente. Se tiene entonces:

i) $$\text{Res}_1 f = \lim_{z \to 1} (z-1) \left[\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right] = \frac{1}{4}$$

ii) $$\text{Res}_{-1} f = \text{Lím}_{z \quad -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left[(z-a)^2 \left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right) \right] = -\frac{1}{4}$$

2) si $f(z) = \dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$, f tiene un polo doble en $z = -1$ y polos simples en $z = \pm 2i$

i) $$\text{Res}_{-1} f = \lim_{z \to -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left[(z+1)^2 \cdot \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \right]$$

$$= \lim_{z \to -1} \frac{(z^2+4)(2z-2) - (z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2}$$

$$= -\frac{14}{25}$$

ii) $$\text{Res}_{2i} f = \lim_{z \to 2i} \left[(z-2i) \cdot \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)} \right]$$

$$= \frac{-4-4i}{(2i-1)^2(4i)}$$

$$= \frac{7+i}{25}$$

iii) $$\mathrm{Res}_{-2i} f = \lim_{z \to -2i} \left[(z+2i) \cdot \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)} \right]$$

$$= \frac{-4+4i}{(-2i+1)^2(-4i)}$$

$$= \frac{7-i}{25}$$

3) Si $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$, entonces $z = 0$ es una singularidad esencial, y del desarrollo conocido para e^u con $u = -1/z$, se tiene

$$e^{-1/z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

donde se ve que el resíduo de f en $a = 0$ es el coeficiente de $\frac{1}{z}$, igual a -1.

§ 5. APLICACION DEL TEOREMA DE LOS RESTOS AL CALCULO DE INTEGRALES.

(5.5.1) El teorema de los restos proporciona un método de gran eficacia para calcular integrales impropias

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx,$$

que se describe a continuación.

Se supone que f sea la restricción en $\mathbb{R}$ de una función (que seguiremos llamando f) que es analítica en un conjunto abierto $D' = D - \{a_1,\dots,a_n\}$, donde D contiene el semiplano cerrado $\text{Im}(z) \geq 0$, y las a_k son puntos del semiplano abierto -- $\text{Im}(z) > 0$. (Se puede reemplazar estos semiplanos por $\text{Im}(z) \leq 0$ e $\text{Im}(z) < 0$ respectivamente) (Fig. 25).

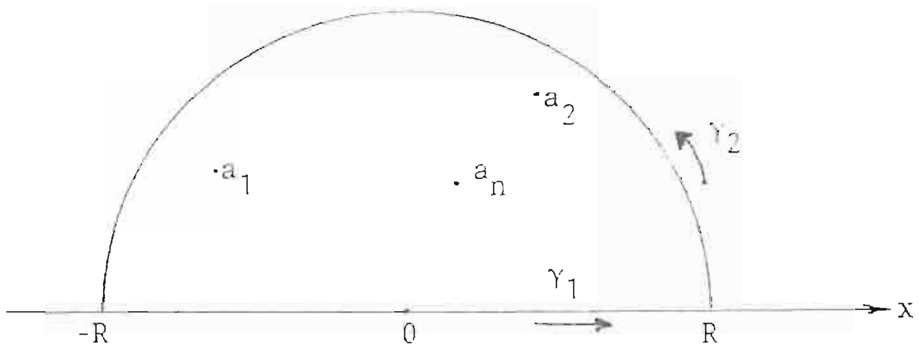

Figura 25

Consideremos un lazo γ, yuxtaposición γ_1 y γ_2 de los dos caminos:

γ_1: $t \to t$, $-R \leq t \leq R$

γ_2: $t \to Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$

donde el número R se toma tal que $R > \|a_k\|$ para todo k.
Por (4.6.8) se tiene entonces para todo k

$$I(a_k;\ \gamma) = 1$$

de manera que por el teorema de los restos se puede escribir

$$(2)\quad \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}_{a_k} f.$$

Si además se tiene

$$(3)\qquad \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$$

se deduce de (5.5.1.(2)), pasando al límite

(4) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{a_k} f$$

PROPOSICION 5.5.2

Sea $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ una fracción racional, donde P y Q son polinomios primos entre sí, no siendo real ninguno de los ceros de Q. Supongamos además que

(1) grad $Q \geq$ grad $P + 2$.

