UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Teorema de Fubini - Tonelli

TRABAJO DE GRADUACION

Presentado por:

MAURICIO HERNAN LOVO CORDOVA

Para Optar al Titulo de:

LICENCIADO EN MATEMATICA

OCTUBRE 1989

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR : *Lic. José Luis Argueta Antillon*

SECRETARIO GENERAL : *Ing. René Mauricio Mejía Mendez*

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO : *Ing. Roberto Bran Giralt*

SECRETARIO : *Ing. Mario Arnoldo Molina Argueta*

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE : *Lic. Rolando Lemus Gomez*

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

TRABAJO DE GRADUACION

COORDINADOR : *Ing. José Francisco Marroquín*

ASESOR : *Ing. José Francisco Marroquín*

INTRODUCCION

El objetivo fundamental de este trabajo es la presentación de los **Teoremas de Fubini y Tónelli**, con la intención de **generalizar la conceptualización de la integración sobre una medida.**

El material está dividido en tres partes fundamentales:

Medida y funciones medibles; Generalización de la integración con respecto a una medida; Aplicación a la teoría de probabilidad.

Se a realizado el esfuerzo para que el interesado en estudiar este trabajo pueda encontrar en el mismo texto los resultados más importantes de la teoría de la medida.

Se supone que el lector tiene conocimientos de Teoría de conjuntos, Análisis real, Cálculo de variable compleja y nociones de la teoría de medida y de la teoría de probabilidad.

En el primer Capítulo y la primera parte del Capítulo II se pretende proporcionar los conceptos fundamentales, así como los principales resultados sobre medida en un σ-álgebra, Funciones Medibles, Integración con respecto a una medida, Espacios de Lebesgue y algunos modos de convergencia. Retomando los resultados de mayor interés para nuestro propósito de los trabajos de graduación:

Estudio Comparativo de la Integral de Riemann y la Integral de Lebesgue. (David Enrique Navarro).

Teorema de Representación de Riesz. (Pedro José Geoffroy Carletti y Marcelino Mejía González)[†].

En lo que sigue del Capítulo II se presenta las definiciones y resultados que de una u otra manera son de gran valor para culminar con los Teoremas de Fubini y Tonelli. Seguidamente se expone una generalización de dichos teoremas para rectángulos n-dimencionales y Cilindros.

En el Capítulo III se muestra la aplicación que tiene la Teoría de Medida presentada en los trabajos anteriormente citados y los resultados que sehan establecidos en los dos capítulos precedentes, en la teoría de probabilidad. La intención no es presentar un enfoque profundo sobre los procesos probabilísticos ni mucho menos presentar algo terminado, sino dar una introducción a la Teoría de probabilidad, que **permita trabajos futuros en el área, especialmente en los Procesos Estocásticos y la Estadística Matemática**, ramas de la Matemática que se apoyan en la Teoría de probabilidad.

Las estrategias seguidas se vislumbran partiendo de los cursos básicos de teoría de la medida y posteriormente los trabajos ya presentados y cierta bibliografía adicional. (ver

† Se presentan las referencias del caso sin demostración alguna.

bibliografía). Donde ha servido de base el texto de: Real Analysis de **H.L. Royden** y que será tomado como base en este trabajo en los primeros dos Capítulos.

En el último Capítulo se tomó en consideración las orientaciones y la visión presentada en el **Curso de Probabilidades y Teoría de la Medida**, impartido por Dr. Victor M. Pérez Abreu C., en el Séptimo Curso Centro Americano y del Caribe de Matemática. El cuál sirvió de guia en el desarrollo.

I N D I C E

CAPITULO I

MEDIDA Y FUNCIONES MEDIBLES

Con la intención de realizar un trabajo completo en el sentido de que sea posible encontrar los conceptos básicos en él mismo. Se inicia con Algebra de Conjuntos, donde se exponen algunos conjuntos y métodos de prueba que son de gran relevancia en las pruebas de la Teoría de Probabilidad. Además de ello se presentan las bases sobre las que gira el desarrollo del Capítulo II y una serie de definiciones y pruebas que pretenden dar salida a trabajos futuros.

1.1 ALGEBRA DE CONJUNTOS

Definición 1.1.1. *Sea* Ω *un conjunto. Una colección* S *de subconjuntos de* Ω *se llama* ***semi - álgebra*** *si cumple las siguientes propiedades:*

i. $\Omega \in S$.

ii. $E, F \in S \Rightarrow E \cap F \in S$.

iii. $E \in S \Rightarrow$ *existe* $E_1, \ldots, E_k \in S$; *disjuntos tales que* $\tilde{E} = \bigcup_{n=1}^{k} E_n$.

Proposición 1.1.1. *Sea* S *un semi - álgebra y* $\{E_k\}_{k\geq 1}$ *una sucesión de elementos de* S. *Entonces existe* $\{F_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de elementos de* S *disjuntos tales que* $\bigcup_{k\geq 1} E_k = \bigcup_{n\geq 1} F_n$.

Prueba. Sea

$$F_1' = E_1.$$

$$F_2' = E_2 - E_1 = \bigcup_{j=1}^{k_1} [E_2 \cap E_{1j}].$$

$$F_3' = E_3 - [E_1 \cup E_2] = \bigcup_{j=1}^{k_2} \bigcup_{i=1}^{k_1} [E_3 \cap E_{1i} \cap E_{2j}].$$

$$\vdots$$

$$F_k' = E_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i = \bigcup_{j_1=1}^{k_1} \bigcup_{j_2=1}^{k_2} \cdots \bigcup_{j_{k-1}=1}^{k_{k-1}} [E_k \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} E_{ij_n}].$$

$$\vdots$$

Donde $E_k \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} E_{ij_n}$ pertenecen a S y además son disjuntos entre sí.

Si tomamos las $E_k \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} E_{ij_n}$ como las F_n tenemos:

$$F'_1 = F_1$$

$$F'_2 = \bigcup_{n=1}^{k_1} F_n$$

$$F'_3 = \bigcup_{n=k_1+1}^{2k_1+k_2} F_n$$

$$\vdots$$

$$F'_k = \bigcup_{n=2^{k-3}k_1+2^{k-4}k_2+\ldots+2k_{k-3}+k_{k-2}+1}^{2^{k-2}k_1+2^{k-3}k_2+\ldots+2k_{k-2}+k_{k-1}} F_n$$

$$\vdots$$

Entonces $\{F_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en S disjuntos tal que

$$\bigcup_{n\geq 1} F_n = \bigcup_{k\geq 1} F'_k = \bigcup_{k\geq 1} E_k \quad *$$

Observación. Si $E_1,\ldots,E_k \in S$ entonces $\bigcap_{n=1}^{k} E_n \in S$.

Definición 1.1.2. *Una colección* $\mathbf{A}$ *de subconjuntos de* Ω *se llama* ***álgebra*** *si satisface las siguientes propiedades:*

i. $\Omega \in \mathbf{A}$

ii. $E \in \mathbf{A} \Rightarrow \tilde{E} \in \mathbf{A}$

iii. $E_1,\ldots,E_k \in \mathbf{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{k} E_n \in \mathbf{A}$

Observación. Toda álgebra es un semi - álgebra.

Proposición 1.1.2. *Sea* S *una semi - álgebra de subconjuntos de* Ω *y definamos*

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{S}) = \{ \bigcup_{n=1}^{k} E_n : E_1,\ldots,E_k \in \boldsymbol{S},\ \textit{disjuntos y } k \geq 0 \}.$$

Enconces $\mathbf{A}(\boldsymbol{S})$ *es un álgebra llamada el* ***álgebra generada por S***.

Prueba. Evidentemente $\Omega \in \mathbf{A}(\boldsymbol{S})$ y la unión finita de conjuntos en $\mathbf{A}(\boldsymbol{S})$ está en $\mathbf{A}(\boldsymbol{S})$.

Si E_1, $E_2 \in \boldsymbol{S}$ entonces

$$\tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2 = \Big[\bigcup_{j=1}^{n} E_{1j} \Big] \cap \Big[\bigcup_{i=1}^{m} E_{2i} \Big];\ \text{con } E_{1j} \text{ y } E_{2i} \text{ disjuntos.}$$

$$= \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{m} \big[E_{1j} \cap E_{2i} \big] \in \mathbf{A}(\boldsymbol{S})$$

Por recurrencia se tiene que:

Si $E_1,\ldots,E_k \in \boldsymbol{S}$ entonces $\bigcap_{n=1}^{k} \tilde{E}_n \in \mathbf{A}(\boldsymbol{S})$

Si $E \in \mathbf{A}(\boldsymbol{S})$ entonces $E = \bigcup_{n=1}^{k} E_n$, donde $\tilde{E} = \bigcap_{n=1}^{k} \tilde{E}_n \in \mathbf{A}(\boldsymbol{S})$ ⁎

Definición 1.1.3. *Una* **σ-álgebra** $\mathbf{A}^{\sigma}$ *de* Ω *es una colección de subconjuntos de* Ω *que cumple las siguientes propiedades:*

i. $\Omega \in \mathbf{A}^{\sigma}$.

ii. $E \in \mathbf{A}^{\sigma} \Rightarrow \tilde{E} \in \mathbf{A}^{\sigma}$.

iii. *Si* $\{E_n\}_{n\geq 1}$ *es una colección de conjuntos en* $\mathbf{A}^{\sigma}$ *entonces* $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathbf{A}^{\sigma}$.

Observación. Toda σ-álgebra es un álgebra.

Proposición 1.1.3. *La interpretación de toda familia de σ-álgebra de* **Ω** *es una σ-álgebra de* **Ω**. [3, p.46]

Proposición 1.1.4. *Sea* **C** *una colección arbitraria de subconjuntos de* **Ω**. *Entonces siempre existe una mínima σ-álgebra de* **Ω** *que contiene a* **C**, *llamada la* ***σ-álgebra generada por* C** *y denotada por* σ(**C**) [3, p.47]

Definición 1.1.4. *Sea* ξ *un conjunto cualquiera, no vacío. Una* ***métrica*** *en* ξ *es una función* $d: \xi \times \xi \longrightarrow \mathbb{R}$ *que cumple las siguientes propiedades:*

i. $\forall x, y \in \xi$: $d(x,y) \geq 0$.

ii. Para $x, y \in \xi$: $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

iii. $\forall x, y \in \xi$: $d(x,y) = d(y,x)$ (***simetría***)

iv. $\forall x,y,z \in \xi$: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ (***Desigualdad triangular***).

Definición 1.1.5. *El par* (ξ, d) *constituido por un conjunto* ξ *y una métrica definida sobre* ξ, *se denomina* ***Espacio métrico***.

Proposición 1.1.5. *Sea* (ξ, d) *un espacio métrico y sea* **0** *la colección de todos los conjuntos abiertos en* ξ, *entonces* σ(**0**) *es un σ- algebra de* ξ. *Llamada* ***σ-álgebra de Borel*** *de* ξ

y denotada por $\mathcal{B}(\xi)$.

1.2 MEDIDA

Definición 1.2.1. *Sea* Ω *un conjunto. Una función de conjuntos* $\mu: \mathbf{A}^{\sigma} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, *cuyo dominio es un* σ*-álgebra de* Ω, *es llamado* ***medida*** *si cumple las siguientes propiedades:*

i. $\mu(\phi) = 0$.

ii. $\forall\ E \in \mathbf{A}^{\sigma}$: $\mu(E) \geq 0$.

iii. *Si* $\{E_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión de elementos de* $\mathbf{A}$ *disjuntos, se da* $\mu\left[\bigcup_{n\geq 1} E_n\right] = \sum_{n\geq 1} \mu(E_n)$.

Evidentemente, toda medida μ es finitamente aditiva.

Proposición 1.2.1. *Si* μ *es una medida sobre una* σ*-álgebra* $\mathbf{A}^{\sigma}$ *de* Ω, *entonces* μ *es* ***monótona*** *y* ***sustractiva***. [3, p.53]

Proposición 1.2.2. *Sea* Ω *un conjunto y* μ *una medida sobre una* σ*-álgebra* $\mathbf{A}^{\sigma}$ *de* Ω.

i. *Si* $E \in \mathbf{A}^{\sigma}$ *y* $\{E_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión disjunta de elementos de* $\mathbf{A}^{\sigma}$ *tal que* $\bigcup_{n\geq 1} E_n \subset E$. *Entonces* $\sum_{n\geq 1} \mu(E_n) \leq \mu(E)$.

ii. μ *es* ***numerablemente sub-aditiva***. *Es decir, si* $\{E_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión de elementos de* $\mathbf{A}^{\sigma}$ *se tiene* $\mu\left[\bigcup_{n\geq 1} E_n\right] \leq \sum_{n\geq 1} \mu(E_n)$. [3, p.54]

Definición 1.2.2. *Por un* ***espacio medible*** *entendemos una pareja* $(\Omega, \mathbf{A}^\sigma)$ *que consta de un conjunto* Ω *y un* σ*-álgebra* $\mathbf{A}^\sigma$ *de* Ω. *Un subconjunto* E *de* Ω *es llamado* ***medible*** *con respecto a* $\mathbf{A}^\sigma$ *si* $E \in \mathbf{A}^\sigma$.

Definición 1.2.3. *Un* ***espacio de medida*** *es una terna* $(\Omega, \mathbf{A}^\sigma, \mu)$, *donde* $(\Omega, \mathbf{A}^\sigma)$ *es un espacio medible junto con una medida* μ *definida en* $\mathbf{A}^\sigma$.

Definición 1.2.4. *Se entiende por* ***medida exterior*** μ^* *una función de conjuntos de valores reales extendidos definida en todas los subconjuntos de un espacio* Ω *y que tiene las siguientes propiedades:*

i. $\mu^*(\phi) = 0$.

ii. $E \subset F \Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ ***monotona.***

iii. $E \subset \bigcup_{n \geq 1} E_n \Rightarrow \mu^*(E) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(E_n)$ ***contablemente sub-aditiva.***

Definición 1.2.5. *Un conjunto* E *se dice medible con respecto a* μ^* *si para cada conjunto* F *tenemos:*

$$\mu^*(F) = \mu^*(E \cap F) + \mu^*(\tilde{E} \cap F).$$

Definición 1.2.6. *La medida* $\lambda: \mathbf{L} \to \overline{\mathbb{R}}$ *definida como* $\lambda(E) = \inf \sum_{n \geq 1} \ell(I_n)$, *donde* $\mathbf{L}$ *es el* σ*-álgebra de conjuntos medibles de números reales y* $E \subset \bigcup_{n \geq 1} I_n$, *es la* ***medida de Lebes-***

que en $(\mathbb{R}, L)$. Además es la única medida que cumple que para cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$ $\lambda(I) = \ell(I)$.

Ejemplos de espacios medibles.

i. $(\mathbb{R}, L, \lambda)$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales, L el σ-álgebra de conjuntos λ medibles y λ la medida de Lebesgue.

ii. $([0,1], L, \lambda)$ sustituyendo $\mathbb{R}$ por $[0,1]$ en el caso anterior.

iii. $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ donde $B(\mathbb{R})$ es σ-álgebra de Borel.

Proposición 1.2.3. *Sea μ una medida sobre el espacio (Ω, A^σ). Si $\{E_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de conjuntos en A^σ y $\mu(E_1) < \infty$. Entonces $\mu[\bigcap_{n\geq 1} E_n] = Lim\ \mu(E_n)$.*

Prueba. Sea $E = \bigcap_{n\geq 1} E_n$, entonces

$$E_1 = E \cup \bigcup_{n\geq 1} [E_n - E_{n+1}],$$

lo cual es la unión de conjuntos disjuntos. Entonces

$$\mu(E_1) = \mu(E) + \sum_{n\geq 1} [E_n - E_{n+1}]$$

como $E_n = E_{n+1} \cup [E_n - E_{n+1}]$

unión disjunta de conjuntos de medida finita, se tiene

$$\mu[E_n - E_{n+1}] = \mu(E_n) - \mu(E_{n+1}).$$

Entonces de acuerdo al resultado anterior

$$\mu(E_1) = \mu(E) + \sum_{n=1} \left[\mu(E_n) - \mu(E_{n+1})\right]$$

$$= \mu(E) + \text{Lím} \sum_{n=1}^{k-1} \left[\mu(E_n) - \mu(E_{n+1})\right]$$

$$= \mu(E) + \text{Lím} \left[\mu(E_1) - \mu(E_k)\right]$$

$$= \mu(E) + \mu(E_1) - \text{Lím}\ \mu(E_k)$$

$$\therefore \quad \mu(E) = \mu\left[\bigcap_{n\geq 1} E_n\right] = \text{Lím}\ \mu(E_n) \quad *$$

Definición 1.2.7. *Una medida* μ *sobre un* σ*-álgebra* Λ^σ *es llamada* ***finita*** *si* $\mu(\Omega) < \infty$.

Definición 1.2.8. *Una medida* μ *sobre un* σ*-álgebra* Λ^σ *se dice* ***σ-finita*** *si existe una sucesión* $\{E_n\}_{n\geq 1}$ *de elementos en* Λ^σ *mutuamente disjuntos tal que* $\mu(E_n) < \infty$; *para todo* $n \geq 1$ *y* $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} E_n$.

Definición 1.2.9. *Sea* E *un conjunto.* E *es de* ***medida finita*** *si* $E \in \Lambda^\sigma$ *y* $\mu(E) < \infty$ *y se dirá que* E *es de* ***medida σ-finita*** *si es la unión contable de conjuntos medibles de medida finita.*

Definición 1.2.10. *Una medida* μ *en un* σ*-álgebra* Λ^σ *se dice que es* ***semi - finita*** *si para cada conjunto medible de medida infinita contiene subconjuntos medibles de medida tan grande como se quiera pero finita.*

Observación. Toda medida σ-finita es semi-finita.

Definición 1.2.11. *Un espacio de medida* $(\Omega, A^{\sigma}, \mu)$ *se dice que es **completo** si* A^{σ} *contiene todo subconjunto de conjuntos de medida cero. Es decir si* $E \in A^{\sigma}$ *y* $\mu(E) = 0$, *además* $F \subset E$ *entonces* $F \in A^{\sigma}$.

Observación. $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ el espacio de medida de Lebesgue es completo.

Proposición 1.2.4. *Si* $(\Omega, A^{\sigma}, \mu)$ *es un espacio de medida entonces podemos encontrar un espacio de medida completo* $(\Omega, A_0^{\sigma}, \mu_0)$. *Que cumple las siguientes propiedades:*

i. $A^{\sigma} \subset A_0^{\sigma}$.

ii. $E \in A^{\sigma} \Longrightarrow \mu(E) = \mu_0(E)$.

iii. $E \in A_0^{\sigma} \Longleftrightarrow E = F \cup G$ *donde* $F \in A^{\sigma}$ *y* $G \subset H$, $H \in A^{\sigma}$ *con* $\mu(H) = 0$.

Prueba. Sea $A_0^{\sigma} = \{E \subset \Omega : E = F \cup G$ donde $F \in A^{\sigma}$ y $G \varepsilon H$, $H \in A^{\sigma}$ con $\mu(H) = 0.\}$

Probemos que A_0^{σ} así definido es un σ-álgebra. Es evidente que $\Omega \in A^{\sigma}$ ya que $\Omega = \Omega \cup \phi$. Además si $E \in A_0^{\sigma}$ entonces $E = F \cup G$ donde $F \in A^{\sigma}$ y $G \subset H$, $H \in A^{\sigma}$ con $\mu(H) = 0$. De donde $\tilde{E} = \tilde{F} \cap \tilde{G}$ y $\tilde{F} \in A^{\sigma}$, $\tilde{G} \supset \tilde{H}$, por lo tanto $\tilde{E} \supset \tilde{F} \cap \tilde{H} \in A^{\sigma}$ entonces

$$\tilde{E} = \tilde{F} \cap \tilde{H} \cup (\tilde{E} - \tilde{F} \cap \tilde{H}),$$

donde $\quad \tilde{E} - \tilde{F} \cap \tilde{H} = \tilde{F} \cap \tilde{G} - \tilde{F} \cap \tilde{H}$

$$= \tilde{F} \cap [\tilde{G} - \tilde{H}]$$

$$\subset \tilde{G} - \tilde{H}$$

$$= H - G$$

$$\subset H, \text{ con } \mu(H) = 0$$

Luego $\tilde{E} \in A_0^\sigma$.

Sea $\{E_n\}_{n \geq 1}$ una colección de conjuntos en A_0^σ entonces $E_n = F_n \cup G_n$ donde $F_n \in A^\sigma$ y $G_n \subset H_n$, $H_n \in A^\sigma$ con $\mu(H_n) = 0$, para todo n.

$$\bigcup_{n \geq 1} E_n = \bigcup_{n \geq 1} [F_n \cup G_n]$$

$$= \Big[\bigcup_{n \geq 1} F_n\Big] \cup \Big[\bigcup_{n \geq 1} G_n\Big] \text{ donde } \bigcup_{n \geq 1} F_n \in A^\sigma \text{ y}$$

$\bigcup_{n \geq 1} G_n \subset \bigcup_{n \geq 1} H_n$, $\bigcup_{n \geq 1} H_n \in A^\sigma$ con $\mu\Big[\bigcup_{n \geq 1} H_n\Big] \leq \sum_{n \geq 1} \mu(H_n) = 0$, es decir $\bigcup_{n \geq 1} E_n \in A_0^\sigma$.

Además para $E \in A_0^\sigma$, $\mu(F)$ es la misma para todos los conjuntos $F \in A^\sigma$ tal que $E = F \cup G$, con G un subconjunto de un conjunto de medida cero. Ya que si $E = F \cup G$ donde $F \in A^\sigma$ y $G \subset H$, $H \in A^\sigma$ con $\mu(H) = 0$ y $E = F' \cup G'$ donde $F' \in A^\sigma$ y $G' \in H'$, $H' \in A^\sigma$ con $\mu(H') = 0$. Se tiene que $F \cup G = F' \cup G'$, es decir $F \subset F' \cup G' \subset F' \cup H'$ y $F' \subset F \cup G \subset F \cup H$ de donde

$$\mu(F) \leq \mu(F' \cup H') \leq \mu(F')$$

$$\text{y} \quad \mu(F') \leq \mu(F \cup H) \leq \mu(F)$$

Por lo tanto $\mu(F) = \mu(F')$.

Definamos μ_0 apoyándonos en la propiedad anterior, es decir

$$\mu_0 : \mathcal{A}_0^\sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$
$$E \rightsquigarrow \mu_0(E) = \mu(F) \text{ tq } E = F \cup G \text{ con } F \in \mathcal{A}^\sigma \text{ y } G \subset H \quad H \in \mathcal{A}^\sigma \text{ con } \mu(H) = 0.$$

μ_0 así definido es una medida.

Las primeras dos propiedades de una medida son heredadas de μ.

Si $\{E_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de elementos disjuntos en $\mathcal{A}_0^\sigma$ se tiene que:

Si $E_n = F_n \cup G_n$ donde $F_n \in \mathcal{A}^\sigma$ y $G_n \subset H_n$, $H_n \in \mathcal{A}^\sigma$ con $\mu(H_n) = 0$ entonces como $\{E_n\}_{n\geq 1}$ son disjuntos también $\{F_n\}_{n\geq 1}$ lo son.

Luego
$$\mu_0\Big[\bigcup_{n\geq 1} E_n\Big] = \mu\Big[\bigcup_{n\geq 1} F_n\Big]$$
$$= \sum_{n\geq 1} \mu(F_n)$$
$$= \sum_{n\geq 1} \mu_0(E_n). \quad ☆$$

Definición 1.2.12. *Si $(\Omega, \mathcal{A}^\sigma, \mu)$ es un espacio de medida. Decimos que un subconjunto* E *de* Ω *es* ***localmente medible*** *si* $E \cap F \in \mathcal{A}^\sigma$ *para cada* $F \in \mathcal{A}^\sigma$ *con* $\mu(F) < \infty$.

Definición 1.2.13. *La medida μ es llamada saturada si para todo conjunto localmente medible es medible, es decir, está en A^{σ}.*

Observación. *Toda medida σ-finita es saturada. Dado que existe una sucesión $\{E_n\}_{n\geq 1}$ de elementos de A^{σ}, mutuamente disjuntos tal que $\mu(E_n) < \infty$; para todo $n \geq 1$ y $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} E_n$. Luego si E es un conjunto localmente medible, se tiene:*

$$E = E \cap \Omega = E \cap \bigcup_{n\geq 1} E_n = \bigcup_{n\geq 1} (E \cap E_n) \in A^{\sigma}.$$

Definición 1.2.14. *Sea $\{E_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos entonces:*

i. $\operatorname{Sup}_n E_n = \bigcup_{n\geq 1} E_n.$

ii. $\operatorname{Inf}_n E_n = \bigcap_{n\geq 1} E_n.$

iii. $\operatorname{Lim\,Sup} E_n = \operatorname{Inf}_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Sup}_{k\geq n} E_k = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq 1} E_k$

iv. $\operatorname{Lim\,Inf} E_n = \operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Inf}_{k\geq n} E_k = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} E_k.$

Lema 1.2.1. *Sea $\{E_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos.*

i. Si $\{E_n\}_{n\geq 1}$ es creciente entonces existe el límite y es igual a $\bigcup_{n\geq 1} E_n$.

ii) Si $\{E_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente entonces existe el *límite y es igual a* $\bigcap_{n\geq 1} E_n$. [3, p.58]

Proposición 1.2.5. *Sea* Ω *un conjunto y* μ *una medida sobre una* σ*-álgebra* A^σ *de* Ω.

i. *Si* $\{E_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión creciente de elementos de* A^σ, *se da que* $\mu[\mathit{Lim}\ E_n] = \mathit{Lim}\ \mu(E_n)$.

ii. *Si* $\{E_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión decreciente de elementos de* A^σ, *para lo cual existe al menos un* E_n *con medida finita, entonces* $\mu[\mathit{Lim}\ E_n] = \mathit{Lim}\ \mu(E_n)$. [3, p.60]

Un criterio para probar si una función de conjuntos es una medida se expresa en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.6. (***Continuidad en el vacío***). *Se* μ *una función de conjuntos sobre un* σ*-álgebra* A^σ *tal que cumple con:*

i. $\mu(\phi) = 0$.

ii. $\forall E \in A^\sigma \Rightarrow \mu(E) \geq 0$.

iii. *Si* $\{E_n\}_{n=1}^{k}$ *es una colección de elementos disjuntos de* A^σ, *entonces* $\mu\left[\bigcup_{n=1}^{k} E_n\right] = \sum_{n=1}^{k} \mu(E_n)$.

Entonces μ *es una medida en* A^σ *si y sólo si* μ *es contínua en el vacío, es decir que para toda sucesión* $\{E_n\}_{n\geq 1}^{k}$ *en* A^σ *y* $\mathit{Lim}\ E_n = \phi$ *entonces* $\mathit{Lim}\ \mu(E_n) = 0$.

