

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

**FACULTAD DE INGENIERIA
Y
ARQUITECTURA**

**ALGUNAS APLICACIONES DE LAS DIFERENCIAS
FINITAS Y RELAJACIONES A LA MECANICA
ESTRUCTURAL”**

PROYECTO DE INGENIERIA PRESENTADO POR:

—CTOR DAVID HERNANDEZ FLORES

**PREVIO A LA OPCION DEL TITULO
DE**

INGENIERO CIVIL

MAYO DE 1968

SAN SALVADOR - EL SALVADOR - CENTRO AMERICA





UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

Dr. ANGEL GOCHEZ MARIN

SECRETARIO GENERAL:

Dr. GUSTAVO ADOLFO NOYOLA

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO:

Ing. GUILLERMO IMERY

SECRETARIO:

Ing. RODOLFO JENKINS

DIRECTOR DE LA ESCUELA

DE INGENIERIA CIVIL:

Ing. RICARDO MARTINEZ G.

Donativo / 10-IX-769 / H. D. H. F. # 22247

PROYECTO DE INGENIERIA

TEMA:

"ALGUNAS APLICACIONES DE LAS DIFERENCIAS
FINITAS Y RELAJACIONES A LA MECANICA
ESTRUCTURAL"

ASESOR ACADEMICO: Ing. GUILLERMO CALDERON
CONSULTORES: Ing. RICARDO MARTINEZ
 Ing. EDUARDO GRANIELLO

EXAMEN DE GRADO:

Presidente: Ing. GUILLERMO CALDERON
Primer Vocal Ing. EDUARDO GRANIELLO
Segundo Vocal Ing. CARLOS O. NOLASCO

San Salvador, El Salvador, Centro América

Mayo de 1968.

DEDICATORIA

A mis padres

Br. HECTOR DAVID HERNANDEZ

y

Prof^a EMILIA FLORES DE HERNANDEZ

A mis hermanos

Dr. HECTOR ANTONIO HERNANDEZ FLORES

Br. GRACIELA EMILIA HERNANDEZ FLORES

Br. JORGE LUIS HERNANDEZ FLORES

Br. RHINA VIOLETA HERNANDEZ FLORES

Br. JOSE FRANKLIN HERNANDEZ FLORES

Srita. ANA ISSA MARIA HERNANDEZ FLORES

A mi abuelita, tíos y demás parientes

A mi padrino y tío, DR. JULIO CESAR OLIVA

A mis buenos amigos, Ing. Eduardo Graniello, Ing. Guillermo
Calderón, Dr. Inf. José Reynaldo Santiago
Quezada y Dn. Ricardo Engelhard.

A mis Profesores

A mis compañeros y amigos.

San Salvador, El Salvador, C.A. Mayo de 1968.

I N D I C E

		Pág	
	INTRODUCCION		1
I	METODO DE DIFERENCIAS FINITAS	"	2
	1-1 Conceptos Fundamentales: Diferenciación	"	9
	1-2 Integración Finita	"	11
	1-3 Errores al emplear Diferencias Finitas	"	15
	1-4 Diferencias Finitas con Incrementos X no iguales	"	17
	1-5 Diferencia Finita Parcial	"	18
	1-5a-Diferencias Parciales en Coordenadas Rectangulares	"	20
	1-5b-Diferencia Finita Parcial en Coordenadas Polares	"	22
	1-6 Aplicaciones: Momentos Flexionantes y Deflexiones de Vigas	"	22
	1-6a-Vigas simplemente apoyadas: Diversos Tipos de Carga	"	36
	1-6b-Factores de Acarreo y Rigidez	"	43
	1-6c-Momentos de Empotramiento	"	46
	1-6d-Análisis de Vigas Estáticamente Indeterminadas	"	51
II	PANDEO ELASTICO DE BARRAS AXIALMENTE CARGADAS	"	56
III	VIGAS SOBRE FUNDACION ELASTICA	"	66
IV	DEFLEXION DE MEMBRANA	"	68
	4-1 Momentos Flexionantes y Deflexiones de Placas Bajo Cargas Laterales	"	78
V	METODO DE RELAJACION	"	78
	5-1 Solución de Ecuaciones Lineales por Método de las Relajaciones. Tabla de Relajación. Sobrerelajación, etc.	"	82
	5-2 Método de Relajaciones para la Solución de Entramos Articulados	"	88
	5-3 Distribución de Momentos por Método de Relajaciones Aplicaciones	"	88
	BIBLIOGRAFIA		

I N T R O D U C C I O N

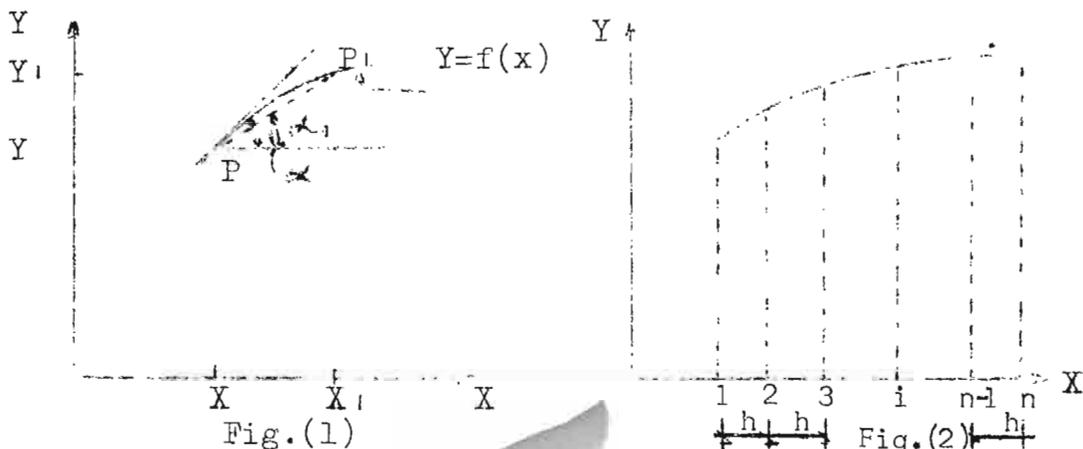
Muy frecuentemente nos encontramos en la MECANICA ESTRUCTURAL, con problemas tales como: cortantes y momentos, rotaciones y deflexiones, rigideces y factores de acarreo, etc., cuyas soluciones exactas son la resolución de ecuaciones diferenciales, problemas éstos que no ofrecen dificultad cuando las condiciones de carga son sencillas y los miembros son de sección constante. El problema se complica cuando los miembros son de sección variables y las cargas no son uniformemente distribuidas, en estos casos la solución de las ecuaciones diferenciales, además de requerir demasiado tiempo y cuidado, algunas veces se hace hasta difícil.

Sin embargo, para propósitos prácticos, nos bastará con obtener valores, aunque no exactos, pero sí lo suficientemente aproximados; es entonces cuando sentimos la necesidad de disponer de métodos, que además de ser de fácil aplicación, nos den la exactitud deseada.

Es así como en base a estas necesidades, numerosos métodos numéricos han sido desarrollados, entre ellos podríamos citar: el método de las Diferencias Finitas, el método de las Relajaciones, métodos numéricos de N.M. Newmark, método de distribución de momentos de Hardy Cross, etc., teniendo cada uno de ellos sus campos de aplicación, en los cuales, dichos procedimientos, facilitan la solución de los problemas.

Los dos primeros métodos mencionados, es decir, el Método de las Diferencias Finitas y el Método de las Relajaciones, son los puntos que se desarrollan en el presente trabajo.

1.- METODO DIFERENCIAS FINITAS

1-1 Conceptos Fundamentales:
Diferenciación

En la figura (1) tenemos una función $Y = f(x)$; necesitamos conocer la pendiente de la curva en el punto P. Para tal objeto, consideremos un segundo punto P_1 sobre la curva; la línea que une P con P_1 será secante de la curva. Ahora, si dicho punto P_1 , lo movemos a lo largo de la curva acercándolo a P, el valor de la secante se irá aproximando al valor de la tangente de la curva en P. En el límite ambos valores serán iguales. En otras palabras, se ha ido tomando incrementos de la variable independiente (x) cada vez más pequeños, con lo que los incrementos de la variable dependiente (Y) se harán también pequeños.

El punto P tiene como coordenadas: X
Y=f(x)

El punto P_1 tiene como coordenadas: X_1
 $Y_1 = f(x_1)$

pero: $X_1 = x + \Delta x$
 $Y_1 = f(x + \Delta x)$
 $Y_1 - Y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$\text{Secante: } \tan \alpha_1 = \frac{Y_1 - Y}{X_1 - X} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$, $\alpha_1 \rightarrow \alpha$

$$\text{Tangente en P: } \tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{dY}{dx}$$

Es entonces cuando llegamos al concepto de derivada, que es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero.

En el cálculo de diferencias finitas el concepto es el mismo que en el cálculo infinitesimal, solamente que se emplean incrementos.

Entre más pequeños tomemos estos incrementos, más exactitud obtendremos.

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} Y &= x^2 - 4x \\ Y + \Delta Y &= (x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) \\ Y + \Delta Y &= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 4x - 4\Delta x \\ \Delta Y &= 2x\Delta x + \Delta x^2 - 4\Delta x \\ \frac{\Delta Y}{\Delta x} &= 2x + \Delta x - 4 \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x} = 2x - 4$$

Como se observa, entre más pequeños sean estos incrementos, mayor exactitud lograremos.

Con el objeto de facilitar los cálculos, se acostumbra a tomar los incrementos de la variable independiente Δx constantes a un valor h , tendremos:

primera diferencia:

$$\left(\frac{\Delta Y}{\Delta x} \right)_n = \frac{Y(n+1) - Y_n}{h}$$

Segunda diferencia: es obtenida derivando la primera derivada así:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta x^2} \right)_n &= \frac{\Delta \left(\frac{\Delta Y}{\Delta x} \right)_n}{\Delta x} = \frac{\Delta Y_n - \Delta Y_{(n-1)}}{\Delta x^2} \\ \left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta x^2} \right)_n &= \frac{Y(n+1) - Y(n) - (Y(n) - Y(n-1))}{h^2} \\ \left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta x^2} \right)_n &= \frac{Y(n+1) - 2Y_n + Y(n-1)}{h^2} \end{aligned}$$

Para facilitar la obtención de las derivadas son muy útiles usar tablas de diferencias como se ilustra.

TABLA DE DIFERENCIAS DESCENDENTES

Los puntos usados son todos en orden descendente con respecto al punto en consideración.

Así para la primera diferencia, por definición de diferencias descendente tendremos:

$$\Delta Y_n = Y(n) - Y(n-1)$$

La segunda diferencia $\Delta^2 Y_n$ es obtenida encontrando la primera diferencia de ΔY_n , tendremos:

$$\begin{aligned} \Delta^2 Y_n &= \Delta(\Delta Y_n) = \Delta Y_n - \Delta Y_{(n-1)} \\ \Delta^2 Y_n &= Y(n) - Y(n-1) - (Y(n-1) - Y(n-2)) \\ \Delta^2 Y_n &= Y(n) - 2Y(n-1) + Y(n-2). \end{aligned}$$

En forma semejante:

$$\Delta^3 Y_n = \Delta(\Delta^2 Y_n) = \Delta^2 Y_n - \Delta^2 Y_{(n-1)} = Y_n - 3Y_{(n-1)} + 3Y_{(n-2)} - Y_{(n-3)}$$

$$\Delta^4 Y_n = \Delta(\Delta^3 Y_n) = \Delta^3 Y_n - \Delta^3 Y_{(n-1)} = Y_n - 4Y_{(n-1)} + 6Y_{(n-2)} - 4Y_{(n-3)} + Y_{(n-4)}$$

$$\Delta^5 Y_n = \Delta(\Delta^4 Y_n) = \Delta^4 Y_n - \Delta^4 Y_{(n-1)} =$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n Y_n = \Delta(\Delta^{n-1} Y_n) = \Delta^{n-1} Y_n - \Delta^{n-1} Y_{(n-1)}$$

Colocadas estas diferencias en forma tabular:

EN DIAGONAL

X	Y	ΔY	$\Delta^2 Y$	$\Delta^3 Y$	$\Delta^4 Y$	ΔY_n	$\Delta^2 Y_n$	$\Delta^3 Y_n$	$\Delta^4 Y_n$
X_n	Y_n					1	1	1	1
		ΔY_n							
X_{n-1}	Y_{n-1}		$\Delta^2 Y_n$			-1	-2	-3	-4
		ΔY_{n-1}		$\Delta^3 Y_n$					
X_{n-2}	Y_{n-2}		$\Delta^2 Y_{n-1}$		$\Delta^4 Y_n$		1	+3	+6
		ΔY_{n-2}		$\Delta^3 Y_{n-1}$					
X_{n-3}	Y_{n-3}		$\Delta^2 Y_{n-2}$					-1	-4
		ΔY_{n-3}							
X_{n-4}	Y_{n-4}								+1

Ordenadas las diferencias en forma horizontal

X	Y	ΔY	$\Delta^2 Y$	$\Delta^3 Y$	$\Delta^4 Y$	ΔY_n	$\Delta^2 Y_n$	$\Delta^3 Y_n$	$\Delta^4 Y_n$
X_n	Y_n	ΔY_n	$\Delta^2 Y_n$	$\Delta^3 Y_n$	$\Delta^4 Y_n$	1	1	1	1
X_{n-1}	Y_{n-1}	ΔY_{n-1}	$\Delta^2 Y_{n-1}$	$\Delta^3 Y_{n-1}$		-1	-2	-3	-4
X_{n-2}	Y_{n-2}	ΔY_{n-2}	$\Delta^2 Y_{n-2}$				1	+3	+6
X_{n-3}	Y_{n-3}	ΔY_{n-3}						-1	-4
X_{n-4}	Y_{n-4}								1

TABLA DE DIFERENCIAS ASCENDENTES:

Los puntos usados son todos en orden ascendente con respecto al punto en consideración.

Así para la primera diferencia por definición de diferencia ascendente tenemos:

$$\Delta Y_n = Y(n+1) - Y(n)$$

Encontrando la primera diferencia de ΔY_n obtenemos la segunda diferencia

$$\begin{aligned}\Delta^2 Y_n &= \Delta(\Delta Y_n) = \Delta Y(n+1) - \Delta Y_n = \\ \Delta^2 Y_n &= Y(n+2) - Y(n+1) - (Y(n+1) - Y(n)) = \\ \Delta^2 Y_n &= Y(n+2) - 2Y(n+1) + Y(n)\end{aligned}$$

De manera semejante obtenemos la tercera, cuarta, etc. diferencias

$$\begin{aligned}\Delta^3 Y_n &= \Delta(\Delta^2 Y_n) = \Delta^2 Y(n+1) - \Delta^2 Y(n) = Y(n+3) - 3Y(n+2) + 3Y(n+1) - Y_n \\ \Delta^4 Y_n &= \Delta(\Delta^3 Y_n) = \Delta^3 Y(n+1) - \Delta^3 Y(n) = Y(n+4) - 4Y(n+3) + 6Y(n+2) - 4Y(n+1) + Y_n \\ \Delta^5 Y_n &= \Delta(\Delta^4 Y_n) = \Delta^4 Y(n+1) - \Delta^4 Y(n) = \\ \Delta^n Y_n &= \Delta(\Delta^{n-1} Y_n) = \Delta^{n-1} Y(n+1) - \Delta^{n-1} Y_n =\end{aligned}$$

Ordenadas estas diferencias en forma tabular.

EN DIAGONAL

X	Y	ΔY	$\Delta^2 Y$	$\Delta^3 Y$	$\Delta^4 Y$	ΔY_n	$\Delta^2 Y_{nn}$	$\Delta^3 Y_n$	$\Delta^4 Y_n$
X_n	Y_n					-1	1	-1	1
	ΔY_n								
X_{n+1}	Y_{n+1}		$\Delta^2 Y_n$			1	-2	3	-4
	ΔY_{n+1}			$\Delta^3 Y_n$					
X_{n+2}	Y_{n+2}		$\Delta^2 Y_{n+1}$		$\Delta^4 Y_n$		1	-3	6
	ΔY_{n+2}			$\Delta^3 Y_{n+1}$					
X_{n+3}	Y_{n+3}		$\Delta^2 Y_{n+2}$					1	-4
	ΔY_{n+3}								
X_{n+4}	Y_{n+4}								1

TABLA DE DIFERENCIAS CENTRALES

Los puntos usados son los situados simetricamente con respecto al punto en consideración.

Ejemplo: Sea la función $Y = X^4 + 3X^3 + 10X^2 + 5X + 8$, etc.
 Se nos pide encontrar las diferencias $\Delta Y, \Delta^2 Y, \Delta^3 Y$, etc.

X	Y	ΔY	$\Delta^2 Y$	$\Delta^3 Y$	$\Delta^4 Y$	$\Delta^5 Y$
0	8	19	52	54	24	0
1	27	71	106	78	24	0
2	98	177	184	102	24	0
3	275	361	286	126		
4	636	647	412			
5	1283	1059				
6	2342					

Se ha usado las diferencias ascendentes. Comenzamos encontrando los valores de la función Y para valores de la variable X, así por ejemplo, cuando x toma valor de cero, $Y = (0) + 3(0) + 10(0) + 5(0) + 8 = 8$. Como se observa, los incrementos $\Delta x = h$ se han tomado iguales a la unidad.

La primera diferencia $\Delta Y_n = Y_{(n+1)} - Y_n$

la segunda diferencia $\Delta^2 Y_n = \Delta(\Delta Y_n) = \Delta Y_{(n+1)} - \Delta Y_n$

Se notará que las diferencias son obtenidas por sencillas restas

$$\Delta Y_0 = Y_1 - Y_0 = 27 - 8 = 19$$

$$\Delta^2 Y_0 = \Delta Y_1 - \Delta Y_0 = 71 - 19 = 52$$

$$\Delta^3 Y_0 = \Delta^2 Y_1 - \Delta^2 Y_0 = 106 - 52 = 54$$

$$\Delta^4 Y_0 = \Delta^3 Y_1 - \Delta^3 Y_0 = 78 - 54 = 24$$

$$\Delta^5 Y_0 = \Delta^4 Y_1 - \Delta^4 Y_0 = 24 - 24 = 0$$

Gran analogía existe entre teoremas del cálculo de diferencias finitas con los del cálculo infinitesimal.

Se dan a continuación estos teoremas:

Teorema 1: Si C = constante

$$\Delta C = 0$$

Teorema 2: Ax, Bx, Dx, son funciones de x

$$\Delta^n (Ax + Bx - Dx) = \Delta^n Ax + \Delta^n Bx - \Delta^n Dx$$

Teorema 3: Si C es una constante y Ax es una función de x

$$\Delta^n cAx = c \Delta^n Ax$$

Teorema 4: $\Delta^n X^n = n!$ en donde n es un número entero positivo.

corolario 1: $\Delta^n cx^n = c(n!)$

corolario 2: $\Delta^{n+1} x^n = 0$

Teorema 5: $\Delta (a+bx)^{(n)} = bn (a+bx)^{(n-1)}$

corolario 1: $\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$

corolario 2: $\Delta^n x^{(n)} = n!$

en la que $x^{(n)} = x(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n+1)$
 $x^{(n)} = x(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n-1)$

Teorema 6: (Teorema Newton). Si Yx es un polinomio de grado n en x, su desarrollo puede ser escrito en la siguiente forma:

$$Yx = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$Yx = Y_0 + x^{(1)} \Delta Y_0 + \frac{x^{(2)}}{2!} \Delta^2 Y_0 + \frac{x^{(3)}}{3!} \Delta^3 Y_0 + \dots + \frac{x^{(n)}}{n!} \Delta^n Y_0$$

Ejemplo:

Consideremos el ejemplo anterior; necesitamos conocer la ecuación de la función. Datos: los valores Y

X	Y	ΔY	$\Delta^2 Y$	$\Delta^3 Y$	$\Delta^4 Y$	$\Delta^5 Y$	$\Delta^6 Y$
0	8	19	52	54	24	0	0
1	27	71	106	78	24	0	
2	98	177	184	102	24		
3	275	361	286	126			
4	636	647	412				
5	1283	1059					
6	2342						

$$Yx = Y_0 + x^{(1)} \Delta Y_0 + \frac{x^{(2)}}{2!} \Delta^2 Y_0 + \frac{x^{(3)}}{3!} \Delta^3 Y_0 + \dots$$

$$Yx = 8 + x \cdot 19 + \frac{(x-1)}{2} \cdot 52 + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \cdot 54 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} \cdot 24$$

$$Yx = 8 + 19x + 26x^2 - 26x + 9x^3 - 27x^2 + 18x + x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

$$Yx = x^4 + 3x^3 + 10x^2 + 5x + 8.$$

que es la ecuación de la que habíamos obtenido los valores de Y.

A continuación se da una tabla de Diferencias Finitas.

- 1.- $\Delta(Ax+Bx-Dx) = \Delta Ax + \Delta Bx - \Delta Dx$
- 2.- $\Delta cAx = c\Delta Ax$
- 3.- $\Delta a^x = (a-1)a^x$
- 4.- $\Delta X^{(n)} = n X^{(n-1)}$
- 5.- $\Delta \frac{1}{X^{(n)}} = \frac{-n}{X^{(n+1)}}$
- 6.- $\Delta(a+bx)^{(n)} = bn(a+bx)^{(n-1)}$
- 7.- $\Delta \frac{1}{(a+bx)^{(n)}} = \frac{-bn}{(a+bx)^{(n+1)}}$
- 8.- $\Delta \text{Sen}(a+bx) = 2 \text{ Sen } \frac{b}{2} \text{ Cos}(a+\frac{b}{2}+bx)$
- 9.- $\Delta \text{Cos}(a+bx) = -2 \text{ Sen } \frac{b}{2} \text{ Cos}(a+\frac{b}{2}+bx)$
- 10.- $\Delta Ax Bx = Ax \Delta Bx + Bx+1 \Delta Ax$
- 11.- $\Delta X! = X(X!)$
- 12.- $\Delta \text{Tan}(a+bx) = \frac{\text{Sen } b}{\text{Cos}(a+bx)\text{Cos}(a+b+bx)}$
- 13.- $\Delta \text{Cot}(a+bx) = \frac{-\text{Sen } b}{\text{Sen}(a+bx)\text{Sen}(a+b+bx)}$
- 14.- $\Delta \text{Sec}(a+bx) = \frac{2 \text{ Sen } \frac{b}{2} \text{ Sen}(a+\frac{b}{2}+bx)}{\text{Cos}(a+bx)\text{Cos}(a+b+bx)}$
- 15.- $\Delta \text{Csc}(a+bx) = \frac{-2 \text{ Sen } \frac{b}{2} \text{ Cos}(a+\frac{b}{2}+bx)}{\text{Sen}(a+bx)\text{Sen}(a+b+bx)}$

1-2 INTEGRACION FINITA

En el cálculo infinitesimal la palabra Integrar tiene dos acepciones: la primera es la que coincide con el significado corriente de la palabra, es decir, para indicar una suma de partes.

El segundo significado que tiene en matemáticas la palabra integrar es el de encontrar una función conociendo su derivada.

La integración Finita al igual que en el cálculo infinitesimal, consiste en encontrar la función Yx cuya diferencia es Ax.

$$\Delta Yx = Ax$$

$$Yx = \Delta^{-1} Ax$$

en donde: Yx es la función

$\Delta^{-1} Ax$ es la integración finita de Ax.

A continuación se da una tabla de Integrales Finitas.

- 1 $\Delta^{-1}(Ax+Bx+Dx) = \Delta^{-1}Ax + \Delta^{-1}Bx + \Delta^{-1}Dx$
- 2 $\Delta^{-1} CAx = C \Delta^{-1} Ax$
- 3 $\Delta^{-1} a^x = \frac{a^x}{a-1} ; a \neq 1$

$$4 \quad \Delta^{-1} x^{(n)} = \frac{x^{(n-1)}}{n+1}$$

$$5 \quad \Delta^{-1} \frac{1}{x^{(n)}} = \frac{1}{(1-x)x^{(n-1)}} ; n \neq 1$$

$$6 \quad \Delta^{-1} (a+bx)^{(n)} = \frac{(a+bx)^{(n+1)}}{b(n+1)}$$

$$7 \quad \Delta^{-1} \frac{1}{(a+bx)^{(n)}} = \frac{1}{b(1-n)(a+bx)^{(n-1)}}$$

$$8 \quad \Delta^{-1} \text{Cos}(a+bx) = \frac{1}{2 \text{Sen} \frac{b}{2}} \text{Sen}(a - \frac{b}{2} + bx)$$

$$9 \quad \Delta^{-1} \text{Sen}(a+bx) = -\frac{1}{2 \text{Sen} \frac{b}{2}} \text{Cos}(a - \frac{b}{2} + bx)$$

$$10 \quad \Delta^{-1} (Ax+Bx) = Ax+Bx - \Delta^{-1} (Bx+1) \Delta x$$

$$11 \quad \Delta^{-1} X(x!) = x!$$

$$12 \quad \Delta^{-1} \text{Sec}(a+bx) \text{Sec}(a+b+bx) = \text{Csc } b \tan(a+bx)$$

$$13 \quad \Delta^{-1} \text{Csc}(a+bx) \text{Csc}(a+b+bx) = -\text{Csc } b \text{Cot}(a+bx)$$

$$14 \quad \Delta^{-1} \frac{\text{Sen}(a+\frac{b}{2}+bx)}{\text{Cos}(a+bx)\text{Cos}(a+b+bx)} = \frac{\text{Sec}(a+bx)}{2 \text{Sen} \frac{b}{2}}$$

$$15 \quad \Delta^{-1} \frac{\text{Cos}(a+\frac{b}{2}+bx)}{\text{Sen}(a+bx) \text{Sen}(a+b+bx)} = -\frac{\text{Csc}(a+bx)}{2 \text{Sen} \frac{b}{2}}$$

1 - 3 ERRORES AL EMPLEAR DIFERENCIAS FINITAS

Como se dijo anteriormente, al emplear las diferencias finitas, se logrará una mayor aproximación en los resultados mientras más pequeños sean los incrementos; sin embargo no se pretende inducir la idea de que tomemos valores de incrementos tan pequeños que prácticamente pierda su valor el método, ya que al emplearlo, llegaremos a un conjunto de ecuaciones lineales, en las que habrá tantas ecuaciones como puntos tomemos.

Para evitar la necesidad de tomar gran cantidad de puntos, es muy útil saber en qué errores se incurre al emplear las diferencias finitas; luego conociendo la magnitud de estos errores, afectar las ecuaciones obtenidas en estos valores para poder obtener una más cercana exactitud.

Se procederá a encontrar la magnitud de estos errores.

Del cálculo diferencial, el teorema de Taylor establece que si tenemos una función de grado n

$$y=f(x)= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n$$

diferenciando la ecuación una, dos, tres, etc. veces y encontrando esas derivadas para $x=0$, encontramos:

$$x=0 \quad a_0=f(0)$$

$$F'(x)= a_1 + 2 a_2 x+\dots$$

$$\text{para } x=0 \quad a_1= f'(0)$$

de manera similar: $a_2=\frac{f''(0)}{2!}$, $a_3=\frac{f'''(0)}{3!}$,, $a_n=\frac{f^n(0)}{n!}$

Luego $y=f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\dots+\frac{x^n}{n!}f^n(0)$

Si ahora reemplazamos (x) por $(x+h)$

y consideramos $f(x+h)=g(h)$ como función de h , en la que x permanece fija y h es la variable independiente, tendremos:

$$g'(h)= f'(x+h)$$

$$g''(h)= f''(x+h)$$

$$\vdots$$

$$g^n(h)= f^n(x+h)$$

entonces si $h=0$

$$g'(0)= f'(x)$$

$$g''(0)= f''(x)$$

$$\vdots$$

$$g^n(0)= f^n(x)$$

Aplicando la serie de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(x)$$

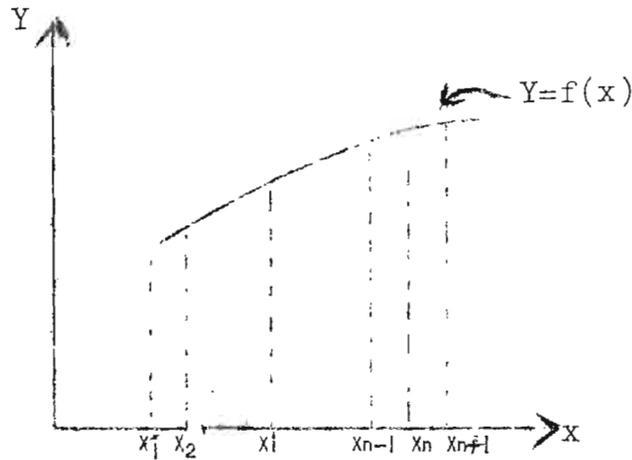


FIG. 3

Así: $Y_{n+1} = Y(x_n+h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!} f^m(x_n)$

ERRORES USANDO DIFERENCIAS FINITAS DESCENDENTES

$$Y_n$$

$$Y_{n-1} = Y(x_n-h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-h)^m}{m!} f^m(x_n)$$

$$Y_{n-2} = Y(x_n-2h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2h)^m}{m!} f^m(x_n)$$

$$Y_{n-3} = Y(x_n-3h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-3h)^m}{m!} f^m(x_n)$$

La expresión de la primera diferencia es:

$$\left(\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right)_n = \frac{Y_n - Y_{n-1}}{h} = \frac{Y_n - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-h)^m}{m!} f^m(x_n)}{h}$$

desarrollando:

$$= \frac{Y_n - \left[Y_n - h f'(x_n) + \frac{h^2}{2!} f''(x_n) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_n) + \dots \right]}{h}$$

$$\left(\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right)_n = f'(x_n) - \frac{h}{2} f''(x_n) + \frac{h^2}{6} f'''(x_n) - \frac{h^3}{24} f^{(4)}(x_n) + \dots$$

pero $f'(x_n) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_n$ el valor exacto que buscamos

Tenemos:

$$f'(x_n) = \left(\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right)_n + \frac{h}{2} f''(x_n) - \frac{h^2}{6} f'''(x_n) + \frac{h^3}{24} f^{(4)}(x_n) - \dots$$

Se observa que el error al emplear las diferencias finitas en la primera diferencia es:

$$\text{Error} = \frac{h}{2} f''(x_n) - \frac{h^2}{6} f'''(x_n) + \frac{h^3}{24} f^{(4)}(x_n) - \dots$$

La expresión de la segunda diferencia es:

$$\left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2}\right)_n = \frac{Y_n - 2Y_{n-1} + Y_{n-2}}{h^2} = \frac{Y_n - 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-h)^m}{m!} f^{(m)}(x_n) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2h)^m}{m!} f^{(m)}(x_n)}{h^2}$$

desarrollando:

$$= \frac{Y_n - 2 \left[Y_n - hf'(x_n) + \frac{h^2}{2!} f''(x_n) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_n) + \dots \right] + \left[Y_n - 2hf'(x_n) + \frac{4h^2}{2!} f''(x_n) - \dots \right]}{h^2}$$

$$= \frac{h^2 f''(x_n) - h^3 f'''(x_n) + \frac{7}{12} h^4 f^{(4)}(x_n) - \frac{30}{125} h^5 f^{(5)}(x_n) + \dots}{h^2}$$

$$\left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2}\right)_n = f''(x_n) - hf'''(x_n) + \frac{7}{12} h^2 f^{(4)}(x_n) - \frac{30}{125} h^3 f^{(5)}(x_n) + \dots$$

$$f''(x_n) = \left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2}\right)_n + hf'''(x_n) - \frac{7}{12} h^2 f^{(4)}(x_n) + \frac{30}{125} h^3 f^{(5)}(x_n) - \dots$$

$$\text{Error} = hf'''(x_n) - \frac{7}{12} h^2 f^{(4)}(x_n) + \frac{30}{125} h^3 f^{(5)}(x_n) - \dots$$

En forma semejante obtenemos:

$$f'''(x_n) = \left(\frac{\Delta^3 Y}{\Delta X^3}\right)_n + \frac{3}{2} hf^{(4)}(x_n) - \dots$$

ERRORES EN TERMINOS DE DIFERENCIAS FINITAS:

El error obtenido para la primera diferencia fue:

$$\text{Error} = \frac{h}{2} f''(x_n) - \frac{h^2}{6} f'''(x_n) + \frac{h^3}{24} f^{(4)}(x_n) + \dots$$

$$\text{pero } f''(x_n) = \left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2}\right)_n + hf'''(x_n) - \frac{7}{12} h^2 f^{(4)}(x_n) + \dots$$

Sustituyendo el valor de $f''(x_n)$, obtenemos:

$$\text{Error} = \frac{h}{2} \left[\left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2}\right)_n + hf'''(x_n) - \frac{7}{12} h^2 f^{(4)}(x_n) + \dots \right] - \frac{h^2}{6} f'''(x_n) + \frac{h^3}{24} f^{(4)}(x_n) + \dots$$

$$\text{Error} = \frac{h}{2} \left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2}\right)_n + \frac{h^2}{24} f^{(4)}(x_n) - \frac{7}{24} h^3 f^{(4)}(x_n) - \frac{h^2}{6} f'''(x_n) + \frac{h^3}{24} f^{(4)}(x_n) + \dots$$

$$\text{Error} = \frac{h}{2} \left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2}\right)_n + \frac{h^2}{3} f^{(4)}(x_n) - \frac{h^3}{4} f^{(4)}(x_n) + \dots$$

$$\text{pero } f^{(4)}(x_n) = \left(\frac{\Delta^3 Y}{\Delta X^3}\right)_n + \frac{3}{2} hf^{(4)}(x_n) + \dots$$

Sustituyendo el valor de $f'''(x_n)$, obtenemos:

$$\text{Error} = \frac{h}{2} \left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2} \right)_n + \frac{h^2}{3} \left[\left(\frac{\Delta^3 Y}{\Delta X^3} \right)_n + \frac{3}{2} h f''''(x_n) + \dots \right] - \frac{h^3}{4} f''''(x_n) + \dots$$

$$\text{Error} = \frac{h}{2} \left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2} \right)_n + \frac{h^2}{3} \left(\frac{\Delta^3 Y}{\Delta X^3} \right)_n + \frac{h^3}{2} f''''(x_n) - \frac{h^3}{4} f''''(x_n) + \dots$$

$$\text{Error} = \frac{h}{2} \left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2} \right)_n + \frac{h^2}{3} \left(\frac{\Delta^3 Y}{\Delta X^3} \right)_n + \frac{h^3}{4} f''''(x_n) + \dots$$

$$\text{Error} = \frac{h}{2} \left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2} \right)_n + \frac{h^2}{3} \left(\frac{\Delta^3 Y}{\Delta X^3} \right)_n + \frac{h^3}{4} \left[\left(\frac{\Delta^4 Y}{\Delta X^4} \right) + \dots \right]$$

$$\text{Error} = \frac{h}{2} \left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2} \right)_n + \frac{h^2}{3} \left(\frac{\Delta^3 Y}{\Delta X^3} \right)_n + \frac{h^3}{4} \left(\frac{\Delta^4 Y}{\Delta X^4} \right)_n + \dots$$

En forma semejante, pueden ser encontrados la magnitud de los errores en términos de Diferencias Finitas, para la segunda, tercera, cuarta, etc., diferencias, tanto para las diferencias Descendentes, Ascendentes y Centrales.