Entonces se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{a_k} f$$

siendo los a_k los ceros de Q tales que $\mathrm{Im}(a_k) > 0$.

DEMOSTRACION

En efecto, si se cumple

$P(z) = c_\circ z^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m$; $Q(z) = b_\circ z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + b_n$

para $c_\circ \neq 0$, $b_\circ \neq 0$, los cálculos de (5.5.5) demuestran que existe un número $R_\circ > 0$ tal que, para $R > R_\circ$, se cumple

$$\|P(Re^{it})\| \leq 2\|c_\circ\|R^m, \qquad \|Q(Re^{it})\| \geq \frac{1}{2}\|b_\circ\| \; R^n$$

y por consiguiente, con las mismas notaciones de (5.5.1) se tiene

$$\left\| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right\| \leq \int_0^{\pi} \frac{\|P(Re^{it})\|}{\|Q(Re^{it})\|} \cdot Rdt \leq 4 \, \frac{\|c_\circ\|}{\|b_\circ\|} \, R^{m+1-n}, \; m + 1 - n < 0.$$

lo que demuestra que $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$ se verifica.

EJEMPLO 5.5.3

Verifiquemos que se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = -\frac{3\Pi}{8}$$

En este caso no existe más que un solo polo en el semiplano - $Im(z) > 0$, el punto i, y se tiene entonces

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\Pi i \ Res_i f.$$

En efecto,

$$f(z) = \frac{a_{-3}}{(z-i)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-i)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-i)} + a_o + a_1(z-i) + \ldots$$

$$(z-i)^3 \cdot f(z) = a_{-3} + a_{-2}(z-i) + a_{-1}(z-i)^2 + a_o(z-i)^3 + a_1(z-i)^4 + \ldots$$

$$\frac{d}{dz}((z-i)f(z)) = a_{-2} + 2a_{-1}(z-i) + 3a_o(z-i)^2 + 4a_1(z-i)^3 + \ldots$$

$$\frac{d^2}{dz^2}(z-i)^3 f(z)) = 2a_{-1} + 6a_o(z-i) + 12a_1(z-i)^2 + \ldots$$

En el límite se tendrá

$$\lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2}((z-i)^3 f(z)) = 2a_{-1}$$

$$2a_{-1} = \lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3 \cdot \frac{1}{(z+i)^3 (z-i)^3}\right]$$

$$2a_{-1} = \lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2}(z+i)^{-3}$$

$$2a_{-1} = \frac{12}{32i}$$

De donde, por (5.5.3.(1))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\Pi}{8}$$

(5.5.4) Supongamos que se tiene una función de la forma

$$f(z) = g(z)\, e^{miz} \quad \text{con } m > 0,$$

siendo g analítica en $D' = D - \{a_1, \ldots, a_n\}$. La técnica de integración de funciones de este tipo se basa en el llamado lema de Jordan.

LEMA 5.5.5. (Lema de Jordan).

Cuando R tiende a $+\infty$, la integral

$$(1) \quad \int_0^{\Pi} R \left\| e^{imRe^{it}} \right\| dt \quad (\text{para } m > 0)$$

permanece acotada. Si existe una sucesión $(R_n)_{n \geq 1}$ que tiende a $+\infty$ y tal que la sucesión de las funciones $g(R_n e^{it})$ tienda uniformemente a 0 en el intervalo $[0, \Pi]$, entonces la sucesión de las integrales correspondientes

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = i \int_0^{\Pi} g(R_n e^{it})\, R_n e^{imR_n e^{it}} dt$$

tiende a 0.

