

T
5376
M3856
1969
FCC.yH

050993

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
Instituto de Ciencias Naturales
Departamento de FISICA

ELECTRODINAMICAS CLASICAS
Sin Singularidades
y
Con Potenciales Medios

por

EUSTASIO MARTINEZ GIL f.m.s.

Trabajo realizado bajo la Dirección
del

DR. WILLY J. CLOETENS

con opción
a la

LICENCIATURA EN FISICA



San Salvador

1969

DEDICATORIAS

A mis queridos padres y hermanos para quienes guardo las más puras esencias de mi cariño, tanto más acendrado cuanto mayor es la distancia física que nos separa.

A mis alumnos presentes y futuros a quienes ofrezco lo mejor de mis energías, estima y comprensión de educador-Marista, con la ilusión de poder servirles de guía en su lenta y ardua búsqueda de la Verdad, a través de la ciencia y la virtud.

A los estudiosos de la Física con la esperanza de que en estas páginas puedan encontrar alguna luz que les estimule a proseguir sus trabajos e investigaciones.

P R E S E N T A C I O N :

Como tema del "TRABAJO DE FIN DE ESTUDIOS" con opción a la Licenciatura en Física por el Departamento de Física de la Universidad de El Salvador, he seleccionado uno de los que más interés está despertando en la actualidad dentro del campo de la "Física Teórica", como lo es el de la ELECTRODINAMICA, por estar llamado a dar una adecuada interpretación no sólo del mundo físico que nos rodea y de sus fenómenos, sino también de las leyes fundamentales que lo gobiernan y hasta la explicación filosófica relativa a la constitución del propio mundo.

Dado que son varias las "Teorías Electrodinámicas" formuladas hasta este momento, me limitaré en este ESTUDIO al análisis de dos de ellas;

-la primera de ellas es una de las más antiguas y por lo mismo, la que pudiera considerarse como la Electrodinámica Clásica, y con este apelativo me estoy refiriendo a la electrodinámica desarrollada por H. A. LORENTZ y por P. A. DIRAC.

- la segunda, es de nuestros días ya que la mayoría de sus fundadores y partidarios aún siguen contribuyendo con sus trabajos e investigaciones, al progreso de la Física Teórica. Ella es la Electrodinámica de la Escuela formada por un combinado de hombres célebres como Henin, Mc Manus, Peierls y Prigogine.

Ambos capítulos tienen casi idéntica estructura y subdivisiones, entre las cuales sólo menciono: Presentación de la ecuación del movimiento, Diversas soluciones dadas a la misma, Estudio de algunos ejemplos típicos, Balance de energía, dejando como APENDICES el estudio del "SPIN DE HEISENBERG" y la solución de algunas ecuaciones con fuerzas externas especiales

usando Transformadas de Laplace que constituyen ejemplos típicos de ecuaciones de la electrodinámica.

Tanto la preparación del plan de trabajo así como su realización las he podido llevar a feliz término, gracias a la valiosa y desinteresada colaboración de mi Profesor, el Dr. Willy J. Cloetens, quien no ha escatimado tiempo ni esfuerzos para darme su acertada, atinada y oportuna orientación, habiendo tenido a bien aceptar el difícil cargo de CONSEJERO en el desarrollo de esta Monografía, indicándome las enmiendas y correcciones que el caso requería, y a veces, hasta comprobando personalmente los largos y engorrosos cálculos matemáticos de ciertas ecuaciones.

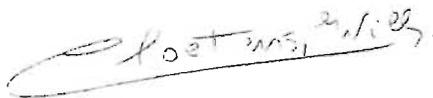
Y por si todo esto fuera poco, tuvo la gentileza de poner a mi entera disposición, la rica y variada bibliografía que, sobre un tema tan poco conocido en estas latitudes, posee en su biblioteca particular.

Aceptado

V o . B o



Ing. Raúl Valiente
Jefe Dpto de Física



Dr. Willy Cloetens
Moderador

A G R A D E C I M I E N T O S :

Por este medio quiero patentizar mis sinceras muestras de gratitud a cuantas Personas o Identidades, han colaborado de una forma u otra, en la ejecución de este trabajo que representa la culminación de la primera etapa de unos Estudios Superiores.

- En primer lugar, mi gratitud para la CONGREGACION MARISTA , que me ha brindado la oportunidad y los medios para realizar los estudios universitarios hasta obtener el grado académico de la Licenciatura en Física .

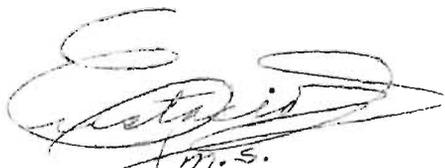
- A mis Hermanos en Religión, de modo especial a los que en estos años han integrado la Comunidad del Liceo Salvadoreño , quienes no han escatimado esfuerzos, sacrificios ni trabajos extra, amén de las incontables muestras de estímulo y aliento, para que pudiera llevar a buen término la carrera emprendida.

- Al Nóbil Maestro e incansable investigador, el DR. WILLY CLOETENS, quien durante dos años fue mi Profesor, lo que me ha permitido aguilatar sus relevantes méritos como Profesional competente y abnegado.

Confieso que sin su valiosa colaboración, sus acertadas y oportunas palabras de aliento, su entrega sin descanso y su desinterés en brindarme cuanta ayuda he necesitado en cada una de las últimas etapas de mi carrera universitaria, no hubiera logrado superar las dificultades que se me fueron presentando.

- Al Ing. Raúl Valiente, Jefe del Departamento de Física, quien me ha dado todas las facilidades a su alcance, para poder salir adelante y finalizar los estudios de la Licenciatura en Física, dentro del tiempo previsto, pese a las dificultades inherentes a todo período de organización de estudios como ha sido el caso del Departamento a su cargo, y ser yo el primer alumno matriculado y egresado del mismo.

- En fin, a todos y cada uno de los Profesores de quienes a lo largo de estos cinco años de estudios, he recibido amplios y serios conocimientos en los distintos campos de sus respectivas especialidades, así como la comprensión y tolerancia que les ha caracterizado, lo cual hace que hoy pueda considerarles no sólo como Maestros eximios, sino también y sobre todo como Amigos sinceros y desinteresados.

A handwritten signature in cursive script, appearing to read 'Eustasio Martínez Gil', with the initials 'f.m.s.' written below it.

Eustasio Martínez Gil f.m.s.

San Salvador, 15 de agosto de 1969
Fiesta de la Asunción de la Sma. Virgen
Día Patronal de la Congregación Marista

C O N T E N I D O

CAPITULO I :

<i>Introducción</i>	1
<i>Campos asociados con un electrón</i>	5
<i>Ecuación del movimiento de un electrón</i>	7
<i>Solución de la ecuación Lorentz-Dirac</i>	16
" " " <i>según G.N. PLASS</i>	19
" " " <i>por el Dr. H. J.</i> <i>CLOETENS</i>	26
<i>Ejemplos típicos de ecuaciones</i>	31
<i>Balance de energía</i>	36

CAPITULO II :

<i>Planteamiento de la Ecuación</i>	44
<i>Solución de la ecuación del movimiento</i> <i>por el Dr. W. J. CLOETENS</i>	49
" <i>de la ecuación por un método</i> <i>general</i>	53
<i>Estudio de ejemplos típicos</i>	57
<i>Balance de energía</i>	69
<i>Estabilidad de la materia</i>	76

APENDICES :

<i>Dedución y Solución de la ecuación</i> <i>del movimiento según el Dr.</i> <i>Th. ERBER</i>	86
<i>Solución de la ecuación del movimien-</i> <i>to para una partícula someti</i> <i>da a una fuerza externa del</i> <i>tipo "Delta de Dirac"</i>	93

<i>Solución de la ecuación del movimiento para una partícula sometida a una fuerza externa Impulsiva y de Lorentz</i>	<i>95</i>
<i>El "Spin de Heisenberg" como una consecuencia de la electrodinámica clásica libre de toda singularidad</i>	<i>98</i>
<i>Bosquejo de un posible experimento para medir el Damping-time</i>	<i>106</i>
<i>B I B L I O G R A F I A</i>	<i>112</i>
<i>Fe de erratas</i>	<i>115</i>

C A P I T U L O I

E L E C T R O D I N A M I C A

d e

L O R E N T Z - D I R A C

y

sus Escuelas

I N T R O D U C C I O N

Una propiedad fundamental de toda partícula cargada es que la "energía electromagnética" es irradiada al ser acelerada dentro de un campo magnético; hecho que ha sido comprobado con numerosos experimentos realizados en diversos campos de la Física.

Cuando los "efectos cuánticos" no son importantes, la Teoría Clásica conserva toda su validez, y la "Ecuación Exacta del Movimiento" de una partícula cargada irradiada, se comprende plenamente en el estado actual de la Física.

Pero al tener en cuenta los "Efectos Cuánticos" y al considerar las nuevas soluciones que la "Teoría Cuántica" nos da, entonces, aparece que no hay ninguna razón para aceptar las soluciones tal como nos las presenta una descripción clásica exacta de las partículas radiactivas.

El representante más genuino de la "Electrodinámica Clásica" es H. A. Lorentz (1), el cual escoge una esfera cargada como el modelo de su electrón. Calculó la fuerza de radiación considerando la acción retardada de una parte de la partícula sobre las otras partes.

El resultado lo pudo expresar como un "Desarrollo en Series de Potencias", en las cuales el radio del electrón hacía de parámetro. El primer término de la serie es independiente del radio, de modo que representa la fuerza de radiación de una partícula puntual.

Las dificultades surgen cuando el "Modelo de Lorentz" quiere

(1) H. A. LORENTZ en Teoría de los electrones, Leipzig 1909

aplicarse a partículas de dimensiones finitas, pues entonces los términos superiores de la serie, dependen de suposiciones arbitrarias respecto a la forma y la distribución de carga de las partículas.

Estos términos de orden superior se hacen más y más importantes a medida que el tiempo requerido para una oscilación espacial de la partícula se hace pequeño comparado con el empleado por una señal luminosa para atravesar una distancia igual al radio de la partícula.

Con mayor razón el modelo propuesto no puede ser estable, y requeriría la presencia de fuerzas no eléctricas para asegurar la estabilidad del sistema.

Rohrlich (1) ha demostrado no ha mucho la posibilidad de formular una nueva "Teoría" consistente y relativísticamente invariante", para partículas de dimensiones finitas con tal que se definan correctamente la energía y la cantidad de movimiento del campo.

Demuestra también que todas las divergencias posibles para partículas, pueden eliminarse únicamente mediante un procedimiento de renormalización, basado en la invariancia relativista de la Teoría.

Dirac (2) nos ha proporcionado un método bien definido y relativísticamente invariante para calcular la fuerza de radiación. Para ello supone que las "Ecuaciones de Maxwell" son válidas mucho más allá del punto de singularidad y demuestra que hay un solo procedimiento de invariancia de Lorentz por el cual puede eliminarse el "infinito" para la posición de las partículas.

Encuentra además que la fuerza en cuestión es proporcional a la diferencia entre los campos adelantado y retrasado de la partícula, de modo que cuando se ha logrado determinar esta cantidad en términos de la "velocidad" de la partícula y sus "derivadas", se obtiene la ecuación que nos da la fuerza de la

(1) F. ROHRLICH, in *American Journal of Physics*, 28, 639 (1960)
(2) P. A. M. DIRAC, *Proc. Royal Society, Londres* a-167, 148 (1938)

radiación.

En la aproximación no relativista, este resultado de Dirac, concuerda con el término principal del desarrollo en Series de Potencias calculado por Lorentz. La deducción relativista de la fuerza de radiación y sin utilizar la notación tensorial, había sido ya presentada por Schott (1).

La interpretación física de los resultados matemáticos obtenidos por Dirac, la hicieron por primera vez los físicos Wheeler y Feynman (2). Según ellos, la combinación de los campos avanzado y retrasado surge de la interacción de la partícula cargada con todas las demás partículas cargadas del universo, suponiendo para ello que todo nuestro universo es un absorbente.

Tanto Dirac como Wheeler y Feynman para la deducción e interpretación de los resultados obtenidos, se basaron en suposiciones de la mayor generalidad, de modo que la expresión de la fuerza de radiación pudiera tomarse como una ecuación matemática exacta de dicha fuerza, dentro del sistema de trabajo de la Teoría Clásica.

Sin embargo esta conclusión no tiene muchos adeptos y la mayoría de los libros de texto (3) hacen hincapié en que esta expresión de la fuerza de radiación tiene un campo de aplicación muy reducido.

En particular, no es aplicable a intervalos largos de tiempo, ni tampoco cuando esas mismas fuerzas son grandes comparadas con otras que pueden estar actuando sobre la partícula.

Dos factores determinan esta limitación:

1° La solución de ecuaciones de movimiento con radiación para una partícula dada, siempre contiene térmi--

(1) G. A. SCHOTT, en *Philosophy Magazine*, 29, 49, (1915)

(2) J. A. WHEELER y R. P. FEYNMAN, en *Reviews of Modern Physics* 17, 157, (1945)

(3) E. G. LANDAU y E. LIFCHITZ, en *Teoría Clásica de los Campos*, Ediciones de la Paz, Moscú

nos que requieren que la aceleración de la partícula aumente exponencialmente con el tiempo, dando así origen a las llamadas soluciones "auto-aceleradas divergentes" o (RUN-AWAY), lo cual supondría una adición de energía de fuerzas que no actúen sobre ella, lo que sería un absurdo aplicado a nuestro mundo físico real.

Dirac no pudo advertir tal incongruencia, porque consideró el más simple de los casos, como es el movimiento de una partícula libre.

2º Posteriormente, C. J. Eliezer (1) aseguró haber de mostrado que hay casos de campos de fuerzas en los cuales no es posible encontrar la solución física. Estos casos particulares son:

a) El campo creado por una delgada placa con carga infinita.

b) Campo Coulombiano de atracción o de repulsión.

Por lo tanto, según él, no tiene sentido hablar de una solución general de la ecuación del movimiento de una partícula con una carga determinada.

Sin embargo, se verá que sí existe dicha solución para movimientos tridimensionales tanto en campos de atracción como de repulsión, y para movimientos unidimensionales de campos de repulsión.

En cuanto al movimiento unidimensional a lo largo de una línea que contiene la fuente de un campo coulombiano de atracción, no es posible obtener la solución física en términos de funciones ordinarias, pero sí se logra una solución satisfactoria en términos de funciones generalizadas conocidas como "función de distribución".

Gilbert N. Plass (2) ha sido el primero en encontrar tales soluciones, que presentaremos más adelante.

(1) C. J. ELIEZAR, en *Review of Modern Physics*, 19, 147, (1947)

(2) G. N. PLASS., en *Review of Modern Physics*, Vol 33, # 1, 37, (1961)

I.- CAMPOS ASOCIADOS CON UN ELECTRON

De acuerdo con el trabajo original de Dirac (1), en todo electrón en movimiento debe tenerse presente la existencia de los campos a él asociados. Siguiendo al propio Dirac, utilizaremos notación relativista y tomaremos la velocidad de la luz como unidad, es decir que: $c = 1$

Suponiendo que la "World-line" del electrón en las coordenadas espacio-tiempo, se conocen y que viene descrita por la ecuación:

$$Z_{,\mu} = Z_{\mu} (s) \quad 1-1-1$$

donde $Z_{\mu}(s)$ son funciones conocidas del tiempo propio, y entonces se debe cumplir que:

$$\frac{dz_0}{ds} > 0 \quad 1-1-2$$

y el potencial electromagnético A_{μ} , en el punto x_{μ} , satisface las ecuaciones:

$$\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0 \quad \text{y} \quad \square A_{\mu} = 4\pi \vec{J}_{\mu} \quad 1-1-3$$

donde \vec{J}_{μ} es la densidad del vector corriente de la carga, densidad que puede expresarse para una partícula de carga "e", en términos de funciones de la forma:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\mu} &= e \frac{dz_{\mu}}{ds} \delta(x_0 - z_0) \delta(x_1 - z_1) \delta(x_2 - z_2) \delta(x_3 - z_3) ds \\ &= e \int dz_{\mu} \delta(x_{\mu} - z_{\mu}) \quad \text{para } \mu = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad 1-1-4$$

Las cantidades de campo $F^{\mu\nu}$ pueden deducirse a partir de los potenciales A_{μ} y vienen dadas por:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} \quad 1-1-5$$

(1) P. A. M. DIRAC, op. cit.

Las ecuaciones 1-1-3 tienen muchas soluciones y por lo tanto no son suficientes para determinar el campo. Para ello hay que utilizar los campos o potenciales llamados retardados de Liénard y Wiecher, \vec{F}_{ret} .

Pueden lograrse otras soluciones añadiendo a lo anterior, cualquiera de las obtenidas por la 1-1-3 y la

$$\square A_{\mu} = 0 \quad 1-1-6$$

que representan el campo de radiación u ondas electromagnéticas incidentes sobre el electrón en cuestión.

La solución particular que representa las condiciones actuales del electrón será la suma de los potenciales y los que satisfacen la ecuación anterior.

Tendremos por lo tanto que:

$$\vec{F}_{act}^{\mu\nu} = \vec{F}_{ret}^{\mu\nu} + \vec{F}_{inc}^{\mu\nu} \quad 1-1-7$$

Otras soluciones importantes de la 1-1-3, son las que nos darían los potenciales adelantados.

