UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

MODELOS DE MECANICA DE FLUIDOS

TESIS PROFESIONAL

PRESENTADA POR

OSCAR NOSTHAS MENA

PREVIA OPCION DEL TITULO DE

INGENIERO CIVIL

MAYO - 1966

SAN SALVADOR EL SALVADOR CENTRO AMERICA

U N I V E R S I D A D   D E   E L   S A L V A D O R

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

" M O D E L O S   D E   M E C A N I C A   D E   F L U I D O S "

TESIS PROFESIONAL PRESENTADA POR

OSCAR NOSTHAS MENA

PREVIA OPCION DEL TITULO DE

INGENIERO CIVIL

MAYO - 1966

SAN SALVADOR   EL SALVADOR   CENTRO AMERICA

U N I V E R S I D A D D E E L S A L V A D O R

RECTOR

Dr. Fabio Castillo Figueroa

SECRETARIO GENERAL

Lic. Mario Flores Macall

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO

Ing. León Enrique Cuéllar

SECRETARIO

Ing. Alonso García Rivera

DIRECTOR DE ESCUELA

DE INGENIERIA CIVIL

Ing. Roberto A. Parker

PRIMER EXAMEN GENERAL PRIVADO

Ing. Pablo Arnoldo Guzmán

" Carlos Emilio Moreno

" José Fonseca Franco

SEGUNDO EXAMEN GENERAL PRIVADO

Ing. León Rivas Durán

" Edgar Parker

" Antonio Seaman

JURADO CALIFICADOR Y ASESOR DE TESIS

Ing. Guido Armando Lucha

" Rodolfo Morales

" León Rivas Durán

D E D I C A T O R I A

A la **memoria** de mi padre

Julio M. Nosthas

A mi madre

Margoth de Nosthas

A mi esposa

Vilma de Nosthas

A mis hijas

Vilma Margarita .

Eugenia Guadalupe

A mis hermanos:

Edgar Nasry

María del Carmen

Ana Miriam

Julio César

Ricardo Ernesto

A mis profesores

A mis amigos.-

C O N T E N I D O

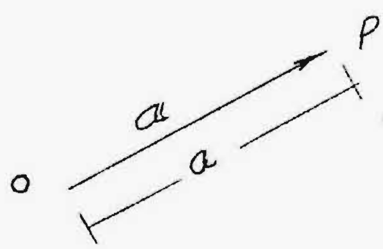
ANALISIS VECTORIAL.-

MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES.-

- Hay magnitudes que quedan determinadas dando un número real, su medida, la longitud de una regla, la masa de un cuerpo, su densidad, su volumen, la potencia, el trabajo, etc.; tales magnitudes se llaman ESCALARES.-
- Para otras magnitudes en cambio, no basta dar un número real para determinarlas, sino que es necesario conocer además la dirección y el sentido en que el punto se mueve, la velocidad, la aceleración, etc. Estas magnitudes en las cuales hay que distinguir su intensidad (que es una magnitud escalar) su dirección y su sentido, se llaman MAGNITUDES VECTORIALES.-

VECTORES.- Un segmento de recta queda determinado por sus dos puntos extremos; cuando esos puntos están dados en cierto orden se dice que el segmento está orientado.-

VECTOR, es todo segmento orientado; el primero de los puntos que lo determina se llama origen; el otro punto se llama extremo del vector; la orientación del segmento determina su sentido.-



$\mathbf{a}$ = Vector

a = Módulo, longitud del segmento orientado que lo define

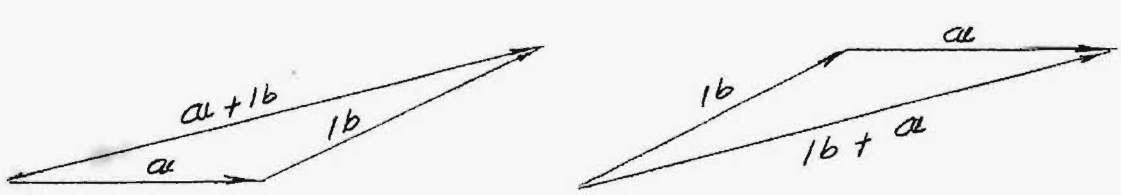
O = Origen

P = Extremo

- Dos vectores son iguales cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentido.-

ADICION Y SUSTRACCION DE VECTORES.-

- ADICION DE VECTORES.- Para sumar dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se procede así: A partir del extremo de $\mathbf{a}$ se lleva el vector $\mathbf{b}$ y el vector cuyo origen es el origen de $\mathbf{a}$ y cuyo extremo, es el extremo de $\mathbf{b}$ es el vector suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

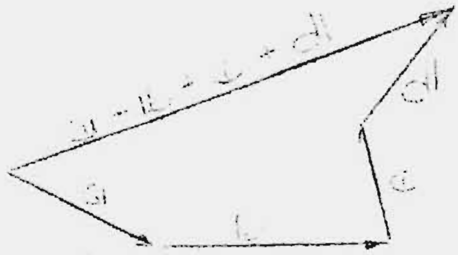


o también a partir del extremo de $\mathbf{b}$ se lleva el vector $\mathbf{a}$ el vector que tiene por origen el origen del vector $\mathbf{b}$ y por extremo, el extremo del vector $\mathbf{a}$ es el vector $\mathbf{b} + \mathbf{a}$ de lo anterior se deduce que

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

——2

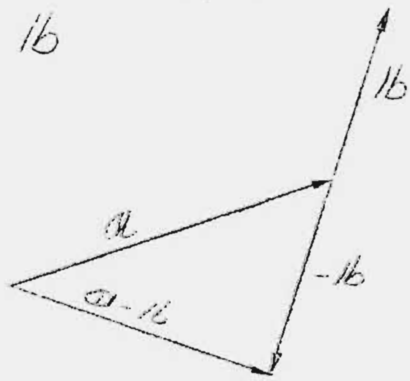
DEFINICION.- El vector suma de varios vectores, es el vector que tiene por origen y extremo, respectivamente, el origen y extremo de la poligonal obtenida llevando un vector a continuación del otro.-



SUSTRACCION DE VECTORES.-

Dado un vector b se representa por $-b$ el vector opuesto, es decir: - tiene el mismo módulo y dirección, pero sentido contrario.-

La diferencia $a-b$ es igual a la suma del vector a y tal vector opuesto a b



Sean:

a y b dos vectores

m y n dos escalares

Se cumplen las leyes:

Ia $m(na) = n(ma) = (mn)a$

Ib $a + b + c = a + (b + c)$

II $a + b = b + a$

IIIa $(m+n)a = ma + na$

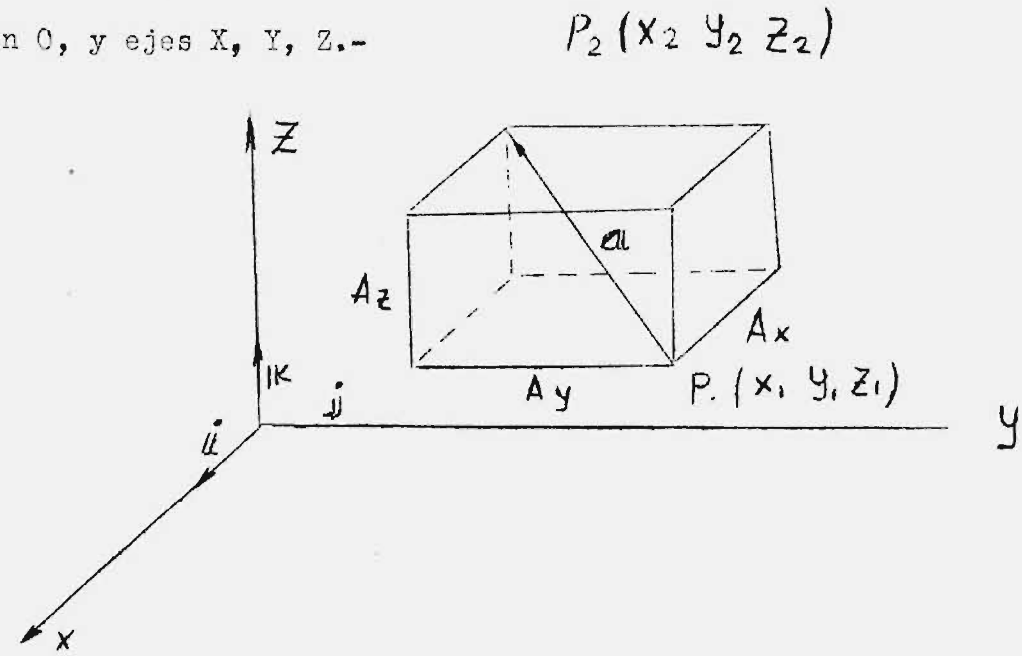
IIIb $m(a+b) = ma + mb$

IIIc. $-(a+b) = -a - b$

Las leyes que gobiernan la adición, sustracción y multiplicación de un escalar por un vector, son idénticas a las que gobiernan las mismas operaciones de escalares en álgebra ordinaria.-

COMPONENTES DE UN VECTOR.-

- Componente de un vector en una dirección, es la proyección del vector en la dirección establecida.-
- Sean (O, X, Y, Z) un sistema de coordenadas cartesianas octogonales de origen O, y ejes X, Y, Z.-



$\mathbb{i}$, $\mathbb{j}$, $\mathbb{k}$, vectores unitarios en dirección positiva de los ejes x, y, z, respectivamente.- (VERSORES.-)

Componentes de O en los ejes.-

$A_z = X_2 - X_1 \qquad A_y = Y_2 - Y_1 \qquad A_z = Z_2 - Z_1$

$$\mathbb{a} = A_x\, \mathbb{i} + A_y\, \mathbb{j} + A_z\, \mathbb{k}$$

- Los versores $\mathbb{i}$, $\mathbb{j}$, $\mathbb{k}$ serán positivos cuando al girar $\mathbb{i}$ hacia $\mathbb{j}$ en el sentido contrario a las agujas del reloj reproduzcan $\mathbb{k}$

PRODUCTO ESCALAR Y PRODUCTO VECTORIAL.-

- Producto escalar.- Se llama producto escalar o interno de dos vectores $\mathbb{a}$ y $\mathbb{b}$ al escalar obtenido como producto de los módulos de $\mathbb{a}$ y $\mathbb{b}$ por el coseno del ángulo formado por los dos vectoes

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = AB \cos \theta$$

donde θ ángulo formado por dos vectores, A y B sus módulos.-

- De lo anterior se deduce que:

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = \mathbb{b} \cdot \mathbb{a}$$

luego, la condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares es que su producto escalar sea nulo

-----4

$$\mathbb{i} \cdot \mathbb{i} = \mathbb{j} \cdot \mathbb{j} = \mathbb{k} \cdot \mathbb{k} = 1$$

$$\mathbb{i} \cdot \mathbb{j} = \mathbb{j} \cdot \mathbb{k} = \mathbb{k} \cdot \mathbb{i} = 0$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (A_x \mathbb{i} + A_y \mathbb{j} + A_z \mathbb{k}) \cdot (B_x \mathbb{i} + B_y \mathbb{j} + B_z \mathbb{k})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

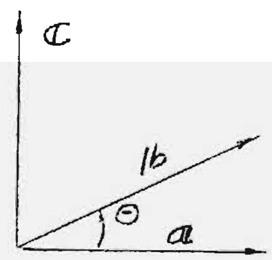
$$\mathbf{a} = A \cos \alpha \, \mathbb{i} + A \cos \beta \, \mathbb{j} + A \cos \gamma \, \mathbb{k}$$

$$\frac{\mathbf{a}}{A} = (\cos \alpha \, \mathbb{i} + \cos \beta \, \mathbb{j} + \cos \gamma \, \mathbb{k})$$

$$\frac{\mathbf{a}}{A} = \mathbb{n} \quad \text{versor en direccion de } \mathbf{a}$$

PRODUCTO VECTORIAL.-

- El producto vectorial del vector $\mathbf{a}$ por $\mathbf{b}$ es el vector $\mathbf{c}$ resultante, cuya direccion es perpendicular al plano definido por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ el sentido, el de giro de $\mathbf{a}$ hacia $\mathbf{b}$ através del menor ángulo entre ellos y su magnitud el producto de sus módulos por el seno del ángulo entre ellos.-



$$\mathbf{c} = A B \ \operatorname{Sen} \Theta$$

- De lo anterior se deduce que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = - \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

- Para que dos vectores tengan la misma dirección (con sentidos iguales u - opuestos) es condicion necesaria y suficnete que el producto vectorial sea nulo

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (A_x \mathbb{i} + A_y \mathbb{j} + A_z \mathbb{k}) \times (B_x \mathbb{i} + B_y \mathbb{j} + B_z \mathbb{k})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (A_y B_z - A_x B_y) \mathbb{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbb{j} + (A_x B_y - A_y B_z) \mathbb{k}$$

podemos poner:

$$\mathbb{i} \times \mathbb{i} = \mathbb{j} \times \mathbb{j} = \mathbb{k} \times \mathbb{k} = 0$$

$$\mathbb{i} \times \mathbb{j} = -\mathbb{j} \times \mathbb{i} = \mathbb{k} \ ; \quad \mathbb{j} \times \mathbb{k} = -\mathbb{k} \times \mathbb{j} = \mathbb{i}$$

$$\mathbb{a} \times \mathbb{b} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

PRODUCTO MIXTO Y OTROS PRODUCTOS.-

PRODUCTO MIXTO

$$V = (\mathbb{a} \times \mathbb{b}) \cdot \mathbb{c} = (\mathbb{c} \times \mathbb{a}) \cdot \mathbb{b} = (\mathbb{b} \times \mathbb{c}) \cdot \mathbb{a}$$

e indica el volumen de un paralelepipedo, construido sobre los vectores, una vez llevados a partir de un origen común.-

Triple producto vectorial

$$\mathbb{a} \times (\mathbb{b} \times \mathbb{c}) = \mathbb{a} \cdot (\mathbb{c}\mathbb{b} - \mathbb{b}\mathbb{c})$$
$$= (\mathbb{a} \cdot \mathbb{c})\mathbb{b} - (\mathbb{a} \cdot \mathbb{b})\mathbb{c}$$

DIFERENCIACION PARCIAL - OPERACIONES VECTORIALES.-

Si en una región del espacio, a cada punto de ella le corresponde un valor de alguna magnitud física, la región recibe el nombre de campo. Según que la magnitud sea escalar o vectorial, el campo se llama también escalar o vectorial.-

Supongamos una región del espacio, cuyos puntos están determinados por sus coordenadas P (X, Y, Z) respecto a un sistema cartesiano ortogonal, una función F (x, y, z) definida en la región, se llama función de punto o escalar.- Si

$\overline{OP}$ = r = radio vector del punto P y

f = f(r) a cada valor de r le corresponde un punto P y por consiguiente un valor de f.-

Se dice que un punto variable P tiene como límite a un punto fijo Po, si la distancia PoP tiende a cero. Se dice que una función de punto es contínua en Po cuando tiene un valor definido en Po y tiene a ese valor como límite cuando P tiende hacia Po.-

Condiciones analíticas para que $f(P)$ sea contínua en Po son:

a) Que f(Po) tenga un valor definido,

b) Que a cada valor positivo ε corresponda un número positivo δ tal que

$$[f(P) - f(P_0)] < \varepsilon \qquad \text{siempre que:} \quad P_0P < \delta$$

-------6

La condición de continuidad para una función vectorial tiene la misma -- forma.-

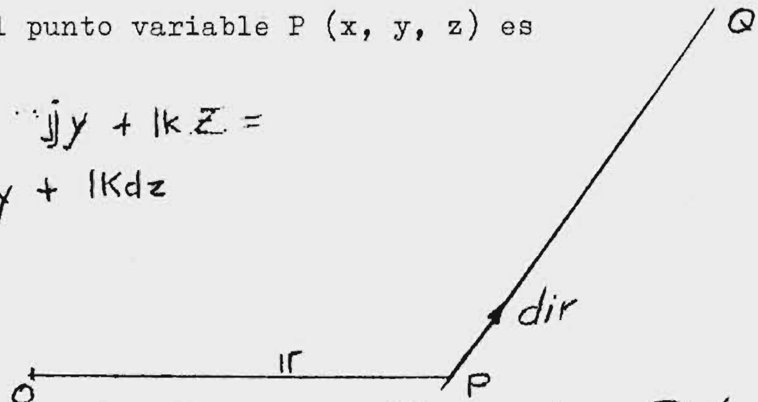
GRADIENTE DE UNA FUNCION DE PUNTO.-

Sea ϕ (x,y,z) una función escalar definida sobre cierta región del espacio y que admita los tres derivados parciales.-