DEMOSTRACION

En efecto, se tiene

$$\left\| e^{imRe^{it}} \right\| = \left\| e^{imR(\cos t + i \operatorname{sen} t)} \right\|$$

$$= \left\| e^{imR\cos t} \cdot e^{-mR\operatorname{sen} t} \right\|$$

$$= \left\| \cos(mR\cos t) + i\operatorname{sen}(mR\cos t) \right\| \left\| e^{-mR\operatorname{sen} t} \right\|$$

$$= e^{-mR\operatorname{sen} t}$$

y como sen t = sen (Π-t), podemos escribir

$$\int_0^{\Pi} e^{-mR\,\mathrm{sen}\,t}\,dt = 2\int_0^{\Pi/2} e^{-mR\,\mathrm{sen}\,t}\,dt,$$

ya que

$$\int_0^{\Pi} e^{-mR\,\mathrm{sen}\,t}\,dt = \int_0^{\Pi/2} e^{-mR\,\mathrm{sen}\,t}\,dt + \int_{\Pi/2}^{\Pi} e^{-mR\,\mathrm{sen}\,t}\,dt$$

$$= \int_0^{\Pi/2} e^{-mR\,\mathrm{sen}\,t}\,dt - \int_{\Pi/2}^{0} e^{-mR\,\mathrm{sen}(\Pi-u)}\,du$$

$$= \int_0^{\Pi/2} e^{-mR\,\mathrm{sen}\,t}\,dt + \int_0^{\Pi/2} e^{-mR\,\mathrm{sen}(\Pi-u)}\,du$$

$$= 2\int_0^{\Pi/2} e^{-mR\,\mathrm{sen}\,t}\,dt,$$

donde $u = \Pi - t$, por lo que $du = -\,dt$.

Por consiguiente, en el intervalo $[0,\Pi/2]$ se tiene

$$\tan t \geq t$$

o sea,

$$\frac{\mathrm{sen}\,t}{\cos t} \geq t$$

es decir,

$$\frac{\mathrm{sen}\,t}{t} \geq \cos t.$$

Por el argumento (criterio) de la derivada se tiene

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{sen}\,t}{t}\right) = \frac{t\cos t - \mathrm{sen}\,t}{t^2}$$

$$= \frac{\cos t}{t} - \frac{\mathrm{sen}\,t}{t^2}$$

$$= \frac{1}{t}\left(\cos t - \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$$

Se tiene además, por un lado,

$t \in [0, \Pi/2]$ lo que implica que $t > 0$ y por otro,

$\cos t \leq \frac{\operatorname{sen} t}{t}$ que a su vez implica que $\cos t - \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 0$,

de donde

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) = \frac{1}{t}\left(\cos t - \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) < 0$$

y en consecuencia, $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ es decreciente. Por tanto $\frac{\operatorname{sen} t}{t} \geq \frac{1}{\Pi/2}$,

es decir, $\frac{\operatorname{sen} t}{t} \geq \frac{2}{\Pi}$, que es igual a tener $\operatorname{sen} t \geq \frac{2t}{\Pi}$ (Fig. 26),

lo que permite la mayoración

$$\int_0^{\Pi/2} e^{-mR\operatorname{sen} t}\, dt \leq \int_0^{\Pi/2} e^{-\frac{2mRt}{\Pi}}\, dt \leq \frac{\Pi}{2mR}$$

puesto que

$$e^{-\frac{2mRt}{\Pi}} < 1 \text{ y } \int_0^{\Pi/2} dt = \Pi/2$$

entonces

$$\left\| \int_0^{\Pi/2} e^{-\frac{2mRt}{\Pi}}\, dt \right\| \leq \frac{\Pi}{2mR}$$

de donde, se deduce el lema.

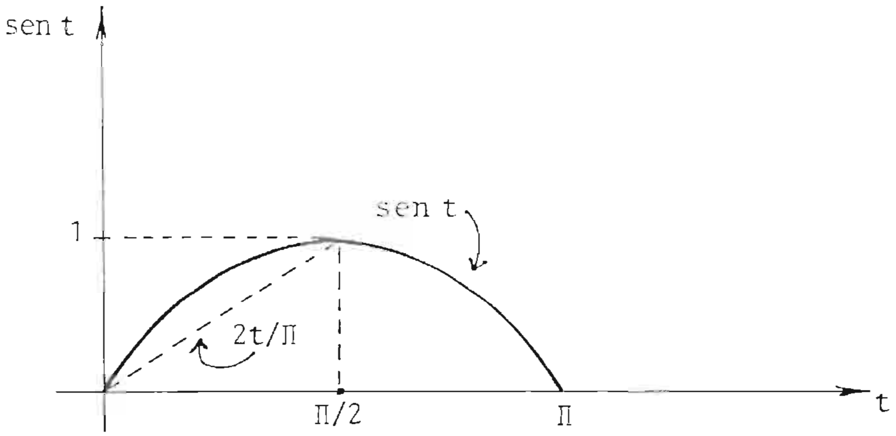

Figura 26.