Prueba. Sea $\{E_n\}^{\downarrow}_{n\geq 1}$ una sucesión en A^{σ} y Lím $E_n = \phi$. Por Lema 1.2.1, Lim $E_n = \bigcap\limits_{n\geq 1} E_n = \phi$, de donde por proposición 1.2.5 tenemos que $\mu[\overline{\text{Lim}}\ E_n] = \mu(\phi)$

$$\text{Lim}\ \mu(E_n) = 0.$$

Reciprocamente, si para toda sucesión $\{E_n\}^{\downarrow}_{n\geq 1}$ *en* A^{σ} y Lim $E_n = \phi$ tenemos que Lim $\mu(E_n) = 0$. Consideremos $\{F_n\}^{\downarrow}_{n\geq 1}$ cualquier sucesión disjunta en A^{σ} y $E = \bigcup\limits_{n\geq 1} F_n$. Sea $\{E_k\}^{\downarrow}_{k\geq 1}$ una sucesión en A^{σ} definida por $E_k = E - \bigcup\limits_{n=1}^{k} F_n$. Tenemos que:

$$\text{Lim}\ E_k = \text{Lim}\left[E - \bigcup_{n=1}^{k} F_n\right].$$

$$= E - \text{Lim} \bigcup_{n=1}^{k} F_n.$$

$$= \phi.$$

Luego Lim $\mu(E_k) = 0$ y además $E = E_k \cup \bigcup\limits_{n=1}^{k} F_n$; unión de conjuntos disjuntos.

Por lo tanto $\mu(E) = \mu(E_k) + \sum\limits_{n=1}^{k} \mu(F_n)$

$$\text{y}\quad \text{Lim}\ \mu(E) = \text{Lim}\ \mu(E_k) + \text{Lim} \sum_{n=1}^{k} \mu(F_n).$$

$$\mu(E) = \sum_{n\geq 1} \mu(F_n) \quad \star$$

Proposición 1,2,7. *La clase C de conjuntos μ^*-medibles es una σ-álgebra. Si $\overline{\mu}$ es la restricción de μ^* a C, entonces $\overline{\mu}$ es una medida completa en C.* [8, p.86]

1.3 TEOREMA DE CARATHEODORY

Pretendemos mostrar ahora que, si iniciamos con una medida en un álgebra A de conjuntos podemos extenderla a una medida definida en una σ-álgebra que contiene a A.

Utilizando la medida en un álgebra A para construir una medida exterior μ^* y mostrar luego que la medida $\bar{\mu}$ inducida por μ^* es precisamente la extensión de μ.

Nota. *Entendemos por una* ***medida en un álgebra*** *A, a una función μ de conjuntos a los reales extendidos que cumple las siguientes propiedades:*

i. $\mu(\phi) = 0$.

ii $\forall E \in A \Rightarrow \mu(E) \geq 0$.

iii. *Sea* $\{E_n\}_{n=1}^{k}$ *una colección de elementos disjuntos de* A, *entonces* $\mu\left[\bigcup_{n=1}^{k} E_n\right] = \sum_{n=1}^{k} \mu(E_n)$.

Observación. Una medida en un álgebra A es una medida si y solo si A es un σ-álgebra y la medida en el álgebra es contínua en el vacío.

Definición 1.3.1. *Si A es un álgebra y μ una medida en A. Definimos* $\mu^*(E) = \mathrm{Inf} \sum_{n\geq 1} \mu(E_n)$ *donde* $\{E_n\}_{n\geq 1}$ *es un cubrimiento de* E.

Lema 1.3.1. *Si* $E \in \mathbf{A}$ *entonces* $\mu^*(E) = \mu(E)$.

Lema 1.3.2. *La función de conjunto* μ^* *es una medida exterior.* [8, p.92].

La medida exterior μ^* definida anteriormente es llamada la **medida exterior inducida por** μ

Para un álgebra $\mathbf{A}$ de conjuntos, denotaremos por $\mathbf{A}_\sigma$ a la clase de conjuntos que son unión contable de conjuntos de $\mathbf{A}$ y por $\mathbf{A}_{\sigma\delta}$ a la clase de conjuntos que son intercepciones contables de conjuntos en $\mathbf{A}_\sigma$.

Proposición 1.3.1. *Sea* μ *una medida en un álgebra* $\mathbf{A}$, μ^* *la medida exterior inducida por* μ, *y* E *un conjunto cualquiera. Entonces para* $\varepsilon > 0$, *existe un conjunto* $F \in \mathbf{A}_\sigma$ *con* $E \subset F$ *y* $\mu^*(F) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$.

Existe también un conjunto $G \in \mathbf{A}_{\sigma\delta}$ *con* $E \subset G$ *y* $\mu^*(E) = \mu^*(G)$.
[8, p.94]

Teorema 1.3.1. (***Caratheodory***). *Sea* μ *una medida en un álgebra* $\mathbf{A}$, *y* μ^* *la medida exterior inducida por* μ. *Entonces la restricción* $\overline{\mu}$ *de* μ^* *a los conjuntos* μ^* *- medibles es una extención de* μ *a una* σ*-álgebra que contiene a* $\mathbf{A}$. *Si* μ *es finita (ó* σ*-finita) también* $\overline{\mu}$ *es la* ***única*** *medida en la más pequeña* σ*-álgebra que contiene a* $\mathbf{A}$, *la cual es una extención de* μ. [8, p.95]

Si μ es una función de conjuntos definida en una semi-álgebra **S**, parece natural intentar definir una función de conjuntos finitamente aditiva en el álgebra **A**(**S**) así:

$\mu(E) = \sum_{n=1}^{k} \mu(E_n)$, donde $E = \bigcup_{n=1}^{k} E_n$, $E_i \cap E_j = \phi$ para $i \neq j$

$E_n \in \mathbf{S}$.

Proposición 1.3.2. *Sea* **S** *una semi-álgebra de conjuntos y μ una función no-negativa de conjuntos definida en* **S** *con $\mu(\phi) = 0$ (si $\phi \in \mathbf{S}$). Entonces μ tiene una única extención a una medida en el álgebra* **A**(**S**) *si satisface:*

i. *Si un conjunto E en* **S** *es la unión disjunta de una colección finita $\{E_n\}_{n=1}^{k}$ de conjuntos en* **S** *entonces $\mu(E) = \sum_{n=1}^{k} \mu(E_n)$.*

ii. *Si un conjunto E en* **S** *es la unión disjunta de una colección contable $\{E_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos en* **S**, *entonces $\mu(E) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(E_n)$.* [*8, p.99*]

Definición 1.3.2. *Sea* **M** *una colección de subconjuntos de* Ω. *Decimos que* **M** *es una* ***clase monótona*** *si para $\{E_n\}_{n\geq 1}$, una sucesión creciente ó decreciente se tiene que $\mathrm{Lim}\, E_n \in$* **M**.

Lema 1.3.3. *Sea* **M** *y* **M'** *clases monótonas en* Ω. *Entonces* **M** $\cap$ **M'** *es una clase monótona.*

Lema 1.3.4. *Sea $\mathbf{C}$ una colección de conjuntos. Entonces siempre existe una clase monótona mínima que contiene a $\mathbf{C}$. Denotada por $\mathbf{M}(\mathbf{C})$.*

Proposición 1.3.3. *$\mathbf{M}(\mathbf{C}) = \sigma(\mathbf{C})$ sii $\mathbf{C}$ es un álgebra.*

Prueba. Sea $\mathbf{M} = \{F \in \mathbf{M}(\mathbf{C}) : \tilde{F} \in \mathbf{M}(\mathbf{C})\}$, entonces dada $\{F_n\}_{n\geq 1}$, una sucesión de elementos de $\mathbf{M}$ la cual es creciente ó decreciente. Entonces $\{F_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathbf{M}(\mathbf{C})$. Por lo tanto $\text{Lím}\, F_n \in \mathbf{M}(\mathbf{C})$.

Si $\{F_n\}_{n\geq 1}$ es creciente $\text{Lím}\, F_n = \bigcup_{n\geq 1} F_n \in \mathbf{M}(\mathbf{C})$ y $\{\tilde{F}_n\}_{n\geq 1}$ en una sucesión decreciente y $\tilde{F}_n \in \mathbf{M}(\mathbf{C})$, de donde $\text{Lím}\, \tilde{F}_n \in \mathbf{M}(\mathbf{C})$ es decir $\text{Lín}\, F_n \in \mathbf{M}$. De la misma manera cuando $\{F_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente.

Además $\mathbf{M} \subset \mathbf{M}(\mathbf{C})$ y $\mathbf{C} \subset \mathbf{M}$ ya que $\mathbf{C}$ es un álgebra. Pero $\mathbf{M}(\mathbf{C})$ es la menor clase monótona que contiene a $\mathbf{C}$. Luego $\mathbf{M}(\mathbf{C}) = \mathbf{M}$.

Sea $\mathbf{M}_E = \{F \in \mathbf{M}(\mathbf{C}) : F \cap E \in \mathbf{M}(\mathbf{C})\}$, entonces dada $\{F_n\}^{\uparrow}_{n\geq 1}$ en $\mathbf{M}_E$ se tiene que $\{F_n \cap E\}^{\uparrow}_{n\geq 1}$ en $\mathbf{M}(\mathbf{C})$. De donde
$\text{Lím}\, F_n \cap E = \bigcup_{n\geq 1} [F_n \cap E] = E \cap [\bigcup_{n\geq 1} F_n] \in \mathbf{M}(\mathbf{C})$.

Luego $\text{Lím}\, F_n \in \mathbf{M}_E$. Similar cuando es una sucesión decreciente. Por lo tanto concluimos que $\mathbf{M}_E$ es una clase monótona.

Si $E \in \mathbf{C}$ entonces $\mathbf{C} \subset \mathbf{M}_E$, por ser $\mathbf{C}$ un álgebra y se concluye que $\mathbf{M}_E = \mathbf{M}(\mathbf{C})$.

Si $F \in \mathbf{M}(\mathbf{C})$ entonces $\mathbf{M}_F$ es una clase monótona y además para

$E \in \mathcal{C}$ se tiene que $F \in \mathcal{M}_E = \mathcal{M}(\mathcal{C})$, de donde $E \in \mathcal{M}_F$. Es decir $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_F$, luego $\mathcal{M}_F = \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

Con las pruebas anteriores hemos probado que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ es un álgebra y tenemos por hipótesis que es una clase monótona entonces $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ es un σ-álgebra.

Si $\mathcal{C}$ no es un álgebra entonces $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_F$ no contiene a $\mathcal{C}$ y por lo tanto $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ no seria un σ-álgebra ☆

Definición 1.3.3. *Una colección de conjuntos $\mathcal{D}$ es un **$\underline{\mathcal{D}}$-Sis**__**tema** si cumple las siguientes propiedades.*

i. $\Omega \in \mathcal{D}$

ii. $E, F \in \mathcal{D}$ *con* $E \subset F \Rightarrow F - E \in \mathcal{D}$.

iii. $\{E_n\}\uparrow_{n\geq 1}$ *en* $\mathcal{D} \Rightarrow {}_{n\geq 1}E_n \in \mathcal{D}$.

Proposición 1.3.4. *Siempre existe un mínimo $\mathcal{D}$-Sistema que contiene a una clase arbitraria $\mathcal{C}$. Denotada por $\mathcal{D}(\mathcal{C})$, y llamada el **mínimo** $\mathcal{D}$-sistema **que contiene** a $\mathcal{C}$.*

Proposición 1.3.5. *Si $\mathcal{C}$ es una clase de conjunto cerrado para las intercepciones entonces $\mathcal{D}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.*

Prueba. Es evidente que si $E \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$ entonces $\tilde{E} \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$.

Sea $\mathcal{D}_E = \{F \in \mathcal{D}(\mathcal{C}) : F \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{C})\}$ entonces $\mathcal{D}_E$ es un $\mathcal{D}$-sistema ya que $\Omega \cap E = E \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$ y si $F_1, F_2 \in \mathcal{D}_E$ con $F_1 \subset F_2$ entonces $[F_1 - F_2] \cap E = F_2 \cap E - F_1 \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$. También si

$\{F_n\}^{\uparrow}_{n\geq 1}$ en $\mathcal{D}_E$ entonces $\{F_n \cap E\}^{\uparrow}_{n\geq 1}$ en $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ de donde

$\bigcup_{n\geq 1}[F \cap E] = E \cap [\bigcup_{n\geq 1} F] \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$.

Si $E \in \mathcal{C}$ entonces $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_E$ por lo tanto $\mathcal{D}_E = \mathcal{D}(\mathcal{C})$.

Sea $F \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$ entonces para cualquier $E \in \mathcal{C}$ se tiene que $F \in \mathcal{D}_E$, pero entonces $E \in \mathcal{D}_F$, de donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_F$ entonces $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}(\mathcal{C})$.

De lo expuesto anteriormente tenemos que $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ es un álgebra y por hipótesis un $\mathcal{D}$-sistema entonces $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ es un σ-álgebra. ∴

1.4 FUNCIONES MEDIBLES

Sea $(\Omega, \mathbf{A}^{\sigma})$ un espacio medible

Proposición 1.4.1. *Sea $f: E \subset \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Entonces la clase $\mathcal{C} = \{B \subset \mathbb{R}: f^{-1}(B) \in \mathbf{A}^{\sigma}\}$ es un σ-álgebra.* [3, p.89]

Definición 1.4.1. *Sea $f: E \subset \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Se dice que f es una función **medible** con respecto a $\mathbf{A}^{\sigma}$ si:*

i. $E \in \mathbf{A}^{\sigma}$.

ii. $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$: $f^{-1}(B) \in \mathbf{A}^{\sigma}$.

Proposición 1.4.2. *Sea f una función de valores reales extendidos definida en Ω. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i. $\forall r \in \mathbb{R};\ f^{-1}(]r,\infty]) \in \mathbf{A}^\sigma$.

ii. $\forall r \in \mathbb{R};\ f^{-1}([r,\infty]) \in \mathbf{A}^\sigma$.

iii. $\forall r \in \mathbb{R};\ f^{-1}([-\infty, r[) \in \mathbf{A}^\sigma$.

iv. $\forall r \in \mathbb{R};\ f^{-1}([-\infty, r]) \in \mathbf{A}^\sigma$.

Además si f es medible con respecto a $\mathbf{A}^\sigma$, si y solo si cumple una de estas condiciones. [3, p.87], [3, p.90]

Proposición 1.4.3. *Sea α una constante y las funciones f y g medibles. Entonces también lo son: $f + \alpha$, $\alpha \cdot f$, $f + g$, $f \cdot g$ y $f \vee g$. Aun más, si $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de funciones medibles entonces $\sup f_n$, $\operatorname{Inf} f_n$, $\overline{\operatorname{Lim}}\, f_n$ y $\underline{\operatorname{Lim}}\, f_n$ son medibles.* [3, p.102]

Proposición 1.4.4. *Sea $(\Omega, \mathbf{A}^\sigma)$ un espacio medible y sea $\{\Omega_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de elementos en $\mathbf{A}^\sigma$ disjuntos tal que $\Omega = \bigcup_{n \geq 1} \Omega_n$. Definimos $\mathbf{A}_n^\sigma = \{E \cap \Omega : E \in \mathbf{A}^\sigma\}$. Entonces f es medible con respecto a $(\Omega, \mathbf{A}^\sigma)$ sii sus restricciones f_n a Ω_n son medibles con respecto a $(\Omega_n, \mathbf{A}_n^\sigma)$.* [8, p.48]

Proposición 1.4.5. *Sea $f\colon E \subset \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible y $F \subset E$, $F \in \mathbf{A}^\sigma$. Entonces la restricción f/F es una función medible.* [3, p.94]

Proposición 1.4.6. *Sea $f, g\colon E \subset \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones medibles, los siguientes conjuntos son medibles.*

i. $\{x \in E: f(x) < g(x)\}$

ii. $\{x \in E: f(x) \leq g(x)\}$

iii. $\{x \in E: f(x) = g(x)\}$. [3, *p.96*]

Proposición 1.4.7. *Sea* $\{f_n\}_{n=1}^{k}$ *funciones medibles con el mismo dominio* E. *Entonces las funciones siguientes son medibles.*

i. $f(x) = max\ \{f_n(x)\}_{n=1}^{k}$

ii. $f(x) = min\ \{f_n(x)\}_{n=1}^{k}$

iii. $f_n^+,\ f_n^-,\ |f_n|$. [3, *p.101*]

Proposición 1.4.8. *Sea* f *una función medible definida en un espacio medible* $(\Omega,\ \mathbf{A}^\sigma,\ \mu)$ *y definamos.*

$$\sigma(f) = \{f^{-1}(B) \in \mathbf{A}^\sigma:\ B \in \mathbf{B}(\mathbb{R})\}.$$

Entonces $\sigma(f)$ *es una* σ*-álgebra. Además* $\sigma(f)$ *es la mínima* σ*-álgebra contenida en* $\mathbf{A}^\sigma$ *con respecto a la cual* f *es medible, es decir* f *es* $\sigma(f)$ *- medible.*

Prueba. $\Omega \in \sigma(f)$ ya que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$. Además si $E \in \sigma(f)$ entonces $E = f^{-1}(B)$ con $B \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$. Luego $\tilde{E} = \widetilde{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\tilde{B})$ con $\tilde{B} \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$, es decir $\tilde{E} \in \sigma(f)$.

Si $\{E_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de elementos de $\sigma(f)$, entonces $E_n = f^{-1}(B_n)$ con $B_n \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$ donde $\{B_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión en $\mathbf{B}(\mathbb{R})$. Luego $\bigcup_{n \geq 1} E_n = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} B_n)$; con

$\bigcup_{n\geq 1} B_n \varepsilon \mathcal{B}(\mathbb{R})$, es decir $\bigcup_{n\geq 1} E_n \varepsilon \sigma(f)$.

Sea $\{\mathcal{A}_\lambda^\sigma\}_{\lambda\varepsilon\Lambda}$, donde Λ es una familia de índices y $\mathcal{A}_\lambda^\sigma$ son σ-álgebras en las cuales f es medible. Entonces f es medible en $\bigcap_{\lambda\varepsilon\Lambda} \mathcal{A}_\lambda^\sigma$. Por lo tanto $\sigma(f) \supset \bigcap_{\lambda\varepsilon\Lambda} \mathcal{A}_\lambda^\sigma$.

Si $E \varepsilon \sigma(f)$ entonces $E = f^{-1}(B)$, $B \varepsilon \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Luego $E \varepsilon \bigcap_{\lambda\varepsilon\Lambda} \mathcal{A}_\lambda^\sigma$ ∴

Definición 1.4.2. *Sea* $E \subset \Omega$, *definamos la función* 1_E como:

$$1_E(\omega) = \begin{cases} 1; & \omega \varepsilon E \\ 0; & \omega \notin E \end{cases}$$

*Llamada **función característica del conjunto*** E.

Proposición 1.4.9. *Sea* $E, F \varepsilon \Omega$. *Entonces*

i. $1_{E\cap F} = 1_E . 1_F$

ii. $1_{E\cup F} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}$. [3, p.105]

Definición 1.4.3. *Una **función simple** es una combinación lineal finita de funciones características de conjuntos medibles, disjuntos. Es decir* $\Phi(\omega) = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n 1_{E_n}(\omega)$, *con* $E_i \cap E_j = \phi$ *para* $i \neq j$.

Observación. Una función simple es medible dado que la función característica lo es.

Proposición 1.4.10. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* Φ, Ψ *funciones simples definidas en el mismo conjunto medible* E. *Entonces son funciones simples;* $\alpha\Phi$, $\Phi + \alpha$, $\Phi + \Psi$ *y* $\Phi \cdot \Psi$. [*3, p.109*]

Definición 1.4.4. *Si una propiedad se satisface excepto en un conjunto medible* E *tal que* $\mu(E) = 0$, *decimos que se verifica* ***casi por doquier con respecto a*** μ *y escribimos* c x d(μ).

Proposición 1.4.11. *Sea* f *una función medible no-negativa, entonces existe una sucesión no decreciente* $\{\Psi_n\}_{n\geq 1}$ *de funciones simples no-negativas tal que* $\text{Lím}\ \Psi_n = f$.

Prueba. Definamos para $n \geq 1$

$$\Psi n = \sum_{k=0}^{2^n n-1} \frac{k}{2^n} 1_{A_k^n}$$

donde $A_k^n = f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}))$ disjuntos y $\Psi_n \leq \Psi_{n+1}$. Además para $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$ t.q $n \geq N$ se tiene que
$|f(\omega) - \Psi_n(\omega)| < \varepsilon$ para $\omega \in f^{-1}([0,n))$. Luego $\text{Lím}\ \Psi_n = f$ ⁂

Proposición 1.4.12. *Sea* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de funciones medibles con el mismo dominio de definición* E. *Si* $\text{Lím}\ f_n = f$ c x d(ω) *entonces* f *es medible.* [*3, p.103*]

Proposición 1.4.13. *Sea* $f = g$ c x d(μ), *donde* μ *es una medida completa, entonces si* f *es medible también lo es* g.
[*8, p.50*]

Lema 1.4.1. *Supongamos que para cada* α *en un conjunto* $\mathcal{D}$ *de números reales le hacemos corresponder con conjunto* $E_\alpha \in \mathbf{A}^\sigma$ *con la condición de que* $\mu(E_\alpha - E_\delta) = 0$ *para* $\alpha < \delta$. *Entonces existe una función medible* f *tal que que* $f \leq \alpha$ c x d(μ) *en* E_α *y* $f \geq \alpha$ c x d(μ) *en* $\tilde{E}_\alpha$. [*8, p.52*]

Lema 1.4.2. *Supongamos que para cada* α *en un conjunto* $\mathcal{D}$ *de números reales le hacemos corresponder un conjunto* $E_\alpha \in \mathbf{A}^\sigma$, *con la condición de que* $E_\alpha \subset E_\delta$ *para* $\alpha < \delta$. *Entonces existe una función* f *en* Ω *medible y de valores en los reales extendidos tal que* $f \leq \alpha$ *en* E_α *y* $f \geq \alpha$ *en* $\tilde{E}_\alpha$. [*8, p.51*]

Proposición 1.4.14. *Sea* $(\Omega, \mathbf{A}^\sigma, \mu)$ *un espacio de medida y* $(\Omega, \mathbf{A}_0^\sigma, \mu_0)$ *su espacio completo. Entonces una función* f *medible con respecto a* $\mathbf{A}^\sigma$ *se puede extender a una función medible con respecto a* $\mathbf{A}_0^\sigma$.

Prueba. Sea $f: F \subset \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $F \in \mathbf{A}^\sigma$ y $f^{-1}(B) \in \mathbf{A}^\sigma$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Consideremos la función $\overline{f}: E \subset \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $E = F \cup G$, $G \subset H \in \mathbf{A}^\sigma$ y $\mu(H) = 0$, ademas $\overline{f}(\omega) = f(\omega)$ para $\omega \in F$.

Probemos que $\overline{f}$ es medible con respecto a A_0^σ. Sea $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ entonces

$$
\begin{aligned}
\overline{f}^{-1}(B) &= \{\omega \subset E: \overline{f}(\omega) \in B\} \\
&= \{\omega \in F: \overline{f}(\omega) \in B\} \cup \{\omega \in G: \overline{f}(\omega) \in B\} \\
&= f^{-1}(B) \cup \{\omega \in G: \overline{f}(\omega) \in B\}
\end{aligned}
$$

tal que $f^{-1}(B) \in \mathbf{A}^{\sigma}$ y $\{\omega \in G: \bar{f}(\omega) \in B\} \subset H \in \mathbf{A}^{\sigma}$ con $\mu(H) = 0$. Es decir $f^{-1}(B) \in \mathbf{A}_0^{\sigma}$. ∴

Proposición 1.4.15. *Si* $f: E \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ *es una función contínua en* E. *Entonces* f *es medible.* [3, p.93]

Proposición 1.4.16. *Si* f *es contínua* c x d(μ) *es el conjunto medible* E. *Entonces* f *es medible.* [3, p.93]

Definición 1.4.5. *Sea* f *una función real de variable real definimos*

$$D_{-}f(\omega) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{f(\omega+h) - f(\omega)}{h}$$

$$D_{+}f(\omega) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(\omega+h) - f(\omega)}{h}$$

Definición 1.4.6. *Sea* f *una función real. Decimos que* f *es* ***diferenciable*** *en* ω *si* $D_{-}f(\omega) = D_{+}f(\omega) \neq \pm\infty$ *y la denotamos por* $f'(\omega)$, *el valor comun de las derivadas en* ω.

Proposición 1.4.17. *Sea* f *una función real creciente en el intervalo* $[a,b]$. *Entonces* f *es diferenciable* c x d(μ). *La derivada* f' *es medible.* [8, p. 156]

Definición 1.4.7. *Sea* $\mathbb{C}$ *el conjunto de números complejos y* $Z: \Omega \to \mathbb{C}$, *tal que* $Z(\omega) = f(\omega) + g(\omega)i$. *Llamaremos a* Z *una* ***función medible compleja*** *si* f *y* g *son medibles. Donde* f *y* g *son funciones con valores en los reales extendidos definidos* *en* Ω.

Definición 1.4.8. *Sea* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de funciones medibles.*

i. *Decimos que* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ ***converge en la medida*** *a* f *si dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $N > 0$ *tal que*

$\mu(\{\omega: |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\}) < \varepsilon.$

para $n \geq N$.

ii. *Decimos que* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *es una* ***sucesión de Cauchy en la medida*** *si dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $N > 0$ *tal que*

$\mu(\{\omega: |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon.$

para $n, m \geq N$.

Proposición 1.4.18. *Sea* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de funciones medibles.* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *converge en la medida sii* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión de Cauchy en la medida.*

Prueba. Supongamos que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge en la medida a f. Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ t.q $\mu(\{\omega: |f\ (\omega) - f(\omega)| > \varepsilon/2\}) < \varepsilon/2$, para $n \geq N$. Así si $m,n \geq N$, tenemos que si $\omega \in \{\omega: |f_n(\omega) - f_m(\omega) > \varepsilon\}$ entonces $|f_n(\omega) - f(\omega)| + |f_m(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon$ es decir $\omega \in \{\omega: |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon/2\} \cup \{\omega: |f_m(\omega) - f(\omega) > \varepsilon/2\}$

para n, m $\geq N$. De donde

$$\mu(\{\omega: |f_n(\omega) - f_m(\omega)| > \varepsilon\}) \leq \mu(\{\omega: |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon/2\}) + \mu(\{\omega: |f_m(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon/2\} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Reciprocamente, si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones medibles tal que para $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $\mu(\{\omega: |f_m(\omega) - f_n(\omega)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$, para $n \geq N$. Debemos demostrar que existe una función medible f tal que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge en la medida a f.

De el hecho que $\mu(\{\omega: |f_m(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}$ se obtiene que para cada ω fijo, la sucesión $\{f_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ en los reales extendidos es de Cauchy, entonces $\text{Lím}\, f_n(x)$ existe. Definamos f por $f(\omega) = \text{Lím}\, f_n(\omega)$.

Tomando m fijo en $\{\omega: |f_m(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}$ y haciendo tener n a ∞ tenemos que $\mu(\{\omega: |f_m(x) - \text{Lím}\, f_n(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$ ∴

CAPITULO II

GENERALIZACION DE LA INTEGRAL SOBRE UNA MEDIDA

Se presenta a grandes rasgos la integración con respecto a una medida. Iniciamos con el producto de medidas y el σ-álgebra más pequeño que contiene $\mathbf{A}_1^\sigma \times \mathbf{A}_2^\sigma$, a partir del cual se llega a concluir los teoremas de Fubini y Tonelli despues de ciertos procesos. Además de remover la hipótesis de dichos teoremas. Es de agregar que se han introducido algunos resultados que son de gran interés en el desarrollo exclusivamente del capítulo III como es el teorema de cambio de variable.

2.1 INTEGRACION CON RESPECTO A UNA MEDIDA

Sea $(\Omega, A^{\sigma}, \mu)$ un espacio de medida.