A continuación se dan las tablas que muestran estos errores

Errores para Diferencias Descendentes

	Y''	Y'''	Y''''	Y^5	Y^6	$\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2}$	$\frac{\Delta^3 Y}{\Delta X^3}$	$\frac{\Delta^4 Y}{\Delta X^4}$	$\frac{\Delta^5 Y}{\Delta X^5}$	$\frac{\Delta^6 Y}{\Delta X^6}$
Y'	$+\frac{h}{2}$	$-\frac{h^2}{6}$	$+\frac{h^3}{24}$			$+\frac{h}{2}$	$+\frac{h^2}{3}$	$+\frac{h^3}{4}$		
Y''		$+h$	$-\frac{7h^2}{12}$				$+h$	$+\frac{11h^2}{12}$	$+\frac{5h^3}{6}$	
Y'''			$+\frac{3h}{2}$	$-\frac{5h^2}{4}$				$+\frac{3h}{2}$	$+\frac{7h^2}{4}$	
Y''''									$+2h$	$+\frac{17h^2}{6}$

Errores para Diferencias Ascendentes

	Y''	Y'''	Y''''	Y^5	Y^6	$\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2}$	$\frac{\Delta^3 Y}{\Delta X^3}$	$\frac{\Delta^4 Y}{\Delta X^4}$	$\frac{\Delta^5 Y}{\Delta X^5}$	$\frac{\Delta^6 Y}{\Delta X^6}$
Y'	$-\frac{h}{2}$	$-\frac{h^2}{6}$	$-\frac{h^3}{24}$			$-\frac{h}{2}$	$+\frac{h^2}{3}$	$-\frac{h^3}{4}$		
Y''		$-h$	$-\frac{7h^2}{12}$				$-h$	$+\frac{11h^2}{12}$	$-\frac{5h^3}{6}$	
Y'''		$\frac{3h}{2}$	$-\frac{5h^2}{4}$					$-\frac{3h}{2}$	$+\frac{7h^2}{4}$	
Y''''									$-2h$	$+\frac{17h^2}{6}$

Errores para Diferencias Centrales

Y''	Y'''	Y''''	Y^5	Y^6	$\frac{\Delta^2 Y}{\Delta x^2}$	$\frac{\Delta^3 Y}{\Delta x^3}$	$\frac{\Delta^4 Y}{\Delta x^4}$	$\frac{\Delta^5 Y}{\Delta x^5}$	$\frac{\Delta^6 Y}{\Delta x^6}$
Y'	$-\frac{h^2}{6}$	0	$\frac{h^4}{120}$	0	$-\frac{h^2}{6}$	0	$+\frac{h^4}{30}$	0	0
\ddot{Y}''		$-\frac{h^2}{12}$	0	$-\frac{h^4}{360}$		$-\frac{h^2}{12}$	0	$+\frac{h^4}{90}$	
Y''''			$-\frac{h^2}{4}$				$-\frac{h^2}{4}$	0	
Y''''				$-\frac{h^2}{6}$					$-\frac{h^2}{6}$

Se puede apreciar que se obtienen mejores resultados al emplear las Diferencias Centrales, ya que los errores que en ella se cometen son menores que al emplear las Diferencias Ascendentes o Descendentes.

1-4 DIFERENCIAS FINITAS CON INCREMENTOS Δx NO IGUALES

Anteriormente se había trabajado con incrementos en x constantes a un valor h ; cuando los puntos pivotes sean tomados a intervalos desiguales; las expresiones de las Diferencias Finitas serán las siguientes:

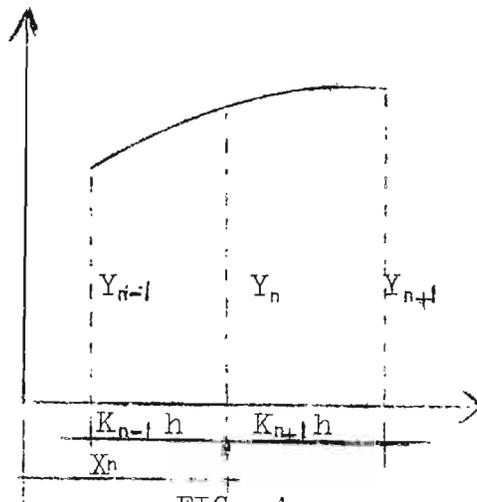


FIG. 4.

El punto $n-1$ tendrá como coordenadas

$$x_{n-1} = Y_{n-1} = Y(x_n - k_{n-1}h)$$

El punto $n+1$ tendrá como coordenadas

$$x_{n+1} = Y_{n+1} = Y(x_n + k_n h)$$

pero $Y(x+h) = Y + hY' + \frac{h^2}{2!} Y'' + \frac{h^3}{3!} Y''' + \dots$ Teorema Taylor

Tendremos:

$$Y_{n-1} = Y_n - k_{n-1} h Y'_n + \frac{k_{n-1}^2 h^2}{2!} Y''_n - \frac{k_{n-1}^3 h^3}{3!} Y'''_n + \dots \quad (1)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + k_{n+1} h Y'_n + \frac{k_{n+1}^2 h^2}{2!} Y''_n + \frac{k_{n+1}^3 h^3}{3!} Y'''_n + \dots \quad (2)$$

$$\left(\frac{\Delta Y}{\Delta X} \right)_n = \frac{Y_{n+1} - Y_{n-1}}{(k_{n+1} + k_{n-1})h} \quad \text{primera diferencia}$$

Un valor de $\left(\frac{\Delta Y}{\Delta X} \right)_n$ más exacto será considerando las expresiones del Teorema de Taylor, tal como se demuestra:

De las ecuaciones 1 y 2, arreglándolas para eliminar Y'' y despreciando los valores $Y'''h$, Y'''_n , etc.

Tenemos:

$$\frac{Y_{n-1}}{k_{n-1}^2} = \frac{Y_n}{k_{n-1}^2} - \frac{hY'_n}{k_{n-1}} + \frac{h^2}{2} Y''_n \quad (3)$$

$$\frac{Y_{n+1}}{k_{n+1}^2} = \frac{Y_n}{k_{n+1}^2} + \frac{hY'_n}{k_{n+1}} + \frac{h^2}{2} Y''_n \quad (4)$$

Restando 3 de 4

$$\begin{aligned} \frac{Y_{n+1}}{k_{n+1}^2} - \frac{Y_{n-1}}{k_{n-1}^2} &= Y_n \left(\frac{1}{k_{n+1}^2} - \frac{1}{k_{n-1}^2} \right) + hY'_n \left(\frac{1}{k_{n+1}} + \frac{1}{k_{n-1}} \right) \\ \frac{k_{n-1}^2}{k_{n+1}^2} \frac{Y_{n+1} - k_{n+1}^2 Y_{n-1}}{k_{n-1}^2} &= \frac{Y_n (k_{n-1}^2 - k_{n+1}^2)}{k_{n+1}^2 k_{n-1}^2} + hY'_n \frac{(k_{n+1} + k_{n-1})}{k_{n+1} k_{n-1}} \\ hY'_n \frac{k_{n+1} + k_{n-1}}{k_{n+1} \cdot k_{n-1}} &= \frac{k_{n-1}^2}{k_{n+1}^2} \frac{Y_{n+1}}{k_{n+1}^2} - \frac{k_{n+1}^2}{k_{n-1}^2} \frac{Y_{n-1}}{k_{n-1}^2} \\ - Y_n \left(\frac{k_{n-1}^2}{k_{n+1}^2} - \frac{k_{n+1}^2}{k_{n-1}^2} \right) & \\ Y'_n &= \frac{1}{h k_{n+1} k_{n-1} (k_{n+1} + k_{n-1})} \left[\frac{k_{n-1}^2}{k_{n+1}^2} Y_{n+1} - (k_{n-1}^2 - k_{n+1}^2) Y_n \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_{n+1}^2}{k_{n-1}^2} Y_{n-1} \right] \end{aligned}$$

puesto que al encontrar Y'_n no se han tomado en cuenta la tercera, cuarta, etc. derivadas de la función, el valor encontrado de Y'_n será un valor más aproximado de $\left(\frac{\Delta Y}{\Delta X} \right)_n$

$$\left(\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right)_n = \frac{-1}{h k_{n+1} k_{n-1} (k_{n+1} + k_{n-1})} \left[k_{n+1}^2 Y_{n+1} - (k_{n-1}^2 - k_{n+1}^2) Y_n - k_{n+1}^2 Y_{n-1} \right]$$

Para la segunda diferencia, arreglando las ecuaciones (1) y (2) con el objeto de eliminar Y'_n y despreciando también los valores de la tercera, cuarta, etc. derivadas, tenemos:

$$\frac{Y_{n-1}}{k_{n-1}} = \frac{Y_n}{k_{n-1}} - h Y'_n + \frac{k_{n-1}}{2} h^2 Y''_n \quad (5)$$

$$\frac{Y_{n+1}}{k_{n+1}} = \frac{Y_n}{k_{n+1}} + h Y'_n + \frac{k_{n+1}}{2} h^2 Y''_n \quad (6)$$

Sumando (5) y (6) tenemos:

$$\frac{Y_{n-1}}{k_{n-1}} + \frac{Y_{n+1}}{k_{n+1}} = Y_n \left(\frac{1}{k_{n-1}} + \frac{1}{k_{n+1}} \right) + \frac{h^2}{2} Y''_n (k_{n-1} + k_{n+1})$$

$$\frac{h^2}{2} Y''_n (k_{n-1} + k_{n+1}) = \frac{k_{n+1} Y_{n-1} + k_{n-1} Y_{n+1}}{k_{n+1} k_{n-1}} - Y_n \frac{k_{n+1} + k_{n-1}}{k_{n+1} k_{n-1}}$$

$$Y''_n = \frac{2}{h^2} \left[\frac{Y_{n+1}}{(k_{n+1} + k_{n-1}) k_{n+1}} - \frac{Y_n}{k_{n+1} k_{n-1}} + \frac{Y_{n-1}}{(k_{n+1} + k_{n-1}) k_{n-1}} \right]$$

$$\left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2}\right)_n = \frac{2}{h^2} \left[\frac{Y_{n+1}}{(k_{n+1} + k_{n-1}) k_{n+1}} - \frac{Y_n}{k_{n+1} k_{n-1}} + \frac{Y_{n-1}}{(k_{n+1} + k_{n-1}) k_{n-1}} \right]$$

1-5 DIFERENCIA FINITA PARCIAL

Uno de los métodos más útiles en la solución de las ecuaciones diferenciales parciales es el método de las diferencias finitas, en donde la solución de la ecuación diferencial parcial es reducida a la solución de un conjunto de ecuaciones lineales. Es así como problemas como son: momentos flexionantes de placas, deflexiones de placas, análisis de esfuerzos en tres dimensiones, etc., cuyas soluciones implican trabajar con ecuaciones diferenciales parciales, se hacen de fácil resolución al emplear el método de las diferencias finitas.

Como se dijo anteriormente, mayor exactitud obtendremos al tomar incrementos de las variables más pequeños.

1-5a DIFERENCIAS PARCIALES EN COORDENADAS RECTANGULARES

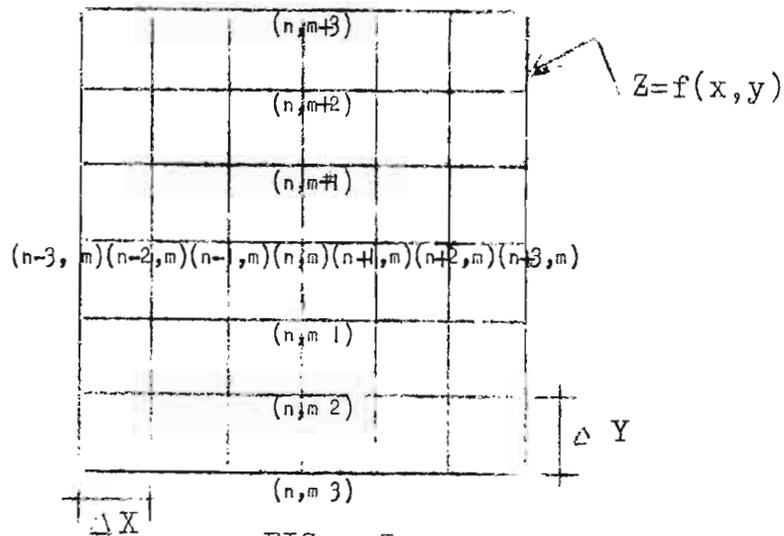


FIG. 5

Sea la función $Z=f(x,y)$.

La expresión de la diferencial parcial de la función Z , con respecto a uno de las variables (x,y) son las mismas que las diferencias finitas ordinarias.

Haciendo $\Delta x=h$, $\Delta Y=k$ y usando diferencias centrales, tenemos:

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{Z(n+1, m) - Z(n-1, m)}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = \frac{Z(n+1, m) - 2Z(n, m) + Z(n-1, m)}{h^2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{Z(n, m+1) - Z(n, m-1)}{2k}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = \frac{Z(n, m+1) - 2Z(n, m) + Z(n, m-1)}{k^2}$$

La diferencia finita parcial de la función Z con respecto a X y Y son obtenidas tomando la primera diferencial parcial en una dirección y luego tomando la diferencial de la primera derivada en la otra dirección. Tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial Y \partial X} &= \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right) = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{Z(n+1, m) - Z(n-1, m)}{2h} \right) \\ &= \frac{1}{2k} \left[\frac{1}{2h} \left(Z(n+1, m+1) - Z(n-1, m+1) \right) - \frac{1}{2h} \left(Z(n+1, m-1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - Z(n-1, m-1) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\lambda^2 Z}{\partial Y \partial X} = \frac{1}{4hk} \left[Z(n+1, m+1) - Z(n+1, m-1) - Z(n-1, m+1) + Z(n-1, m-1) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 Z}{\partial Y^2 \partial X^2} &= \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left[\frac{1}{h^2} \left(Z(n+1, m) - 2Z(n, m) + Z(n-1, m) \right) \right] \\ &= \frac{1}{k^2} \left[\frac{1}{h^2} \left(Z(n+1, m+1) - 2Z(n, m+1) + Z(n-1, m+1) - \frac{2}{h^2} (Z(n+1, m) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2Z(n, m) + Z(n-1, m)) \right) + \frac{1}{h^2} \left(Z(n+1, m-1) - 2Z(n, m-1) + Z(n-1, m-1) \right) \right] \end{aligned}$$

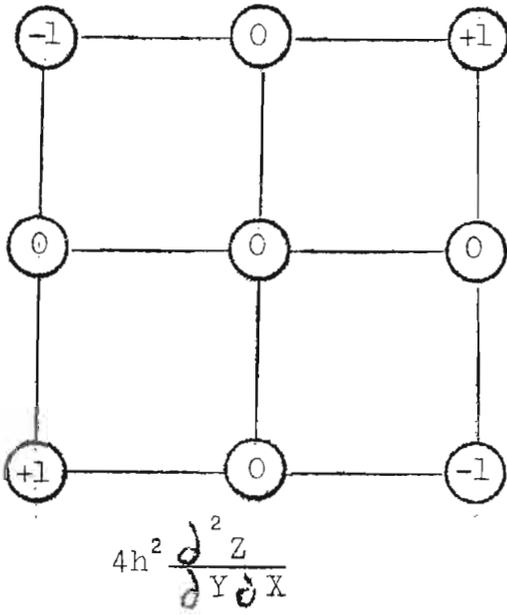
$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 Z}{\partial Y^2 \partial X^2} &= \frac{1}{h^2 k^2} \left[Z(n+1, m+1) - 2Z(n+1, m) + Z(n+1, m-1) - 2Z(n, m+1) + 4Z(n, m) \right. \\ &\quad \left. - 2Z(n, m-1) + Z(n-1, m+1) - 2Z(n-1, m) + Z(n-1, m-1) \right] \end{aligned}$$

Ahora, si los incrementos en X y Y los hacemos iguales, es decir, $h=k$, tendremos:

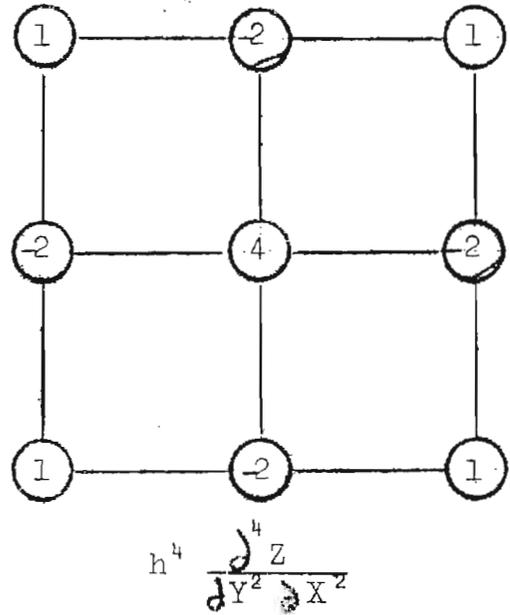
$$\frac{\partial^2 Z}{\partial Y \partial X} = \frac{1}{4h^2} \left[Z(n+1, m+1) - Z(n+1, m-1) - Z(n-1, m+1) + Z(n-1, m-1) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 Z}{\partial Y^2 \partial X^2} &= \frac{1}{h^4} \left[Z(n+1, m+1) - 2Z(n+1, m) + Z(n+1, m-1) - 2Z(n, m+1) + 4Z(n, m) \right. \\ &\quad \left. - 2Z(n, m-1) + Z(n-1, m+1) - 2Z(n-1, m) + Z(n-1, m-1) \right] \end{aligned}$$

En las siguientes figuras aparecen representados simbólicamente los valores encontrados para $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y \partial X}$ y $\frac{\partial^4 Z}{\partial Y^2 \partial X^2}$ cuando los incrementos ΔX y ΔY son iguales.



FIG,6



FIG,7

1-5b DIFERENCIA FINITA PARCIAL EN COORDENADAS POLARES

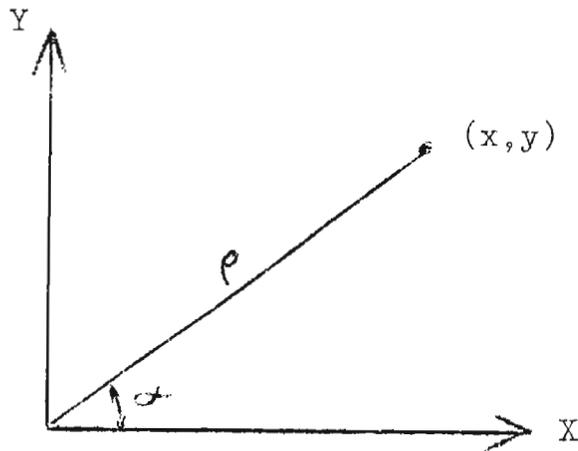


FIG.8

La transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas polares es el siguiente:

$$x = \rho \cos \alpha$$

$$y = \rho \operatorname{Sen} \alpha$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \therefore \alpha = \operatorname{Arc} \tan \frac{y}{x}$$

Tenemos:

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\rho} = \cos \alpha$$

$$\frac{d\rho}{dy} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\rho} = \operatorname{Sen} \alpha$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{\rho^2} = -\frac{\operatorname{Sen} \alpha}{\rho}$$

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{\cos \alpha}{\rho}$$

puesto que $Z = f(x, y)$

y como ρ y α son funciones de X y Y
 $Z = f(\rho, \alpha)$.

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dX} &= \frac{dZ}{d\rho} \frac{d\rho}{dX} + \frac{dZ}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dX} \\ &= \frac{dZ}{d\rho} \cos \alpha - \frac{dZ}{d\alpha} \frac{\operatorname{Sen} \alpha}{\rho} \end{aligned}$$

$$\frac{dZ}{dY} = \frac{dZ}{d\rho} \frac{d\rho}{dY} + \frac{dZ}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dY} = \frac{dZ}{d\rho} \operatorname{Sen} \alpha + \frac{dZ}{d\alpha} \frac{\cos \alpha}{\rho}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dX^2} &= \frac{d\rho}{dX} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{dZ}{dX} \right) + \frac{d\alpha}{dX} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{dZ}{dX} \right) \\ &= \frac{d^2 Z}{d\rho^2} \cos^2 \alpha + \frac{dZ}{d\rho} \frac{\operatorname{Sen}^2 \alpha}{\rho} + \frac{d^2 Z}{d\alpha^2} \frac{\operatorname{Sen}^2 \alpha}{\rho^2} - 2 \frac{d^2 Z}{d\rho d\alpha} \frac{\operatorname{Sen} \alpha \cos \alpha}{\rho} \\ &\quad + 2 \frac{dZ}{d\alpha} \frac{\operatorname{Sen} \alpha \cos \alpha}{\rho^2} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 Z}{dY^2} = \frac{d\rho}{dY} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{dZ}{dY} \right) + \frac{d\alpha}{dY} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{dZ}{dY} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d^2 Z}{d\rho^2} \operatorname{Sen}^2 \alpha + \frac{dZ}{d\rho} \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{d^2 Z}{d\alpha^2} \frac{\cos^2 \alpha}{\rho^2} + 2 \frac{d^2 Z}{d\rho d\alpha} \frac{\operatorname{Sen} \alpha \cos \alpha}{\rho} \\ &\quad - 2 \frac{dZ}{d\alpha} \frac{\operatorname{Sen} \alpha \cos \alpha}{\rho^2} \end{aligned}$$

1-6 APLICACIONES: MOMENTOS FLEXIONANTES Y DEFLEXIONES DE VIGAS

1-6a VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS: DIVERSOS TIPOS DE CARGA

Consideremos una viga bajo la acción de una carga uniformemente distribuida. Las siguientes ecuaciones pueden ser obtenidas:

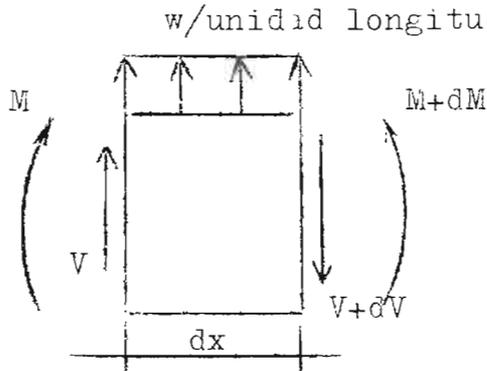
$$\frac{dV}{dx} = w$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = w$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{w}{EI} \quad \text{para } I \text{ constante}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} I \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w}{E} \quad \text{para } I \text{ variable}$$



en donde: w = carga/unidad longitud , positiva hacia arriba
 V = fuerza cortante , positiva hacia arriba
 M = momento flexionante, positivo si produce compresión en las fibras superiores.
 y = deflexión; positivo hacia arriba

Aplicando a estas ecuaciones diferenciales, las diferencias finitas tenemos:

$$V_{n+1} - V_{n-1} = 2hw$$

$$M_{n-1} - 2M_n + M_{n+1} = h^2 w$$

$$Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1} = h^2 \frac{M_n}{EI_n}$$

Método de las Diferencias Finitas para la solución de cargas uniformemente distribuidas con cargas concentradas:

El procedimiento a seguir consiste en sustituir el sistema de carga por concentraciones estáticamente equivalente a ellas. Estas condiciones son fuerza cortante y momento flexionante, ninguna de éstas debe alterarse fuera del tramo cargado al sustituir el sistema de carga por concentraciones.

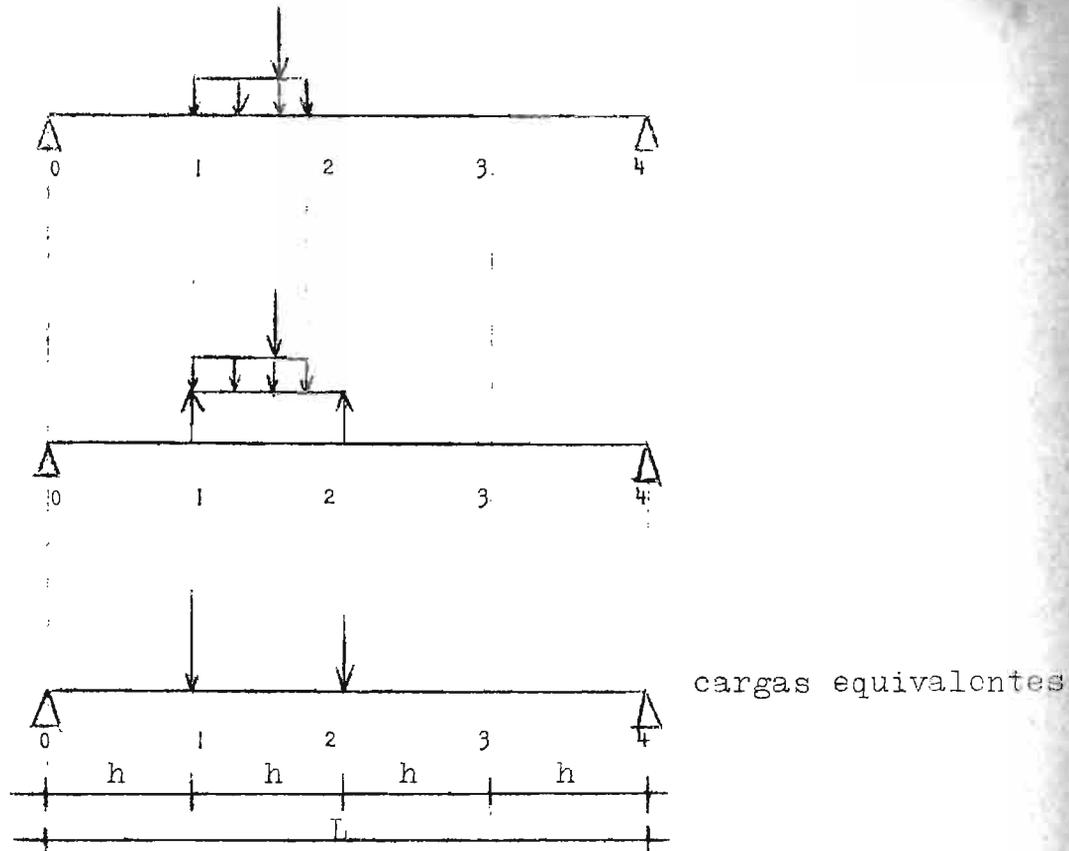


FIG. 8

Las FIG.(8) muestran el procedimiento a seguir, que es el de considerar las reacciones que tendría una viga libremente apoyada sometida al sistema de carga.

Al quedar entonces, la viga sujeta a un sistema de cargas concentradas, las ecuaciones quedan en la siguiente forma:

$$M_{n-1} - 2M_n + M_{n+1} = hP_n$$

$$Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1} = h^2 \frac{M_n}{EI_n}$$

Al emplear, el método de las diferencias finitas, el problema de encontrar momentos y deflexiones consiste en resolver un conjunto de ecuaciones lineales. Para facilitar la resolución de estas ecuaciones se desarrollarán a continuación expresiones de los momentos y deflexiones.

Consideremos la viga simplemente apoyada, según se muestra en la FIG (9), sujeta a cualquier sistema de carga que ha sido sustituido por sus cargas concentradas equivalentes.

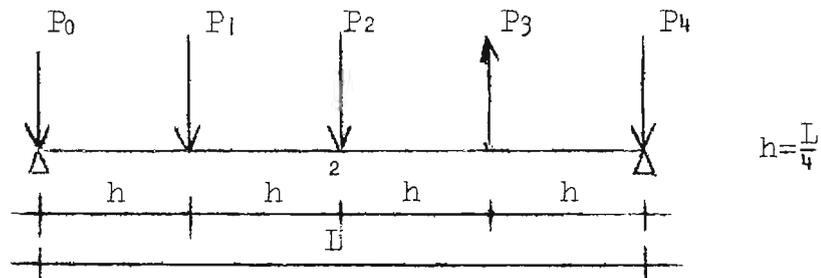


FIG.(9)

APLICANDO LA ECUACION PARA MOMENTOS:

$$M_{n-1} - 2M_n + M_{n+1} = h P_n$$

Condiciones: $M_0 = M_4 = 0$

$$\text{punto 1: } 0 - 2M_1 + M_2 = -h P_1 = A \quad (a)$$

$$\text{punto 2: } M_1 - 2M_2 + M_3 = -h P_2 = B \quad (b)$$

$$\text{punto 3: } M_2 - 2M_3 + 0 = +h P_3 = C \quad (c)$$

Resolviendo:

$$M_2 = - \frac{(A+2B+C)}{2}$$

para encontrar los valores de M_1 y M_3 , simplemente sustituyendo en las ecuaciones (a) y (c) el valor de M_2 encontrado.

Deflexiones:

$$Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1} = h^2 \frac{M_n}{EI_n}$$

Condiciones: $Y_0 = Y_4 = 0$

$$\text{punto 1: } 0 - 2Y_1 + Y_2 = h^2 \frac{M_1}{EI_1} = A \quad (d)$$

$$\text{punto 2: } Y_1 - 2Y_2 + Y_3 = h^2 \frac{M_2}{EI_2} = B \quad (e)$$

$$\text{punto 4: } Y_2 - 2Y_3 + 0 = h^2 \frac{M_3}{EI_3} = C \quad (f)$$

Resolviendo:

$$Y = - \frac{(A+2B+C)}{2}$$

Consideremos ahora el caso, en el que la viga ha sido subdividida en un mayor número de tramos ($L=6h$), según se muestra en la FIG. (10)

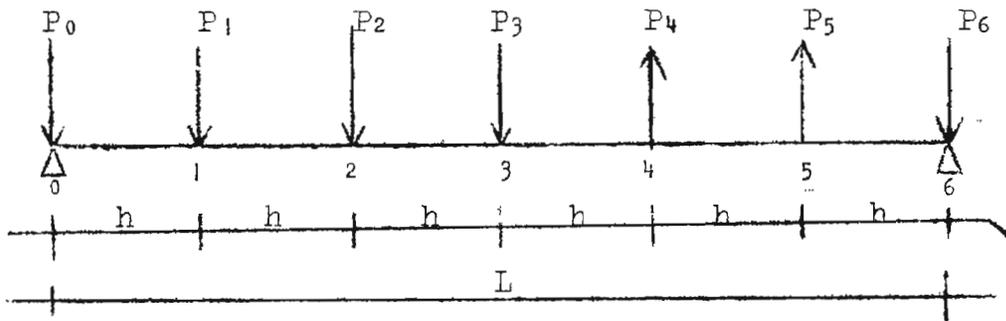


FIG.(10)

$$\text{MOMENTOS:} \quad M_{n-1} - 2M_n + M_{n+1} = P_n h$$

$$\text{condiciones} \quad M_0 = M_6 = 0$$

$$\text{punto 1:} \quad 0 - 2M_1 + M_2 = -hP_1 = A \quad (a)$$

$$\text{punto 2:} \quad M_1 - 2M_2 + M_3 = -hP_2 = B \quad (b)$$

$$\text{punto 3:} \quad M_2 - 2M_3 + M_4 = -hP_3 = C \quad (c)$$

$$\text{punto 4:} \quad M_3 - 2M_4 + M_5 = +hP_4 = D \quad (d)$$

$$\text{punto 5:} \quad M_4 - 2M_5 + 0 = +hP_5 = E \quad (e)$$

Resolviendo:

$$M_2 = -\frac{2}{3}(A+2B+D) - C - \frac{E}{3}$$

$$\text{Deflexiones:} \quad Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1} = h^2 \frac{M_n}{EI_n}$$

$$\text{condiciones} \quad Y_0 = Y_6 = 0$$

$$\text{punto 1:} \quad 0 - 2Y_1 + Y_2 = h^2 \frac{M_1}{EI_1} = A \quad (f)$$

$$\text{punto 2:} \quad Y_1 - 2Y_2 + Y_3 = h^2 \frac{M_2}{EI_2} = B \quad (g)$$

$$\text{punto 3:} \quad Y_2 - 2Y_3 + Y_4 = h^2 \frac{M_3}{EI_3} = C \quad (h)$$

$$\text{punto 4:} \quad Y_3 - 2Y_4 + Y_5 = h^2 \frac{M_4}{EI_4} = D \quad (i)$$

$$\text{punto 5:} \quad Y_4 - 2Y_5 + 0 = h^2 \frac{M_5}{EI_5} = E \quad (j)$$

Resolviendo:

$$Y_2 = -\frac{2}{3}(A+2B+D) - C - \frac{E}{3}$$

Puesto que el sistema de carga a que puede estar sometida la viga es trapecial o parabólico, se dan a continuación las fórmulas para poder encontrar las cargas concentradas equivalentes.