Por razones de simetría con la 1-1-7, podremos escribir que:

$$\vec{F}_{act}^{\mu\nu} = \vec{F}_{adv}^{\mu\nu} + \vec{F}_{out}^{\mu\nu} \quad 1-1-8$$

donde el $\vec{F}_{out}^{\mu\nu}$ satisface la 1-1-6, y representa un campo de radiación que desempeña, por razones de simetría, el mismo papel que el $\vec{F}_{in}^{\mu\nu}$, y que puede interpretarse como el campo de radiación saliente, de las proximidades del electrón, de modo que:

$$\vec{F}_{rad}^{\mu\nu} = \vec{F}_{out}^{\mu\nu} - \vec{F}_{in}^{\mu\nu} \quad 1-1-9$$

sería el campo de radiación producido por el electrón, diferencia que puede expresarse con la ayuda de las ecuaciones 1-1-7 y 1-1-8 en la forma:

$$\vec{F}_{rad}^{\mu\nu} = \vec{F}_{ret}^{\mu\nu} - \vec{F}_{adv}^{\mu\nu} \quad 1-1-10$$

Comparando este resultado con uno de los comunes para la radiación producida por un electrón acelerado.

Para mayor sencillez vamos a suponer que al principio, el electrón se mueve con "velocidad constante", luego experimenta una aceleración, y finalmente regresa a un estado de "velocidad uniforme."

Para ello rodearemos la línea del universo (World-line) en el espacio-tiempo de un tubo delgado, cuyo radio sea mucho menor que cualquier longitud física importante en el problema del electrón.

En tales condiciones el flujo total de energía del Momentum que sale a través de la superficie de este tubo, debe ser igual a la diferencia de energía dentro del tubo en ambos extremos de su longitud, y dependerá exclusivamente de las condiciones de dichos extremos.

Además, es independiente de la forma y tamaño del tubo, con tal que sea pequeño para que los desarrollos en Series de Taylor, sigan siendo válidos.

Los cálculos necesarios para lograr esta información, son largos y pesados, y Dirac los presenta en el apéndice de su referido trabajo.

El flujo de energía y Momentum que sale de la superficie del mencionado tubo viene dado por:

$$\int \left[\frac{1}{2} e^2 \epsilon^{-1} \dot{v}_\mu - e v_\nu f'_\mu \right] d^3x ds \quad 1-2-1$$

donde $\dot{v}_\mu = \frac{dv}{ds}$

integrado sobre toda la superficie del tubo, lo cual supone que el integrando es un diferencial perfecto, es decir que:

$$\frac{1}{2} e^2 \epsilon^{-1} \dot{v}_\mu - e v_\nu f'_\mu = \dot{\vec{B}}_\mu \quad 1-2-2$$

y esto es todo lo que podemos lograr a partir de las leyes de conservación de la energía y del Momentum.

Para poder llegar a formular la ecuación del movimiento hay que hacer otras suposiciones que nos determinen el vector \vec{B}_μ

De la ecuación anterior y con la ayuda de:

$$(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) = 0 \quad 1-2-3$$

se tendrá que:

$$(\vec{v} \cdot \dot{\vec{B}}) = \frac{1}{2} e^2 \epsilon^{-1} (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) = 0 \quad 1-2-4$$

con lo cual restringimos la elección del \vec{B}_μ de modo que siga siendo función de v_μ y sus derivadas. La forma más sencilla

que satisface la restricción impuesta por la 1-2-4 es que:

$$\vec{B}_\mu = k \cdot v_\mu \quad \text{donde } k = \text{conste} \quad 1-2-5$$

Sustituyendo esta expresión en la 1-2-4 se tendrá que la constante toma la forma:

$$k = \frac{1}{2} \cdot e^2 \epsilon^{-1} - m \quad 1-2-6$$

en la cual "m" es otra constante independiente de "ε", de modo que la ecuación puede tener una forma definida bien determinada cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

De este modo se consigue como ecuación del movimiento para un electrón:

$$m \cdot \ddot{v}_\mu = e \cdot v_\nu \cdot f_{\nu\mu}^\nu \quad 1-2-7$$

dentro de un campo electromagnético externo, en donde "m" desempeña el papel de la masa en reposo y "f_{νμ}^ν" es el campo externo definido por la ecuación 1-1-11.

Pero la ecuación 1-2-7 no tiene la forma deseable para la aplicación en problemas físicos concretos, ya que de ordinario no se conoce el "f_{νμ}^ν", sino el campo incidente "F_{νμ}^ν" definido por la 1-1-9.

La relación entre estos dos campos se obtiene de las ecuaciones 1-1-8, 1-1-9 y 1-1-11 y viene dada por:

$$\begin{aligned} f_{\nu\mu}^\nu &= \frac{F_{\nu\mu}^\nu}{in} + \frac{2}{3} \frac{F_{\nu\mu}^\nu}{rad} \\ &= \frac{F_{\nu\mu}^\nu}{in} + \frac{2}{3} e (\ddot{v}_\nu \cdot v^\nu - \dot{v}^\nu \cdot v_\mu) \end{aligned} \quad 1-2-8$$

de suerte que al sustituir esta relación en la 1-2-7 se tiene como expresión definitiva de la ecuación del movimiento de un electrón:

$$m \cdot \ddot{v}_\mu - \frac{2}{3} e \cdot \ddot{v}_\mu - \frac{2}{3} e^2 \cdot \dot{v}^2 \cdot v_\mu = e \cdot v_\nu \cdot \frac{F_{\nu\mu}^\nu}{in} \quad 1-2-9$$

Estas ecuaciones son de la misma forma que las obtenidas a partir de la Teoría de Lorentz de su electrón extenso, igualando a cero la fuerza total sobre el electrón y despreciando los términos que contengan derivadas superiores al segundo orden de "v_μ".

Pero mientras las ecuaciones de Lorentz son aproximadas, hay muy buenas razones para aceptar que las deducidas por Dirac son

"ecuaciones exactas" dentro de los límites que impone la Teoría Clásica de donde se han derivado.

Presentaremos ahora el significado de cada uno de los términos que integran la 1-2-9, cuando " $\mu = 0$ ".

El segundo miembro representa el Trabajo promedio que el campo incidente realiza sobre el electrón.

Los dos primeros términos del primer miembro, son diferenciales exactos, que pueden considerarse como la expresión de las "energías intrínsecas" del electrón.

El término " $m.v_0$ ", como la energía cinética de una partícula con masa en reposo m_0 .

El término $-\frac{2}{3} e^2 \ddot{v}$, constituye la llamada "energía de aceleración" o energía de Schott del electrón.

Por último, el término $-\frac{2}{3} e^2 v.v$, representa la emisión irreversible de radiación, y da el efecto del amortiguamiento de la radiación sobre el electrón.

Veamos ahora, cómo aparece el término representativo de la energía cinética:

El " \vec{H}_μ " introducido en la 1-2-2, puede considerarse como el vector negativo de la energía y el Momentum, dentro del tubo para cualquier valor del tiempo propio.

De las ecuaciones 1-2-5 y 1-2-6 se deduce que dicha energía debe ser negativa y tenderá a " ∞ " cuando " $\epsilon \rightarrow 0$ ", y esta energía negativa es indispensable para compensar la enorme energía positiva coulombiana fuera del tubo, a fin de conservar la energía total por debajo del valor apropiado a la masa en reposo que hemos representado por " m_0 ".

De suerte que si se quisiera dar un modelo del electrón, debemos suponer que éste tiene una masa infinita negativa en su centro, de tal modo que al restarla de la masa infinita positiva del campo coulombiano circundante, la diferencia sea precisamente la masa en reposo " m_0 ".

Un modelo semejante difícilmente estará de acuerdo con las ideas físicas corrientes, pero no representa un absurdo a la teoría con tal que se posea un esquema matemático razonable del mismo.

Gilbert N. Plass . presenta la misma ecuación de Dirac en otra forma, utilizando el tensor del campo electromagnético. Para él, la ecuación del movimiento será:

$$\dot{u}_i = \frac{e}{mc} F_{ik} \cdot u^k + \frac{1}{b} \left(\dot{u}_i - \frac{1}{c^2} u_i \cdot \dot{u}^k \cdot \dot{u}_k \right) \quad 1-2-10$$

donde F_{ik} representa el tensor del campo y viene dado por:

$$F_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & H_x & H_y & E_x \\ -H_z & 0 & H_x & E_y \\ H_y & -H_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{vmatrix} \quad 1-2-11$$

y además se tiene:

$$\frac{1}{b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{m \cdot c^3} \quad 1-2-12$$

y

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau} \quad v_i = -\frac{dx_i}{dt} \quad 1-2-13$$

relaciones en las que el tiempo propio " τ " y el tiempo ordinario " t " vienen relacionados mediante la expresión:

$$\frac{d\tau}{dt} = \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[1 + \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad 1-2-14$$

donde u^2 y v^2 representan la suma de los cuadrados de las componentes espaciales correspondientes a las velocidades.

Las coordenadas se escogen de tal modo que se verifique:

$$\begin{aligned} x^1 &= x_1 = x & x^2 &= x_2 = y \\ x^3 &= x_3 = z & x^4 &= -x_4 = ct \end{aligned}$$

de modo que se tenga:

$$\begin{aligned} u^1 &= u_1 = v_x \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = v_x \left[1 + \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ u^2 &= u_2 = v_y \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = v_y \left[1 + \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ u^4 &= u_4 = c \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = c \left[1 + \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad 1-2-15$$

Conviene tener presente que:

$$\begin{aligned}
 u^i \cdot u_i &= -c^2 & u^i \cdot \dot{u}_i &= 0 \\
 \dot{u}_j \cdot \dot{u}^i &= -\dot{u}_i \cdot \dot{u}^i
 \end{aligned}
 \tag{1-2-16}$$

y que en notación relativista como es nuestro caso, las derivadas siempre son respecto al tiempo propio " τ " .

La cuarta componente de la 1-2-10 no es una ecuación independiente, como se puede demostrar a partir de las tres primeras componentes y de la ecuación 1-2-16.

Para $\frac{v}{c} \ll 1$, las ecuaciones 1-2-10 y 1-2-11 nos dan la expresión de las ecuaciones no relativistas del movimiento, expresión que viene dada por:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m} \vec{E} + \frac{e}{mc} \vec{v} \times \vec{H} + \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2}
 \tag{1-2-17}$$

en la cual el último término representa la fuerza de radiación dividida entre la masa de la partícula.

Tanto la ecuación 1-2-10 como la 1-2-17 representan ecuaciones exactas del movimiento de partículas puntuales cargadas dentro de un sistema de referencia de la Física Clásica, y se pueden aceptar como una descripción completa del fenómeno.

Otra formulación de la ecuación Lorentz-Dirac, es la presentada por el Dr. Willy Cloetens (1).

Según él, toda partícula cargada dentro de un campo eléctrico y magnético está sometida a las siguientes condicionales:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{carga} \\
 \vec{E} &= \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{carga} \\
 \vec{H} &= \vec{H}_{ext} + \vec{H}_{carga}
 \end{aligned}
 \tag{1-2-18}$$

(1) W. J. CLOETENS, en notas manuscritas del curso de Mecánica Universidad de El Salvador, 1967

donde cada una de estas fuerzas se expresa mediante las siguientes ecuaciones:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}_{ext} + e \cdot \vec{E}_{ext} \quad 1-2-19$$

$$\vec{F}_{carga} = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}_{carga} + e \cdot \vec{E}_{carga}$$

de suerte que la ecuación del movimiento será entonces:

$$\begin{aligned} m \cdot \vec{a} &= \vec{F}_{total} = \vec{F}_{ext.} + \vec{F}_{carga} \\ &= \left(\frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}_{ext} + e \cdot \vec{E}_{ext} \right) + \left(\frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}_{carga} + e \cdot \vec{E}_{carga} \right) \end{aligned} \quad 1-2-20$$

ecuación que es válida para una carga puntual.

La 1-2-20 puede ser transformada teniendo en cuenta para ello la densidad de carga "ρ" y el factor de forma", g(k₀, k).

Recordando que:

$$e = \rho dV = \rho d\vec{r} = \rho dx \cdot dy \cdot dz \quad 1-2-21$$

entonces se tendrá:

$$\begin{aligned} e \cdot \vec{E} &\Rightarrow \int \rho(\vec{x}, t) \cdot \vec{E}_{carga}(\vec{x}, t) d\vec{x} \\ y \\ \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} &\Rightarrow \frac{1}{c} \int \rho(\vec{x}, t) \vec{v} \times \vec{H}_{carga}(\vec{x}, t) d\vec{x} \\ &\Rightarrow \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{x}, t) \times \vec{H}_{carga}(\vec{x}, t) d\vec{x} \end{aligned} \quad 1-2-22$$

esto al hacer: $\rho(\vec{x}, t)v = \vec{j}(\vec{x}, t)$

Por otra parte los campos correspondientes a la carga los podemos escribir en la forma:

$$\begin{aligned} \vec{H}_{carga} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_{carga} \\ \vec{E}_{carga} &= -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_{carga} \end{aligned} \quad 1-2-23$$

donde se ha de cumplir que:

$$\begin{aligned} \phi_{carga} &= (2\pi)^{-3} \frac{3}{2} \int d\vec{k} \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \cdot 4\pi ck^{-1} \int_{-\infty}^t dt' \rho_k(t') \text{sen } ck(t-t') \\ y \\ \vec{A}_{carga} &= (2\pi)^{-3} \frac{3}{2} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{k} \cdot 4\pi k^{-1} \int_{-\infty}^t \vec{j}_k(t') \text{sen } ck(t-t') dt' \end{aligned} \quad 1-2-24$$

de modo que al sustituir las dos últimas ecuaciones en la 1-2-22 y ésta en la 1-2-20 se obtiene finalmente:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{ext} - \frac{32\pi^2 e^2}{3} \int_0^\infty dk \int_0^t \left[v(t') \cos ck(t-t') k^2 g^2(k_0, k) \right] dt' \quad 1-2-25$$

válida en los límites no relativistas o sea para $\frac{v}{c} \ll 1$, y que representa una aproximación rectilínea de la ecuación obtenida por los físicos Bohm y Weinstein (1), donde:

$$g(k_0, k) = \text{factor de forma} \\ \equiv e^{-1} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \rho(\vec{x}) e^{ikx} d\vec{x}$$

Para encontrar el valor del factor de forma:

Por definición:

$$g(k_0, k) = \frac{k_0^2}{(2\pi)^{3/2} \cdot 4\pi} \int d^3\vec{r} \cdot e^{-ikx} \delta(r - k_0^{-1}) \quad 1-2-26$$

y expresándolo en coordenadas polares se tendrá:

$$g(k_0, k) = \frac{k_0^2}{(2\pi)^{3/2} \cdot 4\pi} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot e^{-ikrcos\theta} \delta(r - k_0^{-1}) \quad 1-2-27$$

que al integrar después de hacer las correspondientes sustituciones se obtienen como valor para el factor de forma:

$$g(k_0, k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{k}{k_0}\right)}{\frac{k}{k_0}} \quad 1-2-28$$

Sustituyendo este valor en la 1-2-25, la ecuación del movimiento toma la forma:

$$m \cdot \vec{a} = - \frac{4e^2}{3\pi} \int_0^\infty dk \int_0^t \left[v(t') \cos ck(t-t') \cdot k^2 \frac{\text{sen}\left(\frac{k}{k_0}\right)}{\left(\frac{k}{k_0}\right)^2} \right] dt' \quad 1-2-29$$

donde "m" es la masa mecánica total.

Integrando por partes esta relación, para lo cual haremos:

(1) BOHM y WEINSTEIN, en *Physical Review*, Vol 74, #12, 1789, (1948)

$$u = v(t') \quad dv = \int_0^{\infty} dk \cos ck (t-t') \frac{\text{sen}^2 \left(\frac{k}{k_0} \right)}{\left(\frac{k}{k_0} \right)^2}$$

$$du = a(t')$$

se obtiene como resultado:

$$m \cdot \vec{a} = - \frac{4e^2}{3\pi c} \int_0^t a(t') \int_0^{\infty} \left[k \text{sen} ck(t-t') \frac{\text{sen}^2 \frac{k}{k_0}}{\left(\frac{k}{k_0} \right)^2} \right] dk \quad 1-2-30$$

Volviendo a integrar nuevamente por partes y tomando esta vez:

$$u = a(t') \quad dv = - \int_0^{\infty} \left[k \text{sen} ck(t-t') \cdot \text{sen}^2 \frac{k}{k_0} \left(\frac{k}{k_0} \right)^{-2} \right] dk$$

$$du = \dot{a}(t') \quad v = - \int_0^{\infty} \left[c^{-2} \cdot \cos ck(t-t') \cdot \text{sen}^2 \frac{k}{k_0} \cdot \left(\frac{k}{k_0} \right)^{-2} \right] dk$$

nos da como expresión final de la ecuación del movimiento según el Dr. P. Cloetens:

$$(m_0 + m_{el}) \cdot \vec{a} = \frac{4e^2}{3\pi c^2} \int_0^t \dot{a}(t') dt' \int_0^{\infty} \left[\cos ck(t-t') \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{k}{k_0} \right) \cdot \left(\frac{k}{k_0} \right)^{-2} \right] dk \quad 1-2-31$$

Suponiendo que: $r_0 k_0 = \frac{3}{2}$

$$f' = \text{densidad de carga}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi k_0^{-2}} \mathcal{J}(r - k_0^{-1})$$

se puede demostrar que: $m_{el\acute{e}ctr.} = m_{total}$

y $m_0 = \text{masa mecánica}$
 $= 0$

de suerte que toda la masa procede de la carga de la partícula.

De todo lo anterior, se deduce que la ecuación del movimiento toma finalmente la expresión:

$$m_{el} \cdot \vec{a} = \vec{F}_{ext} + \frac{4e^2}{3\pi c^2} \int_0^t \dot{a}(t') dt' \int_0^{\infty} \left[\cos ck(t-t') \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{k}{k_0} \right) \cdot \left(\frac{k}{k_0} \right)^{-2} \right] dk \quad 1-2-32$$

Inercia = Fuerza
 de la macros- + Fuerza Microscópica
 carga cópica

III.- SOLUCION DE LA ECUACION LORENTZ-DIRAC

Aceptando que las ecuaciones representadas en la 1-2-9 nos dan una descripción exacta del movimiento de un electrón dentro de un campo incidente bien especificado, podemos investigar algunas de sus consecuencias.