Definición 2.1.1. *Si* $E \in A^{\sigma}$ *y* Φ *es una función simple no-negativa, definamos:*

$$\int_E \Phi d\mu = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \, \mu(E_n \cap E).$$

donde $\Phi(\omega) = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \, 1_{E_n}(\omega)$.

Definición 2.1.2. *Sea* f *una función medible,* $f\colon E \subset \Omega \to [0, +\infty]$ *entonces el integral de* f *es:*

$$\int f d\mu = \sup_{0 \leq \Phi \leq f} \int \Phi d\mu.$$

Donde Φ *es una función simple.*

Definición 2.1.3. *Sea* $F \subset E$ *con* $F \in A^{\sigma}$ *y sea* f *una función medible,* $f\colon E \subset \Omega \to [0, +\infty]$; *entonces el integral de* f *sobre* F *es:*

$$\int_F f d\mu = \int_E f \cdot 1_F \, d\mu$$

Proposición 2.1.1. *Sea* f *y* g *funciones medibles tal que* $f \leq g$ c x d(μ). *Entonces* $\int f d\mu \leq \int g d\mu$. [3, p.132]

Proposición 2.1.2. (**Lema de Fatau**). *Sea* $\{f_n\}_{n \geq 1}$ *una sucesión de funciones medibles no-negativas que convergen casi* *por doquier en un conjunto* E *a una función* f. *Entonces*

$$\int_E f d\mu \leq \underline{Lim} \int_E f_n d\mu .$$

Prueba. Sin pérdida de generalidad asumimos que $f_n(\omega) \to f(\omega)$, para cada $\omega \in E$.

Además es suficiente demostrar que para cualquier función simple Φ no-negativa con $\Phi \leq f$, entonces $\int_E \Phi\ \mu \leq \underline{\text{Lím}} \int_E f_n d\mu$.

Si $\int_E \Phi = \infty$, entonces hay un conjunto medible $F \subset E$ con $\mu(F) = \infty$. Sea $\Phi > a > 0$ en F y $a \in I\!R$, sea $F_n = \bigcap_{k \geq n+1} f_k^{-1}(]a, \infty])$. Entonces $\{F_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles cuya unión contiene a F ya que $0 < a < \Phi < f$ y $f_n(\omega) \to f(\omega)$, por lo tanto existe $N > 0$ tal que $n > N$, $f_n > a$, con $\Phi \leq \text{Lím}\ f_n$. Así $\text{Lím}\ \mu(F_n) = \infty$. Además $\int_E f_n d\mu \geq a\ \mu(F_n)$, tenemos $\text{Lím} \int_E f_n d\mu = \infty = \int_E \Phi d\mu$.

Si $\int_E \Phi < \infty$, entonces hay un conjunto medible $F \subset E$ con $\mu(F) < \infty$ tal que Φ se anula en $E - F$.

Sea $M = \max \Phi$, sea $\varepsilon > 0$, y sea $F_n = \bigcap_{k \geq 1} (f_k + (\varepsilon - 1)\Phi)_{(]0,\infty])}$. Entonces $\{F_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión creciente de conjuntos tal que $F \subset \bigcup_{n \geq 1} F_n$ y así $\{F - F_n\}^{\downarrow}_{n \geq 1}$ una sucesión de conjuntos cuya intersección es vacio. Por proposición 1.2.6 se tiene que $\text{Lim}\ \mu(F - F_n) = 0$, y así podemos encontrar un $N > 0$ tal que

$\mu(F - F_k) < \varepsilon$ para todo $k \geq N$. Así para $k \geq N$

$$\begin{aligned}\int_E f_k d\mu &\geq \int_{F_k} f_k d\mu \\ &\geq (1 - \varepsilon)\int_{F_k} \Phi d\mu \\ &\geq (1 - \varepsilon)\int_E \Phi d\mu - \int_{F-F_k} \Phi d\mu \\ &\geq \int_E \Phi d\mu - \varepsilon\left[\int_E \Phi \mu + M\right].\end{aligned}$$

Entonces $\underline{\text{Lím}} \int_E f_n d\mu \geq \int_E \Phi d\mu - \varepsilon\left[\int_E \Phi d\mu + M\right]$. Dado que ε es arbitrario $\underline{\text{Lím}} \int_E f_n d\mu \geq \int_E \Phi d\mu$. ☆

Proposición 2.1.3. (***Teorema de convergencia monótona***). *Sea* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de funciones medibles no-negativas que convergen casi por doquier a una función f y supongamos que $f_n \leq f$ para todo n. Entonces* $\int f d\mu = \text{Lím} \int f_n d\mu$.

Prueba. Tenemos por hipotesis que $f_n \leq f$, *de donde por proposición 2.1.1,* $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. Por lo tanto $\overline{\text{Lím}} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$ y por la proposición 2.1.2. tenemos $\int f d\mu \leq \underline{\text{Lím}} \int f_n d\mu \leq \overline{\text{Lím}} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. Luego $\int f d\mu = \text{Lím} \int f_n d\mu$. ☆

Proposición 2.1.4. *Sea* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de funciones medibles no-negativas entonces*

$$\int \sum_{n\geq 1} f_n \, d\mu = \sum_{n\geq 1} \int f_n \, d\mu$$

Prueba. Sea $f = \sum_{n \geq 1} f_n$ y $g_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$ donde $g_k \leq f$, para todo k y además son no-negativas las cuales convergen a f.

Por proposición 2.1.3 se tiene

$$\begin{aligned}\int \sum_{n \geq 1} f_n \, d\mu &= \text{Lím} \int g_k \, d\mu \\ &= \text{Lím} \int \sum_{n=1}^{k} f_n \, d\mu \\ &= \text{Lím} \sum_{n=1}^{k} \int f_n \, d\mu \\ &= \sum_{n \geq 1} \int f_n \, d\mu. \quad *\end{aligned}$$

Proposición 2.1.5. *Sea* $(\Omega, \mathbf{A}^\sigma, \mu)$ *un espacio medible y* f *una función medible no-negativa. Entonces* $\upsilon(E) = \int_E f d\mu$ *es una medida en el espacio medible* $(\Omega, \mathbf{A}^\sigma)$. *Si además* $\int f d\mu < \infty$ *entonces para* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $E \in \mathbf{A}^\sigma$ *y* $\mu(E) < \delta$, *entonces* $\upsilon(E) < \varepsilon$. [*8, p.56*]

Definición 2.1.4. *Una función no-negativa* f *es llamada* ***integrable*** *(sobre un conjunto medible E con respecto a* μ*), si es medible y* $\int_E f d\mu < \infty$.

Una función arbitraria f se dice que es **integrable** si tanto f^+ como f^- son integrables. En este caso definimos:

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Proposición 2.1.6. *Sea* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de funciones integrables sobre* E. *Entonces*

i. $\int \sum_{n\geq 1} \alpha_i f_n \mu = \sum_{n\geq 1} \alpha_i \int f_n \mu$

ii. *Si* $f_n = f_m$ c x d(μ) *con* $n \neq m$ *entonces*

$$\int_E f_n d\mu = \int_E f_m d\mu$$

iii. *Si* $|g| \leq |f_n|$, *donde* g *es una función medible, entonces* g *es integrable sobre* E.

iv. $|\int_E f_n d\mu| \leq \int_E |f_n| d\mu$

v. *Si* $\{E_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos tal que* $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$. *Entonces*

$$\int_E f_n d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_{E_n} f_n d\mu.$$ [3, p.125], [3, p.136]

Proposición 2.1.7. *Sea* f *es una función acotada definida en* $E \subset \Omega$ *con valores en los reales extendidos y* $\mu(E) < \infty$. f *es integrable sii* f *es medible.* [3, p.120]

Proposición 2.1.8. *Sea* g *una función integrable sobre* E, *y suponga que* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión de funciones medibles tal que en* E, $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$ *y* $f_n(\omega) \to f(\omega)$ c x d(μ) *en* E. *Entonces* $\int_E f d\mu = Lim \int_E f_n d\mu$. [8, p.58]

Proposición 2.1.9. *Si f es integrable, dicha función es finita casi por doquier, es decir $f^{-1}(+\infty)$ y $f^{-1}(-\infty)$ son de medida nula.* [3, p.138]

Proposición 2.1.10. *Sea f: $E \subset \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Si $\mu(F) = 0$, con $F \subset E$ entonces $\int_F f d\mu = 0$.*

2.2 EL TEOREMA DE RADON-NIKODYM

Definición 2.2.1. *Sea $(\Omega, \mathbf{A}^\sigma)$ un espacio medible. Si μ y υ son dos medidas definidas en $(\Omega, \mathbf{A}^\sigma)$, decimos que μ y υ son mutuamente singulaes (denotamos $\mu \perp \upsilon$) si existen conjuntos disjuntos E y F en $\mathbf{A}^\sigma$ tal que $\Omega = E \cup F$ y $\upsilon(E) = \mu(F) = 0$.*

Definición 2.2.2. *Una medida ν se dice que es **absolutamente continua con respecto a una medida** μ (escribimos $\nu << \mu$) si $\nu(E) = 0$ para cada E con $\mu(E) = 0$.*

Observación. La medida υ definida en la proposición 2.1.5, es absolutamente contínua con respecto a μ, por proposición 2.1.10.

Probaremos a continuación que si requerimos una medida μ σ-finita, entonces cada medida υ absolutamente contínua con respecto a μ puede ser obtenida en la forma expuesta en la proposición 2.1.5.

Teorema 2.2.1. (***Radon - Nikodym***). *Sea* $(\Omega, \mathbf{A}^{\sigma}, \mu)$ *un espacio de medida* σ*-finita, y sea* υ *una medida definida en* $\mathbf{A}^{\sigma}$ *la cual es absolutamente continua con respecto a* μ. *Entonces existe una función medible no-negativa* f *tal que para cada conjunto* E *en* $\mathbf{A}^{\sigma}$ *tenemos:*

$$\upsilon(E) = \int_E f d\mu .$$

La función f *es única en el sentido que si* g *es cualquier función medible con la propiedad anterior entonces* $g = f$ c x d(μ). [*8, p.70*]

Teorema 2.2.2. (***Cambio de variable***) *Sea* $(\Omega_1, \mathbf{A}_1^{\sigma})$ *y* $(\Omega_2, \mathbf{A}_2^{\sigma})$ *espacios medibles y* f *una transformación de* $\mathbf{A}_1^{\sigma}$, *a* $\mathbf{A}_2^{\sigma}$ *con valores en* Ω_2. *Sea* μ *una medida finita en* $(\Omega_1, \mathbf{A}_1^{\sigma})$ *y* μ_f *la medida de* $(\Omega_2, \mathbf{A}_2^{\sigma})$ *inducida por* f, *o sea* $\mu_f(E) = \mu(f^{-1}(E))$, *con* $E \in \mathbf{A}_2^{\sigma}$. *Entonces*

$$\int_E g d\mu_f = \int_{f^{-1}(E)} g \circ f d\mu ,$$

con $E \in \mathbf{A}_2^{\sigma}$, *y* g *una función* $\mathbf{A}_2^{\sigma}$*-medible.*

Prueba. Probemos que μ_f es una medida. $\mu_f(\phi) = \mu(f^{-1}(\phi)) = \mu(\phi) = 0$, además para $E \in \mathbf{A}_2^{\sigma}$ se tiene $\mu_f(E) = \mu(f^{-1}(E)) \geq 0$. Sea $\{E_n\}_{n \geq 1}$ una colección disjunta de elementos de $\mathbf{A}_2^{\sigma}$ entonces

$$\mu_f\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right)\right)$$

$$= \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} (f^{-1}(E_n))\right)$$

$$= \sum_{n\geq 1} \mu(f^{-1}(E_n))$$

$$= \sum_{n\geq 1} \mu_f(E_n)$$

Además $g\circ f$ es una función $\mathbf{A}_1^\sigma$-medible ya que si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ entonces $(g\circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathbf{A}_1^\sigma$.

Sea $F \in \mathbf{A}_2^\sigma$ entonces 1_F es una función $\mathbf{A}_2^\sigma$-medible y por lo anterior $1_F\circ f$ es $\mathbf{A}_1^\sigma$-medible, ademas $1_F\circ f = 1_{f^{-1}(F)}$ en Ω_1. Sea $E \in \mathbf{A}_2^\sigma$ entonces

$$\int_{f^{-1}(E)} 1_F\circ f d\mu = \int_{f^{-1}(E)} 1_{f^{-1}(F)} d\mu$$

$$= \mu(f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F))$$

$$= \mu(f^{-1}(E \cap F))$$

$$= \mu_f(E \cap F)$$

$$= \int_E 1_F d\mu_f.$$

Si Φ es una función simple en Ω_2 se tiene que

$$\int_{f^{-1}(E)} \Phi\circ f d\mu = \int_E \Phi d\mu_f.$$

Como es finita entonces es σ-finitas, de donde μ_f también lo es. Luego si g es una función $\mathbf{A}_2^\sigma$-medible entonces existe una sucesión $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}^{\uparrow}$ de funciones simples tal que Lím $\Phi_n = f$. Por proposición 2.1.3 tenemos

$$\begin{aligned}\int_E g\,d\mu_f &= \text{Lim} \int_E \Phi_n\, d\mu_f \\ &= \text{Lim} \int_{f^{-1}(E)} \Phi_n \circ f\, d\mu \\ &= \int_{f^{-1}(E)} g \circ f\, d\mu\end{aligned}$$

donde $\{\Phi_n \circ f\}_{n\geq 1}^{\uparrow}$ de funciones simples $\mathbf{A}_1^\sigma$-medibles tal que Lim $\Phi_n \circ f = g \circ f$. ⁂

2.3 LOS ESPACIOS DE LEBESGUE L_p

Definición 2.3.1. *Si V es un espacio lineal sobre* $\mathbb{R}$, *entonces una función real N definida en V se dice que es* ***norma*** *en V si satisface*

- *i.* $N(v) \geq 0$, *para todo* $v \in V$;
- *ii.* $N(v) = 0$ *sii* $v = 0$;
- *iii.* $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$ *para todo* $v \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$;
- *iv.* $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ *para todo* $u, v \in V$.

Si la condición ii. no es satisfecha la función N se dice que es una ***semi-norma*** *ó* ***pseudo-norma*** *en V. un* ***espacio lineal normal*** *es un espacio lineal V junto con una norma en él.*

Definición 2.3.2. *Sea* $(\Omega, A^{\sigma}, \mu)$ *un espacio de medida, denotemos por* $L_p(\mu)$ *el espacio de todas las funciones medibles para las cuales* $\int |f|^p \, d\mu < \infty$, *donde* $1 \leq p < \infty$.

Lema 2.3.1. *Sea* f *y* g *funciones en* $L_p(\mu)$, *entonces*

$$|f + g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p). \text{ [8, p.2]}$$

Proposición 2.3.1. *El espacio* $L_p(\mu)$ *es un espacio lineal bajo las operaciones definidas por*

$$(f + g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega), \quad (\alpha f)(\omega) = \alpha f(\omega);$$

con $f, g \in L_p(\omega)$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$. [8, p.3]

Definición 2.3.3. *Decimos que dos funciones en* $L_p(\mu)$ *son* μ-***equivalentes*** *si son iguales* c x d(μ). *La* ***clase de equivalencia determinada por*** f ***en*** $L_p(\mu)$ *es denotada por* $[f]$ *y consiste de el conjunto de todas las funciones en* $L_p(\mu)$ *las cuales son* μ-*equivalentes a* f. *El* ***espacio de Lebesgue*** $L_p = L_p(\Omega, A^{\sigma}, \mu)$ *consiste de todas las clases* μ-*equivalentes en* $L_p(\mu)$.

Definición 2.3.4. *Para los elementos de un espacio* L_p, *definimos la función:*

$$\begin{aligned} \| \ \|_p : L_p &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ f &\rightsquigarrow \|f\|_p = \left\{\int |f|^p \, d\mu\right\}^{1/p} \end{aligned}$$

Proposición 2.3.2. *La función* $\| \ \|_p$ *es una norma en* $\mathbf{L}_p$ [8, p.4]

Definición 2.3.5. *una función* f *definida en un intervalo abierto* (a,b) *se dice que es convexa sii para cada* $x, y \in (a,b)$ *y cada* λ *con* $0 < \lambda < 1$ *se cumple que:*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Lema 2.3.2. *Si una función* f *tiene una segunda derivada no negativa en un intervalo abierto* (a,b), *entonces* f *es convexa en* (a,b). [8, p.6]

Lema 2.3.3. *Sea* α *y* β *números reales no-negativos y supongamos que* $0 < \lambda < 1$, *entonces*

$$\alpha^{\lambda}\beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$$

con la igualdad satisfecha sólo si $\alpha = \beta$. [8, p.7]

Proposición 2.3.3. (***Desigualdad de Hälder's***) *Si* $f \in \mathbf{L}_p$ *y* $g \in \mathbf{L}_q$ *para* $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *entonces* $f.g \in \mathbf{L}_1$ *y* $\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p.\|g\|_q$. *La igualdad se satisface si y sólo si para algunas constantes no nulas* a *y* b *tenemos que* $a|f|^p = b|g|^q$ *casi por doquier.* [8, p.8]

Proposición 2.3.4. (***Desigualdad de Cauchy - Buryakovskiî-Schuar***). *Si* $f, g \in \mathbf{L}_2$, *entonces* $f.g \in \mathbf{L}_1$ *y*

$$\left|\int f\cdot g \, d\mu\right| \leq \int |f\cdot g| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

Prueba. Tenemos que $0 \leq (|f| - |g|)^2 = f^2 - 2|fg| + g^2$, entonces

$$|f\cdot g| \leq (f^2 + g^2),$$

de donde se obtiene que $f\cdot g \in L_1$.

Además $0 \leq \int (\alpha|f| + |g|)^2 d\mu$

$$= \alpha^2 \int |f|^2 d\mu + 2\alpha \int |f\cdot g| d\mu + \int |g|^2 d\mu, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Escogiendo α tal que sea el menor valor. Para ello consideramos la expresión anterio como una función de α y encontrando el mínimo. Si $\alpha = \dfrac{-\int |f\cdot g| d\mu}{\int |f|^2 d\mu}$ y como $\int |f|^2 d\mu \geq 0$ se tendrá que es el mínimo.

Sustituyendo el valor α en la función considerada tenemos $\int |f|^2 d\mu \cdot \int |g|^2 d\mu - \int |f\cdot g| d\mu^{\,2} \geq 0$, de donde se obtiene el resultado. ∴

Proposición 2.3.5. *(Desigualdad de Minkowski). Si $f,g \in L_p$ para algún $p \geq 1$, entonces $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.* [8, p.10]

Proposición 2.3.6 *Cada función g en $L_q(\mu)$ definida una función lineal acotada* F *en $L_p(\mu)$ así*

$$F(f) = \int f.g d\mu.$$

en donde $\|F\| = \|g\|_q$. [8, p.76]

Proposición 2.3.7. *Sea $f \in L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe una función simple Φ la cual se anula fuera de un conjunto de medida finita tal que $\|f - \Phi\|_p < \varepsilon$.*
[8, p.78]

Proposición 2.3.8. *Sea (Ω, A^σ, μ) un espacio de medida finita y g una función integrable tal que para alguna constante M.*

$$\left|\int g \, \Phi \, \mu\right| \leq M\|\Phi\|_p,$$

para todas las funciones simples Φ entonces $g \in L_p$.
[8, p.78]

Nota. En nuestro caso la convergencia en el espacio L_p, $1 \leq p < \infty$, es a menudo referida como **convergencia en la media de orden p**. Entonces tendremos que una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\geq 1}$ se dice que converge en la media de orden p a f si $f \in L_p$ y $\|f - f_n\|_p \to 0$.

Definición 2.3.6. *Una sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ en L_p es una **suce-***

sión de Cauchy en L_p *si para todo $\varepsilon > 0 \ \exists\ M(\varepsilon)$ tal que si $m,n \geq M(\varepsilon)$ entonces $\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$.*

Definición 2.3.7. *Un espacio lineal normal es* ***completo*** *si para toda sucesión de Cauchy converge a algún elemento de el espacio. Un espacio normal completo es llamado* ***espacio de Banach.***

Lema 2.3.4. *Si la sucesión $\{f_n\}_{n>1}$ converge a f en L_p. Entonces es una sucesión de Cauchy.*

Prueba. Si $m,n \geq N(\varepsilon/2)$, entonces

$$\|f - f_m\|_p < \varepsilon/2, \ \|f - f_n\|_p < \varepsilon/2.$$

Entonces tenemos

$$\|f_m - f_n\| \leq \|f_m - f\|_p + \|f - f_n\|_p < \varepsilon. \qquad ⁂$$

Definición 2.3.8. *Una serie $<\{f_n\}_{n\geq 1}, \ \{S_n\}_{n\geq 1}>$ en un espacio lineal normado se dice que es* ***sumable a la suma S*** *si* ***S*** *está en el espacio y la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n\geq 1}$ converge a* ***S****, es decir $\|S - \sum_{i\geq 1}^{n} f_i\| \to 0$, en este caso escribimos $S = \sum_{n\geq 1} f_n$.*

A su vez, la serie $<\{f_n\}_{n\geq 1}, \{S_n\}_{n\geq 1}>$ es ***absolutamente sumable*** *si*

$$\sum_{n\geq 1} \| f_n \| < \infty.$$

Proposición 2.3.9. *Un espacio lineal normado N es completo si y sólo si cada serie absolutamente sumable es sumable.* [8, p.18]

Proposición 2.3.10. (***Teorema de Riesz - Fischer***). *Si* $1 \leq p < \infty$, *entonces el espacio* $\mathbf{L}_p$ *es un espacio lineal normal completo con la norma dada en la definición 2.3.4.* [8, p.21]

Proposición 2.3.11. *Sea* $\{E_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de conjuntos medibles disjuntos, y para cada n sea* f_n *una función en* $\mathbf{L}_p$ *que se anula fuera de* E_n. *Sea* $f = \sum_{n\geq 1} f_n$, *entonces* $f \in \mathbf{L}_p$ *si* $\sum \| f_n \|^p < \infty$

Teorema 2.3.1. *Sea* F *un funcional lineal acotado en* $L_p(\mu)$ *y* μ *una medida* σ*-finita. Entonces existe un único elemento* g *en* $\mathbf{L}_q$, *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, *tal que* $F(f) = \int f.g d\mu$ *y también* $\|F\| = \|g\|_q$. [8, p.80]

Definición 2.3.8. *El espacio* $\mathbf{L}_\infty = \mathbf{L}_\infty(\Omega, \mathbf{A}^\sigma, \mu)$ *consiste de todas las clases de equivalencia de funciones* $\mathbf{A}^\sigma$*-medibles las cuales son acotadas casi por doquier. Si* $f \in \mathbf{L}_\infty$ *y* $E \in \mathbf{A}^\sigma$ *con* $\mu(E) = 0$, *definimos*

$$S(E) = sup\{|f(\omega)|: \omega \notin E\}$$

y $\|f\|_\infty = Inf\ \{S(E): E \in \mathbf{A}^\sigma,\ \mu(E) = 0\}$.

Un elemento de $\mathbf{L}_\infty$ *es llamada* ***función esencialmente acotada***.

Proposición 2.3.12. $\mathbf{L}_\infty$ *es un espacio lineal normado.* [8, p.12]

Proposición 2.3.13. $\mathbf{L}_\infty$ *es completo.* [8, p.16]

Proposición 2.3.14. *Si* $f \in \mathbf{L}_1$ *y* $g \in \mathbf{L}_\infty$, *entonces*

$$\int |f \cdot g| d\mu \leq \|f\|_1\ \|g\|_\infty.\ [\ 8,\ p.13\ ]$$

Proposición 2.3.15. *Sea* f *una función medible acotada entonces* $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$. [8, p.14]

2.4 PRODUCTO DE MEDIDAS.

Sea $(\Omega_1, \mathbf{A}_1^\sigma, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathbf{A}_2^\sigma, \mu_2)$ dos espacios de medida completos y consideremos el producto directo $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Definición 2.4.1. *Si* $E \subset \Omega_1$ *y* $F \subset \Omega_2$. *Llamaremos a* $E \times F$ *un* ***rectángulo***. *Si* $E \in \mathbf{A}_1^\sigma$ *y* $F \in \mathbf{A}_2^\sigma$, *llamaremos a* $E \times F$ *un* ***rectángulo medible***.

La colección $\mathbf{R}$ de rectángulos medibles es una semi-álgebra ya que

$$(E_1 \times F_1) \cap (E_2 \times F_2) = (E_1 \cap E_2) \times (F_1 \cap F_2)$$

y $\sim(E \times F) = (\tilde{E} \times F) \cup (E \times \tilde{F}) \cup (\tilde{E} \times \tilde{F})$.

Si $E \times F \in \mathcal{R}$, definimos $\mu_1 \times \mu_2$ tal que

$$\mu_1 \times \mu_2 (E \times F) = \mu_1(E).\mu_2(F).$$

Lema 2.4.1. *Sea* $\{(E_n \times F_n)\}_{n\geq 1}$ *una sucesión disjunta de rectángulos medibles cuya unión es un rectángulo medible* $E \times F$. *Entonces*

$$\mu_1 \times \mu_2 \ (E \times F) = \sum_{n\geq 1} \mu_1 \times \mu_2 (E_n \times F_n).$$

Prueba. Sea $\omega \in E$ un punto fijo. Entonces para cada $\nu \in F$, el punto (ω, ν) pertenece exactamente a un rectángulo $E_n \times F_n$. Así F es la unión disjunta de las F_n para el correspondiente $\omega \in E_n$. Etnonces

$$\sum_{n\geq 1} \mu_2(F_n).1_{E_n}(\omega) = (F).1_E(\omega),$$

dado que μ_2 es contablemente aditiva. Así por proposición 2.1.4, tenemos

$$\sum_{n\geq 1} \int \mu_2(F_n).1_{E_n} d\mu_1 = \int \mu_2(F).1_E d\mu_1$$

ó

$$\sum_{n\geq 1} \mu_2(F_n).\mu_1(E_n) = \mu_2(F\ ).\mu_1(E).$$

Es decir

$$\sum_{n\geq 1} \mu_1 \times \mu_2(E_n \times F_n) = \mu_1 \times \mu_2(E \times F). \quad \therefore$$

El Lema 2.3.1. implica que $\mu_1 \times \mu_2$ satisface las condiciones de la proposición 1.3.2 y entonces tiene una única extensión a una medida en el álgebra $\mathbf{A}(\boldsymbol{R})$, consistente de todas las uniones finitas de conjuntos disjuntos de $\boldsymbol{R}$.

Por teorema 1.3.1 tenemos que $\mu_1 \times \mu_2$ es una medida completa en un σ-álgebra $\boldsymbol{R}^{\sigma}$ que contiene a R. A esta extensión de $\mu_1 \times \mu_2$ es llamada la **medida producto de** μ_1 y μ_2. Si μ_1 y μ_2 son finitas (o σ-finitas) entonces $\mu_1 \times \mu_2$ también lo es.

Observación. *Si* Ω_1 *y* Ω_2 son subconjuntos de los números reales y μ_1, μ_2 son ambas la medida de Lebesgue entonces $\mu_1 \times \mu_2$ es llamada **la medida de Lebesgue bidimencional para el plano.**

Nota. Si $\mu_1 = \mu_2$ entonces $\mu_1 \times \mu_2$ lo denotaremos por μ^2.