CARGAS TRAPECIALES:

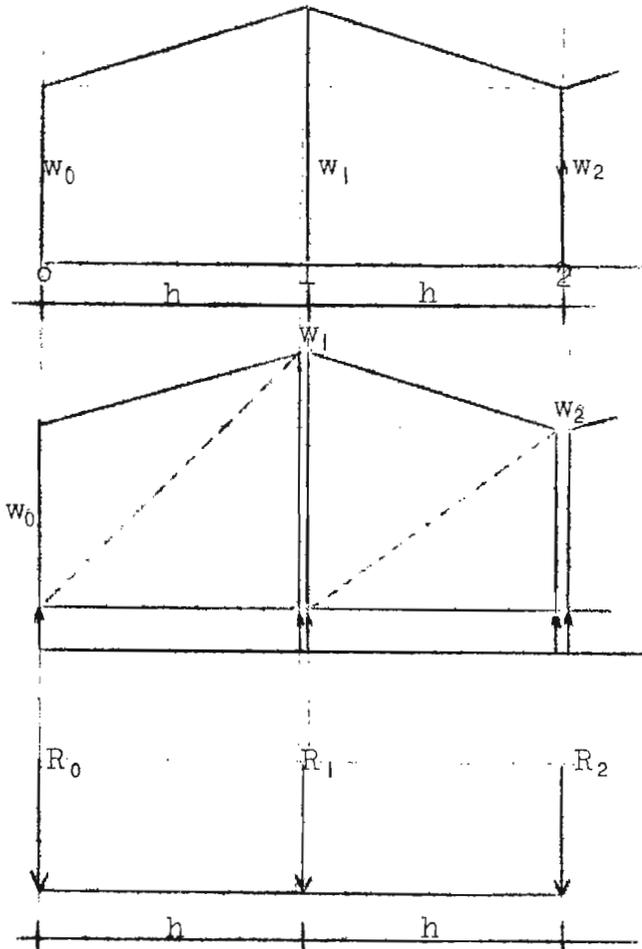


FIG (11)

$$R_0 = \frac{w_0 h}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{w_1 h}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

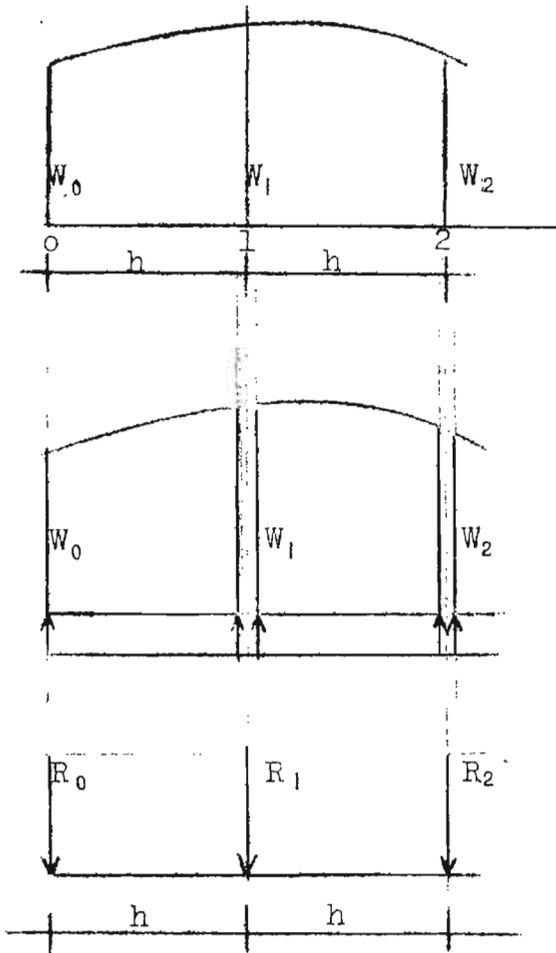
$$R_0 = \frac{h}{6} (2w_0 + w_1)$$

$$R_0 = \frac{h}{6} (2w_0 + w_1)$$

$$R_1 = \frac{h}{6} (2w_1 + w_0) + \frac{h}{6} (2w_1 + w_2) = \frac{h}{6} (w_0 + 4w_1 + w_2)$$

$$R_n = \frac{h}{6} (w_{n-1} + 4w_n + w_{n+1})$$

CARGAS PARABOLICAS



FIG!(12)

$$R_0 = \frac{h}{24} (7W_0 + 6W_1 - W_2)$$

$$R_1 = \frac{h}{12} (W_0 + 10W_1 + W_2)$$

$$R_n = - (W_{n-1} + 10W_n + W_{n+1})$$

Ejemplo 1: Consideremos la viga simplemente apoyada, de sección constante, con carga uniformemente distribuida. Se pide encontrar momentos y deflexiones.

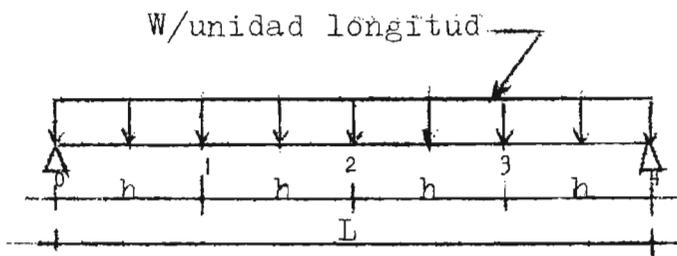


FIG. (13)

Momentos:

condiciones $M_0 = M_4 = 0$

$$0 - 2M_1 + M_2 = -h^2 w$$

$$M_1 - 2M_2 + M_3 = -h^2 w$$

$$M_2 - 2M_3 + 0 = -h^2 w$$

Resolviendo:

$$M_2 = -\frac{A+2B+C}{2} = -\frac{h^2 w(-1-2-1)}{2}$$

$$M_2 = 2h^2 w = wL^2/8$$

$$M_1 = 1.5h^2 w = 3wL^2/32$$

$$M_3 = 1.5h^2 w = 3wL^2/32$$

Los valores obtenidos para momentos son exactos

Deflexiones:

condiciones: $Y_0 = Y_4 = 0$

$$0 - 2Y_1 + Y_2 = h^2 (1.5wh^2/EI) = 1.5wh^4/EI$$

$$Y_1 - 2Y_2 + Y_3 = h^2 (2.0wh^2/EI) = 2.0wh^4/EI$$

$$Y_2 - 2Y_3 + 0 = h^2 (1.5wh^2/EI) = 1.5wh^4/EI$$

Resolviendo obtenemos:

	valores exactos	Error
$Y_1 = -0.00975 wL^4/EI$	$Y_1 = -0.0093 wL^4/EI$	4.8%
$Y_2 = -0.01360 wL^4/EI$	$Y_2 = -0.0130 wL^4/EI$	4.6%
$Y_3 = -0.00975 wL^4/EI$	$Y_3 = -0.0093 wL^4/EI$	4.8%

Para obtener una mayor exactitud, tomaremos en cuenta los errores que involucran el empleo del método de las diferencias finitas. Así, tenemos, que el error en diferencias centrales para la segunda di-

ferencia $\left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta X^2}\right)_n$ es: $-\frac{1}{12}h^2 \left(\frac{\Delta^4 Y}{\Delta X^4}\right)_n$; la ecuación para las deflexiones puede ser escrita en la siguiente forma:

$$Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1} - \frac{1}{12}h^4 \left(\frac{\Delta^4 Y}{\Delta X^4}\right)_n = h^2 M_n / EI_n$$

$$Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1} - \frac{1}{12}h^4 (Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2}) = h^2 M_n / EI_n$$

$$Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1} - \frac{1}{12} (Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2}) = h^2 M_n / EI_n$$

Si el error en el punto 2 es encontrado y usado para los puntos 1 y 3 tendremos:

$$\text{Error} = -(0 - 4Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 + 0) = -0.333Y_1 + 0.5Y_2 - 0.333Y_3$$

$$\text{punto 1: } 0 - 2Y_1 + Y_2 - (-0.333Y_1 + 0.5Y_2 - 0.333Y_3) = 1.5wh^4/EI$$

$$-1.667Y_1 + 0.5Y_2 + 0.333Y_3 = 1.5wh^4/EI \quad (\text{a})$$

$$\text{punto 2: } Y_1 - 2Y_2 + Y_3 - (-0.333Y_1 + 0.5Y_2 - 0.333Y_3) = 2.0wh^4/EI$$

$$1.333Y_1 - 2.5Y_2 + 1.333Y_3 = 2.0wh^4/EI \quad (\text{b})$$

$$\text{punto 3: } 0.333Y_1 + 0.5Y_2 - 1.667Y_3 = 1.5wh^4/EI \quad (\text{c})$$

Resolviendo:

valores exactos

$$Y_1 = -0.00926 \quad wL^4/EI$$

$$Y_1 = -0.0093 \quad wL^4/EI$$

$$Y_2 = -0.01302 \quad wL^4/EI$$

$$Y_2 = -0.0130 \quad wL^4/EI$$

$$Y_3 = -0.00926 \quad wL^4/EI$$

$$Y_3 = -0.0093 \quad wL^4/EI$$

Ejemplo 2: Para la viga mostrada en la Fig. (14), se nos pide encontrar momentos flexionantes y deflexiones.

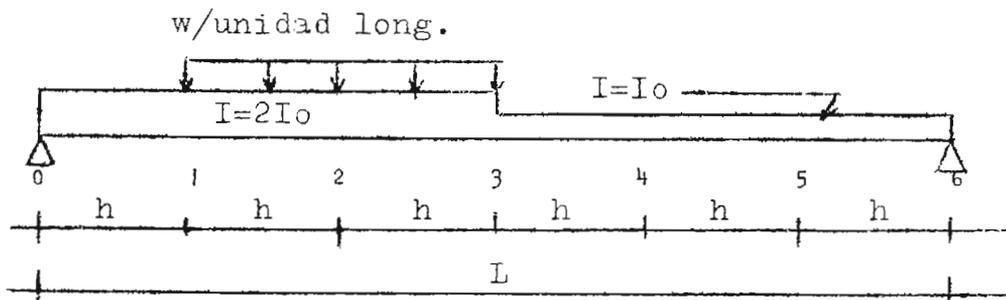
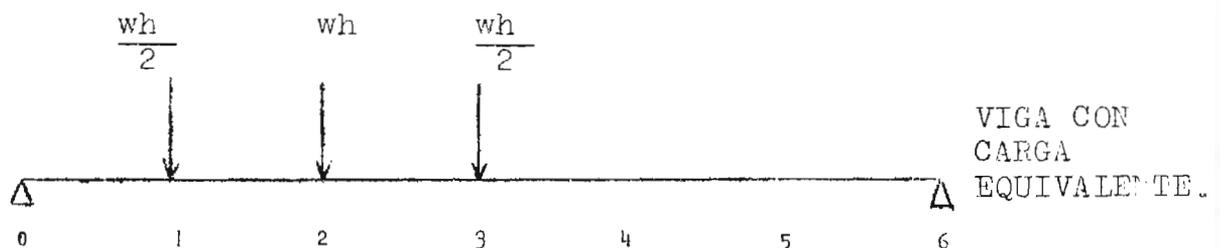


FIG. (14)



Momentos:

condiciones $M_0=M_6=0$

$$\begin{array}{rcl}
 M_{n-1} & -2M_n & + M_{n+1} & = & h P_n \\
 \text{punto 1:} & 0 & - 2M_1 & + M_2 & = - h(0.5wh) & (a) \\
 \text{punto 2:} & & M_1 & - 2M_2 & + M_3 & = - h(wh) & (b) \\
 \text{punto 3:} & & & M_2 & - 2M_3 & + M_4 & = - h(0.5wh) & (c) \\
 \text{punto 4:} & & & & M_3 & - 2M_4 & + M_5 & = 0 & (d) \\
 \text{punto 5:} & & & & & M_4 & - 2M_5 & + 0 & = 0 & (e)
 \end{array}$$

Resolviendo:

$$M_2 = -\frac{2}{3}(A+2B+D) - C - \frac{E}{3} = -\frac{2}{3}[-0.5-2-0] - (-0.5) + 0 \quad wh^2$$

$$M_2 = 2.16wh^2$$

$$M_1 = 1.33wh^2$$

$$M_3 = 2.00wh^2$$

$$M_4 = 1.33wh^2$$

$$M_5 = 0.66wh^2$$

Deflexiones:

condiciones $Y_0=Y_6=0$

En el punto 3, en donde hay cambio de inercia de la sección, se tomará un momento de inercia promedio: $I_3 = \frac{2I_0+I_0}{2} = 1.5I_0$

$$\begin{array}{rcl}
 Y_{n-1} & - 2Y_n & + Y_{n+1} & = & h^2 M_n / EI_n \\
 \text{punto 1:} & 0 & - 2Y_1 & + Y_2 & = h^2 1.33wh^2 / 2EI_0 = 0.66wh^4 / EI_0 \\
 \text{punto 2:} & & Y_1 & - 2Y_2 & + Y_3 & = h^2 2.16wh^2 / 2EI_0 = 1.08wh^4 / EI_0 \\
 \text{punto 3:} & & & Y_2 & - 2Y_3 & + Y_4 & = h^2 2.00wh^2 / 1.5EI = 1.33wh^4 / EI_0 \\
 \text{punto 4:} & & & & Y_3 & - 2Y_4 & + Y_5 & = h^2 1.34wh^2 / EI_0 = 1.34wh^4 / EI_0 \\
 \text{punto 5:} & & & & & Y_4 & - 2Y_5 & + 0 & = h^2 0.66wh^2 / EI_0 = 0.66wh^4 / EI_0
 \end{array}$$

Resolviendo obtenemos:

$$Y_1 = -2.5wh^4 / EI_0 = -0.00193 wL^4 / EI_0$$

$$Y_2 = -4.33wh^4 / EI_0 = -0.00334 wL^4 / EI_0$$

$$Y_3 = -5.08wh^4 / EI_0 = -0.00392 wL^4 / EI_0$$

$$Y_4 = -4.50wh^4 / EI_0 = -0.00347 wL^4 / EI_0$$

$$Y_5 = -2.58wh^4 / EI_0 = -0.00199 wL^4 / EI_0$$

Ejemplo 3: Consideremos la viga simplemente apoyada de sección constante y sometida a una carga triangular. Encontrar momentos y deflexiones.

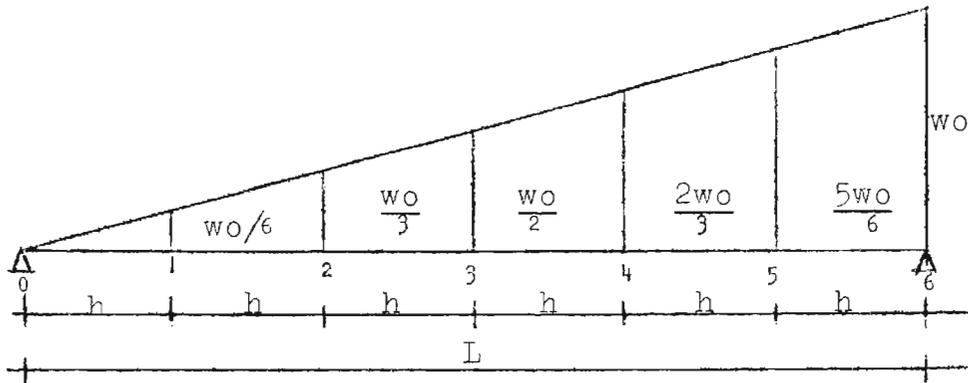


FIG. (15)

Momentos:

condiciones límites	$M_0 = M_6 = 0$
$M_{n-1} - 2M_n + M_{n+1}$	$= h^2 w_n$
punto 1: $0 - 2M_1 + M_2$	$= -h^2 (w_0/6)$
punto 2: $M_1 - 2M_2 + M_3$	$= -h^2 (w_0/3)$
punto 3: $M_2 - 2M_3 + M_4$	$= -h^2 (w_0/2)$
punto 4: $M_3 - 2M_4 + M_5$	$= -h^2 (2w_0/3)$
punto 5: $M_4 - 2M_5 + 0$	$= -h^2 (5w_0/6)$

Resolviendo:

$$M_1 = 0.972 w_0 h^2$$

$$M_2 = 1.777 w_0 h^2$$

$$M_3 = 2.249 w_0 h^2$$

$$M_4 = 2.221 w_0 h^2$$

$$M_5 = 1.527 w_0 h^2$$

Los valores de los momentos obtenidos son exactos, ya que el error cometido es del orden de la cuarta diferencia, cuyo valor en este caso es cero.

Deflexiones: condiciones $Y_0 = Y_6 = 0$

$$\begin{array}{rcll}
 \text{punto 1:} & 0 - 2Y_1 + Y_2 & = & 0.972 \quad w_0 h^4 / EI \\
 \text{punto 2:} & Y_1 - 2Y_2 + Y_3 & = & 1.777 \quad w_0 h^4 / EI \\
 \text{punto 3:} & Y_2 - 2Y_3 + Y_4 & = & 2.249 \quad w_0 h^4 / EI \\
 \text{punto 4:} & Y_3 - 2Y_4 + Y_5 & = & 2.221 \quad w_0 h^4 / EI \\
 \text{punto 5:} & Y_4 - 2Y_5 + 0 & = & 1.527 \quad w_0 h^4 / EI
 \end{array}$$

Resolviendo obtenemos:

	valores exactos	Error
$Y_1 = -4.114 \quad w_0 h^4 / EI$	$Y_1 = -4.034 \quad w_0 h^4 / EI$	2%
$Y_2 = -7.256 \quad w_0 h^4 / EI$	$Y_2 = -7.111 \quad w_0 h^4 / EI$	2%
$Y_3 = -8.621 \quad w_0 h^4 / EI$	$Y_3 = -8.437 \quad w_0 h^4 / EI$	2.1%
$Y_4 = -7.737 \quad w_0 h^4 / EI$	$Y_4 = -7.555 \quad w_0 h^4 / EI$	2.4%
$Y_5 = -4.632 \quad w_0 h^4 / EI$	$Y_5 = -4.506 \quad w_0 h^4 / EI$	2.8%

Tomando en cuenta los errores y si el error en el punto 2 se usa para el punto 1 y el error en el punto 4 se usa para el punto 5, tendremos:

$$\text{Error} = \frac{1}{12} (Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2})$$

Error en el punto 2:

$$\text{Error} = \frac{1}{12} (0 - 4Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 + Y_4) = -0.333Y_1 + 0.5Y_2 - 0.333Y_3 + 0.0833Y_4$$

Error en el punto 3:

$$\text{Error} = \frac{1}{12} (Y_1 - 4Y_2 + 6Y_3 - 4Y_4 + Y_5) = 0.0833Y_1 - 0.333Y_2 + 0.5Y_3 - 0.333Y_4 + 0.0833Y_5$$

Error en el punto 4:

$$\text{Error} = \frac{1}{12} (Y_2 - 4Y_3 + 6Y_4 - 4Y_5 + 0) = 0.0833Y_2 - 0.333Y_3 + 0.5Y_4 - 0.333Y_5$$

La ecuación, para encontrar deflexiones tomando en cuenta los errores propios del método es:

$$Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1} - \frac{1}{12} (Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2}) = h^2 M_n / EI_n$$

$$Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1} - \text{Error} = h^2 M_n / EI_n \quad (1)$$

Sustituyendo los errores encontrados en la ecuación (I) dada, obtenemos

$$-1.667 Y_1 + 0.50 Y_2 + 0.333 Y_3 - 0.083 Y_4 = 0.972 w_0 h^4 / EI$$

$$1.333 Y_1 - 2.50 Y_2 + 1.333 Y_3 - 0.083 Y_4 = 1.777 w_0 h^4 / EI$$

$$-0.083 Y_1 + 1.333 Y_2 - 2.50 Y_3 + 1.333 Y_4 - 0.083 Y_5 = 2.249 w_0 h^4 / EI$$

$$-0.083 Y_2 + 1.333 Y_3 - 2.50 Y_4 + 1.333 Y_5 = 2.221 w_0 h^4 / EI$$

$$-0.083 Y_2 + 0.333 Y_3 + 0.50 Y_4 - 1.667 Y_5 = 1.527 w_0 h^4 / EI$$

Resolviendo obtenemos:

valores exactos:

$$Y_1 = -4.030 w_0 h^4 / EI$$

$$Y_1 = -4.034 w_0 h^4 / EI$$

$$Y_2 = -7.100 w_0 h^4 / EI$$

$$Y_2 = -7.111 w_0 h^4 / EI$$

$$Y_3 = -8.440 w_0 h^4 / EI$$

$$Y_3 = -8.437 w_0 h^4 / EI$$

$$Y_4 = -7.550 w_0 h^4 / EI$$

$$Y_4 = -7.555 w_0 h^4 / EI$$

$$Y_5 = -4.500 w_0 h^4 / EI$$

$$Y_5 = -4.506 w_0 h^4 / EI$$

Se desarrollará a continuación el mismo ejemplo anterior, solamente que el número de tramos se reducirá a cuatro y se compararán los valores que se obtengan con los valores exactos.

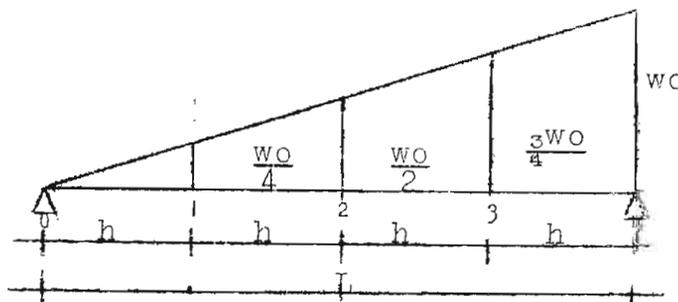


FIG. (16)

Momentos: condiciones $M_0 = M_4 = 0$

$$\text{punto 1: } 0 - 2M_1 + M_2 = -h^2 (w_0/4)$$

$$\text{punto 2: } M_1 - 2M_2 + M_3 = -h^2 (w_0/2)$$

$$\text{punto 3: } M_2 - 2M_3 + 0 = -h^2 (3w_0/4)$$

Resolviendo: $M_1 = 0.625 w_0 h^2$
 $M_2 = 1.000 w_0 h^2$
 $M_3 = 0.873 w_0 h^2$

Los valores obtenidos para momentos son exactos, ya que los errores propios del método son del orden de la cuarta diferencia, que son cero en nuestro caso.

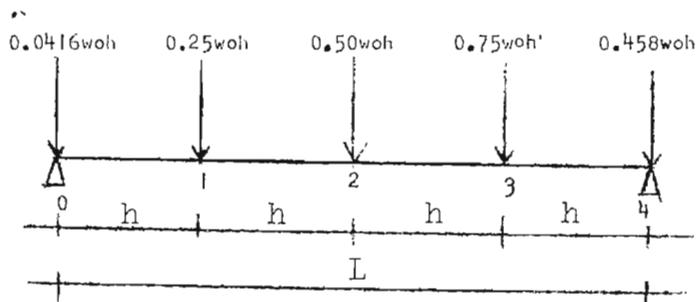
Deflexiones: condiciones $Y_0 = Y_4 = 0$

punto 1: $0 - 2Y_1 + Y_2 = 0.625 w_0 h^4 / EI$
 punto 2: $Y_1 - 2Y_2 + Y_3 = 1.000 w_0 h^4 / EI$
 punto 3: $Y_2 - 2Y_3 + 0 = 0.873 w_0 h^4 / EI$

Resolviendo obtenemos:

	Valores exactos	Error
$Y_1 = -1.187 w_0 h^4 / EI$	$Y_1 = -1.135 w_0 h^4 / EI$	4.6 %
$Y_2 = -1.749 w_0 h^4 / EI$	$Y_2 = -1.666 w_0 h^4 / EI$	5.0 %
$Y_3 = -1.311 w_0 h^4 / EI$	$Y_3 = -1.239 w_0 h^4 / EI$	5.8 %

Desarrollemos el mismo ejemplo, sustituyendo el sistema de carga por cargas concentradas equivalentes.



CARGAS CONCENTRADAS
EQUIVALENTES

FIG. (17)

Momentos: condiciones $M_0 = M_4 = 0$

$$M_{n-1} - 2M_n + M_{n+1} = h P_n$$

punto 1: $0 - 2M_1 + M_2 = (-0.25 w_0 h) h$
 punto 2: $M_1 - 2M_2 + M_3 = (-0.50 w_0 h) h$
 punto 3: $M_2 - 2M_3 + M_4 = (-0.75 w_0 h) h$

Resolviendo obtenemos:

$$M_1 = 0.625 w_0 h^2$$

$$M_2 = 1.000 w_0 h^2$$

$$M_3 = 0.873 w_0 h^2$$

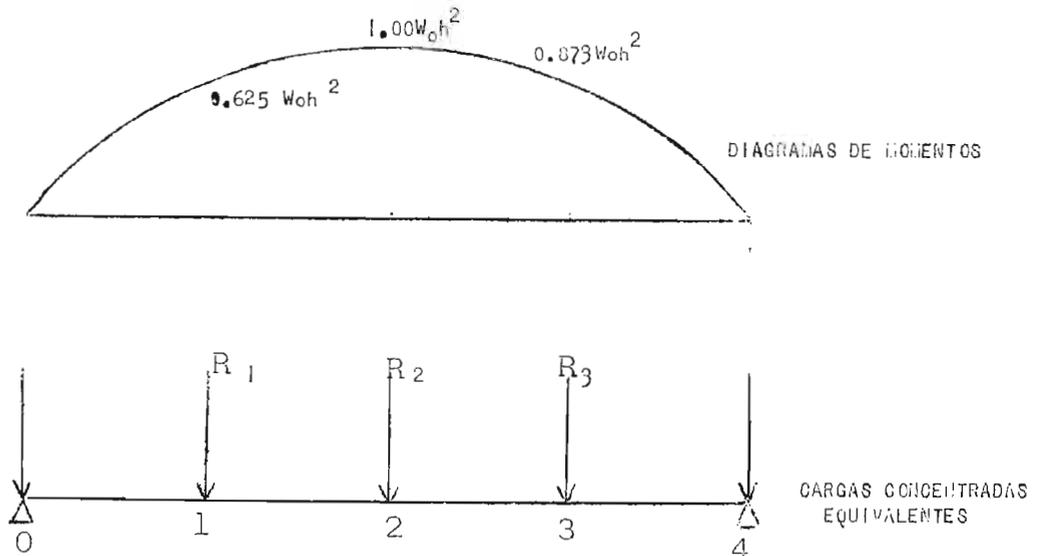


FIG. (18)

Puesto que la ecuación diferencial para momento, es una ecuación cúbica, para encontrar las cargas concentradas equivalentes (R_1 , R_2 , R_3) haremos uso de las fórmulas para cargas parabólicas.

Así, tendremos:

$$R_1 = \frac{h}{12} (M_0 + 10M_1 + M_2) = \frac{h}{12} (0 + 6.25 + 1.0) w_0 h^2 = 0.604 w_0 h^3$$

$$R_2 = \frac{h}{12} (M_1 + 10M_2 + M_3) = \frac{h}{12} (0.625 + 10.0 + 0.873) w_0 h^2 = 0.958 w_0 h^3$$

$$R_3 = \frac{h}{12} (M_2 + 10M_3 + M_4) = \frac{h}{12} (1.0 + 8.73 + 0) w_0 h^2 = 0.810 w_0 h^3$$

Deflexiones: condiciones $Y_0 = Y_4 = 0$.

$$\begin{array}{rcl} Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1} & = & h R/EI_n \\ \text{punto 1: } 0 - 2Y_1 + Y_2 & = & 0.604 w_0 h^4/EI \\ \text{punto 2: } Y_1 - 2Y_2 + Y_3 & = & 0.958 w_0 h^4/EI \\ \text{punto 3: } Y_2 - 2Y_3 + 0 & = & 0.810 w_0 h^4/EI \end{array}$$

Resolviendo obtenemos:

Valores exactos	
$Y_1 = - 1.135 w_0 h^4 / EI$	$Y_1 = -1.135 w_0 h^4 / EI$
$Y_2 = - 1.665 w_0 h^4 / EI$	$Y_2 = -1.666 w_0 h^4 / EI$
$Y_3 = - 1.238 w_0 h^4 / EI$	$Y_3 = -1.239 w_0 h^4 / EI$

Se puede observar la gran exactitud que obtuvimos al emplear las cargas concentradas equivalentes.

1-6b FACTORES DE ACARREO Y RIGIDEZ

Para el análisis de estructuras hiperestáticas, varios métodos han sido desarrollados; entre ellos podríamos citar el "método de Distribución de Momentos", propuesto por el profesor Hardy Cross; dicho método es válido toda vez que los esfuerzos que se produzcan en los miembros no sobrepasen el límite elástico. Por medio de este método es posible calcular los momentos en los nudos de manera iterativa.

Para poder aplicar el método de Hardy Cross, se requiere:

- 1 Conocer los momentos de empotramiento perfecto.
- 2 Conocer los factores de distribución de momentos, para determinar la forma cómo los momentos de desequilibrio se reparten en los miembros que convergen en un mismo nudo. Es necesario, entonces, conocer la rigidez de los miembros para poder determinar los factores de distribución.
- 3 Conocer los factores de acarreo (F.A.) o factores de transporte, para determinar el momento en el empotramiento cuando el extremo articulado es sometido a un momento.

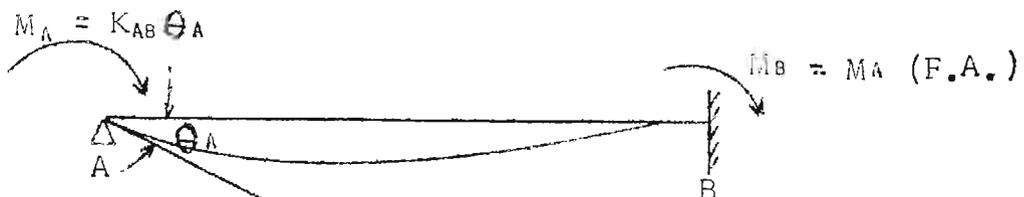


FIG. (19)

Los conceptos de Rigidez y factores de acarreo son los siguientes:
 La Rigidez K_{AB} del miembro AB es definida como el momento que es necesario aplicar en el extremo articulado A, para que el ángulo θ_A sea igual a un radián, cuando el extremo B se encuentre fijo.

$$K_{AB} = \frac{M_A}{\theta_A}$$

$$\text{Si } \theta_A = 1 \text{ radián} \therefore K_{AB} = M_A$$

Factor de Acarreo (F.A.) de A a B es definido como la razón del momento en el extremo fijo B al momento aplicado en A (M_A).

$$(F.A.)_{ab} = \frac{M_B}{M_A}$$

Cuando los miembros son de sección constante, los momentos de empotramiento perfecto pueden ser calculados, ya sea con ayuda de manuales, o a partir de deformaciones.

La rigidez del miembro $K_{AB} = \frac{4EI}{L}$

$$\text{Factor de Transporte (F.A.)}_{ab} = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{2}$$

El problema se complica cuando los miembros son de sección variable; en ellos la rigidez de los miembros $K \neq \frac{4EI}{L}$, los factores de acarreo son diferentes de 0.5 y los momentos de empotramiento son distintos a los de una viga de EI constante; sin embargo, el procedimiento de distribución de momentos es el mismo.

Para estos casos, los métodos de "Columna Análoga" y "Métodos Numéricos", son muy útiles.

Se procede, a continuación, a encontrar factores de acarreo y rigideces de miembros, por medio de las "Diferencias Finitas".