En estas ecuaciones interviene la " \ddot{v}_μ " lo cual significa que el movimiento no puede ser determinado, si sólo conocemos su posición y su velocidad en un momento dado. Para ello debemos conocer también su aceleración, de suerte que podamos determinar el "cambio promedio" de la aceleración, de modo que todo el movimiento quede fijado.

Para resolver la ecuación del movimiento consideremos por razones de sencillez, el caso en ausencia de un " \vec{H} " externo incidente. En tales condiciones, la ecuación 1-2-9 toma la forma:

$$a \cdot \dot{v}_\mu - \ddot{v}_\mu - \dot{v}^2 \cdot v_\mu = 0 \quad 1-3-1$$

donde $a = \frac{3m}{2e^2}$

Pasando a coordenadas (x, y, z, t) en lugar de las coordenadas μ_i para $i = 0, 1, 2, 3$

y escogiendo un sistema de coordenadas tal que \vec{v}_0 y \vec{a}_0 estén en la dirección del eje "x", o en lenguaje relativista, que los cuadvectores " \vec{v}_0 " y " \vec{a}_0 " estén contenidos en el plano "xt", entonces el movimiento estará contenido en el mismo plano y la ecuación 1-3-1 se transformará en esta otra:

$$y \quad \begin{aligned} a \cdot \ddot{x} &= \ddot{x} + \dot{x} (\ddot{t}^2 - \ddot{x}^2) \\ a \cdot \ddot{t} - \dot{t} \cdot \dot{x} &- \dot{t} (\ddot{t}^2 - \ddot{x}^2) = 0 \end{aligned} \quad 1-3-2$$

De las ecuaciones 1-2-3 se obtiene fácilmente que:

$$\begin{aligned} \dot{t}^2 - \dot{x}^2 &= 1 & (\ddot{t} \cdot \dot{t} - \dot{x} \cdot \dot{x}) + (\ddot{t}^2 - \ddot{x}^2) &= 0 \\ \dot{t} \cdot \ddot{t} - \dot{x} \cdot \ddot{x} &= 0 \end{aligned} \quad 1-3-3$$

Vemos que multiplicando la 1-3-2 por "x" y la 1-3-2b por "t" y restándolas miembro a miembro, ambas desaparecen, lo que nos indica que cada una de ellas es equivalente a la otra.

Eliminando "t" de la 1-3-3a y la 1-3-3b se obtiene:

$$\ddot{t} = \dot{x} \cdot \dot{x} (1 + \dot{x}^2)^{-\frac{1}{2}} \quad 1-3-4$$

y al sustituir en la 1-3-2a, nos da:

$$a \cdot \ddot{x} - \dot{x} + \dot{x} \cdot \dot{x}^2 (1 + \dot{x}^2)^{-1} = 0 \quad 1-3-5$$

Si la "x" no desaparece, podemos dividir la 1-3-5 por esa cantidad y se obtendrá:

$$a - \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} + \frac{\dot{x} \cdot \dot{x}}{1 + \dot{x}^2} = 0 \quad 1-3-6$$

fórmula que es integrable de inmediato obteniéndose como resultado:

$$a \cdot s - \ln \dot{x} + \frac{1}{2} \ln(1 + \dot{x}^2) = A \quad 1-3-7$$

donde "A" es la constante de integración.

Escogiendo el origen donde se mide "s" de tal forma que:

$$A = - \ln a$$

en el punto "a", tendremos que:

$$\ddot{x} \cdot (1 + \dot{x}^2)^{-\frac{1}{2}} = a \cdot e^{as} \quad 1-3-8$$

fórmula que también tiene integración inmediata, dándonos como resultado:

$$\ln \left[\dot{x} + (1 + \dot{x}^2)^{\frac{1}{2}} \right] = e^{as} + B \quad 1-3-9$$

donde "B" es una nueva constante de integración.

Este último resultado lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \operatorname{senh} (e^{as} + B) \\ y \quad \dot{t} &= \operatorname{cosh} (e^{as} + B) \end{aligned} \quad 1-3-10$$

De la ecuación 1-3-10 vemos que:

1° A medida que $s \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \text{cte}$, dada por:

$$\dot{x} = \operatorname{senh} B - \operatorname{tanh} B$$

2° Cuando "s" crece desde ($-\infty$), el movimiento se inicia en forma asintótica con velocidad constante y ésta crece de modo continuo, de modo que para valores grandes de "s", la $v \rightarrow c$

3° Parecería que el signo de la exponencial de la 1-3-10 debiera ser (-).

Sin embargo con este signo (-), tendríamos una teoría en la cual, si un electrón se perturba de cualquier modo que sea y luego se deja solo, pronto retornaría a un estado de velocidad constante con emisión de energía de radiación, mientras desciende a dicho estado.

Esto sería admisible dentro de las ideas de la Física Clásica, pero en una teoría relativista, no es posible manipular los signos arbitrariamente, pues ello llevaría a que un átomo de H excitado, por ejemplo, tendría que describir espirales hacia afuera, en lugar de espirales hacia dentro hasta caer en el núcleo como debe suceder según los postulados de la Física Clásica.

De todo lo anterior se desprende que el signo que aparece en la 1-3-10 es el correcto, y esto es precisamente lo que constituye la "característica" más asombrosa de la nueva teoría de P. A. M. Dirac (1)

El movimiento descrito por la 1-3-10 nunca se ha observado para un electrón en ausencia de un campo externo, lo cual no significa que haya contradicción entre la teoría y la experiencia, ya que la 1-3-1 admite soluciones alternativas, es decir, para

$$v_{\mu} = \text{constante}$$

está de acuerdo con la experiencia y son las únicas condiciones que se presentan en la naturaleza. Estas condiciones se aplican en los problemas reales en la forma siguiente:

(1) P. A. M. DIRAC, op. cit.

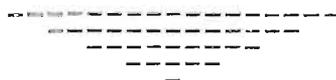
Suponiendo que un electrón es perturbado por una fuente de radiaciones electromagnéticas (R.E.M.) que incide sobre dicho electrón y luego se le deja solo.

En estas condiciones podemos usar la ecuación general del movimiento representada por la 1-2-9 y restringirnos a aquellas soluciones para las cuales la velocidad se hace constante en los últimos instantes en que el electrón actúa solo.

Esto nos previene para tener la velocidad exactamente constante durante el periodo anterior a la llegada de la perturbación y nos lleva al movimiento descrito por la ecuación 1-3-10, en la cual el electrón adquiere gradualmente su aceleración.

La diferencia entre tal movimiento y el que se tiene cuando hay una velocidad constante es tan pequeña, que no es posible advertir contradicción con los movimientos que la experiencia nos ofrece.

Por lo tanto, la ecuación 1-2-9 o la 1-3-10 nos dan soluciones en las cuales se conocen la posición, la velocidad inicial y la aceleración final, en lugar de que todas sean condiciones iniciales las que se conocen.



IV.- SOLUCION DE LA ECUACION SEGUN G. N. PLASS

Para encontrar la solución de la ecuación general del movimiento tal como la propone este autor (1), consideraremos sólo un movimiento unidimensional pero bajo dos condiciones distintas, a saber:

- a) sin radiación de energía
- b) con radiación de energía

(1) G. N. PLASS, op. cit. pp 37 y sigts

y en cada una de ellas tendremos en cuenta la ecuación relativista y la no relativista.

1° Solución exacta del movimiento unidimensional de la ecuación no relativista y sin radiación.

Para este caso, en la 1-2-17, se prescinde de la radiación, de modo que la partícula queda obligada a moverse en una sola dirección, siendo la fuerza que actúa sobre ella, una función explícita del tiempo y es independiente de la velocidad de la propia partícula.

En tales condiciones, la ecuación 1-2-17 se reduce a la bien conocida "ecuación newtoniana" del movimiento:

$$m \cdot \vec{a}(t) = f(t) \quad 1-4-1$$

en la cual: $a(t)$ representa la aceleración de la partícula.

Si como condiciones iniciales tomamos:

$$x = x_0 \quad y \quad v = v_0 \quad \text{para } t = 0$$

la solución de la ecuación anterior, la podemos escribir así:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t f(t') dt' \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t f(t') \cdot (t-t') \cdot dt' \end{aligned} \quad 1-4-2$$

de suerte que:

"Siempre que se nos dé la fuerza que actúa sobre la partícula, como una función explícita del tiempo, la solución completa de su movimiento queda determinada por las ecuaciones 1-4-2"

2° Solución de la ecuación del movimiento relativista y sin radiación:

La ecuación relativista del movimiento que corresponde a la 1-4-1, se puede obtener a partir de la 1-2-10 y viene dada por:

$$m \cdot \dot{u} = \left[1 + \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot f(\tau) \quad 1-4-3$$

en la cual: τ = tiempo propio y $\left[1 + \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{dm}{dv}$

Introduciendo una nueva variable " ω ", tal que:

$$u = c \cdot \sinh \frac{\omega(\tau)}{c}$$

de suerte que al sustituir este valor en la 1-4-3 nos dé:

$$m \cdot \dot{\omega} = f(\tau) \quad 1-4-5$$

Para demostrar el paso de la 1-4-3 a la 1-4-5 podemos proceder de la manera siguiente:

Si en la 1-4-3, hacemos:

$$\frac{u}{c} = \sinh \frac{\omega(\tau)}{c}$$

$$\text{lo cual implica que:} \quad \left(\frac{u}{c}\right)^2 = \sinh^2 \left\{ \frac{\omega(\tau)}{c} \right\}$$

entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} \left[1 + \left(\frac{u}{c}\right)^2 \right] &= 1 + \sinh^2 \frac{\omega(\tau)}{c} \\ &= \cosh^2 \frac{\omega(\tau)}{c} \end{aligned} \quad 1-4-3_b$$

Sustituyendo este valor, en la 1-4-3, resulta:

$$m \cdot \dot{u} = \left[\cosh \frac{\omega(\tau)}{c} \right]^2 f(\tau) \quad 1-4-3_c$$

Por otra parte se tiene que:

$$\begin{aligned} m \cdot \dot{u} &= m \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \\ &= m \cdot c \cdot \cosh \frac{\omega(\tau)}{c} \cdot \frac{ds}{dt} \end{aligned} \quad 1-4-3_d$$

Si ahora igualamos las expresiones 1-4-3_b y 1-4-3_d nos da:

$$m \cdot c \cdot \cosh \frac{\omega(\tau)}{c} \cdot \frac{ds}{dt} = \cosh \frac{\omega(\tau)}{c} f(\tau) \quad 1-4-3_e$$

$$m \cdot c \cdot \frac{ds}{dt} = f(\tau)$$

$$\text{haciendo } \dot{\omega} = c \frac{ds}{dt}$$

se tiene finalmente que:

$$m \cdot \dot{\omega} = f(\tau) \quad 1-4-5$$

como queríamos demostrar.

De lo anterior se ve que para una cierta fuerza, la nueva variable " ω " desempeña en la ecuación relativista el mismo papel que la velocidad " v " en la ecuación no relativista.

La solución exacta de la velocidad relativista se obtiene al tomar una solución para la correspondiente velocidad relativista, sustituyendo " τ " por " t ", utilizando la ecuación 1-4-4 y ajustando convenientemente las condiciones iniciales.

A partir de las ecuaciones 1-4-2_a y 1-4-4 se tiene como resultado:

$$u = c \cdot \sinh \left[\sinh^{-1} \left(\frac{u_0}{c} \right) + \frac{1}{mc} \int f(\tau') d\tau' \right] \quad 1-4-6$$

Para obtener la posición o la aceleración como funciones del tiempo propio " τ " bastará integrar o derivar respectivamente la ecuación anterior.

3º Ecuaciones del movimiento con radiación, es decir en presencia de un campo externo \vec{H} o \vec{E} .

a) Ecuación no-relativista: $\frac{v}{c} \ll 1$

La ecuación del movimiento de una partícula cargada y sobre la cual actúa una fuerza " $f(t)$ " independiente de la velocidad de la partícula, viene dada a partir de la 1-2-17 por la expresión:

$$m \cdot \ddot{\vec{a}} - \frac{m}{b} \cdot \dot{\vec{a}} = f(t) \quad 1-4-7$$

cuya solución será:

$$a(t) = e^{bt} \left\{ a(0) - \frac{b}{m} \int_0^t e^{-bt'} f(t') dt' \right\} \quad 1-4-8$$

De este resultado se deduce que:

"En general para una aceleración inicial arbitraria, la aceleración de la partícula crece exponencialmente como " e^{bt} ", lo cual daría una solución física inaceptable, es decir, nos llevaría a una solución divergente o "RUN-AWAY", solución que ha sido estudiada con todo detalle por Dirac y por Eliezer en sus ya varias veces citados trabajos.

En la ecuación newtoniana del movimiento aparece la segunda derivada de la posición respecto al tiempo. Y para lograr una

solución particular de la misma es preciso conocer la posición y velocidad iniciales de la partícula.

La ecuación del movimiento con un campo externo dada por la 1-4-6 aparece con una tercera derivada. Por lo tanto para poder resolverla se precisa de una tercera condición inicial, y ésta es la aceleración de la partícula.

En los problemas físicos concretos, el valor de dichas constantes queda determinado por las condiciones iniciales impuestas al problema y para el caso que nos ocupa, la aceleración inicial queda determinada por la siguiente condición de límite:

"La aceleración no puede aumentar indefinidamente con el tiempo, a menos que haya una "fuerza externa" que proporcione a la partícula la energía necesaria."

De esta condición se desprende que en la 1-4-8:

$$\left[a(0) - \frac{b}{m} \int_0^t e^{-bt'} \cdot f(t') dt' \right]^2 \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty$$

de otro modo, la aceleración aumentaría tan rápidamente como la exponencial " e^{tb} " lo cual llevaría a una solución "run-away".

Para que se cumplan estas condiciones de límite, la aceleración inicial debe tener el valor de:

$$m \cdot a(0) = b \int_0^{\infty} e^{-bt'} \cdot f(t') dt' \quad 1-4-9$$

mientras que cuando no se tiene en cuenta la radiación, la aceleración inicial de la partícula es proporcional a la fuerza inicial, es decir que:

$$m \cdot a(0) \propto \vec{F}(0) \quad 1-4-10$$

Sin embargo, para cualquier fuerza física posible, la diferencia entre ambos valores es muy pequeña porque el tiempo que aparece en la exponencial es del orden de:

$$b^{-1} = 0.627 \cdot 10^{-23} \text{ seg.}$$

La solución exacta de la ecuación considerada, se obtiene a partir de las relaciones 1-4-7 y 1-4-8, y viene dada por:

$$\begin{aligned}
 m \cdot \vec{a}(t) &= b \int_t^{\infty} e^{-b(t'-t)} \cdot f(t') dt' \\
 &= b \int_0^{\infty} e^{-bt'} \cdot f(t+t') dt'
 \end{aligned}$$

1-4-11

De esta ecuación se deduce que hay una solución física, siempre que exista la "Transformada de Laplace (\mathcal{L})" de la fuerza $f(t+t')$

lo cual ocurre siempre que:

- a) $f(t+t')$ sea continua
- b) $|t'-t_0|^n \cdot f(t_0+t')$ posea una singularidad para $t'=t_0$ cerca de un $n < 1$.
- c) $|f(t+t')| < A \cdot e^{-\gamma t'}$ para valores grandes de t'

y donde: "A" es cualquier constante

$$\gamma < b$$

y en particular habrá una solución no-divergente, siempre que sobre la partícula actúe una "fuerza finita" y si la fuerza actúa siempre en la misma dirección, por ejemplo en la dirección en que la "x" aumenta, de modo que:

$$a(\frac{t}{\tau}) > 0 \text{ para todo "t"}$$

Cuando no se tiene en cuenta la radiación, la aceleración en un cierto "t" es proporcional a la fuerza que actúa sobre la partícula en ese tiempo.

Pero si se considera la radiación, la aceleración en un tiempo "t", está dada por el producto de " e^{-bt} " y la "fuerza" que actúa sobre la partícula en todos los tiempos posteriores al considerado.

A menos que la fuerza varíe apreciablemente en un intervalo de tiempo del orden de:

$$b^{-1} = 0.627 \cdot 10^{-23} \text{ seg}$$

la aceleración en ambos casos se puede considerar idéntica en una buena aproximación.

La posición y la velocidad de la partícula se puede hallar mediante la integración de la ecuación 1-4-10, obteniéndose como valores respectivos:

$$x(t) = \frac{x_0}{m} + \frac{v_0}{m}t + \frac{1}{m} \int_0^t (t-t')f(t')dt' + \frac{1}{bm} \int_0^t f(t')dt' \tag{1-4-12}$$

$$+ \frac{1}{bm} \int_t^\infty e^{-b(t'-t)} f(t')dt' - \frac{1}{bm}(1+bt) \int_0^\infty e^{-bt'} f(t')dt'$$

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t f(t')dt' + \frac{1}{m} \int_0^\infty e^{-bt'} [f(t+t') - f(t')]dt' \tag{1-4-13}$$

De las ecuaciones 1-4-10, 1-4-11 y 1-4-12 se ve que la posición, velocidad y aceleración de una partícula cargada sobre la cual actúa una " \vec{F} externa", siempre son finitas, a menos que dicha fuerza sea lo suficientemente grande como para hacer que alguna de estas cantidades se haga infinita al no tener en consideración la radiación.

b) Ecuación relativista: $v \approx c$

En este caso la fuerza que actúa sobre la partícula es:

$$\vec{F}_{ext} = f(\tau)$$

independiente de la velocidad de la propia partícula, y entonces la ecuación del movimiento, a partir de las relaciones 1-2-10 y 1-2-16 viene dada por:

$$u - \frac{1}{b} \ddot{u} + \frac{1}{b} \cdot \frac{u \cdot \dot{u}^2}{c^2 + u^2} = \frac{1}{m} \left[1 + \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} f(\tau) \tag{1-4-14}$$

que es una ecuación diferencial pero no lineal y que puede resolverse introduciendo la nueva variable dependiente dada en la relación 1-4-4, que al sustituirla en la en la 1-4-13 da:

$$m \cdot \dot{\omega} - \frac{m}{b} \omega = f(\tau) \tag{1-4-15}$$

que es una ecuación de la misma forma que la 1-4-6 para la ecuación no relativista.