El radio vector al punto variable P (x, y, z) es

$$\mathbb{r} = \overline{OP} = \mathbb{i}x + \mathbb{j}y + \mathbb{k}z =$$

$$d\mathbb{r} = \mathbb{i}\,dx + \mathbb{j}\,dy + \mathbb{k}\,dz$$



$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

Si la variación se toma en la dirección PQ

$$ds = \left\| d\mathbb{r} \right\|$$

$$y \quad \frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}$$

es la derivada de ϕ en la dirección PQ.-

Si multiplicamos

$$= \left(\mathbb{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbb{j} + \mathbb{k}\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) . \left(\mathbb{i}\,dx + \mathbb{j}\,dy + \mathbb{k}\,dz \right)$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$ entonces

$$d\phi = \left(\mathbb{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbb{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbb{k}\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) . d\mathbb{r}$$

la cantidad

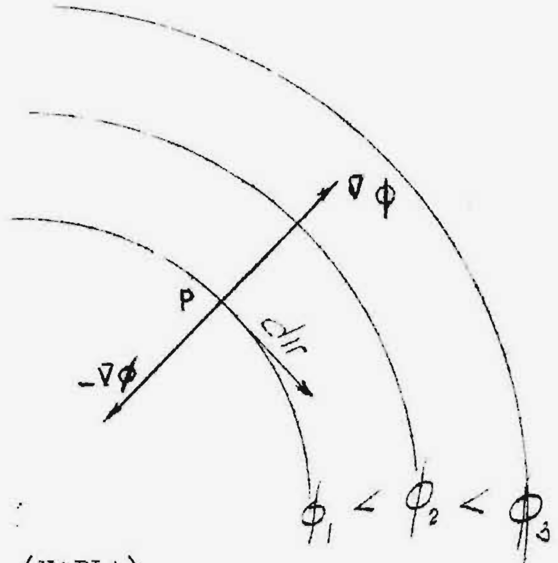
grad $$\phi = \mathbb{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbb{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbb{k}\frac{\partial \phi}{\partial z} =$$ gradiente ϕ

$$\nabla \phi = \left(\mathbb{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbb{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbb{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \phi \;\therefore$$

$$\boxed{\nabla = \mathbb{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbb{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbb{k}\frac{\partial}{\partial z}}$$

∇ operador que designaremos como NABLA.-

Ahora bien, en una variación a lo largo de ϕ (x, y, z) $\equiv$ const. $d\phi =$ $\nabla\phi . d\mathbf{r} = 0$ que nos dice que el gradiente ϕ es perpendicular a cada vector $d\mathbf{r}$ en la superficie en P. Por consiguiente, $\nabla\phi$ es normal a la superficie ϕ = constante, que pasa por P y está dirigido hacia el lado en que ϕ aumenta.-



PRODUCTOS CON EL OPERADOR ∇ (NABLA)

Sea

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

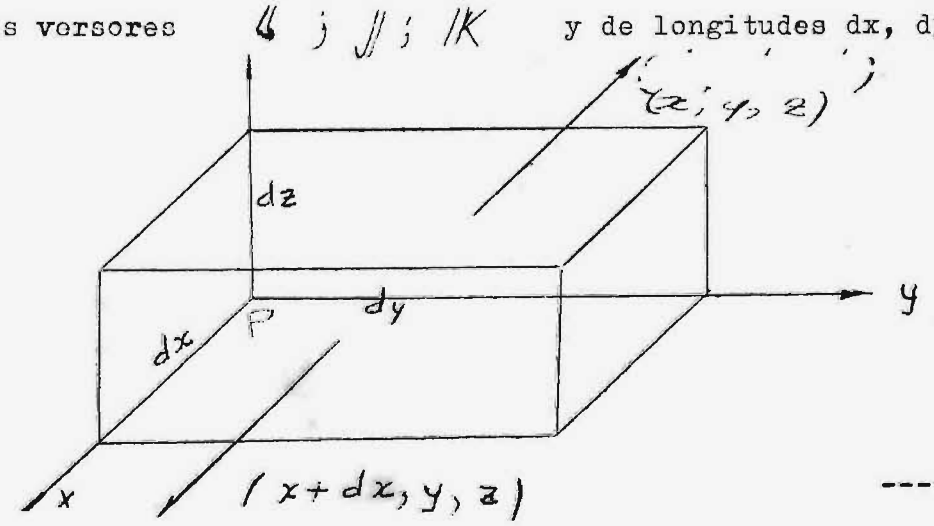
$$\mathbf{V} = u\,\mathbf{i} + v.\mathbf{j} + w\,\mathbf{k}$$

donde $\mathbf{V}$ puede representar en cada punto del espacio la velocidad de un fluido en movimiento. Es decir, $\mathbf{V}$ representa un campo de velocidades, donde sus componentes las suponemos funciones derivables de x, y, z.-

$$\nabla . \mathbf{V} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) . \mathbf{V}$$

$$\nabla . \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} =$$ divergencia de $\mathbf{V}$

Para explicar el significado físico de la divergencia, consideremos un punto P (x, y, z) un paralelepipedo elemental que a partir de "P" tiene las aristas paralelas a los versores $\mathbf{i}$; $\mathbf{j}$; $\mathbf{k}$ y de longitudes dx, dy, dz, así



Considerando la cantidad de fluido que pasa a través de las caras normales al eje "x"

$$-\mathbf{i}\cdot W(x,y,z)\,dy\,dz$$

La cara opuesta cuya coordenada es mayor que la anterio en dx es:

$$\mathbf{i}\cdot W(x+dx,y,z)\,dy\,dz = \mathbf{i}\left[-W(x,y,z)+\frac{\partial W}{\partial x}dx\right]dy\,dz$$
$$+\mathbf{i}\cdot W(x,y,z)\,dy\,dz+\mathbf{i}\cdot\frac{\partial W}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

y el flujo total a través de esas dos caras es la suma algebráica de esas cantidades - simplemente:

$$\mathbf{i}\cdot\frac{\partial W}{\partial x}dx\,dy\,dz = \frac{\partial(W\cdot\mathbf{i})}{\partial x}dx\,dy\,dz = \frac{\partial u}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

igualmente con los otros pares de caras normales a los ejes Y y Z son:

$$\mathbf{j}\cdot\frac{\partial W}{\partial y}dx\,dy\,dz = \frac{\partial v}{\partial y}dx\,dy\,dz$$
$$\mathbf{k}\cdot\frac{\partial W}{\partial z}dx\,dy\,dz = \frac{\partial w}{\partial z}dx\,dy\,dz$$

$$\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial W}{\partial x}+\mathbf{j}\cdot\frac{\partial W}{\partial y}+\mathbf{k}\cdot\frac{\partial W}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

Que es el cambio del fluido a través de las caras del paralelepipedo en la unidad de tiempo.- Si esa cantidad es por unidad de volumen tenemos:

$$\nabla\cdot W = \mathbf{i}\cdot\frac{\partial W}{\partial x}+\mathbf{j}\cdot\frac{\partial W}{\partial y}+\mathbf{k}\cdot\frac{\partial W}{\partial z}$$
$$\nabla\cdot W = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

es decir: la divergencia del vector W en el punto P es la cantidad de fluido - que se crea por unidad de tiempo en el volumen elemental correspondiente a P.-

Evidente que si $\nabla\cdot W$ es negativa se consume fluido en el punto, hay - un desagüe o sumidero y si $\nabla\cdot W$ es positivo se crea fluido en el punto, hay - una fuente.-

si

$\nabla\cdot W$ = 0 el fluido es incompresible.-

E L R O T O R

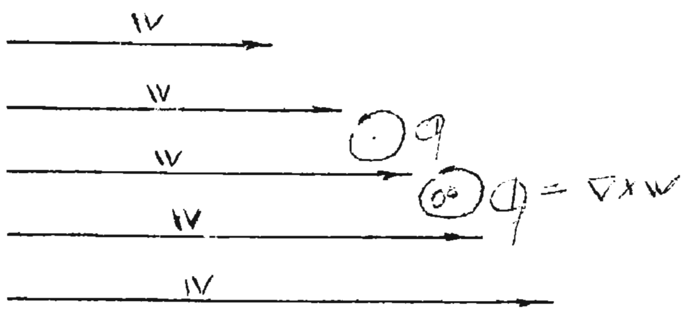
$$\nabla\times W = \mathbf{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\nabla \times \mathbb{W} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U & V & W \end{vmatrix} = \text{rotor } \mathbb{W} \text{ o Vorticidad.-}$$

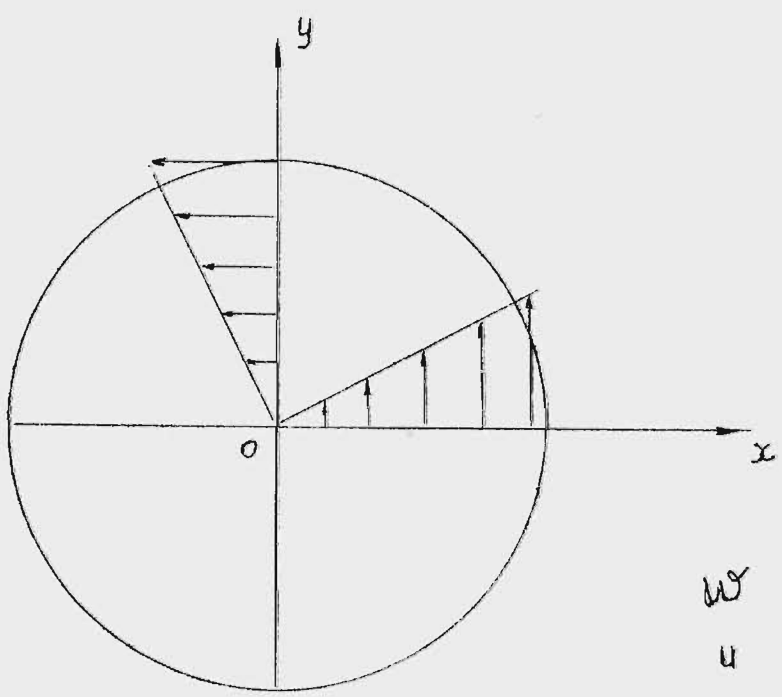
donde $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbb{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbb{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbb{k}$

$$\mathbb{W} = u\mathbb{i} + V\mathbb{j} + W\mathbb{k}$$

- **Intuitivamente** podemos dar el significado del rotor; supongamos un campo de velocidades como el representado a continuación:



cualquier parcela colocada en ese campo, girará en el sentido contrario a las - agujas del reloj, esto quiere decir que en "O" el rotor del campo es dis-- tinto de cero y su sentido es normal al plano del dibujo; hacia adelante, el rotor podemos darle otra interpretación.-



$$u = -Wx$$
$$v = +Wy$$

w = vol. angular

u = componente de la vol. perp.a "x"

v = " " " " " " "y"

$$\nabla \times \mathbb{W} = \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)}_{0}\mathbb{i} + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)}_{0}\mathbb{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbb{k}$$

$$\nabla \times \mathbb{W} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbb{k} = 2w\,\mathbb{k}$$

-----10

Esto nos dice:

El rotor del vector velocidad en un movimiento de rotación alrededor de un eje es igual al doble del vector velocidad angular.-

REGLAS DE OPERACION PARA EL USO DE ∇, $\nabla\cdot$, $\nabla\times$ APLICADO A FUNCIONES ESCALARES Y VECTORIALES.-

1 - $\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v$

2 - $\nabla\cdot(\mathbb{U}+\mathbb{V}) = \nabla\cdot\mathbb{U} + \nabla\cdot\mathbb{V}$

3 - $\nabla\times(\mathbb{U}+\mathbb{V}) = \nabla\times\mathbb{U} + \nabla\times\mathbb{V}$

4 - $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$

5 - $\nabla\cdot(u\mathbb{V}) = \nabla u\cdot\mathbb{V} + u\nabla\cdot\mathbb{V}$

6 - $\nabla\times(u\mathbb{V}) = \nabla u\times\mathbb{V} + u\nabla\times\mathbb{V}$

7 - $\nabla(\mathbb{U}\cdot\mathbb{V}) = \mathbb{V}\cdot\nabla\mathbb{U} + \mathbb{U}\cdot\nabla\mathbb{V} + \mathbb{V}\times(\nabla\times\mathbb{V}) + \mathbb{U}\times(\nabla\times\mathbb{V})$

8 - $\nabla\cdot(\mathbb{U}\times\mathbb{V}) = \mathbb{V}\cdot\nabla\times\mathbb{U} - \mathbb{U}\cdot\nabla\times\mathbb{V}$

9 - $\nabla\times(\mathbb{U}\times\mathbb{V}) = \mathbb{V}\cdot\nabla\mathbb{U} - \mathbb{V}\,\nabla\cdot\mathbb{U} - \mathbb{U}\cdot\nabla\mathbb{V} + \mathbb{U}\,\nabla\cdot\mathbb{V}$

10 - $\nabla\times(\nabla\times\mathbb{V}) = \nabla\nabla\cdot\mathbb{V} - \nabla\cdot\nabla\mathbb{V}$

11 - $(\nabla\times\mathbb{V})\times\mathbb{W} = \nabla\times(\mathbb{V}\times\mathbb{W})_{\mathbb{W}} + \mathbb{W}\,\nabla\cdot\mathbb{V} - \nabla(\mathbb{V}\cdot\mathbb{W})_{\mathbb{W}}$

EL LAPLACIANO.- $\nabla^2\varphi$

Se llama Laplaciano de una función de punto φ (x, y, z) a la divergencia del gradiente.-

$\nabla\varphi$ = gradiente

$\nabla\cdot\nabla\varphi$ = Laplaciano $\nabla^2\varphi$ y es un escalar

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

$\nabla\times\nabla\varphi = 0$ el rotor de un gradiente es nulo

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbb{V}$ = la divergencia de un rotor es nulo.-

LAPLACIANO DE UN VECTOR.- Se llama Laplaciano de un vector $\mathbb{V}$ al nuevo vector definido

$$\text{Lap. } \mathbb{V} = \nabla(\nabla\cdot\mathbb{V}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbb{V})$$

DIADAS Y DIADICAS.-

Una expresión $\mathbb{a}\,\mathbb{b}$ formada por la yuxtaposición de dos vectores sin que entre ellos exista algún punto o cruz, se llama una diada.- La suma de dos diadas o tres diadas o más diadas se llama una diádica.-

TRANSFORMACIONES LINEALES.- MATRICES.-

- Sea Rp un espacio de dimensiones "P" y sean X_i (i = 1, ...p) las coordenadas de sus puntos; análogamente sean R_q' un espacio de dimension q y X_h' (h = 1, ..q) las coordenadas de sus puntos.-

Se llama transformación lineal de Rp en Pq' a toda transformación de los puntos del primer espacio en los del segundo, definido por las ecuaciones lineales y homogéneas de la forma

$$X_i' = \sum_{h=1}^{p} A_{ih} X_h \quad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

los coeficientes de Aih son constantes y forman la matriz.-

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & A_{2p} \\ A_{q'} & A_{q2} & A_{qp} \end{vmatrix}$$

Se llama transformación lineal producto B.A a la transformación lineal - de Rp en R_r'' obtenida como resultado de verificar sucesivas transformaciones A y B.-

Las ecuaciones de esta transformación producto, serán:

$$X_k'' = \sum_{i=1}^{q} \sum_{h=1}^{p} b_{ki} a_{ki} X_h \quad (k = 1, 2 \ldots r)$$

$$C = B.A = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & C_{2p} \\ --- & ---- & ---- \\ C_{r1} & C_{r2} & C_{rk} \end{vmatrix}$$

con C1j = $\sum_{h=1}^{q} b_{ih} A_{hj}$

La matriz C de la transformación producto se llama Matriz producto ByA.-

OBSERVACIONES.-

1) - Dos matrices son iguales cuando dan lugar a la misma transformación lineal; en consecuencia cuando tienen iguales todos sus elementos.-

2) - Si una matriz tiene q filas y p columnas, se dice que es del tipo - q x p. Si $q \neq p$ la matriz es rectangular y si q = p, cuadrada.-

3) = Para que el producto de dos matrices B, A está definido, es necesa-

rio que si B es de tipo r x q y A sea del tipo q x p el producto será del tipo r x p.-

$$\begin{array}{c} 3 \times 3 \\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{23} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3 \times 2 \\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 3 \times 2 \\ A.B = \begin{bmatrix} A_{11}\, b_{11} + A_{12}\, b_{21} + A_{13}\, b_{31} & A_{11}\, b_{12} + A_{12}\, b_{22} + A_{13}\, b_{32} \\ A_{21}\, b_{11} + A_{22}\, b_{21} + A_{23}\, b_{31} & A_{21}\, b_{12} + A_{22}\, b_{22} + A_{23}\, b_{32} \\ A_{31}\, b_{11} + A_{32}\, b_{21} + A_{32}\, b_{31} & A_{31}\, b_{12} + A_{32}\, b_{22} + A_{33}\, b_{32} \end{bmatrix} \end{array}$$

Se llama matriz transpuesta de otra a la que resulte de permutar sus filas por columnas.-

Matriz unidad dee orden "n" es la matriz correspondiente a la transformación que hace corresponder cada punto en . mismo entre dos espacios de la -- misma dimensión "n".-

La representaremos por

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & X \end{bmatrix}$$

entonces Vale

$$A\mathcal{E} = \mathcal{E}.A = A$$

PROPIEDADES DE MATRICES.-

a)- La inversa del producto de dos matrices da. la fórmula.-

$$A.B^{-1} = A^{-1} - B^{-1}$$

b)- La inversa de la inversa de una matriz, es la matriz primitiva.-

$$A.A^{-1} = \mathcal{E}$$

c)- La inversa de la transpuesta de una matriz es igual a la transpuesta de la inversa.-

MATRICES SIMETRICAS Y ANTISIMETRICAS

una matriz cuadrada es simétrica: Si

$$Aij = Aji$$

y antisimétrica si

$$Aij = Aji$$

Toda matriz cuadrada es siempre la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica

Producto escalar en forma de matriz

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = Ax\,Bx + Ay\,By + Az\,Bz$$

la podemos representar así

$$\begin{bmatrix} Ax & Ay & Az \end{bmatrix} \begin{vmatrix} Bx \\ By \\ Bz \end{vmatrix} = Ax\,Bx + Ay\,By + Az\,Bz$$

PRODUCTO VECTORIAL EN FORMA DE MATRIZ

$$Cx = Ay\,Bz - Az\,By = 0Bx - Az\,By + Ay\,Bz$$

$$Cy = Az\,Bx - Ax\,Bzz = Az\,Bz - 0\,By - Ax\,Bz$$

$$Cz - Ax\,By - Ay\,Bx - Ay\,Bx + Ax\,By + 0Bzz$$

$$\begin{vmatrix} Cx \\ Cy \\ Cz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -Az & Ay \\ Az & 0 & -Ax \\ -Ay & Ax & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Bx \\ By \\ Bz \end{vmatrix}$$