El procedimiento a seguir es el siguiente:

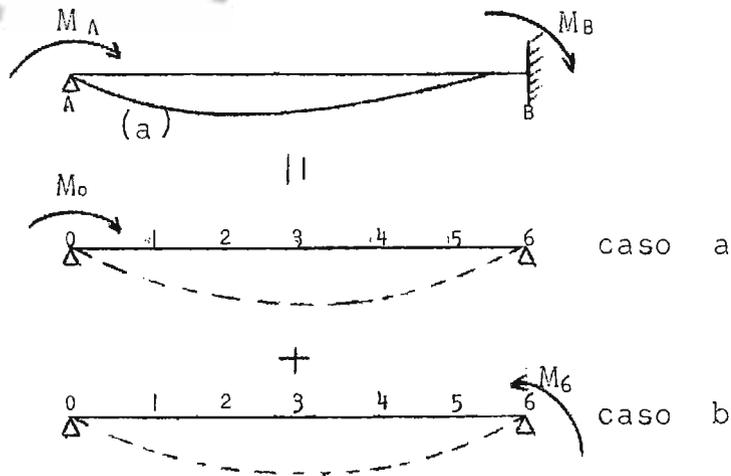


FIG (20)

Queremos encontrar, la rigidez y factor de acarreo del miembro de A a B. Para tal, sustituiremos el sistema original, FIG.20 (a), por la suma de los sistemas de los casos a y b. Tendremos, que los momentos M_0 y M_6 tendrán que guardar cierta relación, ya que debemos cumplir con la condición que la rotación en el punto 6 debe ser cero. Para facilitar las operaciones, tomaremos $M_0 = M_6 = 100$ y calcularemos:

- 1 Las deflexiones: $Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1} = h^2 M_n / EI_n$
- 2 Las rotaciones θ_2 y θ_4 a partir de las deflexiones ya encontradas

$$\frac{dy}{dx} = \theta$$

$$\Delta Y_n = h\theta_n$$

$$\frac{Y_{n+1} - Y_{n-1}}{2} = h\theta_n$$

$$\theta_n = \frac{Y_{n+1} - Y_{n-1}}{2h}$$

- 3 Encontraremos las rotaciones θ_0 y θ_6 a partir de θ_2 y θ_4

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_n}{EI_n}$$

$$\frac{d(\theta)}{dx} = \frac{M_n}{EI_n}$$

$$\Delta\theta_n = h M_n / EI_n$$

$$\frac{\theta_{n+1} - \theta_{n-1}}{2} = h M_n / EI_n$$

Llegamos a los siguientes resultados.

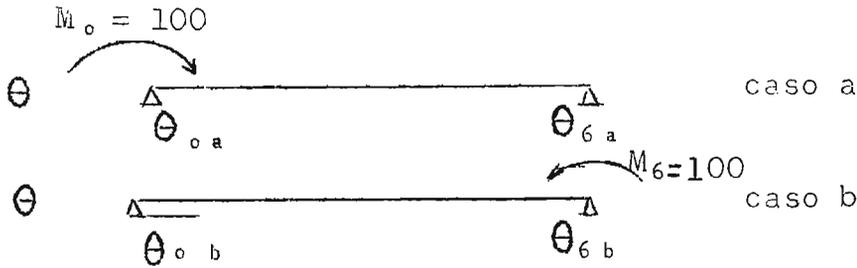


FIG. (21)

Puesto que la rotación en el punto 6 debe ser cero.

$$\theta_{6a} + \theta_{6b} (\text{F.A.}ab) = 0$$

$$(\text{F.A.})ab = -\frac{\theta_{6a}}{\theta_{6b}}$$

El ángulo θ_o será entonces:

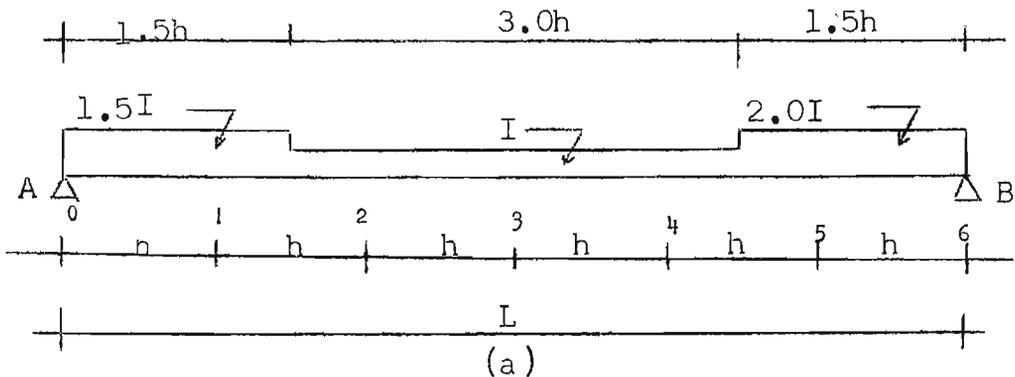
$$\theta_o = \theta_{oa} - (\text{F.A.})ab \theta_{ob}$$

y la rigidez del miembro será:

$$K_{AB} = \frac{100}{\theta_o}$$

De manera semejante procederíamos para obtener la rigidez y factor de acarreo de B a A

Ejemplo: Encontrar factor de acarreo y rigidez de la viga mostrada en la FIG. (22).



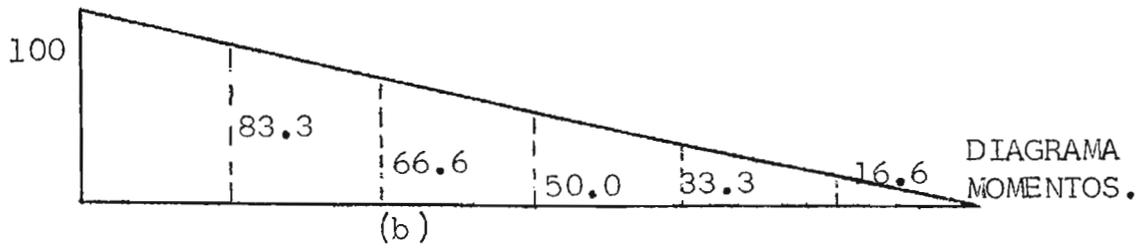
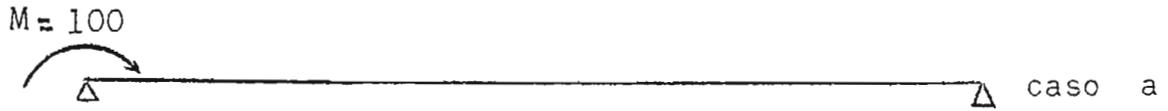


FIG., (22)

1 Deflexiones:

$$\begin{aligned}
 Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1} &= h^2 M_n / EI_n \\
 \text{punto 1: } 0 - 2Y_1 + Y_2 &= h^2 83.3 / 1.5EI = 55.5h^2 / EI \\
 \text{punto 2: } Y_1 - 2Y_2 + Y_3 &= h^2 66.6 / EI \\
 \text{punto 3: } Y_2 - 2Y_3 + Y_4 &= h^2 50.0 / EI \\
 \text{punto 4: } Y_3 - 2Y_4 + Y_5 &= h^2 33.3 / EI \\
 \text{punto 5: } Y_4 - 2Y_5 + 0 &= h^2 16.6 / 2EI = 8.3h^2 / EI
 \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= -200.8 h^2 / EI & Y_4 &= -162.8 h^2 / EI \\
 Y_2 &= -128.2 h^2 / EI & Y_5 &= -85.5 h^2 / EI \\
 Y_3 &= -206.8 h^2 / EI
 \end{aligned}$$

2. Rotaciones θ_2 , θ_4

$$\theta_2 = \frac{Y_3 - Y_1}{2h} = \frac{(-206.8 + 128.2) h^2}{2h EI} = -39.3 \frac{h}{EI}$$

$$\theta_4 = \frac{Y_5 - Y_3}{2h} = \frac{(-85.5 + 206.8) h^2}{2h EI} = +60.7 \frac{h}{EI}$$

3. Rotaciones θ_0 , θ_6

$$\theta_2 - \theta_0 = 2 \times 55.5 \frac{h}{EI} \quad \therefore \theta_0 = -150.3 \frac{h}{EI}$$

$$\theta_6 - \theta_4 = 2 \times 8.3 \frac{h}{EI} \quad \therefore \theta_6 = +77.3 \frac{h}{EI}$$

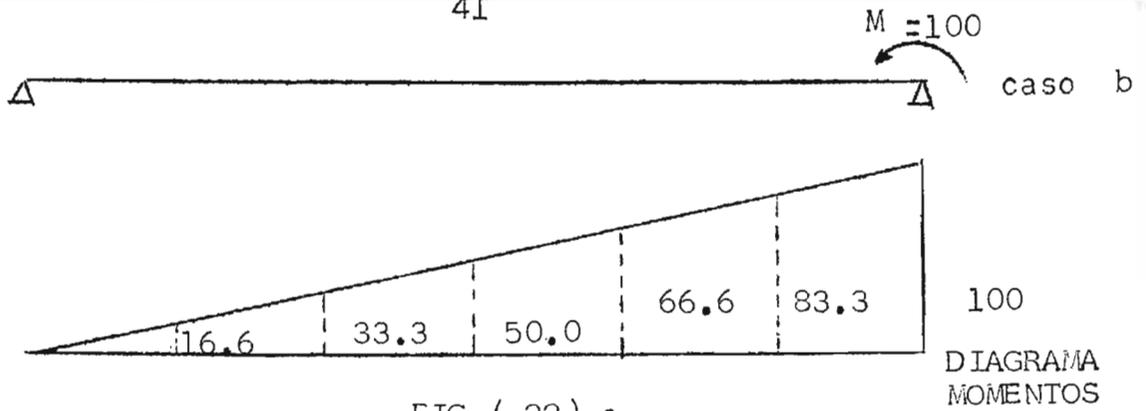


FIG. (22) c

1 - Deflexiones:

$$\begin{aligned}
 \text{Punto 1: } & 0 - 2Y_1 + Y_2 & = h^2 16.6 / 1.5EI & = 11.1h^2 / EI \\
 \text{Punto 2: } & Y_1 - 2Y_2 + Y_3 & = h^2 33.3 / EI \\
 \text{Punto 3: } & Y_2 - 2Y_3 + Y_4 & = h^2 50.0 / EI \\
 \text{Punto 4: } & Y_3 - 2Y_4 + Y_5 & = h^2 66.6 / EI \\
 \text{Punto 5: } & Y_4 - 2Y_5 + 0 & = h^2 83.3 / 2EI & = 41.6 h^2 / EI
 \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$Y_1 = -85.5 \quad h^2 / EI$$

$$Y_2 = -159.9 \quad h^2 / EI$$

$$Y_3 = -201.0 \quad h^2 / EI$$

$$Y_4 = -192.1 \quad h^2 / EI$$

$$Y_5 = -116.6 \quad h^2 / EI$$

2 Rotaciones θ_2, θ_4

$$\theta_2 = \frac{Y_3 - Y_1}{2h} = \frac{(-201.0 + 85.5) h^2}{2h EI} \rightarrow -57.8 \frac{h}{EI}$$

$$\theta_4 = \frac{Y_5 - Y_3}{2h} = \frac{(-116.6 + 201.0) h^2}{2h EI} \rightarrow +42.2 \frac{h}{EI}$$

3. Rotaciones θ_0, θ_6

$$\theta_2 - \theta_0 = 2 \times 11.1 \frac{h}{EI} \quad \therefore \theta_0 = -80.0 \frac{h}{EI}$$

$$\theta_6 - \theta_4 = 2 \times 41.6 \frac{h}{EI} \quad \therefore \theta_6 = +125.4 \frac{h}{EI}$$

$$(F.A.)_{ba} = \frac{80.0}{150.3} = 0.533$$

$$K_{BA} = \frac{100EI}{84.2h} = \frac{100.6EI}{84.2L} = 7.13 \frac{EI}{L}$$

Valores exactos:

$$(F.A.)_{ab} = 0.6162$$

$$(F.A.)_{ba} = 0.5440$$

1 - 6c MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

Como se expresó anteriormente, para la aplicación del método de Distribución de Momentos, es necesario conocer también los momentos de empotramiento.

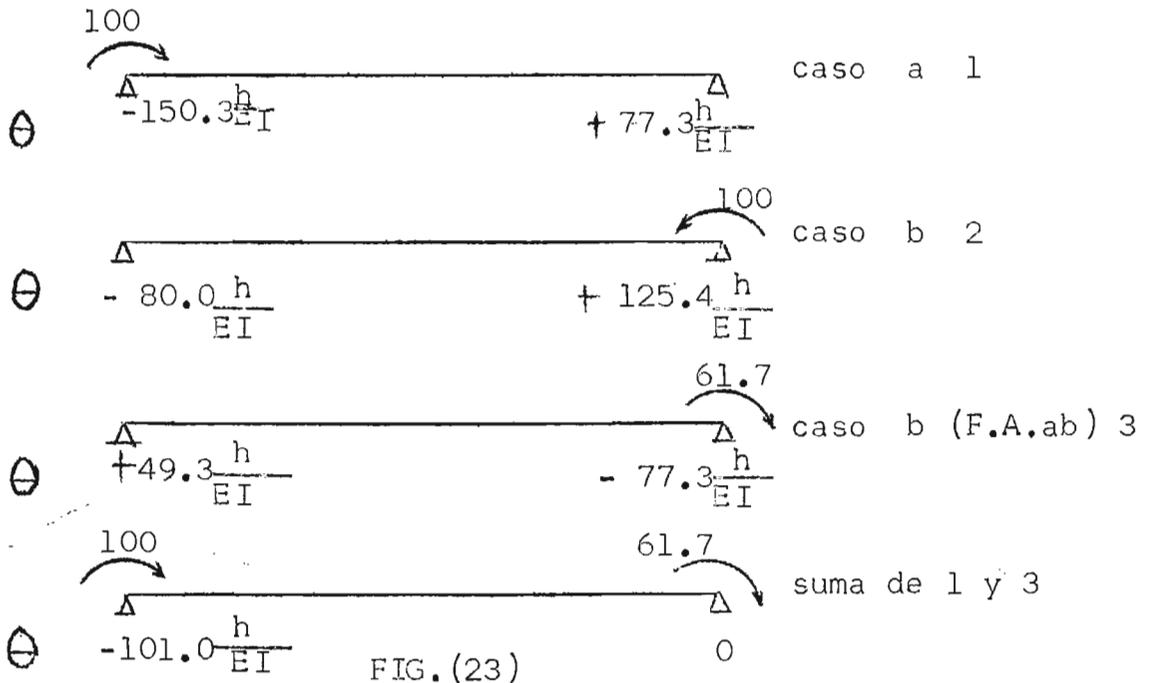
Encontraremos, los momentos de empotramiento para la viga del ejemplo anterior, sometida a una carga uniformemente distribuida w .

El procedimiento a seguir será el siguiente:

- 1 - Encontraremos las rotaciones que se producen en la viga, en los puntos 0 y 6, considerando a la viga simplemente apoyada y sujeta a la carga w uniformemente distribuida.
- 2 - Aplicaremos un momento de 100 en el extremo A de la viga y encontraremos las rotaciones en los puntos 0 y 6. La viga considerada simplemente apoyada.
- 3 - Aplicaremos un momento de 100 en el extremo B de la viga y encontraremos las rotaciones en los puntos 0 y 6. La viga considerada simplemente apoyada. La condición que tenemos que cumplir es que las rotaciones en 0 y 6 deben valer cero. Planteando las ecuaciones para cumplir esta condición, encontramos los momentos de empotramiento.

Factor de acarreo y rigidez de A a B:

Condición $\theta_6 = 0$

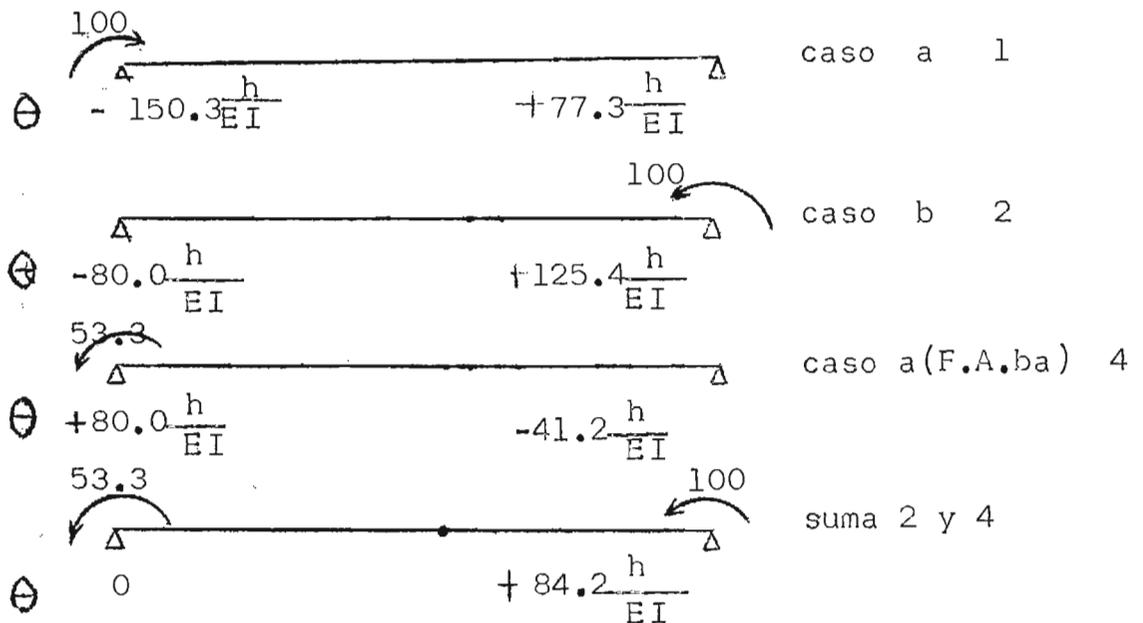


$$F.A._{ab} = \frac{61.7}{100} = 0.618 = \frac{77.3}{125.4}$$

$$K_{AB} = \frac{100EI}{101.h} = \frac{100 \times 6 EI}{101.0 L} = 5.94 \frac{EI}{L}$$

Factor de acarreo y Rigidez de B a A:

Condición $\theta_0 = 0$



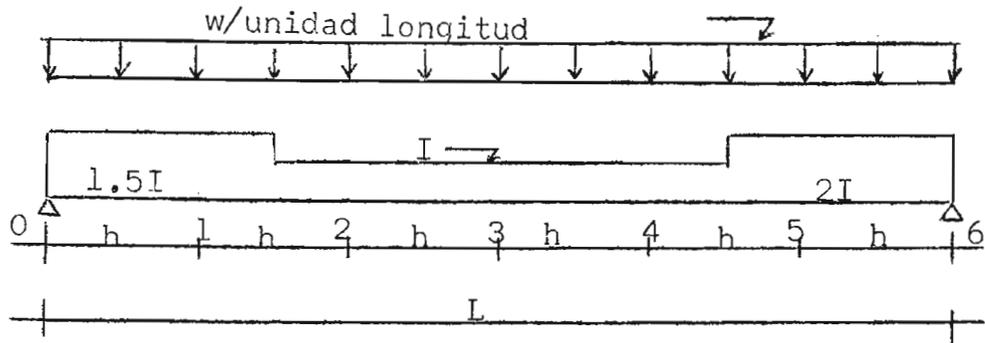


FIG. (25)

Momentos: $M_0 = M_6 = 0$

$$\text{Punto 1: } 0 - 2M_1 + M_2 = -wh^2$$

$$\text{Punto 2: } M_1 - 2M_2 + M_3 = -wh^2$$

$$\text{Punto 3: } M_2 - 2M_3 + M_4 = -wh^2$$

$$\text{Punto 4: } M_3 - 2M_4 + M_5 = -wh^2$$

$$\text{Punto 5: } M_4 - 2M_5 + 0 = -wh^2$$

Resolviendo tenemos:

$$M_1 = 2.5wh^2 \qquad M_4 = 4.0wh^2$$

$$M_2 = 4.0wh^2 \qquad M_5 = 2.5wh^2$$

$$M_3 = 4.5wh^2$$

Deflexiones: $y_0 = y_6 = 0$

$$\text{Punto 1: } 0 - 2Y_1 + Y_2 = 2.5wh^3 / 1.5EI = 1.67wh^4 / EI$$

$$\text{Punto 2: } Y_1 - 2Y_2 + Y_3 = 4.0wh^4 / EI$$

$$\text{Punto 3: } Y_2 - 2Y_3 + Y_4 = 4.5wh^4 / EI$$

$$\text{Punto 4: } Y_3 - 2Y_4 + Y_5 = 4.0wh^4 / EI$$

$$\text{Punto 5: } Y_4 - 2Y_5 + 0 = 2.5wh^4 / 2EI = 1.25wh^4 / EI$$

Resolviendo:

$$Y_1 = -7.850wh^4 / EI \qquad Y_4 = -13.890wh^4 / EI$$

$$Y_2 = -14.030wh^4 / EI \qquad Y_5 = -7.570wh^4 / EI$$

$$Y_3 = -16.210wh^4 / EI$$

Rotaciones θ_2 y θ_4

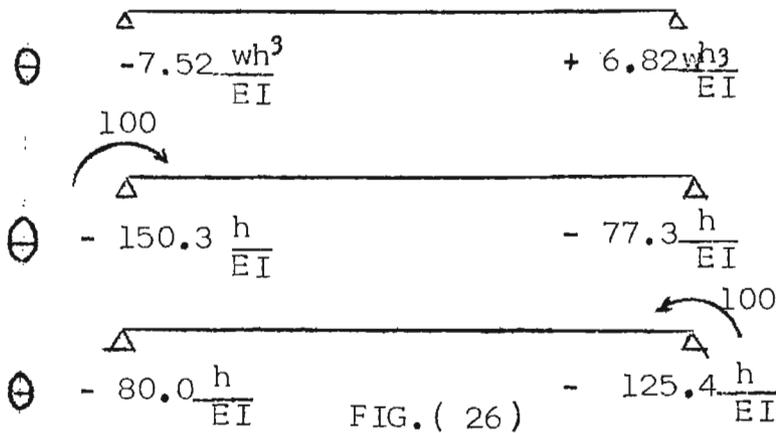
$$\theta_2 = \frac{Y_3 - Y_1}{2h} = \frac{(-16.210 + 7.85)wh^4}{2h EI} = - 4.180 \frac{wh^3}{EI}$$

$$\theta_4 = \frac{Y_5 - Y_3}{2h} = \frac{(-7.57 + 16.21)wh^4}{2h EI} = + 4.320 \frac{wh^3}{EI}$$

Rotaciones θ_0 y θ_6

$$\theta_2 - \theta_0 = 2 \times 1.67 \frac{wh^3}{EI} \quad \therefore \theta_0 = -7.52 \frac{wh^3}{EI}$$

$$\theta_6 - \theta_4 = 2 \times 1.25 \frac{wh^3}{EI} \quad \therefore \theta_6 = +6.82 \frac{wh^3}{EI}$$

CONDICION $\theta_0 = \theta_6 = 0$

$$-7.52 \frac{wh^3}{EI} - 150.3 \frac{h}{EI} x - 80.0 \frac{h}{EI} y = 0$$

$$+6.82 \frac{wh^3}{EI} + 77.3 \frac{h}{EI} x + 125.4 \frac{h}{EI} y = 0$$

Resolviendo: $X = - 0.0313 wh^2$ $Y = - 0.0352 wh^2$ 

Tenemos entonces que los momentos de empotramiento son:

$$M_A = 3.13wh^2 = 0.0869 wL^2$$

$$M_B = 3.52wh^2 = 0.0976 wL^2$$

1-7d ANALISIS DE VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

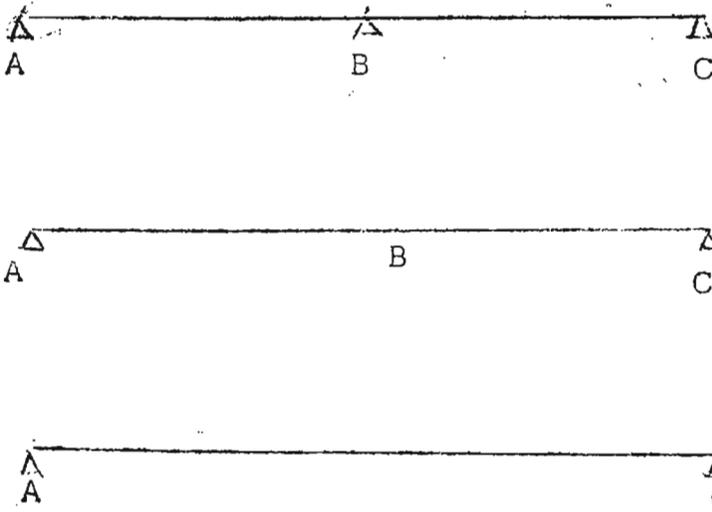


FIG. (27)

La viga ABC en base al principio de superposición, puede ser sustituido por:

1. Una viga simplemente apoyada en A y C sometido al sistema de carga. La deflexión que sufre el punto B bajo este sistema de carga puede ser encontrado (Δ_B).
2. Más una viga simplemente apoyada en A y C sometido a carga concentrada unitaria en B. Bajo esta carga concentrada, el punto B sufrirá una deflexión δ_B .

Pero como la deformación del punto B es cero, tendremos:

$$\Delta_B = R_B (\delta_B)$$

$$\text{de donde } R_B = \frac{\Delta_B}{\delta_B}$$

Siguiendo este procedimiento, tendríamos que aplicar el método de diferencias finitas, para cada uno de los sistemas en que ha sido sustituido el sistema original, para poder encontrar la reacción en B. Sin embargo, la reacción R_B puede calcularse en forma más rápida, aplicando el teorema de "Desplazamientos Recíprocos" de Maxwell, que nos establecen:

a) $\Delta_{12} = \Delta_{21}$

El desplazamiento que ocurre en un punto 1 sobre la viga, debido a una carga P , aplicada en otro punto 2, es igual al desplazamiento que sufrirá el punto 2, cuando la carga P esté colocada en el punto 1.-

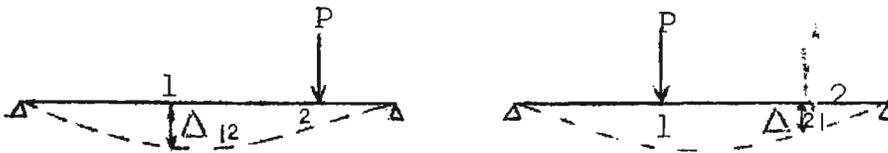


FIG. (28)

b) $\theta_{12} = \theta_{21}$

La rotación en el punto 1, debido a un momento M aplicado en 2, es igual a la rotación en el punto 2, debido al momento M aplicado en 1.

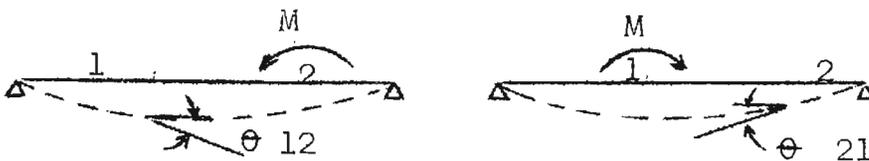


FIG. (29)

c) $\theta_{12} = \Delta_{21}$

La rotación en el punto 1, debido a una carga unitaria aplicada en 2, es igual a la deflexión que sufrirá el punto 2 cuando un momento unitario esté aplicado en 1.-

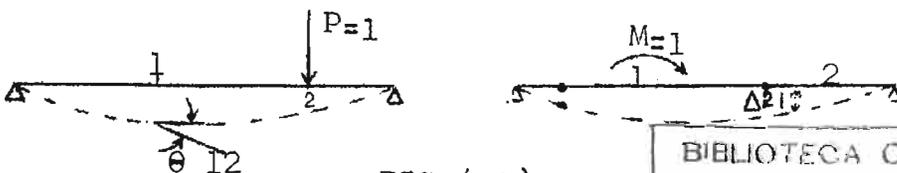


FIG. (30)

Sustituyendo la viga simplemente apoyada en A y C bajo el sistema de carga por la viga equivalente sometida a cargas concentradas como se muestra en la FIG. 31.

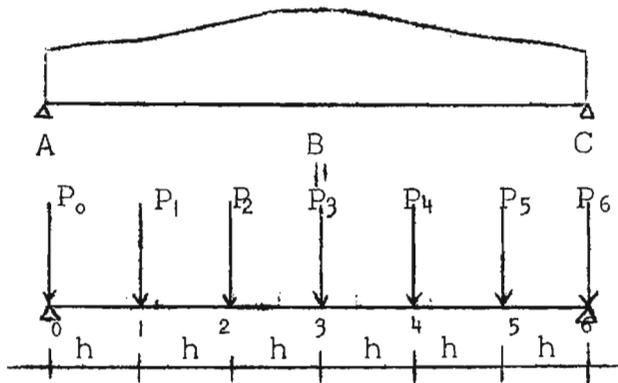


FIG. (31)

Luego sometiendo a la viga AC bajo la acción de una carga unitaria en B; por medio del método de las diferencias finitas encontramos las deflexiones que se producen en los puntos 1, 2, 3, 4, 5.

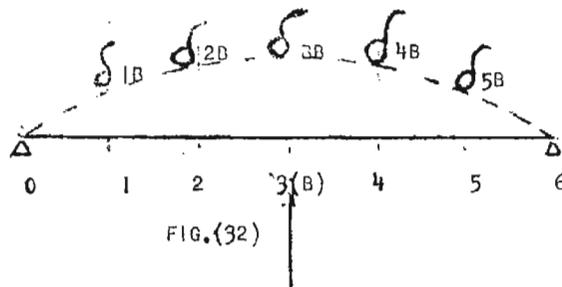


FIG.(32)

en base al teorema de Maxwell.

La deflexión que producirá la carga P_1 en B será: $\delta_{1B} P_1$

La deflexión que producirá la carga P_2 en B será: $\delta_{2B} P_2$

de manera similar, las cargas P_3, P_4, P_5 producirán las deflexiones $P_3 \delta_{3B}$, $P_4 \delta_{4B}$ y $P_5 \delta_{5B}$, respectivamente.

La deflexión total en B, bajo el sistema e carga \mathbf{a} será:

$$\Delta_B = P_1 \delta_{1B} + P_2 \delta_{2B} + P_3 \delta_{3B} + P_4 \delta_{4B} + P_5 \delta_{5B}$$

y como $R_B = \frac{\Delta_B}{\delta_{BB}}$

$$R_B = \frac{P_1 \delta_{1B} + P_2 \delta_{2B} + P_3 \delta_{3B} + P_4 \delta_{4B} + P_5 \delta_{5B}}{\delta_{BB}}$$

Ejemplo: Encontrar la reacción en B para la viga ABC mostrada de sección variable, sometida a dos cargas concentradas de W y $2W$ en los puntos 1 y 4 respectivamente.

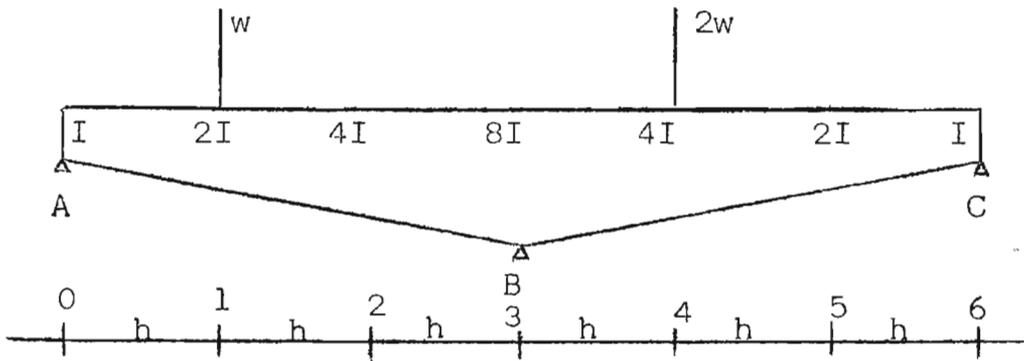


FIG. (33)

a) Someter la viga simplemente apoyada en A y C a una carga concentrada de 100 en B y encontrar las deflexiones en los puntos.