Se puede, por lo tanto, obtener la solución para el movimiento relativista de la 1-4-12 con sólo sustituir "t" por " τ ", y llevando este valor a la 1-4-4, e introduciendo la velocidad propia "u₀" al tiempo propio " $\tau = 0$ ".

Hechas todas esas sustituciones se obtiene como solución exacta de la ecuación relativista del movimiento:

$$u(\tau) = c \cdot \sinh \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{u_0}{c} \right) + \frac{1}{mc} \int_0^\tau f(\tau') d\tau' + \frac{1}{mc} \int_0^\infty e^{-b\tau'} \left[f(\tau + \tau') - f(\tau') \right] d\tau' \right\} \quad 1-4-16$$

$$\dot{u}(\tau) = \frac{m}{b} \int_\tau^\infty e^{-b(\tau - \tau')} \cdot f(\tau) \cosh T(\tau) d\tau' \quad 1-4-17$$

donde: $T(\tau) =$ argumento del \sinh de 1-4-15

Como casos particulares tenemos:

- Si $T^2 \ll 1$, entonces $\cosh T \approx 1$ y

la solución dada por la 1-4-16 coincide con la 1-4-10_a

- Si $\sinh T \approx T$, entonces en la 1-4-15,

la velocidad relativista coincide con la no-relativista dada en la 1-4-12.

Las ecuaciones 1-4-15 y 1-4-16 representan la solución relativista exacta y no divergente de una partícula cargada sobre la que actúa una " Fuerza externa" y dotada de un movimiento monodimensional.



V. SOLUCION DE LA ECUACION SEGUN EL Dr. W. CLOETENS

La formulación de la ecuación general del movimiento dentro de la Electrodinámica Clásica según el Dr. Willy Cloetens (1), está representada por la ecuación 1-2-32.

Para encontrar la solución, escogeremos una "Fuerza externa" tal que:

$$\vec{F}_{ext}(t) = 0 \quad \text{para } t \leq 0$$

Aplicando "Transformadas de Laplace" y recordando que:

$$\mathcal{L} f(t) = F(p) \quad \text{y} \quad \mathcal{L} a(t) = A(p) \quad 1-5-1$$

(1) W. J. CLOETENS, op. cit.

entonces dicha ecuación toma la forma:

$$(m_o + m_{el}) \cdot A(p) = F(p) + \frac{4\epsilon^2}{3\pi c^2} A(p) \int_0^\infty \left\{ \frac{p^2}{p^2 + c^2 k^2} \cdot \frac{\text{sen}^2\left(\frac{k}{k_o}\right)}{\left(\frac{k}{k_o}\right)^2} \right\} dk \quad 1-5-2$$

de modo que:

$$A(p) = \frac{1}{m_o + m_{eléc.}} \left[H(p) \cdot F(p) \right] \quad 1-5-3$$

$$H(p) = \frac{1}{1 - \frac{4}{3\pi} (r_o k_o) \left\{ \int_0^\infty \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} dx + \int_0^\infty \frac{\text{sen}^2 x}{a^2 + x^2} dx \right\}} \quad 1-5-4$$

esto haciendo las sustituciones siguientes:

$$x = \frac{k}{k_o} \quad a = \frac{p}{ck_o} \quad r_o k_o = \frac{3}{2}$$

$$r_o = \frac{e^2}{c^2 (m_o + m_{el})}$$

pero como por otra parte se tiene que:

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{\text{sen}^2 x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - e^{-2a})$$

entonces, la 1-5-3 y 1-5-4 toman respectivamente la forma:

$$A(p) = \frac{1}{m_o + m_{eléc.}} \cdot 2p(ck_o)^{-1} \left[1 - e^{-\frac{2\pi p}{\pi ck_o}} \right]^{-1} \cdot F(p)$$

1-5-5

$$H(p) = \left[1 - e^{-\frac{2\pi p}{\pi ck_o}} \right]^{-1}$$

Escogiendo como valor de la $F(p)$:

$$F(p) = \frac{\pi ck_o}{p^2 + (\pi ck_o)^2} \left[1 - e^{-\frac{2\pi p}{\omega}} \right] \cdot eE_o$$

y sustituyéndolo en la ecuación 1-5-5b nos dará:

$$\dot{A}(p) = \frac{2\pi}{m} \cdot eE_o \cdot \frac{p}{p^2 + (\pi ck_o)^2} \quad 1-5-6$$

Aplicando a la ecuación 1-5-5b, la "Transformada de Laplace Inversa", se tiene como solución de la ecuación 1-2-32:

$$a(t) = \frac{2\pi}{m} e \cdot E_0 \cos(\pi ck_0 t) \quad 1-5-7$$

lo cual nos indica que la partícula puede vibrar sin amortiguamiento en su campo retardado.

Ahora trataremos de encontrar la solución de la ecuación del movimiento de un electrón, para tres casos particulares.

Primer Caso: Electrón dentro de un \vec{H} constante

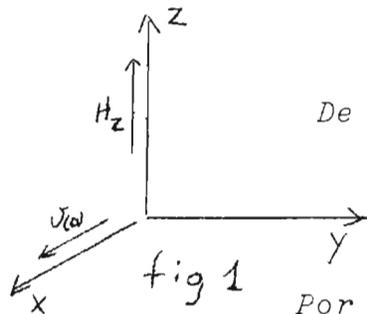
Ahora la ecuación del movimiento se reduce a:

$$m \cdot \vec{a} = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} \quad 1-5-8$$

De acuerdo con la fig. 1 adjunta se tendrá:

$$\vec{H} = H \vec{k} \quad 1-5-9$$

$$v(0) = v(0)\vec{i} + v(0)\vec{j} + v(0)\vec{k}$$



Por otra parte se cumple que:

$$\vec{v} \times \vec{H} = H (v_y \vec{i} - v_x \vec{j}) \quad 1-5-10$$

$$m \cdot \vec{a} = m a_x \vec{i} + m a_y \vec{j} + m a_z \vec{k}$$

Sustituyendo la 1-5-10 en la 1-5-8 resulta:

$$\begin{aligned} m \cdot \vec{a} &= \frac{e}{c} H (v_y \vec{i} - v_x \vec{j}) \\ &= m a_x \vec{i} + m a_y \vec{j} + m a_z \vec{k} \end{aligned} \quad 1-5-11$$

e igualando coeficientes nos da:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{eH}{mc} v_y \implies \dot{v}_x = \omega v_y \quad \text{donde } \omega = \frac{eH}{mc} \\ a_y &= \frac{-eH}{mc} v_x \implies \dot{v}_y = -\omega v_x \end{aligned} \quad 1-5-12$$

Aplicando "Transformadas de Laplace (\mathcal{L})" a estas ecuaciones de las componentes se tiene:

$$\begin{aligned} v_x(p) &= -\frac{p}{p^2 + \omega^2} v(0) \\ v_y(p) &= -\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} v(0) \end{aligned} \quad 1-5-13$$

Utilizando ahora la "Transformada Inversa de Laplace (\mathcal{L}^{-1})", nos da como solución de la ecuación del movimiento:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cos(\omega t) \\ v_y(t) &= -v_0 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad 1-5-14$$

Segundo Caso: Electrón en ausencia de un \vec{H} externo, es decir sobre él sólo actúa un $\vec{E}_{ext} = \text{conste}$

En este caso vamos a considerar la solución de la ecuación del movimiento en las dos situaciones:

a) Para $\frac{v}{c} \ll 1$, condiciones no-relativistas

Ahora la ecuación 1-2-32 que nos definía el caso general de la ecuación del movimiento según la Teoría Lorentz-Dirac, se reduce a:

$$\begin{aligned} m \cdot \vec{a}(t) &= e \cdot \vec{E}(t) + \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{a}}(t) \\ \text{o bien} \quad \vec{a}(t) &= \frac{e}{m} \vec{E}(t) + \frac{2e^2}{3mc^3} \dot{\vec{a}}(t) \end{aligned} \quad 1-5-15$$

Si hacemos la sustitución:

$$\frac{2 \cdot e^2}{3 \cdot m \cdot c^3} = \frac{1}{b} \quad 1-5-16$$

y utilizamos "Transformadas de Laplace" como solución de la anterior ecuación se obtiene:

$$\vec{a}(t) = e^{bt} \left\{ a(0) - \frac{b}{m} \int_0^t e^{-bt'} \cdot eE(t') dt' \right\} \quad 1-5-17$$

en la cual, el valor de "a(0)" queda determinado por las condiciones iniciales del problema físico considerado, de suerte que si tomamos por ejemplo: a(0) = 0, entonces la ecuación anterior se reduce a:

$$\vec{a}(t) = -e^{bt} \cdot \frac{b}{m} \int_0^t e^{-bt'} \cdot eE(t') dt' \quad 1-5-18$$

pero como siempre: $\frac{2 \cdot e^2}{3 \cdot m \cdot c^3} \gg 0$ entonces $b > 0$

y por lo tanto: $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \infty$

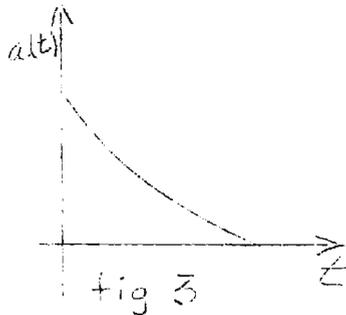
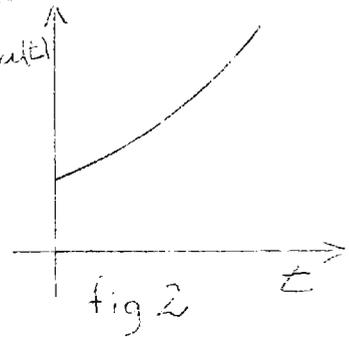
de modo que la solución dada por la 1-4-18 es del tipo representado en la fig. 2, o sea INESTABLE.

Para eliminar esta inestabilidad, hay que imponer unas condiciones de límite,

$$a(\infty) = 0$$

lo cual exige que la aceleración inicial debe ser entonces:

$$a_0 = a(0) = \frac{b}{m} \int_0^{\infty} e^{-bt'} \cdot eE(t') dt' \quad 1-5-19$$



Sustituyendo este valor de $a(0)$ en la ecuación 1-5-17, se obtiene como "solución regulada y estable":

$$\vec{a}(t) = \frac{b}{m} \cdot e^{bt} \int_0^{\infty} e^{-bt'} \cdot eE(t') dt' \quad 1-5-20$$

Tercer Caso: Electrón dentro de un \vec{H}_z y un \vec{E}_y

La ecuación del movimiento en estas condiciones es:

$$m \cdot \vec{a}(t) = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} + e \cdot \vec{E} \quad 1-5-21$$

que escrita en sus componentes "x, y" se transforma en:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= \frac{eH}{c} \dot{y} \implies \ddot{x} = \frac{eH}{mc} \dot{y} \implies \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ m \cdot \ddot{y} &= -\frac{eH}{c} \dot{x} + eE \implies \ddot{y} = -\frac{eH}{mc} \dot{x} + \frac{eE}{m} \implies \ddot{y} = -\omega \dot{x} + \frac{eE}{m} \end{aligned} \quad 1-5-22$$

Aplicando Transformadas de Laplace, y recordando que:

$$\mathcal{L} \ddot{x}(t) = p \cdot \dot{X}(p) - v_0 \quad \mathcal{L} \dot{x}(t) = \dot{X}(p) \quad \mathcal{L} k = k \cdot \frac{1}{p}$$

se tiene de las ecuaciones anteriores que:

$$p \cdot \dot{X}(p) - v_0 = \omega \dot{Y}(p) \quad 1-5-23$$

$$p \cdot \dot{Y}(p) = -\omega \dot{X}(p) + \frac{eE}{m} \cdot \frac{1}{p}$$

que resuelto para $\dot{X}(p)$ y $\dot{Y}(p)$ nos da:

$$v_x(p) = \dot{X}(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} v_0 + \frac{eE}{m} \cdot \frac{1}{p(p^2 + \omega^2)} \quad 1-5-24$$

$$v_y(p) = \dot{Y}(p) = -\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} v_0 + \frac{1}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{eE}{m}$$

Ahora podemos aplicar *Trasformadas Inversas de Laplace* al sistema 1-5-24 y nos da como resultado final cuando $\frac{eE}{m} \rightarrow 0$

$$v_x(t) = v_0 \cos(\omega t) + \frac{e \cdot E}{m} \cdot \frac{1}{\omega} (1 - \cos \omega t)$$

1-5-25

y

$$v_y(t) = -v_0 \sin(\omega t) + \frac{e \cdot E}{m} \cdot \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$$

de modo que al sumar estas componentes se tendrá:

$$\vec{v}(t) = v_x(t) + v_y(t) \quad 1-5-26$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones 1-5-25 en 1-5-26 se tiene como solución de la ecuación del movimiento:

$$v(t) = e^{-\omega t} \left[v(0) - \frac{e \cdot E}{m \omega} \right] + \frac{e \cdot E}{m \omega} \quad 1-5-27$$

esto último recordando que:

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \quad 1-5-28$$



VI.- EJEMPLOS PRACTICOS DE ESTE TIPO DE ECUACIONES

Para mejor visualizar la Teoría que estamos estudiando, aplicaremos la ecuación del movimiento, a los siguientes caso concretos:

a) Sea una fuerza impulsiva del tipo:

$$F(t) = e \cdot E \delta\left(\frac{t}{\theta}\right) \quad 1-6-1$$

donde: $\theta = (\text{seg})^{-1}$

(véase la fig. 4)

Sustituyendo este valor de la fuerza en la solución estable dada por la 1-5-20 se tiene que:

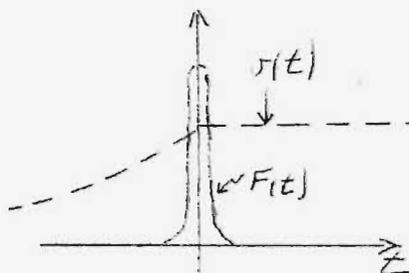


fig 4

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{b}{m} \cdot e^{bt} \int_t^{\infty} e^{-bt'} \cdot eE \delta\left(\frac{t'}{\theta}\right) dt' \\ &= \frac{b}{m} eE\theta \cdot e^{bt} \int_t^{\infty} e^{-bt'} \cdot \delta(t') dt' \end{aligned} \quad 1-6-2$$

pero sabemos que:

$$\int_t^{\infty} e^{-bt'} \cdot \delta(t') dt' = \begin{cases} 1 & \text{para } t < 0 \\ 0 & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad 1-6-3$$

Teniendo en cuenta esta propiedad, la solución viene dada por:

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} (b\theta) \frac{e \cdot E}{m} \cdot e^{bt} & \text{para } t < 0 \\ 0 & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad 1-6-4$$

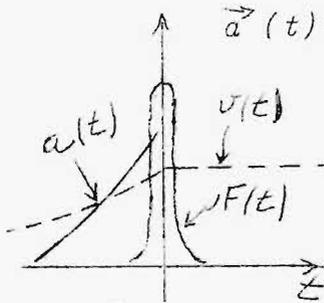


fig 5

Gráficamente esta solución aparece representada en la fig. 5.

Vemos, pues, que en tales condiciones, la partícula posee una aceleración cuando no actúa sobre ella ninguna fuerza externa, no tiene, pues, una "CAUSALIDAD".

Una solución así nos presenta el fenómeno de la "PRE-ACELERACION", es decir que la partícula experimenta una aceleración en un intervalo de tiempo arbitrariamente largo, antes de que sobre ella actúe la fuerza.

Este fenómeno tiene un comportamiento exponencial en el tiempo, de tal modo que en el dominio de las velocidades clásicas o no-relativistas, en el cual cualquier medida tiene una precisión: " $\Delta z \gg z_0$ ", no es posible detectar esta pre-aceleración.

La pre-aceleración también origina un "redondeamiento" en la gráfica de la velocidad " $v(t)$ " como aparece en la misma figura 5, en punteado.

Comparando esta velocidad de la partícula cargada con la de otra partícula neutra, sometida a la misma fuerza, se ve que la diferencia entre ambas, está sólo en la porción redondeada, es decir que:

$$v_{\text{neutra}} = v_{\text{carg}} (-\infty) \text{ hasta el } z = 0$$

donde alcanza el mismo valor que la partícula cargada, conser--

vándose ambas idénticas y constantes para todo " $\tau > 0$ "

Este valor se obtiene por supuesto de la suma de la velocidad relativista desde: " $v(-\infty)$," y la velocidad que proporciona la fuerza aplicada: $v = c \cdot \tanh A$

Para este mismo caso, resolviendo la 1-6-4, se obtienen como valores de la velocidad:

$$v(t) = \begin{cases} \frac{eE\theta}{m} \cdot e^{bt} \cdot u(-t) & \text{para } t < 0 \\ \frac{eE\theta}{m} \cdot u(+t) & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad 1-6-5$$

b) Consideremos ahora una fuerza del tipo:

$$e \cdot E(t) = eE \cdot e^{-|a|t} \cdot u(t) \quad 1-6-6$$

en la cual: $u(t) =$ función Heaveside

$$= \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

En tales condiciones la colución correcta de la 1-5-20 es:

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} \frac{eE \cdot b}{m(b + |a|)} \cdot e^{bt} \cdot u(-t) & \text{para } t < 0 \\ \frac{eE \cdot b}{m(b + |a|)} \cdot e^{-|a|t} \cdot u(t) & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad 1-6-7$$

Si ahora imponemos la condición de que:

$$v(-\infty) = 0$$

lo cual no altera en nada la naturaleza del problema como lo ha demostrado F. Rohrlich (1), nos encontramos con que hay una mayor generalización cuando la fuerza actúa durante un tiempo finito " τ ", o sea que:

$$f(\tau) = \begin{cases} f & \text{para } 0 < \tau < \tau, \\ 0 & \text{para } \tau < 0 \text{ y } \tau > \tau, \end{cases}$$

Integrando la ecuación:

$$\dot{v}(\tau) = \int f(\tau + \alpha \tau_0) \cdot e^{-\alpha} \cdot d\alpha \quad 1-6-8a$$

1965

(1) F. ROHRLICH, en *Classical Charged particles*, Adison-Wesley

nos da como resultados:

$$\begin{aligned} & \tau_0 \cdot f \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} (1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}) \quad \text{para } \tau \leq 0 \\ \dot{\omega}(\tau) = & f (1 - e^{-\frac{\tau_1 - \tau}{\tau_0}}) \quad \text{para } 0 < \tau < \tau_1, \quad 1-6-8b \\ & 0 \quad \text{para } \tau_1 < \tau \end{aligned}$$

Por conveniencia supongamos que: " $v(-\infty) = 0$ ", ya que cualquier otra elección nos llevaría a tener que sumar la velocidad relativista, pero no afectaría en nada la naturaleza del problema considerado.