Una diada se puede representar en forma de matriz así:

$$\mathbb{a}\,\mathbb{b} = \begin{vmatrix} 3 = 1 \\ Ax \\ Ay \\ Az \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{1} = 3 \\ \\ Bx \quad By \quad Bz \\ \\ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ax\,Bx & Ax\,By & Ax\,Bz \\ Ay\,Bx & Ay\,By & Ay\,Bz \\ Az\,Bx & Az\,By & Az\,Bz \end{vmatrix}$$

$$\mathbb{a}\,\mathbb{b} \neq \mathbb{b}\,\mathbb{a}$$

Diádica más completa tiene nueve términos y por eso se dice que se representa en forma de nomios.-

$$\phi = M_{11}\, ii\, ii + M_{12}\, ii\, jj + M_{13}\, ii\, kk +$$
$$M_{21}\, jj\, ii + M_{22}\, jj\, jj + M_{23}\, jj\, kk +$$
$$M_{31}\, kk\, ii + M_{32}\, kk\, jj + M_{33}\, kk\, kk$$

$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix}$$

M_{13} y M_{31} elementos conjugados

Elementos diagonales

Las diádicas correspondientes a dos matrices transpuestas se llaman conjugadas

$$\phi \neq \phi c$$

si se cumple que

$$\phi = \phi c \quad \text{son simétricas}$$

y es antisimétrica cuando los elementos diagonales son cero y sus conjugados opuestos en signo

$$\phi . \mathbb{C} = \mathbb{C} . \phi c$$

Una diada actuando como prefactor es igual a que su conjugada actúe como - posfactor

En la diada

$$a\, b$$

a es antecedente

b = " consecuente

Factor idéntico $\mathcal{E}$, es una diádica que aplicada a un vector da ese mismo vector

$$\mathcal{E} = ii\, ii + jj\, jj + kk\, kk$$

$$\mathcal{E} . r = r \qquad r . \mathcal{E} = r$$

$\mathcal{E}$ es una diada simétrica y da lo mismo aplicarlo como post o prefactor.-

ESCALAR Y VECTOR DE UNA DIADICA.-

Sea la diádica:

$$\phi = a\, m + b\, n + \mathbb{C}\, r$$

el escalar es:

$$\Phi_s = \mathbb{a}.\mathbb{m} + \mathbb{b}.\mathbb{n} + \mathbb{c}.\mathbb{r}$$

el vector es:

$$\Phi_v = \mathbb{a} \times \mathbb{m} + \mathbb{b} \times \mathbb{n} + \mathbb{c} \times \mathbb{r}$$

Si una diádica es simétrica $\Phi_v = 0$

En una matriz

$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix}$$

Se llama:

$M_{11} + M_{22} + M_{33} = \phi$ invariante lineal de la matriz

$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{11} & M_{13} \\ M_{31} & M_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = \phi_2$ invariante cuadrático

$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = \phi_3$ invariante cúbico

TEOREMA DE STO kES.-

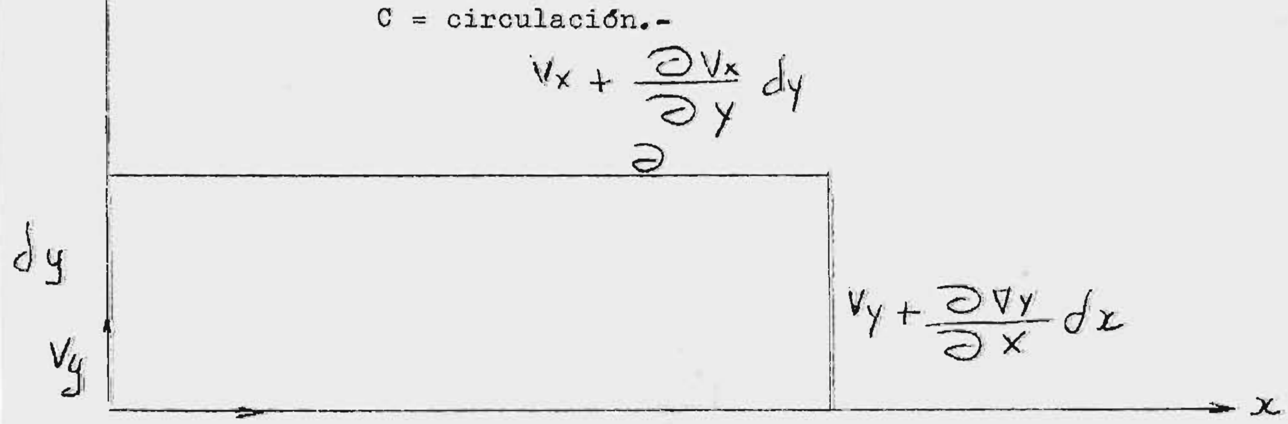
Tomemos un área muy pequeña construida en el plano (x y) cuyos lados -- sean paralelos a los ejes. En esa área tengo definido por ejemplo un campo de velocidades.-

Calculamos la circulación a lo largo del perímetro:

Siempre $\overline{\nabla} \times \mathbb{V} = \mathbb{q}$ = rotor = vorticidad

$$\delta \mathbb{r} = \mathbb{i}\,\delta x + \mathbb{j}\,\delta y + \mathbb{k}\,\delta z = \delta x\,\mathbb{i} + \delta y\,\mathbb{j} + \delta z\,\mathbb{k}$$

C = circulación.-



-----16

Por ser el área pequeña podemos poner

$$C = Vx.dx + \left(Vy + \frac{\partial Vy}{\partial x} dx\right) dy - \left(Vx + \frac{\partial Vx}{\partial y} dy \right) dx + Vy\, dy$$

$$C = \underbrace{\left(\frac{\partial Vy}{\partial x} - \frac{\partial Vx}{\partial y} \right)}_{W} dx\, dy$$

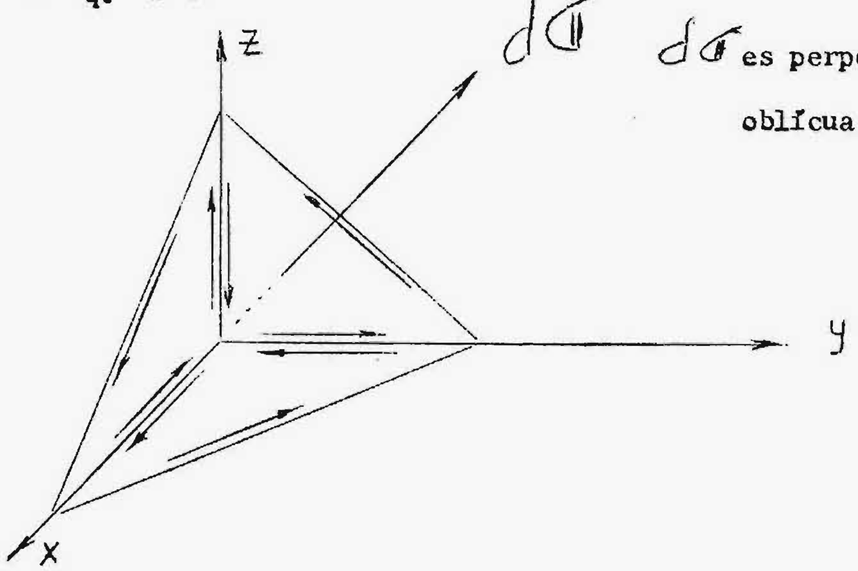
componente z de la vorticidad

$dx\ dy = d\sigma_z$ = área normal al vector

entonces podemos decir que:

$$\begin{aligned} Cx &= qx\, d\sigma_x \\ Cy &= qy\, d\sigma_y \\ Cz &= qz\, d\sigma_z \\ \hline C &= q.\, d\sigma \end{aligned}$$

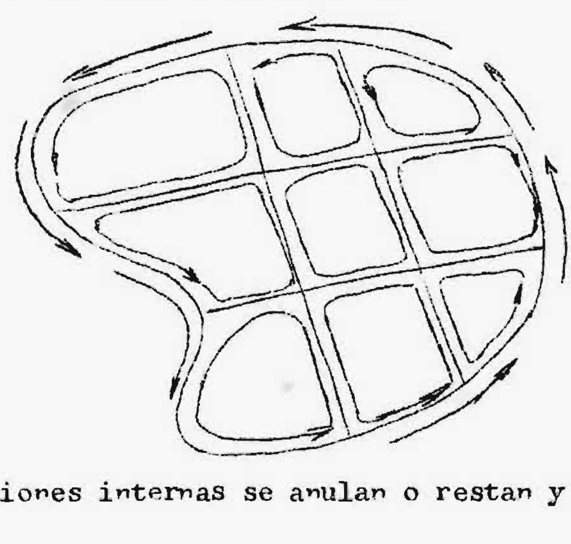
sumando tengo



$d\sigma$ es perpendicular a la cara oblícua.-

La circulación a través de una cara oblícua, es igual a la suma de las circulaciónes de las proyecciones de esa cara sobre planos coordenados.-

Si la superficie es alabeada en el espacio.-



Todas las circulaciones internas se anulan o restan y solo quedan las exteriores,

entonces:

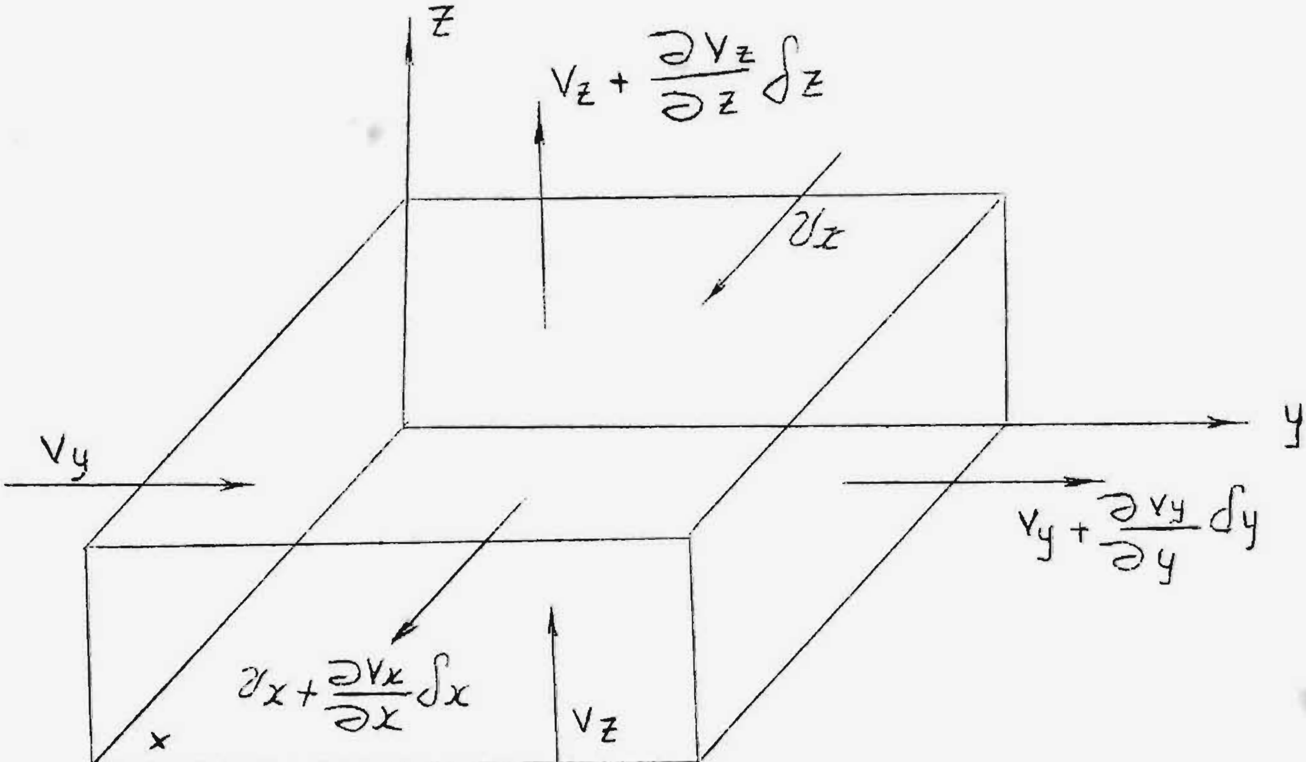
$$\oint w.\, dr = \int_{\sigma} q.\, d\sigma$$

QUE ES EL TEOREMA DE STOKES

" La circulación a lo largo de una curva cerrada de un campo vectorial, es — igual al flujo del rotor de ese mismo campo a través de cualquier casquete que — tenga por contorno la curva dada".-

TEOREMA DE GAUSS.-

El teorema de Gauss relaciona la distribución de divergencia en un campo - vectorial con el flujo a través de una superficie cerrada.-



Consideremos un paralelepipedo con sus aristas paralelas a los ejes coordenados.-

Lo único que nos interesa es saber la intensidad del flujo a través de las caras del paralelepipedo.-

$$\text{Causal} = \left(V_z + \frac{\partial V_z}{\partial z} \delta z - V_z \right) \delta x\, \delta y + \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} \delta x - V_x \right) \delta y\, \delta z + \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} \delta y - V_y \right) \delta z\, \delta z$$

$$\text{Caudal} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \frac{\delta x\, \delta y\, \delta z}{\delta \tau}$$

$$Q = \nabla \cdot \mathbb{V}\, \delta \tau$$

$$Q = \mathbb{V} \cdot \delta \sigma \qquad \delta \tau = \text{diferencial de volumen}$$

$$\text{Caudal} = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{V}\, \delta \tau = \int_{\sigma} \mathbb{V} \cdot \delta \sigma$$

=======18

Que es el Teorema de Gauss

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbb{W}\, d\tau = \int_{\sigma} \mathbb{W} \cdot d\sigma$$

Si se cumple:

$\nabla \times \mathbb{h} = 0 \quad \mathbb{h} = \nabla \alpha$ en este caso se dice que $\mathbb{h}$ es un vector la melar.- .-

Si $\nabla \times \mathbb{W} \neq 0$ o sea que $\mathbb{W} \neq \nabla \phi$ pero se podrá encontrar bajo ciertas con diciones un escalar μ, llamado factor integrante tal que

$\nabla \times (\mu \mathbb{W}) = 0$ en este caso

$\mathbb{W} = \dfrac{1}{\mu} \nabla \phi$ y si hacemos $\dfrac{1}{\mu} = \alpha$ obtengo $\mu \mathbb{W} = \nabla \phi$ entonces

$$\mathbb{W} = \frac{1}{\mu} \nabla \phi = \alpha \nabla \phi$$

en este caso se dice que $\mathbb{W}$ es doblemente lamelar y el vector no es irrotacional.

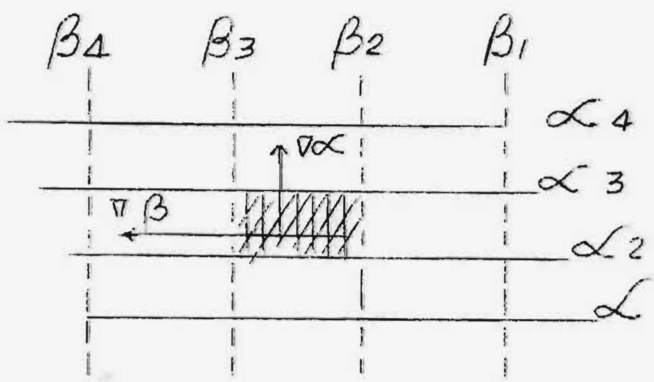
Se cumple $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{W}) = 0$

Vectores solenoidales cumplen

$$\mathbb{S} = \nabla \alpha \times \nabla \beta$$

$$\nabla \cdot \mathbb{S} = \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) - \nabla \alpha \cdot \nabla \times \nabla \beta = 0$$

Vectores solenoidales $\nabla \cdot \mathbb{S} = 0$



El vector solenoidal tiene la misma dirección del tubo formado por las superficies α = constante β = constante o sea la dirección del vector es la misma o paralela a la de los tubos.- Donde el tubo se ensancha, el módulo del vector - disminuye y donde el tubo se angosta el módulo del vector aumenta, de modo que el flujo del vector es constante.-

CASO DE LA ACELERACION DE GRADIENTE.-

$$\mathbb{G} = -\alpha \nabla p$$

$\nabla \times \mathbb{G} = -\nabla \alpha \times \nabla p \neq 0$ Si $\nabla \alpha$ no es paralelo ∇p, es decir cuando las superficies de igual α se cortan con las de igual p, los tubos que forman las superficies de α y p constante, forman tubos que se llaman solenoides, en este caso el fluido se llama baroclínico.- Cuando las superficies de α y p son coincidentes y paralelos, se dice que el fluido es BAROTROPICO.-

Cuando α = constante en todo el campo

$$\nabla \alpha = 0 \quad \mathbb{G} = 0$$

el fluido es homogéneo.-

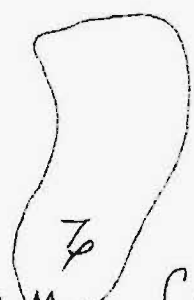
ECUACION DE CONTINUIDAD.-

Sea una región cualquiera τ

ρ = densidad

M = masa contenida en τ

M $= \rho \tau$



$$\frac{\partial M}{\partial t} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau \qquad (\underline{1})$$

por otra parte la variación de masa con el tiempo en la superficie

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\int_{\sigma} \rho \, \mathbb{W} \cdot d\sigma \qquad (\underline{2})$$