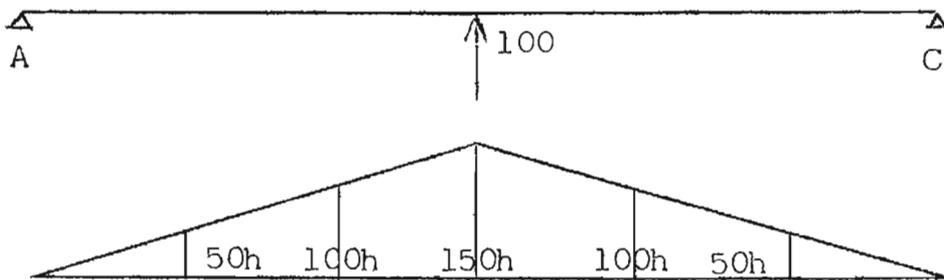


FIG. (34)

Deflexiones: $Y_0=Y_6=0$

$$\begin{aligned}
 \text{Punto 1: } & 0 - 2Y_1 + Y_2 & = -h^2 50h/2EI = -25h^3/EI \\
 \text{Punto 2: } & Y_1 - 2Y_2 + Y_3 & = -h^2 100h/4EI = -25h^3/EI \\
 \text{Punto 3: } & Y_2 - 2Y_3 + Y_4 & = -h^2 150h/8EI = -18.8h^3/EI \\
 \text{Punto 4: } & Y_3 - 2Y_4 + Y_5 & = -h^2 100h/4EI = -25h^3/EI \\
 \text{Punto 5: } & Y_4 - 2Y_5 + 0 & = -h^2 50h/2EI = -25h^3/EI
 \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos:

$$\begin{aligned}
 Y_1 & = +59.4h^3/EI \\
 Y_2 & = +93.8h^3/EI \\
 Y_3 & = +103.2h^3/EI \\
 Y_4 & = +93.8h^3/EI \\
 Y_5 & = +59.4h^3/EI
 \end{aligned}$$

La deflexión en B debido a las cargas aplicadas es:

$$\Delta_B = W \delta_{13} + 2W \delta_{43}$$

$$\Delta_B = W (59.4 + 2 \cdot 93.8) \frac{h^3}{EI}$$

$$\Delta_B = \frac{247.0 W h^3}{EI}$$

$$\delta_{BB} = \delta_{33} = 103.2 \frac{h^3}{EI}$$

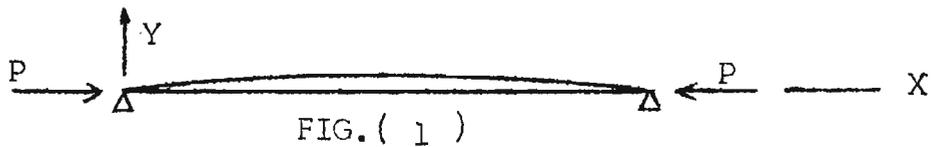
$$\Delta_B = R_B \delta_{BB}$$

$$R_B = \frac{\Delta_B}{\delta_{BB}}$$

$$R_B = \frac{247.0 \frac{W h^3}{EI}}{103.2 \frac{h^3}{EI}}$$

$$R_B = 2.38 W$$

II- PANDEO ELASTICO DE BARRAS AXIALMENTE CARGADAS!



Consideremos la barra mostrada en la fig. (1) sometida a fuerza axial de compresión P .

Se considerará que la barra es perfectamente elástica, que los esfuerzos que le ocasionan las fuerzas axiales se encuentran dentro del rango elástico de la barra.

Cuando las fuerzas axiales de compresión P son pequeñas, la barra permanece recta y si sometemos bajo esta condición la barra a una fuerza lateral, que le produzca una pequeña deflexión (Y), la deflexión desaparece cuando la fuerza lateral es removida, volviendo la barra a su posición original, es decir, a su forma recta. Se dice entonces que la barra se encuentra en equilibrio estable.

Ahora, si la fuerza axial P se aumenta gradualmente, llegará un momento en el que la deflexión producida por una pequeña carga lateral no desaparece una vez que la carga lateral es removida; se dice entonces que la barra se encuentra bajo un estado de equilibrio inestable, ya que en estas condiciones la barra puede fallar repentinamente por pandeo.

En un punto intermedio entre el equilibrio estable y el inestable existe el equilibrio neutro, y la fuerza axial en esta condición es conocida como fuerza axial crítica.

Las ecuaciones elásticas para la condición crítica pueden ser entonces escritas:

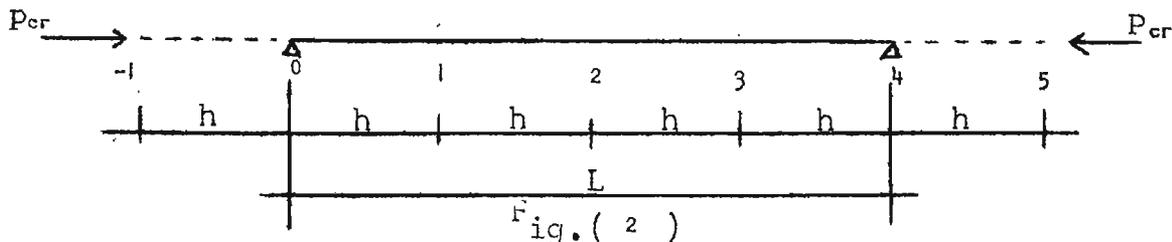
$$M = - P_{cr} y$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = - \frac{P_{cr} y}{EI}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = - \frac{P_{cr}}{E} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{y}{I} \right)$$

las expresiones obtenidas son ecuaciones diferenciales, por lo tanto, el empleo de las diferencias finitas resultará práctico.

Ejemplo 1: Encontrar la carga crítica para la barra mostrada de sección constante.



Para poder resolver la ecuación: $\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{P_{cr}}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2}$ es necesario usar puntos imaginarios de la barra.

Por la manera en que la barra se pandeará tendremos:

$$Y_1 = -Y_{-1} \quad ; \quad Y_3 = -Y_5$$

La ecuación diferencial escrita en términos de diferencias finitas es:

$$\Delta^4 Y = -\frac{P_{cr}}{EI} h^2 \Delta^2 Y$$

$$Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2} = -\frac{P_{cr}}{EI} h^2 [Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1}]$$

Sustituyendo $A = \frac{P_{cr}}{EI} h^2$, tenemos:

$$Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2} = -A [Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1}]$$

$$Y_{n-2} + (A-4)Y_{n-1} + (6-2A)Y_n + (A-4)Y_{n+1} + Y_{n+2} = 0$$

Para el punto 1:

$$Y_{-1} + 0 + (6-2A)Y_1 + (A-4)Y_2 + Y_3 = 0$$

reemplazando $Y_{-1} = -Y_1$

$$Y_1 (5-2A) + Y_2 (A-4) + Y_3 = 0 \quad , \quad (a)$$

Para el punto 2:

$$Y_1 (A-4) + Y_2 (6-2A) + Y_3 (A-4) = 0 \quad (b)$$

Para el punto 3:

$$Y_1 + Y_2 (A-4) + Y_3 (5-2A) = 0 \quad (c)$$

la solución de las ecuaciones (a), (b) y (c) sólo es posible cuando el determinante de las coeficientes es cero:

$$\begin{vmatrix} (5-2A) & (A-4) & 1 \\ (A-4) & (6-2A) & (A-4) \\ 1 & (A-4) & (5-2A) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} & (5-2A) [(6-2A)(5-2A) - (A-4)^2] - (A-4) [(A-4)(5-2A) - (A-4)] \\ & + 1 [(A-4)^2 - (6-2A)] = 0 \\ & - 4A^3 + 24A^2 - 40A + 16 = 0 \\ & A^3 - 6A^2 + 10A - 4 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} A = 0.6 & \quad \therefore P_{cr} = \frac{EI}{h^2} A = \frac{16EI}{L^2} 0.6 = 9.60 \frac{EI}{L^2} \\ A = 2.0 & \quad \therefore P_{cr} = \frac{EI}{h^2} A = \frac{16EI}{L^2} 2.0 = 32.0 \frac{EI}{L^2} \\ A = 2.5 & \quad \therefore P_{cr} = \frac{EI}{h^2} A = \frac{16EI}{L^2} 2.5 = 40.0 \frac{EI}{L^2} \end{aligned}$$

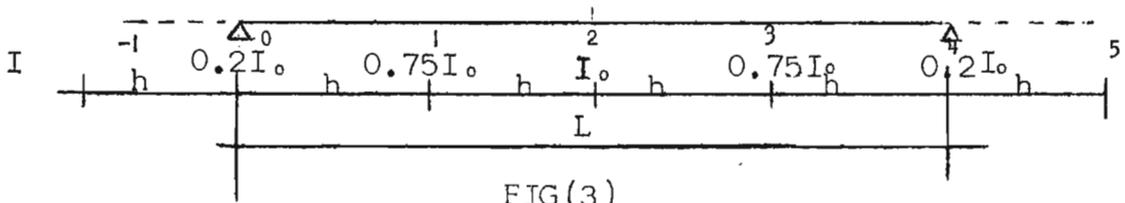
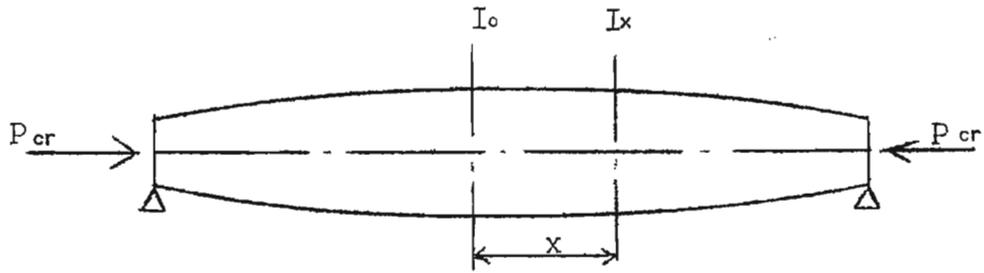
La carga crítica de pandeo será el valor de la fuerza axial más pequeña obtenida, en nuestro caso:

$$P_{cr} = 9.60 \frac{EI}{L^2}$$

$$\text{Valor exacto } P_{cr} = \frac{11^2 EI}{L^2} = 9.8696 \frac{EI}{L^2}$$

Ejemplo 2: Encontrar la carga crítica P_{cr} para la barra de sección variable mostrada. La expresión de la variación del momento de inercia es:

$$I_x = I_0 \left[1 - 2.11 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]^2$$



Condiciones: $Y_0 = Y_4 = 0$; $Y_1 = Y_3$
 $Y_1 = -Y_{-1}$; $Y_3 = -Y_5$

$$Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2} = -\frac{P_{cr}}{EI} h^2 [Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1}]$$

$$\text{Punto 1: } -Y_1 - 0 + 6Y_1 - 4Y_2 + Y_3 = \frac{P_{cr} h^2}{0.75EI_0} (0 - 2Y_1 + Y_2)$$

$$\text{Punto 2: } 0 - 4Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 + 0 = -\frac{P_{cr} h^2}{EI_0} (Y_1 - 2Y_2 + Y_3)$$

haciendo $A = \frac{P_{cr} h^2}{EI_0}$ tendremos:

$$Y_1 (6 - 2.66A) + Y_2 (1.33A - 4) = 0$$

$$Y_1 (2A - 8) + Y_2 (6 - 2A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} (6 - 2.66A) & (1.33A - 4) \\ (2A - 8) & (6 - 2A) \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando:

$$A^2 - 3.50A + 1.50 = 0$$

Resolviendo:

$$A = 0.50 \quad \therefore P_{cr} = \frac{16EI_0}{L^2} 0.50 = 8.0 \frac{EI_0}{L^2}$$

$$A = 3.00 \quad \therefore P_{cr} = \frac{16EI_0}{L^2} 3.00 = 48.0 \frac{EI_0}{L^2}$$

Carga crítica de pandeo: $P_{cr} = 8.0 \frac{EI_0}{L^2}$

Valor exacto : $P_{cr} = 8.15 \frac{EI_0}{L^2}$

Ejemplo 3: Determinar la carga crítica de pandeo para la barra articulada en un extremo y empotrada en el otro. La barra es de sección constante.

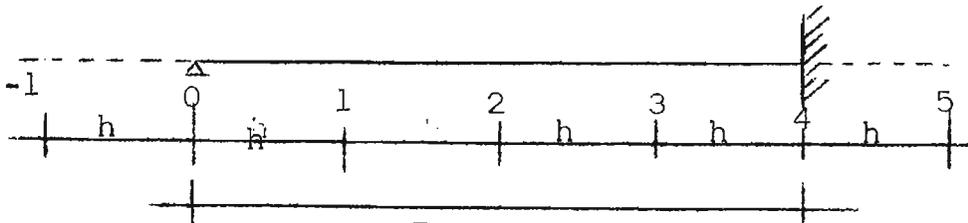


Fig. (4)

al igual que en los ejemplos anteriores, para poder encontrar la carga crítica de pandeo, es necesario asumir puntos imaginarios.

condiciones: $Y_0 = Y_4 = 0$

por la elástica que adoptará la barra: $Y_3 = Y_5$

$Y_1 = -Y_1$

Ecuación General: $\Delta^4 y = -\frac{P_{cr}}{EI_n} h^2 \Delta^2 y$

$$Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2} = -\frac{P_{cr} h^2}{EI} [Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1}]$$

tendremos:

punto 1: $(-Y_1) - 0 + 6Y_1 - 4Y_2 + Y_3 = -\frac{P_{cr} h^2}{EI} (0 - 2Y_1 + Y_2)$

punto 2: $0 - 4Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 + 0 = -\frac{P_{cr} h^2}{EI} (Y_1 - 2Y_2 + Y_3)$

punto 3: $Y_1 - 4Y_2 + 6Y_3 - 0 + (Y_3) = -\frac{P_{cr} h^2}{EI} (Y_2 - 2Y_3 + 0)$

Haciendo $A = \frac{P_{cr} h^2}{EI}$ y ordenando las ecuaciones tenemos:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 (5-2A) + Y_2 (A-4) + Y_3 &= 0 \\ Y_1 (A-4) + Y_2 (6-2A) + Y_3 (A-4) &= 0 \\ Y_1 + Y_2 (A-4) + Y_3 (7-2A) &= 0 \end{aligned} \right\} \textcircled{1}$$

Para que el conjunto de ecuaciones (1) sea posible, es necesario que el determinante de los coeficientes sea cero:

$$\begin{vmatrix} (5-2A) & (A-4) & 1 \\ (A-4) & (6-2A) & (A-4) \\ 1 & (A-4) & (7-2A) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando:

$$4A^3 - 30A^2 + 68A - 44 = 0$$

$$A^3 - 7.5A^2 + 17A - 11 = 0$$

Resolviendo:

$$A = 1.30 \quad \dots \quad P_{cr} = \frac{16 EI}{L^2} \cdot 1.3 = 20.8 \frac{EI}{L^2}$$

$$\text{Valor exacto } P_{cr} = 20.19 \frac{EI}{L^2}$$

III- VIGAS SOBRE FUNDACION ELASTICA

Conocemos como fundación elástica, aquella que resiste desplazamiento con una fuerza que es proporcional al desplazamiento. Esta idealización física se ha encontrado ser razonable para un gran número de problemas prácticos.

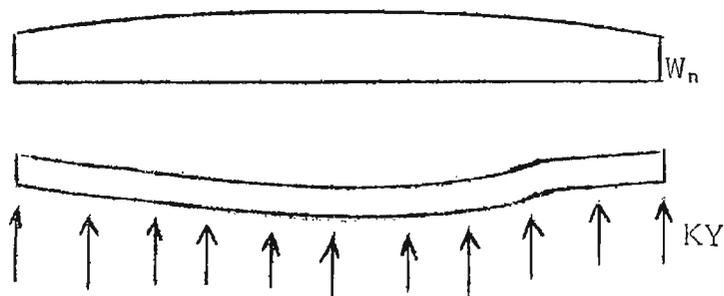


Fig.(5)

Así, para la viga mostrada en la FIG (5) descansando sobre una fundación elástica, la fuerza resistente al desplazamiento vertical de la viga es:

$$q = - kY$$

en donde: q = reacción fundación por unidad de longitud

k = módulo de fundación

Y = desplazamiento vertical que sufre la viga

La ecuación diferencial para una viga descansando sobre un medio elástico quedará entonces en la siguiente forma:

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad ; \quad \text{ecuación diferencial usada cuando la viga se encuentre sometida a cargas concentradas.}$$

$$EI \frac{d^4 Y}{dx^4} = - kY + w \quad \text{para } I = \text{constante}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 Y}{dx^2} \right) = - kY + w \quad \text{para } I = \text{variable}$$

ecuaciones en las cuales:

E = módulo de elasticidad de la viga

I = momento de inercia de la viga

W = carga distribuida por unidad de longitud

La ecuación diferencial expresada en términos de diferencias finitas será:

$$\Delta^4 Y = \frac{h^4}{EI_n} (-kY + w_n).$$

$$Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2} = \frac{h^4}{EI_n} (-kY + w_n).$$

$$Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + Y_n \left(6 + \frac{kh^4}{EI_n} \right) - 4Y_{n+1} + Y_{n+2} = \frac{h^4}{EI_n} w_n \quad (6)$$

$S \beta = L \sqrt[4]{\frac{k}{EI}}$ definida como rigidez relativa de la fundación

$L = mh$, donde m es el número de segmentos en que ha sido subdividida la viga.

$$\text{tendremos: } \frac{kh^4}{EI_n} = \frac{\beta^4 h^4}{L^4} = \frac{\beta^4}{m^4}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (A)

$$Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + Y_n \left(6 + \frac{\beta^4}{m^4}\right) - 4Y_{n+1} + Y_{n+2} = \frac{h^4 w_n}{EI_n} \quad (B)$$

Al llevar a cabo, el cálculo estructural de un edificio, como parte de dicho cálculo, es necesario el diseño de una cimentación capaz de soportar las cargas a que se encuentra sometido, sin provocar la falla del terreno.

La tierra es considerada ser un medio elástico y la cimentación descansando sobre ella debe ser tratada como una viga sobre fundación elástica y por tanto, para su diseño, es necesario encontrar momentos y cortantes; también es necesario conocer la máxima presión sobre el terreno para comprobar que dicha presión no sobrepase la presión admisible.

Si el momento de inercia (I) de la cimentación es grande, y el módulo de fundación K del suelo es pequeña; la cimentación puede ser considerada a ser rígida y la presión del suelo puede ser determinada por equilibrio estático; en caso contrario, será necesario tomar en cuenta la flexibilidad de la cimentación.

Ejemplo 1.—Para la viga mostrada en la Fig. (6), sometido a una carga W_0 uniformemente distribuida, y sobre un medio elástico; encontrar el diagrama de momento y cortantes. Asumir $\beta = L \sqrt[4]{k/EI} = 4.0$
 $EI = \text{constante}$

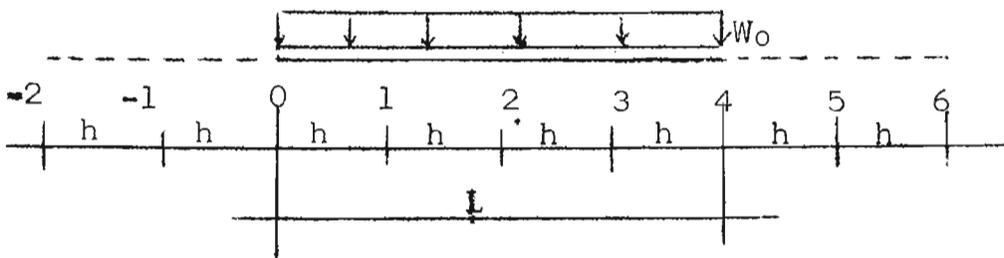


FIG. (6)

Condiciones límites: momentos y cortantes son de magnitud cero con los extremos.

$$M_0 = M_4 = 0$$

$$V_0 = V_4 = 0$$

$$M = EI \frac{d^2 Y}{dx^2}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{EI}{dx^3} \frac{d^3 Y}{dx^3}$$

Punto 0:

$$Y_{-1} - 2Y_0 + Y_1 = 0 \quad \therefore Y_{-1} = 2Y_0 - Y_1$$

$$Y_2 - 2Y_1 + 2Y_{-1} - Y_{-2} = 0 \quad \therefore Y_{-2} = 4Y_0 - 4Y_1 + Y_2$$

Punto 4:

$$Y_3 - 2Y_4 + Y_5 = 0 \quad \therefore Y_5 = 2Y_4 - Y_3$$

$$Y_6 - 2Y_5 + 2Y_3 - Y_2 = 0 \quad \therefore Y_6 = 4Y_4 - 4Y_3 + Y_2$$

La ecuación diferencial en términos de diferencias finitas.

$$Y_{(n-2)} - 4Y_{(n-1)} + Y_n \left(6 + \frac{h^4}{m^4}\right) - 4Y_{(n+1)} + Y_{(n+2)} = h^4 w_n / EI$$

$$\text{En punto 0: } Y_{-2} - 4Y_{-1} + Y_0 (6+h) - 4Y_1 + Y_2 = -h^4 w_0 / 2EI$$

$$\text{en punto 1: } Y_{-1} - 4Y_0 + Y_1 (6+h) - 4Y_2 + Y_3 = -h^4 w_0 / EI$$

$$\text{En punto 2: } Y_0 - 4Y_1 + Y_2 (6+h) - 4Y_3 + Y_4 = -h^4 w_0 / EI$$

$$\text{En punto 3: } Y_1 - 4Y_2 + Y_3 (6+h) - 4Y_4 + Y_5 = -h^4 w_0 / EI$$

$$\text{En punto 4: } Y_2 - 4Y_3 + Y_4 (6+h) - 4Y_5 + Y_6 = -h^4 w_0 / 2EI$$

Sustituyendo las expresiones encontradas de Y_{-1} , Y_{-2} , Y_5 , Y_6 obtenemos:

$$3Y_0 - 4Y_1 + 2Y_2 = -h^4 w_0 / 2EI$$

$$-2Y_0 + 6Y_1 - 4Y_2 + Y_3 = -h^4 w_0 / EI$$

$$Y_0 - 4Y_1 + 7Y_2 - 4Y_3 + Y_4 = -h^4 w_0 / EI$$

$$Y_1 - 4Y_2 + 6Y_3 - 2Y_4 = -h^4 w_0 / EI$$

$$2Y_2 - 4Y_3 + 3Y_4 = -h^4 w_0 / EI$$

Resolviendo obtenemos:

$$Y_0 = -0.726 \quad w_0 h^4 / EI$$

$$Y_1 = -0.904 \quad w_0 h^4 / EI$$

$$Y_2 = -0.968 \quad w_0 h^4 / EI$$

$$Y_3 = -0.904 \quad w_0 h^4 / EI$$

$$Y_4 = -0.726 \quad w_0 h^4 / EI$$

Los momentos y cortantes pueden ser encontrados

$$M_i = EI \frac{\Delta^2 Y}{\Delta x^2} = \frac{EI}{h^2} (Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1})$$

Así $M_0 = 0$

$$M_1 = \frac{EI}{h^2} (Y_0 - 2Y_1 + Y_2) = w_0 h^2 (-0.726 + 1.808 - 0.968) = 0.114 w_0 h^2$$

$$M_2 = \frac{EI}{h^2} (Y_1 - 2Y_2 + Y_3) = w_0 h^2 (-0.904 + 1.936 - 0.904) = 0.128 w_0 h^2$$

$$M_3 = \dots\dots\dots = 0.114 w_0 h^2$$

$$M_4 = 0$$

Cortantes:

$$V = EI \frac{\Delta^3 Y}{\Delta x^3} = \frac{EI}{2h^3} [Y_{n+2} - 2Y_{n+1} + 2Y_n - Y_{n-1}]$$

$$V_0 = 0$$

$$V_1 = \frac{EI}{2h^3} (Y_3 - 2Y_2 + 2Y_1 - Y_0) = \frac{w_0 h}{2} (-0.904 + 1.936 - 1.452 + 0.548) = 0.064 w_0 h$$

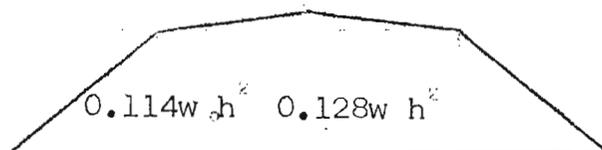
$$V_2 = \frac{EI}{2h^3} (Y_4 - 2Y_3 + 2Y_2 - Y_1) = \frac{w_0 h}{2} (0) \dots\dots\dots = 0$$

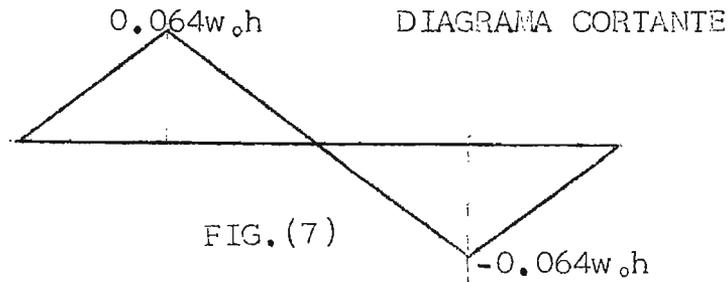
$$V_3 = \dots\dots\dots$$

$$= -0.064 w_0 h$$

$$V_4 = 0$$

DIAGRAMA MOMENTOS





Ejemplo (2).- Para la viga mostrada en la Fig, (8), sometida a una carga concentrada W en el centro de la viga, y sobre un medio elástico; encontrar momentos y cortantes. Peso propio viga se considerará ser despreciable.

Asumir $\beta = L\sqrt{k/EI} = 4.0$

$EI = \text{constante}$

Considerar la distribución de presiones ser parabólica

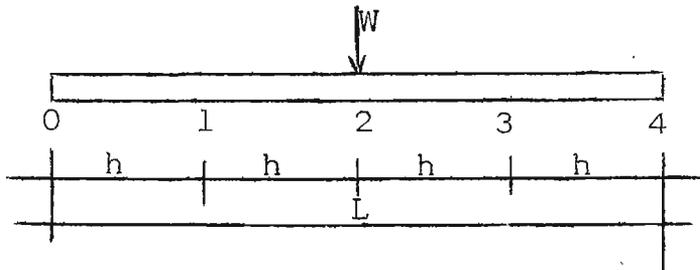
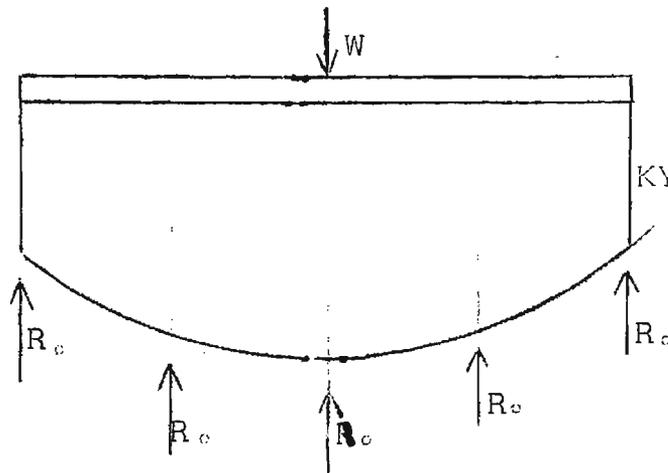


FIG. (8)



$$R_0 = -\frac{kh}{24}(7Y_0 + 6Y_1 - Y_2)$$

$$R_1 = -\frac{kh}{12}(Y_0 + 10Y_1 + Y_2)$$

$$R_4 = -\frac{kh}{24}(-Y_2 + 6Y_3 + 7Y_4)$$

Como se dijo anteriormente, cuando la viga se encuentra sometida a cargas concentradas es más conveniente trabajar con la expresión:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\Delta^2 y = h^2 M/EI$$

punto 1: $Y_0 - 2Y_1 + Y_2 = R_0 h^3 / EI$ (a)

punto 2: $Y_1 - 2Y_2 + Y_3 = (2R_0 + R_1) h^3 / EI = (2R_4 + R_3) h^3 / EI$ (b)

punto 3: $Y_2 - 2Y_3 + Y_4 = R_4 h^3 / EI$ (c)

Sustituyendo los valores de R por sus equivalentes en función de las deflexiones $y \frac{kh^4}{EI} = \left(\frac{y}{4}\right)_{=1}$ obtenemos:

$$Y_0 - 2Y_1 + Y_2 = -0.291Y_0 - 0.25Y_1 + 0.042Y_2 \quad (a)$$

$$1.291Y_0 - 1.75Y_1 + 0.958Y_2 = 0 \quad (d)$$

$$Y_1 - 2Y_2 + Y_3 = -0.66Y_0 - 1.33Y_1 \quad (b)$$

$$0.66Y_0 + 2.33Y_1 - 2Y_2 + Y_3 = 0 \quad (e)$$

Por simetría:

$$Y_1 = Y_3$$

$$R_0 = R_4, \quad R_1 = R_3$$

$$\sum Fy = 0$$

$$R_0 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = W$$

$$2R_0 + 2R_1 + R_2 = W$$

$$\frac{h^3}{EI} \left[-\frac{kh}{12}(7Y_0 + 6Y_1 - Y_2) - \frac{kh}{12}(2Y_0 + 20Y_1 + 2Y_2) - \frac{kh}{12}(Y_1 + 10Y_2 + Y_1) \right] = \frac{wh^3}{EI}$$

$$0.75 Y_0 + 2.33Y_1 + 0.918Y_2 = -\frac{wh^3}{EI} \quad (f)$$

$$1.291Y_0 - 1.75Y_1 + 0.958Y_2 = 0 \quad (d)$$

$$0.66Y_0 + 3.33Y_1 - 2.00Y_2 = 0 \quad (e)$$

$$0.75Y_0 + 2.33Y_1 + 0.918Y_2 = -wh^3/EI \quad (f)$$

Resolviendo:

$$Y_0 = -0.024 \quad wh^3/EI$$

$$Y_1 = -0.257 \quad wh^3/EI$$

$$Y_2 = -0.430 \quad wh^3/EI$$

$$Y_3 = -0.257 \quad wh^3/EI$$

$$Y_4 = -0.024 \quad wh^3/EI$$

Momentos:

$$M_n = \frac{EI}{h^2} (Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1})$$

$$M_0 = 0$$

$$M_1 = \frac{EI}{h^2} (Y_0 - 2Y_1 + Y_2) = wh(-0.024 + 0.514 - 0.430) = 0.060 \quad wh$$

$$M_2 = \frac{EI}{h^2} (Y_1 - 2Y_2 + Y_3) = wh(-0.257 + 0.860 - 0.257) = 0.346 \quad wh$$

$$M_3 = \dots\dots\dots = 0.060 \quad wh$$

$$M_4 = 0$$

Cortantes:

$$R_0 = -\frac{kh}{24} (7Y_0 + 6Y_1 - Y_2) = -\frac{kh}{24} \frac{h^3}{EI} w(-0.168 - 1.542 + 0.430) = 0.054w$$

$$R_1 = -\frac{kh}{12} (Y_0 + 10Y_1 + Y_2) = -\frac{kh}{12} \frac{h^3}{EI} w(-0.024 - 2.570 - 0.430) = 0.252w$$

$$R_2 = -\frac{kh}{12} (Y_1 + 10Y_2 + Y_3) = -\frac{kh}{12} \frac{h^3}{EI} w(-0.257 - 4.30 - 0.257) = 0.400w$$

$$R_3 = \dots\dots\dots = 0.252w$$

$$R_4 = \dots\dots\dots = 0.054w$$

En base a estas reacciones R, el diagrama de cortantes en forma aproximada puede ser dibujado, así:

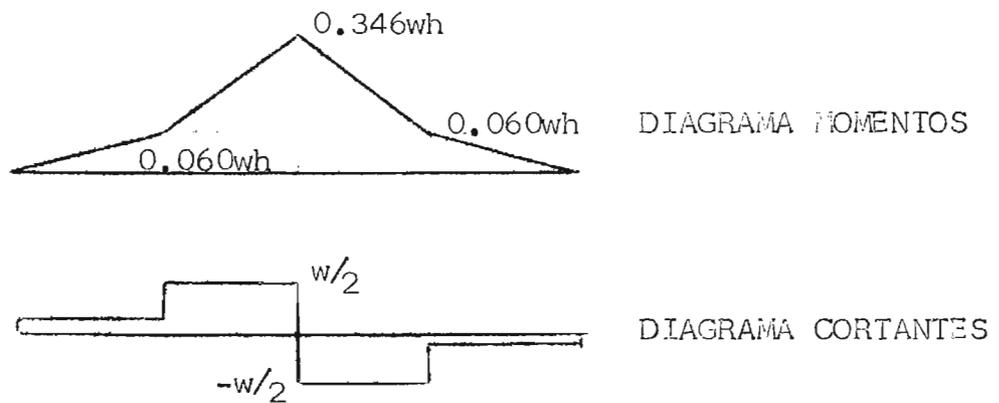
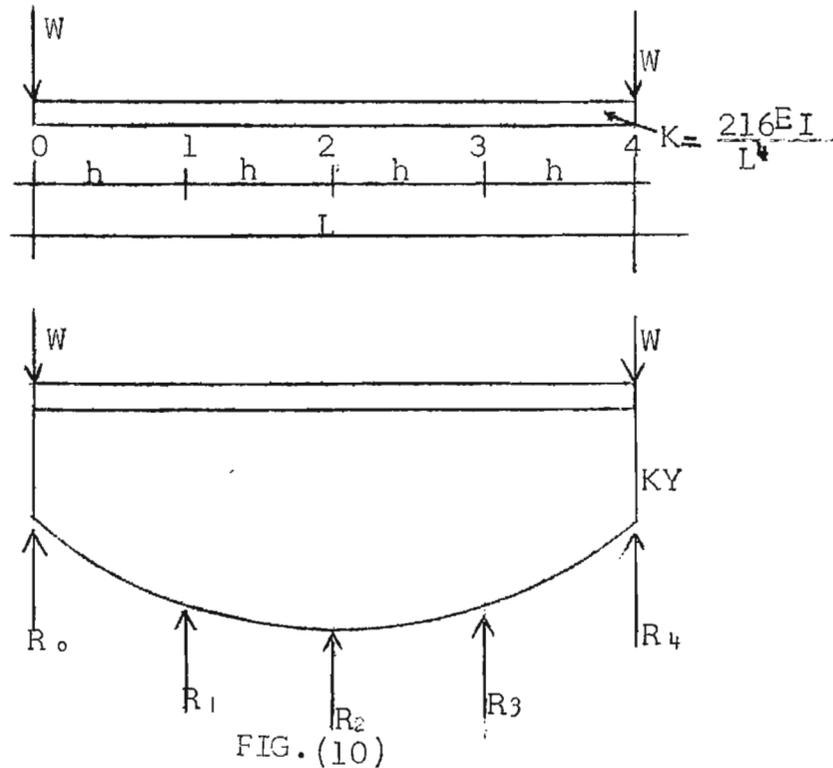


FIG. (9)

Ejemplo 3: Una viga sin peso descansa sobre un medio elástico B-L
 $\beta = L^4 \sqrt{k/EI} = 3.82$ y se encuentra sometido a cargas concentradas en los extremos. Dibujar diagramas de momento y cortante. $EI =$ constante: Usar la distribución parabólica para encontrar las reacciones R.



$$\begin{aligned} R_0 &= -kh/24 (7Y_0 + 6Y_1 - Y_2) \\ R_1 &= -kh/12 (Y_0 + 10Y_1 + Y_2) \\ R_2 &= -kh/12 (Y_1 + 10Y_2 + Y_3) \end{aligned}$$

$$\Delta^2 Y = h^2 M/EI$$

$$\text{Punto 1: } Y_0 - 2Y_1 + Y_2 = h^3 (R_0 - w) / EI \quad (a)$$

$$\text{Punto 2: } Y_1 - 2Y_2 + Y_3 = h^3 (2R_0 - 2w + R_1) / EI \quad (b)$$

$$\text{Punto 3: } Y_2 - 2Y_3 + Y_4 = h^3 (R_4 - w) / EI \quad (c)$$

$$\sum F_v = 0$$

$$R_0 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 2w$$

$$R_0 = R_4$$

$$R_1 = R_3$$

$$2R_0 + 2R_1 + R_2 = 2w \quad (d)$$

Sustituyendo los valores de R por sus equivalentes en función de las deflexiones, $Y \frac{kh^4}{EI} = \left(\frac{\beta}{4}\right)^4 = 0.83$ obtenemos:

$$1.245 Y_0 - 1.81Y_1 + 0.965Y_2 = - wh^3/EI$$

$$0.560Y_0 + 3.12Y_1 - 2.00Y_2 = - 2wh^3/EI$$

$$0.630Y_0 + 1.96Y_1 + 0.77Y_2 = - 2wh^3/EI$$

Resolviendo obtenemos:

$$Y_0 = - 1.4 wh^3/EI$$

$$Y_1 = - 0.508wh^3/EI$$

$$Y_2 = - 0.182wh^3/EI$$

$$Y_3 = - 0.508wh^3/EI$$

$$Y_4 = - 1.4 wh^3/EI$$

$$\text{Momentos: } M_n = \frac{EI}{h^2} [Y(n-1) - 2Y_n + Y(n+1)]$$

$$M_0 = 0$$

$$M_1 = \frac{EI}{h^2} (Y_0 - 2Y_1 + Y_2) = wh(-1.400 + 1.016 - 0.182) = - 0.566 wh$$

$$M_2 = \frac{EI}{h^2} (Y_1 - 2Y_2 + Y_3) = wh(-0.508 + 0.364 - 0.508) = - 0.652 wh$$

$$M_3 = \dots \dots \dots = - 0.566 wh$$

$$M_4 = 0$$

Cortantes:

$$R_0 = - \frac{kh}{24} (7Y_0 + 6Y_1 - Y_2) = - \left(\frac{kh}{EI}\right) \frac{w}{24} (-9.80 - 3.048 + 0.182) = 0.445 w$$

$$R_1 = - \frac{kh}{12} (Y_0 + 10Y_1 + Y_2) = - \left(\frac{kh}{EI}\right) \frac{w}{12} (-1.40 - 5.08 - 0.182) = 0.468 w$$

$$R_2 = - \frac{kh}{12} (Y_1 + 10Y_2 + Y_3) = - \left(\frac{kh}{EI}\right) \frac{w}{12} (-0.508 - 1.820 - 0.508) = 0.198 w$$

$$R_3 = \dots \dots \dots = 0.468 w$$

$$R_4 = \dots \dots \dots = 0.445 w$$

IV-DEFLEXION DE MEMBRANA:

La aplicación de las diferencias finitas resulta muy ventajoso en aquellos problemas en que su solución es la resolución de ecuaciones diferenciales parciales; tales como lo son las deflexiones de membranas, deflexiones de placas, etc.