Integrando de nuevo la 1-6-8_b, se tendrá:

$$\begin{aligned} & \tau_0 \cdot f \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} (1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}) \quad \text{para } \tau \leq 0 \\ \omega(\tau) = & \tau f + f \tau_0 (1 - e^{-\frac{\tau_1 - \tau}{\tau_0}}) \quad \text{" } 0 \leq \tau \leq \tau_1, \quad 1-6-9 \\ & f \cdot \tau_1, \quad \text{" } \tau_1 \leq \tau \end{aligned}$$

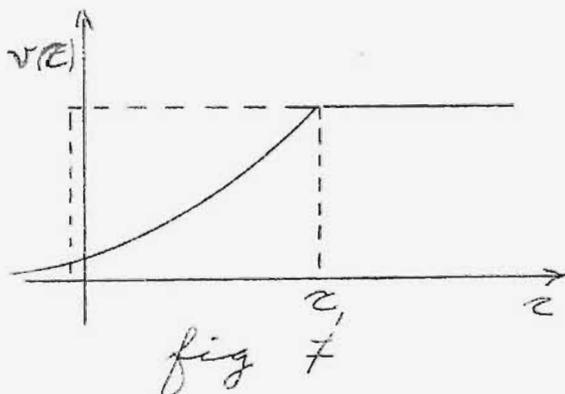
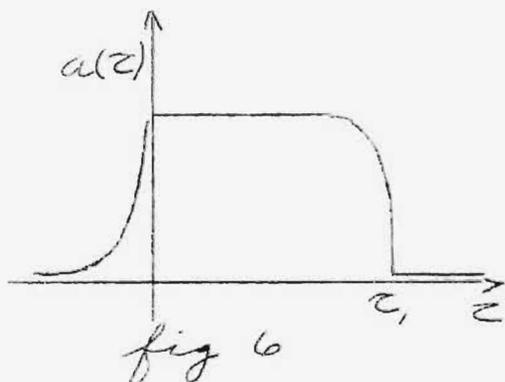
Para obtener la aceleración y la velocidad en este caso, bastará sustituir la 1-6-9, en la siguiente ecuación:

$$\vec{a}(t) = a[t(\tau)] = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dv}{d\tau} = \frac{c \dot{\omega}(\tau)}{\cosh^3 \omega(\tau)} \quad 1-6-10$$

$$\vec{v}(t) = v[t(\tau)] = c \cdot \tanh \omega(\tau) \quad 1-6-11$$

donde: $\gamma = \cosh \omega$

y la solución gráfica aparece en las adjuntas figuras 6 y 7



La figura presenta un doble "redondeamiento" en los puntos de la discontinuidad. Estos redondeamientos son:

- uno de pre-aceleración para " $\tau \leq 0$ "
- otro de pre-desaceleración para " $\tau \leq \tau_0$ "

De la gráfica de la velocidad, se ve que para " $\tau > \tau_0$ ", la velocidad es la misma tanto para una partícula cargada, como para una partícula neutra si ambas están sometidas a la misma fuerza externa.

Por otra parte: La aceleración es continua para todo " τ ", mientras que la aceleración de la partícula neutra es discontinua en:

La velocidad es diferenciable en todos los puntos, en tanto que la velocidad de la partícula neutra no es diferenciable, (pero sí continua) en: $\tau = 0$ y $\tau = \tau_0$,

El valor pequeño de la pre-aceleración y la pre-desaceleración proviene del factor " τ_0 ", que aparece en la ecuación 1-6-9

Si $\tau_0 \rightarrow 0$, entonces el comportamiento de la partícula cargada sería idéntico al de la partícula neutra, y la solución para la velocidad será:

$$v(t) = \begin{cases} \frac{e \cdot E}{m(b + |a|)} \cdot e^{bt} \cdot u(-t) & \text{para } t < 0 \\ - \frac{b \cdot eE}{m(b + |a|) \cdot |a|} \cdot e^{-|a|t} \cdot u(t) + C_1 & t > 0 \end{cases} \quad 1-6-12$$

Se debe escoger la constante C_1 de tal forma que:

$$y \quad \begin{cases} v(0^-) = v(0) = v(0^+) \\ a(0^-) = a(0) = a(0^+) \end{cases} \quad 1-6-13$$

lo cual implica que el valor de la C_1 debe ser:

$$C_1 = \frac{eE}{m(b + |a|)} \cdot \left(1 + \frac{b}{|a|} \right) \quad 1-6-14$$

deduciéndose fácilmente que entonces:

$$a(-\infty) = a(+\infty) = 0$$

VII.- BALANCE DE ENERGIA EN LA TEORIA "LORENTZ-DIRAC"

Si hasta el presente hay alguna "Ley Física" que sea aceptada sin la menor discusión por todos los hombres de ciencia, ésta es la "Ley de la Conservación de la Energía" de un sistema.

Según la Teoría de Lorentz-Dirac, hay caso en que dicho postulado se cumple; sin embargo se pueden dar ejemplos perfectamente posibles, en que hay una flagrante violación de la "Ley de Conservación de Energía".

Así por ejemplo para la ecuación del movimiento con una fuerza impulsiva estudiada en el primer caso de la sección sexta, y cuya solución dimos en la ecuación 1-6-4, se tiene:

$$m \cdot \vec{a}(t) = e \cdot E + \frac{2e^2}{3c^3} \cdot \dot{\vec{a}} \quad 1-7-1$$

y para obtener el "Balance de Energía" basta multiplicar por " v . dt "

resultando entonces:

$$m \vec{a} \cdot (v dt) = e E \cdot (v dt) + \frac{2e^2}{3c^3} \cdot \dot{\vec{a}} \cdot (v dt) \quad 1-7-2$$

o lo que es lo mismo:

$$dE_{cin} = dT_{trab} - (dW_{rad} + dW_{Schott}) \quad 1-7-3$$

Cuando una partícula cargada sigue una trayectoria con una velocidad " \vec{v} " y una aceleración " \vec{a} ", experimenta una variación de energía, y esa cantidad de energía por unidad de tiempo a través de una esfera de radio " $r = \infty$) viene dada por:

$$dW_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3} a^2 \cdot dt \quad 1-7-4$$

que es irreversible por ser función de: $a^2 > 0$

Por convención se toma:

$$\frac{d}{dt} W_{Sch} = - \frac{2e^2}{3c^3} \cdot \frac{d}{dt} (a \cdot v) \quad 1-7-5$$

donde esta "Energía de Schott" representa la energía alrededor de la partícula, debido al campo magnético " \vec{H} " y al campo eléctrico " \vec{E} ", y es reversible.

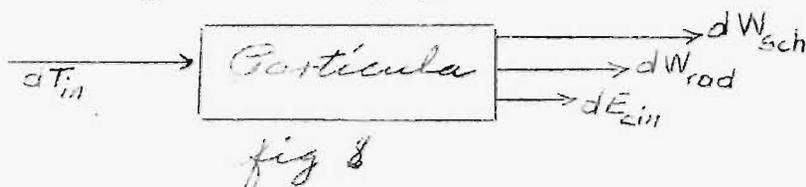
Por lo tanto, podremos escribir el "Balance de Energía" en la siguiente forma:

$$dE_{cin} = dT_{trab} - dW_{rad} - dW_{Sch}$$

o bien

$$dT = dE_{cin} + dW_{rad} + dW_{Sch} \quad 1-7-6$$

Es decir que la partícula se comporta en este caso como un simple transformador de la energía que incide sobre ella, según el adjunto esquema de la fig. 8:



En el caso que estamos considerando, de una fuerza impulsiva en " $t = 0$ ", la ecuación del movimiento está dada por la relación 1-5-20, y la ecuación del "Balance de energía" por la 1-7-2, de modo que integrando cada uno de los términos de esta última ecuación se obtiene:

$$dT = eE \cdot (v dt) \quad 1-7-7$$

y al sustituir la 1-6-5_b en esta expresión y volviendo a integrar se tiene:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} eE \mathcal{S}\left(\frac{t}{\theta}\right) \left[\frac{eE\theta}{m} e^{bt} u(-t) + \frac{eE\theta}{m} u(+t) \right] dt \quad 1-7-8$$

pero como por otra parte:

$$\mathcal{S}\left(\frac{t}{\theta}\right) = 1/\theta \mathcal{S}(t)$$

$$f(t) = \left[e^{bt} \cdot u(-t) + u(+t) \right] \quad 1-7-9$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}(t) \cdot f(t) dt = f(0) = 1$$

de suerte que llevando estos valores a la 1-7-8 resulta finalmente que:

$$T = \frac{(eE\Theta)^2}{m} \quad 1-7-10$$

Para encontrar la "Energía Cinética" que viene dada por:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} mv^2 (\infty) \quad 1-7-11$$

recordando que para tiempos mayores que cero ($t > 0$):

$$v(t > 0) = \frac{eE\Theta}{m} = \text{conste} \quad 1-7-12$$

introducimos este valor en la 1-7-11 y nos da:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m \left(\frac{eE\Theta}{m} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(eE\Theta)^2}{m} = \frac{1}{2} T \quad 1-7-13$$

Para obtener la "Energía de Radiación", basta llevar la ecuación 1-6-4 a la 1-7-5, haciendo previamente:

$$\frac{b}{m} = \frac{2e^2}{3c^3} \quad 1-7-14$$

obteniéndose finalmente que:

$$\begin{aligned} dW_{rad} &= \int_{-\infty}^0 \frac{b}{m} \cdot \left(\frac{b \cdot eE\Theta}{m} \right)^2 \cdot e^{2bt} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(eE\Theta)^2}{m} = \frac{1}{2} T \end{aligned} \quad 1-7-15$$

De las ecuaciones: 1-7-10, 1-7-13 y 1-7-15 se ve que en este caso de la "fuerza impulsiva" del tipo dado por la 1-6-1, sí hay conservación de energía.

En el ejemplo segundo, tratado en la sección precedente por las ecuaciones: 1-6-5 a 1-6-15 inclusive, se tiene también que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dW_{Sch} = 0 \quad 1-7-16$$

y por lo tanto, sólo tendremos que calcular el trabajo "T", la energía cinética "E_{cin}" y la de radiación "W_{rad}".

De acuerdo con las ecuaciones: 1-6-6, 1-6-12 y 1-7-2, se debe tener que:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} eE \cdot d\vec{r} = \frac{(eE)^2}{2m(b + |a|) \cdot |a|} \cdot \left(2 + \frac{b}{|a|} \right) \geq 0 \quad 1-7-17$$

$$E_{cin} = \int_{-\infty}^{\infty} dE_{cin} = \left[\frac{T}{\left(2 + \frac{b}{|a|}\right)} \right] \cdot \left(1 + \frac{b}{|a|}\right) \geq 0 \quad 1-7-18$$

$$W_{rad} = \int_{-\infty}^{\infty} dW_{rad} = \frac{T}{\left(2 + \frac{b}{|a|}\right)} \left(1 + \frac{b}{|a|}\right) \geq 0 \quad 1-7-19$$

De estas tres últimas ecuaciones se deduce que:

$$T = E_{cin} + W_{rad} \quad 1-7-20$$

lo cual nos indica que también en este caso hay "Conservación de energía".

Pero podemos presentar otro caso, muy factible por cierto, en el que falla el "Principio de Conservación de Energía", lo que es suficiente para demostrar que la Teoría que estamos estudiando no tiene validez universal, y que por lo tanto habrá que buscar una nueva Teoría.

Sea por ejemplo, una partícula cargada dentro de un campo magnético constante " \vec{H} ", cuya ecuación del movimiento en sus componentes (x, y) es:

$$\begin{aligned} a_x - \omega v_y - \frac{1}{b} \dot{a}_x &= 0 \\ a_y + \omega v_x - \frac{1}{b} \dot{a}_y &= 0 \end{aligned} \quad 1-7-21$$

ecuación que en forma compacta podemos escribir como:

$$m \cdot \vec{a} \cdot \vec{v} = - \frac{m}{b} \vec{a}^2 + \frac{m}{b} \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{v}) \quad 1-7-22$$

en la cual tenemos:

$$\begin{aligned} m \cdot \vec{a} \cdot \vec{v} &= \frac{d}{dt} \left(- \frac{mv^2}{2} \right) = - \frac{d}{dt} (E_{cin}) \\ \frac{m}{b} \vec{a}^2 &= \frac{d}{dt} (W_{rad}) \end{aligned} \quad 1-7-23$$

$$\frac{m}{b} \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{v}) = - \frac{d}{dt} (W_{Sch})$$

y al sustituir estos valores en la 1-7-22, después de multiplicar por "dt" se obtiene:

$$dE_{cin} + dW_{rad} + dW_{Sch} = 0 \quad 1-7-24$$

e integrando entre " 0 y t " se tiene como resultado:

$$\Delta E_{cin}(t/o) + \Delta W_{rad}(t/o) + \Delta W_{Sch}(t/o) = 0 \quad 1-7-25$$

que representa el "Balance de Energía" para la fuerza que estamos considerando.

Aplicando al sistema 1-7-21, el método de Gilbert N. Plass, se obtiene como "Solución Aceptable" de la ecuación:

$$v_x = v_0 \cos(\beta t) \cdot e^{-\alpha t} \quad 1-7-26$$

$$v_y = -v_0 \sin(\beta t) \cdot e^{-\alpha t}$$

donde las constantes " α " y " β " vienen dadas por:

$$|\alpha| = \alpha = \frac{1}{2}b \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + 16b^{-2}\omega^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \quad 1-7-27$$

$$\beta = \frac{1}{2}b \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + 16b^{-2}\omega^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Aquí las únicas energías observables son la Cinética y la de Radiación, pues nunca se puede visualizar la energía de Schott en campos cuya velocidad sea " r^{-2} ".

La energía cinética inicial viene dada por:

$$E_{cin} = \frac{mv^2(o^+)}{2} = \frac{mv^2(o^-)}{2} = \frac{mv^2(o)}{2} e^{-2/\alpha t} \quad 1-7-28$$

que debe transformarse, según el "Principio de Conservación" y por lo menos en el límite para " $t \rightarrow \infty$ ", en "Energía de Radiación", ya que todos aceptan que para una partícula en reposo o sin aceleración, la "Energía de Schott" es nula.

Se debiera tener pues que para un " $t = \infty$ " :

$$|\Delta E_{cin}| = |\Delta W_{rad}| \quad 1-7-29$$

pero se puede comprobar que en este caso, los resultados obtenidos en realidad son:

$$\Delta E_{cin} = \frac{mv^2(o)}{2} \left[1 - e^{-2/\alpha / t} \right] \quad 1-7-30$$

$$\begin{aligned} \Delta W_{rad} &= \frac{m}{b} \int_0^{\infty} a^2 \cdot dt \\ &= \frac{mv^2(o)}{2} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{b/a} \left[1 - e^{-2/\alpha / t} \right] \end{aligned} \quad 1-7-31$$

Como siempre tomamos:

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{b \cdot |a|} > 1$$

y si

$$\begin{aligned} w &= b \\ &= \text{frecuencia exterior} \end{aligned}$$

entonces se tendrá que:

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{b \cdot |a|} \gg 1 \quad 1-7-32$$

Luego, comparando las ecuaciones 1-7-28 y 1-7-29 y teniendo en cuenta la 1-7-30, resulta que:

$$\Delta W_{rad} \gg \Delta E_{cin} \quad 1-7-33$$

contra lo que se afirmaba en la 1-7-27 de acuerdo con el "Principio de Conservación de Energía".

Tomando valores aproximadamente iguales para "w" y "b", o sea

$$\frac{w}{b} = 0.968$$

se tendrá que la energía de radiación, al sustituir la 1-7-26 en la 1-7-29, está dada por:

$$\Delta W_{rad} = 1.57 \frac{mv_0^2}{2} = 1.57 \Delta E_{cin} \quad 1-7-34$$

De modo que según estos datos, la partícula irradia un 57% de energía más de su energía cinética inicial. Estamos pues en presencia de una "Paradoja Energética", la cual sólo podría desaparecer con una "Energía Total de Schott" negativa, para partículas en reposo.

Pero este último recurso es inaceptable porque entonces dos partículas diferentes en reposo, podrán tener una energía total

de Schott diferente. Y como ya se dijo poco ha, todos aceptan, incluso Dirac y el propio Plass, autor de la llamada "Solución Aceptable", que la energía de Schott para una partícula en reposo tiene que ser nula.

Luego vemos con el sencillo ejemplo analizado que en la llamada "Teoría de Lorentz-Dirac", no se cumple, ni siquiera en la "Solución Aceptable" propuesta por Gilbert N. Plass, el "Principio Fundamental de toda Mecánica", como lo es el "Principio de Conservación de la Energía."