Por Gauss

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\int_{\sigma} \rho \, \mathbb{W} \cdot d\sigma = -\int_{\tau} \nabla \cdot (\rho \, \mathbb{W}) \, d\tau \qquad (3)$$

igualando ($\underline{1}$) y ($\underline{3}$) tengo

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau = -\int_{\tau} \nabla \cdot (\rho \, \mathbb{W}) \, d\tau$$

Suprimiendo integrales tengo

========20

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbb{V})}$$

Ecuación de continuidad de la masa en su forma local.-

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbb{V})$$

desarrollando = $\nabla \cdot (\rho \mathbb{V})$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbb{V} \cdot \nabla \rho - \rho \nabla \cdot \mathbb{V}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbb{V} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbb{V}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbb{V}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbb{V}} \quad (\underline{4})$$

forma sustancial de la ecuación de continuidad.-

también podemos poner:

$$\alpha = \frac{m}{\rho}$$

$$\ell n \alpha = \ell n m - \ell n \rho$$

$$\frac{d \ell n \alpha}{dt} = \underbrace{\frac{d \ell n m}{dt}}_{\not 0} \div \frac{d \ell n \rho}{dt} \quad (\underline{5})$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

comparando ($\underline{4}$) y ($\underline{5}$) tengo

$$\boxed{\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \nabla \cdot \mathbb{V}}$$

dilataciones relativas

ECUACION DE MOVIMIENTO.-

$$\mathbb{F} = m\, \underline{\mathbb{a}}$$

$\mathbb{F}$ = fuerza

m = masa

a = aceleracion

$$\mathbb{F} = m\frac{d\mathbb{V}}{dt}$$

$$\mathbb{F} = \frac{d(m\mathbb{V})}{dt}$$ variación de la cantidad de movimiento con el tiempo

τ La parcela tiene un volumen determinado.-

$m\,\mathbb{V} = \int_{\tau} \rho\,\mathbb{V}\,d\tau$ derivando $\mathbb{V}$ tengo

$$m\frac{d\mathbb{V}}{dt} = \int_{\tau} \rho\,\frac{d\mathbb{V}}{dt}\,d\tau$$

$$\mathbb{F} = \int_{\tau} \rho\frac{d\mathbb{V}}{dt}\,d\tau$$

$\mathbb{F}$ = representa dos clases de fuerzas, $\mathbb{F}_V$ y las de superficie $\mathbb{F}_S$

$$\mathbb{F}_V + \mathbb{F}_S = \int_{\tau} \rho\frac{d\mathbb{V}}{dt}\,d\tau$$

$\mathbb{F}_V = \int_{\tau} \rho g\,d\tau$ para fuerza de gravedad solamente actuado en todo el volumen.-

$\mathbb{F}_S = -\int_{\sigma} p\,d\sigma$ Para fluido no viscoso, ideal o perfecto, en la cual — las fuerzas de superficie son únicamente normales a la superficie.-

Por Gauss tengo

$$-\int_{\sigma} p\,d\sigma = -\int \nabla p\,d\tau$$

$$\mathbb{F}_V + \mathbb{F}_S = \int_{\sigma} \rho g\,d\tau - \int_{\tau} \nabla p\,d\tau = +\int \rho\,\frac{d\mathbb{V}}{dt}\,d\tau$$

como se cumple para todas las d la podemos eliminar escribiendo:

$$\rho\frac{d\mathbb{V}}{dt} = \rho g - \nabla p$$

dividiendo por ρ tengo ; $\frac{1}{\rho} = \alpha$

$$\boxed{\frac{d\mathbb{V}}{dt} = g - \alpha\,\nabla p}$$ Ecuacion del movimiento en su forma sustancial.-

Caso particular:

Si $\frac{d\mathbb{V}}{dt} = 0$ aceleración nula.-

$\mathbf{g} - \alpha \nabla p$ apliquémosle escalar $\mathbb{k}$

$$\boxed{-g = \alpha \frac{\partial p}{\partial z}}$$ Ecuación hidrostática

FORMA LOCAL DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO.-

$$\frac{d\mathbb{V}}{dt} \quad \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} + \mathbb{V} \cdot \nabla \mathbb{V}$$

$$= \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} + \nabla \mathbb{V} \cdot \mathbb{V} - \mathbb{V} \times (\nabla \times \mathbb{V}) \text{ si } \mathbb{q} = \nabla \times \mathbb{V}$$

$$\frac{d\mathbb{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbb{V}^2 + \mathbb{q} \times \mathbb{V}$$

entonces

$$\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} + \mathbb{q} \times \mathbb{V} + \frac{1}{2} \nabla \mathbb{V}^2 = -\nabla \phi - \alpha \nabla p$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} = -\nabla \left(\phi + \frac{1}{2} \mathbb{V}^2 \right) - \alpha \nabla p - \mathbb{q} \times \mathbb{V}}$$

En el caso de un flujo permanente, irrotacional, de un fluido homogéneo.-

$\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} = 0$ por flujo permanente

irrotacional $\mathbb{q} = 0 \quad \mathbb{q} \times \mathbb{V} = 0$

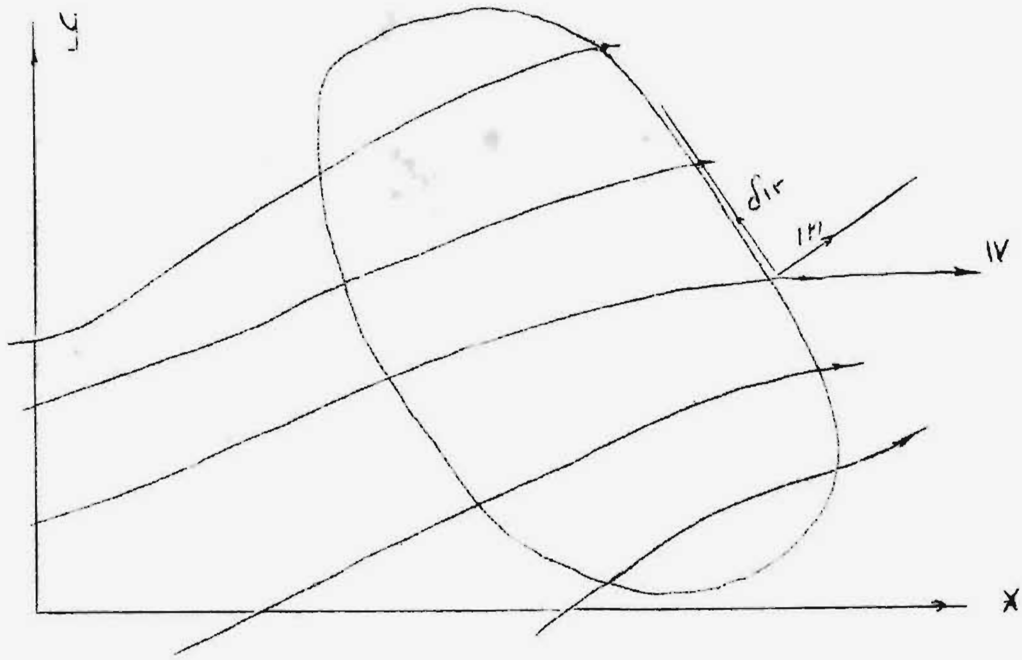
$$0 = -\nabla \left(\phi + \frac{1}{2} \mathbb{V}^2 + \alpha p \right)$$

la expresión

$$\boxed{\phi + \frac{1}{2} \mathbb{V}^2 + \alpha p = \text{constante}}$$

Ecuación de Bernoulli

FUNCION DE CORRIENTE.-



FLUJO DE UN FLUIDO A TRAVES DE UN CILINDRO DE ESPESOR UNITARIO.-

$\mathbb{V}$ = Velocidad tangente a la linea de corriente

$\delta \mathbb{r}$ = vector posicion

$\mathbb{t}$ = versor en dirección de $\delta \mathbb{r}$

$\mathbb{n}$ = " normal a $\delta \mathbb{r}$

Caudal de volumen.-

$$dF = \mathbb{V} . \mathbb{n} \delta r$$

$$dF = \mathbb{V} . \mathbb{K} \times \delta \mathbb{r}$$

$$dF = \mathbb{K} \times \mathbb{V} . \delta \mathbb{r}$$

Si el fluido es homogéneo e incompresible,

$$\oint dF = 0$$

entonces:

Por Stokes:

$$\oint \mathbb{K} \times \mathbb{V} . \delta \mathbb{r} = 0$$

(A) $\int_{\sigma} \nabla \times (\mathbb{K} \times \mathbb{V}) . \mathbb{K} \delta s$ donde $ds = dx\,dy$

$\mathbb{K} ds$ = vector superficie

$$\oint \mathbb{K} \times \mathbb{V} . \delta \mathbb{r} = \oint \mathbb{K} (\nabla . \mathbb{V}) . \mathbb{K} ds$$

$$\oint \mathbb{K} . \mathbb{K} (\nabla . \mathbb{V}) ds = \oint \nabla . \mathbb{V} ds = 0$$

=======24

Para fluido incompresible

$$\nabla \cdot \mathbb{V} = 0$$

Lo integral (4) vale para cualquier ds entonces

$$\int \nabla \times (\mathbb{K} \times \mathbb{V}) \cdot \mathbb{K}\, ds = 0 \qquad \text{y}$$

$$\underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{V}}_{\substack{\downarrow \\ \text{vector Lamelar}}} = -\nabla \psi$$

y ψ le llamamos la función corriente, ψ es la isolinea tangente a los vecto_ tores velocidad en todos los puntos que ocupan las parcelas en un instante dado,_ es decir, es la fotografía del campo de velocidades en un instante dado.-

Nótese que la función de corriente se ha deducido para fluidos incompresibles y bidimensionales y queda definido únicamente para esas condiciones.-

Probaremos que

$$\mathbb{V} = \mathbb{K} \times \nabla \psi$$

Para fluidos incompresibles $\nabla \cdot \mathbb{V} = 0$

$$\nabla \cdot \mathbb{V} = \nabla \cdot (\mathbb{K} \times \nabla \psi) = \nabla \psi \cdot \underbrace{\nabla \times \mathbb{K}}_{0} - \mathbb{K} \cdot \underbrace{\nabla \times \nabla \psi}_{0}$$

$\mathbb{K}$ es irrotacional $\nabla \times \mathbb{K} = 0$

$\nabla \times \nabla \psi = 0$ rotor de un gradiente es cero

Entonces $\nabla (\mathbb{K} \times \nabla \psi) = 0$ y

$$\mathbb{V} = \mathbb{K} \times \nabla \psi \qquad \text{pero } \mathbb{K} = \nabla z$$

entonces $\mathbb{V} = \nabla z \times \nabla \psi$

Cuando el vector $\mathbb{V}$ se puede expresar mediante la función corriente es un vector selenoidal. Los selenoides son los tubos formados por las superficies

z = constante y ψ = constante

$$\mathbb{V} = \mathbb{K} \times \nabla \psi$$

$$\mathbb{u}\cdot \mathbb{V} = \mathbb{u}\cdot \mathbb{K} \times \nabla \psi$$

$$\mathbb{u}\cdot \mathbb{V} = \mathbb{u} \times \mathbb{K}\cdot \nabla \psi$$

$$\mathbb{u}\cdot\mathbb{V} = -\mathbb{j} \cdot \nabla \psi$$

$$\mathbb{u}\cdot\mathbb{V} = - \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

u – componente de la velocidad en el eje de x

v – componente de la velocidad en el eje y

$$\boxed{u = - \frac{\partial \psi}{\partial y}} \qquad \boxed{v = \frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

ECUACION DE MOVIMIENTO PARA UN FLUIDO REAL.-

$-\rho(\dot{\mathbb{V}} - g)$ = Fuerza por unidad de volumen

$\rho(\dot{\mathbb{V}} - g) = \nabla\cdot \mathbb{Y}$ Y = Tensor de tensiones

$$\dot{\mathbb{V}} = \frac{d\mathbb{V}}{dt}$$

El tensor Y se puede descomponer en dos partes, una simétrica y otra antisisimétri ca.-

Podemos descomponer el tensor de las tensiones en dos tensores, uno que -- provenga del campo de presiones y otro del campo de velocidades, así:

$\mathcal{P}$ = tensor que desperde del campo de presiones

$\mathcal{F}$ = " " " " " " velocidades

$\mathcal{E}$ = idenfactor

entonces

$\mathcal{P} = -p\,\mathcal{E}$ isotropo y su variante lineal es cero.-

En cuanto al tensor $\mathcal{F}$ podemos aplicar la hipótesis de NAVIER STOKES, que corresponde a las tensiones tangenciales. Supondremos que va ser proporcional al tensor de deformación, proveniente del campo de velocidades

$\mathcal{F} \approx D$ D = tensor de deformación

$$\mathcal{F} = 2\mu D$$

$$Y = -p\mathcal{E} + 2\mu D$$

La expresión de D la escribiremos así:

$$D = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbb{V} + \mathbb{V}\nabla - 2/3\, e\, \mathcal{E}\right)$$

en donde $e = \nabla . \mathbb{V}$

De = 0 el invariante lineal de D es cero

$$Y = -p\mathcal{E} + \mu\left(\nabla \mathbb{V} + \mathbb{V}\nabla - 2/3\, e\, \mathcal{E}\right)$$

De la ecuación general

$$\rho\,(\dot{\mathbb{V}} - g) = \nabla . Y$$

Veamos por separado $\nabla . Y$

$$\nabla . Y = \nabla . (\underbrace{-p\mathcal{E}}) + \mu\left[\nabla . \left(\nabla \mathbb{V} + \mathbb{V}\nabla - 2/3\, e\, \mathcal{E}\right)\right]$$

$$\nabla . (-p\mathcal{E}) = -\nabla p . \mathcal{E} - p\underbrace{\nabla . \mathcal{E}}_{0}$$

$$\nabla . (-p\mathcal{E}) = -\nabla p$$

$$\mu\left[\nabla . \left(\nabla \mathbb{V} + \mathbb{V}\nabla - 2/3\, e\, \mathcal{E}\right)\right] = \mu\left[\nabla . \nabla \mathbb{V} + (\nabla . \mathbb{V})\nabla - 2/3\, \nabla - (e\,\mathcal{E})\right]$$

$$= \mu\left[\nabla^2 \mathbb{V} + \nabla\,(\nabla . \mathbb{V}) - 2/3\, \nabla \nabla . \mathbb{V}\right]$$

$$= \mu\left(\nabla^2 \mathbb{V} + 1/3\, \nabla e\right)$$

y la ecuación de movimiento queda:

$$\nabla . Y = -\nabla p + \mu\left(\nabla^2 \mathbb{V} + 1/3\, \nabla e\right)$$

<u>ECUACION DINAMICA DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO REAL, POR UNIDAD DE VOLUMEN</u>.-

$$\rho\,(\dot{\mathbb{V}} - g) = -\nabla p + \mu\left(\nabla^2 \mathbb{V} + 1/3\, \nabla e\right)$$

La ecuación dinámica del movimiento representa tres ecuaciones escalares.-

Incógnitas U-v-W - ρ - p .-

Otra ecuación sería la de continuidad.-

La ecuación que falta para resolver el sistema, tendría que ser una ecuación termodinámica que no contenga variación de temperatura, puesto que μ coeficiente de viscosidad depende fundamentalmente de la temperatura.-

En varios casos, para el tratamiento de fluidos se desprecia el término de la ecuación de movimiento que depende del campo de velocidades (fluido no viscoso).-

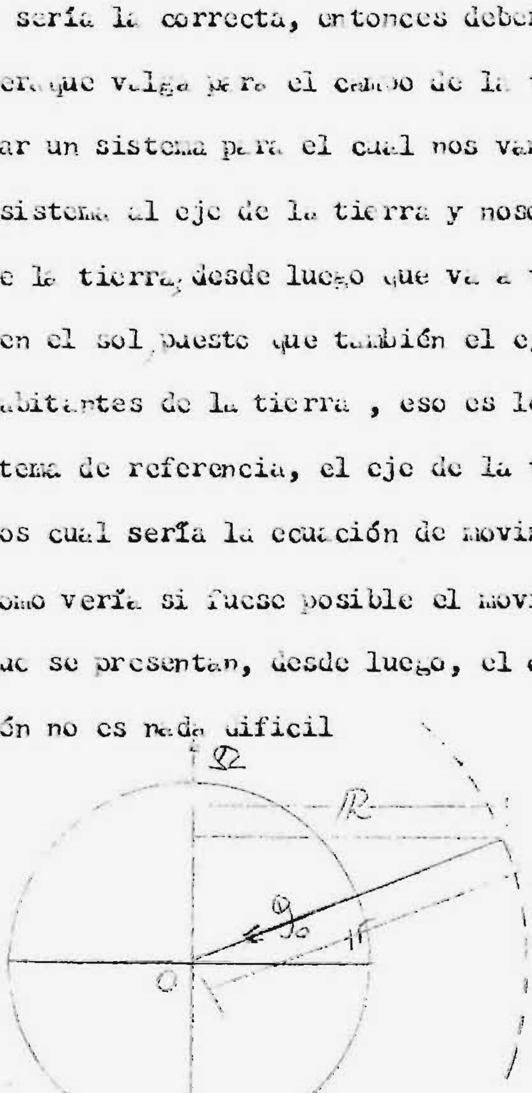
$$\mu \left(\nabla^2 \mathbb{V} + \tfrac{1}{3} \nabla \mathcal{C} \right) = 0 \qquad \mathcal{C} = \nabla \cdot \mathbb{V}$$

y queda la ecuación de movimiento.-

$$\rho \left(\dot{\mathbb{V}} - g \right) = - \nabla p$$

Ecuación de movimiento que vale para un fluido ideal; que vale para un sistema de -ejes inercial, es decir que se mueve con velocidad constante