Trataremos ahora el problema de la deflexión de una membrana homogénea soportada en sus bordes, sujeto a una tensión uniforme en sus bordes y a una presión lateral uniforme.

Sea S la tensión uniforme por unidad de longitud y W la presión por unidad de área.

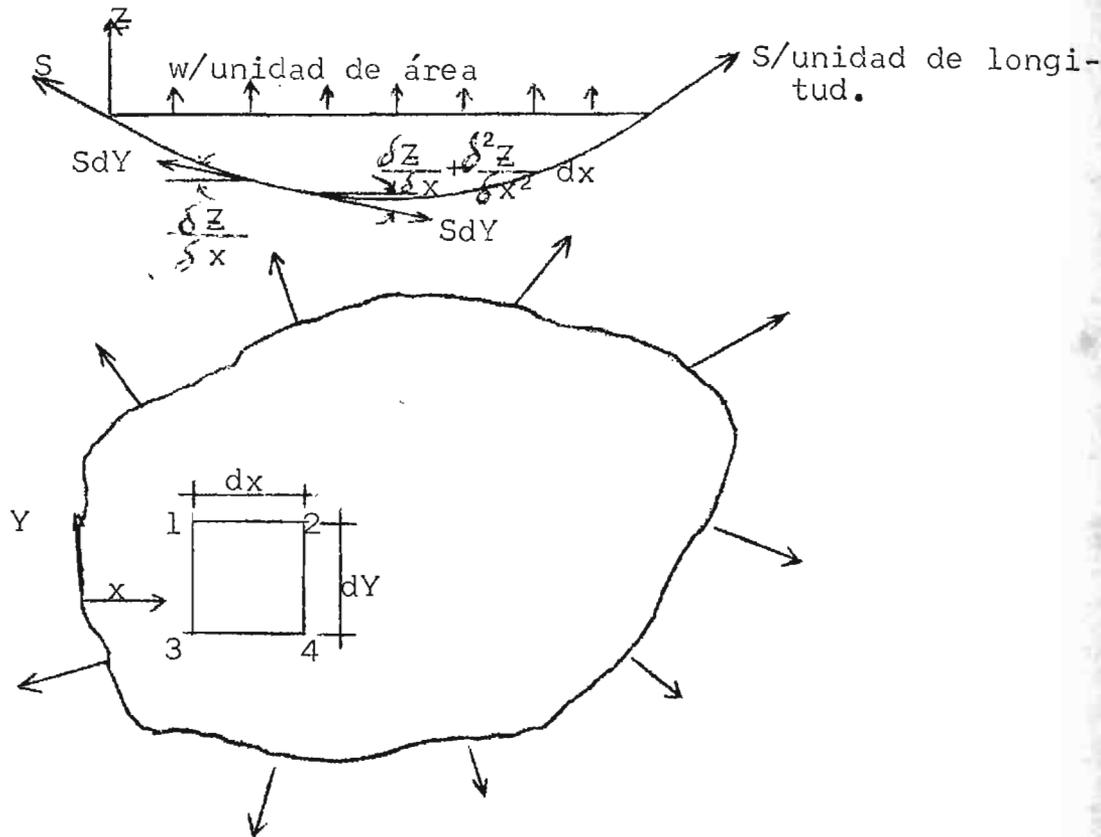


FIG.(11)

Consideremos el equilibrio del elemento diferencial 1 2 3 4. La resultante en dirección Z de la fuerza de tensión actuando en los lados 13 y 24 será:

$$Sdy \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \right) - Sdy \frac{\partial z}{\partial x} = S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy$$

En forma similar, la resultante en dirección Z de la fuerza de tensión actuando en los lados 12 y 34 será:

$$Sdx \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} dy \right) - Sdx \frac{\partial Z}{\partial y} = S \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} dx dy$$

Puesto que el elemento diferencial 1 2 3 4 debe encontrarse en equilibrio, tendremos:

$$S \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} dx dy + S \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} dx dy + w dx dy = 0$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = - \frac{w}{s} \quad (1)$$

La ecuación diferencial en términos de diferencias finitas será:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{Z(n+1, m) - 2Z(n, m) + Z(n-1, m)}{h^2} \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{Z(n, m+1) - 2Z(n, m) + Z(n, m-1)}{h^2}$$

$$Z(n+1, m) + Z(n-1, m) + Z(n, m+1) + Z(n, m-1) - 4Z(n, m) = -h^2 \frac{w}{s} \quad (2)$$

EJEMPLO: Una membrana de dimensiones $a \times a$, se encuentra sometida a una fuerza de tensión S /unidad de longitud en sus bordes y , una carga uniforme W /unidad de área. Encontrar deflexión que tendrá la membrana..

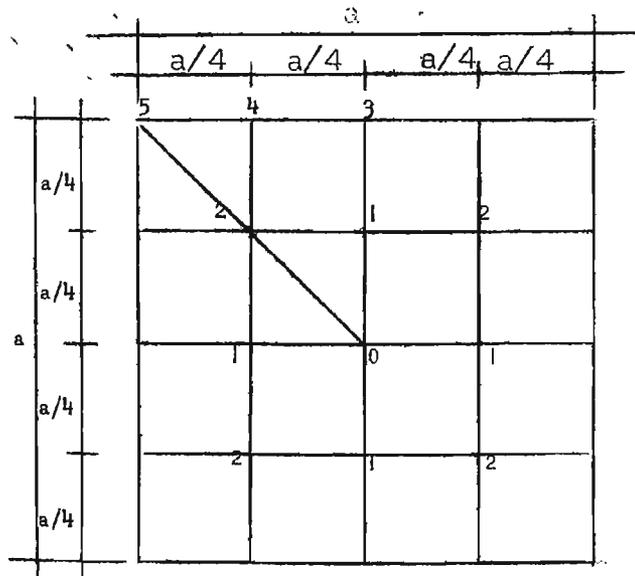


FIG. (12)

Tomando incrementos en X y Y iguales a $a/4$ y debido a la simetría existente, solamente es suficiente considerar los 6 puntos pivotes mostrados.

Condiciones $Z_5 = Z_4 = Z_3 = 0$

Aplicando la ecuación (2) tendremos:

Punto 0: $-4z_0 + 4z_1 = -h^2 w/s$ (a)

Punto 1: $z_0 - 4z_1 + 2z_2 = -h^2 w/s$ (b)

Punto 2: $2z_1 - 4z_2 = -h^2 w/s$ (c)

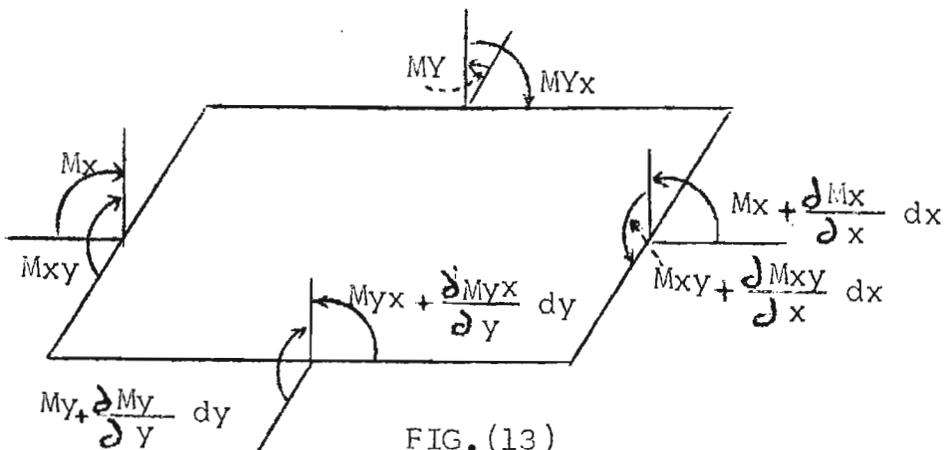
Resolviendo obtenemos:

$$z_0 = 1.125 \frac{h^2 w}{s} = 0.0704 \frac{wa^2}{s}$$

$$z_1 = 0.875 \frac{h^2 w}{s} = 0.0546 \frac{wa^2}{s}$$

$$z_2 = 0.6875 \frac{h^2 w}{s} = 0.0430 \frac{wa^2}{s}$$

4-1 MOMENTOS FLEXIONANTES Y DEFLEXIONES DE PLACAS BAJO CARGAS LATERALES:



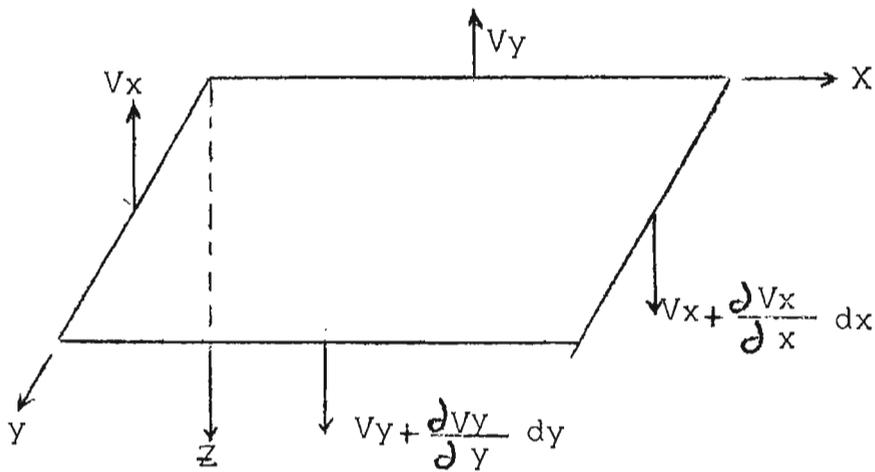


FIG. (13)

En las figuras se indican el sentido positivo de los momentos fleccionantes M_x , M_y ; de los momentos torsionantes M_{xy} , M_{yx} ; de los cortantes V_x , V_y .

Considerando las ecuaciones de equilibrio, las siguientes expresiones son obtenidas:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad 3$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \quad 4$$

$$M_{xy} = -M_{yz} = D (1 - \mu) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad 5$$

$$V_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad 6$$

$$V_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad 7$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{w}{D} \quad 8$$

En donde: $D = E t^3 / 12 (1 - \mu^2)$ rigidez placa

E = Módulo de elasticidad

t = espesor placa

μ = razón de Poisson

La ecuación (8) puede ser ordenada de la manera siguiente:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{W}{D} \quad (8a)$$

Sumando M_x más M_y obtenemos:

$$M_x + M_y = -D(1 + \mu) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \quad (3a)$$

Introduciendo un nuevo elemento M :

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu} = -D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \quad (9)$$

La ecuación (8a) y (3a) pueden entonces ser representadas de la manera siguiente:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -w \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} \quad (11)$$

Se observa que las expresiones (10) y (11) son semejantes a la obtenida para la membrana.

Ejemplo:

Consideremos una placa rectangular apoyada en sus cuatro bordes, y bajo una carga lateral uniforme W /unidad de área. Se supondrá que la placa tiene una de sus dimensiones igual a infinito (∞).

Es decir que la placa funcionará como simplemente apoyada.

Las ecuaciones (10) y (11) quedarán entonces en la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -w \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{M}{D}$$

En términos de diferencias finitas tendremos:

$$\Delta^2 M_i = -h^2 w \quad ; \quad \Delta^2 z = -h^2 \frac{M}{D}$$

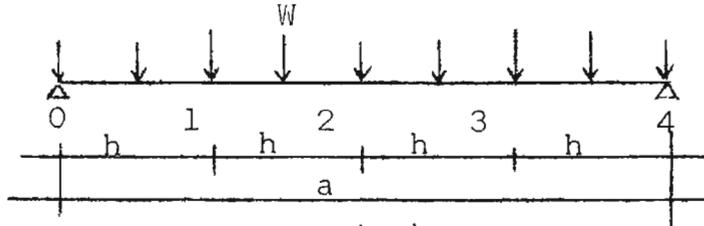


FIG. (14)

Momentos: $M_0 = M_4 = 0$ $M_1 = M_3$

$$0 - 2M_1 + M_2 = -h^2 W \quad (a)$$

$$M_1 - 2M_2 + M_3 = -h^2 W \quad (b)$$

$$M_2 - 2M_3 + 0 = -h^2 W \quad (c)$$

Resolviendo: $M_1 = 1.5 h^2 w = 3 wa^2/32$

$$M_2 = 2.0 h^2 w = wa^2/8$$

$$M_3 = 1.5 h^2 w = 3 wa^2/32$$

Valores que son iguales a los obtenidos, usando la expresión conocida para momento:

$$M = \frac{wa}{2} x - \frac{wx^2}{2}$$

Deflexiones: $Y_0 = Y_4 = 0$; $Y_1 = Y_3$

punto 1: $0 - 2z_1 + z_2 = -h^2(1.5 wh^2/D)$ (d)

punto 2: $z_1 - 2z_2 + z_3 = -h^2(2.0 wh^2/D)$ (e)

punto 3: $z_2 - 2z_3 + 0 = -h^2(1.5 wh^2/D)$ (f)

Resolviendo:

$$z_1 = 2.5 wh^4/D = 0.00977wa^4/D$$

$$z_2 = 3.5 wh^4/D = 0.01367wa^4/D$$

$$z_3 = 2.5 wh^4/D = 0.00977wa^4/D$$

Los valores exactos son obtenidos usando la expresión:

$$Z = \frac{wx}{24D} (a^3 - 2ax^2 + x^3)$$

$$Z_1 = 0.00930wa^4/D$$

$$Z_2 = 0.01304wa^4/D$$

$$Z_3 = 0.00930wa^4/D$$

obteniéndose errores en las deflexiones alrededor del 4.5%

Ejemplo: 2

Consideremos ahora, una placa de dimensiones $a \times a$, apoyada en sus cuatro bordes y bajo una carga lateral uniforme $w/\text{unidad de área}$.

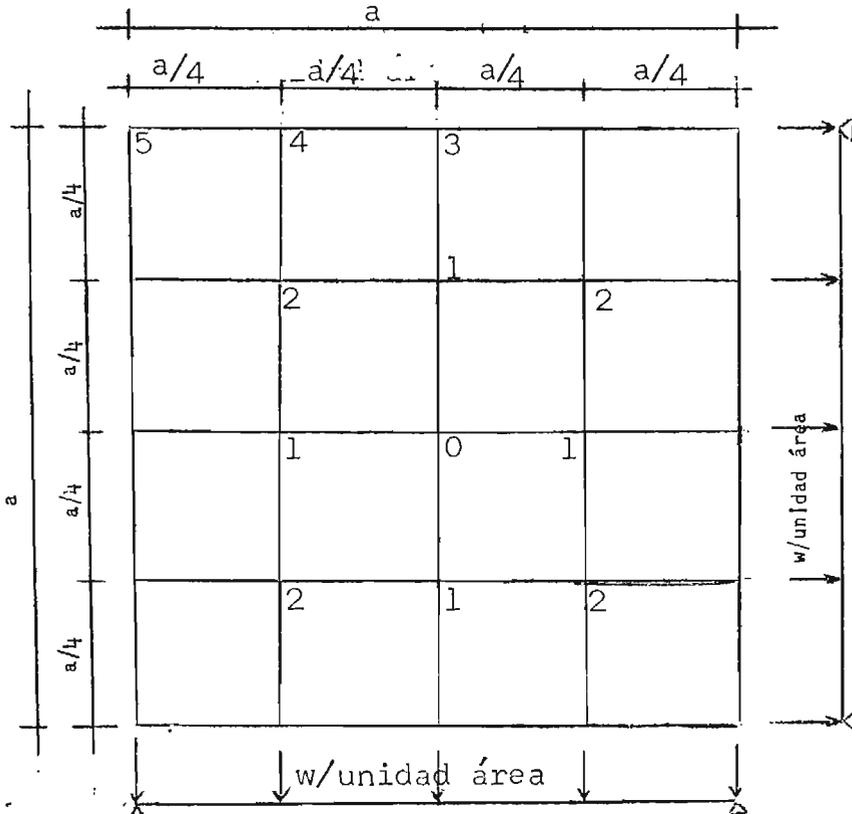


FIG. (15)

En este caso, tanto los momentos como deflexiones son funciones de las variables X, Y. Tomaremos incrementos iguales a un cuarto de la luz ($a/4$).

Condiciones límites: Momentos y deflexiones en los bordes son iguales a cero.

Momentos:
$$\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} = -w$$

En términos de Diferencias Finitas:

$$M(n+1, m) + M(n-1, m) + M(n, m+1) + M(n, m-1) - 4M(n, m) = -h^2 w \quad (13)$$

Aplicando la ecuación (13) obtendremos:

punto 0: $-4M_0 + 4M_1 = -h^2 w$

punto 1: $M_0 - 4M_1 + 2M_2 = -h^2 w$

punto 2: $2M_1 - 4M_2 = -h^2 w$

Resolviendo obtenemos:

$$M_0 = 1.1250 wh^2 = 0.0704 wa^2$$

$$M_1 = 0.8750 wh^2 = 0.0546 wa^2$$

$$M_2 = 0.6875 wh^2 = 0.0430 wa^2$$

puesto que $M = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu}$

Suponiendo un valor de $\mu = 0.3$ obtendremos, a continuación, los momentos en los puntos 0, 1, 2 en las direcciones X, Y.

Por simetría: $M_x = M_y$

ASI:

$$M_{0x} = \frac{M_0 (1 + \mu)}{2} = 0.0704 wa^2 \left(\frac{1.3}{2}\right) = 0.0457 wa^2$$

$$M_{1x} = \frac{M_1 (1 + \mu)}{2} = 0.0546 wa^2 \left(\frac{1.3}{2}\right) = 0.0354 wa^2$$

$$M_{2x} = \frac{M_2 (1 + \mu)}{2} = 0.430 wa^2 \left(\frac{1.3}{2}\right) = 0.0279 wa^2$$

Valor exacto de $M_{0x} = 0.0479 wa^2$; de donde el error es 4.50 %
Deflexiones:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = - \frac{M_i}{D} \quad 11$$

La ecuación (11) en términos de Diferencias Finitas:

$$Z(n+1, m) + Z(n-1, m) + Z(n, m+1) + Z(n, m-1) - 4Z(n, m) = -M_n h^2 / D \quad 14$$

Sustituyendo los valores de los momentos encontrados en la ecuación (14), obtendremos:

$$\text{punto 0: } -4Z_0 + 4Z_1 = -h^2 (1.1250 wh^2) / D$$

$$\text{punto 1: } Z_0 - 4Z_1 + 2Z_2 = -h^2 (0.8750 wh^2) / D$$

$$\text{punto 2: } 2Z_1 - 4Z_2 = -h^2 (0.6875 wh^2) / D$$

Resolviendo obtenemos:

$$Z_0 = 1.03 wh^4 / D = 0.00403 wa^4 / D$$

$$Z_1 = 0.75 wh^4 / D = 0.00293 wa^4 / D$$

$$Z_2 = 0.547 wh^4 / D = 0.00213 wa^4 / D$$

Valor exacto de $Z_0 = 0.00406 wa^4 / D$

Error = 0.70 %

Si quisiéramos obtener momentos Torsionantes, a partir de la ecuación (5)

$$M_{xy} = -M_{yx} = D (1-\mu) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

Expresada en términos de Diferencias Finitas:

$$M_{xy} = D(1-\mu) \frac{1}{4h^2} \left[Z(n+1, m+1) - Z(n+1, m-1) - Z(n-1, m+1) + Z(n-1, m-1) \right]$$

Así, aplicada para el punto 0 obtenemos:

$$M_{0xy} = D(1-0.3) \frac{1}{4h^2} \left[0.547 - 0.547 - 0.547 + 0.547 \right] \frac{wh^4}{D}$$

$$M_{0,xy} = 0$$

Ejemplo 3:

Encontrar momentos Flexionantes, deflexiones, momentos Torsionantes para la placa mostrada en la figura, bajo la condición de carga mostrada.

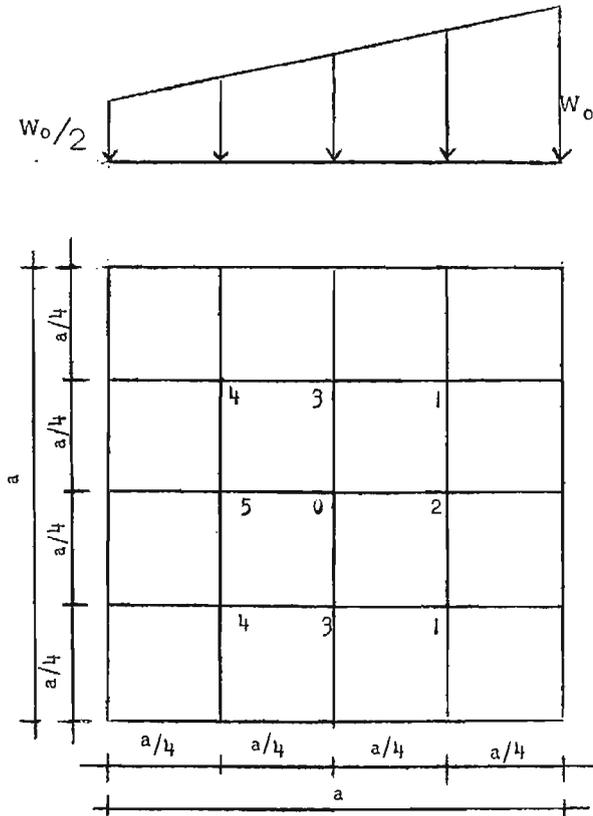


FIG. (16)

$$M(n+1, m) + M(n-1, m) + M(n, m+1) + M(n, m-1) - 4M_{n, m} = \tau h^2 w_n \quad (13)$$

Aplicando la ecuación (13) obtendremos:

punto 0:	$-4M_0$	$+ M_2$	$+ 2M_3$	$+ M_5$	$= -0.75 w_0 h^2$	(a)	
punto 1:	$-4M_1$	$+ M_2$	$+ M_3$		$= -0.875 w_0 h^2$	(b)	
punto 2:	M_0	$+ 2M_1$	$- 4M_2$		$= -0.875 w_0 h^2$	(c)	
punto 3:	M_0	$+ M_1$	$- 4M_3$	$+ M_4$	$= -0.750 w_0 h^2$	(d)	
punto 4:			M_3	$- 4M_4$	$+ M_5$	$= -0.625 w_0 h^2$	(e)
punto 5:	M_0		$+ 2M_4$	$- 4M_5$	$= -0.625 w_0 h^2$	(f)	

Resolviendo obtenemos:

$$M_0 = 0.840 \quad w_0 h^2$$

$$M_1 = 0.557 \quad w_0 h^2$$

$$M_2 = 0.705 \quad w_0 h^2$$

$$M_3 = 0.657 \quad w_0 h^2$$

$$M_4 = 0.485 \quad w_0 h^2$$

$$M_5 = 0.608 \quad w_0 h^2$$

Deflexiones:

$$Z(n+1, m) + Z(n-1, m) + Z(n, m+1) + Z(n, m-1) - 4Z(n, m) = -h^2 M_n/D \quad (14)$$

$$\text{punto 0: } -4Z_0 + Z_2 + 2Z_3 + Z_5 = -0.840 w_0 h^4/D$$

$$\text{punto 1: } -4Z_1 + Z_2 + Z_3 = -0.557 w_0 h^4/D$$

$$\text{punto 2: } Z_0 + 2Z_1 - 4Z_2 = -0.705 w_0 h^4/D$$

$$\text{punto 3: } Z_0 + Z_1 - 4Z_3 + Z_4 = -0.657 w_0 h^4/D$$

$$\text{punto 4: } Z_3 - 4Z_4 + Z_5 = -0.485 w_0 h^4/D$$

$$\text{punto 5: } Z_0 + 2Z_4 - 4Z_5 = -0.608 w_0 h^4/D$$

Resolviendo obtenemos:

$$Z_0 = 0.765 w_0 h^4/D$$

$$Z_1 = 0.422 w_0 h^4/D$$

$$Z_2 = 0.576 w_0 h^4/D$$

$$Z_3 = 0.560 w_0 h^4/D$$

$$Z_4 = 0.396 w_0 h^4/D$$

$$Z_5 = 0.540 w_0 h^4/D$$

A partir de las deflexiones encontradas, procederemos a encontrar los momentos flexionantes y torsionantes.

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$M_x = -D \left[\frac{Z(n+1, m) - 2Z(n, m) + Z(n-1, m)}{h^2} + \frac{Z(n, m+1) - 2Z(n, m) + Z(n, m-1)}{h^2} \right]$$

Suponiendo un valor de $\mu = 0.30$

$$M_{0x} = - \frac{D}{h^2} \frac{w_0 h^4}{D} [0.576 - 1.530 + 0.540 + 0.30 (0.56 - 1.530 + 0.56)]$$

$$M_{0x} = - 0.539 w_0 h^2$$

$$M_{1x} = - w_0 h^2 (-0.284 - 0.30 \times 0.268) = 0.364 w_0 h^2$$

$$M_{2x} = - w_0 h^2 (-0.387 - 0.3 \times 0.308) = 0.480 w_0 h^2$$

$$M_{3x} = - w_0 h^2 (-0.302 - 0.3 \times 0.355) = 0.408 w_0 h^2$$

$$M_{4x} = - w_0 h^2 (-0.232 - 0.3 \times 0.252) = 0.308 w_0 h^2$$

$$M_{5x} = - w_0 h^2 (-0.315 - 0.3 \times 0.288) = 0.401 w_0 h^2$$

$$M_y = - D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \textcircled{4}$$

$$M_y = - D \left[\frac{z_{(n, m+1)} - 2z_{(n, m)} + z_{(n, m-1)}}{h^2} + \mu \frac{z_{(n+1, m)} - 2z_{(n, m)} + z_{(n-1, m)}}{h^2} \right]$$

$$M_{0y} = - w_0 h^2 (-0.410 - 0.3 \times 0.414) = 0.534 w_0 h^2$$

$$M_{1y} = - w_0 h^2 (-0.268 - 0.3 \times 0.284) = 0.353 w_0 h^2$$

$$M_{2y} = - w_0 h^2 (-0.308 - 0.3 \times 0.387) = 0.424 w_0 h^2$$

$$M_{3y} = - w_0 h^2 (-0.355 - 0.3 \times 0.302) = 0.446 w_0 h^2$$

$$M_{4y} = - w_0 h^2 (-0.252 - 0.3 \times 0.232) = 0.322 w_0 h^2$$

$$M_{5y} = - w_0 h^2 (-0.288 - 0.3 \times 0.315) = 0.383 w_0 h^2$$

Los momentos torsionantes a partir de la ecuación $\textcircled{5}$

$$M_{xy} = - M_{yx} = D (1 - \mu) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \textcircled{5}$$

$$M_{xy} = D (1 - \mu) \frac{1}{4h^2} [z_{(n+1, m+1)} - z_{(n+1, m-1)} - z_{(n-1, m+1)} + z_{(n-1, m-1)}]$$

$$M_{0xy} = D (1 - 0.3) \frac{1}{4h^2} \frac{w_0 h^4}{D} (0.422 - 0.422 - 0.396 + 0.396) = 0$$

$$M_{0xy} = 0$$

V- METODO DE RELAJACION:

Introducción:

El método de Relajación fue primeramente introducido por Richard V. Southwell, como una herramienta para resolver los esfuerzos a que se encontraban sometidos las barras en entramados articulados indeterminados y determinados.

Este método de Relajación es un procedimiento de aproximaciones sucesivas, en el que comenzamos suponiendo valores a las incógnitas y llevando el procedimiento de una manera sistemática, poco a poco llegamos a los valores reales de las incógnitas.

Hay que hacer notar, que para lograr una convergencia rápida, influyen principalmente:

- 1 - que al suponer los valores iniciales, éstos no estén tan alejados de los valores reales.
- 2 - la habilidad para llevar el procedimiento.

5-1 SOLUCION DE ECUACIONES LINEALES POR METODO DE LAS RELAJACIONES

Consideramos el conjunto de ecuaciones lineales (1-1)

$$A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + A_{13} X_3 - \dots + A_{1n} X_n + C_1 = 0$$

$$A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + A_{23} X_3 - \dots + A_{2n} X_n + C_2 = 0$$

$$A_{31} X_1 + A_{32} X_2 + A_{33} X_3 - \dots + A_{3n} X_n + C_3 = 0$$

. . .
 . . .