Esta paradoja desaparece, al tomar como ecuación del movimiento, la introducida por Thomas Erber (1), ecuación que luego ha sido examinada y generalizada por el Dr. Willy Cloetens (2).

La nueva formulación de la ecuación del movimiento es:

$$m \cdot \vec{a}(t) = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} - \frac{2 \cdot e^2}{3 \cdot c^3} \left(\frac{a}{v}\right)^2 \cdot \vec{v}$$

$$= \vec{F}_{ext} - m \tau_L \left(\frac{a}{v}\right)^2 \cdot \vec{v}$$

1-7-35

donde $\tau_L = \frac{1}{b}$

Ecuación cuya solución haremos en el apéndice "A" que acompaña a este trabajo.



(1) Th. ERBER, en "Fortschritte der Physik", 9, 384, (1961)

(2) W. CLOETENS, en "Damping-time" of relativistic charged particle with self-interaction in a constant homogeneous magnetic field.

Aceptado por SIMON STEVIN, marzo de 1968

C A P I T U L O I I

E L E C T R O D I N A M I C A

d e

PEIERLS - McMANUS - PRIGOGINE - HEWIN

y

sus Escuelas

C A P I T U L O I I

E L E C T R O D I N A M I C A

á e.

Peierls - Mc Manus - Prigogine - Henin
y
sus Escuelas

I.- PLANTEAMIENTO DE LA ECUACION DEL MOVIMIENTO

En esta sección seguiremos totalmente a los propios autores Henin-Prigogine (1). Deduciremos la ecuación del movimiento para partículas que dependan de un "Campo electromagnético". La eliminación de los auto-campos, dará la ecuación del movimiento para una fuerza externa arbitraria que viene expresada por:

$$m_0 c^2 w_{\mu\nu} = e F_{\mu\nu}^0(q) \cdot u_{\nu} + e F_{\mu\nu}(q) \cdot u_{\nu} \quad 2-1-1$$

en la cual: w = cuadrivector aceleración

F = tensor del auto-campo

F^0 = es el tensor del campo externo

ambos tomados en el punto:

$$x = q$$

La ecuación anterior relaciona la aceleración con el valor del campo sólo en el punto " $x = q$ ". Para una mejor comprensión de la ecuación del movimiento, vamos a considerar una partícula dotada de un movimiento "unidimensional" a lo largo del eje "z", en cuyo caso se tiene que:

$$\begin{aligned} q_{\mu} &= (0, 0, q, q_4) & u_{\mu} &= (0, 0, u, u_4) \\ w_{\mu} &= (0, 0, w, w_4) & \dot{w}_{\mu} &= (0, 0, \dot{w}, \dot{w}_4) \\ u^2 + u_4^2 &= -1 & uw + u_4 w_4 &= 0 \\ w^2 + w_4^2 + u\dot{w} + u_4 \dot{w}_4 &= 0 \end{aligned} \quad 2-1-2$$

$$k_{\mu} = k \cdot \text{sen} \theta \cos \varphi, k \cdot \text{sen} \theta \text{sen} \varphi, k \cdot \cos \theta, k_4$$

(1) Prigogine I. and Henin F. en "On a classical reformulation Acad. Real de Bélgica, (1965)

Se logrará una mayor simplificación de la 2-1-1, si además hacemos:

$$\begin{aligned} eF_{34}^0 \cdot u_4 &= -if(s)u_4 \\ u &= \sinh U \end{aligned} \quad 2-1-3$$

Para el límite no-relativista en que se tiene:

$$\begin{aligned} u &= \left(-\frac{v}{c}\right) \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} & u \approx U \approx \frac{v}{c} \\ \dot{u} \approx \dot{U} \approx \frac{a}{c^2} & \ddot{u} \approx \ddot{U} \approx \frac{\dot{a}}{c^3} \end{aligned} \quad 2-1-4$$

donde "a" representa la "aceleración tridimensional" y entonces la expresión final de la ecuación del movimiento será:

$$m\vec{a}(t) = F_{ext} + \frac{4e^2}{3c^3} \int_{-\infty}^t dt' \int_0^\infty dk \cdot g(k_0, k) \cos ck(t-t') \dot{\vec{a}}(t') \quad 2-1-5$$

que es la forma corriente de escribir la ecuación del movimiento en la teoría no-relativista de un electrón.

Esta ecuación aunque parecida a la presentada por Bohm-Weinstein (1), tiene una diferencia notable en el factor de forma, a saber:

Para Bohm-Weinstein: $g(k_0, k) / k^2$

Para Peirls-Prigogine: $g(k_0, k)$

y ello se debe a que aquéllos toma como punto de partida para su ecuación, el límite no-relativista de la ecuación:

$$m_0 c^2 w = f_\mu \quad 2-1-6$$

En cambio, para partículas cargadas y con " $\frac{v}{c} \ll 1$ " se tiene que " k_0 " y la función del cut-off es igual a la unidad para todos los valores de "k" y desaparecen todos los efectos de memoria que en el caso anterior era del orden:

$$\tau_0 = (ck_0)^{-1} \quad 2-1-7$$

(1) BOHM, D. y WEINSTEIN, M., en "The self-oscillations of a... Phys. Rev. Vol. 74, 12, 1789-1798, (1948)

Para una más amplia discusión de la ecuación 2-1-5, tomaremos como valores del factor de forma, aquéllos en que:

$$g(k_0, k) \geq 0 \quad \text{para } 0 \leq k \leq \infty \quad 2-1-8$$

de modo que en ausencia de fuerzas externas, las auto-aceleraciones del tipo de Lorentz vendrán dadas por:

$$a(t) = a(0) \cdot e^{\lambda t} \quad \text{para } \lambda > 0 \quad 2-1-9$$

Al introducir este valor en la 2-1-5 para " $f(t) = 0$ " dichas soluciones exigen que:

$$\left[m - \frac{4e^2}{3c^2} \int_0^\infty dk g(k_0, k) \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + (ck)^2} \right] a(0) = 0 \quad 2-1-10$$

de la cual se deduce teniendo en cuenta la 2-1-8, que:

$$\int_0^\infty dk g(k_0, k) \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + (ck)^2} < \int_0^\infty dk g(k_0, k) \quad 2-1-11$$

Para esta ecuación, según lo han demostrado Herglotz (1) y Wildermuth (2), y si la masa mecánica " $m_0 > 0$ ", la única solución compatible es:

$$a(0) = 0 \quad 2-1-12$$

Por lo tanto en la 2-1-9, no hay soluciones "RUN-AWAY". Posteriormente, el Dr. F. Cloetens (3) ha demostrado que la mencionada condición de la 2-1-8 y la condición de causalidad expresada por:

$$\begin{aligned} a(t) &= 0 & \text{para } t \leq t_0 \\ f(t) &= 0 & \text{" } t \leq t_0 \end{aligned} \quad 2-1-13$$

son condición necesaria y suficiente para excluir toda solución "RUN-AWAY" de la ecuación 2-1-5.

(1) HERGLOTZ, G., en "Gött Nachr, 357, (1903)

(2) WILDERMUTH, K., en Naturf, 10-A, 450, (1955)

(3) CLOETENS, F. J., en Memoria para la Licenciatura

Universidad Libre de Bruselas, (1963)

Según un autor (1) ampliamente conocido, para eliminar las soluciones "run-away" de la ecuación Lorentz-Dirac:

$$m \cdot \vec{a}(t) = f(t) + \frac{2e^2}{3c^2} \cdot \dot{\vec{a}} \quad 2-1-14$$

es preciso imponer condiciones de límite en " $t = +\infty$ "

Pero aún en este caso, la llamada solución física es incompatible con la condición de causalidad impuesta en la 2-1-13.

Para mejor captar estas características vamos a considerar la ecuación del movimiento cuando la "fuerza externa" es un "Impulso" en el tiempo " $t = 0$ "

Con objeto de evitar toda discontinuidad en la fuerza escogeremos:

$$f(t) = E \left\{ (t-t_0) \left[\eta(t_1+t_0-t) - \eta(t_0+t) \right] + (t_0+2t_1-t) \left[\eta(t-t_1-t_0) - \eta(t-t_0-2t_1) \right] \right\} \quad 2-1-15$$

$$g(k_0, k) = \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{k_0}\right)^2}$$

Con esta función del "cut-off" y la condición de causalidad, la ecuación 2-1-5 se reduce a:

$$m \cdot \vec{a}(t) = \vec{F}_{ext} + \frac{2e^2 k_0}{3 \cdot c^2} \int_0^t dt' e^{-ck_0(t-t')} \cdot \dot{\vec{a}}(t') \quad 2-1-16$$

Utilizando la restricción impuesta en la 2-1-15, suponiendo que la condición de causalidad da:

$$a(0^+) = 0$$

y aplicando "Transformadas de Laplace" se obtiene:

$$\tilde{a}(p) = \frac{E \alpha}{m} e^{-pt_0} \left[1 - e^{-pt} \right] \frac{1}{p^2} \cdot \frac{p + ck_0}{p + ck_0} \quad 2-1-17$$

donde:

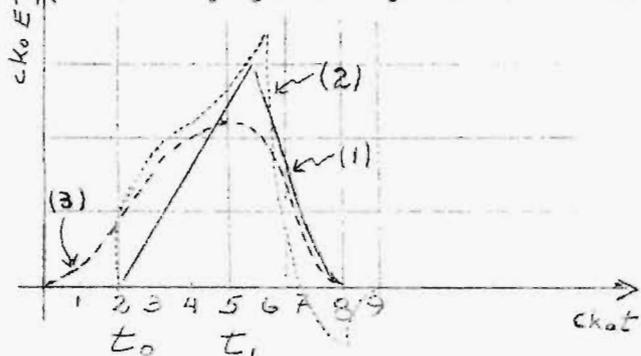
$$\alpha = 1 - \frac{2e^2 k_0}{3mc^2} > 0 \quad \text{para } m_0 > 0$$

(1) PLASS, G. N. op. cit. Vol. 33, 37, (1961)

Si ahora tomamos la "Transformada Inversa de Laplace" y limitando el contorno por un semicírculo en el semiplano superior o inferior de acuerdo con el signo del argumento de la exponencial se obtienen los siguientes valores para la aceleración:

$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq t_0 \\ \frac{E}{m} \left\{ t - t_0 + \frac{2e^2}{3mc^3} \left[1 - \exp(-ck_0 \alpha (t - t_0)) \right] \right\} & \text{para } t_0 \leq t \leq t_1 + t_0 \\ \frac{E}{m} \left\{ 2t_1 + t_0 - t - \frac{2e^2}{3mc^3} \left[1 - 2e^{-ck_0 \alpha (t - t_0 - t_1)} + e^{-ck_0 \alpha (t - t_0)} \right] \right\} & \text{2-1-18} \\ & t_1 + t_0 \leq t \leq 2t_1 + t_0 \\ - \frac{E}{m} \frac{2e^2}{3mc^3} e^{-ck_0 \alpha (t - t_0)} \left(1 - e^{ck_0 \alpha t_1} \right)^2 & \text{para } 2t_1 + t_0 \leq t \end{cases}$$

En la figura adjunta se tiene:



- (1) $\frac{ck_0}{E} f(t)$ vs $ck_0 t$
 $ck_0 t_0 = 2$
 $ck_0 t_1 = 5$
- (2) $\frac{ck_0}{E} ma(t)$ vs $ck_0 t$ Prigogine
- (3) $\frac{ck_0}{E} ma(t)$ vs $ck_0 t$ Lorentz-D

fig. 8

la solución gráfica de la 2-1-18 para valores típicos de k_0 , t_0 y t_1

y en ella vemos comparadas tres teorías, y las características más llamativas son:

- la no pre-aceleración
- la desaparición de la aceleración un tiempo después de interrumpida la fuerza.

En cambio: al mantener la condición de causalidad dada en la 2-1-13, la ecuación Lorentz-Dirac conduce a una solución "run-away".

Si se impone la condición de límite " $a(\infty) = 0$ " entonces aparece el fenómeno de la pre-aceleración.



II.- SOLUCION DE LA ECUACION SEGUN CLOETENS

Para encontrar la solución de la ecuación del movimiento dada por la 2-1-5, nos limitaremos a funciones del "cutt-off" que satisfagan la condición de la 2-1-8, y además supondremos que la fuerza se aplica progresivamente a partir de $t = 0$ de modo que se tenga:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{para } t \leq 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} f_+(t) &= 0 && 2-2-1 \end{aligned}$$

al introducir el factor de forma 2-1-8, se obtiene

$$a(0^+) = 0$$

y aplicando "Transformadas de Laplace (\mathcal{L})" a la ecuación general 2-1-5 resulta:

$$\tilde{a}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{m \cdot \tilde{G}(p)} \quad 2-2-2$$

donde:

$$\tilde{G}(p) = 1 - \frac{4e^2}{3 mc^2} \int_0^\infty dk \cdot g(k, k) \frac{p^2}{p^2 + (ck)^2}$$

Utilizando el teorema sobre las "Transformadas Inversas de Laplace (\mathcal{L}^{-1})", se obtiene como solución de la 2-1-5 para $t \geq 0$

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{iy-\infty}^{iy+\infty} dz \cdot e^{-izt} \cdot \frac{\tilde{f}(-iz)}{m \cdot \tilde{G}(-iz)} \quad 2-2-3$$

en la cual: queda determinado por la exigencia de que todos los puntos de singularidad del integrando queden por debajo del contorno de integración.

De ordinario dichos contornos se evalúan mediante un desplazamiento del contorno en el semiplano inferior con radio a infinito " $r_0 = \infty$ "

Si las únicas singularidades existentes son polos para ciertos valores " z_i de z ", entonces se tiene:

$$m \cdot a(t) = \sum_{z_i} e^{-iz_i t} \cdot \text{Res} \frac{\tilde{f}(-iz)}{\tilde{G}(-iz)} \quad z = z_i \quad 2-2-4$$

Por lo tanto sólo queda demostrar que el integrando no posee polos con parte imaginaria positiva a fin de excluir toda posibilidad de soluciones "run-away".

Para ello, seguiremos a Bolescu (1), teniendo sumo cuidado al desviar el contorno hacia el semiplano inferior, en la definición del nuevo integrando en el nuevo semiplano.

Suponiendo que la "fuerza externa" aplicada es tal que carece de polos en el semiplano superior, sólo habrá que tener en consideración la función: " $\tilde{G}(-iz)$ " que se puede expresar en la forma:

$$\tilde{G}(-iz) = 1 + \frac{2e^2 z}{3\pi mc^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\chi(k)}{ck - z} \quad 2-2-5$$

donde

$$\chi(k) = i_1(k) \cdot g(k_0, k) + i_1(-k) \cdot g(k_0, -k)$$

Por otra parte, de todos es conocido que la integral de Cauchy que aparece en la ecuación anterior presenta un "cut-off" sobre el eje real, y por lo tanto también la función " $\tilde{G}(-iz)$ " lo presentará.

De acuerdo con la teoría de las "Transformadas de Laplace", la función que debe utilizarse para resolver la 2-2-4 es del tipo:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \cdot \frac{\chi(k)}{ck - z} \quad 2-2-6$$

(1) BALESU, R., en "Statistical Mechanics of charged particles" Interscience, N. Y. (1963)

en el semiplano superior, de modo que:

$$\begin{aligned} \tilde{G}^+(-iz) &= 1 + \frac{2e^{\frac{2}{3}z}}{3mc^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot \frac{\tilde{f}(k)}{ck - z} \quad z \text{ en semipl. superior} \\ &= 1 + \frac{2e^{\frac{2}{3}z}}{3\pi mc^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot \frac{\tilde{f}(k)}{ck - z} + \frac{4e^{\frac{2}{3}z}}{3mc^2} \gamma\left(\frac{z}{c}\right) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} 2-2-7 \\ \text{para } z \text{ en semiplano inf.} \end{array}$$

y donde:

$2\pi i \gamma\left(\frac{z}{c}\right)$ representa la discontinuidad de la integral de Cauchy en el eje real.

Todo lo anterior demuestra que la función definida por las ecuaciones 2-2-7 no tiene ceros con parte imaginaria positiva, o lo que es lo mismo, carece de ceros en el semiplano superior.

Si " Γ " es el contorno de la región en la cual la función " $\tilde{G}(-iz)$ "

está definida, la diferencia entre el número de ceros y polos de " $\tilde{G}^+(-iz)$ " dentro de ese contorno " Γ " viene dado por:

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \left[\ln \tilde{G}(-iz) \right] \quad 2-2-8$$

Si escogemos como contorno " Γ " un semicírculo al infinito en el semiplano superior y teniendo presente que ni la integral de Cauchy, 2-2-6, ni " $\tilde{G}^+(-iz)$ " tienen polos dentro de " Γ " la 2-2-8 nos da el número de ceros de " $\tilde{G}(-iz)$ " con parte imaginaria positiva.

Para determinar el número de ceros, bastará considerar la variación del número complejo " $\tilde{G}^+(-iz)$ " cuando " z " varía a lo largo del contorno de las adjuntas figuras; en la página siguiente.

Para ello, basta asociar con dicha figura 9, la del hodógrafo tal que a cada punto " z " del contorno, corresponda en el hodógrafo el afijo del número complejo " $\tilde{G}^+(-iz)$ "



En "a" $\rightarrow \infty$, la integral $\rightarrow 0$, y como a cero como $\frac{1}{s}$ de modo que,

$$\tilde{G}^+(-ia) = 1 - \frac{2\sigma^2}{3\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \chi(k) \quad 2-2-9$$

para "a" recorriendo el semicírculo de la fig. 10 en el sentido señalado.