Esta ecuación de movimiento no se puede aplicar como ésta, puesto que nosotros tenemos una tierra aproximadamente esférica, con los fluidos que la rodean y si tomamos esta ecuación en una cierta parcela del fluido podemos considerar la ecuación de movimiento para un sistema de referencia que está fijo a la tierra, o sea moviéndonos con la tierra, pero la tierra también gira alrededor de su eje,de manera que esto no sería más que un movimiento relativo, puesto que respecto del eje de la tierra la parcela se movería con otra velocidad, y la ecuación de movimiento si la aplicamos no sería la correcta, entonces deberíamos trabajar la ecuación de movimiento de manera que valga para el campo de la tierra rotando, también allí tendremos que utilizar un sistema para el cual nos vamos a entender; una posibilidad sería fijar el sistema al eje de la tierra y nosotros referimos nuestras ecuaciones al eje de la tierra, desde luego que va a ver variaciones para un observador que estuviera en el sol, puesto que también el eje de la tierra se mueve, pero nosotros somos habitantes de la tierra , eso es lo que nos interesa.Podemos elegir bien, como sistema de referencia, el eje de la tierra y referirnos a ese sistema. Consideraremos cual sería la ecuación de movimiento para un observador situado en el polo, como vería si fuese posible el movimiento de los fluidos; veamos las dificultades que se presentan, desde luego, el cambio de sistema de referencia para esta ecuación no es nada dificil



Si tratamos de calcular la variación individual de una parcela o partículas de fluido.-

Qué se entiende por partícula de fluido.- Que las propiedades fundamentales que definen una partícula de fluido son tal que la densidad, la presión, la temperatura, sean no dependientes del volumen y tampoco sean dependientes del tiempo para intervalos de tiempo pequeños.-

Si queremos calcular la variación individual o la derivada total de esta parcela, tenemos que la variación individual significa que seguimos la trayectoria a través del movimiento de esta parcela y entonces va a depender del sistema de referencia, para un observador situado sobre la superficie de la tierra va a ver mover a esta parcela con una cierta velocidad, pero para un observador situado en el polo verá el movimiento de otra forma, es decir, que la derivada total $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{V}\cdot\nabla$ dependen del sistema de referencia. Vamos a ver que ocurre para ese sistema de referencia asociado al eje de la tierra, este se llama sistema absoluto, relativo al movimiento referente a un observador fijo a la tierra.- (o sea el movimiento referido a la superficie de la tierra).-

$\frac{D}{Dt}$ = derivada respecto a sus sistema asociado al eje de la tierra

$\frac{d}{dt}$ = derivada respecto a un sistema asociada a cualquier punto fijo de la tierra.-

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{V}_a\cdot\nabla \qquad \text{Velocidad absoluta} = \mathbb{V}_a$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{V}_r\cdot\nabla \qquad \text{Velocidad relativa} = \mathbb{V}_r$$

En cuanto a la variación local, depende del sistema de referencia, pero para nuestro tipo de problemas no vamos a tener dificultad porque la variación de la tierra es constante.-

En cuanto al campo de velocidad, la velocidad absoluta será igual a:

$$\mathbb{V}_a = \mathbb{V}_r + \mathbb{U}$$

donde $\mathbb{U} = \Omega \times \mathbb{r}$

La velocidad debe estar en el plano meridiano para ser perpendicular a la vertical!

$\mathbb{V}_a$ = Velocidad de arrastre

$\mathbb{V}_r$ = Vel. relativa

$\mathbb{U}$ = Vel. de arrastre

=====29

Si quisiéramos escribir, nos dá $\quad \Omega$ = Vel. angular de la tierra.-

$\dfrac{D\mathbb{r}}{Dt} = \mathbb{V}a$ = Velocidad absoluta

$\dfrac{d\mathbb{r}}{dt} = \mathbb{V}r$ = Velocidad relativa

Para el movimiento absoluto

$$\frac{D\mathbb{r}}{Dt} = \frac{d\mathbb{r}}{dt} + \Omega \times \mathbb{r} \qquad ?$$

hubiésemos partido del operador ?

$$\frac{D}{Dt} - \frac{d}{dt} + \Omega \times$$

La ecuación de movimiento absoluto es:

$\dot{\mathbb{V}} - g = \alpha\,(\nabla \cdot y) \qquad \dot{\mathbb{V}}$ = tiene que ser absoluto porque su deduc-- ción parte de la 2ª ley de Newton que vale para un sistema inercial y pongo

$$\dot{\mathbb{V}}a - g_a = \alpha\,(\nabla \cdot y)$$

$$\dot{\mathbb{V}}a + \nabla \phi_a = \alpha\,(\nabla \cdot y) \qquad \alpha = \text{volumen específico}$$

Para hallar la ecuación de movimiento referido al eje de la tierra tenemos que hallar la aceleración $\dot{\mathbb{V}}a$ que es igual a:

$$\dot{\mathbb{V}}a = \frac{D\mathbb{V}a}{Dt} = \left(\frac{d}{dt} + \Omega \times\right)(\mathbb{V}r + \mathbb{U})$$

entonces sí podemos calcular $\dot{\mathbb{V}}a$, suponiendo lícito al operador $\left(\dfrac{d}{dt} + \Omega \times\right)$ aplicado dos veces el vector posisión, es decir, si el operador $\left(\dfrac{d}{dt} + \Omega \times\right)$ es - aplicable al vector derivado, para eso es necesario probar que la aceleración la_ puedo desdoblar en una parte relativa y la otra de arrastre.-

Suponiendo lícito aplicar el mismo operador a la derivada nos va a dar:

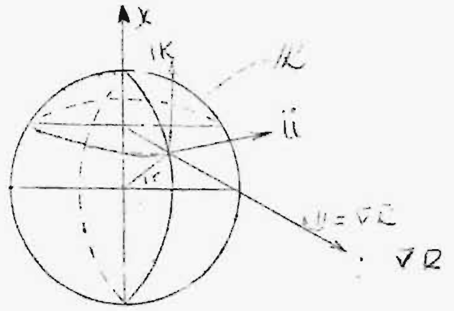
$$\begin{aligned} \frac{D\mathbb{V}a}{Dt} &= \frac{d\mathbb{V}r}{dt} + \frac{d\mathbb{U}}{dt} + \Omega \times \mathbb{V}r + \Omega \times \mathbb{U} \\ &= \frac{d\mathbb{V}r}{dt} + \Omega \times \mathbb{V}r + \Omega \times \mathbb{V}r + \Omega \times \mathbb{U} \\ &= \frac{d\mathbb{V}r}{dt} + 2\,\Omega \times \mathbb{V}r + \Omega \times \mathbb{U} \end{aligned}$$

$$\mathbb{U} = \Omega \times \mathbb{r}$$

$$\Omega = \text{constante}$$

$$\frac{d\mathbb{U}}{dt} = \frac{d(\Omega \times \mathbb{r})}{dt} = \Omega \times \frac{d\mathbb{r}}{dt} = \Omega \times \mathbb{V}r$$

Vamos a ver como podemos calcular $\Omega \times U$



$\mathbb{K}$ Es paralelo al eje de la tierra.-

u tiene la dirección de U (de oeste a - este)

tiene la dirección de un paralelo.-

Si hacemos $\Omega \times U = - \underbrace{\nabla R}_{\text{dirección}} \quad \underbrace{\Omega U}_{\text{módulo}}$

pero

$$U = \Omega R$$

$$\Omega \times U = -\nabla \left(\frac{1}{2} \Omega^2 R^2 \right)$$

y sustituyendo tengo:

$$\frac{D\mathbb{V}a}{Dt} = \frac{d\mathbb{V}r}{dt} + 2\,\Omega \times \mathbb{V}r - \nabla \left(\frac{1}{2} \Omega^2 R^2 \right)$$

y la ecuación de movimiento queda:

$$\frac{d\mathbb{V}r}{dt} + 2\Omega \times \mathbb{V}r - \nabla \left(\frac{1}{2} \Omega^2 R^2 \right) + \nabla \phi_a = \alpha \nabla \cdot y$$

y agrupando en uno solo las que aparece ∇ tenemos

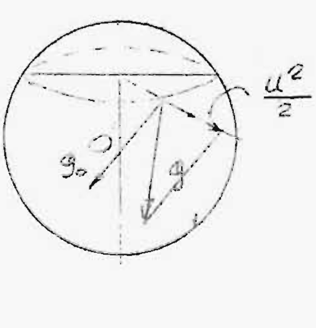
$$\frac{d\mathbb{V}r}{dt} + 2\,\Omega \times \mathbb{V}r + \nabla \left(\phi_a - \frac{1}{2} \Omega^2 R^3 \right) = \alpha \nabla . y$$

pero $\dfrac{\Omega^2 R^2}{2} = \dfrac{U^2}{2}$ y puedo poner:

$$\frac{d\mathbb{V}r}{dt} + 2\,\Omega \times \mathbb{V}r + \underbrace{\nabla \left(\phi_a - \frac{U^2}{2} \right)}_{\phi} = \alpha \nabla . y$$

$\nabla \phi$ = potencial gravitatorio relativo a un observador fijo la tierra.-

El término $\nabla \left(\phi_a - \dfrac{U^2}{2} \right)$ en dos partes



$\dfrac{U^2}{2}$ aceleración debido a fuerza centrífuga

g_o = gravedad absoluta

g aceleración relativa

======

En la expresión de la ecuación de movimiento hemos mantenido el subindice-r, para indicar lo relativo, lo quitaremos, entendiéndose que los parámetros que aparecen corresponden a las medidas para un observador sobre la tierra y es:

$$\frac{d\mathbb{V}}{dt} + 2\Omega \times \mathbb{V} - g = \alpha \nabla\cdot\mathcal{Y}$$

$$\dot{\mathbb{V}} + \underline{2\Omega \times \mathbb{V}} + \nabla\phi = \underbrace{\alpha \nabla\cdot\mathcal{Y}} \qquad (1)$$

fuerzas actuantes debido a la presencia de fluido.-

$\mathcal{Y}$ = tensor de tensiones

La ecuación de movimiento es por unidad de masa.-

Como $\mathcal{Y} = -p\mathbb{E} + \underbrace{\mathcal{F}}$ Tensor dado por fuerzas tangenciales.-

$$\nabla\cdot\mathcal{Y} = -\nabla p + \nabla\mathcal{F} \qquad (2)$$

y sustituyendo 2 en 1 tengo

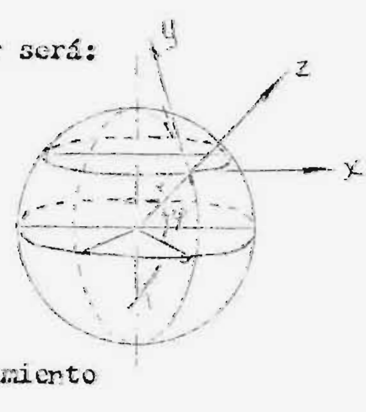
$$\boxed{\dot{\mathbb{V}} + 2\Omega\times\mathbb{V} + \nabla\phi + \alpha\nabla p = \alpha\nabla\cdot\mathcal{F}}$$ Ecuación de movimiento relativo.-

- El término $\alpha\nabla\cdot\mathcal{F}$ se suele despreciar en fluidos o sea que se supone viscosidad igual a 0.-

DESCOMPONER LA ECUACION DE MOVIMIENTO.-

TEMA: DESARROLLAR LA ECUACION DE MOVIMIENTO Y DESCOMPONERLO EN SU PARTE HORIZONTAL Y VERTICAL.-

La terna a usar será:



λ = longitud
φ = latitud

De la ecuación de movimiento

$$\dot{\mathbb{V}} + 2\Omega\times\mathbb{V} + \nabla\phi + \alpha\nabla p = \alpha\nabla\cdot\mathcal{F}$$

$$\dot{\mathbb{V}} = \frac{d\mathbb{V}}{dt} = \frac{\partial\mathbb{V}}{\partial t} + \mathbb{V}\cdot\nabla\mathbb{V}$$

hagamos $\mathbb{V} = \mathbb{V}_H + w\,\mathbb{k}$

$$\nabla = \nabla_H + \mathbb{k}\frac{\partial}{\partial z}$$ $\mathbb{V}_H$ = está en el plano $i - j$

$w\mathbb{k}$ en la dirección de $\mathbb{k}$

$$\dot{\mathbb{V}} = \frac{d\mathbb{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbb{V}_H}{\partial t} + \mathbb{k}\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbb{V}_H - w\mathbb{k}) \cdot \nabla(\mathbb{V}_H + w\mathbb{k})$$

$$\dot{\mathbb{V}} = \frac{d\mathbb{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbb{V}_H}{\partial t} + \mathbb{k}\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbb{V}_H \cdot \nabla \mathbb{V}_H + w\mathbb{k}\cdot\nabla\mathbb{V}_H + \mathbb{V}_H \cdot \nabla w\mathbb{k} + w\mathbb{k}\cdot\nabla w\mathbb{k}$$

Explicación

$$\frac{d\mathbb{V}_H}{dt} = \frac{\partial \mathbb{V}_H}{\partial t} + \mathbb{V}_H \cdot \nabla \mathbb{V}_H + w\mathbb{k}\cdot\nabla\mathbb{V}_H$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbb{V}\cdot\nabla w \quad)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbb{V}_H + w\mathbb{k})\cdot\nabla w$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbb{V}_H\cdot\nabla w + w\mathbb{k}\cdot\nabla w\mathbb{k}$$

$$\mathbb{k}\frac{dw}{dt} = \mathbb{k}\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbb{V}_H \cdot \nabla w\mathbb{k} + w\mathbb{k}\cdot\nabla w\mathbb{k}$$

y queda

$$\frac{d\mathbb{V}}{dt} = \frac{d\mathbb{V}_H}{dt} + \frac{dw}{dt}\mathbb{k} + \mathbb{V}_H\cdot\nabla\mathbb{k}$$

$\frac{d\mathbb{V}_H}{dt}$ es la aceleración de cualquier parcela que se mueve sobre la superficie de la tierra.-

La aceleración del movimiento sobre la superficie de la tierra se puede descomponer en una aceleración tangencial (subíndice) y otra en la dirección del centro (centrífuga)

$$\dot{\mathbb{V}} = \left(\frac{d\mathbb{V}_H}{dt}\right)_H - \frac{\mathbb{V}_H^2}{r}\mathbb{k} + \frac{dw}{dt}\mathbb{k} + w\,\mathbb{V}_H\cdot\nabla\mathbb{k}$$

podemos poner para movimiento horizontal, la ecuación

$$\left(\frac{d\mathbb{V}_H}{dt}\right)_H + \frac{w}{r}\mathbb{V}_H + \overbrace{2\Omega_z}^{f}\,\mathbb{k}\times\mathbb{V}_H + 2\Omega_y\, w\, i + \alpha\nabla_H p = \alpha\nabla_H \Phi$$

Lo más común es tomar $2\Omega_z = f$ (componente vertical de la vorticidad de la tierra.-

$2\Omega_y U$ y $2\Omega_y W$ en muchos casos no se toma en cuenta.-

$$\boxed{\frac{dw}{dt} - \frac{W_H^2}{r} - 2\Omega_y U + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} = \alpha (\nabla . F).k}$$

Componente vertical de la ecuación de movimiento para fluido real.-

Si el movimiento es puramente horizontal

$$\frac{dW}{dt} = 0$$

$$\frac{W_H^2}{r} = 0$$

$2\Omega_y U =$ despreciable.-

$$\therefore \frac{\partial \phi}{\partial z} + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} = \alpha (\nabla . F).k$$

ECUACION DE VORTICIDAD.-

Partamos de la ecuación de movimiento en su forma local y apliquémosle el rotor rotor

$$\frac{\partial W}{\partial t} + q \times W + \tfrac{1}{2}\nabla W^2 = g - \alpha \nabla p$$

Ecuación de movimiento en forma local, apliquemosle el rotor

$$\nabla \times \left(\frac{\partial W}{\partial t} + q \times W + \tfrac{1}{2}\nabla W^2 = -g - \alpha \nabla p \right)$$

Analicemos término a término.

$$\nabla \times \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times W) = \frac{\partial q}{\partial t}$$ en derivadas parciales intercambiamos operadores

$$\nabla \times (q \times W) = \nabla . (W q - q W) = \nabla . W q + W . \nabla q - \underbrace{\nabla . q}_{0} W - q . \nabla W$$

$$\nabla \times (q \times W) = q \, \nabla . W + W . \nabla q - q . \nabla W$$

$$\nabla \times \left(\tfrac{1}{2}\nabla W^2\right) = \tfrac{1}{2}\underbrace{\nabla \times \nabla W^2}_{0}$$ por ser rotor de un ascendente.

por ser rotor de un vector lamelar.-

$$\nabla \times g = -\nabla \times \nabla \phi = 0$$

$$\nabla \times (-\alpha \nabla p) = -\nabla \alpha \times \nabla p - \alpha \underbrace{\nabla \times \nabla p}_{0}$$

$$= -\nabla \alpha \times \nabla p$$

y la ecuación nos queda:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + q \, \nabla . W + W . \nabla q - q . \nabla W = -\nabla \alpha \times \nabla p$$

$$1 + 2 = \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{W} \cdot \nabla q = \frac{dq}{dt}$$

y nos queda la ecuación de vorticidad

$$\boxed{\frac{dq}{dt} = -q\, \nabla \cdot \mathbf{W} + q \cdot \nabla \mathbf{W} - \nabla \alpha \times \nabla p}$$