 . . .
 . . .

$$A_{n1} X_1 + A_{n2} X_2 + A_{n3} X_3 - \dots + A_{nn} X_n + C_n = 0$$

1 - Comencemos asumiendo valores a las incógnitas,

Así $X_1 = X_{11}$; $X_2 = X_{22}$, $X_3 = X_{33}$,, $X_n = X_{nn}$ -

Al sustituir estos valores en las ecuaciones, a menos que los valores asumidos sean los correctos, tendremos que la parte izquierda de las ecuaciones no serán iguales a cero; llamaremos a este valor, Residuo.

Tendremos:

$$\begin{array}{rcl}
 A_{11} X_{11} + A_{12} X_{22} + A_{13} X_{33} + \dots + A_{1n} X_{nn} + C_1 & = & R_1 \\
 A_{21} X_{11} + A_{22} X_{22} + A_{23} X_{33} + \dots + A_{2n} X_{nn} + C_2 & = & R_2 \\
 A_{31} X_{11} + A_{32} X_{22} + A_{33} X_{33} + \dots + A_{3n} X_{nn} + C_3 & = & R_3 \\
 A_{n1} X_{11} + A_{n2} X_{22} + A_{n3} X_{33} + \dots + A_{nn} X_{nn} + C_n & = & R_n
 \end{array}$$

Consideremos nuevamente el conjunto de ecuaciones (1 - 1)

Si ahora X_1 se altera en + 1, entonces R_1 se alterará en A_{11} ,

R_2 es alterado por A_{21} , R_3 por A_{31} ,, R_n por A_{n1}

En una manera similar podemos encontrar las influencias que tienen en los residuos, cuando los valores de X_2, X_3, \dots, X_n se alteran en + 1.

Llevando estos cambios que sufren los residuos debidos a los cambios en los valores de X a una forma tabular, con el objeto de poder visualizar en una forma más general el problema y decidir qué nuevos valores de X ir tomando, para ir logrando la convergencia. Llamaremos a esta tabla, tabla de operaciones.

TABLA DE RELAJACION: La manera de llevar la relajación se indica en la tabla de Relajación. En esta tabla, comenzaremos anotando los valores asumidos para las incógnitas con sus respectivos residuos. Luego vamos realizando sucesivos cambios en las incógnitas y encontrando nuevos residuos, hasta llevar estos residuos a valores próximos a cero. Al llegar a esta fase, tendremos que los valores reales de las incógnitas serán la suma de los valores asumidos, más los sucesivos cambios que hubiéramos efectuado en dichas incógnitas para llevar los residuos a cero.

Se comprenderá mejor la técnica de la relajación y el empleo de las tablas de Operaciones y Relajaciones con el siguiente ejemplo: Consideremos el conjunto de ecuaciones lineales siguiente:

$$10X_1 - 2X_2 - 2X_3 + 6 = 0$$

$$-X_1 + 10X_2 - 2X_3 + 7 = 0$$

$$-X_1 - X_2 + 10X_3 + 8 = 0$$

TABLA DE OPERACIONES

	ΔR_1	ΔR_2	ΔR_3
$\Delta X_1 = 1$	10	-1	-1
$\Delta X_2 = 1$	-2	10	-1
$\Delta X_3 = 1$	-2	-2	+10

TABLA DE RELAJACION

	X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	R_3
Valores Inc.	0	0	0	+6	+7	+8
	-0.6			0	7.6	8.6
			-0.86	1.72	9.32	0
		-0.9320		3.584	0	0.932
	-0.3584			0	0.3584	1.2904
			-0.12904	0.25808	0.61648	0
		-0.061645		0.38148	0	0.061665
	-0.03814			0	0.03814	0.09979
			-0.00998	0.01996	0.04812	0
Valores Finales	-0.99654	-0.99365	-0.99902	0.01996	0.04812	0

Así obtenemos los valores para las incógnitas de:

$$X_1 = - 0.99654$$

$$X_2 = - 0.99365$$

$$X_3 = - 0.99902$$

Observamos en este ejemplo, que mientras un residuo lo hacíamos cero, los otros dos residuos aumentaban de valor

Sin embargo, hay varias técnicas en el método de las Relajaciones que acortan las operaciones. Entre estas técnicas tenemos:

Sobre-Relajación: que consiste, que en vez de hacer el mayor residuo cero, lo sobrerelajamos, es decir, lo hacemos menor de cero (negativo), de tal manera que, cuando relajemos los otros residuos, este residuo se aproxima a cero.

Baja relajación: el que consiste que al reducir un residuo, los otros residuos son también reducidos.

Relajación en Bloque: En el ejemplo anterior si cambiamos simultáneamente $\Delta X_1 = +1$, $\Delta X_2 = +1$, $\Delta X_3 = +1$, obtenemos que los cambios en los residuos son: $\Delta R_1 = +6$, $\Delta R_2 = +7$, $\Delta R_3 = +8$.

Esta operación de realizar cambios en más de una incógnita por +1 es conocida como la técnica de Relajación en Bloque.

RELAJACION EN GRUPO: es la técnica de realizar cambios en más de una incógnita por diferentes cantidades. Así, si en el ejemplo anterior realizamos los siguientes cambios:

$\Delta X_1 = +1$, $\Delta X_2 = +2$, obtenemos los siguientes cambios en los residuos: $\Delta R_1 = +6$, $\Delta R_2 = +19$, $\Delta R_3 = -3$, hemos hecho una relajación en grupo.

En base a todas estas técnicas explicadas, procederemos a resolver el conjunto de ecuaciones lineales del ejemplo anterior.

TABLA DE OPERACIONES

	R_1	R_2	R_3
$\Delta X_1 = 1$	10	-1	-1
$\Delta X_2 = 1$	-2	10	-1
$\Delta X_3 = 1$	-2	-2	10
$\Delta X_1 = \Delta X_2 = \Delta X_3 = 1$	6	7	8
$\Delta X_1 = 1, \Delta X_2 = +2$	6	19	-3

TABLA DE RELAJACION

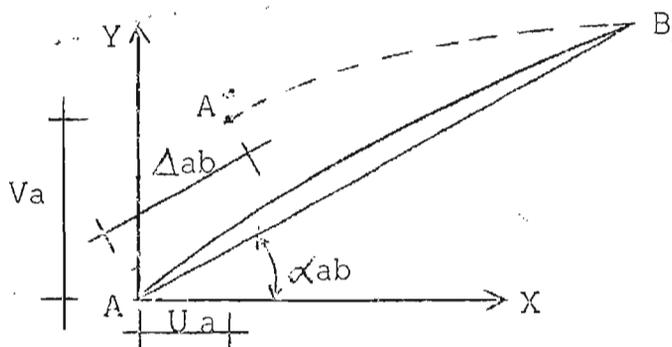
	X_1	X_2	X_3	ΔR_1	ΔR_2	ΔR_3
Valores Inic.	0	0	0	+6	+7	+8
$X_1 = X_2 = X_3 = -1$	-1	-1	-1	0	0	0
Final	-1	-1	-1	0	0	0

Obtenemos: $X_1 = -1, X_2 = -1, X_3 = -1$

5-2 METODO DE RELAJACIONES PARA LA SOLUCION DE ENTRAMADOS ARTICULADOS

Originalmente, el método de las Relajaciones fue aplicado para la solución de entramados articulados; consideremos el miembro AB de un entramado articulado y mantengamos fijo el nudo B mientras desplazamientos "U" y "V" en las direcciones X y Y respectivamente son impuestas al nudo A.

Encontraremos que fuerzas, debido a estos desplazamientos, se originan en los miembros que llegan a los nudos A y B.



La fuerza ejercida sobre el miembro AB para producir dichos desplazamientos será entonces:

$$T_{ab} = K_{ab} \Delta_{ab} \quad 2-2$$

En donde T_{ab} = fuerza ejercida sobre miembro AB.

K_{ab} es la rigidez del miembro, que para miembros prismático y recto es:

$$K_{ab} = \frac{E A_{ab}}{L_{ab}}$$

E = módulo de elasticidad del material

A_{ab} = Sección del miembro AB

L_{ab} = Longitud del miembro AB

y Δ_{ab} es el desplazamiento relativo entre los nudos A y B que en nuestro caso es:

$$\Delta_{ab} = -U_a \cos \alpha_{ab} - V_a \sin \alpha_{ab}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 2-2 obtenemos:

$$T_{ab} = -K_{ab} (U_a \cos \alpha_{ab} + V_a \sin \alpha_{ab})$$

Las componentes de T_{ab} en las direcciones X y Y son:

$$X_{ab} = -T_{ab} \cos \alpha_{ab} = K_{ab} (U_a \cos \alpha_{ab} + V_a \sin \alpha_{ab}) \cos \alpha_{ab}$$

$$Y_{ab} = -T_{ab} \sin \alpha_{ab} = K_{ab} (U_a \cos \alpha_{ab} + V_a \sin \alpha_{ab}) \sin \alpha_{ab}$$

De manera similar, son encortradas las fuerzas que se originan en los miembros que llegan a los nudos A y B cuando el nudo A es mantenido

fijo, mientras desplazamientos "U" y "V" en las direcciones X y Y respectivamente son impuestas en el nudo B.

$$T_{ba} = -K_{ab} (U_b \cos \alpha_{ba} + V_b \operatorname{Sen} \alpha_{ba})$$

los componentes en las direcciones X y Y.

$$X_{ba} = -T_{ba} \cos \alpha_{ba} = K_{ab} (U_b \cos \alpha_{ba} + V_b \operatorname{Sen} \alpha_{ba}) \cos \alpha_{ba}$$

$$Y_{ba} = -T_{ba} \operatorname{Sen} \alpha_{ba} = K_{ab} (U_b \cos \alpha_{ba} + V_b \operatorname{Sen} \alpha_{ba}) \operatorname{Sen} \alpha_{ba}$$

$$K_{ab} = K_{ba}$$

$$\alpha_{ba} = 180 + \alpha_{ab}$$

Las fuerzas en A son iguales y de signo opuesto

Consideremos que fuerzas externas F_x y F_y actúan en el nudo A.

Puesto que el nudo debe encontrarse en equilibrio, tomando suma de fuerzas en las direcciones X y Y, dichas sumas deben ser iguales a cero.

$$\sum F_x = 0$$

$$U_a \sum K_{ab} \cos^2 \alpha_{ab} + V_a \sum K_{ab} \operatorname{Sen} \alpha_{ab} \cos \alpha_{ab}$$

$$- \sum U_b K_{ab} \cos^2 \alpha_{ab} - \sum V_b K_{ab} \operatorname{Sen} \alpha_{ab} \cos \alpha_{ab} - F_{ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$U_a \sum K_{ab} \operatorname{Sen} \alpha_{ab} \cos \alpha_{ab} + V_a \sum K_{ab} \operatorname{Sen}^2 \alpha_{ab} - F_{ay} = 0$$

$$- \sum U_b K_{ab} \operatorname{Sen} \alpha_{ab} \cos \alpha_{ab} - \sum V_b K_{ab} \operatorname{Sen}^2 \alpha_{ab}.$$

Empleando el método de las Relaxaciones para resolver estas ecuaciones

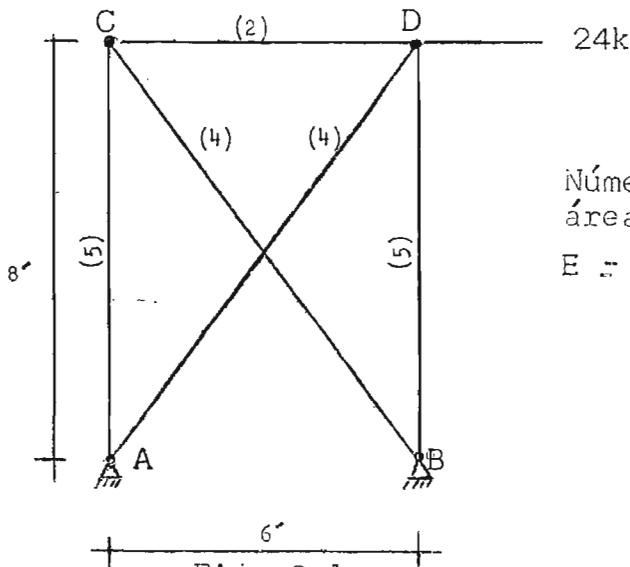
TABLA DE OPERACIONES PARA NUDO A

	ΔR_{ax}	ΔR_{ay}
$\Delta U_a = 1$	$\sum K_{ab} \cos^2 \alpha_{ab}$	$\sum K_{ab} \operatorname{Sen} \alpha_{ab} \cos \alpha_{ab}$
$\Delta V_a = 1$	$\sum K_{ab} \operatorname{Sen} \alpha_{ab} \cos \alpha_{ab}$	$\sum K_{ab} \operatorname{Sen}^2 \alpha_{ab}$
$\Delta U_b = 1$	$- K_{ab} \cos^2 \alpha_{ab}$	$- K_{ab} \operatorname{Sen} \alpha_{ab} \cos \alpha_{ab}$
$\Delta V_b = 1$	$- K_{ab} \operatorname{Sen} \alpha_{ab} \cos \alpha_{ab}$	$- K_{ab} \operatorname{Sen}^2 \alpha_{ab}$

Una vez habiendo encontrados los desplazamientos, la fuerza en el miembro AB será

$$T_{ab} = K_{ab} (U_b - U_a) \cos \alpha_{ab} + (V_b - V_a) \sin \alpha_{ab}.$$

Ejemplo: encontrar los esfuerzos a que se encuentra sometido las barras del entramado articulado ACDB, debido a la fuerza de 24k aplicada en el nudo D



Números entre paréntesis son áreas en in^2

$$E = 30.000 \text{ K/in}^2$$

Fig. 3-1

Rigideces: $k_{ac} = \frac{AE}{L} = \frac{5E}{8} = 0.625 E$

$$k_{ad} = \frac{AE}{L} = \frac{4E}{10} = 0.400E$$

$$k_{cd} = \frac{AE}{L} = \frac{2E}{6} = 0.333 E$$

$$k_{bc} = \frac{AE}{L} = \frac{4E}{10} = 0.400 E$$

$$k_{bd} = \frac{AE}{L} = \frac{5E}{8} = 0.625 E$$

Miembro	$\text{Cos}^2 \alpha$	$\text{Sen}^2 \alpha$	$\text{Sen} \alpha \text{Cos} \alpha$
ac	0	1	0
ad	0.36	0.64	0.48
cd	1	0	0
bc	0.36	0.64	-0.48
bd	0	1	0

TABLA DE OPERACIONES

	Rcx	Rcy	Rdx	Rdy
$\Delta U_c = 1$	0.4773	-0.192	-0.3333	0
$\Delta V_c = 1$	-0.1920	0.881	0	0
$\Delta U_d = 1$	-0.3333	0	0.4773	0.192
$\Delta V_d = 1$	0	0	0.1920	0.881
$U_c = V_c = U_d = V_d = 1$	-0.048	0.689	0.3360	1.073

TABLA DE RELAJACIONES

Uc	Vc	Ud	Vd	Rcx	Rcy	Rdx	Rdy
Inicial 0	0	0	0	0	0	-24.00	0
		50.3		-16.70	0	0	9.65
41.9			-14.70	-16.70	0	-2.83	-3.35
	9.15			3.30	-8.05	-16.77	-3.35
		35.2		+1.55	0	-16.77	-3.35
				-10.15	0	0	3.40
27.3			-4.54	-10.15	0	-0.87	-0.60
	5.95			2.85	-5.23	-9.92	-0.60
		20.8		1.71	0	-9.92	-0.60
				-5.21	0	0	3.40
10.9			-3.86	-5.21	0	-0.74	0
	2.37			0	-2.09	-4.37	0
		9.15		-0.45	0	-4.37	0
				-3.49	0	0	1.75
7.32			-1.99	-3.49	0	-0.38	0
	2.04			0	-1.40	-2.81	0
		5.90		-0.39	0.40	-2.81	0
				-2.35	0.40	0	1.13
			-1.28	-2.35	0.40	-0.24	0
4.92				0	-0.54	-1.88	0
	0.61			-0.12	0	-1.88	0
		3.94		-1.43	0	0	0.75
				-1.43	0	0	0
2.99			-0.85	-1.43	0	-0.16	0
	0.64			0	-0.57	-1.16	0
				-0.12	0	-1.16	0
		2.43		-0.93	0	0	0
FINAL 95.33	20.76	127.72	-27.22				0.46

ESFUERZOS:

Kab (Ub-Va) Cos ab	Ted	Tca	Tcb	Tad	Tdb
Kab (Vb-Va) Sen ab	0	13.00	+6.63	-8.70	-17.10
	+10.45	+13.00	-16.17	+21.90	-17.10

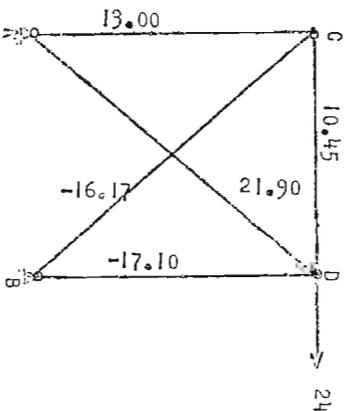


FIG. (3-2)

5-3 DISTRIBUCION DE MOMENTOS POR METODO DE RELAJACIONES

Consideraremos primeramente el caso en el que el marco rígido no sufre desplazamientos laterales.

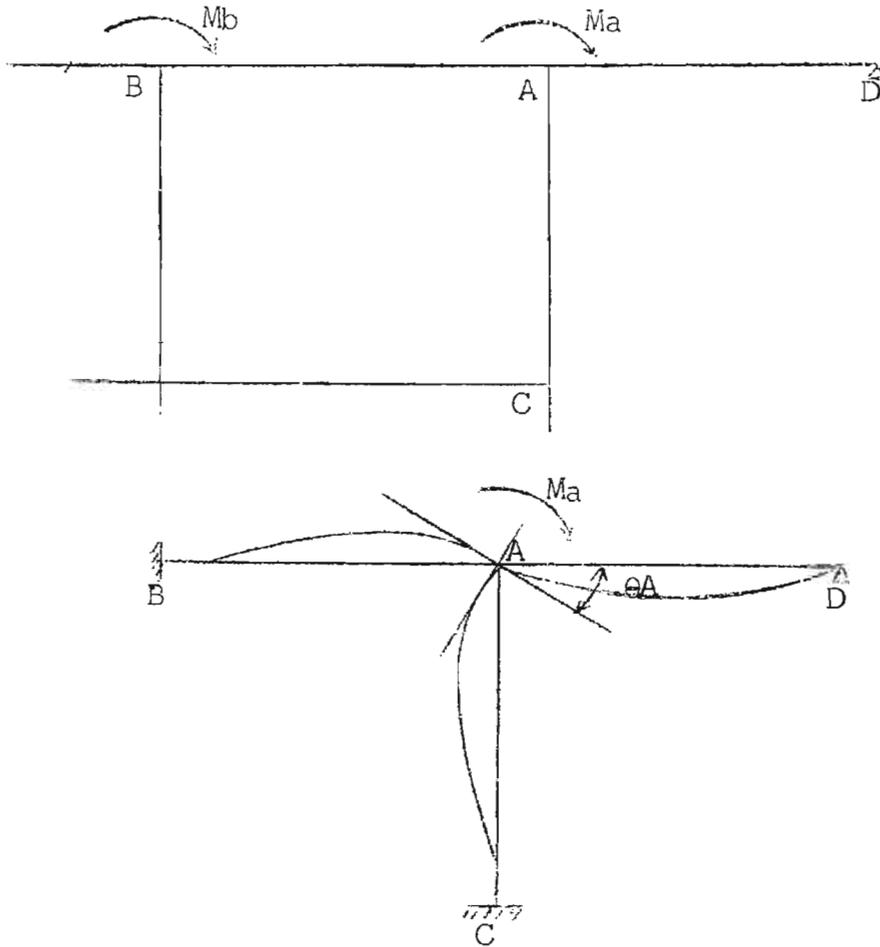


FIG.3-3

Sea el marco rígido mostrado en la Fig. (3-3) capaz de no sufrir desplazamientos laterales, sujeto a cualquier condición de carga y a momentos externos en los nudos.

Empezaremos el procedimiento de relajación asumiendo que todos los nudos son fijos; bajo esta condición encontraremos los momentos de empotramiento para las condiciones de carga, existente.

Después de considerar los nudos fijos, todos los nudos son relaja-

dos de manera sistemática hasta conseguir el equilibrio del marco. Para comprender en una forma más clara la técnica de la relajación es necesario recordar los conceptos de rigidez rotacional y factores de acarreo. Así, analicemos el nudo A, nudo en el que concurren los miembros AB, AC y AD.

Tenemos que para el miembro AB, de sección constante y longitud L_{ab} , la rigidez rotacional tiene como valor:

$$K_{ab} = 4 \frac{E I_{ab}}{L_{ab}}$$

y el factor de acarreo: $C_{ab} = C_{ba} = \frac{1}{2}$

Para el miembro AD de Sección constante y longitud L_{ad} , que se encuentra articulado en D, la rigidez rotacional (Rigidez modificada) tiene un valor de las tres cuartas partes de la rigidez rotacional si el extremo D estuviera empotrado:

$$K_{ad} = \frac{3}{4} \cdot 4 \frac{E I_{ad}}{L_{ad}} = \frac{3 E I_{ad}}{L_{ad}}$$

y el factor de acarreo $C_{ad} = 0$

Para miembros no prismáticos, tanto la rigidez rotacional como factor de acarreo pueden encontrarse empleando ya sea el método de la Columna Análoga o Métodos numéricos como lo son el de las Diferencias Finitas o métodos numéricos de N.M. Newmark.

Una vez que hayamos conseguido el equilibrio del marco

el nudo A habrá girado un ángulo θ_A ; el nudo B, un ángulo θ_B , etc. y en esta fase, el equilibrio de momentos en los nudos deberá existir.

Cuatro clases de momentos aparecerán en el nudo A:

1 - los momentos fijos, debidos a las cargas, que están actuando: M_f

2 - los momentos debidos a la rotación en el nudo A: $\theta_A \sum K_{ab}$

3 - momentos debido a las influencias que provocan el haber girado los nudos B, C y D. $\sum \theta_B \quad C_{BA} \quad K_{BA}$

4 - momentos externos que pueden existir en A: M_A

Puesto que el nudo A se encuentra en equilibrio, la suma de momentos en él, debe ser cero:

$$\theta_A \sum K_{AB} + \sum \theta_B \quad C_{BA} \quad K_{BA} + \sum M_F - M_A = 0$$

En base a esta ecuación, la tabla de operaciones para el nudo A puede ser planteada.

TABLA DE OPERACIONES PARA NUDO A

	ΔM_A
$\Delta \theta_A = 1$	$\sum K_{AB}$
$\Delta \theta_B = 1$	$C_{BA} \quad K_{BA}$
$\Delta \theta_C = 1$	$C_{CA} \quad K_{CA}$
⋮	
⋮	
⋮	

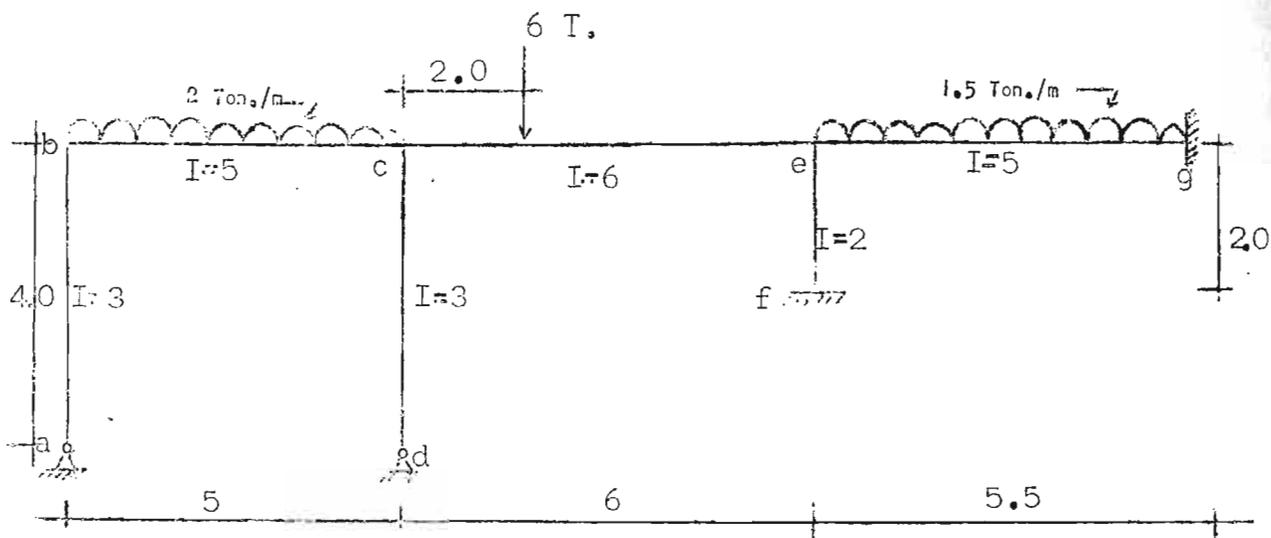
Los momentos finales en los extremos de los miembros son expresados:

$$M_{AB} = M_f + \theta_A \quad K_{AB} + \theta_B \quad C_{BA} \quad K_{BA}$$

$$M_{AC} = M_f + \theta_A \quad K_{AC} + \theta_C \quad C_{CA} \quad K_{CA}$$

Se comprenderá mejor dicho procedimiento con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Encontrar los momentos flexionantes en los nudos, para el marco mostrado, con las condiciones de carga indicadas.



E= constante

FIG.(3-4)

Miembro	Rigidez k	Momento	Empotramiento
ab	2.25	-	-
bc	4.00	+ 4.16	- 4.16
ce	4.00	+ 5.33	- 2.67
cd	2.25	-	-
eg	3.63	+ 3.77	- 3.77
ef	4.00	-	-

TABLA DE OPERACION

	ΔM_B	ΔM_c	ΔM_e
$\Delta \theta_D = 1$	$4.0 + 2.25 = 6.25$	$\frac{1}{2} \cdot 4.0 = 2.0$	-
$\Delta \theta_C = 1$	$\frac{1}{2} \cdot 4.0 = 2.00$	$4.0 + 4.0 + 2.25 = 10.25$	$\frac{1}{2} \cdot 4.0 = 2.0$
$\Delta \theta_E = 1$		$\frac{1}{2} \cdot 4.0 = 2.0$	11.63

TABLA DE RELAJACION

	θ_B	θ_C	θ_E	M_B	M_C	M_E
iniciales	0	0	0	+4.16	-4.16+5.33 = +1.17	-2.67+3.77 = +1.10
	-0.663			0	-0.16	1.10
			-0.095	0	-0.35	0
		0.0342		0.068	0	0.068
	-0.011			0	-0.0216	0.068
			-0.0058	0	-0.0323	0
		0.0032		+0.0063	0	0.0063
Final	-0.676	0.0374	-0.1008	0.0063	0	0.0063

$$M_{AD} = M_f + \theta_A K_{AB} + \theta_B C_{BA} K_{BA}$$

$$M_{AD} = 0 + (-0.676) 2.25 + 0 = -1.52 \text{ Ton-m}$$

$$M_{BD} = +4.16 + (-0.676) 4 + 0.0374 \times 2.0 = +1.53 \text{ Ton-m}$$

$$M_{CB} = -4.16 + (0.0374) 4.0 - 0.676 \times 2 = -5.36$$

$$M_{CD} = 0.0374 \times 2.25 \dots \dots \dots = +0.08$$

$$M_{DE} = -4.16 + 5.33 + 0.0374 \times 4.0 - 0.1008 \times 2 = +5.28$$

$$M_{EC} = -2.67 - 0.1008 \times 4 + 0.0374 \times 2 = -3.00$$

$$M_{EF} = 0 - 0.1008 \times 4.00 = -0.40$$

$$M_{EG} = 3.77 - 0.1008 \times 3.63 = +3.40$$

$$M_{GE} = -3.77 - 0.1008 \times 1.82 = -3.95$$

Consideraremos ahora el caso en el que los nudos de un marco rígido sufren desplazamientos laterales. Puesto que en este caso, los nudos además de rotar han sufrido desplazamientos, la técnica de distribución de momentos no es suficiente, es necesario llevar al mismo tiempo una distribución de cortantes.

Para realizar el procedimiento de relajación, partiremos de las fórmulas dadas por el método de pendiente deformación (the Slope Deflection Method), fórmulas que serán deducidas a continuación.

Sea el miembro no prismático AB de la Fig. (2-1), el cual forma parte de un marco rígido continuo. Debido a las cargas a que se encuentra sometido el marco, el miembro AB se ha deformado sufriendo las rotaciones θ_A y θ_B en los extremos A y B respectivamente; en adición, un desplazamiento relativo (Δ) entre los puntos A y B ha resultado, con lo que el eje del miembro ha rotado un ángulo $\frac{\Delta}{L_{AB}}$

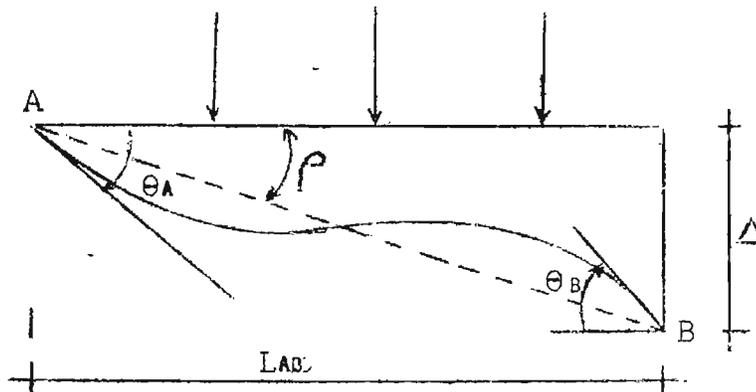


FIG. (3-5-)

La siguiente convención de signos será usada:

- 1 - Las rotaciones θ_A , θ_B , P son consideradas positivas si tienen el sentido de las agujas del reloj:
- 2 - Los momentos serán positivos si producen una rotación del miembro en el sentido de las agujas del reloj.

El miembro AB, bajo las condiciones mostradas en la fig. (3-5) puede ser sustituido por la suma de los siguientes cuatro casos:

a) considerar los nudos A y B fijos y el miembro AB sometido a las condiciones de cargas existente: podemos entonces encontrar los momentos de empotramiento M_{FA} y M_{FB}

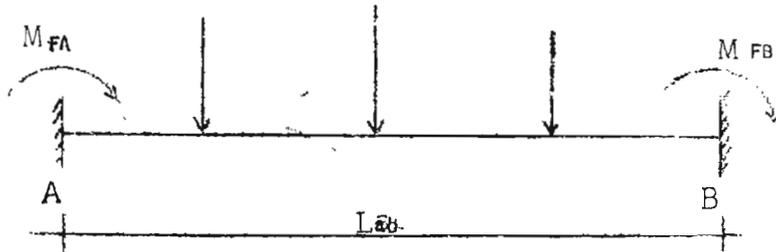


FIG. (3-6-)

b) Considerar el miembro AB con sus nudos fijos pero con un desplazamiento relativo Δ entre los puntos A y B.

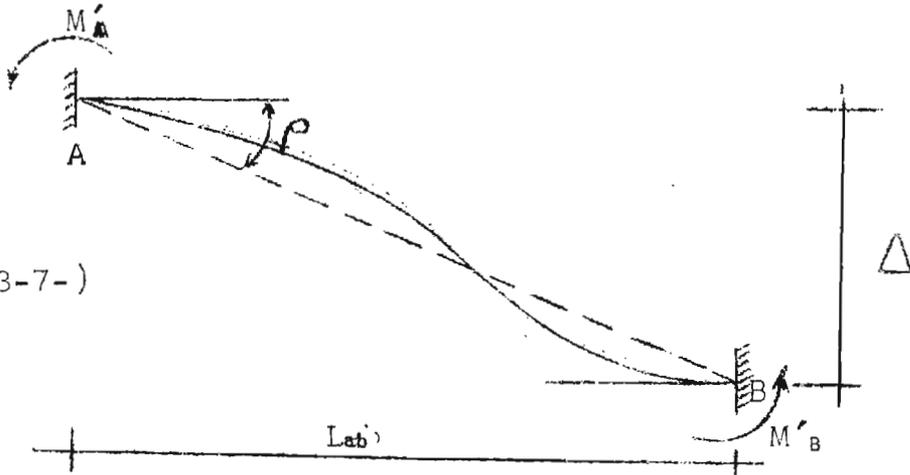


FIG. (3-7-)

Sea P el ángulo rotado por el eje del miembro e igual a

$$P = \frac{-\Delta}{L_{ab}}$$

debido a esta rotación (P), momentos se originan en los extremos A y B, que tendrán por valor.

$$M_A = K_{AB} \theta + C_{BA} K_{BA} \theta$$

$$M_A = K_{AB} \left(-\frac{\Delta}{L_{ab}} \right) + C_{BA} K_{BA} \left(-\frac{\Delta}{L_{ab}} \right)$$

$$M_A = -\frac{\Delta}{L_{ab}} (K_{AB} + C_{BA} K_{BA})$$

en forma similar

$$M_B = -\frac{\Delta}{L_{ab}} (C_{AB} K_{AB} + K_{BA})$$

en donde: K_{AB} = rigidez rotacional de A a B

K_{BA} = rigidez rotacional de B a A

C_{AB} = factor de acarreo de A a B

C_{BA} = factor de acarreo de B a A

Para miembros prismáticos:

$$K_{AB} = K_{BA} = \frac{4EI_{AB}}{L_{ab}}$$

$$C_{AB} = C_{BA} = \frac{1}{2}$$

entonces:

$$M_A = M_B = -\frac{\Delta}{L_{ab}} \frac{3}{2} \frac{4EI_{AB}}{L_{ab}}$$

$$M_A = M_B = -\frac{6EI_{AB}\Delta}{L_{ab}}$$

c) Considerar que el miembro AB ha sufrido una rotación θ_A en el extremo A, mientras el extremo B es mantenido fijo.