Sobre el eje "real" para "a" $\rightarrow \infty$, se tendrá:

$$\tilde{G}^+(-ia) = 1 - \frac{2\sigma^2}{3\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \chi(k) - \frac{2\sigma^2}{3\pi\sigma^2} (ia) \chi\left(\frac{a}{c}\right) \quad 2-2-10$$

lo cual indica que el hodógrafo cruza el eje real en los puntos

$$\begin{aligned} \tilde{G}^+(0) &= 1 \\ \tilde{G}^+(\pm ia) &= 1 - \frac{2\sigma^2}{3\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \chi(k) \pm ia \end{aligned} \quad 2-2-11$$

Como " $\tilde{G}^+(i\infty) = \tilde{G}^+(-i\infty)$ " el hodógrafo ha de ser una curva cerrada con dos posibilidades como aparece en las figuras 10 y 11.

- En la fig. 10, el número de ceros de $\tilde{G}^+(-ia) = 0$ es $N = 0$ en el semiplano superior.
- En la fig. 11, ese número es $N = 1$

Por otra parte y según se ha visto en la 2-1-17 se tiene:

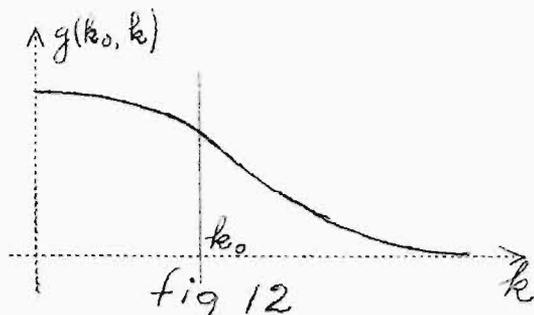
$$\alpha > 0 \quad \text{si} \quad m_1 > 0$$

lo cual indica que la presencia de una masa mecánica mayor que cero, es condición suficiente para eliminar toda solución "run-away" con tal que se cumpla la restricción de la 2-1-8.

III.- SOLUCION SEGUN UN METODO GENERAL

En esta sección analizaremos la solución de la ecuación del movimiento según el método desarrollado por el Dr. W. Cloetens en la Universidad de El Salvador.

Escogiendo como factor de forma:



$$g(k_0, k) = \frac{k_0^2}{k_0^2 + k^2} \quad 2-3-1$$

y cuya representación gráfica aparece en la adjunta fig. 12, la ecuación del movimiento toma la forma:

$$m \cdot \vec{a}(t) = \vec{F}_{ext} + \frac{4e^2}{3\pi c^2} \int_0^t dt' \int_0^\infty dk \frac{k_0^2}{k_0^2 + k^2} \cos ck(t-t') \dot{\vec{a}}(t') \quad 2-3-2$$

Multiplicando por "k₀", haciendo "k/k₀ = x" y resolviendo para "a(t)" se tiene:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}_{ext}}{m} + \frac{4e^2 k_0}{3\pi mc^2} \int_0^{t'} dt' \int_0^\infty dx \frac{1}{1+x^2} \cos cx(t-t') \dot{\vec{a}}(t') \quad 2-3-3$$

Recordando que $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$

e integrando respecto a "x" resulta:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}_{ext}}{m} + \frac{2}{3} r_0 k_0 \int_0^{t'} e^{-ck_0(t-t')} dt' \dot{\vec{a}}(t') \quad 2-3-4$$

Para determinar el valor de "r₀k₀" basta tener presente que en la "Electrodinámica de Peirls-Prigogine":

$$m_{el} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{e}{c}\right)^2 \int g(k_0, k) dk \quad 2-3-5$$

que al multiplicar y dividir por "m", haciendo nuevamente

"k/k₀ = x; y recordar que $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$

se obtiene como valor de la masa eléctrica:

$$m_{el} = (r_o k_o)m \quad 2-3-6$$

Teniendo presente que " $m_o = 0$ ", lo que supone que

$$"m_{el} = m"$$

y sustituido en la 2-3-6 da:

$$m_{el} = (r_o k_o).m_{el} \implies (r_o k_o) = 1 \quad 2-3-7$$

Llevados estos valores a la 2-3-4, ésta se reduce a:

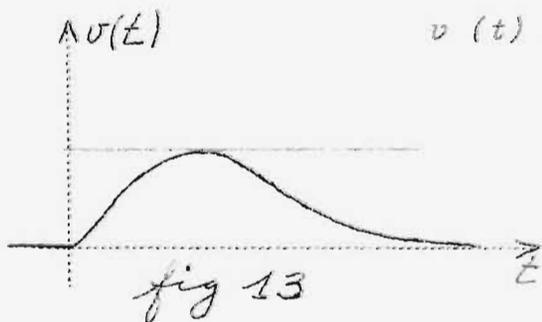
$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}_{ext}}{m} + \frac{2}{3} \int_0^t dt' . e^{-ck_o(t-t')} . \dot{\vec{a}}(t') \quad 2-3-8$$

Aplicando " \mathcal{L} " para resolver esta ecuación y teniendo en cuenta los teoremas relativos a las transformadas de Laplace, resulta finalmente que:

$$E(p) = \frac{m(p + 3ck_o)}{3(p + ck_o)} . A(p) \quad 2-3-9$$

Suponiendo que " $v(t)$ " sea del tipo:

$$v(t) = \frac{3eE\theta}{m} t^2 . e^{-3ck_o t} . u(t) \quad 2-3-10$$



donde $u(t)$ = función Heaveside
 = 0 para $t < 0$
 = 1 " $t > 0$

es decir que el movimiento sea como el representado en la fig. 13

entonces la 2-3-9 la podemos escribir así:

$$a(t) = \frac{3eE\theta}{m} (2t - 3ck_o t^2) . e^{-3ck_o t} \quad 2-3-11$$

y por las Transformadas de Laplace se tiene que:

$$A(p) = \frac{3eE\theta}{m} \cdot 2 \left[\frac{1}{(p + 3ck_o)^2} - \frac{3ck_o}{(p + 3ck_o)^3} \right] \quad 2-3-12$$

que al sustituirla en la 2-3-3 se tiene:

$$eE(t) = \frac{eF_0}{2ck_0} \left[e^{-3ck_0 t} (1 + 6ck_0 t) - e^{-ck_0 t} \right] \quad 2-3-13$$

Tanto la 2-3-10 como la 2-3-11 las podemos expresar en función de "variables reducidas" "x" y "a" basta para ello multiplicar y dividir dichas ecuaciones y hacer

$$ck_0 t = x$$

de modo que se obtienen como nuevas expresiones:

$$v(t) = v^* \cdot x^2 \cdot e^{-3x} \quad 2-3-14$$

$$a(t) = v^* \cdot ck_0 (2x - 3x^2) \cdot e^{-3x}$$

Podemos expresar el valor de "ck₀" en función del tiempo fundamental de Lorentz (τ_L), de la siguiente manera:

$$\tau_L = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{mc^3}$$

lo que implica:

$$\tau_L ck_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{mc^3} \cdot ck_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{mc^2} \cdot k_0$$

$$\text{pero } \frac{e^2}{m \cdot c^2} = r_0$$

Luego:

$$\tau_L \cdot ck_0 = \frac{2}{3} (r_0 k_0) \quad \text{y} \quad ck_0 = \frac{2}{3} (r_0 k_0) \cdot \tau_L^{-1}$$

pero como acabamos de ver en la 2-3-7, :

$$ck_0 = \frac{2}{3} \tau_L^{-1}$$

al sustituir estos valores en la 2-3-14_b resulta:

$$a(t) = \frac{2}{3} \tau_L^{-1} \cdot v^* (2x - 3x^2) \cdot e^{-3x} \quad 2-3-15$$

que nos da la "aceleración" en función de las variables reducidas, las cuales al introducirías en la 2-3-13 nos da como expresión de la fuerza externa en función de variables reducidas:

$$eE(t) = m \cdot \mathcal{Z}_L^{-1} \cdot v * \left[(1 + 6x) \cdot e^{-3x} - e^{-x} \right] \quad 2-3-16$$

Al mismo resultado podemos llegar siguiendo un procedimiento totalmente distinto.

A partir de la 2-3-2, introduciendo la variable "x=ck₀t" e integrando respecto a "k" se tiene:

$$a(x) = \frac{eE(x)}{m} + \frac{2}{3} e^{-x} \cdot \int_0^x e^x \cdot \dot{a}(x) dx \quad 2-3-17$$

Resolviendo para " $\frac{eE(x)}{m}$ " que representa la "fuerza externa" aplicada y después de integrar por partes dos veces, se llega al siguiente resultado:

$$\frac{eE(x)}{m} = a(x) - \frac{2}{3} e^{-x} \left[a(x) \cdot e^x - v(x) \cdot e^x + \int_0^x v(x) dx \right] \quad 2-3-18$$

Introduciendo "e^{-x}" en el corchete y reduciendo términos nos da:

$$\frac{eE(x)}{m} = \frac{1}{3} a(x) + \frac{2}{3} v(x) - \frac{2}{3} e^{-x} \int_0^x e^{x'} \cdot v(x) dx' \quad 2-3-19$$

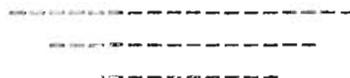
Si utilizamos los valores de "v(x)" y de "a(x)" dados por 2-3-14_a y 2-3-15 respectivamente en la 2-3-19, la integración del tercer término de ésta nos da:

$$-\frac{2}{3} e^{-x} \int_0^x e^{x'} \cdot v(x) dx' = -\frac{2}{3} e^{-x} \cdot v * \left[\frac{1}{4} - e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \right] \quad 2-3-20$$

y sustituyendo totalmente en la 2-3-19 se tiene:

$$\frac{eE(x)}{m} = v * \left[\left(\frac{1}{6} + x \right) \cdot e^{-3x} - \frac{1}{6} e^{-x} \right] \quad 2-3-21$$

ecuación que coincide con la 2-3-16 obtenida anteriormente.



IV... ESTUDIO DE ALGUNOS EJEMPLOS TIPICOS

A.- Fuerza externa producida por un " \vec{H} ", en la dirección del eje "z"

En estas condiciones, la ecuación del movimiento en sus componentes "x-y", viene dada por:

$$a_x \cdot wv_y = \frac{4}{3\pi}(r_0 k_0) \int_0^t dt' \int_0^\infty dx \frac{1}{1+x^2} \cos ck_0(t-t')x \cdot \dot{a}_x(t') \quad 2-4-1$$

$$a_y + wv_x = \frac{4}{3}(r_0 k_0) \int_0^t dt' \int_0^\infty dx \frac{1}{1+x^2} \cos ck_0(t-t')x \cdot \dot{a}_y(t')$$

Para integrar respecto a "x", introducimos "variables complejas de modo que:

$$f = v_x(t) + iv_y(t)$$

$$\dot{f} = \dot{v}_x(t) + i\dot{v}_y(t) \implies \dot{f} = a_x(t) + ia_y(t) \quad 2-4-2$$

$$\ddot{f} = \ddot{v}_x(t) + i\ddot{v}_y(t) \implies \ddot{f} = \dot{a}_x(t) + i\dot{a}_y(t)$$

Sumando miembro a miembro es sistema 2-4-1, después de multiplicar la "segunda" de sus ecuaciones por "i" y reagrupando los términos convenientemente teniendo presente la 2-4-2 se tendrá:

$$\dot{f} - w(v_y - iv_x) = \frac{4}{3\pi}(r_0 k_0) \int_0^t dt' \int_0^\infty dx \frac{1}{1+x^2} \cos ck_0(t-t')x \cdot \ddot{f} \quad 2-4-3$$

pero el paréntesis que aparece en el Primer miembro, lo podemos transformar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} v_y - iv_x &= i\left(\frac{v_y}{i} - v_x\right) = i\left(\frac{v_y}{i} \cdot \frac{i}{i} - v_x\right) \\ &= -i(v_x + iv_y) = -if \end{aligned} \quad 2-4-4$$

de suerte que teniendo en cuenta que el valor de $(r_0 k_0)$ en la electrodinámica de Peirls-Prigogine viene dado por:

$$(r_0 k_0) = \frac{5}{2}$$

la ecuación 2-4-3 toma entonces la forma:

$$\dot{f} + iw\dot{f} = \frac{2}{\pi} \int_0^t dt' \int_0^\infty dx \frac{x}{1+x^2} \cos ck_0(t-t') \ddot{f} \quad 2-4-5$$

Ecuación libre de constantes arbitrarias ya que en ella todas las magnitudes poseen un significado bien definido.

Aplicando "Transformadas de Laplace", utilizando los teoremas correspondientes a las mismas y recordando que el "Segundo término" de dicha ecuación representa un producto de convolución se tiene:

$$pF(p) - f(0) + iwF(p) = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \frac{p^2}{p^2 + (ck_0 x)^2} dx \left[p^2 F(p) - pf(0) - \dot{f}(0) \right] \right\} \quad 2-4-6$$

Multiplicando y dividiendo el "2º miembro" de esta ecuación por $(ck_0)^2$ y haciendo $\frac{p}{ck_0} = a$, se obtiene:

$$pF(p) - f(0) + iwF(p) = \frac{2}{\pi (ck_0)^2} p \left\{ \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{a^2 + x^2} dx \left[p^2 F(p) - pf(0) - \dot{f}(0) \right] \right\} \quad 2-4-7$$

En esta ecuación vemos que hay "polos" para los siguientes valores: $x = \pm i$ y $x = \pm ia$

Si además se utiliza el teorema sobre los residuos que establece:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a(1+a)} \quad 2-4-8$$

y volviendo a hacer la sustitución: " $a = \frac{p}{ck_0}$ " se tiene:

$$pF(p) - f(0) + iwF(p) = \frac{1}{p + ck_0} \left[p^2 F(p) - pf(0) - \dot{f}(0) \right] \quad 2-4-9$$

Multiplicando ambos miembros por " $(p + ck_0)$ " esta última ecuación, se reduce de un grado, introduciendo una frecuencia " $w_0 = ck_0$ ", y resolviendo para " $F(p)$ " se tiene por fin:

$$F(p) = \frac{w_0 f(0) - \dot{f}(0)}{(w_0 + iw) \left[p + \frac{iww_0}{w_0 + iw} \right]} \quad 2-4-10$$

Ecuación que sólo depende de:

$$" p " \text{ y de } a = \frac{iww_0}{w_0 + iw}$$

y en la cual podemos aplicar "Transformadas Inversas de Laplace" recordando para ello que:

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p + a} = e^{-at}$$

Luego:

$$\mathcal{L}^{-1} F(p) = \mathcal{L}^{-1} \frac{w_0 f(0) - \dot{f}(0)}{(w_0 + iw) \left(p + \frac{iww_0}{w_0 + iw} \right)}$$

y

$$f(t) = \frac{1}{w_0 + iw} \left[w_0 f(0) - \dot{f}(0) \cdot \exp \left(- \frac{iww_0}{w_0 + iw} t \right) \right] \quad 2-4-11$$

Esta ecuación constituye la "Solución formal" de la ecuación del movimiento 2-4-1, pero presenta una incompatibilidad como se demuestra a continuación.

En efecto, tomando la solución para " $t = 0$ ", la 2-4-11, se reduce a :

$$f(0) = \frac{1}{w_0 + iw} \left[f(0) \cdot w_0 - \dot{f}(0) \right] \quad 2-4-12$$

que al multiplicarla por " $w_0 + iw \neq 0$ " se obtiene:

$$iw \cdot f(0) = - \dot{f}(0) \quad 2-4-13$$

Recordando la 2-4-2a, y que las condiciones iniciales son:

$$v_x(0) = v_0 \quad v_y(0) = 0$$

se tiene, $f(0) = v_0$

Al multiplicar por "iw" y teniendo presente que:

$$i w v_0 = -i \dot{f}(0) = -[a_x(0) + i a_y(0)]$$

según la 2-4-2b, resulta finalmente que:

$$0 + i w \cdot f(0) = -a_x(0) - i a_y(0)$$

e igualando partes reales e imaginarias se tiene:

$$a_x(0) = 0$$

2-4-14

$$a_y(0) = -w v_0$$

Derivando la 2-4-11 respecto a "t" y tomándola para "t=0" se llega al siguiente resultado:

$$-\dot{f}(0) = \frac{i w w_0}{(w_0 + i w)^2} [w_0 f(0) - \dot{f}(0)] \quad 2-4-15$$

Se puede demostrar que este valor de " $\dot{f}(0)$ " es distinto del que toma en la 2-4-13.

En efecto:

Basta multiplicar la 2-4-15 por " $(w_0 + i w)^2$ " y resolver para " $\dot{f}(0)$ ", obteniéndose como resultado:

$$-\dot{f}(0) = \frac{i w w_0^2}{w_0^2 + i w w_0 - w^2} f(0) \quad 2-4-16$$

Igualando los "Segundos miembros" de la 2-4-13 y 2-4-16 se tiene, después de multiplicar el denominador de esta última expresión por " w_0^2 ", el siguiente resultado:

$$w = i w_0$$

que nunca puede cumplirse ya que tanto "w" como "w₀" son reales, con lo cual queda demostrada la desigualdad de las ecuaciones mencionadas, 2-4-13 y 2-4-15.

Por lo tanto: La solución dada en la 2-4-11, aunque formal, no es verdadera, puesto que conduce a una incompatibilidad para el valor de " $\dot{f}(0)$ ".