ANALISIS FISICO DE LOS TERMINOS.-

$\frac{dq}{dt} = \dot{q}$ = variacion individual de la vorticidad

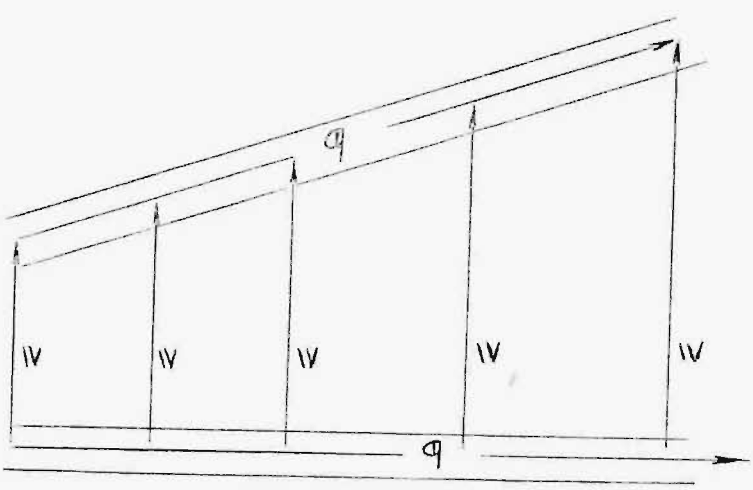
$-q\, \nabla \cdot \mathbf{W} \longrightarrow$ representa el efecto de la divergencia

si $\nabla \cdot \mathbf{W} > 0$ los tubos de vórtice se expanden,

disminuye la vorticidad

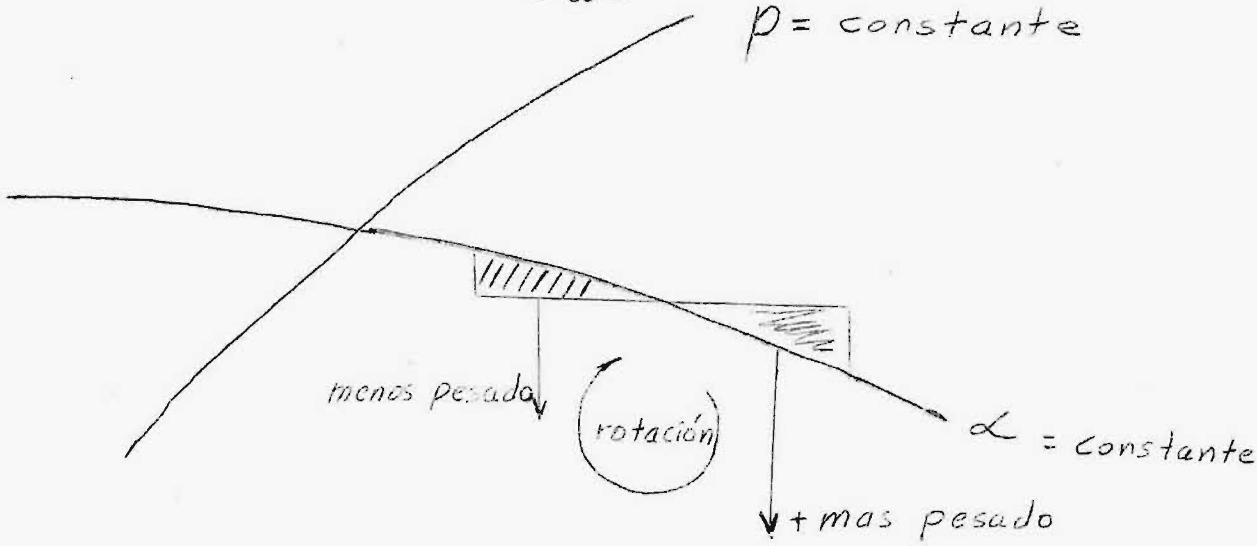
Si $\nabla \cdot \mathbf{W} < 0$ los tubos de vórtice se dilatan, la vorticidad aumenta.-

$q \cdot \nabla \mathbf{W}$ es el término responsable de la deformación de los tubos de vortice.-

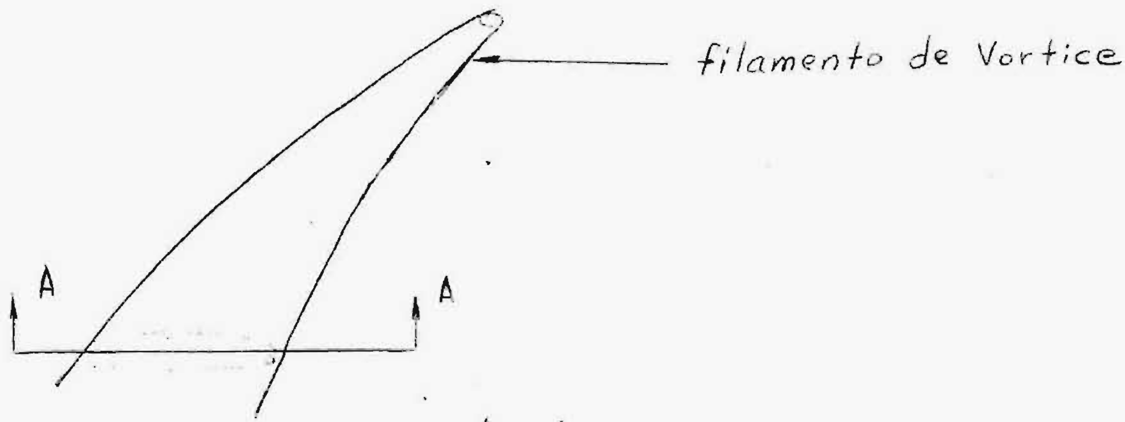


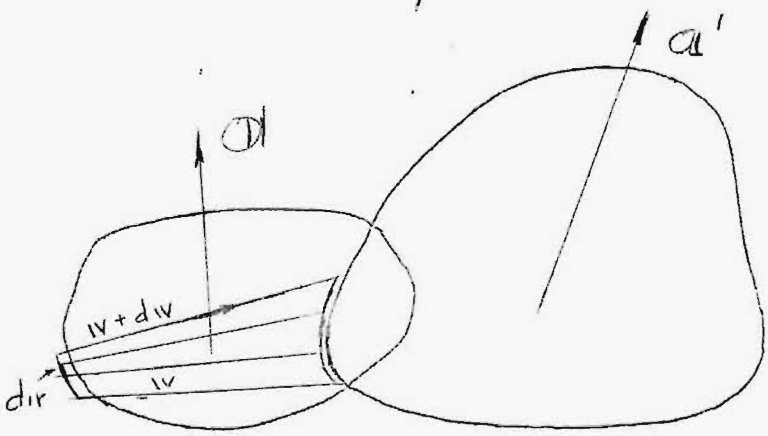
De lo anterior se deduce que los tubos de vorticidad son arrastrados, cambiando su orientación y su valor numérico.-

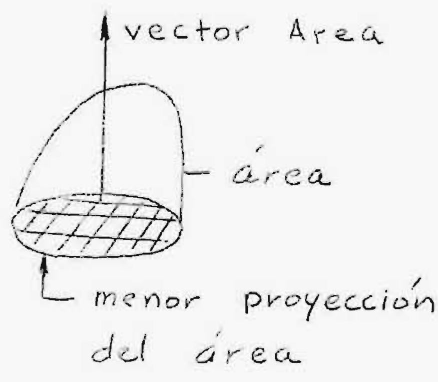
El término $\nabla \alpha \times \nabla p$.- Siempre que existe baroclinicidad, el campo de masa trata de entrar en equilibrio, existiendo rotación



CONSERVACION DEL FLUJO DE LA VORTICIDAD







sea:

dt = diferencial de tiempo

$d\mathbb{r}$ = sección del contorno

a = área

a' = área parcial

La variacion del área está definida por $\frac{d\,a_i}{dt} = \dot{a}_i$

$$d\,a_i = dt\,\mathbb{V} \times d\mathbb{r}$$

Calcularemos $d\,\dot{a}_i = dt\,\mathbb{V} \times d\mathbb{r}$

$$\dot{a} = \oint \mathbb{V} \times d\mathbb{r} = -\oint d\mathbb{r} \times \mathbb{V} = -\int (d\mathfrak{a} \times \nabla) \times \mathbb{V} \quad (1)$$

Lo anterior es por una consecuencia del teorema de Stokes, nabla actúa sobre $\mathbb{V}$

Deduciremos sus consecuencias.-

Teorema de Stokes:

$$\oint \mathbb{V} \cdot d\mathbb{r} = \int_{\sigma} \nabla \times \mathbb{V} \cdot \delta\sigma$$

hagamos $\mathbb{A} = \mathbb{V} \times \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ = Constante

$$\oint \mathbb{A} \cdot d\mathbb{r} = \int_{\sigma} \nabla \times \mathbb{A} \cdot d\mathbb{r} = \int_{\sigma} \nabla \times (\mathbb{V} \times \mathbb{C}) \cdot \delta\sigma$$

$$\nabla \times (\mathbb{V} \times \mathbb{C}) = \mathbb{C} \cdot \nabla \mathbb{V} - \nabla \cdot \mathbb{V}\, \mathbb{C} + \mathbb{V}\, \nabla \cdot \mathbb{C} - \mathbb{V} \cdot \nabla \mathbb{C}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{V}\, \nabla \cdot \mathbb{C} &= 0 \\ \mathbb{V} \cdot \nabla \mathbb{C} &= 0 \end{aligned}\right\} \mathbb{C} \text{ es constante}$$

$$\nabla \times (\mathbb{V} \times \mathbb{C}) = \mathbb{C} \cdot \nabla \mathbb{V} - \nabla \cdot \mathbb{V}\, \mathbb{C} \quad y$$

$$\oint \mathbb{V} \times \mathbb{C} \cdot d\mathbb{r} = \oint d\mathbb{r} \times \mathbb{V} \cdot \mathbb{C} = \oint \mathbb{C} \cdot d\mathbb{r} \times \mathbb{V} = \int_{\sigma} (\mathbb{C} \cdot \nabla \mathbb{V} - \nabla \cdot \mathbb{V}\, \mathbb{C})\, \delta\sigma$$

$$\mathbb{C} \cdot \oint d\mathbb{r} \times \mathbb{V} = \mathbb{C} \cdot \int (\nabla \mathbb{V} \cdot \delta\sigma - \nabla \cdot \mathbb{V}\, \delta\sigma)$$

como $\mathbb{C}$ es cualquiera lo puedo simplificar también:

$$(\delta\sigma \times \nabla) \times \mathbb{V} = \mathbb{V} \times (\nabla \times \delta\sigma) = \nabla \mathbb{V} \cdot \delta\sigma - \nabla \cdot \mathbb{V}\, \delta\sigma$$

en la que ∇ solamente actúa sobre $\mathbb{V}$ y queda la consecuencia de Stokes así:

$$\boxed{\oint d\mathbb{r} \times \mathbb{V} = \int_{\sigma} (\delta\sigma \times \nabla) \times \mathbb{V}}$$

Volviendo a la ecuación

$$\dot{\mathbb{A}} = \int_{a} (\delta a \times \nabla) \times \mathbb{V}$$

Para poder operar con un área diferencial saco el integral de la ecuación anterior.-

$$\delta \dot{\mathbb{A}} = -(\delta \mathbb{A} \times \nabla) \times \mathbb{V}$$

Por la consecuencia del teorema de Stokes

$$\delta\dot{a} = \delta a\ \nabla.\mathbb{W} - \delta a.\nabla\mathbb{W} \qquad \nabla.\mathbb{W} = e$$

$$\delta\dot{a} - e\,\delta a + \nabla\mathbb{W}.\delta a = 0 \quad (I)$$

$$\frac{dq_a}{dt} + e\,q_a - q_a.\nabla\mathbb{W} = Q \quad (II)$$

multipliquemos $(q_a)\ (I)\ y\ (\delta a)\ (II)$

$$\frac{d\delta a}{dt}.q_a - e\,\delta a.q_a + \nabla\mathbb{W}.\delta a.q_a = 0 \quad (III)$$

$$\frac{dq_a}{dt}.\delta a + e\,\delta a\,q_a - q_a.\nabla\mathbb{W}.\delta a = Q\,\delta a \quad (IV)$$

Sumando III y IV

$$\boxed{\frac{d(q_a.\delta a)}{dt} = Q\,\delta a}$$

Esta ecuación muestra que en un fluido real, donde existen tensiones viscosas y baroclinicidad, los filamentos de vorticidad no se trasladan con el fluido.-

En la ecuación anterior Q contiene

$$Q = -\nabla\alpha\times\nabla p + \nabla\times(\alpha\ \nabla.\mathcal{F})$$

Si el fluido es barotrópico y no viscoso

$Q = 0$ entonces $\dfrac{d(q_a.\delta a)}{dt} = 0$

De lo anterior se deduce que en un fluido ideal y barotrópico el producto de la vorticidad por el área es constante

$q_a.\delta a$ - constante.-

se conoce como conservación del flujo de vorticidad.-

BREVE ESBOZO CINEMATICO DEL TRATAMIENTO DE ONDAS.-

1.- Todos estamos familiarizados con la idea de onda: así, cuando se deja caer una piedra en un estanque, las ondas de agua marchan radialmente hacia afuera;- al tocar el piano vibran las cuerdas y las ondas sonoras se extienden por la habitación; cuando una estación de radio está transmitiendo, las ondas eléctricas se mueven a través del éter. Todos estos son ejemplos de movimiento ondulatorio, y tienen en común dos importantes propiedades: primeramente, se propaga energía a puntos distantes, y, en segundo lugar, la perturbación marcha a través del medio, sin que ésta en su totalidad sufra desplazamiento permanente. Así, las ondulaciones se extienden hacia afuera sobre un estanque llevando energía consigo, pero, como podemos ver, observando el movimiento de un pequeño cuerpo flotante, el agua del estanque misma no se mueve con las ondas. En los capítulos siguientes veremos que cualquiera que sea la naturaleza del medio que transmite las ondas, ya sea el aire, una cuerda tensa, un líquido, un cable eléctrico o el éter, estas dos propiedades que son comunes a todos estos tipos de movimiento ondulatorio, nos permitirán relacionarlos entre sí. Están todos regidos por una cierta ecuación diferencial, la ecuación del movimiento ondulatorio (véase)

5) y la parte matemática de cada problema aislado consite meramente en resolver esta ecuación con las adecuadas condiciones de contorno e interpretar después la solución apropiadamente.-

2.- Consideremos una perturbación φ que se propaga a lo largo del eje X con velocidad C. No es necesario indicar explícitamente a qué se refiere φ puede ser la elevación de una ola de agua o la magnitud de un campo eléctrico oscilante. Entonces, puesto que la perturbación se mueve, φ depende de x y t. Cuando t = c, φ será una cierta función de x que podemos llamar f(x) es el PERFIL DE ONDA, puesto que si representamos gráficamente la perturbación φ haciendo variar x y fotografiamos la onda para t = 0, la curva obtenida sera $\varphi = f(x)$. Si suponemos que la onda se propaga sin cambiar de forma, entonces una fotografía tomada en un momento posterior t será idéntica a la de t = 0, salvo que el perfil de onda se ha movido una distancia ct en la dirección positiva del eje x. Si tomamos un nuevo origen en el punto x = ct, y llamos X a las distancias medidas a partir de este origen, de manera que x = X +etc., entonces la ecuación del perfil de onda referido a este nuevo origen será

$$\varphi = f(X)$$

Referido al origen primitivamente fijado, esto significa que

$$\varphi = f(x - ct) \tag{1}$$

Esta ecuación es la expresión más general de una onda que se mueve con velocidad constante c y sin cambio de forma a lo largo de la dirección positiva de x. Si la onda marcha en dirección negativa, su forma está dada por (1) con c cambiado de signo, es decir:

$$\varphi = f(x + ct). \tag{2}$$

3.- El ejemplo más sencillo de una onda de esta clase es la ONDA ARMONICA, en la cual el perfil de onda es una sinusoide. De modo que si el perfil de onda para $t = 0$ es

$$(\varphi)_{t=0} = a \cos mx,$$

entonces, para el tiempo t, el desplazamiento o perturbación es

$$\varphi = a \cos m (x - ct). \qquad (3)$$

El valor máximo de la perturbación, a saber, a, se llama AMPLITUD. El perfil de onda se repite a distancias regulares $2\,x/m$. Esta distancia se llama LONGITUD DE ONDA . La ecuación (3) podría por lo tanto, escribirse

$$\varphi = a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \qquad (4)$$

El tiempo que emplea una onda completa en pasar por algún punto se llama PERIODO τ de la onda. Se deduce de (4) que $\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)$ debe recorrer un ciclo completo de valores al aumentar t en $\underline{\ \tau\ }$. De suerte que

$$\frac{2\pi c \tau}{\lambda} \qquad \text{y}$$

$$\tau = \frac{\lambda}{c}$$

La frecuencia n de la onda es el número de ondas que pasan en la unidad de tiempo por delante de un observador fijo. Evidentemente.

$$n = \frac{1}{\tau} \qquad (6)$$

de manera que

$$c = n \lambda \qquad (7)$$

y la ecuación (4) puede escribirse en cualquiera de las formas equivalentes

$$\varphi = a \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right) \qquad (8)$$

$$\varphi = a \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - nt\right) \qquad (9)$$

Algunas veces conviene introducir el NUMERO DE ONDAS k que es el número de ondas contenidas en la unidad de distancia. Entonces

$$k = \frac{1}{\lambda} \qquad (10)$$

y podemos escribir la ecuación (9) en la forma

$$\varphi = a \cos 2\pi \left(kx - \frac{t}{\tau}\right) \qquad (11)$$

Si comparamos dos ondas semejantes

$$\varphi_1 = a \cos 2\pi (kx - nt)$$

$$\varphi_2 = a \cos \{2\pi (kx - nt) + \epsilon\}$$

veremos que ψ_2 es lo mismo que ψ_1, salvo que está desplazada una distancia — $\frac{\varepsilon}{2\pi k}$ es decir, $\frac{\varepsilon\lambda}{2\pi}$ $\cdot$ ε se llama FASE de ψ_2 relativa a ψ_1. Si $\varepsilon = 2\pi$; 4π.... entonces el desplazamiento es exactamente una, dos ...... longitudes de onda, y diremos que las ondas están en fase; si $\varepsilon = \pi, 3\pi$...... entonces las dos ondas están exactamente fuera de fase.-