EJEMPLO 5.5.6

Mostrar que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}\, dx = \frac{\Pi}{2} e^{-m}$, $m > 0$.

Consideremos $\int_\gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz$, donde $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, con γ_1, γ_2 definidos como en (5.5.1). El integrando presenta 2 polos simples en $z = \pm i$, pero únicamente $i \in \operatorname{Im}(z) > 0$.

Luego,

$$\operatorname{Res}_i f = \lim_{z\to i} \left\{(z-i)\cdot \frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)}\right\}$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{e^{imz}}{z+i}$$

$$= \frac{e^{-m}}{2i}.$$

Así, $\int_\gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz = 2\Pi i \left(\frac{e^{-m}}{2i}\right) = \Pi e^{-m}$,

o sea, $\int_{\gamma_1} \frac{e^{imx}}{x^2+1}\, dx + \int_{\gamma_2} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz = \Pi e^{-m}$, es decir,

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}\, dx + i \int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sen} mx}{x^2+1}\, dx + \int_{\gamma_2} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz = \pi e^{-m}$$

Por consiguiente

$$2\int_{0}^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}\, dx + \int_{\gamma_2} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz = \pi e^{-m}$$

Tomando el límite cuando $R \to +\infty$ y aplicando (5.5.5), se obtiene

$$\int^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-m}.$$

OBSERVACION 5.5.7

De manera similar se puede calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

por el método precedente cuando, para una sucesión $(R_n)_{n \geq 1}$ - de números mayores que cero que tiende a $+\infty$, la sucesión de - las integrales $\int_{\gamma_2} f(z)\, dz$ tiende a un límite no necesariamente nulo.

EJEMPLO 5.5.8

Mostrar que

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

El método del ejemplo (5.5.6) nos induce a considerar la integral de $\frac{e^{iz}}{z}$ a lo largo del lazo γ definido como en (5.5.1). - Pero, puesto que $z = 0$ está sobre el camino de integración y nos vemos en la imposibilidad de integrar a través de una singularidad, modificamos el recorrido del lazo γ evitando $z = 0$, como se muestra en la (Fig. 27) y designamos al nuevo lazo por γ', yuxtaposición $\gamma' = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4$ de los cuatro caminos:

γ_1: $t \to t$, $\quad -R \leq t \leq -r$

γ_2: $t \to re^{it}$, $\Pi \leq t \leq 0$

γ_3: $t \to t$, $\quad r \leq t \leq R$

γ_4: $t \to Re^{it}$, $0 \leq t \leq \Pi$

Puesto que $z = 0$ es exterior a D, se tiene

$$\int_{\gamma'} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

o sea, $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} + \int_{\gamma_3} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$

sustituyendo x por -x en la primera integral, se tiene

$\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = -\int_{\gamma_3} \frac{e^{-ix}}{x}\,dx$, luego,

$$\int_{\gamma_3} \frac{e^{ix}}{x}\,dx - \int_{\gamma_3} \frac{e^{-ix}}{x}\,dx + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x} + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

Así, haciendo que $r \to 0$ y $R \to +\infty$ se obtiene

$$2i\int_r^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = -\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

Por (5.5.5), la segunda integral de la derecha tiende a cero, Haciendo $z = re^{it}$ en la primera integral a la derecha, en el límite se tendrá

$$-\lim_{r\to 0}\int_{\Pi}^{0}\frac{e^{ire^{it}}}{re^{it}}\,ire^{it}dt = -\lim_{r\to 0}\int_{\Pi}^{0} ie^{ire^{it}}dt = \Pi i$$

puesto que en virtud de la continuidad de la integral, se puede tomar el límite dentro del signo integral.