Definición 2.4.2. *Sea* $f\colon \boldsymbol{R} \subset \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ *una función. Se dice que* f *es una función medible con respecto a* $\boldsymbol{R}^{\sigma}$ *si:*

i. $R \in \boldsymbol{R}^{\sigma}$

ii. $\forall\, B \in \boldsymbol{B}(\mathbb{R})$; $f^{-1}(B) \in \boldsymbol{R}^{\sigma}$.

La intención de las próximas lemas es describir las estructuras de los conjuntos que son medibles respecto a la medida producto $\mu_1 \times \mu_2$.

Definición 2.4.3. *Si R es cualquier subconjunto de $\Omega_1 \times \Omega_2$ y ω es un punto de Ω_1; definimos la sección transversal en ω a el conjunto R_ω por $R_\omega = \{\nu \in \Omega_2 : (\omega, \nu) \in R\}$.*

Similarmente se puede definir la sección transversal en ν para $\nu \in \Omega_2$. La función característica de R_ω está relacionada con la de R por

$$1_{R_\omega}(\nu) = 1_R(\omega, \nu).$$

También se tiene que $(\tilde{R})_\omega = \sim(R_\omega)$ y $(\cup R_\alpha)_\omega = \cup (R_\alpha)_\omega$ para toda colección $\{R_\alpha\}$.

Lema 2.4.2. *Sea $\omega \in \Omega_1$ y $R \in \mathbf{R}_{\sigma\delta}$. Entonces R_ω es un subconjunto medible de Ω_2.*

Prueba. El lema es tribial si $R \in \mathbf{R}$ ya que R sería un rectángulo medible. Demostremos ahora que es cierto para $R \in \mathbf{R}_\sigma$.

Sea $R = \bigcup_{n \geq 1} R_n$, donde $R_n \in \mathbf{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} 1_{R_\omega}(\nu) &= 1_R(\omega, \nu) \\ &= \sup_n 1_{R_n}(\omega, \nu) \\ &= \sup_n 1_{(R_n)_\omega}(\nu). \end{aligned}$$

dado que R_n es un rectángulo medible, $1_{(R_n)_\omega}$ es una función medible de Ω_2, y así 1_{R_ω} es medible. Entonces R_ω es medible.

Supongamos el caso que $R = \bigcap_{n \geq 1} R_n \in \mathbf{R}_\sigma$. Entonces

$$\begin{aligned} 1_{R_\omega}(\nu) &= 1_R(\omega, \nu) \\ &= \operatorname{Inf}_n 1_{R_n}(\omega, \nu) \\ &= \operatorname{Inf}_n 1_{(R_n)_\omega}(\nu) \end{aligned}$$

como 1_{R_n} es medible. Así R_ω es medible para todo $R \in \mathbf{R}_{\sigma\delta}$. ∴

Lema 2.4.3. *Sea R es un conjunto en $\mathbf{R}_{\sigma\delta}$ con $\mu_1 \times \mu_2(R) < \infty$. Entonces la función g definida por*

$$g(\omega) = \mu_2(R_\omega),$$

es una función de ω, $\mathbf{A}_1^\sigma$-medible y $\int g d\mu_1 = \mu_1 \times \mu_2(R)$.

Prueba. El lema es trivialmente cierto si R es un rectángulo medible ya que $R = E \times F$; con $E \in A_1^\sigma$, y $F \in \mathbf{A}_2^\sigma$. Notemos que los conjuntos de $\mathbf{R}_\sigma$ son la unión de rectángulos medibles.

Sea $\{R_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de rectángulos medibles, disjuntos y sea $R = \bigcup_{n \geq 1} R_n$.

Sea $g_n(\omega) = \mu_2[(R_n)_\omega]$, entonces g_n es una función medible no negativa y $g = \sum_{n \geq 1} g_n$.

Así g es medible, y por proposición 2.1.3 tenemos que

$$\int g d\mu_1 = \sum_{n\geq 1} \int g_n d\mu_1$$

$$= \sum_{n\geq 1} \mu_1 \times \mu_2(R_n)$$

$$= \mu_1 \times \mu_2(R).$$

Por lo tanto se cumple para $R \subset \mathbf{R}_\sigma$.

Sea $R \in \mathbf{R}_{\sigma\delta}$, entonces hay una sucesión $\{R_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos en $\mathbf{R}_\sigma$ tal que $R_{n+1} \subset R_n$ y $R = \bigcap_{n\geq 1} R_n$. De acuerdo con la hipótesis debemos considerar $\mu_1 \times \mu_2(R_1) < \infty$.

Sea $g_n(\omega) = \mu_2[(R_n)_\omega]$. Como $\int g_1 d\mu_1 = \mu_1 \times \mu_2(R_1) < \infty$, tenemos que $g_1(\omega) < \infty$ c x d(μ_1). Para ω tal que $g_1(\omega) < \infty$, tenemos que $\{(R_n)_\omega\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles, de medida finita cuya intersección es R_ω.

Así por proposición 1.2.3 tenemos

$$g(\omega) = \mu_2(R_\omega)$$

$$= \text{Lim}\ \mu_2[(R_n)_\omega]$$

$$= \text{Lim}\ g_n(\omega).$$

Entonces $g_n \to g$ c x d(μ_1), de donde g es medible. Luego como $0 \leq g_n \leq g_1$, por proposición 2.1.8 implica que

$$\int g d\mu_1 = \text{Lim} \int g_n d\mu_1$$

$$= \text{Lim}\ \mu_1 \times \mu_1(R_n)$$

$$= \mu_1 \times \mu_2(R). \quad ∴$$

Definición 2.4.4. *Sea* E *un subconjunto de* $\Omega_1 \times \Omega_2$. *Entonces definimos la* ***medida exterior bidimencional inducida por*** $\mu_1 \times \mu_2$, *por*

$$(\mu_1 \times \mu_2)^*(E) = \mathit{Inf} \sum_{n=1}^{k} \mu_1 \times \mu_2(R_n)$$

donde $\{R_n\}_{n\geq 1}$ *es cualquier sucesión de elementos de* $\boldsymbol{R}$ *tal que* $E \subset \bigcup_{n\geq 1} R_n$.

Lema 2.4.4. *Sea* E *un conjunto para el cual* $\mu_1 \times \mu_2(E) = 0$. *Entonces para casi todo* ω *tenemos que* $\mu_2(E_\omega) = 0$.

Prueba. Por la proposición 1.3.1, hay un conjunto F en $\boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$ tal que $E \subset F$ y $\mu_1 \times \mu_2(F) = 0$. Por lema 2.4.3, F_ω es medible y $\mu_2(F_\omega) = 0$ c x d(μ_1) por proposición 2.1.6. Pero $E_\omega \subset F_\omega$, y así $\mu_2(E_\omega) = 0$. ⁂

Observación. El lema anterior significa que μ_2 es completa.

Proposición 2.4.1. *Sea* E *un subconjunto medible de* $\Omega_1 \times \Omega_2$ *tal que* $\mu_1 \times \mu_2(E) < \infty$. *Entonces casi para todo* ω *el conjunto* E_ω *es un subconjunto medible de* Ω_2. *La función* g *definida por* $g(\omega) = \mu_1(E_\omega)$, *es una función medible definida* c x d(μ_1) y $\int g d\mu_1 = \mu_1 \times \mu_2(E)$.

Prueba. Por proposición 1.3.1, hay un conjunto $F \in \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$ tal que $E \subset F$ y $\mu_1 \times \mu_2(F) = \mu_1 \times \mu_2(E)$.

Sea G = F - E. Dado que F y E son medible, lo es G, y $\mu_1 \times \mu_2(F) = \mu_1 \times \mu_2(E) + \mu_1 \times \mu_2(G)$. Pero como $\mu_1 \times \mu_2(F) = \mu_1 \times \mu_2(E)$ se tiene que $\mu_1 \times \mu_2(G) = 0$. Así por lema 2.4.4 tenemos que $\mu_2(G_\omega) = 0$, almenos para todo ω. Entonces

$$\mu_2(F_\omega) - \mu_2(E_\omega) = \mu_2(G_\omega) = 0,$$
$$\text{así}\quad \mu_2(F_\omega) = \mu_2(E_\omega) = g(\omega);\ c \times d(\mu_1),$$

y así g es una función medible por lema 2.4.3 y

$$\int g d\mu_1 = \mu_1 \times \mu_2(F)$$
$$= \mu_1 \times \mu_2(E). \quad *$$

Los dos teoremas siguientes hacen posible el intercambio de orden de integración y el cálculo de la integral con respecto a el producto de medidas por iteracciones.

Teorema 2.4.1. **(Fubini).** *Sea* $(\Omega_1, A_1^\sigma, \mu_1)$ *y* $(\Omega_2, A_2^\sigma, \mu_2)$ *dos espacios medibles completos y* f *una función integrable en* $\Omega_1 \times \Omega_2$ *entonces:*

i. *Para casi todo* ω *a función* f_ω *definida por* $f_\omega(\nu) = f(\omega, \nu)$ *es una función integrable en* Ω_2*;*

i'. *Para casi todo* ν *la función* f_ν *definida por* $f_\omega(\nu) = f(\omega, \nu)$ *es una función integrable en* Ω_1*;*

ii. $\int_{\Omega_2} f(\omega, \nu)\, d\mu_2$ *es una función integrable en* Ω_1;

ii'. $\int_{\Omega_1} f(\omega, \nu)\, d\mu_1$ *es una función integrable en* Ω_2;

iii. $\int_{\Omega_1} [\int_{\Omega_2} f d\mu_2] d\mu_1 = \int_{\Omega_1 x \Omega_2} f d(\mu_1 x \mu_2) = \int_{\Omega_2} [\int_{\Omega_1} f d\mu_1] d\mu_2$

Prueba. Por la similitud de las pruebas, solo es necesario probar i., ii. y la primera parte de iii., y para f no negativa ya que $f = f^+ - f^-$.

La proposición 2.4.1, muestra que el teorema es cierto si f es la función característica de un conjunto medible de medida finita ya que $1_E(\omega, \nu) = 1_{E_\omega}(\nu)$, donde 1_{E_ω} es una función medible y $\int_{\Omega_2} 1_{E_\omega} d\mu_2 = \mu_2(E_\omega) = g(\omega) < \infty$ c x d(μ_1), además $g(\omega)$ es medible c x d(μ_1) y

$$\int_{\Omega_1} g(\omega) d\mu_1 = \int_{\Omega_1} [\int_{\Omega_2} 1_E d\mu_2] d\mu_1 = \mu_1 x \mu_2 (E) < \infty.$$

Si f es una función simple la cual se anula en el exterior de un conjunto de medida finita, el teorema es tribialmente cierto.

Si f es una función no-negativa, por proposición 1.3.11, f es el límite de una sucesión creciente $\{\Phi_n\}_{n \geq 1}$ de funciones simples no negativas e integrables, que se anulan en el exterior de un conjunto de medida finita. Así f_ω es el límite de la sucesión creciente $\{(\Phi_n)_\omega\}_{n\geq 1}$, la cual es medible. Por proposición 2.1.3 tenemos:

$$\int_{\Omega_2} f(\omega,\ \nu)d\mu_2 = \text{Lim} \int_{\Omega_2} \Phi_n(\omega,\ \nu)d\mu_2 < \infty,$$

y así f_ω es integrable y una función medible en ω y

$$\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2} f d\mu_2\right]d\mu_1 = \text{Lim}\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}\Phi_n d\mu_2\right]d\mu_1$$

$$= \text{Lim}\int_{\Omega_1 x \Omega_2}\Phi_n d(\mu_1 x \mu_2)$$

$$= \int_{\Omega_1 x\Omega_2} f d(\mu_1 x \mu_2). \quad *$$

Para aplicar el teorema 2.4.1 se debe primero verificar que f es integrable con respecto a μ_1 x μ_2 es decir probar que f es medible en Ω_1 x Ω_2 y que $\int |f|\ d(\mu_1 \text{ x } \mu_2) < \infty$. La medibilidad de f en Ω_1 x Ω_2 establece ciertas dificultades, pero para muchos casos podemos establecer por consideraciones topológicas. En el caso cuando μ_1 y μ_2 son σ-finitas, la integrabilidad de f puede determinarse por interacciones de la integral.

Teorema 2.4. 2. (**Tonelli**). *Sea* $(\Omega_1,\ \mathbf{A}_1^\sigma,\ \mu_1)$ *y* $(\Omega_2,\ \mathbf{A}_2^\sigma,\ \mu_2)$ *dos espacios medibles* σ-*finitos, y sea* f *una función medible no negativa en* Ω_1 x Ω_2. *Entonces:*

i. Para casi todo ω *la función* f_ω *definida por* $f_\omega(\nu) = f(\omega,\ \nu)$ *es una función medible en* Ω_2;

i'. *Para casi todo ν la función f_ω definida por $f_\nu(\omega) = f(\omega, \nu)$ es una función medible en Ω_1;*

ii. $\int_{\Omega_2} f(\omega, \nu)d\mu_2$ *es una función medible en* Ω_1;

ii'. $\int_{\Omega_1} f(\omega, \nu)d\mu_1$ *es una función medible en* Ω_2;

iii. $\int_{\Omega_1}[\int_{\Omega_2} f d\mu_2]d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \ \Omega_2} f d(\mu_1 x \mu_2) = \int_{\Omega_2}[\int_{\Omega_1} f d\mu_1]d\mu_2$

Prueba. Por la similitud de las pruebas, solo es necesario probar i., ii., y la primera parte de iii..

Como f es una función medible no-negativa en un espacio medible σ-finito entonces existe $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}^{\uparrow}$ una sucesión de funciones simples tal que $f = \text{Lim } \Phi_n$ para todo Ω_1 x Ω_2. Donde Φ_n se anula en el exterior de un conjunto de medida finita.

Ya que $\{(\Phi_n)_\omega\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones simples crecientes tal que $f_\omega = \text{Lim } (\Phi_n)_\omega$ para todo $\nu \in \Omega_2$ se tiene que f_ω es medible en Ω_2.

Además Φ_n se anula en el exterior de un conjunto de medida finita. Por proposición 2.4.1, $\int_{\Omega_2} \Phi_n(\omega, \nu)d\mu_2$ es una función medible en Ω_1. Luego

$$\int_{\Omega_2} f(\omega, \nu)d\mu_2 = \int_{\Omega_2} \text{Lim } \Phi_n(\omega, \nu)d\mu_2$$

$$= \text{Lim} \int_{\Omega_2} \Phi_n(\omega, \nu)d\mu_2$$

Por proposición 2.1,3, $\int_{\Omega_2} f(\omega, \nu)d\mu_2$ es una función medible en Ω_2.

De acuerdo a los razonamientos anteriores se tiene que

$$\int_{\Omega}\left[\int_{\Omega_2} \Phi_n(\omega, \nu)d\mu_2\right]d\mu_1 = \int_{\Omega_1 x \Omega_2} \Phi(\omega, \nu)d(\mu_1 \times \mu_2).$$

Luego
$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2} f(\omega, \nu)d\mu_2\right]d\mu_1 &= \mathrm{Lim} \int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2} \Phi_n(\omega, \nu)d\mu_2\right]d\mu_1 \\ &= \mathrm{Lim} \int_{\Omega_1 x \Omega_2} \Phi(\omega,\nu)d(\mu_1 \times \mu_2) \\ &= \int_{\Omega_1 x \Omega_2} f(\omega,\nu)d(\mu_1 \times \mu_2).\end{aligned}$$ ☆

Proposición 2.4.2. *Sea h y g funciones integrables en Ω_1 y Ω_2 respectivamente. Entonces $f(\omega, \nu) = h(\omega).g(\nu)$ es una función medible en $\Omega_1 \times \Omega_2$ y $\int_{\Omega_1 x \Omega_2} f d(\mu_1 x \mu_2) = \int_{\Omega_1} h d\mu_1 . \int_{\Omega_2} g d\mu_2$*

Prueba. Si $h(\omega) = 1_E(\omega)$, con $E \in A_1^\sigma$ y $g(\nu) = 1_F(\nu)$ con $F \in A_2^\sigma$ y además como h y g son integrables en Ω_1 y Ω_2 respectivamente entonces $\mu_1(E) < \infty$ y $\mu_2(F) < \infty$. Además

$$\begin{aligned} f(\omega, \nu) &= h(\omega).g(\nu) \\ &= 1_E(\omega).1_F(\nu) \\ &= 1_{ExF}(\omega, \nu),\end{aligned}$$

donde $E \times F \in A_1^\sigma \times A_2^\sigma$ y

$$\int_{\Omega_1 x \Omega_2} f(\omega, \nu)\ d(\mu_1 x \mu_2) = \int_{\Omega_1 x \Omega_2} 1_{ExF} d(\mu_1 x \mu_2)$$

$$= \mu_1 \ x \ \mu_2 (E \ x \ F)$$

$$= \mu_1(E) . \mu_2(F)$$

$$= \int_{\Omega_1} h d\mu_1 \ . \int_{\Omega_2} g d\mu_2$$

Si h y g son funciones simples en Ω_1 y Ω_2 respectivamente

entonces $h = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n 1_{E_n}$ y $g = \sum_{m=1}^{l} \alpha^1 1_{F_n}$. De donde

$$f(\omega, \nu) = h(\omega) . g(\nu)$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \alpha_n 1_{E_n}(\omega) \ . \sum_{m=1}^{l} \alpha_m^1 1_{F_m}(\nu)$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=1}^{l} \alpha_n \alpha_m^1 1_{E_n}(\omega) . 1_{F_m}(\nu)$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=1}^{l} \alpha_n \alpha_m^1 \ 1_{E_n x F_m}(\omega, \ \nu)$$

Con E_n x F_m ε $\mathbf{A}_1^{\sigma}$ x $\mathbf{A}_2^{\sigma}$. Por lo tanto f es medible en Ω_1 x Ω_2 y

$$\int_{\Omega_1 x \Omega_2} f(\omega, \ \nu) d(\mu_1 x \mu_2) = \int_{\Omega_1 x \Omega_2} h(\omega) . g(\nu) \ d\mu_1 \ x \ \mu_2$$

$$= \int_{\Omega_1 x \Omega_2} \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=1}^{l} \alpha_n \alpha_m^1 1_{E_n x F_m}(\omega, \nu) d(\mu_1 \ x \mu_2)$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=1}^{l} \alpha_n \alpha_m^1 \ \mu_1 x \mu_2 (E_n \ x \ F_m)$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=1}^{l} \alpha_n \alpha_m^1 \; \mu_1(E_n).\mu_2(F_m)$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \mu_1(E_n) . \sum_{m=1}^{l} \alpha_m^1 \; \mu_2(F_m)$$

$$= \int_{\Omega_1} h(\omega)\,d\mu_1 \; . \; \int_{\Omega_2} h(\nu)\,d\mu_2 .$$

Sea $h(\omega) \geq 0$ y $g(\nu) \geq 0$, funciones medibles e integrables en Ω_1 y Ω_2 respectivamente, entonces existen sucesiones de funciones simples no decrecientes $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}^{\uparrow}$ y $\{\Psi_n\}_{n\geq 1}^{\uparrow}$ tales que Lim $\Phi_n = h$ y Lim $\Psi_n = g$. De donde se tiene que:

$$\begin{aligned} f(\omega, \nu) &= h(\omega).g(\nu) \\ &= \text{Lim } \Phi_n(\omega). \text{ Lim } \Psi_n(\nu) \\ &= \text{Lim } \Phi_n(\omega). \; \Psi_n(\nu) \\ &= \text{Lim } \theta_n(\omega, \nu), \end{aligned}$$

Tal que como h y g son integrables en Ω_1 y Ω_2 respectivamente entonces Φ_n y Ψ_n lo son y por el caso anterior θ_n es integrable en Ω_1 x Ω_2 y además $\theta_n \leq f$. Luego por proposición 2.1.3 se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \; \Omega_2} f\,d(\mu_1 x \mu_2) &= \text{Lim} \int_{\Omega_1 \; \Omega_2} \theta_n d(\mu_1 \; x \; \mu_2) \\ &= \text{Lim} \int_{\Omega_1} \Phi_n d\mu_1 \; . \; \int_{\Omega_2} \Psi_n d\mu_2 \\ &= \text{Lim} \int_{\Omega_1} \Phi_n d\mu_1 \; . \; \text{Lim} \int_{\Omega_2} \Psi_n d\mu_2 \\ &= \int_{\Omega_1} h\,d\mu_1 \; . \; \int_{\Omega_2} g\,d\mu_2 \qquad * \end{aligned}$$

En los siguientes ejemplos mostraremos que no es posible remover la hipótesis de los teoremas de Fabini y Tonelli.

Ejemplo 1. *Este ejemplo tiene como objetivo mostrar que no podemos prescindir de la integrabilidad de f en el teorema de Fubini, ni de la no negatividad de f en el teorema de Tonelli.*

Sea $\mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{\Omega}_2 = \mathbb{Z}^+$ *y* $\mathbf{A}_1^\sigma = \mathbf{A}_2^\sigma = P(\mathbb{Z})$. *Consideremos* $\mu = \mu_1 = \mu_2$ *la medida definida por* $\mu(E)$ *es igual al número de puntos de* E *y si* E *es infinito entonces* $\mu(E) = \infty$. *Esta medida es llamada la* ***medida que cuenta.***

Sea.

$$f(\omega, \nu) = \begin{cases} 2 - 2^{-\omega}; & \text{si } \omega = \nu \\ -2 + 2^{-\omega}; & \text{si } \omega = \nu + 1 \\ 0 & ; \sim \end{cases}$$

Solución. Sea f^+, dado que f es medible entonces f^+ lo es y además existe $\{\Phi_k\}_{k\geq 1}^{\uparrow}$ tal que $\text{Lim}\ \Phi_k = f^+$. Consideremos

$$\Phi_k = \sum_{n=1}^{k-1} (2-2^{-1}) 1_{S(n,1/2)} + (2-2^{-k}) 1_{D(\mathbb{Z}^+ x\mathbb{Z}^+)} - \bigcup_{n=1}^{k-1} S(n,1/2),$$

donde $S(n,1/2)$ es la Bola abierta con centro en n y radio 1/2 con la métrica discreta en $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$.

De donde
$$\int_{\mathbb{Z}^+ x\mathbb{Z}^+} \Phi_k d\mu^2 = \sum_{n=1}^{k-1} (2-2^{-n}) \mu^2(S(n,1/2)) +$$
$$(2-2^{-k}) \mu^2 \left[D(\mathbb{Z}^+ x\mathbb{Z}^+) - \bigcup_{n=1}^{k-1} S(n,1/2) \right]$$
$$= \sum_{n=1}^{k-1} (2-2^{-n}) + (2-2^{-k})\ \infty$$
$$= \infty.$$

Además por proposición 2.1.3 se tiene que:

$$\int_{\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+} f^+ d\mu^2 = \text{Lim} \int_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+} \Phi_n \, d\mu^2$$

$$= \infty,$$

similar para f^-. Por lo tanto f no es integrable en $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$

y
$$f_\omega(\nu) = \begin{cases} 2 - 2^{-\omega}; & \text{si } \omega = \nu \\ -2 + 2^{-\omega}; & \text{si } \omega = \nu + 1 \\ 0 \quad ; & \sim \end{cases}$$

donde f_ω es medible en $\mathbb{Z}^+$ y $\int_{\mathbb{Z}^+} f_\omega(\nu)\, d\mu = (2-2^{-\omega}) + (-2+2^{-\omega}) = 0$

es una función medible en $\mathbb{Z}$. Pero

$$\int_{\mathbb{Z}^+} \left[\int_{\mathbb{Z}^+} f(\omega, \nu)\, d\mu \right] d\mu = 0,$$

por lo que se concluye que no se cumple el insiso iii., de los teoremas de Fabini y Tonelli. ☆

Ejemplo 2. *Este ejemplo muestra que no se puede remover la hipótesis que f sea integrable en el teorema de Fubini ó que μ_1 y μ_2 sean σ-finitas frente al teorema de Tonelli.*

Sea $\mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{\Omega}_2 = [0,1]$, con $\mathbf{A}_1^\sigma = \mathbf{A}_2^\sigma = \mathbf{B}([0,1])$. Sea μ_1 la medida de Lebesgue y μ_2 la medida que cuenta. Entonces la diagonal $\Delta = \{(\omega, \nu) \in \mathbf{\Omega}_2 \times \mathbf{\Omega}_2 : \omega = \nu\}$ es medible (esta en $\mathbf{R}_{\sigma\delta}$) pero la función característica no satisface la igualdad en la condición iii., de los teoremas de Fabini y Tonelli.

Solución. Sea $\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\}$ una partición del intervalo $[0,1]$, entonces los rectángulos $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ son medibles ya que $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \in \mathcal{B}([0,1])$. Además

$\bigcup_{i=1}^{n} [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ esta en $\mathcal{R}_\sigma$ por lo tanto pertenece a $\sigma(\mathcal{B}([0,1]) \times \mathcal{B}([0,1]))$, tal que $\Delta \subset \bigcup_{i=1}^{n} [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ para cualquier n. Entonces

$\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{i=1}^{n} [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \in \sigma(\mathcal{B}([0,1]) \times \mathcal{B}([0,1]))$,

y $(\omega, \nu) \in \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{i=1}^{n} [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ entonces $(\omega, \nu) \in \Delta$.

es decir

$$\Delta = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{i=1}^{n} [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$$

donde concluimos que Δ es medible.

Sea 1_Δ la función característica de Δ, donde.

$$\int_{\Omega_1 x \Omega_2} 1_\Delta d\mu_1 \times \mu_2 = \mu_1 \times \mu_2(\Delta)$$

$$= \text{Lim}\ \mu_1 x \mu_2 [\bigcup_{i=1}^{n} [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]];$$

por proposición 1.2.3.

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu_1([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]) \times \mu_2([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}])$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}.\infty$$

$$= \infty.$$

y μ_2 no es σ-finita.

Consideremos $\int_{\Omega_1} 1_\Delta d\mu_1 = \mu_1(\Delta_\nu) = 0$, entonces

$\int_{\Omega_2} [\int_{\Omega_1} 1_\Delta d\mu_1] d\mu_2 = 0$. Por otra parte $\int_{\Omega_2} 1_\Delta d\mu_2 = \mu_2(\Delta_\omega) = 1$,

entonces $\int_{\Omega_1} [\int_{\Omega_2} 1_\Delta d\mu_2] d\mu_1 = \mu_1(\Omega_1) = 1$. De donde

$$\int_{\Omega_2} [\int_{\Omega_1} 1_\Delta d\mu_1] d\mu_2 \neq \int_{\Omega_1} [\int_{\Omega_2} 1_\Delta d\mu_2] d\mu_1. \quad ⁂$$

Si $\mathbf{A}_1^\sigma$ y $\mathbf{A}_2^\sigma$ son dos σ-álgebras en Ω_1 y Ω_2 respectivamente. El σ-álgebra mas pequeña que contiene a las rectángulas medibles lo denotamos por $\mathbf{A}_1^\sigma \times \mathbf{A}_2^\sigma$. Así el producto de medidas es definido en un σ-álgebra conteniendo a $\mathbf{A}_1^\sigma \times \mathbf{A}_2^\sigma$ y donde $\mu_1 \times \mu_2$ es obtenido por el proceso de extención de Corethe-odory, por lo tanto es completa y saturada. Entonces tenemos el espacio producto de medida $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbf{A}_1^\sigma \times \mathbf{A}_2^\sigma, \mu_1 \times \mu_2)$.