Aunque una onda no sea armónica, si el perfil de onda consiste en un patrón que se repite con regularidad, las definiciones de longitud de onda período, frecuencia y número de ondas se siguen aplicando y las ecuaciones (5), (6), (7) y (10) son también válidas.-

4.- Se puede generalizar la ecuación (1) para tratar el caso de ondas planas en tres dimensiones. una ONDA PLANA es aquella en que la perturbación es constante en todos los puntos de un plano trazado perpendicularmente a la dirección de propagación. Tal plano se llama un FRENTE DE ONDA, y el frente de onda se mueve en la dirección perpendicular al mismo con la velocidad de propagación c. Si la dirección de propagación es x : y : z = ℓ donde ℓ : m : n son los cosenos directores de la normal a cada frente de onda, entonces la ecuación de los frentes de onda es

$$\ell x + my + nz = \text{constante} \tag{12}$$

y en cualquier momento t φ ha de ser constante para todos los x, y, z que satisfagan a (12). Es evidente que

$$\varphi = f(\ell x + my + nz - ct) \tag{13}$$

es una función que cumple todas estas condiciones y, por lo tanto, representa una onda plana que marcha con velocidad c en la dirección l : m : n: sin cambio de forma.-

5.- La expresión (13) es una solución particular de la ecuación del movimiento ondulatorio a que nos hemos referido en la página 1. Puesto que l, m, n son cosenos directores, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. y se comprueba fácilmente que φ satisface a la ecuación diferencial ( )

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{14}$$

ESTA ES LA ECUACION DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO ( ) (Llamada a veces Ecuación de Ondas, pero no utilizaremos esta frase para evitar confusión con la mecánica ondulatoria moderna).- Es una de las ecuaciones diferenciales más importantes de toda la matemática, puesto que representa todos los tipos de movimiento ondulatorio en que la velocidad es constante.- Las expresiones (1), (2),(8), (9), (11) y (13) son todas soluciones particulares de esta ecuación. Al estudiar en los siguientes capítulos los diferentes tipos de movimiento ondulatorio veremos que la ecuación (14) aparece invariablemente y nuestra tarea consistirá en elegir la solución apropiada a nuestro problema particular. Hay ciertos tipos de solución que se encuentran con frecuencia, y discutiremos algunos de ellos en el resto de este capítulo, pero antes de hacerlo debemos exponer una importante propiedad de la ecuación fundamental.-

6.- La ecuación del movimiento ondulatorio es lineal. Es decir, que φ y sus derivadas no se presentan en ninguna otra forma que la de primer grado. Por consiguiente, si φ_1 y φ_2 son dos soluciones cualesquiera de (14), $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$ es también solución, siendo a_1 y a_2 dos constantes arbitrarias. Esto constituye un ejemplo del PRINCIPIO DE SUPERPOSICION, que afirma que, cuando todas las ecuaciones pertinentes son lineales, podemos superponer cualquier número de soluciones individuales para formar nuevas funciones que, a su vez, son soluciones. Con frecuencia tendremos ocasión de hacerlo así.-

Un ejemplo particular de esta superposición, que es importante en muchos problemas, se obtiene sumando dos ondas armónicas que marchan en direcciones diferentes con la misma amplitud y velocidad. De este modo, con dos ondas semejantes a (11) de direcciones opuestas, obtendremos

$$\varphi = a\cos 2\pi(kx - n_\varphi t) + a\cos 2\pi(kx + n_\varphi t)$$

$$= 2a\cos 2\pi kx \cos 2\pi n_\varphi t \qquad (15)$$

Esta se llama ONDA ESTACIONARIA para distinguirla de las anteriores ONDAS PROGRESIVAS. Debe su nombre al hecho de que el perfil de onda no se mueve hacia adelante.- En efecto, φ se anula siempre en los puntos para los que $\cos 2\pi kx = 0$ a saber

$$x = \pm\frac{1}{4k}, \pm\frac{3}{4k}, \pm\frac{5}{4k}$$

.... Estos puntos se llaman NODOS, y los puntos intermedios, en donde la amplitud de φ (es decir, $2a.\cos 2\pi kx$) es máxima, se llaman ANTINODOS o VIENTRES. La distancia entre nodos sucesivos o antinodos sucesivos es $1/2\,k$ que, en virtud de (10), es la mitad de la longitud de onda.-

Utilizando funciones de onda armónica, semejantes a (15) hallamos ondas estacionarias en tres dimensiones, dada por

$$\varphi = a\cos\frac{2\pi}{\lambda}(lx+my+nz-ct)+a\cos\frac{2\pi}{\lambda}(lx+my+nz+ct)$$

$$\varphi = 2a\cos\frac{2\pi}{\lambda}(lx+my+nz)\cos\frac{2\pi}{\lambda}ct \qquad (16)$$

En este caso φ se anula siempre en los planos $lx + my + nz = \pm\frac{\lambda}{4}, \pm\frac{3\lambda}{4}$ ......y éstos se llaman PLANOS NODALES.-

7.- Vamos a obtener ahora algunos tipos especiales de solución de la ecuación del movimiento ondulatorio que aplicaremos a problemas específicos en ulteriores capítulos. Podemos dividir nuestras soluciones en dos tipos principales, que representan ondas estacionarias y progresivas.-

Ya hemos tratado de las progresivas para una dimensión. La ecuación a resolver es

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

Su solución más general puede obtenerse por un método debido a d'Alembert. Hacemos el cambio de variables $u = x - ct$ y $v = x + ct$. Entonces se comprueban fácilmente que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ se transforma en $\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ se transforma en $-c\frac{\partial\varphi}{\partial u} + c\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ se convierte en $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)$ y finalmente $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ se convierte en $c^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)$.- Una vez hechos estos cambios la ecuación se transforma en $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} = 0$ su solución general es

$$\varphi = f(u) + g(v)$$

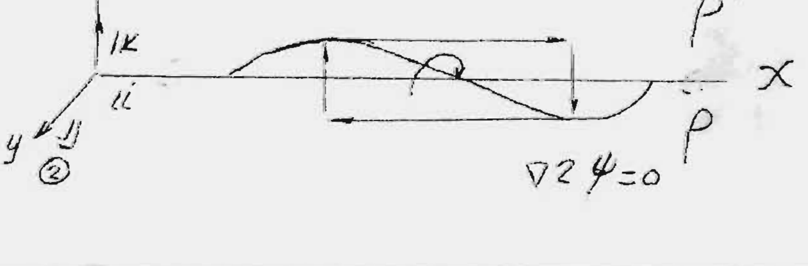
siendo f y g funciones arbitrarias. En las variables primitivas es

$$\varphi = f(x-ct) + g(x+ct) \qquad (17)$$

Las ondas armónicas del 2 son casos particulares de éste, siendo f y g cosenos. Las ondas f y g marchan con velocidad c, en direcciones opuestas.-

ONDAS DE GRAVEDAD.-

$\nabla^2\varphi = 0$



FLUIDO IDEAL

MOVIMIENTO PLANO - z x.- Sean ρ = densidad de fluido (1)

ρ' = " " " (2)

ambos fluidos son homogéneos, existe discontinuidad de densidad en S - S.- Vorticidad no cambia ni en (1) ni en (2); en S-S habrá fluctuaciones de vorticidad.-

u = vel. ligada al eje x

w = " " " " x

k = # de long. de onda 1 período

ψ = función de corriente

$z = x$ - Interface

$w = \frac{dw}{dt}$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho + \rho'}{2}$$

ψ_s = función de corriente en $z = 0$

$$\dot{\psi}_s = \frac{\partial \psi_s}{\partial t}$$

$$\psi = \psi_s \, e^{-k|z|}$$

en $t = 0$ introducimos una perturbación de la forma z = Az cos kx 1.- El fluido es incompresible $\nabla \cdot w = 0$ El fluido irrotacional $\nabla \times w = 0$ luego admite la función de corriente y podemos poner $w = \nabla \psi \times j$ también

$$w' = w \cdot k = (\nabla \psi \times j) \cdot k = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$w = \frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - w \cdot \nabla \right) z$$

$$(2) \qquad \frac{\partial z_s}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

condición sinemática resulta al hacer $w' = w'$

Para la condición dinámica tomemos la circulación - suponemos continuidad en la presión en la interface - ecuación de movimiento

$$\oint \rho (\dot{w} - g) \cdot dr = - \oint \frac{\nabla p \cdot dr}{\rho_0}$$

$$(-\rho' \dot{u}_1 + \rho \dot{u}_2) = (\rho - \rho') g \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$- \dot{u}_1 + \dot{u}_2 = - g \frac{\rho - \rho'}{\bar{\rho}} \frac{\partial z}{\partial x}$$

pero

$$u_1 = - \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{z=0} = k \psi_s \qquad u_2 = -k \psi_s \qquad u_1 - u_2 = 2k\psi_s$$

puedo poner

$$2k\dot{\psi}_s = g \frac{\rho - \rho'}{\bar{\rho}} \frac{\partial z_s}{\partial x} \qquad \frac{\partial \psi_s}{\partial t} = \frac{g}{k} \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} \frac{\partial z_s}{\partial x}$$

=====44

$$\frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'} = s$$ parámetro de estabilidad.-

$$\boxed{\frac{\partial \psi_s}{\partial t} = \frac{g s}{k}\,\frac{\partial z_s}{\partial x}} \qquad (1)$$

$$\frac{g s}{k} = C_s^2$$ tiene dimensiones de velocidad

derivando con el tiempo la (1) y con "x" la (2) $\frac{\partial (1)}{\partial t} = \frac{\partial (2)}{\partial x}$ tengo

$$\frac{\partial^2 z_s}{\partial t^2} = C_s^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$ reemplazando con z = As cos $K x$ resulta:

$$\frac{d^2 A_s}{dt^2} = -C_s^2 K^2 A_s \qquad (3)$$ siendo $\eta = C_s K$ frecuencia

si para t = 0 As = Aso entonces resolviendo (3) tengo

$$A_s = A_{so}\cos \eta t$$

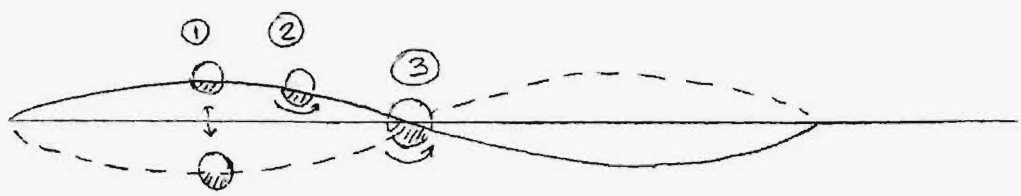
(a) $$\boxed{z_s = A_{so}\cos \eta t \cos K x}$$ Habla del campo de masa

con la condición (1)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -C_s^2 A_{so}\cos \eta t\,\mathrm{sen}\,K x$$

(b) $$\boxed{\psi_s = -C_s A_{so}\,\mathrm{sen}\,\eta t\,\mathrm{sen}\,K x}$$ Habla del campo de vorticidad

Veamos físicamente ambas ondas la (a) y (b)



un filamento de vórtice como (1) oscila pero no rota

" " " " " (2) " y rota

" " " " " (3) rota pero no oscila.-

Se vé aún con las ecuaciones que las dos onda, la de masa y de vorticidad están desfasados 90º lo que me dice que cuando una es máx la otra vale cero.- La onda es estacionaria - oscila pero no se desplaza y es estable.- Físicamente se puede ver ésto con los filamentos de vórtice y el sobrepeso.-

Encontramos

$$\left.\begin{array}{l} Z_s = A_{so} \cos nt \cos Kx \\ \psi_s = -C_s A_{so} \,\mathrm{sen}\, nt \,\mathrm{sen}\, Kx \end{array}\right\} \text{(c)}$$

también son soluciones

$$\left.\begin{array}{l} Z_s = A_{so} \,\mathrm{sen}\, nt \,\mathrm{sen}\, Kx \\ \psi_s = -C_s A_{so} \cos nt \cos Kx \end{array}\right\} \text{(d)}$$

La suma de (c) y (d) también son soluciones y tengo

$$Z_s = A_s \cos (Kx \mp nt) \quad \text{onda de masa}$$

$$\psi_s = C_s A_s \cos (Kx \pm nt) \quad \text{onda de vorticidad}$$

Estos últimos se propagan lo que no se propaga es la deformación de la interface, es decir que podemos poner

$$Z_s = A_s e^{i(Kx - nt)}$$

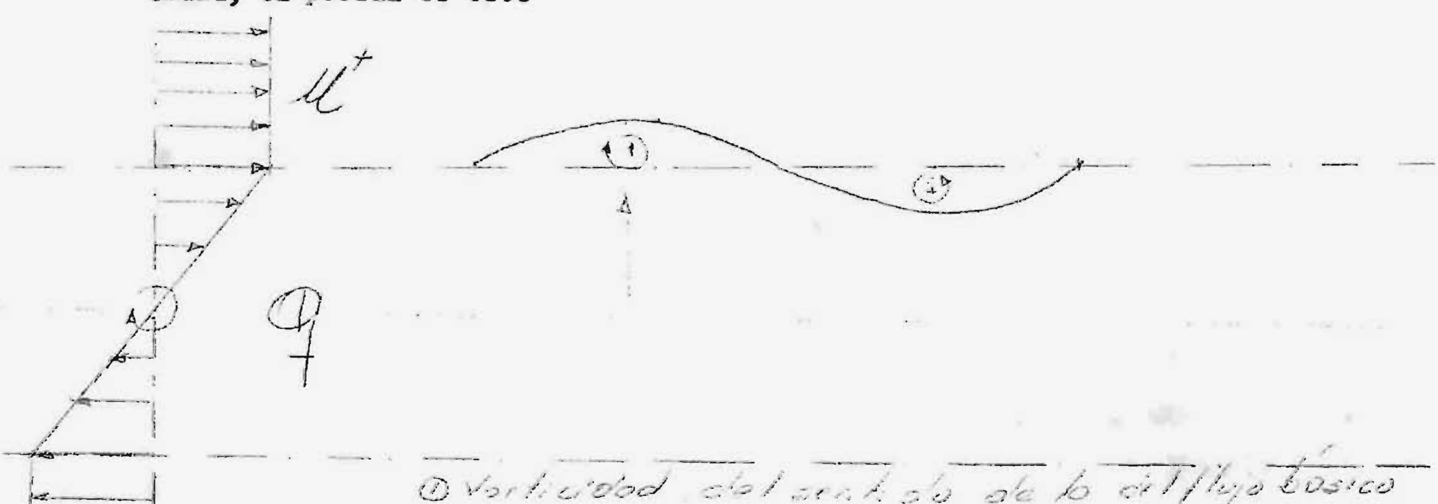
$$\psi_s = - C_s A_s e^{i(Kx - nt)}$$

Si variamos K tengo un conjunto de ondas posibles, llamados "Los modos normales del sistema".-

La suma de ambas ondas dá una oscilación permanente

ONDA DE RAYLEIGH

Partimos del flujo básico consistente en tres capas, la capa del medio es un flujo de Goette y las otras dos son flujos rectos paralelos sin vorticidad, el perfil es este



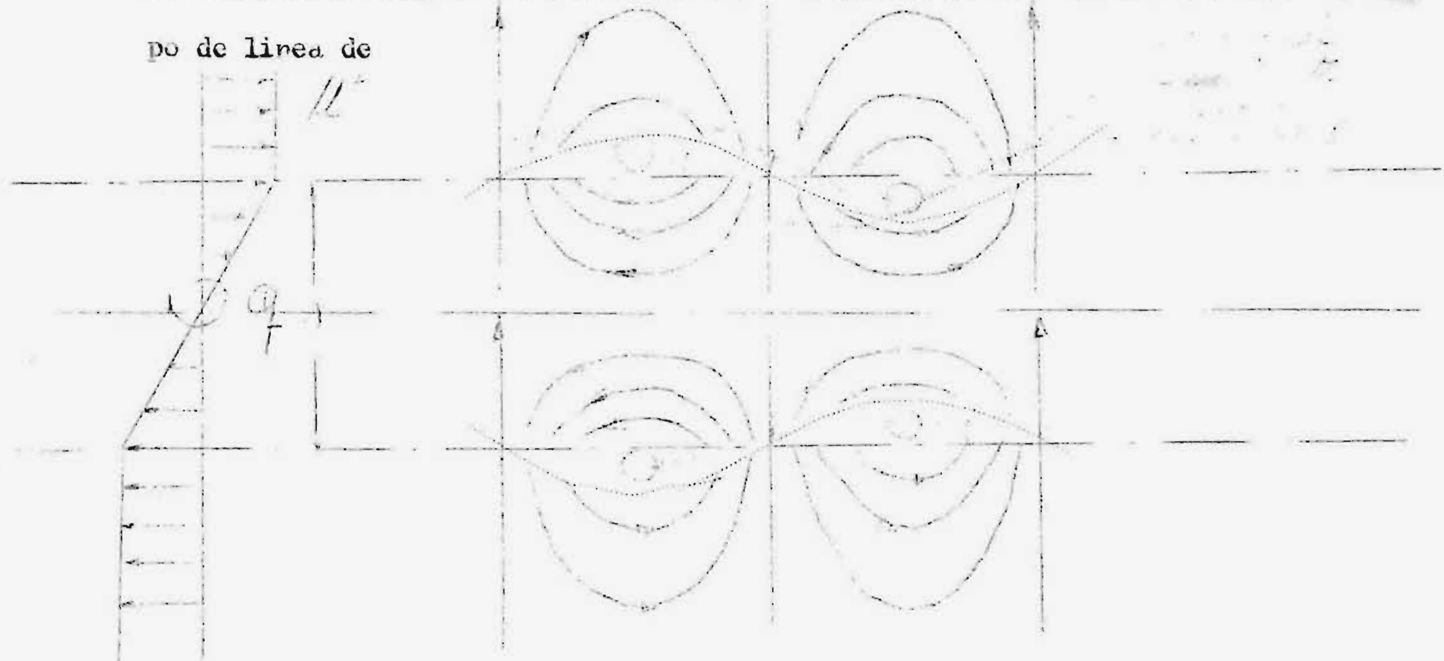
① Vorticidad del sentido de la del flujo básico
② Vorticidad perturbación de signo contrario a la del flujo básico