Se tiene entonces

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ r\to 0}} 2i\int_{r}^{R}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \Pi i,$$

o sea

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\Pi}{2}$$

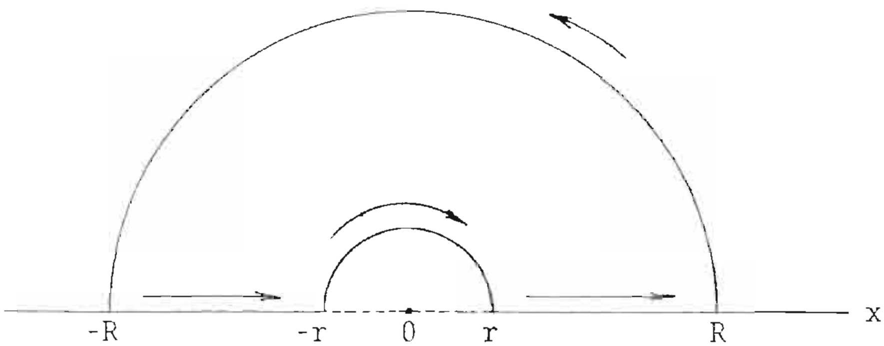

Figura 27

(5.5.9) Consideremos por último integrales definidas del tipo

$$\int_{0}^{2\Pi} G(\operatorname{sen} t\,,\ \cos t\,)\,dt$$

donde G es una función racional de sen t y cos t.

Haciendo $z = e^{it}$ tendremos

(1) $\operatorname{sen} t = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos t = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$ y $dz = ie^{it}dt$ o sea - $dt = \dfrac{dz}{iz}$. Luego, la integral dada es equivalente a

$$\int_\gamma f(z)dz$$

donde γ es el lazo $\gamma: t \to e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, el círculo unidad - con centro en el orgien $\|z\| = 1$ (4.6.8).

EJEMPLO 5.5.10

Mostrar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b \operatorname{sen} t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ si $a > \|b\|$.

Sea $z = e^{it}$. Entonces $\operatorname{sen} t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$ y

$dz = ie^{it}dt = iz\,dt$. Luego,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+b \operatorname{sen} t} = \int_\gamma \frac{dz/iz}{a+b\frac{(z-z^{-1})}{2i}} = \int_\gamma \frac{2dz}{bz^2+2aiz-b}$$

La función $f(z) = \dfrac{2}{bz^2+2aiz-b}$ posee dos polos simples en

$$z = \frac{-2ai \pm \sqrt{-4a^2+4b^2}}{2b}$$

$$= \frac{-ai \pm \sqrt{b^2-a^2}\; i}{b}$$

solamente $z_1 = \left(\dfrac{-ai + \sqrt{b^2-a^2}}{b}\right) i$ pertenece al disco abierto

$\|z\| < 1$, ya que

$$\left\| \left(\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right) i \right\| = \left\| \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{\sqrt{a^2-b^2}+a} \right\| = \left\| \frac{-b}{\sqrt{a^2-b^2}+a} \right\| < 1$$

si $a > \|b\|$

$$\operatorname{Res}_{z_1} f = \lim_{z \to z_1} (z-z_1) \cdot \frac{2}{bz^2+2aiz-b}$$

$$= \lim_{z \to z_1} \frac{2}{2bz+2ai} \quad \text{(por L'Hôpital)}$$

$$= \frac{1}{bz_1+ai}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}\, i}$$

Por consiguiente

$$\int_\gamma \frac{2dz}{bz^2+2aiz-b} = 2\Pi i\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}\, i}\right) = \frac{2\Pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

BIBLIOGRAFÍA

1. DIEUDONNE, Jean, Cálculo Infinitesimal, ed. Ediciones Omega, S.A., Barcelona, 1971.

2. LEVINSON, Norman, REDHEFFER, Raymond M., Curso de Variable Compleja, ed. Reverté, S.A., Barcelona, 1975

3. AHLFORS, Lars V., Complex Anlysis, ed. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953

4. NIETO, José I., Funciones de Variable Compleja, ed. Unión Panamericana, Washington, D.C., 1973. (Monografía Nº 8 O.E.A.)

5. SPIEGEL, Murray R., Variable Compleja, ed. Talleres Gráficos Carvajal y Cía., Cali, 1974.

6. GODEMENT, Roger, Algebra, ed. Tecnos, Madrid, 1967.