2.5 GENERALIZACION DEL PRODUCTO DE MEDIDAS

Sea $\{(\Omega_n, \mathbf{A}_n^\sigma, \mu_n)\}_{n=1}^k$ una colección de espacios de medida. Entenderemos por un rectángulo a $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$, con $E_n \varepsilon\, \Omega_n$ para todo $n = 1, \ldots, k$. Si $E_n \subset \mathbf{A}_n^\sigma$, para todo $n = 1, \ldots, k$ entonces $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$ le llamaremos rectángulo medible.

Definamos.

$${}^{k}\mathcal{R} = \{{}^{k}E : {}^{k}E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k, \text{ Con } E_n \in \mathbf{A}_n^{\sigma}; n=1,\ldots,k\}$$

Entonces ${}^{k}\mathcal{R}$ así definido es un semi-álgebra de subconjuntos de $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_k$.

Nota. Para facilitar el desarrollo de las pruebas, consideraremos las siguientes notaciones:

i. Sea $\{E_n\}_{n=1}^{k}$ una colección de conjuntos, entonces $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$ lo denotaremos por $\underset{n=1}{\overset{k}{\mathbf{E}}}$ y $\omega \in \underset{n=1}{\overset{k}{\mathbf{E}}}$ por $(\omega_n)_{n=1}^{k}$

ii. Sea $\{\mu_n\}_{n=1}^{k}$ una colección de medidas, entonces $\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_k$ lo denotaremos por $\underset{n=1}{\overset{k}{\mu}}$ y $\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_k = {}^{k}\mu$.

iii. Sea $\{\mathbf{A}_n^{\sigma}\}_{n=1}^{k}$ una colección de σ-álgebras, entonces $\mathbf{A}_1^{\sigma} \times \mathbf{A}_2^{\sigma} \times \ldots \times \mathbf{A}^{\sigma} = \underset{n=1}{\overset{k}{\mathbf{A}^{\sigma}}}$ y $\sigma({}^{k}\mathcal{R}) = \mathbf{A}_1^{\sigma} \times \mathbf{A}_2^{\sigma} \times \ldots \times \mathbf{A}_k^{\sigma} = \underset{n=1}{\overset{k}{\mathbf{A}^{\sigma}}}$

El lema 2.3.1 es válido, pra los elementos de ${}^{k}\mathcal{R}$ con la medida producto definido por:

$$\underset{n=1}{\overset{k}{\mu}} \left(\underset{n=1}{\overset{k}{\mathbf{E}}} \right) = \prod_{n=1}^{k} \mu_n(E_n).$$

Nota. La prueba del lema 2.4.1 se desarrolla por inducción matemática, auxiliada de la propiedad asociativa.

Lema 2.5.1. *Sea* $\{{}^kE_n\}_{n\geq 1}$ *una colección disjunta de rectángulos medibles, cuya unión es un rectángulo medible* ${}^kE$. *Entonces* $\overset{k}{\underset{n=1}{\mu}}({}^kE) = \sum_{i\geq 1} \overset{k}{\underset{n=1}{\mu}}({}^kE_i)$.

Prueba. Tenemos que ${}^kE = \bigcup_{n\geq 1} {}^kE_n$ entonces $1_{{}^kE} = 1_{\bigcup_{n\geq 1} {}^kE_n}$, pero las ${}^kE_n$ son disjuntas de donde.

$$1_{{}^kE} = \sum_{n\geq 1} 1_{{}^kE_n}$$

Además ${}^kE \in {}^k\mathcal{R}$ así como ${}^kE_n$, entonces ${}^kE = \overset{k}{\underset{i=1}{\mathbf{F}}}$ y ${}^kE_n = \overset{k}{\underset{i=1}{\mathbf{F}}}$.

Por lo cual

$1_{{}^kE} = 1_{\overset{k-1}{\underset{i=1}{\mathbf{F}}}} \cdot 1_{F_k} = \sum_{n\geq 1} 1_{\overset{k-1}{\underset{i=1}{\mathbf{F}^n}}} \cdot 1_{F_k^n}$; ya que $1_{E\times F} = 1_E \cdot 1_F$.

Integrando con respecto a μ_k y aplicando la proposición 2.1.3, tenemos:

$$1_{\overset{k-1}{\underset{i=1}{\mathbf{F}}}} \cdot \mu_k(F_k) = \sum_{n\geq 1} 1_{\overset{k-1}{\underset{i=1}{\mathbf{F}^n}}} \cdot \mu_k(F_k^n).$$

Por inducción tenemos que

$$\overset{k}{\underset{i=1}{\mu}}({}^kE) = \sum_{n\geq 1} \overset{k}{\underset{i=1}{\mu}}({}^kE_n) \qquad ∴$$

Dicho resultado implica que $\overset{k}{\underset{n=1}{\mu}}$ satisface las condiciones de la proposición 1.3.2. Por lo tanto se puede extender a una medida en el álgebra $\mathbf{A}({}^k\mathcal{R})$, consistente de todas las uniones finitas de conjuntos disjuntos de ${}^k\mathcal{R}$. Por el teorema 1.3.1, tenemos que ${}^k\mu$ es una medida completa en $\sigma({}^k\mathcal{R})$, denotada por $\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}^{\sigma}$. Si μ_n son finitas (o σ-finitas) para todo $n = 1,\ldots,k$ entonces ${}^k\mu$ también lo es.

Nota. Si los espacios de medida son iguales, entonces $\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_k = \mu^k$ y $\mathbf{A}_1^{\sigma} \times \mathbf{A}_2^{\sigma} \times \ldots \times \mathbf{A}_k^{\sigma} = (\mathbf{A}^{\sigma})$

Definición 2.5.1. *Si E es cualquier subconjunto de* $\prod_{n=1}^{k}\Omega$ *y* ω_j *en* Ω_j*; definimos la* ***sección transversal de*** *E en* ω_j *al conjunto*

$$E_{\omega_j} = \{(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_k) \in \prod_{\substack{n=1\\n\neq j}}^{k}\Omega : (\omega_n)_{n=1}^{k} \in E\}$$

Observación. Se cumple que $1_{E_{\omega_j}}((\omega_n)_{\substack{n=1\\n\neq j}}^{k}) = 1_E((\omega_n)_{n=1}^{k})$ y $(\tilde{E})_{\omega_j} = \sim(E_{\omega_j})$. También $(\cup E_\alpha)_{\omega_j} = \cup (E_\alpha)_{\omega_j}$ para toda colección $\{E_\alpha\}$.

Lema 2.5.2. *Sea* $\omega_j \in \mathbf{\Omega}_j$ y $E \in {}^k\mathcal{R}_{\sigma\delta}$, *con* $\prod_{n=1}^{k}\mu(E) < \infty$. *Entonces* E_{ω_j} *es un subconjunto medible* $\prod_{\substack{n=1\\n\neq j}}^{k}\Omega$ *y la función g definida por*

$$g(\omega_j) = \prod_{\substack{n=1\\n\neq j}}^{k}\mu\,(E_{\omega_j}),$$

es una función medible en Ω_j *y* $\int g\,d\mu_j = \prod_{n=1}^{k}\mu\,(E)$.

Prueba. La prueba de este lema es similar a la prueba de los lemas 2.4.2 y 2.4.3. Por lo cual solo probaremos que se cumple cuando $E \in {}^{k}\mathcal{R}$.

Como
$$1_{E_{\omega_j}}((\omega_n)_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{k}) = 1_E((\omega_n)_{n=1}^{k}),$$

donde E es un rectángulo medible, entonces 1_E es una función medible y por lo tanto también $1_{E_{\omega_j}}$ lo es. Luego E_{ω_j} es medible en $\mathop{\boldsymbol{\Omega}}\limits_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{k}$.

Además $E = \mathop{\mathbf{E}}\limits_{n=1}^{k}$ por lo tanto $E_{\omega_j} = \mathop{\mathbf{E}}\limits_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{k}$ y

$$\begin{aligned}
g(\omega_j) &= \mathop{\mu}\limits_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{k} (E_{\omega_j}) \\
&= \mathop{\mu}\limits_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{k} \Big(\mathop{\mathbf{E}}\limits_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{k} \Big) \\
&= \prod_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{k} \mu_n(E_n),
\end{aligned}$$

es decir g es una función constante en $\boldsymbol{\Omega}_j$, por lo tanto g es medible en $\boldsymbol{\Omega}_j$ con

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{\Omega}} g\,d\mu_j &= \int_{\boldsymbol{\Omega}_j} \prod_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{k} \mu\,(E_n)\,d\mu_j \\
&= \prod_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{k} \mu_n(E)\,.\ \mu_j(E_j)
\end{aligned}$$

$$= \overset{k}{\underset{n=1}{\mu}} (E), \qquad \ast$$

De el lema anterior se puede fácilmente probar la proposición 2.4.1 y desde luego los teoremas de Fabini y Tonelli.

A continuación enunciaremos la generalización de los teoremas de Fabini y Tonelli.

Teorema 2.5.1 (**Generalización del teorema de Fubini**). *Sea* $\{(\boldsymbol{\Omega}_n, \mathbf{A}_n^{\sigma}, \mu_n)\}_{n=1}^{k}$ *una colección de espacios de medida completos y* f *una función integrable en* $\overset{k}{\underset{n=1}{\boldsymbol{\Omega}}}$ *entonces:*

i. *Para casi todo* $\omega_j \in \boldsymbol{\Omega}_j$ *la función* f_{ω_j} *definida por* $f_{\omega_j}\left((\omega_n)_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{k}\right) = f\left((\omega_n)_{n=1}^{k}\right)$ *es una función integrable en* $\overset{k}{\underset{\substack{n=1\\ n\neq j}}{\boldsymbol{\Omega}}}$

ii. $\displaystyle\int_{\overset{k}{\underset{\substack{n=1\\ n\neq j}}{\boldsymbol{\Omega}}}} f d \overset{k}{\underset{\substack{n=1\\ n\neq j}}{\mu}}$ *es una función integrable en* $\boldsymbol{\Omega}_j$.

iii. $\displaystyle\int_{\overset{k}{\underset{n=1}{\boldsymbol{\Omega}}}} f d \overset{k}{\underset{n=1}{\mu}} = \int_{\boldsymbol{\Omega}_{i_1}} \int_{\boldsymbol{\Omega}_{i_2}} \cdots \int_{\boldsymbol{\Omega}_{i_k}} f d\mu_{i_k} \ldots d\mu_{i_2} . d\mu_{i_1},$

donde $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *es un arreglo adbitrario de los subindices.*

Teorema 2.5.2. (**Generalización del teorema de Tonelli**). *Sea*

$\{(\mathbf{\Omega}_n,\ \mathbf{A}_n^{\sigma},\ \mu_n)\}_{n=1}^{k}$ *una colección de espacios de medida σ-finitas y f una función medible no negativa en* $\overset{k}{\underset{n=1}{\mathbf{\Omega}}}$. *Entonces:*

i. *Para casi todo* $\omega_j \in \mathbf{\Omega}_j$ *la función* f_{ω_j} *definida por* $f_{\omega_j}((\omega_n)_{\substack{n=1\\n\neq j}}^{k}) = f((\omega_n)_{n=1}^{k})$ *es una función medible en* $\underset{\substack{n=1\\n\neq j}}{\mathbf{\Omega}}$.

ii. $\displaystyle\int_{\overset{k}{\underset{\substack{n=1\\n\neq j}}{\mathbf{\Omega}}}} f\,d\overset{k}{\underset{\substack{n=1\\n\neq j}}{\mu}}$ *es una función medible en* $\mathbf{\Omega}_j$.

iii. $\displaystyle\int_{\overset{k}{\underset{n=1}{\mathbf{\Omega}}}} f\,d\overset{k}{\underset{n=1}{\mu}} = \int_{\mathbf{\Omega}_{i_1}}\int_{\mathbf{\Omega}_{i_2}}\cdots\int_{\mathbf{\Omega}_{i_k}} f\,d\mu_{i_k}\cdots d\mu_{i_2}.d\mu_{i_1}$,

donde $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *es un arreglo adbitrario de los sub-índices.*

En base a los resultados obtenidos hasta el momento y sus respectivas generalizaciones, nos permite presentar de manera superficial el caso, para una sucesión de espacios de medida.

Sea $\{(\mathbf{\Omega}_n,\ \mathbf{A}_n^{\sigma},\ \mu_n)\}_{n\geq 1}$ una sucesión de espacios de medida y definamos el conjunto:

$$^{\infty}\mathbf{C} = \{^{\infty}E:\ ^{\infty}E = \underset{n\geq 1}{\mathbf{E}}\ ;\ \text{donde}\ \overset{k}{\underset{n=1}{\mathbf{E}}} \in \overset{k}{\underset{n=1}{\mathbf{A}}}{}^{\sigma},\ \text{con}\ k \geq 1\},$$

llamado el **semi-álgebra de cilindros de** $\underset{n\geq 1}{\mathbf{\Omega}}$ y definamos

$\underset{n\geq 1}{\mu}(^{\infty}E) = \underset{n\geq 1}{\Pi}\mu_n(E_n)$, donde $\overset{k}{\underset{n=1}{\mu}}$ es la medida de $\overset{k}{\underset{n=1}{\mathbf{A}}}{}^{\sigma}$, con

con $k \geq 1$.

Proposición 2.5.1. *Sea* $\{{}^{\infty}E_k\}_{k\geq 1}$ *una colección disjunta de rectángulos medibles cuya unión es un rectángulo medible* ${}^{\infty}E$. *Entonces*

$$\underset{n\geq 1}{\mu}\,({}^{\infty}E) = \sum_{n\geq 1} \underset{n\geq 1}{\mu}\,({}^{\infty}E_k).$$

Prueba. Sea ${}^{\infty}E = \underset{n\geq 1}{\mathbf{E}}$ y ${}^{\infty}E_k = \underset{n\geq 1}{\mathbf{E}^k}$, entonces

$$1_{{}^{\infty}E} = 1_{E_1}\, 1_{\underset{n\geq 2}{\mathbf{E}}}$$

$$= \sum_{k\geq 1} 1_{E}{}^{k} . 1_{\underset{n\geq 2}{\mathbf{E}^k}} .$$

Integrando con respecto a μ_1 y utilizando la proposición 2.1.3, tenemos.

$$\mu_1(E_1) . 1_{\underset{n\geq 2}{\mathbf{E}}} \qquad \sum_{k\geq 1} 1_{\underset{n\geq 2}{\mathbf{E}^k}} . \mu_1(E_1^k).$$

Por inducción sobre n tenemos que

$$\underset{n\geq 1}{\mu}\,({}^{\infty}E) = \sum_{k\geq 1} \underset{n\geq 1}{\mu}\,({}^{\infty}E_k). \qquad \ast$$

La proposición anterior nos da la pauta para poder extender $\underset{n\geq 1}{\mu}$ a una medida en un álgebra que contenga a ${}^{\infty}\mathbf{C}$ y por teorema 1.3.1, podemos extenderla a una medida en $\sigma({}^{\infty}\mathbf{C})$. Denotada por $\underset{n\geq 1}{\mathbf{A}^{\sigma}}$.

Proposición 2.5.2. *Sea* $\omega_j \in \mathbf{\Omega}_j$ *y* $E \in {}^{\infty}\mathbf{C}_{\sigma\delta}$, *con* $\underset{n\geq 1}{\mu}(E) < \infty$.

Entonces E_{ω_j} *es un subconjunto medible de* $\underset{\substack{n\geq 1\\ n\neq j}}{\mathbf{\Omega}}$ *y la función* g *definida por*

$$g(\omega_j) = \underset{\substack{n\geq 1\\ n\neq j}}{\mu}(E_{\omega_j}),$$

es una función medible en $\mathbf{\Omega}_j$ *y* $\int g d\mu_j = \underset{n\geq 1}{\mu}(E)$.

Nota. Si los espacios de medida son iguales entonces denotaremos $\mu \times \ldots \times \mu \times \ldots = {}^{\infty}\mu$; $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega} \times \ldots \times \mathbf{\Omega} \times \ldots = {}^{\infty}\mathbf{\Omega}$ y $\mathbf{A}^{\sigma} \times \mathbf{A}^{\sigma} \times \ldots \times \mathbf{A}^{\sigma} \times \ldots = {}^{\infty}\mathbf{A}^{\sigma}$.

CAPITULO III

APLICACION A LA TEORIA DE PROBABILIDAD

En este capítulo se trata de enfocar los resultados de mayor importancia en la teoría de Probabilidad, teniendo como meta el Teorema de los Grandes Números y el Teorema de Límite Central. Es de aclarar que los teoremas de Fubini y Tonelli se presentan de manera implísita, donde es de observar que en ningún momento se habla de la dimensión del espacio muestral, ni del tipo de variables aleatorias que presentamos.

3.1 ESPACIO DE PROBABILIDAD

Definición 3.1.1. *Se llama **fenómeno aleatorio ó experimento aleatorio**, al experimento ζ que aunque puede suceder de distinta manera en un instante dado solo puede hacerlo de una de ellas.*

Nota. Un experimento aleatorio tiene las siguientes características:

i. Es posible repetir cada experimento indefinidamente sin cambiar esencialmente las condiciones.

ii. Podemos describir el conjunto de todos los resultados posibles del experimento, aunque no podemos indicar cual será el resultado.

iii. Cuando se repite un gran número de veces, aparece un modelo definido de regularidades.

Definición 3.1.2. *Sea ζ experimento aleatorio. Definimos el **espacio muestral Ω**, como el conjunto de todos los resultados posibles de ζ. Además a todo subconjunto de Ω le llamaremos **sucesos ó eventos**.*

Nota. A ϕ se le conoce como **suceso imposible** y a Ω como **suceso seguro.** Además al suceso que consta de un solo elemento se llama **suceso elemental.**

Observación. Pueden existir varios espacios muestrales asociados al mismo experimento aleatorio.

Definición 3.1.3. *Sea ζ un experimento aleatorio y* Ω *el espacio muestral asociado a él. Si* E *es un suceso entonces* $\tilde{E}$ *también es un suceso y es llamado* ***suceso contrario de*** E. *Además si* $\omega \in \Omega$ *y* ω *está asociado a un resultado particular de* ζ, *entonces para* $E \subset \Omega$ *se dice que* E ***ocurre*** *sii* $\omega \in E$ *y que* E ***no ocurre*** *sii* $\omega \in \tilde{E}$.

Nota. Si E y F son sucesos. $E \cup F$ es el suceso de ocurrencia sii E ocurre ó F ocurre y $E \cap F$ es el suceso de ocurrencia sii E y F ocurren

Definición 3.1.4. *Sea* E *y* F *dos sucesos, Diremos que son* ***mutuamente excluyentes*** *si no pueden ocurrir simultaneamente, es decir son disjuntos.*

Definición 3.1.5. *Sea* μ *una medida en un* σ*-álgebra* $\mathbf{A}^{\sigma}$. μ *es una* ***medida de probabilidad*** *si* $\mu(\Omega) = 1$.

Nota. Toda medida de probabilidad la denotaremos por p y simplemente le llamaremos probabilidad.

Axioma de Kolmogorov. *Un* ***espacio de probabilidad*** *es una terna* $(\Omega, \mathbf{P}^{\sigma}, p)$ *en donde.*

i. $\Omega \neq \phi$, *representa el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio* ζ.

ii. $\mathbf{P}^{\sigma}$ *es el* σ*-álgebra de subconjuntos de* $\boldsymbol{\Omega}$.

iii. *p es una medida de probabilidad sobre* $\mathbf{P}^{\sigma}$.

Proposición 3.1.1. (***Propiedades elementales de una probabilidad***). *Sea p una probabilidad sobre un álgebra* $\mathbf{A}$ *de subconjuntos de* $\boldsymbol{\Omega}$. *Entonces:*

i. $p(\phi) = 0$ *y* $p(\tilde{E}) = 1 - p(E)$, *para* $E \in \mathbf{A}$.

ii. *Si* $E, F \in \mathbf{A}$ *entonces* $p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$.

iii. *Si* $E, F \in \mathbf{A}$ *y* $E \subset F$ *entonces* $p(E) \leq p(F)$.

iv. *Si* $\{E_n\}_{n \geq 1}$ *es una sucesión en* $\mathbf{A}$ *y* $\bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathbf{A}$

entonces $p\left[\bigcup_{n \geq 1} E_n\right] \leq \sum_{n > 1} p(E_n)$.

v. *Si* $\{E_n\}^{\uparrow}_{n \geq 1}$ *y* $\text{Lím } E_n = E$ *se tiene que*

$\text{Lím } p(E_n) = p(E)$. (***Continuidad por abajo***).

vi. *Si* $\{E_n\}^{\downarrow}_{n \geq 1}$ *y* $\text{Lím } E_n = E$ *se tiene que*

$\text{Lím } p(E_n) = p(E)$ (***Continuidad por arriba***)-

Ejemplo. *Si* $\boldsymbol{\Omega}$ *es un espacio muestral finito. Entonces*

$$p(E) = \frac{\text{número de maneras en que } \zeta \text{ puede ocurrir a favor de } E}{\text{número total de maneras en que ocurre } \zeta}$$

es una medida de probabilidades en $\mathbf{P}^{\sigma}$.

Solución. Por definición $p(E) \geq 0$, $p(\Omega) = 1$ y $p(\phi) = 0$. Además como Ω es finito entonces P^{σ} tiene $2^{0(\Omega)}$ elementos. Esto significa que no puede existir una sucesión contable de sucesos excluyentes, por lo tanto basta probarlo para un número finito de sucesos excluyentes.

Sea E_1 y E_2 dos sucesos mutuamente excluyentes (disjuntos), entonces el número de maneras en que ζ puede ocurrir a favor de $E_1 \cup E_2$ es igual a la suma de el número de maneras en que ζ puede ocurrir a favor de E_1 y él número de maneras en que ζ puede ocurrir a favor de E_2. Por definición 3.1.3.

Luego $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$. ☆

3.2 PROBABILIDAD CONDICIONAL.

Definición 3.2.1. $(E, \mathbf{A}_E^{\sigma})$ *es un espacio medible reducido de el espacio medible* $(\Omega, \mathbf{A}^{\sigma})$ *si* $E \in \mathbf{A}^{\sigma}$ *y* $F_E \in \mathbf{A}_E^{\sigma}$ *es igual a* $E \cap F$, *con* $F \in \mathbf{A}^{\sigma}$.

Definición 3.2.2. *Sea* E_1 *y* E *dos sucesos asociados con un experimento* ζ. *Indicaremos* $p(E/E_1)$ *la probabilidad de* E *con respecto al espacio muestral reducido de* E_1. *Es decir la probabilidad de que ocurra el suceso* E, *dado que ha ocurrido el suceso* E_1. *Definimos* $p(E/E_1) = p(E \cap E_1)/p(E_1)$, *con* p *una probabilidad sobre* p^{σ}.

Proposición 3.2.1. *$p(\ /E_1)$ es una probabilidad.*

Prueba. Por definición 3.2.2 se tiene que $0 \leq p(E/E_1) \leq 1$. Además si $\{F_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión excluyente en $\mathbf{P}^\sigma$ entonces

$$p(\bigcup_{n\geq 1} F_n/E_1) = \frac{p(E_1 \cap (\bigcup_{n\geq 1} F_n))}{p(E_1)}$$

$$= \frac{p(\bigcup_{n\geq 1} (E_1 \cap F_n))}{p(E_1)}$$

$$= \frac{\sum_{n\geq 1} p(E_1 \cap F_n)}{p(E_1)}$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{p(E_1 \cap F_n)}{p(E_1)}$$

$$= \sum_{n\geq 1} p(F_n/E_1). \quad *$$

Observación. Cuando calculamos $p(E)$ nos preguntamos que tan probable es que estemos en E, sabiendo que debemos estar en Ω, y cuando evaluamos $p(E/E_1)$ nos preguntamos que tan probable es que estemos en E, sabiendo que debemos estar en E_1, es decir el espacio reducido $(E_1, \mathbf{A}^\sigma_{E_1})$.

Nota. A $p(E/E_1)$ se conoce como la **probabilidad condicional de E con respecto a E_1**

Proposición 3.2.2 (**Teorema de multiplicación de probabilidades**). *Sea $(\Omega, \mathbf{P}^\sigma, p)$ un espacio de medida, entonces*

$$p(\bigcap_{n=1}^{k} E_n) = p(E_1).\ p(E_2/E_1).\ p(E_3/E_1,E_2)\ldots p(E_n/E_1,\ldots,E_{n-1}).$$

Proposición 3.2.3 **(Teorema de Bayes)**. *Sea* $\{E_n\}_{n=1}^{k}$ *una partición de* Ω, *(es decir disjuntos y* $\Omega = \bigcup_{n=1}^{k} E_n$*) y* E *un suceso asociado con* Ω. *Entonces*

$$p(E_m/E) = \frac{p(E/E_m)p(E_m)}{\sum_{n=1}^{k} p(E/E_n)p(E_n)} \;;\; m = 1,2,\ldots, k.$$

Prueba.

$$p(E_m/E) = \frac{p(E \cap E_m)}{p(E)}$$

$$= \frac{p(E/E_m).p(E_m)}{\sum_{n=1}^{k} p(E/E_n).p(E_n)}$$

Nota. Al teorema de Bayes también se le llama **fórmula para la probabilidad de las causas,** puesto que las E_n son una partición del espacio muestral, uno y sólo uno de los sucesos E_n ocurre. Por lo tanto la fórmula anterior nos da la probabilidad de un E_n particular (esto es una causa), dado que el suceso E ha ocurrido.

3.3 INDEPENDENCIA

Definición 3.3.1. *Sea* $(\Omega, \mathbf{P}^{\sigma}, p)$ *un espacio de probabilidad. Decimos que dos sucesos* E *y* F *en* $\mathbf{P}^{\sigma}$ *son* ***independientes*** *si* $p(E/F) = p(E)$ *y* $p(F/E) = p(F)$. *Es decir que la ocurrencia de uno de ellos no tiene influencia alguna en la ocurrencia o no ocurrencia de el otro.*

Proposición 3.3.1. E *y* F *son independientes sii*

$p(E \cap F) = p(E).p(F)$.

Definición 3.3.2. *Decimos que* θ *es una* ***clase de eventos independientes***, *si para toda colección finita de eventos* $\{E_n\}_{n=1}^{k}$ *en* θ *se tiene que* $p[\bigcap_{n=1}^{k} E_n] = \prod_{n=1}^{k} p(E_n)$. *Es decir que los* E_n *son independientes.*

Definición 3.3.3. *Sea* $\{\theta_\lambda\}_{\lambda\varepsilon\Lambda}$, *donde* Λ *es una clase de índices y* θ_λ *es una clase de eventos. Decimos que* $\{\theta_\lambda : \lambda \varepsilon \Lambda\}$ *es una* ***familia de clases independientes***, *si cada* $\{E_\lambda : E_\lambda \varepsilon \theta_\lambda$, *con* $\lambda \varepsilon \Lambda\}$ *es una clase de eventos independientes.*

Proposición 3.3.2. *Sea* $\{\theta_\lambda : \lambda \varepsilon \Lambda\}$ *una familia de clases independientes tal que* θ_λ *es cerrado bajo intersecciones finitas. Entonces* $\{\sigma(\theta_\lambda) : \lambda \varepsilon \Lambda\}$ *es una familia de clases independientes.*

Prueba. La prueba se desarrolla por recurrencia sobre el número de sucesos que son independientes entre si.

Para n = 2; sea $E \varepsilon \theta_\beta$ y definamos $I_\lambda(E) = \{F \varepsilon \sigma(\theta_\lambda)$: E y F son independientes$\}$, $\lambda \neq \beta$. Entonces $I_\lambda(E) \subset \sigma(\theta_\lambda)$ y además $\theta_\lambda \subset I_\lambda(E)$, por hipótesis.