Perturbaremos la interface superior, la perturbación consiste en una — onda sirusoidal, problemas, esta onda se propaga y en que sentido se propaga, será estable o inestable.-

Vamos a estudiar el campo de perturbación, es suficiente para ello, estudiar la vorticidad del campo de perturbación.-

Qué sucede en la parte comprendida entre la semionda superior y el nivel correspondiente a la interface sin deformar. Antes de la deformación, en dicho sector no había vorticidad, ahora si lo hay. La vorticidad perturbada tiene el valor y el signo de la vorticidad del flujo básico en la capa central.-

A continuación estudiaremos el campo de lineas de corriente, del movimiento perturbado, si la perturbación es pequeña, podemos considerar que el campo de linea de



corriente es el resultante de un par de filamentos de vórtice de igual intensidad y sentido contrario.-

si $\lambda \gg A_s$ se puede considerar que los filamentos de vortice están sobre la interface de modo que la linea de corriente central es perpendicular a la interface .-

Justo en el punto de inflexión existe una componente vertical — que traslado el punto a otro que deja de ser de inflexión aparece otro y parece que la onda se mueve.-

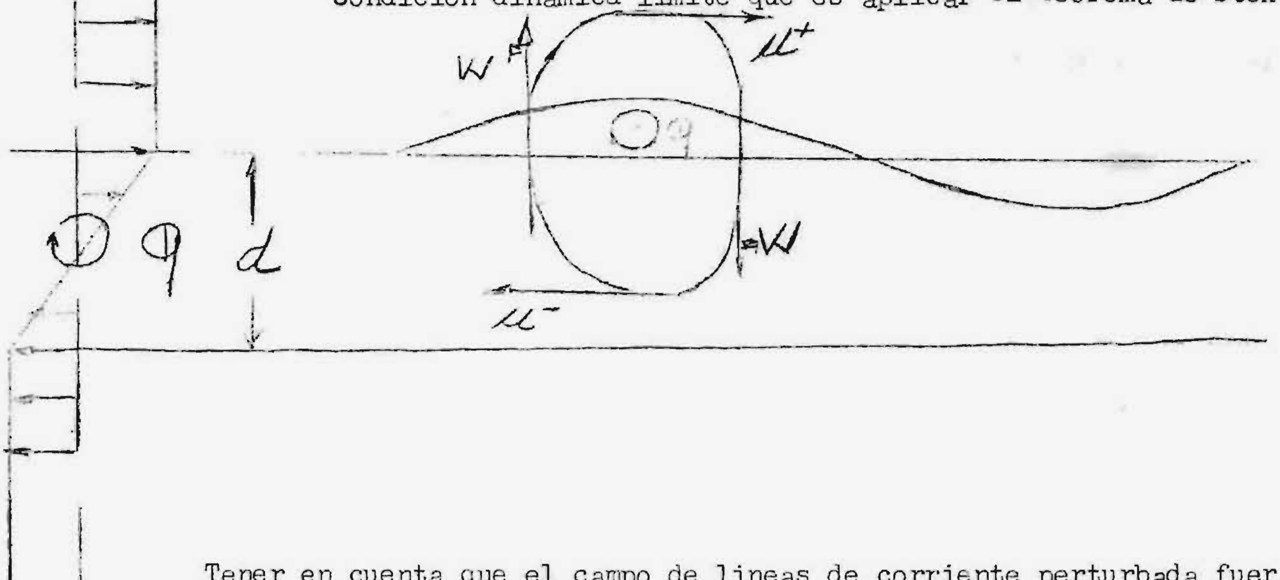
El campo de vorticidad perturbado tiende a desplazar a la onda en este - caso hacia la izquierda (en este caso) en el caso general el campo de vorticidad perturbado tiende a desplazar a la onda en el sentido de la concavidad del per— fil del flujo básico.-

A la velocidad debida al campo de vorticidad perturbado se le llama "Velocidad intrínsica de la onda".-

El flujo básico se opone a la velocidad intrínsica, de modo que la onda tiene una velocidad distinta .-

Calcular la velocidad de la onda.-

Condición dinámica límite que es aplicar el teorema de Stokes.-



Tener en cuenta que el campo de lineas de corriente perturbada fuera de los filamentos de vórtice es irrotacional debido a que parte del reposo por una fuerza de impulsión, que es la de perturbación

$$u^+\delta x + w\zeta - u^-\delta x - w\zeta = q\zeta\delta x$$

$w\zeta$ → son de segunda orden, se desprecian

$$(u^+ - u^-)\delta x = q\zeta\delta x$$

$$u^+ - u^- = q\zeta$$

si ponemos u^+ y u^- en función de ψ

$$-\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{2u}{d}\zeta$$

La función de corriente del movimiento perturbado es irrotacional.-

$$\psi^{+} = \psi_s\, e^{-Kz} \operatorname{sen} (Kx - \varphi)$$

$$\psi^{-} = \psi_s\, e^{Kz} \operatorname{sen} (Kx + \varphi)$$

En el límite para $z = 0$

$$\frac{d\psi^{+}}{dz} = -K\psi_s \qquad (1)$$

para $z = 0$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = K\psi_s \qquad (2)$$

restando (1) de (2) tenemos:

$$-\frac{\partial \psi^{+}}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{2u}{d}\zeta = 2K\psi_s$$

$$\boxed{\psi_s = \frac{u}{Kd}\zeta}$$

$\psi_s =$ valor función de corriente en la interfaz

que pasa en un sistema de coordenadas que se desplaza con la onda el fluido se desliza a lo largo de la onda de modo que la interfaz es una linea de corriente.-

Condición de **tangencia** está dada por:

$$\frac{d\zeta}{\partial x} = \frac{w}{C_o}$$

Cuando el observador se mueve con el fluido ponemos:

$C_o =$ velocidad de propagación de la onda.

$$W = \frac{\partial \psi_s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{C_o}\frac{\partial \psi_s}{\partial x}$$

Integrando

$$\psi_s = C_o\zeta$$

$$C_o\cancel{\zeta} = \frac{u}{Kd}\cancel{\zeta} \qquad \psi_s = \frac{u}{Kd}\zeta$$

$$\boxed{C_o = \frac{u}{Kd}}$$

Veloc. de propagación de la onda

Lo que se perturba es todo el campo no la interfaz, lo que interesa es lo que pasa en la interfaz.-

En la onda de Rayleigh el fenómeno consiste en lo siguiente: se perturba todo el campo, lo que quiere decir que se informan todas las lineas de corriente, lo que se pretende es obtener la evolución ulterior de todo el campo; se originan así filamentos de vórtice correspondientes al campo de perturbación, cuyas lineas de corriente asociadas propagan el campo de perturbación, pero esos vórtices solo aparecen en el nivel donde el perfil experimenta un salto en su pendiente.- Todos los demás niveles no contribuyen a propagar el campo perturbado.-

Si consideramos (1), si consideramos los (2) nuestro procedimiento será perturbar todo el campo, de modo que los niveles angulosos del perfil están perturbados en fase, se perturba la linea de corriente de los puntos angulosos (interfaz) siempre $\lambda \gg A$ amplitud.-

Sabemos que la velocidad onda superior independiente de cualquier otro efecto es $C_0 = \frac{u}{kd}$; donde u = velocidad del flujo básico superior e inferior.-

C_0 = Vel. intrínsica

$C_0 = U - \frac{u}{kd}$ = Veloc. verdadera

Para un sistema de referencia simétrica la onda se desplaza con la velocidad. $C = U - \frac{u}{kd}$

Cualquier efecto que tienda a disminuir la velocidad vertical disminuye la velocidad de la onda.-

Sabemos que

$$C_0 \sim W$$

$$W = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

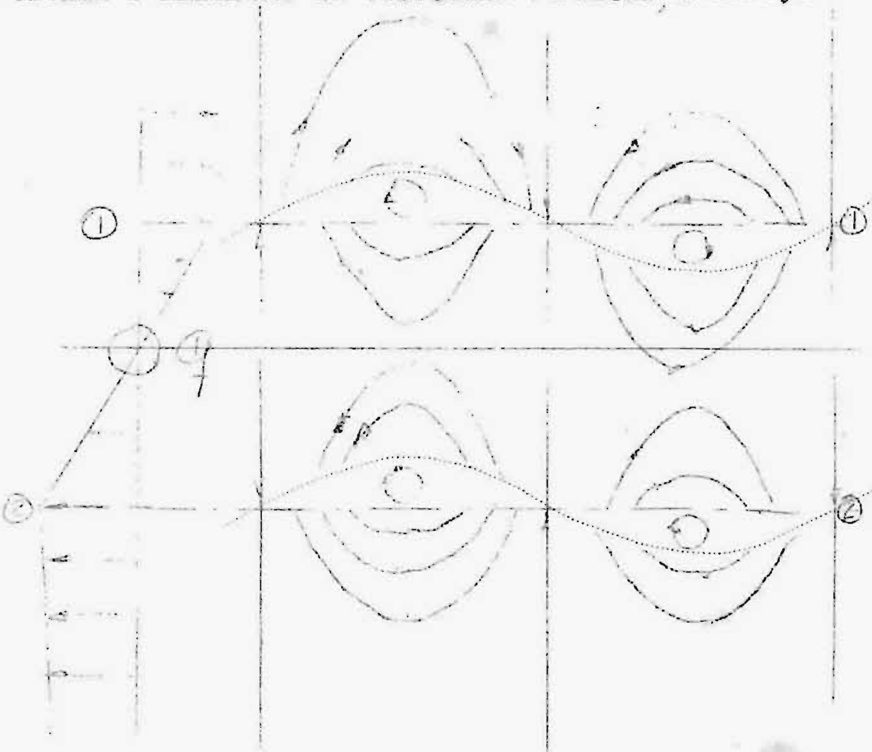
$$\psi = \psi_s e^{-kz}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -ik\psi_s$$

$$\psi = e^{-kz} e^{ikx}$$

o sea

$$W \sim \psi$$



La función corriente en el nivel (1) producida por el nivel (2) será:

$$\psi_{(2)\to 1} = \psi_2 \, e^{-Kd}$$

o sea que , en la misma magnitud en que se transmite la función corriente, se — transmite la velocidad, entonces

C_a = velocidad resultante en (1)

$$C_a = C_o - C_o \, e^{-Kd}$$

$C_a = C_o(1 - e^{-Kd})$ = Vel. intrínsica de la perturbación cuando se incluye la - mútua influencia entre las perturbaciones.-

Si K es muy grande, la onda es muy corta

$$C_a = C_o$$

Al ser el área más chica, y aunque la vorticidad sea la misma, el valor - de la intensidad de la vorticidad; esto quiere decir, que para ondas muy cortas, se reduce notablemente la influencia mútua entre los campos de movimiento inducidas por los filamentos de vórtice de perturbación en ambos niveles angulosos; esto se debe a lo siguiente: si la longitud de onda es pequeña el área del filamento de vórtice del campo de perturbación es también pequeña; también lo será la intensidad del vórtice y por lo tanto la magnitud de las velocidades inducidas - por cada vórtice $\varkappa = q A$ cuando $K \to 0$ o sea cuando $\lambda \to \infty$ $\therefore C_o \to 0$

Cuando

Estado "a"

cuando $\lambda \to \infty$ los campos crecen infinito, los campos se hacen infinitos y prácticamente llego sin atenuación.

C_a Nunca puede superar a C_o

A partir de un estado "a" como se mueven las ondas, con referencia al — sistema simétrico.- Analizar qué pasaría con una onda sola, Co. visto con ese —

sistema simétrico $C_o = U - \frac{U}{Kd}$ ó $C_o = U(1 - \frac{1}{Kd})$

$K = \infty \therefore C = U$ y se desplaza en el sentido de U

En el caso de una onda solitaria cuya velocidad es Co. cabe la posibilidad de que se propague tanto en la dirección del flujo básico como en la dirección opuesta, todo depende de que el factor Kd sea mayor o menor que 1

Estado a, es un sistema en fase.-

Con respecto del sistema simétrico

$$Ca = U - C\,(1 - e^{-Kd})$$

$$Ca = U - \frac{U}{Kd}\,(1 - e^{-Kd})$$

$$Ca = U\left[1 - \frac{1 - e^{-Kd}}{Kd}\right]$$ - velocidad intrínsica.-

Intrínsica, velocidad con respecto a un sistema que se mueve con el flujo en la interfaz.-

VELOCIDAD DE ONDA EN SISTEMA SIMETRICO.-

$$\boxed{Ca = U\left[1 - \frac{1 - e^{-Kd}}{Kd}\right]}$$

Cuando $K \rightarrow \infty$ $Ca \rightarrow U$ $\lambda \rightarrow 0$

La onda se deja arrastrar por la corriente.-

Para ondas largas $K \rightarrow 0$

Determino $\frac{1 - e^{-Kd}}{Kd}$ por la ley D'Hospital o desarrollo en serie.-

$$\frac{1 - e^{-Kd}}{Kd} = \frac{1 - 1 + Kd}{Kd} = 1$$

es decir Ca. nunca supera la magnitud del flujo básico.-

Para un sistema dinámico, simétrico, la velocidad producida por el campo de perturbación combinado no supera a U siempre se desplaza con dirección de U

Las ondas apenas salen del estado "a" se amplifican.-

Un nivel anguloso se amplifica, debido al campo de perturbación de la otra onda (   )

Llegará el momento en que estarán en posición de fase, entonces los campos se reforzarán (Campos de Perturbación).-

$$C_b = C_0\left(1+e^{-kd}\right) \longrightarrow \text{vel. intrínsica.-}$$

$$C_b = \frac{U}{kd}\left(1+e^{-kd}\right)$$

$$C_b = U - \frac{U}{kd}\left(1+e^{-kd}\right) = U\left(1-\frac{1+e^{-kd}}{kd}\right)$$

cuando

$$k \to \infty \qquad C_b \to U$$

$$k \to 0 \qquad C_b \to \infty$$

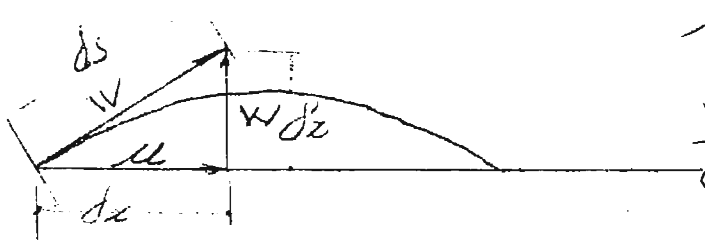
tiene valores comprendidos entre U (ondas muy cortas) y ∞ (ondas muy largas) por lo tanto existirá una onda de longitud intermedia para la cual C_b sea 0, a esa long. de onda la llamarán L_s .- Es precisamente la longitud de la onda estacionaria, L_s divide el espectro de onda corta ($L < L_s$) y ondas largas $L > L_s$.-

FLUIDO HOMOGENEO - ONDA DE RAYLEIGH.-

Presenta salto de la pendiente - o sea salto de vorticidad.-

Se deforman todas las lineas de corriente en fase, la única deformación de la linea de corriente de cada nivel anguloso, el objeto de la teoría es investigar como evoluciona esa perturbación.-

Explicación de condición cinemática límite.-



$$\frac{W}{U} = \frac{dz}{dx} \qquad U = C_0$$

$$\frac{W}{C_0} = \frac{dz}{dx}$$

Para medir la velocidad instrínsica de la onda me muevo con el flujo basico.-

Sistema A (sistema) la onda se desplaza en el sentido del flujo básico.-

Sistema B , Puede pasar cualquier cosa, velocidad dependiente de la longitud de onda.-

Una onda en estado A, sale de ese estado simetrico.- -

$$C_o = \mu \left(1 - \frac{1-e^{-kd}}{kd}\right)$$

$$C_i = \mu \left(1 - \frac{1-e^{-kd}}{kd}\right)$$

$$\frac{1+e^{-kd}}{kd} = 1$$

Ks valor de K que satisface la ecuación $1 + e^{-kd} = kd$

A Ks le corresponde una L_s

$L_s = \dfrac{2\pi}{K_s}$ una longitud de onda para la cual es estacionaria.-

ONDAS CORTAS	ONDAS ESTACIONARIAS	ONDAS LARGAS
Estado a aumenta amplitud disminuye velocidad Estado b disminuye amplitud aumenta velocidad Estado a Ondas Estables (proceso cíclico)	Estado a Aumenta amplitud disminuye velocidad Ondas Estacionarias	Estado a Aumenta amplitud disminuye velocidad Estado de fase estacionaria - Ondas inestables Disminuye velocidad Aumenta amplitud Estado b

B I B L I O G R A F I A

ANALISIS VECTORIAL	por	H.B. Phillips
VECTORES Y TENSORES	"	Luis A. Santaló
ANALISIS VECTORIAL	"	Lovis Brand
CLASSICAL MECHANICS	"	Herbert Goldstein
HIDRODINAMICA TEORICA	"	L.M. Milne - Thomson

o O o