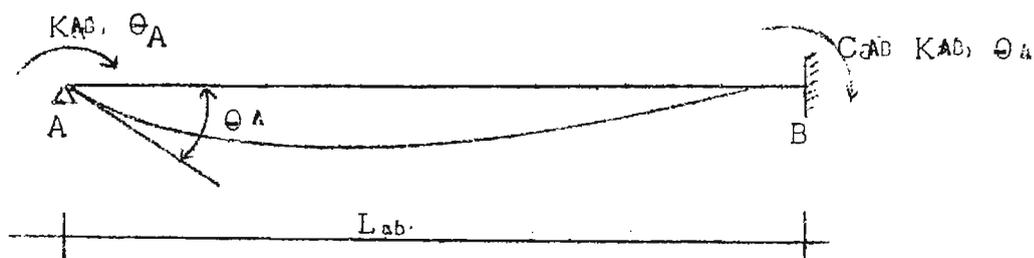
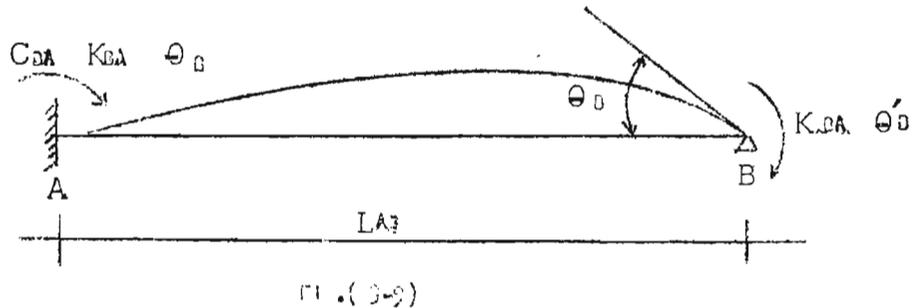


FIG. (3-8)

d) Considerar que el miembro AB ha sufrido una rotación θ_B en el extremo B, mientras el extremo A es mantenido fijo.



Tendremos entonces que los momentos en A y B serán la suma de los momentos en A y B de los cuatro casos en que hemos sustituido el sistema original.

$$M_{AB} = K_{BA} \theta_A + C_{BA} K_{BA} \theta_B + M_{fA} - \frac{\Delta_{AB}}{L_{AB}} (K_{BA} + C_{BA} K_{BA})$$

$$M_{BA} = C_{AB} K_{AB} \theta_A + K_{AB} \theta_B + M_{fB} - \frac{\Delta_{AB}}{L_{AB}} (C_{AB} K_{AB} + K_{AB})$$

Puesto que generalmente trataremos con cargas laterales aplicadas en los nudos, los momentos de empotramiento serán cero. El cortante (V_{AB}) en el miembro AB tendrá como valor:

$$V_{AB} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L_{AB}}$$

$$V_{AB} = -\frac{(C_{AB}+1)}{L_{AB}} K_{AB} \theta_A - \frac{(C_{BA}+1)}{L_{AB}} K_{BA} \theta_B + \frac{(C_{AB}+1) K_{AB} + (C_{BA}+1) K_{BA}}{L_{AB}} \frac{\Delta_{AB}}{L_{AB}}$$

Para miembros prismáticos obtenemos

$$M_{AB} = \frac{4EI_{AB}}{L_{AB}} \theta_A + \frac{1}{2} \frac{4EI_{AB}}{L_{AB}} \theta_B + M_{fA} - \frac{\Delta_{AB}}{L_{AB}} \times \frac{3}{2} \frac{4EI_{AB}}{L_{AB}}$$

$$M_{BA} = M_{fA} + \frac{2EI_{AB}}{L_{AB}} (2\theta_A + \theta_B - 3 \frac{\Delta_{AB}}{L_{AB}})$$

$$M_{BA} = M_{FB} + \frac{2EIAB}{L_{AB}} (2\theta_B + \theta_A - 3 \frac{\Delta_{AB}}{L_{AB}})$$

$$V_{AB} = - \frac{3}{2} \frac{EIAB}{L_{AB}} \theta_A - \frac{3}{2} \frac{EIAB}{L_{AB}} \theta_B + \frac{3}{2} \frac{EIAB}{L_{AB}} \times \frac{4EIAB}{L_{AB}} \frac{\Delta_{AB}}{L_{AB}}$$

$$V_{BC} = - \frac{3EIAB}{2L_{AB}} \theta_A - \frac{3EIAB}{2L_{AB}} \theta_B + \frac{12EIAB}{L_{AB}^3} \Delta_{AB}$$

Realizaremos dos ejemplos para comprender mejor la técnica de la relajación.

Ejemplo 2: Encontrar momentos en los nudos, para el marco mostrado bajo la condición de carga indicada

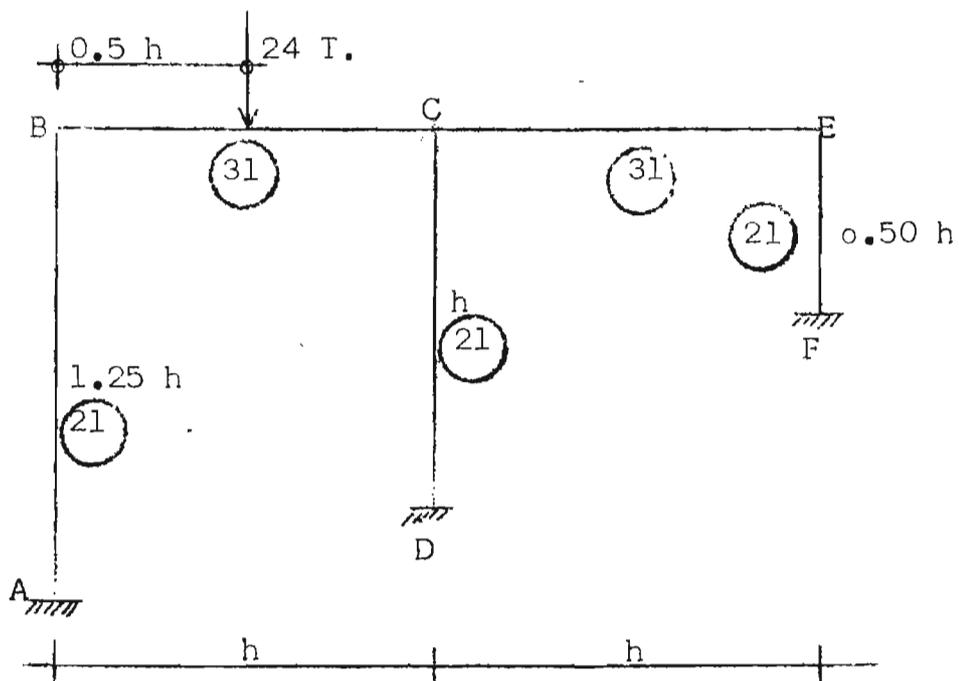


FIG. 3-10

E = constante

h = 16 m.

Miembro	RIGIDEZ $k(\frac{EI_o}{h})$	Momento	Empotramiento
AB	$\frac{4E2I}{1.25h} = 6.4$		
BC	12	-48.0	+ 48.0
CD	8		
CE	12		
EF	16		

TABLA DE OPERACION

	$M_{BA} \cdot M_{CB} (\frac{EI_o}{h})$	M_{BC}	M_{CB}	M_{CD}	M_{CE}	M_{EC}	M_{EF}	M_{FE}	$(\frac{EI_o \Delta V}{h^2})$
	$M_{BA} \cdot M_{CB} (\frac{EI_o}{h})$	M_{BC}	M_{CB}	M_{CD}	M_{CE}	M_{EC}	M_{EF}	M_{FE}	
	6.4	12	6	0	0	0	0	0	
$\theta_B = 1$	18.4		6	6		0			-7.68
$\theta_C = 1$	0	6	12	8	12	6	0	0	-12
$\theta_D = 1$	0	0	0	0	6	12	16		-48
$\theta_E = 1$	0	0	0	6		28			
$\Delta = n$	-7.68	0	0	-12	0	0	-48		228.3
	-7.68			-12		-48			
$\theta_B = \theta_C = \theta_E = 1$	+4.13	18	18	4.45	18	18	1.8		0
$\Delta = 0.296h$		22.13		40.45		19.8			

Ejemplo 3: Para el marco mostrado, sometido a las cargas laterales mostradas, encontrar los elementos mecánicos, (momentos flexionantes, cortantes, fuerzas axiales)

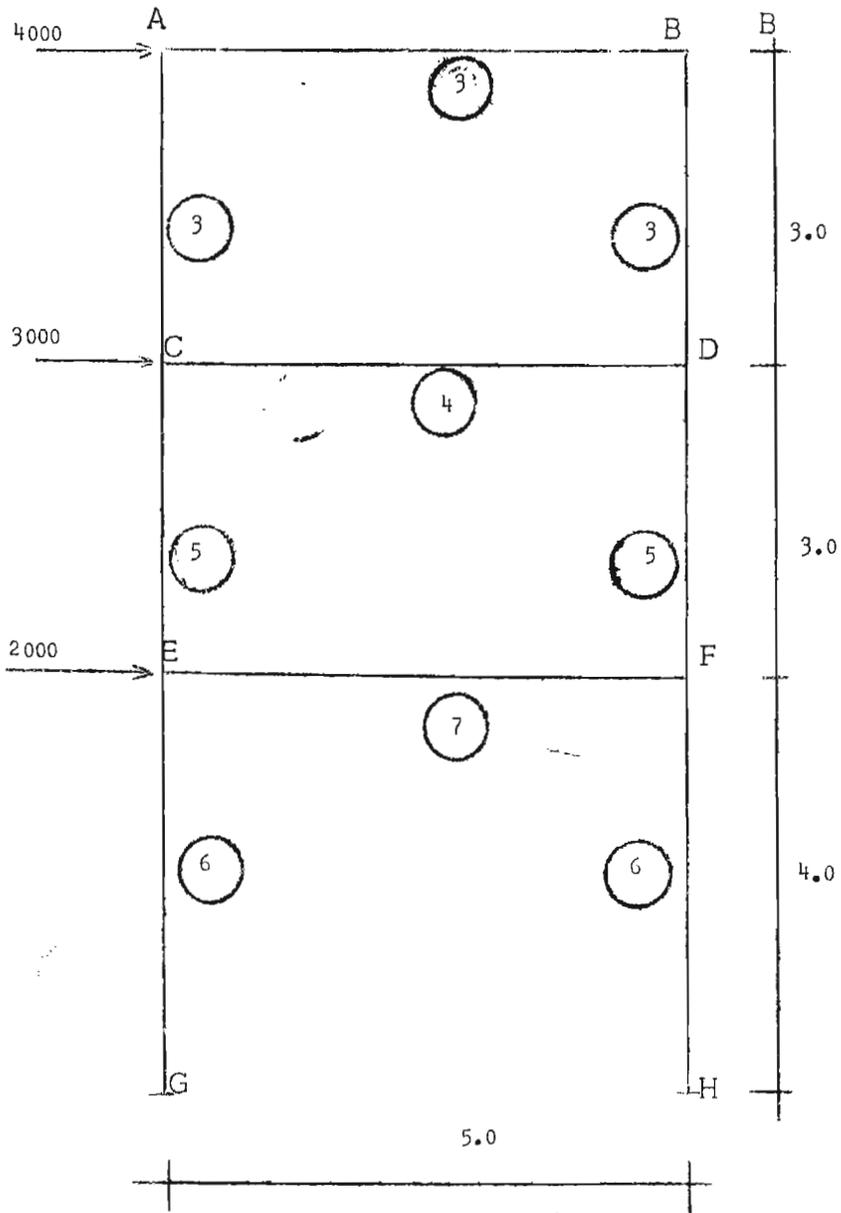


FIG. 3-12

	GA	GB	GC	GD	GE	GF	GA	GB	GC	GD	GE	GF	V.3	V.2	V.1
inicial	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4000	-7000	-9000
1						4000	4000	4000					-6000	-6000	4000
2	666	666	666	666	666								0	0	0
3						1330							0	0	0
4			243	243	243		840						0	0	0
5													0	0	0
6							485						0	0	0
7			127	127	127								0	0	0
8													0	0	0
9							381						0	0	0
10							253						0	0	0
11			77	77	77								0	0	0
12							115	115	115				0	0	0
13	33	33	33	33	33								0	0	0
14													0	0	0
FINAL	700	700	1146	1146	1146	1146	1146	6183	5336	4666	-33	-33	-380	-380	255

MOENTOS:

$$MGE = \frac{1}{2} 6 \times 1146 - \frac{6183}{4} \times \frac{3}{2} 6 = -10460 \text{ kgm}$$

$$MEG = 6 \times 1146 - \frac{6183}{4} \times \frac{3}{2} 6 = -7020 \text{ kgm}$$

$$MEC = 5 \times 1146 + \frac{5}{2} \times 1146 - \frac{5336}{3} \times \frac{3}{2} \times 5 = -4755 \text{ kgm}$$

$$MEF = 7 \times 1146 + \frac{7}{2} \times 1146 + 12050 \text{ kgm}$$

$$MCE = 5 \times 1146 + \frac{5}{2} \times 1146 - \frac{5336}{3} \times \frac{3}{2} \times 5 = -4755 \text{ kgm}$$

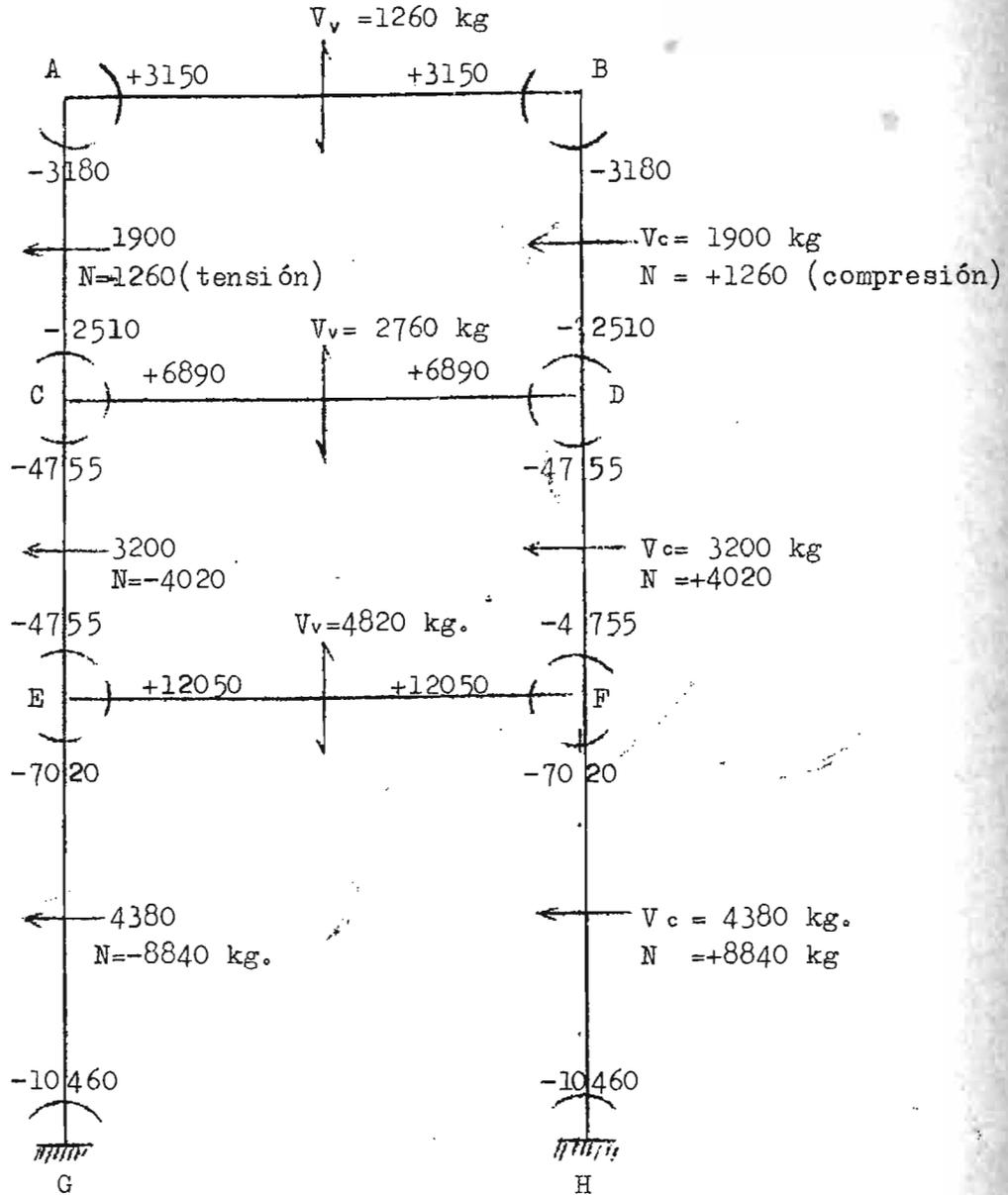
$$MCA = 3 \times 1146 + \frac{3}{2} \times 1146 - \frac{4666}{3} \times \frac{3}{2} \times 3 = -2510 \text{ kgm}$$

$$MGD = 4 \times 1146 + \frac{4}{2} \times 1146 = +6890 \text{ kgm}$$

$$MAC = 3 \times 700 + \frac{3}{2} \times 700 - \frac{4666}{3} \times \frac{3}{2} \times 3 = -3180 \text{ kgm}$$

$$MAD = 3 \times 700 + \frac{3}{2} \times 700 = +3150 \text{ kgm}$$

ELEMENTOS MECANICOS:



En la Figura:

FIG. 3-13

V_v CORTANTE EN VIGAS

V_c CORTANTE EN COLUMNAS

N FUERZA AXIAL EN COLUMNAS (POSITIVA SI ES A COMPRESION Y NEGATIVA SI SE ENCUENTRA A TENSION)

EJEMPLO 4: Encontrar los momentos flexionantes, para el marco mostrado, sometido a cargas laterales de 15^T , 10^T , 8^T , aplicados en los nudos A, D, C, respectivamente.

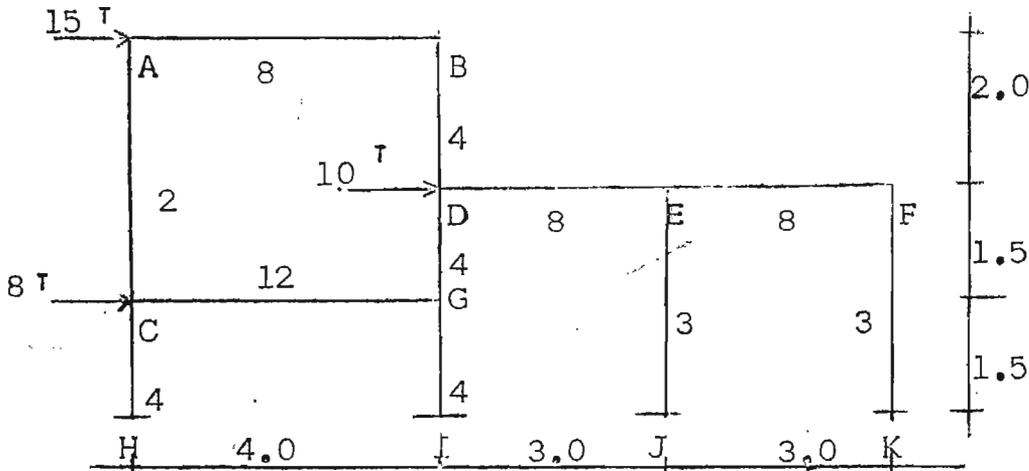


FIG. 3-14

Los valores anotados dentro de los círculos son rigideces relativas ($\frac{I}{L}$)K

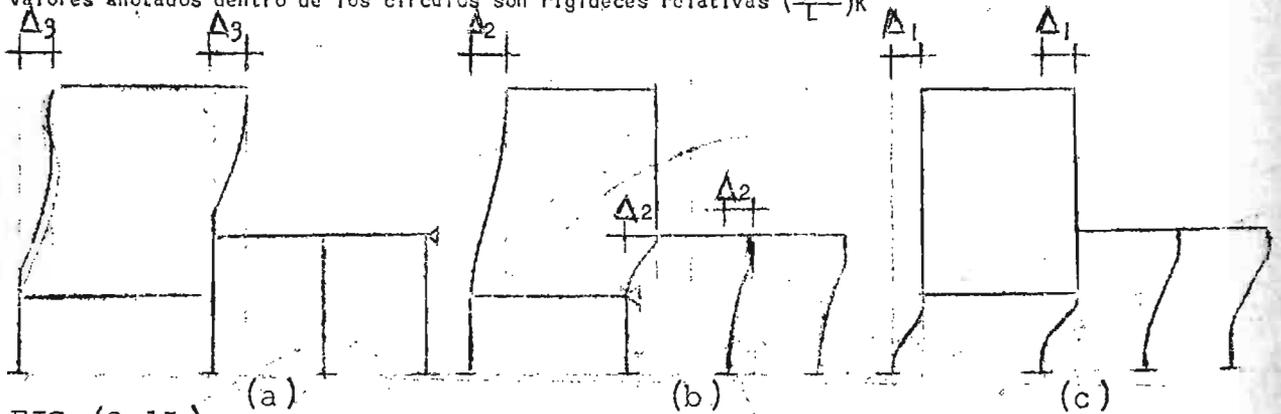


FIG. (3-15)

T A B L A D E O P E R A C I O N E S

	M_A	M_D	M_C	M_D	M_E	M_F	M_G	V_3	V_2	V_1
$\theta_A = 1$	10	4	1	0	0	0	0	-0.856	-0.856	0
$\theta_B = 1$	4	12	0	2	0	0	0	-3.00	0	0
$\theta_C = 1$	1	0	18	0	0	0	6	-0.856	-0.856	-4.0
$\theta_D = 1$	0	2	0	16	4	0	2	-3.00	-4.0	+0.0
$\theta_E = 1$	0	0	0	4	19	4	0	0	-1.5	-1.5
$\theta_F = 1$	0	0	0	0	4	11	0	0	-1.5	-1.5
$\theta_G = 1$	0	0	6	2	0	0	20	0	-4.0	-4.0
$\Delta_3 = 1$	-0.856	-3.0	-0.856	-3.0	0	0	0	3.49	0.49	0
$\Delta_2 = 1$	-0.856	0	-0.856	-4.0	-1.5	-1.5	-4.0	0.49	7.82	2.0
$\Delta_1 = 1$	0	0	-0.4	0	-1.5	-1.5	-4.0	0.0	2.00	12.66
$\sum \theta = 1$	15	18	25	24	27	15	28	-7.712	-12.712	-11.00
$\sum \Delta = 1$	-1.712	-3.0	-5.712	-7.0	-3.0	-3.0	-8.0	3.98	10.31	14.66
$\theta_A = \theta_B = 1$	14	16	1	2	0	0	0	-3.856	-0.856	0
$\theta_C = \theta_D = 1$	1	2	18	16	4	0	8	-3.856	-4.856	-4
$\theta_E = \theta_F = 1$	0	0	0	4	23	15	0	0	-3.0	-3.0

θ_A	θ_B	θ_C	θ_D	θ_E	θ_F	θ_G	Δ_3	Δ_2	Δ_1	M_A	M_B	M_C	M_D	M_E	M_F	M_G	V_3	V_2	V_1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-15000	-25000	-33000
							2250	2250	2250	-3840	-6750	-12750	-15600	-6750	-6750	-18000	-6050	1800	0
		710	710							-3130	-5330	0	-4250	-3910	-6750	-12320	8790	-5240	-2840
333	333									1530	0	333	-3584	-3910	-6750	-12320	-10075	-5525	-2840
							2880			-930	-8650	-2127	-12234	-3910	-6750	-12320	0	-4115	-2840
480	480	480	480	480	480	480				6270	0	5873	-734	9040	450	1080	-3700	-10215	-8110
							990	990	990	4570	-2970	4223	-7674	6070	-2520	-6850	240	0	6390
-457										0	4800	3796	-7674	6070	-2520	-6850	630	390	6390
	400								-505	0	-4800	5816	-7674	6825	-1765	-4830	630	610	0
										1200	0	5816	-6874	6825	-1765	-4830	-570	-610	0
										878	0	0	-6874	6825	-1765	-6760	294	-334	1290
										878	854	0	0	8535	-1765	-5906	-1574	-2034	1290
										878	854	0	-1800	0	-3565	-5906	-1574	-2709	615
										878	854	1740	590	0	-3565	0	-1574	-3889	-565
										538	264	820	-790	-590	-4155	-1570	-790	-1889	2315
							197	197	197	538	264	820	-790	-590	-4155	-1570	-790	-1889	2315
										538	264	820	-790	-590	-4155	-1570	-790	-1889	2315
										538	264	1290	-634	920	0	0	-790	-2764	1440
										238	264	990	-2034	390	-530	-1400	613	0	2140
										238	518	990	0	899	-530	-1146	-993	-505	2140
										238	518	1665	0	1149	-280	-471	-993	-845	0
										72	518	0	0	1149	-280	-1471	-850	-705	660
										72	518	440	144	1149	-280	0	-850	-1000	365
										72	518	440	-100	0	-520	0	-850	-910	455

356 1213 776 1744 - 31 857 927 6671 3437 2763

MOMENTOS:

NUDO A:

$$M_{AB} = 8 \times 356 + 4 \times 1213 = 2848 + 4852 = + 7700 \text{ Kgm}$$

$$M_{AC} = 2 \times 356 + 776 - \frac{6671+3437}{3.5} \times \frac{3}{2} \times 2 = - 7262 \text{ Kgm}$$

NUDO B: $M_{BA} = 4 \times 356 + 8 \times 1213 = + 11128 \text{ Kgm}$

$$M_{BD} = 4 \times 1213 + 2 \times 1744 - \frac{6671}{2} \times \frac{3}{2} \times 4 = - 11173 \text{ Kgm}$$

NUDO C: $M_{CA} = 356 + 2 \times 776 - \frac{6671+3437}{3.5} \times \frac{3}{2} \times 2 = - 6842 \text{ Kgm}$

$$M_{CH} = 4 \times 776 - \frac{2763}{1.5} \times \frac{3}{2} \times 4 = - 7948 \text{ Kgm}$$

$$M_{CG} = 12 \times 776 + 6 \times 927 = + 14874 \text{ Kgm}$$

NUDO D: $M_{DB} = 4 \times 1744 + 2 \times 1213 - \frac{6671}{2} \times \frac{3}{2} \times 4 = - 10611 \text{ Kgm}$

$$M_{DG} = 4 \times 1744 + 2 \times 927 - \frac{3437}{1.5} \times \frac{3}{2} \times 4 = - 4918 \text{ Kgm}$$

$$M_{DE} = 8 \times 1744 + 4 \times (-31) = + 13830 \text{ Kgm}$$

NUDO E: $M_{ED} = 4 \times 1744 + 8 \times (-31) = + 6728 \text{ Kgm}$

$$M_{EF} = 8 \times (-31) + 4 \times 857 = + 3180 \text{ Kgm}$$

$$M_{EJ} = -3 \times (-31) - \frac{3437+2763}{3} \times \frac{3}{2} \times 3 = - 9393 \text{ Kgm}$$

NUDO F: $M_{FE} = 4 \times (-31) + 8 \times 857 = + 6732 \text{ Kgm}$

$$M_{FK} = 3 \times 857 - \frac{6200}{3} \times \frac{3}{2} \times 3 = - 6729 \text{ Kgm}$$

NUDO G: $M_{GD} = 2 \times 1744 + 4 \times 927 - 13748 = - 6552 \text{ Kgm}$

$$M_{GI} = 4 \times 927 - \frac{2763}{1.5} \times \frac{3}{2} \times 4 = - 7344 \text{ Kgm}$$

$$M_{GC} = 12 \times 927 + 6 \times 776 = + 15780 \text{ Kgm}$$

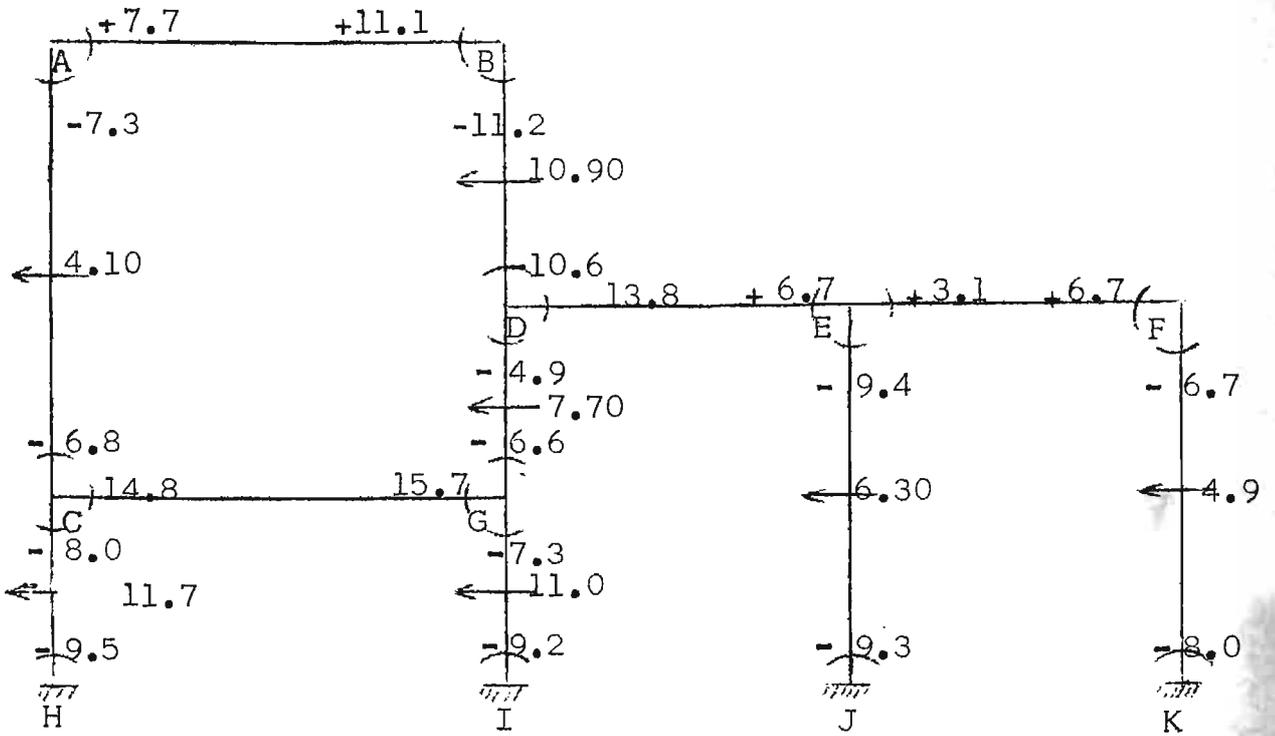


FIG. (3-16)

BIBLIOGRAFIA

- 1 *Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics.*
Ping-Chun Wang
John Wiley S Sons, Inc. 1966
- 2 *Numerical Procedure for Computing Deflections Moments and Buckling Loads.*
Neumark, N.M.
Trans. Am. Soc. Civ. Engrs. 1943
- 3 *Numerical Analysis*
Kaiser S. Kunz
Mc Graw Hill Company Inc. New York 1957.
- 4 *Numerical Method of Analysis in Engineering*
I. E. Grinter
The MacMillan Company New York
- 5 *The Analysis of Stress and Deformation* George W. Housner and
thad Vreeland, Jr.
The Mac Millan Company. New York
- 6 *Relaxation Methods in Engineering Science.*
R. V. Southwell
Oxford University Press.
- 7 *Numerical Methods in Engineering.*
Mario G. Salvadori and Melvin
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1961
- 8 *Theory of Elastic Stability*
Timoshenko and Gere
Mc Graw Hill Book Company, Inc. New York
Second Edition
- 9 *Theory of Plates and Shells*
Stephen P. Timoshenko and S. Woinowsky Krieger
Mc Graw Hill Company, Inc. New York.
Second Edition
- 10 *Theory of Elasticity*
Timoshenko and Goodier
Mc Graw Hill Book Company, Inc. New York.
Second Edition
- 11 *Advanced Structural Analysis*
S. Borg and J. Genard
D. Van Nostrand Co., Princeton N.J. 1959