Evidentemente $\Omega \varepsilon I_\lambda(E)$ y para $F_1, F_2 \varepsilon I_\lambda(E)$ con $F_1 \subset F_2$ se tiene:

$$p[E\cap(F_2-F_1)] = p[E\cap F_2 - E\cap F_1]$$

$$= p(E\cap F_2) - p(E\cap F_1)$$

$$= p(E).p(F_2) - p(E).p(F_1)$$

$$= p(E).[p(F_2) - p(F_1)]$$

$$= p(E).p(F_2-F_1)$$

$$\text{y } p[E\cap(F_1\cup F_2)] = p[(F_1\cup(F_2-F_1))\cap E]$$

$$= p[F_1\cap E \cup (F_2-F_1) \cap E]$$

$$= p(F_1\cap E) + p[(F_2-F_1) \cap E]$$

$$= p(F_1).p(E) + p(F_1-F_2).p(E)$$

$$= p(E).[p(F_1) + p(F_1-F_2)]$$

$$= p(E).p(F_1\cup F_2),$$

es decir $F_2 - F_1$ y $F_1\cup F_2$ estan en $I_\lambda(E)$.

Además si $\{E_n\}_{n\geq 1}^{\uparrow}$ en $I_\lambda(E)$ entonces haciendo

$F_k = E_k - \bigcup_{n=1}^{k-1} E_n \in I_\lambda(E)$, por los resultados anteriores. Entonces

$$p[(\bigcup_{n\geq 1} E_n)\cap E] = p[(\bigcup_{n\geq 1} F_n)\cap E]$$

$$= p[\bigcup_{n\geq 1}(F_n\cap E)]$$

$$= \sum_{n\geq 1} p(F_n).p(E)$$

$$= p(E).p(E \bigcup_{n\geq 1} E_n),$$

es decir $\bigcup_{n\geq 1} E_n \varepsilon I_\lambda(E)$.

Por lo tanto $I_\lambda(E)$ es un $\mathcal{D}$-sistema y por la proposición 1.3.5 tenemos que $\sigma(\theta_\lambda) = I_\lambda(E)$.

Sea $I_\lambda(E)$, con $E \varepsilon \sigma(\theta_\beta)$ entonces $E \varepsilon I_\lambda(E')$, con $E' \varepsilon \theta_\lambda$, para algún $\lambda \varepsilon \Lambda$. Luego $E' \varepsilon I_\lambda(E)$, de donde $\theta_\lambda \subset I_\lambda(E)$ y además $I_\lambda(E)$ es un $\mathcal{D}$-sistema entonces por proposición 1.3.5 $\sigma(\theta_\lambda) = I_\lambda(E)$.

Hemos probado que cualquier par de elementos que tomemos de dos clases distintas de σ-álgebra son independientes.

Supongamos que se cumple para m, es decir si tomamos una familia de sucesos de cada θ_λ, $\{E_\lambda : E_\lambda \varepsilon \sigma(\theta_\lambda)$, con $\lambda \varepsilon \Lambda\}$ entonces al tomar m elementos de este conjunto se tiene que

$$p\left(\bigcap_{n=1}^{m} E_n\right) = \prod_{n=1}^{m} p(E_n).$$

Sea $I_\beta\left(\bigcap_{n=1}^{m} E_n\right) = \{F \varepsilon \sigma(\theta_\beta) : p\left(\bigcap_{n=1}^{m} E_n \cap F\right) = \prod_{n=1}^{m} p(E_n).p(F)\}$ con $E_i \varepsilon \sigma(\theta_{n_i})$. Lo demás de la prueba es similar a la parte anterior de esta. *

3.4 LA INTEGRAL DE LEBESGUE - STIELTJES

Sea Ω el conjunto de números reales y $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la clase de todos los conjuntos de Borel.

Definición 3.4.1. *Una medida μ definida en $\mathbf{B}(\mathbb{R})$ y finita para conjuntos acotados es llamada* ***medida de Borel en la recta real.***

A cada medida de Borel finita nosotros podemos asociar una función F definida como:

$$F(x) = \mu(-\infty, x]$$

La función real de variable real F es llamada **función acumulativa de distribución de** μ.

Tenemos que $\mu(a,b] = F(b) = F(a)$, ya que:

$$\begin{aligned} \mu(a,b] &= \mu\{(-\infty,b] - (-\infty,a]\} \\ &= \mu(- \ ,b] - \mu(-\infty,a] \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Lema 3.4.1. *Si μ es una medida de Borel finita en la recta real entonces la función acumulativa de distribución F es monótona no decreciente y acotada, la cual es contínua por la derecha. Además* $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Prueba. Sea $x_1 \geq x_2$ entonces $(-\infty, x_1] \supset (-\infty, x_2]$, por lo tanto $\mu(-\infty, x_1] \geq \mu(-\infty, x_2]$. De donde $F(x_1) \geq F(x_2)$. Por otra parte como $(a,b]$ es la intercepción de los conjuntos $(a,b+1/n]$, esto implica por la proposición 1.2.3 que

$\mu(a,b] = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(a,b+1/n]$, y así $F(b) = \lim\limits_{n\to\infty} F(b+1/n) = F(b+)$,

ya que $(-\infty,b] = \bigcap\limits_{n\geq 1} (-\infty,b+1/n]$.

Así una función acumulativa de distribución es acumulativa por la derecha.

Dado que $\phi = \cap(-\infty,-n]$ tenemos que $\lim_{n\to-\infty} F(n) = 0$ y entonces $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Además F es acotada dado que μ es finita. ⁂

Tenemos que
$$\mu\{b\} = \lim_{n\to\infty} \mu(b-1/n,b]$$
$$= \lim_{n\to\infty} F(b) - F(b-1/n)$$
$$= F(b) - F(b^-).$$

Entonces F es contínua en b si y sólo si el conjunto $\{b\}$ tiene medida cero.

Debemos demostrar que hay una única medida de Borel μ tal que $\mu(a,b] = F(b) - F(a)$, para todos los intervalos de la forma $(a,b]$, donde definimos $F(\infty) = \lim_{\to\infty} F(x)$ y $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$.

Lema 3.4.2. *Sea F una función monótona no decreciente y contínua por la derecha. Si $(a,b] \subset \bigcup_{n\geq 1} (a_n,b_n]$ entonces*

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{n\geq 1} [F(b_n) - (a_n)].$$

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$. Por ser F contínua a la derecha se tiene que $\lim_{k\to\infty} F(b_n + 1/k) = F(b_n)$, es decir que existe un $k_n > 0$ tal que $F(b_n + 1/k_n) < F(b_n) + \varepsilon/2^n$. Y además existe $k > 0$

tal que $F(a + 1/k) < F(a) + \varepsilon$. Entonces los intervalos abiertos $(a_n, b_n + 1/k_n)$ cubren el intervalo cerrado $[a + 1/k, b]$.

Luego $\mu[a + 1/k, b] \leq \mu[\bigcup_{n\geq 1} (a_n, b_n + 1/k_n)]$

$$\leq \sum_{n\geq 1} \mu(a_n, b_n + 1/k_n),$$

pero $\mu(a + 1/k, b] \leq \mu[a + 1/k, b]$ y

$\mu(a_n, b_n + 1/k_n) \leq \mu(a_n, b_n + 1/k_n]$.

Luego $\mu(a + 1/k, b] \leq \sum_{n\geq 1} \mu(a_n, b_n + 1/k_n)$

$$F(b) - F(a+1/k) \leq \sum_{n\geq 1} [F(b_n+1/k_n) - F(a_n)]$$

$$F(b) - F(a) - \varepsilon \leq \sum_{n\geq 1} [F(b_n) - F(a_n) + \varepsilon/2^n]$$

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{n\geq 1} [F(b_n) - F(a_n)]. \quad *$$

Proposición 3.4.1. *Sea F una función monótona no decreciente la cual es contínua por la derecha. Entonces hay una única medida μ tal que para todo a y b tenemos*

$$\mu(a,b] = F(b) - F(a).$$

Prueba. Sea $\mathbf{C}'$ la semi-álgebra consistente de todos los intervalos de la forma $(a,b]$ y sea $\mu(a,b] = F(b) - F(a)$. Entonces μ satisface las condiciones de la proposición 1.3.2, ya que μ es aditiva y además satisface el lema 3.4.2. Por lo tanto admitimos que μ es la única extención a una medida en el álgebra generada por $\mathcal{C}'$, donde $\mathbb{R} = \cup (n,n+1]$. Por teorema 1.3.1 μ puede ser extenida a una medida en un σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}'$. Como $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la más pequeña σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}'$, por lo tanto tenemos la extención de μ a una medida de Bonel. ⁂

Corolario 3.4.1 *Cada función F monótona acotada, la cual es contínua por la derecha es la función acumulativa de distribución de una única medida de Borel finita si cumple con* $F(-\infty) = 0$.

Prueba. Sea F una función monótona acotada y contínua por la derecha, entonces existe una única medida de Borel μ tal que para todo <u>a</u> y <u>b</u> se tiene $\mu(a,b] = F(b) - F(a)$; por Proposición 3.4.1. De donde si $a = -\infty$ entonces

$$\mu(-\infty,b] = F(b) - F(-\infty),$$

pero $\mu(-\infty) = 0$. Luego $F(b) = \mu(-\infty,b]$. ⁂

Definición 3.4.2. *Una función* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se llama* ***función distribución*** *si satisface las siguientes propiedades:*

i. $F(\omega)$ *es no decreciente'*

ii. $F(-\infty) = 0$ *y* $F(+\infty) = 1$, *en donde*

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) \quad y \quad F(+\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x)$$

iii. $F(\omega)$ es contínua por la derecha y tiene límite por la izquierda.

Ejemplos de funciones de distribución

(a) $$F(\omega) = \begin{cases} 0; & \omega < 0. \\ \omega; & 0 \leq \omega \leq 1. \\ 1, & \omega \geq 1 \end{cases}$$ **(uniforme)**

(b) $$F(\omega) = \begin{cases} 0 & ; \omega < 0 \\ 1-e^{-\theta\omega}; & \omega \geq 0 \text{ y } \theta > 0 \end{cases}$$ **(exponencial)**

(c) $$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-t^2/2} dt$$ **(normal)**

(d) $$F(\omega) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{[\![\omega]\!]} \frac{\lambda e^{-\lambda\omega}}{k!} & ; \omega \geq 0 \text{ y } \lambda > 0 \\ 0 & ; \omega < 0 \end{cases}$$ **(poisson)**

en donde $[\![\omega]\!]$ denota la parte entera de ω

Definición 3.4.3. *Sea f una función medible de Borel no negativa y F es una función monótona no decreciente la cual es contínua por la derecha, definimos la* ***integral Lebesgue - Stieltjes*** *de f con respecto a F como:*

$$\int f dF = \int f d\mu .$$

Donde μ es la medida de Borel que tiene a F como la función acumulativa de distribución.

Si f es positiva y negativa. Decimos que es integrable con respecto a F si es integrable con respecto a μ.

Proposición 3.4.2. *Sea f una función monótona no decreciente y definamos*

$$F^*(x) = \lim_{y \to x^+} f(y).$$

Entonces F^* es monótona no decreciente la cual es contínua por la derecha e igual a f donde quiera que f sea contínua por la derecha. Además $(F^*)^* = F^*$, y si f y g son funciones monótonas no decrecientes las cuales son iguales para casi todo x y en los puntos en los cuales son contínuas. Entonces $F^* = G^*$.

Prueba. Sea $x \geq y$ entonces $x + h \geq y + h$, $h > 0$. Por hipótesis $f(x + h) \geq f(y + h)$ por lo tanto

$$\lim_{h \to 0^+} f(x + h) \geq \lim_{h \to 0^+} f(y + h),$$

es decir $F^*(x) \geq F^*(y)$.

Además

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to y^+} F^*(x) &= \lim_{x \to y^+} \lim_{z \to x^+} f(z) \\
&= \lim_{x \to y^+} \lim_{h/2 \to 0} (x + h/2) \\
&= \lim_{h/2 \to 0} \lim_{h/2 \to 0} f(y + h) \\
&= \lim_{h/2 \to 0} f(y + h) \\
&= F^*(y).
\end{aligned}$$

Luego F^* es contínua por la derecha y $(F^*)^* = F^*$.

Sea $\lim_{y \to x^+} f(y)$ esto significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < y - x < \delta$ entonces $|f(y) - L| < \varepsilon$.

Consideremos $\varepsilon = \frac{1}{n}$ entonces existe $\delta_n > 0$ tq $0 < y - x < \delta_n$ entonces $|f(y) - L| < \frac{1}{n}$, $\forall n$.

Pero como f y g son iguales para casi todo x entonces existe un $x_n \in (x, \delta_n + x)$ tq $f(x_n) = g(x_n)$.

De donde sea $\{x_n\}^{\downarrow}_{n \geq 1}$ una sucesión de puntos tomados de la forma anteriormente expuesta con $x_n \to x$ por ser f creciente. Entonces $\{g(x_n)\}^{\downarrow}_{n \geq 1}$ tal que para $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon > \frac{1}{N}$ y se da que $|g(x_n) - L| < \varepsilon$ siempre que $n \geq N$, es decir $g(x_n) \to L$. Luego $\lim_{y \to x^+} (y) = L$. *

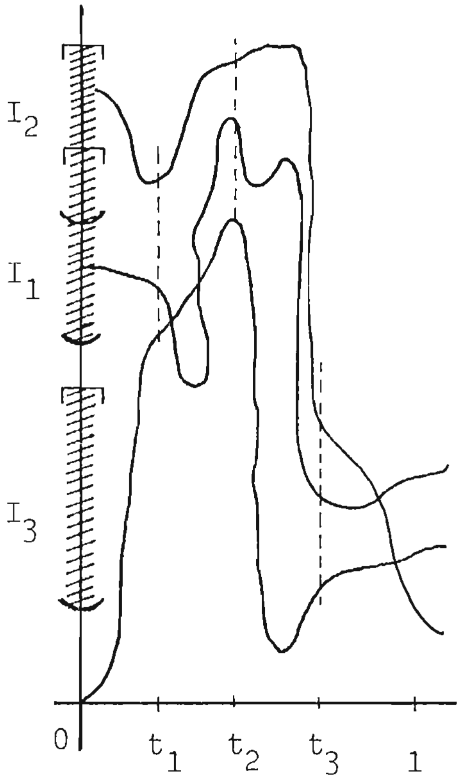
3.5 MEDIDA EN $C[0,1]$.

Sea $C[0,1]$ el espacio de todas las funciones contínuas en el intervalo $[0,1]$. $C[0,1]$ es un espacio métrico con la métrica

$$d(f,g) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|.$$

Consideremos los subconjuntos de $C[0,1]$, de la forma:

$A(t_1,\ldots,t_k; I_1,\ldots,I_k) = \{f \in C[0,1]: (f(t_1),\ldots, (t_k)) \in I_1 x \ldots I_k\}$, para $t_i \varepsilon [0,1]$, $I_i = (a_i, b_i]$ con $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty$; $i = 1, \ldots, k$ $k \geq 0$. LLamados **cilindros**.



Sea S_c la colección de todos los cilindros.

Lema 3.5.1. S_c es un semi-álgebra llamado la **semi-álgebra de los cilindros de** $C[0,1]$

Prueba. Evidentemente $C[0,1] \varepsilon S_c$, ya que $C[0,1] = A(t_1; \mathbb{R})$. Además consideremos $A(t_1, \ldots, t_k; I_1, \ldots, I_k)$ y $A(t_1', \ldots, t_e'; I_1', \ldots I_e')$. Entonces

$$A(t_1, \ldots, t_k; I_1, \ldots, I_k) \cap A(t_1', \ldots, t_e'; I_1', \ldots, I_e') = A(t_1, \ldots, t_k, t_1', \ldots, t_e'; I_1, \ldots, I_k, I_1'; \ldots, I_e').$$

Sea $A(t_1, \ldots, t_k; I_1, \ldots, I_k)$ en S_c entonces

$\sim A(t_1, \ldots, t_k; I_1, \ldots, I_k)$ es el conjunto de las $f \varepsilon C[0,1]$ que no pertenecen a $A(t_1, \ldots, t_k; I_1, \ldots, I_k)$ es decir $(f(t_1), \ldots, f(t_k)) \notin I_1 x \ldots x I_k$, por lo tanto $(f(t_1), \ldots, f(t_k)) \varepsilon \sim I_1 x \ldots x I_k$. Pero

$$\sim I_1 x \ldots x I_k = \bigcup_{n=1}^{m} I_1^n x \ldots x I_k^n \text{ tal que } I_i^n = I_i \text{ ó } I_i^n = \sim I_i.$$

Luego $(f(t_1), \ldots, f(t_k)) \varepsilon \bigcup_{n=1}^{m} I_1^n x \ldots x I_k^n$, para algún $\underline{n}$. Esto significa que

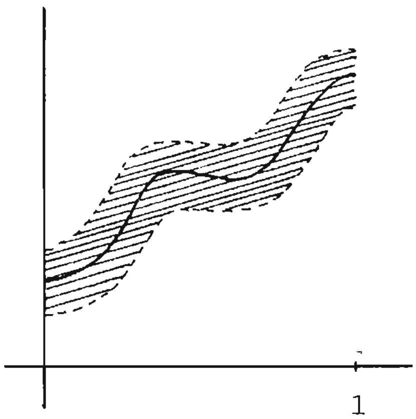
$$(f(t_1),\ldots,f(t_k)) \in \bigcup_{n=1}^{m} A(t_1,\ldots,t_k;I_1^n,\ldots,I_k^n)$$

$$\text{y } \sim A(t_1,\ldots,t_k;I_1,\ldots,I_k) = \bigcup_{n=1}^{m} A(t_1,\ldots,t_k;I_1^n,\ldots,I_k^n)$$

$\therefore$ S_c es un semi-álgebra. *

Lema 3.5.2. *Sea* $\mathbf{B}(\mathbf{C}[0,1])$ *la* σ*-álgebra de Borel de* $\mathbf{C}[0,1]$ *con la métrica* d. *Entonces* $\sigma(S_c) = \mathbf{B}(\mathbf{C}[0,1])$.

Prueba. Antes de iniciar la prueba en sí, trataremos de visualizar que son las Bolas abiertas con centro f y radio $r > 0$, $f \in \mathbf{B}(\mathbf{C}[0,1])$.



$$S(f,r) = \{g \in \mathbf{C}[0,1]: \sup_{0\le t\le 1} |f(t)-g(t)|<r\}$$

esto significa que

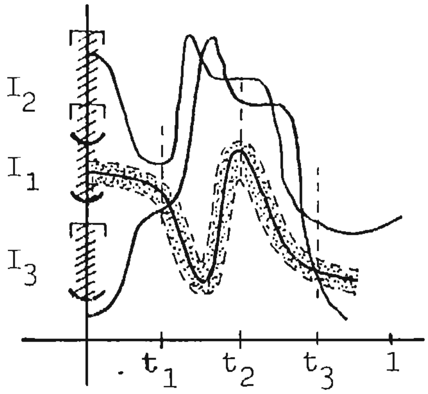
$$|f(t) - g(t)| < r$$

$$-r < g(t) - f(t) < r$$

$$-r + f(t) < g(t) < r + f(t).$$

Probemos que $A(t_1,\ldots,t_k;I_1,\ldots,I_k)$ es un conjunto abierto.

Sea $f \in A(t_1,\ldots,t_k;\ I_1,\ldots,I_k)$, es decir



$$(f(t_1),\ldots,f(t_k)) \in I_1 x \ldots x I_k.$$

Sea $r = \min_i \{|f(t_i)-a_i|,|f(t_i)-b_i|\}$,

entonces $S(f,r)$ es la bola abierta con centro en f y radio $r > 0$.

Sea $g \in S(f,r)$, entonces

$\sup_{0\le t\le 1} |f(t) - g(t)| < r$, es decir $|f(t_i)-g(t_i)| < r$ ó lo que es lo mismo $g(t_i) \in (f(t_i) - r, f(t_i) + r) \subset I_i$, $\forall_i$, Esto significa que $g \in A(t_1,\ldots,t_k;\ I_1,\ldots,I_k)$.

Luego $\sigma(\mathcal{S}_c) \subset \mathcal{B}(C[0,1])$.

Sea $S(f,r)$ la bola abierta con centro en f y radio $r > 0$, consideremos $A(r_n;\ I_n)$, con $r_n \in Q$ y $I_n = (f(r_n)-r, f(r_n)+r)$ entonces

$$\bigcap_{n\ge 1} A(r_n;\ I_n) = S(f,r).$$

$$\therefore \sigma(\mathcal{S}_c) = \mathcal{B}(C[0,1]). \quad *$$

Lema 3.5.3 $A(t_1,\ldots,t_k;I_1,\ldots I_k)$ *y* $A(t_1',\ldots,t_m';I_1',\ldots,I_m')$ *son disjuntos sii existe* $t_i = t_j'$ con $I_i \cap I_j' = \phi$.

Prueba. Sea $A(t_1,\ldots,t_k;I_1,\ldots,I_k)$ y $A(t_1',\ldots,t_m';I_1',\ldots,I_m')$ disjuntos y supongamos que para todo $i = 1,\ldots,k$ y $j = 1,\ldots,m$ se tiene que $t_i \neq t_j' \vee I_i \cap I_j' \neq \phi$. Entonces consideremos las siguientes alternativas.

Si $t_i \neq t_j' \wedge I_i \cap I_j' = \phi$ ó $t_i \neq t_j' \wedge I_i \cap I_j' \neq \phi\ \forall_{i,j}$. Es evidente que se puede encontrar una función $f \in C[0,1]$ tal que $f \in A(t_1,\ldots,t_k;I_1,\ldots,I_k)$ y $f \in A(t_1',\ldots,t_m';I_1',\ldots,I_m')$.

Si $t_i = t_j' \wedge I_i \cap I_j' \neq \phi$, entonces es posible encontrar una función $f \in C[0,1]$ tal que $f(t_i) = f(t_j') \in I_i \cap I_j'$.

Lo anterior contradice nuestra hipótesis, por lo tanto se debe tener que $t_i = t'_j$ con $I_i \cap I'_j = \phi$.

Resíprocamente, si existen i,j tal que $t_i = t'_j \wedge I_i \cap I'_j = \phi$ y suponemos que $A(t_1,\ldots,t_k;I_1,\ldots,I_k)$ y $A(t'_1,\ldots,t'_m ; I'_1,\ldots,I'_m)$ no son disjuntos entonces existe $f \in \mathbf{C}[0,1]$ tal que

$f \in A(t_1,\ldots,t_k;I_1,\ldots,I_k)$ y $f \in A(t'_1,\ldots,t'_m ;I'_1,\ldots,I'_m)$,

es decir

$(f(t_1),\ldots,f(t_k)) \in I_1 x\ldots x I_k$ y $(f(t'_1),\ldots,f(t'_m)) \in I'_1 x\ldots x I'_m$. Pero entonces $f(t_i) \in I_i$ y $f(t'_j) \in I'_j$, donde $f(t_i) = f(t_j)$. Lo que contradice el hecho de que I_i y I'_j sean disjuntos. ⁂

Observación.

$$A(t_1,\ldots,t_k; I_1,\ldots,I_k) = A(t_1,\ldots,t_k,t_{k+1},\ldots,t_m;I_1,\ldots,I_k, I_{k+1},\ldots,I_m)$$

con $I_n = \mathbb{R}$; $n = k+1,\ldots,m$.

Teorema 3.5.1. (**medida de wiener**). *Existe una única medida de probabilidad* μ_ω *en* $(\mathbf{C}[0,1], \mathbf{B}(\mathbf{C}[0,1]))$ *tal que para todo* $t_i \in [0,1]$, $a_i < b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots,k,k \geq 0$ *(tomemos* $0 < t_1 < t_2 <\ldots < t_k$ *sin pérdida de generalidad). Tenemos*

$$\mu_\omega(A(t_1,t_2,\ldots,t_k; I_1,I_2,\ldots,I_k) =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k\sqrt{t_1(t_2-t_1)\ldots(t -t_{k-1})}}\int_{a_1}^{a_1}\cdots\int_{a_k}^{b_k} .$$

$$\left\{ e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{x_1^2}{t_1}+\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\ldots+\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{t_k-t_{k-1}}\right\}} dx_k \ldots dx_1 \right\}$$

La medida de probabilidad μ_ω *se llama la* ***medida de Wiener.***

Prueba. Trivialmente μ_ω es una función no negativa. Por una simple aplicación de el teorema de Fubini tenemos que

$$\mu_\omega(A(t_1,\ldots,t_k,I_1,\ldots,I_k)) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k\sqrt{t_1(t_2-t_1)\ldots(t_k-t_{k-1})}} \cdot \int_{I_1\ldots I_k} \cdot$$

$$\left\{ e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{x_1^2}{t_1}+\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\ldots+\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{t-t_{1}}\right\}} d(x_1,\ldots,x_k) \right\}.$$

Sea $\{A(t_1,\ldots,t_k^n;\ I_1,\ldots,I_k^n)\}_{n\geq 1}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{S}_c$, tal que $\bigcup_{n\geq 1} A(t_1,\ldots,t\ ;I_k^n,\ldots,I_1^n) = A(t_1,\ldots,t_k;I_1,\ldots,I_k)$, (es de notar que k lo hemos considerado fijo dado la observación anterior).

Sea $(x_1,\ldots,x_k)\ \varepsilon\ I_1x\ldots xI_k$, entonces existe una función $g\ \varepsilon\ \mathbf{C}[0,1]$ tal que para t_i se tiene $g(t_i) = x_i$, $i=1,\ldots,k$. Es decir $g\ \varepsilon\ A(t_1,\ldots,t_k;I_1,\ldots,I_k)$ y por hipótesis $g\ \varepsilon\ \bigcup_{n\geq 1} A(t_1,\ldots,t_k;I_1^n,\ldots,I_k^n)$. Entonces

$g\ \varepsilon\ A(t_1,\ldots,t_k;I_1^s,\ldots,I_k^s)$; para único s, ó su equivalente $(g(t_1),\ldots,g(t_k))\ \varepsilon\ I_1^s x\ldots xI_k^s$. Pero $g(t_i) = x_i$: $i=1,\ldots,k$

luego $(x_1,\ldots,x_k) \in I_1^s x \ldots x I_k^s$, es decir

$$(x_1,\ldots,x_k) \in \bigcup_{n\geq 1} I_1^s x \ldots x I_k^s.$$

Sea $(x_1,\ldots,x_k) \in \bigcup_{n\geq 1} I_1^n x \ldots I_k^n$, entonces $(x_1,\ldots,x_k) \in I_1^s x \ldots x I_k^s$. Similar a los razonamientos anteriores se tiene que

$$(x_1,\ldots,x_k) \in I_1 x \ldots x I_k.$$

Lo que se a probado es que $I_1 x \ldots x I_k = \bigcup_{n\geq 1} I_1^n x \ldots x I_k^n$, donde $\{I_1^n x \ldots x I_k^n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión disjunta de rectángulos medibles.

$$\sum_{n\geq 1} \mu_\omega(A(t_1,\ldots,t_k;I_1^n,\ldots,I_k^n)) =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k\sqrt{t_1(t_2-t_1)\ldots(t_k-t_{k-1})}}\int_{I_1' x \ldots x I_k'} \left\{ e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{x_1^2}{t_1}+\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\ldots+\frac{(x -x_{k-1})^2}{t_k-t_{k-1}}\right\}} d(x_1,\ldots,x_k)\right\}$$

$$+ \ldots +$$

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k\sqrt{t_1(t_2-t_1)\ldots(t_k-t_{k-1})}}\int_{I_1^n x \ldots x I_k^n} \left\{ e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{x_1^2}{t_1}+\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\ldots+\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{t_k-t_{k-1}}\right\}} d(x_1,\ldots,x_k)\right\}$$

$$+ \ldots$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k\sqrt{t_1(t_2-t_1)\ldots(t_k-t_{k-1})}}\int_{\bigcup_{n\geq 1} I_1^n x \ldots I_k^n}$$

$$\left\{ e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x_1^2}{t_1}+\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\ldots+\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{t_k-t_{k-1}}\right]} d(x_1,\ldots,x_k)\right\}$$

por proposición 2.1.6.

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k\sqrt{t_1(t_2-t_1)\ldots(t_k-t_{k-1})}}\int_{I_1 x\ldots x I_k}$$

$$\left\{ e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x_1^2}{t_1}+\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\ldots+\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{t_k-t_{k-1}}\right]} d(x_1,\ldots,x_k)\right\}$$

$$= \mu_\omega(A(t_1,\ldots,t_k;I_1,\ldots,I_k).$$

Luego por proposición 1.3.2, μ_ω se puede extender de forma única a una medida en el álgebra $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}_c)$ y por teorema 1.3.1 μ_ω se puede extender una medida en $\sigma(\boldsymbol{S}_c) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}[0,1])$. Dicha extensión es única ya que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}} dx_n = \sqrt{t_n-t_{n-1}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$= \sqrt{2\pi}\ \sqrt{t_n-t_{n-1}}\ .$$

Es decir μ_ω es finita $\mu_\omega(\boldsymbol{C}[0,1]) = 1$. ☆

3.6 VARIABLE ALEATORIA.

Nota. A menos que se indique lo contrario, de ahora en adelante $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{P}^\sigma, p)$ denotará un espacio de probabilidad arbitrario y $(\boldsymbol{IR}, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{IR}))$ la recta real con sus conjuntos de Borel.

Definición 3.6.1. *Una función real* $X: \Omega \to \mathbb{R}$ *es una* ***variable aleatoria*** *si es una función* $\mathbf{P}^{\sigma}$*-medible.*

Si $(\Omega, \mathbf{P}^{\sigma}) = (\mathbb{R}^n, \mathbf{B}(\mathbb{R}^n))$, *la función* $\mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$ *- medible se llaman* ***funciones de Borel.***

Al igual que en los cursos de probabilidad elemental, una variable aleatoria la interpretamos como una propiedad numérica de un experimento, con un valor que depende del azar. La condición de que X sea una función medible es de gran importancia puesto que si p es una probabilidad en $(\Omega, \mathbf{P}^{\sigma})$, sólo tiene sentido hablar de la probabilidad del conjunto $\{\omega: X(\omega) \in \mathbf{B}\}$ cuando este último es un evento. Por conveniencia el evento $\{X(\omega) \in B\}$ será escrito simplemente como $\{X \in B\}$, pero es importante hacer notar que este último es un elemento de la σ-álgebra $\mathbf{P}^{\sigma}$.

El espacio R_X, el conjunto de todos los valores posibles de X, se llama algunas veces recorrido. En cierto sentido podemos considerar a R_X como otro espacio muestral. El espacio muestral Ω corresponde a resultados no numéricos (posiblemente) del experimento, mientras que R_X es el espacio muestral asociado con la variable aleatoria X, que representa la característica numérica que puede ser de interés.

Definición 3.6.2. *Sea* ζ *un experimento y* Ω *un espacio muestral. Sea* X *una variable aleatoria definida en* Ω *y sea* R_X *su recorrido. Sea* B *un suceso respecto a* R_X*; esto es* $B \subset R_X$*. Su* *pongamos que* E *se define*

$$E = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}.$$

En este caso decimos que E *y* B *son* ***sucesos equivalentes.***

Proposición 3.6.1. *Sea* X *una variable aleatoria sobre un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathbf{P}^{\sigma}, p)$ *y sea*

$$p_X(B) = p(\{X \in B\}), \quad B \in \mathbf{B}(\mathbb{R}).$$

Entonces p_X *es una medida llamada la* ***distribución de*** **X.**

La función acumulativa de distribución de p_X es llamada **función de distribución de X.**

Observación. Por la unicidad de la proposición 3.4.1 $p_X = p_F$.

Los siguientes resultados son criterios útiles para decir si una función es variable aleatoria (además de los expuestos en la sección 1.4).

Proposición 3.6.2. *Sea* **C** *una colección de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *tal que* $\sigma(\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbb{R})$. *Una condición necesaria y suficiente para que una función real* X, *sea* $\mathbf{P}^{\sigma}$*-medible (variable aleatoria) es que* $X^{-1}(E) \in \mathbf{P}^{\sigma}$ *para todo* $E \in \mathbf{C}$.

Prueba. La necesidad de la condición es clara.

Sea

$$\mathcal{D} = \{E \in \mathbf{B}(\mathbb{R}) : X^{-1}(E) \in \mathbf{P}^{\sigma}\},$$

es evidente que $\mathcal{D}$ es un σ-álgebra. Por lo tanto $\mathbf{C} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathbf{B}(\mathbb{R})$ y por consiguiente $\sigma(\mathbf{C}) \subset \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \subseteq \mathbf{B}(\mathbb{R})$.

Pero por hipótesis $\sigma(\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbb{R})$, por lo tanto $\mathcal{D} = \mathbf{B}(\mathbb{R})$. ⁎

Proposición 3.6.3. *Sea f una función de Borel y X una variable aleatoria. Entonces la composición $Y = f \circ X$ es también una variable aleatoria.*

Prueba. Sea $B \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$, entonces $f^{-1}(B) \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$ puesto que f es una función Borel - medible. Luego
$\{\omega\in\mathbf{\Omega} : Y(\omega)\in B\} = \{\omega\in\mathbf{\Omega} : f(X(\omega))\in B\} = \{\omega\in\mathbf{\Omega} : X(\omega)\in f^{-1}(B)\}\in\mathbf{P}^{\sigma}$. ⁎

Nota. Dado que una variable aleatoria no es más que una función medible. Son varialbes aleatorias todas las funciones expresadas en las proposiciones 1.4.4 y 1.4.8.

El siguiente resultado es importante en probabilidad y estadística pues da la existencia de una variable aleatoria con una distribución dada.

Teorema 3.6.1. *Sea F una función de distribución arbitraria entonces existe un espacio de probabilidad $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{P}^{\sigma}, p)$ y una variable aleatoria X definida en él, tal que X tiene como función de distribución a F.*

Prueba. Sea $(\Omega, \mathbf{P}^{\sigma}, p)$ el espacio de probabilidad asociado a F dado por la proposición 3.4.1, o sea
$(\Omega, \mathbf{P}^{\sigma}, p) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_F)$.

Definamos $X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $X(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Entonces X es una variable aleatoria y obviamente

$$p_X(B) = p_F(\{X \in B\}), \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

o sea X tiene función de distribución F. ⁂

Definición 3.6.3. *Sea X una función $\mathbf{P}_1^{\sigma}\times\ldots\times\mathbf{P}_k^{\sigma}$-medible entonces decimos que X es una* ***variable aleatoria k-dimencional.***

Proposición 3.6.4. *Si X es una variable aleatoria k-dimencional entonces X_y es una variable aleatoria $(k-1)$-dimencional.*

Prueba. Consecuencia inmediata del teorema de Tonelli.

3.7 VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES

Tal como definimos el concepto de independencia entre dos sucesos E y F, definiremos ahora las variables aleatorias independientes. Lo que queremos decir intuitivamente es que X y Y son variables aleatorias independientes si el resultado de X, digamos, de ninguna manera influye en el resultado de Y.

Definición 3.7.1. *Decimos que dos* ***variables aleatorias X*** *y* ***Y son independientes*** *si $\sigma(X)$ y $\sigma(Y)$ son independientes.*

En general si $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias, decimos que son independientes si $\{\sigma(X_n):n\geq 1\}$ es una familia de σ-álgebra independientes.

Lema 3.7.1. *Una condición necesaria y suficiente para que las variables aleatorias $X_1,\ldots,X_n$ sean independientes es que $\forall(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.*

$$p(X_1 \leq x_1,\ldots,X_n \leq x_n) = p(X_1 \leq x_1)\ldots p(X_n \leq x_n).$$

Donde

$$\{X_1 \leq x_1,\ldots,X_n \leq x_n\} = \bigcap_{n=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}$$

Prueba. Sea $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias independientes entonces $\{\sigma(X_i)\colon i=1,\ldots,n\}$ es una familia de σ-álgebras independientes entonces

$$p(X_1 \leq x_1,\ldots,X_n \leq x_n) = p(X_1 \leq x_1)\ldots p(X_n \leq x_n).$$

Recíprocamente si para todo $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $p(X_1 \leq x_1,\ldots,X_n \leq x_n) = p(X_1 \leq x_1)\ldots p(X_n \leq x_n)$. Entonces consideremos el conjunto $\theta_i = \{\{X_i \leq x_i\}\colon x_i \in \mathbb{R}\}$, es evidente que θ_i es cerrado para las intercepciones finitas y ademas $\{\theta_i\colon i = 1,\ldots,n\}$ es una familia de clases independientes. Por proposición 3.3.2 se tiene que $\{\sigma(\theta_i)\colon i = 1,\ldots,n\}$ es una familia de clases independientes. ☆

El siguiente resultado asegura la existencia de una sucesión de variables aleatorias independientes con distribuciones dadas.

Proposición 3.7.1 (**Kolmogorov**). *Dada una sucesión* $\{F_n\}_{n\geq 1}$ *de funciones de distribución en* $\mathbb{R}$, *existe un espacio de probabilidad* (Ω, P^σ, p) *en donde se encuentra definida una sucesión* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *de variables aleatorias independientes y* F_n *es la función de distribución de* X_n, *para* $n \geq 1$.

Prueba. Sea $p_n = p_{F_n}$; $n \geq 1$ en donde p_{F_n} es la medida en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ por proposición 3.4.1. Sea $(\mathbb{R}^\infty, \sigma(^\infty\mathcal{C}))$ el espacio de probabilidad y p^∞ es la probabilidad en $(\mathbb{R}^\infty, \sigma(^\infty\mathcal{C}))$

$$p^\infty(^k E) = p^k(^k E); \quad \forall^k E \in {}^\infty\mathcal{C}$$

en donde $p^k = p_1 x \ldots x p_n$. Definamos para $n \geq 1$
X_n: $\mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ como $X_n((x_1, x_2, \ldots)) = x_n$. Es evidente que X_n es una variable aleatoria, además $\{X_n \leq x\}$ es un cilindro,

$$p^\infty(X_n \leq x) = p_n((-\infty, x]) = F_n(x),$$

es decir X_n tiene distribución F_n.

Es de notar que $\{X_n \leq x_n\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} x \ldots x(-\infty, x_n] x \ldots x \mathbb{R} x \ldots$
por lo tanto $\{X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n, \ldots\} = (-\infty, x_1] x \ldots x(-\infty, x_n] x \ldots$
entonces

$$p^\infty(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = p^\infty(X_1 \leq x_1) \ldots p^\infty(X_n \leq x_n), \; n \leq 1$$

Por lema 3.7.1 se concluye la prueba. ☆

3.8 VALOR ESPERADO Y MOMENTO

Definición 3.8.1. *Sea (Ω, P^σ, p) un espacio de probabilidad arbitrario y X una variable aleatoria. Si X es integrable en Ω definimos el valor esperado de X. (Denotado por $E(X)$), como:*

$$E(X) = \int_\Omega X dp.$$

En general si $r \geq 0$ y $\int_\Omega |X|^r dp < \infty$ definimos el r-ésimo momento de X como

$$E(X^r) = \int_\Omega X^r dp.$$

Proposición 3.8.1. *Sea (Ω, P^σ, p) un espacio de probabilidad y p_X la distribución de X y F su función de distribución. Entonces*

$$\int_\Omega X dp = \int_{\mathbb{R}} x dp_F(x)$$

$$y \qquad \int_\Omega X^r dp = \int_{\mathbb{R}} x^r dp_F(x)$$

Prueba. Considerando $f(x) = x$ una función $B(\mathbb{R})$-medible y X la transformación de (Ω, P^σ, p) a $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), p_X)$, donde $f \circ X = X$. Entonces por teorema 2.2.2 tenemos

$$\int_\Omega X dp = \int_{\mathbb{R}} x \ p_F(x).$$

Similarmente se prueba la segunda afirmación (haciendo $f(x) = x^r$). ⁂

En general si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función medible entonces

$$E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dp_F(x).$$

Definición 3.8.2. *Sea F una función de distribución y definamos* $D_F = \{x \in \mathbb{R}\colon F(x) - F(x^-) > 0\}$,
en donde $F(x^-)$ *es el límite por la izquierda de F en x.*

Proposición 3.8.2. *El conjunto* D_F *es a lo más numerable.*

Prueba. Para cada entero n = 1,2,..., sea

$$D_n = \{x \in \mathbb{R}\colon F(x) - F(x^-) > 1/n\}.$$

Entonces D_n no tiene mas de n puntos porque si las tuviera $D_n = \bigcup_{i=1}^{m} \{x_i\}$, donde $\{\{x_i\}\}_{i=1}^{m}$, son disjuntos y m > n. Luego

$$\begin{aligned} p_F(D_n) &= \sum_{n=1}^{m} p_F(\{x_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} F(x_i) - F(x_i^-) \\ &> \sum_{i=1}^{m} 1/n \\ &> 1, \end{aligned}$$

contradiciendo el hecho de que p_F es una probabilidad.

Pero $\mathcal{D}_F = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{D}_n$ el cual es a lo más numerable ya que cada $\mathcal{D}_n$ es finito. *

Definición 3.8.3. *Decimos que F es una* ***función de distribución discreta*** si $p_F(\mathcal{D}_F) = 1$. *Es decir el conjunto de puntos de discontinuidad de F tiene probabilidad uno. Decimos que F es una* ***función de distribución contínua*** *si* $\mathcal{D}_F = \phi$.

Si F es una distribución discreta la $E(X)$ se convierte en la expresión.

$$E(X) = \int_{\Omega} x dp_F(x)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_F} x dp_F(x) + \int_{IR-\mathcal{D}_F} x dp_F(x); \quad p_F(IR-\mathcal{D}_F) = 0$$

$$= \int_{\mathcal{D}_F} x dp_F(x)$$

$$= \sum_{x\in\mathcal{D}_F} x p_F(\{x\})$$

$$= \sum_{x\in\mathcal{D}_F} x p(X = x); \quad p_F(\{x\}) = p(X = x)$$

En donde la suma es sobre un número a lo más numerable de puntos. Si $p(\{x\}) > 0$ decimos que x **es un átomo de** F.

Definición 3.8.4. *Decimos que una función de distribución contínua F* ***es absolutamente contínua*** *si existe una función no-negativa f, llamada la* ***dencidad de*** *F tal que para todo* $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Para una función de distribución absolutamente continua la $E(X)$ se convierte en la expresión,

$$E(X) = \int_{IR} x dp_F(x)$$

$$= \int_{IR} x f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx,$$

ya que $dp_F(x) = dF = f(x)dx$.

Proposición 3.8.3. *Sea $g: \mathbf{IR} \to \mathbf{IR}$ una función medible entonces se tiene:*

i. *F es una función discreta*

$$E(g(X)) = \sum_{x \varepsilon p_F} g(x)p(X=x)$$

ii. *F es una función de distribución absolutamente contínua con densidad f.*

$$E(g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

Proposición 3.8.4. *Sea X y Y variables aleatorias en un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathbf{P}^{\sigma}, p)$.*

i. *Si $X, Y \varepsilon \mathbf{L}_1$, entonces para cualquier $\alpha \varepsilon \mathbf{IR}$ se tiene $E(X + Y) = \alpha E(X) + E(Y)$.*

ii. *Si $X, Y \varepsilon \mathbf{L}_1$ y $X \leq Y$, entonces $E(X) \leq E(Y)$.*

iii. *Si* $X, Y \in \mathbf{L}_1$ *y además son variables aleatorias independientes, entonces* $E(|X.Y|) < \infty$ *y*

$E(X.Y) = E(X).E(Y).$

iv. *Si* $X, Y \in \mathbf{L}_2$, *entonces*

$E(|X.Y|) \leq \sqrt{(E(X))^2} \cdot \sqrt{(E(Y))^2}$

v. *Si* $X \in \mathbf{L}_q$ *y* $Y \in \mathbf{L}_r$ *para* $q > 1$, $r > 1$ *y* $1/q + 1/r = 1$. *Entonces* $E(|X.Y|) < \infty$ *y*

$|E(X.Y)| \leq E(|X.Y|) \leq (E(|X|^q))^{1/q}.(E(|Y|^r))^{1/r}$

vi. *Si* $X, Y \in \mathbf{L}_q$ *para algún* $q \geq 1$ *entonces*

$E(|X+Y|^q) < \infty$ *y*

$(E(|X+Y|^q))^{1/q} \leq (E(|X|^q))^{1/q} + (E(|Y|^q))^{1/q}.$

Prueba. Es inmediato probar por la definición de el valor esperado las propiedades i., ii.. Además las propiedades iv., v., vi., se presentan como una aplicación de las proposiciones 2.3.3; 2.3.4 y 2.3.5..

Como $1_A \cdot 1_B = 1_{A \cap B} = 1_{A \times B}$ se tiene que

$E(X,Y) = \int_{\Omega \times \Omega} XY \, dp^2 = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} x\, y \, dp_X \times p_Y$ y por la proposición 2.4.2 se prueba la propiedad iii. ☆

Definición 3.8.5. *La diferencia* $X - E(X)$ *se llama* ***dispersión o varianza de la variable aleatoria X*** *y se designa por* $D(X)$ *al valor medio cuadrático de la dispersión, es decir*

$D(X) = E[(X-E(X))^2]$.

Proposición 3.8.5 **(Propiedades de la dispersión).** *Sea* X_1 *y* X_2 *variables aleatorias en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathbf{P}^{\sigma}, p)$.

i. *Si* $K \in \mathbb{R}$ *entonces* $D(KX_1) = K^2.D(X_1)$

ii. *Si* X_1 *y* X_2 *son variables aleatorias independientes entonces* $D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$

Prueba. Por definición 3.8.5 tenemos

$$\begin{aligned} D(KX_1) &= E[(KX_1 - E(KX_1))^2] \\ &= E[(KX_2 - KE(X_1))^2] \\ &= K^2E[(X_1 - E(X_1))^2] \\ &= K^2D(X_1). \end{aligned}$$

Además

$$E[(X_1 - F(X_1))(X_2 - E(X_2))]$$

$$= E[X_1X_2 - E(X_2)X_1 - E(X_1)X_2 + E(X_1).E(X_2)]$$

$$= E(X_1).E(X_2) - E(X_2)E(X_1) - E(X_1)E(X_2) + E(X_1).E(X_2)$$

$$= 0$$

Luego

$$\begin{aligned} D(X_1 + X_2) &= E[((X_1 - E(X_1)) + (X_2 - E(X_2)))^2] \\ &= E[(X_1-E(X_1))^2] + 2E[(X_1-E(X_1))(X_2-E(X_2))] \end{aligned}$$

$$+ E[(X_2 - E(X_2))^2]$$

$$= D(X_1) + D(X_2). \qquad \ast$$

Proposición 3.8.6. **(Desigualdad de Markov).** *Sea* X *una variable aleatoria en un espacio de probabilidad* $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{P}^{\sigma}, p)$ *y* $0 < q < \infty$

$$p(|X| \geq \varepsilon) \leq E(|X|^q)/\varepsilon^q; \ \varepsilon > 0.$$

Prueba.

$$\text{Sea } X_1 = \begin{cases} 0, & |X| < \varepsilon \\ \varepsilon & |X| \geq \varepsilon \end{cases}, \ \varepsilon > 0$$

Entonces $X_1 \leq |X|$ y $E(|X|^q) \geq E(|X_1|^q) = \varepsilon^q p\{|X| \geq \varepsilon\}$

ya que $\int_{\mathbf{\Omega}} |X_1|^q dp = \varepsilon^q p\{|X| \geq \varepsilon\}$. Luego

$$p(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X|^q)}{\varepsilon^q}. \qquad \ast$$

Corolario 3.8.1. **(Desigualdad de Chebyshev).** *Sea* X *una variable aleatoria en un espacio de probabilidad* $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{P}^{\sigma}, p)$. *Si* $X \in \mathbf{L}_2$ *entonces*

$$p(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \ \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \ \forall \ \varepsilon > 0$$

La desigualdad de Chebyshev muestra que si el valor esperado $E[(X)^2]$ es pequeño en relación a ε^2, digamos $E(X^2)/\varepsilon^2 \leq \delta$, y se puede despreciar, practicamente, la probabilidad de realización del suceso $\{|X| > \varepsilon\}$ es pequeña, entonces también será pequeña la variable aleatoria X, es decir $|X| \leq \varepsilon$.

Si $X \geq 0$ y $E(X) = E(\sqrt{X^2}) = 0$, entonces $X = 0$ c x d(p).

Definición 3.8.6. *Una función* $z: \Omega \to \mathbb{C}$ *tq* $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)i$ *se llama* ***variable aleatoria compleja*** *si es una función medible compleja. Si* $X, Y \in \mathbf{L}_1$, *definimos*

$$E(Z) = E(X) + E(Y)i$$

Hasta el momento hemos presentado parámetros asociados con la distribución de variables aleatorias tales como $E(X)$ y $D(X)$. Estos parámetros miden ciertas características de la distribución. Sin embargo surge la pregunta de si hay un parámetro significativo que mida de alguna manera el grado de asociación entre dos variables aleatorias.

Definición 3.8.7. *Sea* $X, Y \in \mathbf{L}_1$ *variables aleatorias. Definamos* $C(X, Y)$, *el* ***coeficiente de correlación***, *entre* X *y* Y, *como:*

$$C(X,Y) = \frac{E[(X-E(X))\ (Y-E(Y))]}{\sqrt{D(X)D(Y)}},$$

donde $D(X)$ *y* $D(y)$ *Son distintos de cero. El numerador* $E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ *se llama* ***covarianza de*** X *y* Y *y se denota por* σ_{XY}.

Observación. $\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)\,E(Y)$, y si X *y* Y son indepen dientes se tiene que $C(X,Y) = 0$.

Definición 3.8.8. *Sea X y Y variables aleatorias. Decimos que X y Y son* ***np correlacionadas*** *si $C(X,Y) = 0$.*

Observación: Si dos variables aleatorias son no correlacionadas no significa que sean independientes. Por ejemplo sea X una variable aleatoria distribuida simetricamente, con función de densidad $f(x)$ tal que $f(-x) = f(x)$, $-\infty < x < \infty$ y sea $Y = |X|$. Entonces a pesar de que la variable Y es una función de X, el coeficiente de correlación entre X y Y es cero, ya que

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = 0$$

y

$$\begin{aligned} E[(X - E(X))(Y - E(Y))] &= E(X \cdot Y) \\ &= \int_{\infty}^{\infty} x|x|f(x)dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

3.9 MODOS DE CONVERGENCIA.

Definición 3.9.1. *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ y X variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbf{P}^\sigma, p)$.*

i. *Decimos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$* ***converge casi segudamente a X*** *si $p(\text{Lim } X_n$ existe y es $X) = 1$,* *tambien llamado* **convergencia con probabilidad** 1 *y denotada por* $X_n \xrightarrow{c.s} X$.

ii. *Decimos que* $\{X_n\}_{n \geq 1}$ **converge en probabilidad a** X *si para cualquier* $\varepsilon > 0$ $\lim p(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$, *denotado por* $X_n \xrightarrow{p} X$.

iii. *Decimos que* $\{X_n\}_{n \geq 1}$ **converge en medida** γ *a* X *si* $\lim E(|X_n - X|^{\gamma}) = 0$. *Denotado por* $X_n \xrightarrow{\gamma} X$

Observación. La convergencia con probabilidad 1 no es más que la convergencia c x d(p), es decir

$$\lim X_n(\omega) = X(\omega) \quad \text{c x d}(p)$$

Además si $X_n \xrightarrow{\gamma} X$ entonces $X_n \xrightarrow{p} X$ ya que

$$p(|X_n - X| > \varepsilon) \leq E(|X_n - X|^{\gamma})/\varepsilon^{\gamma}.$$

Proposición 3.9.1. $X_n \xrightarrow{c.s} X$ *si y sólo si para cualquier* $\varepsilon > 0$ *sólo ocurren un número finito de los sucesos* $A_n^{\varepsilon} = \{|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$, $n \geq 1$ *con la excepción de* $\omega \in D$, $p(D) = 0$.

Prueba. Sea $\omega \in \Omega - D$ entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\omega \in \{|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\},\ n \geq N,$$

es decir que solo ocurren un número finito de las A_n^{ε}.

Sea S_k = {ω: solo un número finito de $A_n^{1/k}$ ocurre}

= {ω: $\omega \in \tilde{A}_n^{1/k}$, $n \geq N_k$}.

Si $\omega \in S_k$ entonces

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{k}\ ; \quad n \geq N_k$$

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{k-1};\ n \geq N_k,$$

es decir que ω solo pertenece a un número finito de $A_n^{1/k-1}$ de donde $\omega \in S_{k-1}$. Por lo tanto $\{S_k\}_{k\geq 1}^{\downarrow}$ sucesión de sucesos y para el suceso $S = \bigcap_{k\geq 1} S_k$ se tiene que $p(S)$ = Lim $p(S_k)$ por proposición 1.2.3. Como por hipótesis para cualquier $\varepsilon > 0$ ocurren solo un número finito de sucesos A_n^{ε} entonces $p(S_k) = 1$, para $k \geq 1$. Por lo tanto $p(S) = 1$.

Lo anterior significa que $\omega \in S$ y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $|X\ (\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$, $n > N$, es decir $X_n \xrightarrow{c.s} X$.*

Lema 3.9.1. **(Borel - Cantelli)**. *Sea $\{E_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de sucesos arbitrarios. Si $\sum_{n\geq 1} p(E_n) < \infty$, entonces ocurre con probabilidad 1 sólo un número finito de tales sucesos.*

Prueba. Sea

S = {$\omega \in \boldsymbol{\Omega}$: ω pertenece solo a un número finito de los E_n $n \geq 1$}.

Y $S_n = \bigcup_{k\geq 1} E_n$.

Es claro que si ocurren un número finito de las $\{E_n\}_{n\geq 1}$ entonces ocurren un número finito de las $\{S_n\}_{n\geq 1}$, donde $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de sucesos.

Tenemos que $\tilde{S} = \bigcap_{n\geq 1} S_n$ y por proposición 1.2.3

$$
\begin{aligned}
p(\tilde{S}) &= \operatorname{Lim} p(S_n) \\
&= \operatorname{Lim} p\Big(\sum_{k\geq 1} E_k\Big) \\
&= \operatorname{Lim} \sum_{k\geq n} p(E_k) \\
&= \operatorname{Lim} \Big[\sum_{k\geq 1} p(E_k) - \sum_{k=1} p(E_k)\Big] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Lo que significa que $p(S) = 1$, es decir que los sucesos $\{E_n\}_{n\geq 1}$ sólo ocurren un número finito de ellos a excepción de los elementos de $\tilde{S} \subset \Omega$ tal que $p(\tilde{S}) = 0$. ∴

Teorema 3.9.1. (**Ley débil de los grandes números**). *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes igualmente distribuida es decir $E(X_n) = a$ y $\sigma^2 = D(X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ y sea $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1} X_n$. Entonces $\overline{X}_n \xrightarrow{p} a$.*

Prueba. Tenemos que

$$E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1} E(X_n) = a$$

y

$$D(\overline{X}_k) = D\Big(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Observemos que

$$\|\overline{X}_n - a\|_2 = \|\frac{1}{n}\sum_{k=1} X_k - a\|_2$$

$$= \sqrt{E[(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a)^2]}$$

$$= \sqrt{D(\overline{X}_n)}$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

Es decir Lim $E[(\overline{X}_n - a)^2] = 0$, Luego $\overline{X}_n \xrightarrow{2} a$ de donde $\overline{X}_n \xrightarrow{p} a$. *

Observación. $p(|\overline{X}_n - a| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$, $\varepsilon > 0$

Teorema 3.9.2. **(Ley fuente de los grandes números).** *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias no necesariamente independientes y no correlativas con $E(X_n) = a$ y $D(X_n) = \sigma^2$. Sea $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_n$ entonces $\overline{X}_n \xrightarrow{c.s} a$.*

Prueba. Sin pérdida de generalidad se puede considerar $a = 0$. Según la desigualdad de Chebyshev para cualquier $\varepsilon > 0$

$$p(|\overline{X}_{n^2}| > \varepsilon\} \leq \frac{D(\overline{X}_{n^2})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n^2\varepsilon^2} ,$$

de modo que $\sum_{n\geq 1} p(|\overline{X}_{n^2}| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} < \infty.$

Según el lema 3.9.1, con la probabilidad 1 pueden ocurrir un solo número finito de sucesos $E_n = \{|\bar{X}_{n^2}| > \varepsilon\}$ $n = 1,2,...$ y de donde por proposición 3.9.1 $\bar{X}_{n^2} \xrightarrow{c.s} 0$.

Consideremos

$$X_n^* = \underset{n^2+1 \leq k \leq (n+1)^2}{\text{Máx}} |X_{n^2} + \ldots + X_k|,$$

entonces

$$p\left(\left|\frac{X_n^*}{n^2}\right| > \varepsilon\right) \leq \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} p\left(\frac{|X_{n^2}+\ldots+X_k|}{n^2} > \varepsilon\right)$$

ya que $\left\{\left|\frac{X_n^*}{n^2}\right| > \varepsilon\right\} = \bigcup_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \left\{\left|\frac{X_{n^2}+\ldots+X_k}{n^2}\right| > \varepsilon\right\}$. Por corolario 3.8.1 tenemos

$$p\left(\left|\frac{X_n^*}{{}^2}\right| > \varepsilon\right) \leq \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \frac{(k-n^2)}{n^4\varepsilon^2}\,\sigma^2$$

$$\leq \frac{\sigma^2}{n^4\varepsilon^2} \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} (2m + m^2 - n^2)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n^4\varepsilon^2}\, 2n.2n$$

$$= \frac{4\sigma^2}{n^2\varepsilon^2}\,,$$

y $\displaystyle\sum_{n\geq 1} p\left(\left|\frac{X_n^*}{n^2}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty.$

Por consiguiente, con la probabilidad 1, puede ocurrir solo un número finito de sucesos $S_n = \left\{\left|\frac{X_n^*}{n^2}\right| > \varepsilon\right\}$, $n = 1,2,...,$ y de tal modo que $\frac{X_n^*}{n^2} \xrightarrow{c.s} 0$, por proposición 3.9.1. Es decir, para cualquier n, $m^2 \leq n \leq (m+1)^2$ tenemos

$$|\overline{X}_k| \leq |X_{n^2}| + \frac{X_n^*}{n^2} \xrightarrow{c.s} 0. \quad ∴$$

Definición 3.9.2. *Sea* $\{F_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de funciones de distribución. Si existe una función de distribución F tal que* $\text{Lim}\ F_n(x) = F(x)$,
para todo x punto de continuidad de F, decimos que $\{F_n\}_{n\geq 1}$ ***converge en distribución ó debilmente a*** *F. Decimos que una sucesión de variables aleatorias* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ ***converge en distribución a*** *X si las correspondientes funciones de distribución* F_n *convergen debilmente a F la función de distribución de X. Denotado por* $F_n \xrightarrow{\mathcal{D}} F$.

Observación. Decir que $F_n \xrightarrow{\mathcal{D}} F$ es equivalente a decir que $\text{Lim}\ p(\{x' \leq X_n \leq x''\}) = F(x'') - F(x')$, para cualesquiera puntos x', x'' en los cuales $F(x)$ es continua.

Observación. Se puede tener una sucesión de funciones de distribución F_n que no converge a una función de distribución. Sea

$$F_n(x) = \begin{cases} 0; \text{ si } x < n \\ 1; \text{ si } x \geq n, \end{cases}$$

entonces $\text{Lim } F_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y $F = 0$ no es una función de distribución.

Ejemplo 4. Sea $X_n \sim N(0,\frac{1}{n})$, $X = 0$ y Φ la función de distribución normal estandar

$$F_n(x) = \Phi(\sqrt{n}\, x)$$

y sea
$$F(x) = \begin{cases} 0; & \text{si } x < 0 \\ 1; & \text{si } x \geq 0 \text{ t.q } 0 \in \mathcal{D}_F. \end{cases}$$

$$\text{Lim } F_n(x) = \begin{cases} 0; & \text{si } x \quad 0 \\ \frac{1}{2}; & \text{si } x = 0 \\ 1; & \text{si } x \quad 0 \end{cases}$$

Por lo tanto $F_n \xrightarrow{\mathcal{D}} F$.

Observemos también que para cualquier $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} p(|X_n - X| > \varepsilon) &= p(|X_n| > \varepsilon) \\ &= 1 - p(|X_n| < \varepsilon) \\ &= 1 - (F_n(\varepsilon) - F_n(-\varepsilon)) \\ &= 2\Phi(-\sqrt{n}\,\varepsilon), \end{aligned}$$

de donde $\text{Lim } p(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ ó sea $X_n \xrightarrow{p} 0$.

Ejemplo 5. Este ejemplo muestra que variables aleatorias discretas pueden converger a una continua.

Sea $X \sim u(0,1)$ y X_n uniformemente distribuida en $j = 1,\ldots, 2^n$ ó sea

$$p(X_n = j) = \frac{1}{2^n};\ j = 1,2,\ldots,2^n$$

y $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0,1] \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Entonces

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x < 0 \\ \frac{j-1}{2^n}; & \frac{j-1}{2^n} \leq x < \frac{j}{2^n} \\ 1 & ;\ x \geq 1, \end{cases}$$

asi, si x es tal que $\frac{j-1}{2^n} \leq x < \frac{j}{2^n}$

$$|F_n(x) - F(x)| = \frac{j-1}{2^n} - x \leq \frac{1}{2^n}.$$

Luego Lim $|F_n(x) - F(x)| = 0$ y de donde $F_n \xrightarrow{D} F$.

Proposición 3.9.2. *Si la sucesión de las funciones de distribución de las variables aleatorias* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *convengan debilmente hacia la función de distribución de la variable* X, *entonces para cualquier función contínua limitada* f *definida en* $\mathbb{R}$

$$\lim E(f(X_n)) = E(f(X)).$$

Prueba. Para cualquier $\varepsilon > 0$ se encuentra un valor finito de $\underline{a}$ que

$$p(|X\ | \leq a) \geq 1 - \varepsilon;\ \forall n = 1,2,\ldots \qquad (1)$$

Tomando un intervalo lo suficientemente grande $[-a_0, a_0]$ para lo cual $p\{|X| \leq a_0\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ y por hipótesis Lim $p(|X_n| \leq a_0)$ $= p(|X| \leq a_0)$, obtenemos que para $n \geq n_0$ y $a \geq a_0$ se cumple

(1) y para cada número finito de los valores restantes $n = 1, \ldots, n_0$ con la correspondiente elección de $\underline{a}$, también se cumplirá.

Como f es continua limitada se tiene que $|f(x)| \leq k$, $x \in \mathbb{R}$ y además f es una función Borel - medible en $[-a, a]$, entonces existe

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x_k); \; x_{k-2} < x \leq x_k & (k = 1, \ldots, N) \\ 0 \quad ; \; x < -a \quad \text{y} \quad x > a, \end{cases}$$

donde $-a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = a$ son puntos de continuidad de la función F de distribución de X tales que $|f(x) - f(x_k)| \leq \varepsilon$ para $x_{k-1} < x \leq x_k$. De la condición (1) se deduce que

$$\begin{aligned} |E(f(X_n)) - E(f_\varepsilon(X_n)| &\leq E|\, f(X_n) - f_\varepsilon(X_n)| \\ &= \int_{\Omega} |f(X_n) - f_\varepsilon(X_n)|dp \\ &= \int_{\{|X_n| \leq a\}} |f(X_n) - f_\varepsilon(X_n)dp \,+ \\ &\quad \int_{\{|X_n| > a\}} |f(X_n) - f_\varepsilon(X_n)|dp \\ &\leq \int_{\{|X_n| \leq a\}} \varepsilon dp + \int_{\{|X_n| > a\}} |f(X_n)|dp \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon p(|X_n| \leq a) + p(|X_n| > a)$$

$$\leq (k+1)\varepsilon.$$

Para todo los n = 1,2,... y analogamente.

$$|E(f(X)) - E(f_\varepsilon(X))| \leq (k+1)\varepsilon,$$

para cualquier N fijo. De la relación $p(x' < X_n \leq x")$

obtenemos que $$E(f_\varepsilon(X_n)) = \sum_{k=1}^{N} f(x_k)p(x_{k-1} < X_n \leq x_k)$$

$$\longrightarrow \sum_{k=1}^{N} f(x_k)p(x_{k-1} < X \leq x_k)$$

$$= E(f_\varepsilon(X)).$$

En conclusión tenemos que para cualquier $\varepsilon > 0$

$$\text{Lim } |f(X_n)) - E(f(X))| \leq 2(k+1)\varepsilon$$

ya que Lim $E(f_\varepsilon(X_n)) = E(f_\varepsilon(X))$ y

$$|E(f(X_n)) - E(f(X))| = |E(f(X_n)) - E(f_\varepsilon(X_n) + E(f_\varepsilon(X)) - E(f(X))| + \delta_n$$

$$\leq 2(k+1)\varepsilon + \delta_n,$$

con $\delta_n \longrightarrow 0$, para $n \longrightarrow \infty$. ⁂

Proposición 3.9.3. *Sea* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de variables aleatorias que convergen en medida 2 a la variable aleatoria* X, *entonces las distribuciones de probabilidades de estas variables aleatorias converge debilmente hacia la distribución* *de probabilidad de X.*

Prueba. Para cualquier ε y δ tan pequeños como se quiera y para los valores de n suficientemente grandes

$$p(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{E(X_n - X)^2)}{\varepsilon^2} \leq \delta.$$

De donde se tiene que

$$\begin{aligned} p(x'+\varepsilon \leq X \leq x''-\varepsilon)-\delta &\leq p(x'+\varepsilon \leq X \leq x''-\varepsilon)-p(|X_n-X| > \varepsilon) \\ &\leq p(x' \leq X_n \leq x'') \\ &\quad p(x' \leq X_n \leq x'') + p(|X_n - X| > \varepsilon) \\ &\quad p(x' \leq X \leq x'') + \delta, \end{aligned}$$

donde x', x'' son puntos de continuidad de la función de distribución F. Cuando ε tiende a cero, obtenemos que

$$p(x' \leq X \leq x'') - \delta \leq p(x' \leq X_n \leq x'') \leq p(x' \leq X \leq x'') + \delta.$$

Luego Lim $p(x' \leq X_n \leq x'') = p(x' \leq X \leq X'')$. ⁂

3.10 TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL

Definición 3.10.1. *Sea f una función continua por tramos, diferenciable y absolutamente integrable en* **IR**. *Definimos*

$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}dx$. *llamado la* ***transformada de Fourier de*** *f. Si la transformada de Fourier existe para f entonces es posible obtener*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-itx} dt,$$

llamada la ***inversa de la transformada de Fourier.***

Definición 3.10.2. *Sea f y g funciones integrables en* $\mathbb{R}$. *Definimos*

$$f \circ g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) g(u) du,$$

llamada ***convulación*** *de f y g.*

Observación. Si f y g son funciones continuas se tiene que $f \circ g$ tambien es continua.

$$F_{f\circ g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dx \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} f(x - u) g(u) du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - u) g(u) e^{itx} dx du$$

$$= \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) g(u) e^{it(v+u)} dv du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{itv} dv . \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{itu} du$$

$$= F_f(t) \, . \, F_g(t)$$

Luego la inversa de la transformada de Fourier es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_f(t) F_g(t) \,^{-itx} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du.$$

Si $x = 0$ entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_f(t) F_g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(-u) du$$

tomando el caso especial que $g(u) = \overline{f(-u)}$ tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_f(t)\overline{F_f(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\overline{f(u)}du$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \| F_f(t)\|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx,$$

conocida esta igualdad como **igualdad de Parseval.**

Definición 3.10.3. *Sea X una variable aleatoria con función de distribución F. Definamos la* ***función característica de la variable aleatoria*** *X como*

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(t) &= E(e^{itX}) \\ &= \int_{\Omega} e^{itX} dp \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dp_F(x), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Observación. Como $\|e^{itx}\| \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $\hat{\mu}(t)$ siempre está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

$\hat{\mu}(t)$ se conoce también como la **transformación de Founier de la medida de probabilidad** p_F, **ó de la distribución** F. También se dice que la variable aleatoria X tiene función características $\hat{\mu}$ y algunas veces se escribe $\hat{\mu}_X$ ó $\hat{\mu}_F$.

Si F es una función de distribución discreta entonces

$$\hat{\mu}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{itk} p(X=k).$$

Si F es absolutamente contínua con función de densidad f entonces

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx,$$

además es posible obtener f a partir de $\hat{\mu}(t)$ por medio de la inversa de la transformada de Faurier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\hat{\mu}(t)\,dt, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Como $e^{itX} = \sum_{k=0}^{n} i^k \frac{X^k}{k!} t^k + \theta\frac{X^{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1},$

donde θ es una variable limitada $\|\theta\| \leq 1$. Si los momentos existen para $k = 1,\ldots,n+1$, entonces

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(t) &= E(e^{itX}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} i^k \frac{E(X^k)}{k!} t^k + \frac{E(\theta X^{n+1})}{(n+1)!} t^{n+1}, \quad t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(**función generadora de momentos**)

Con $\|E(\theta X^{n+1})\| \leq E(X^{n+1})$ y $E(X^0) = \hat{\mu}(0) = 1$.

$$E(|X^k|) = i^{-k}\hat{\mu}^k(0),\ k=1,\ldots,\ n.$$

($\hat{\mu}^k$ es la k-ésima derivada de $\hat{\mu}$ con respecto a t). Es decir que es posible calcular los momentos a partir de las derivadas de la función característica de la variable aleatoria.

Proposición 3.10.1. *Sea* $X_1, \ldots, X_n$ *variables aleatorias independientes y* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ *entonces*

$$\hat{\mu}_{S_n}(t) = \hat{\mu}_{X_1}(t) \ldots \hat{\mu}_{X_n}(t).$$

Prueba. Como e^{itx} es una función $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-medible entonces e^{itX} es una función P^{σ}-medible. Luego e^{itX} es una variable aleatoria compleja.

Además $(e^{itX})^{-1}(B) = X^{-1}((e^{it})^{-1}(B)) \in \sigma(X)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$. De donde $e^{itX_1}, \ldots, e^{itX_n}$ son variables aleatorias independientes ya que $X_1, \ldots, X_n$ lo son.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{S_n}(t) &= E(e^{itS_n}) \\ &= E(e^{itX_1} \ldots e^{itX_n}) \\ &= E(e^{itX_1}) \ldots E(e^{itX_n}) \\ &= \hat{\mu}_{X_1}(t) \ldots \hat{\mu}_{X_n}(t). \end{aligned}$$ ⁂

Funciones características de las distribuciones más usadas en estadística.

Uniforme: $\hat{\mu}(t) = \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{(b-a)it}$; en $[a,b]$

Paisson: $\hat{\mu}(t) = e^{\lambda(e^{it-1})}$; $(p(\lambda))$

Normal: $\mu(t) = e^{itE(X) - \frac{D(X)}{2} t^2}$, $(N(E(X), D(X)))$

Bernoville: $\hat{\mu}(t) = pe^{it} + (1-p), \quad (B(p))$

Cauchy: $\hat{\mu}(t) = e^{-|t|} \quad , \quad (CA)$

Estable: $\hat{\mu}(t) = e^{-|t|^{\alpha}}; \; 0 < \alpha \leq 2, \quad (tS(\alpha))$

Proposición 3.10.2. *Sea X una variable aleatoria y $\hat{\mu}$ su función característica. Si F es la función de distribución de X y $\{\Delta_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias que convergen en medida 2 a cero independientes de X entonces*

$$F(x'') - F(x') = \text{Lim} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix''t} - e^{ix't}}{it} \hat{\mu}(t)\delta_n(t)dt$$

con $\delta_n(t)$ la función característica de las variables aleatorias Δ_n.

Prueba. Consideremos las variables aleatorias $X_n = X + \Delta_n$, entonces como $\Delta_n \xrightarrow{2} 0$ se tiene que $X_n \xrightarrow{2} X$. La función característica $\hat{\mu}_n(t) = \hat{\mu}(t).\delta_n(t)$ de $X_n = X + \Delta_n$ las cuales son integrables absolutamente ya que

$$|\hat{\mu}(t)| \leq 1 \quad y \quad |\hat{\mu}_n(t)| \leq |\delta_n(t)|.$$

Sea f_n la función de densidad de las funciones de distribución de X_n que esta relacionada con la función característica $\hat{\mu}_n(t)$ de la variable aleatoria X_n a través de la transformada de Fourier.

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\hat{\mu}_n(t)dt$$

integrando por x, en el intervalo $[x', x'']$ obtenemos que

$$p(x' \leq X_n \leq x'') = \int_{x'}^{x''} f_n(x)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{x'}^{x''} e^{-itx}dx\right]\hat{\mu}_n(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx''}-e^{-itx'}}{-it}\,\hat{\mu}(t).\delta_n(t)dt.$$

Por proposición 3.9.3, tenemos

$$p(x' \leq X \leq x'') = Lim\; p(x' \leq X_n \leq x'')$$

$$= Lim\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix''t}-e^{-ix't}}{-it}\,\hat{\mu}(t)\delta_n(t)dt. \quad *$$

El resultado anterior es conocido como **fórmula de inversión.**

Observasión. La función de distribución está unívocamente determinada por la función característica garantizado por la proposición anterior y la proposición 3.8.2.

Proposición 3.10.3. *La sucesión de distribución de probabilidad con las funciones características* $\hat{\mu}_n(t)$*,* $n = 1,2,\ldots,$ *converge debilmente hacia la distribución con la función característica* $\hat{\mu}(t)$*, si y sólo si*

$$Lim\; \hat{\mu}_n(t) = \hat{\mu}(t).$$

converge uniformemente segun t en cada intervalo finito.

Prueba. Si las distribuciones de probabilidades de las variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ convergen debilmente hacia la distribución de la variable X. Entonces por proposición 3.9.2, como e^{itx} es contínua (donde t cambia en un determinado intervalo finito $|t| \leq T$)

$$\begin{aligned}\text{Lim } \hat{\mu}_n(t) &= \text{Lim } E(e^{itX_n}) \\ &= E(e^{itX}) \\ &= \hat{\mu}(t)\end{aligned}$$

converge uniformemente según t, ya que

$$|e^{itx}-e^{itx_k}| \leq C|x-x_k|,\ k = 1, \ldots, N$$

donde la constante C depende solo de T.

Por otra parte si se cumple que $\text{Lim } \hat{\mu}_n(t) = \hat{\mu}(t)$ uniformenente en t. Para $\eta_n = X_n + \Delta$ y $\eta = X + \Delta$ con las funciones características $\hat{\mu}'_n(t) = \hat{\mu}_n(t)\delta(t)$ y $\hat{\mu}'(t) = \hat{\mu}(t)\delta(t)$, donde $\delta(t) = e^{-\sigma^2 t^2/2}$ es la función característica de la variable aleatoria de Gauss Δ, independiente de X_n y X.

Como $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}'_n(t) - \hat{\mu}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}_n(t) - \hat{\mu}(t)|^2 \delta(t)^2 dt$

además para cualequier $\varepsilon > 0$ se encuentra un T t.q

$$\int_{|t|>T} |\hat{\mu}_n(t) - \hat{\mu}(t)|^2 \delta(t)^2 dt \leq 2\int_{|t|>T} \delta(t)^2 dt \leq \varepsilon,$$

para un T grande.

y para $\lim \hat{\mu}_n(t) = \hat{\mu}(t)$ uniforme según t, $|t| \leq T$

$$\lim \int_{-T}^{T} |\hat{\mu}_n(t) - \hat{\mu}(t)|^2 \delta(t)^2 dt = 0,$$

por lo tanto para las densidades $\delta_n(x)$ y $\delta(x)$ de las funciones de distribución de las variables aleatorias η_n y η

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\delta_n(x) - \delta(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}'(t) - \hat{\mu}_n'(t)|^2 dt$$

(por la igualdad de Porseval).

Luego $\lim \int_{-\infty}^{\infty} |\delta_n(x) - \delta(x)|^2 dx = 0,$

de donde se da la convergencia débil de las funciones de distribución para cualquier intervalo finito $[x', x'']$.

$$p(x' \leq \eta_n \leq x'') = \int_{x'}^{x''} \delta_n(x) dx \longrightarrow \int_{x'}^{x''} \delta(x) dx = p(x' \leq \eta \leq x'').$$

Luego las funciones de distribución de las variables aleatorias X_n; $n = 1, 2, \ldots$ convergen debilmente a la función de distribución de la variable aleatoria X ya que como $\eta_n = X_n + \Delta$ y $\eta = X + \Delta$ entonces

$$\|\eta_n - X_n\|_2 = \sqrt{E[(\eta_n - X_n)]^2} = \sqrt{E(\Lambda^2)}$$

y $\qquad \|\eta - X\|_2 = \sqrt{E(\Delta^2)}$

de donde $\|X_n - X\|_2 = \|X_n - \eta_n + \eta - X\|_2 + \delta_n$

$\leq \|X_n - \eta_n\|_2 + \|\eta - X\|_2 + \delta_n$, con $\delta_n \to 0$ cuando $n \to \infty$

$= 2\sqrt{E(\Delta^2)} + \delta_n,$

para $\sigma = \sqrt{E(\Delta^2)}$ tan pequeño como queramos. ⁂

Teorema 3.10.1. **(Teorema del límite central).** *Sea* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes con* $E(X_n) = a_n$ *y* $D(X_n) = \sigma_n^2$; $n = 1,2,\ldots,$ *y* $\sum_{n\geq 1} \sigma_n^2 = \infty$, *cumpliendo tambien*

$$Lim \frac{1}{(\sqrt{\sigma_n^2})^3} \sum_{k=1}^{n} E(|X_k - a_k|^3) = 0 \quad \textbf{(Condición de Liapunov)}$$

Si $S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}$ *entonces* $Lim\ p(x' \leq S^* \leq x'') = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{x'}^{x''} e^{-x^2/2} dx.$

Prueba. Sea $X_{kn} = (X_k - a_k)/\sqrt{D(S_n)}$; $k = 1,2,\ldots,$ de donde se tiene que

$$E(X_{kn}) = 0 \quad y \quad D(X_{kn}) = \frac{D(X_k)}{\sum_{j=1}^{n} D(X_j)} = \frac{\sigma_k^2}{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2} .$$

Por las condiciones del teorema se tiene que

$$\text{Lim } D(X_{kn}) = 0$$

y de acuerdo a las condiciones realizadas anteriormente la condición de Liapunov se transforma en

$$\text{Lim} \sum_{k=1}^{n} E(|X_{kn}|^3) = 0.$$

Además

$$S_n^* = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} X_{kn}$$

La prueba está basada a partir de aquí en la proposición 3.10.3. Demostremos que las funciones características $\hat{\mu}_n(t)$ de las variables aleatorias S_n^* convergen hacia la función característica $\hat{\mu}(t) = e^{-t^2/2}$ de la distribución normal standar.

Para las funciones características $\hat{\mu}_{kn}(t)$ de los sumandos independientes X_{kn}, obtenemos que

$$\hat{\mu}_{kn}(t) = 1 - \frac{\sigma_{kn}^2}{2} t^2 + \frac{R_{kn}}{6} t^3,$$

de acuerdo a la función generadora de momentos, donde $|R_{kn}| \leq E(|X_{kn}|^3)$. Como $\sigma_{kn}^2 \to 0$, $R_{kn} \to 0$ para $n \to \infty$ uniformemente por k, entonces. Lim $\hat{\mu}_{kn}(t) = 1$ uniformemente por k y t en cada intervalo finito; en particular $|\hat{\mu}_{kn}(t)-1| \leq \frac{1}{2}$ para valores suficientemente grandes de donde tiene sentido hablar sobre el logaritmo de las funciones $\hat{\mu}_{kn}(t)$.

$\hat{\mu}_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \hat{\mu}_{kn}(t)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ln} \hat{\mu}_n(t) &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ln} \hat{\mu}_{kn}(t) \;;\; n \geq N \\
&= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ln} \left(1 - \frac{\sigma_{kn}^2}{2} t^2 + \frac{R_{kn}}{6} t^3\right) \\
&\sim \sum_{k=1}^{n} \left(- \frac{\sigma_{kn}^2}{2} t^2 + \frac{R_{kn}}{6} t^3\right) \\
&= - t^2/2 + \left(\sum_{k=1}^{n} R_{kn}\right) \frac{t^3}{6} \\
&\sim -t^2/2,
\end{aligned}$$

Uniformemente para t en cada intervalo finito, ya que por la condición de Liapunov

$$\left|\sum_{k=1}^{n} R_{kn}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} E(|X_{kn}|^3) \to 0 \;;\; n \to \infty .$$

Por lo tanto Lím $\hat{\mu}_n$ (t) $= e^{-t^2/2}$. *

BIBLIOGRAFIA

1- *Real Analysis* — H.L. Royden. Mcmillan, New York, 1963; 2nd. ed., 1968.

2- *Curso de Probabilidade y Teoría de la Medida* — Victor M. Pérez Abreu C., Séptimo curso Centro Americano y del Caribe de Matemática. El Salvador 1988

3- *Estudio Comparativo de la Integral de Riemann y la Integral de Lebesgue.* — David Enrique Navarro, Enero 1977 El Salvador, C.A. (trabajo de graduación).

4- *The Elements of Integration.* — Robert G. Bartle John Wiley & Sons, New York 1966.

5- *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas* — Paul L. Meyer Ed. Fondo Educativo Interamericano, S.A. Segunda Edición 1970

6- *Probability and Mathematical Statistcs* — K.R. Parthasarathy
New York and London, 1967;
Ed., Academic Press.

7- *Procesos Aleatorios* — Yuri Rozanov
Ed. Mir Moscu, 1973.

8- *Teorema de Representación de Riesz* — Pedro José Geoffroy Carletti
y Marcelino Méjia Gonzáles
Noviembre - 1988;
El Salvador, C.A.
(trabajo de graduación).