Para encontrar la solución adecuada de la ecuación del movimiento que estamos estudiando, procederemos de la siguiente manera:

Teniendo en mente las relaciones 2-4-2 y 2-4-13 se llega a la siguiente expresión:

$$a_x(0) + ia_y(0) = -iw[v_x(0) + iv_y(0)] \quad 2-4-17$$

de modo que al igualar partes reales e imaginarias y recordando las condiciones iniciales de la 2-4-14, resulta:

$$\begin{aligned} a_x(0) &= 0 \\ a_y(0) &= -wv_0 \end{aligned} \quad 2-4-18$$

Sustituyendo el "Primer miembro" de la 2-4-11 por la 2-4-2a y después de multiplicar por: $(w_0 - iw)$ y haciendo la sustitución: $\cos x - i \operatorname{sen} x = e^{-ix}$ se llega al resultado:

$$v_x(t) + iv_y(t) = v_0 \cdot \exp\left(-\frac{w_0 w^2}{w_0^2 + w^2} t\right) \left(\cos \frac{w_0 w^2}{w_0^2 + w^2} t - i \operatorname{sen} \frac{w_0 w^2}{w_0^2 + w^2} t\right); \quad 2-4-19$$

igualando las partes reales y las imaginarias nos da:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 e^{-\alpha t} \cdot \cos(\alpha t) \\ v_y(t) &= -v_0 e^{-\alpha t} \cdot \operatorname{sen}(\alpha t) \end{aligned} \quad 2-4-20$$

donde:

$$\alpha = \frac{w_0 w^2}{w_0^2 + w^2}$$

Derivando respecto a " t " la parte real y tomando para $t=0$ se tiene:

$$a_x(0) = -v_0 \alpha \quad 2-4-21$$

Para un " \vec{H} " pequeño, es decir cuando la frecuencia de la partícula " ω_0 " es mucho mayor que la frecuencia del campo " ω " se obtiene para la 2-4-21:

$$a_x(0) = v_0 \frac{\omega_0 \omega^2}{\omega_0^2 + \omega^2} = -v_0 \frac{\omega}{\omega_0} \approx 0$$

resultado que concuerda con el obtenido en la 2-4-18a.

En cambio para un " \vec{H} " muy intenso, lo cual supone que:

$$" \omega_0 \approx \omega "$$

entonces resulta de la 2-4-20 que:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \exp(-\tau_L^2 \omega t) \cdot \cos(\omega t) \\ v_y(t) &= -v_0 \exp(-\tau_L^2 \omega t) \cdot \sin(\omega t) \end{aligned} \quad 2-4-22$$

A los mismos resultados obtenidos en la 2-4-20 podemos llegar por un procedimiento totalmente distinto. Para ello:

Multiplicando la 2-4-9 por " p " y pasando a condiciones de límite, es decir cuando " $p \rightarrow \infty$ ", para poder aplicar "Transformadas de Laplace" se tiene:

$$p^2 F(p) - pf(0) = -i\omega p F(p) + \frac{4e^2}{3\pi mc^2} \int_0^\infty dk \cdot g(k_0, k) \frac{p^2}{p^2 + (ck)^2} \cdot \left[p^2 F(p) - pf(0) - \dot{f}(0) \right] \quad 2-4-23$$

por la condición de "Bohm-Weinstein" sabemos que:

$$\frac{4e^2}{3\pi mc^2} \int_0^\infty dk \cdot g(k_0, k) = 1 \quad 2-4-24$$

Lucgo al introducir esta condición en la 2-4-9 nos da:

$$\begin{aligned} p^2 F(p) - p \cdot f(0) &= -i\omega \cdot f(0) + p^2 F(p) - p \cdot f(0) - \dot{f}(0) \\ \dot{f}(0) &= -i\omega \cdot f(0) \end{aligned} \quad 2-4-25$$

que representa el "cutt-off" del " \vec{H} " dado por $g = \frac{1}{1+x^2}$

Tomando como condición:

$$\dot{f}(0) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) \quad 2-4-26$$

lo cual es correcto ya que:

$$\mathcal{L} \ddot{f}(t) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - \dot{f}(0) \quad 2-4-27$$

$$\mathcal{L} \ddot{f}(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot \ddot{f}(t) dt = 0 \quad 2-4-28$$

Luego:

$$0 = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - \dot{f}(0) \quad 2-4-29a$$

y por lo tanto resolviendo para " $\dot{f}(0)$ " resulta:

$$\dot{f}(0) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) \quad 2-4-29b$$

lo cual demuestra la licitud de nuestra elección en la 2-4-26

Por lo tanto: de las ecuaciones 2-4-25 y 2-4-29 se deduce que hay una incompatibilidad por ser dos ecuaciones homogéneas, y queda así demostrado que la 2-4-1 presenta una incompatibilidad con la normalización de Bohm-Weinstein para una estructura cualquiera.

Si queremos obtener la "Solución formal y exacta" de la ecuación del movimiento, podemos introducir variables complejas y entonces la ecuación del movimiento toma la forma:

$$\dot{f} = -i\omega f + \frac{2}{3}(r_0 k_0) \int_0^{t'} e^{-ck_0(t-t')} \cdot \ddot{f}(t') dt' \quad 2-4-30$$

Derivando respecto a " t ", se tiene:

$$\ddot{f} = -i\omega \dot{f} + \frac{2}{3}(r_0 k_0) \frac{d}{dt} \int_0^{t'} dt' \cdot e^{-ck_0(t-t')} \ddot{f}(t') \quad 2-4-31$$

pero:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t e^{-ck_0(t-t')} \cdot \ddot{f}(t') dt' &= \frac{d}{dt} \left[e^{-ck_0 t} \int_0^{t'} e^{-ck_0 t'} \ddot{f}(t') dt' \right] \\ &= -ck_0 \int_0^{t'} e^{-ck_0(t-t')} \ddot{f}(t') dt' + \ddot{f}(t) \end{aligned} \quad 2-4-32$$

de modo que al sustituir estos valores en la 2-4-31 se tiene:

$$\ddot{f} = -i\omega \dot{f} + \frac{2}{3} r_0 k_0 \left\{ \int_0^t e^{-ck_0(t-t')} \ddot{f}(t') dt' \right\} (-ck_0) + \frac{2}{3} r_0 k_0 \ddot{f}(t)$$

2-4-33

pero:
$$-\frac{2}{3} r_0 k_0 \int_0^t e^{-ck_0(t-t')} \ddot{f}(t') dt' = \dot{f}(t) + i\omega f(t)$$

esto en virtud de la ecuación 2-4-30, de modo que la 2-4-33 se reduce a:

$$\ddot{f}(t) = -i\omega \dot{f}(t) + (\dot{f} + i\omega f)(-ck_0) + \frac{2}{3} r_0 k_0 \ddot{f}(t)$$

2-4-34

haciendo: $ck_0 = \omega_0$ y $-\frac{2}{3} r_0 k_0 = 1$ 2-4-35
 y resolviendo para " $f(t)$ " se tendrá;

$$\frac{df}{dt} = -i\omega\omega_0 \cdot f(\omega_0 + i\omega)^{-1}$$

2-4-36

Separando variables e integrando resulta:

$$\ln f(t) = -i\omega\omega_0(\omega_0 + i\omega)^{-1} \cdot t + C$$

donde:

$$C = \ln f(0)$$

Luego:

$$\ln f(t) - \ln f(0) = -\frac{i\omega\omega_0}{\omega_0 + i\omega} t$$

y

$$f(t) = f(0) \cdot \exp\left(-\frac{i\omega\omega_0}{\omega_0 + i\omega} t\right)$$

2-4-37

que representa la "Solución exacta" de la 2-4-3, puesto que para " $t = 0$ ", esta solución se convierte en una identidad.

Para resolver la 2-4-37, bastará poner como condiciones iniciales: $v_x(0) = v_0$ y $v_y(0) = 0$
 de modo que para " $t = 0$ " se tenga:

$$f(t) = v_x(t) + i v_y(t)$$

2-4-38

$$f(0) = v_x(0) + i v_y(0) = v_0$$

Multiplicando la exponencial de la 2-4-37 por: " $(\omega_0 - i\omega)$ " y recordando que:

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

$$f(t) = v_0 \exp\left(-\frac{w^2 w_0 t}{w_0^2 + w^2}\right) \left[\cos\left(\frac{w w_0}{w_0^2 + w^2} t\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{w \cdot w_0}{w_0^2 + w^2} t\right) \right] \quad 2-4-39$$

Si ahora hacemos: $\alpha = \frac{w^2 \cdot w_0}{w_0^2 + w^2}$

e igualamos las partes reales y las imaginarias, resulta:

$$v_x(t) = v_0 e^{-\alpha t} \cdot \cos(\alpha t) \quad 2-4-40$$

$$v_y(t) = -v_0 e^{-\alpha t} \cdot \operatorname{sen}(\alpha t)$$

Solución que coincide con la encontrada anteriormente en esta misma sección, dada por la 2-4-20.

Como:

$$v^2(t) = v_x^2(t) + v_y^2(t) \quad 2-4-41$$

al hacer las sustituciones de la 2-4-40, se tiene como velocidad del movimiento:

$$v^2(t) = v_0^2 \cdot e^{-2\alpha t} \quad 2-4-42$$

$$y \quad v(t) = v_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

Si queremos encontrar los valores de la aceleración, bastará derivar las ecuaciones 2-4-40 respecto al "t", obteniéndose como resultados finales:

$$a_x(t) = -v_0 \cdot e^{-\alpha t} (w \cos(\alpha t) + w_0 \operatorname{sen}(\alpha t)) \quad 2-4-43$$

$$a_y(t) = -v_0 \cdot e^{-\alpha t} (w \operatorname{sen}(\alpha t) - w_0 \cos(\alpha t))$$

y en forma compacta se tiene:

$$a^2(t) = v_0^2 (\alpha)^2 \cdot e^{-2\alpha t} \quad 2-4-44$$

$$a(t) = v_0 \alpha e^{-\alpha t}$$

Las ecuaciones 2-4-42b y 2-4-44b representan la "Solución exacta y formal" de la ecuación general del movimiento para la "Fuerza externa" producida por un "H" constante.

B.- Fuerza externa dependiente del tiempo, o sea

$$\vec{F}_{ext} = f(t)$$

La ecuación del movimiento en este caso es:

$$m\ddot{a}(t) = f(t) + \frac{4e^2}{3\pi c^2} \int_0^t dt' \int_0^\infty dk g(k, k) \cos ck(t-t') \dot{a}(t') \quad 2-4-45$$

Aplicando "Transformadas de Laplace" después de dividir por la masa "m", se tiene:

$$A(p) \left[1 - \frac{4e^2}{3\pi c^2} \int_0^\infty dk g(k, k) \frac{p^2}{p^2 + (ck)^2} \right] = \frac{F(p)}{m} \quad 2-4-46$$

$$\frac{4e^2}{3\pi mc^2} \int_0^\infty dk g(k, k) \frac{p^2}{p^2 + (ck)^2} a(0)$$

El factor "a(0)" es importante para "Fuerzas Impulsivas" pero con "Fuerzas Delta de Dirac", en el caso que nos ocupa, de una fuerza externa dependiente del "tiempo", dicho factor se puede considerar nulo.

Introduciendo teorema de las Transformadas de Laplace para las condiciones iniciales se tiene:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p) = F(0) \quad 2-4-47$$

En efecto: Sabemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \dot{F}(t) &= p \cdot F(p) - F_{ext}(t) \Big|_{t=0} \\ &= p \cdot F(p) - F_{ext}(0) \end{aligned} \quad 2-4-48$$

y por otra parte:

$$\mathcal{L} \dot{F}(t) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot \dot{F}(t) dt = 0 \text{ para } p \rightarrow \infty$$

Luego:

$$p \cdot F(p) - F_{ext}(0) \simeq 0 \Rightarrow p \cdot F(p) = F(0) \quad 2-4-49$$

Por lo tanto: Multiplicando la 2-4-46 por "p" y tomando límite para "p → ∞", resulta al resolver para "a(0)":

$$a(o) \left[1 - \frac{4e^2}{3\pi mc^2} \int_0^\infty g dk \right] = \frac{F_0^{ex}}{m} - \frac{4e^2}{3\pi mc^2} \int_0^\infty g dk. a(o)$$

2-4-50

$$a(o) = \frac{F_0^{ex}}{m}$$

que representa la "Solución compatible" de la ecuación del movimiento para el tipo de "Fuerza externa" considerado.

C.- "Oscilador Lineal" como fuerza externa.

La ecuación del movimiento será:

$$m\ddot{a}(t) = -kx + \frac{4e^2}{3\pi c^2} \int_0^t dt' \int_0^\infty dk. g(k, k) \cos ck(t-t') \cdot \dot{a}(t')$$

2-4-51

Recordando que: $\frac{k}{m} = w^2$

la ecuación anterior la podemos escribir en función de "x" sus derivadas en la forma:

$$\ddot{x}(t) + w^2 x = \frac{4e^2}{3\pi mc^2} \int_0^\infty dk. g(k, k) \int_0^t \cos ck(t-t') \cdot \ddot{x}(t') dt'$$

2-4-52

introduciendo la "Normalización de Bohm" dada en la 2-1-24, se obtiene:

$$\ddot{x}(t) + w^2 x = \int_0^t \cos ck(t-t') \cdot \ddot{x}(t') dt'$$

2-4-53

ecuación incompatible y por lo tanto sin solución, porque en el "Segundo miembro" aparece una derivada de "Grado superior" al que tiene en el "Primer miembro."

D.- La "Fuerza externa" está dada por:

$$\vec{F}_{ext} = eE_0 t. e^{-ck_0 t}$$

2-4-54

En este caso para la misma estructura $g = \frac{k_0^2}{k_0^2 + k^2}$

y suponiendo válida la "Condición de Bohm", la ecuación del movimiento será entonces:

$$m\ddot{\vec{x}} = eE\Theta t \cdot e^{-ck_0 t} + \frac{2}{3}(r_0 k_0) \int_0^t e^{-ck_0(t-t')} \cdot \dot{\vec{a}}(t') dt' \quad 2-4-55$$

haciendo:

$$\int_0^t e^{-ck_0(t-t')} \cdot \dot{\vec{a}}(t') dt' = \frac{\tau_L}{m} \dot{\vec{F}}_{ext} \quad 2-4-56$$

introduciendo la "Condición de Bohm" y resolviendo para "a(t)" se tiene:

$$a(t) = \frac{eE\Theta}{m} t e^{-ck_0 t} + \frac{\tau_L}{m} \dot{F}_{ext} \cdot \frac{2}{3} r_0 k_0 \quad 2-4-57$$

que representa la "Ecuación del movimiento" y la solución de la misma en las condiciones supuestas.

Si ahora sustituimos el valor de la fuerza externa dada por la 2-4-54, se tendrá:

$$a(t) = \frac{eE\Theta}{m} t \cdot \exp(-\tau_L t) + \frac{\tau_L}{m} \frac{d}{dt} \left[eE\Theta t \cdot \exp(-\tau_L t) \right] \quad 2-4-58$$

Efectuando la derivación indicada y reduciendo términos:

$$a(t) = \frac{eE\Theta}{m} (\tau_L) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \quad 2-4-59$$

que al integrarla respecto a "t" entre los límites "0 y t" nos da el valor de la velocidad, a saber:

$$v(t) = \frac{eE\Theta}{m} (\tau_L^2) \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \right] \quad 2-4-60$$

Estas dos últimas expresiones representan la "Solución exacta y formal" de la ecuación del movimiento para el tipo de la fuerza externa:

$$\vec{F}_{ext} = eE\Theta t \cdot e^{-ck_0 t}$$



V.- BALANCE DE LA ENERGIA

Al hacer el estudio del "Balance de Energía" según la electrodinámica de Petris-Prigogine, tendremos oportunidad de comprobar con sendos ejemplos, que para una misma estructura del "cutt-off", en unos casos hay conservación de energía, es decir que se cumple:

$$dT = dE_{cin} + dW_{rad}$$

mientras que en otros, no se cumple dicho "Principio".

Si en la ecuación del movimiento suponemos que la "fuerza externa" es del tipo definida por la 2-3-13, se tendrá al introducir "variables reducidas", para lo cual bastará multiplicar y dividir por "3mck₀":

$$\frac{eE\theta}{ck_0} = \frac{eE\theta}{ck_0} \cdot \frac{3}{mck_0} \cdot \frac{mck_0}{3} = v^* \frac{mck_0}{3} \quad 2-3-1$$

pues:

$$\frac{3eE\theta}{m(ck_0)^2} = v^* \quad \text{por definición}$$

haciendo "ck₀t = x", y al sustituir en la 2-3-13, ésta toma la siguiente forma:

$$eE(t) = v^* \frac{1}{2} \frac{mck_0}{3} (6x \cdot e^{-3x} + e^{-3x} - e^{-x}) \quad 2-5-2$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por la 2-3-14 y por "dt", y multiplicando y dividiendo sólo el primer miembro por "(ck₀)", se obtiene:

$$\frac{eE\theta v}{ck_0} dx = \frac{1}{2} (mv^{*2}) \cdot \frac{1}{3} dx (6x^3 \cdot e^{-6x} + x^2 \cdot e^{-6x} - x^2 \cdot e^{-4x}) \quad 2-5-3$$

Integrando entre "0 e ∞", ya que el movimiento es nulo para " -∞ < t < 0 ", se tendrá el "TRABAJO" que se está dando al sistema, es decir que:

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{eE\dot{v}}{ck_0} dx \quad 2-5-4$$

$$= \frac{1}{2} (m\dot{v}^{*2}) \cdot \frac{1}{3} \int_0^{\infty} (6x^3 \cdot e^{-6x} + x^2 \cdot e^{-2x} - x^2 \cdot e^{-4x}) dx$$

La "Energía de Radiación" por definición es:

$$\bar{W}_{rad} = m\tau_L \int_0^{\infty} a^2 \cdot dt \quad 2-5-5$$

Escogiendo como "velocidad" del movimiento para el tipo de "Fuerza externa" considerado:

$$v(t) = \frac{3eE\theta t^2}{m} \cdot e^{-3ck_0 t} \quad 2-5-6$$

$$= v^* (x^2 \cdot e^{-3x})$$

que al derivarla respecto a "t" nos da la aceleración:

$$a(t) = \frac{3eE\theta}{m} (2t - 3ck_0 t^2) \cdot e^{-3ck_0 t} \quad 2-5-7$$

$$= v^* (ck_0) (2x - 3x^2) \cdot e^{-3x}$$

valor que coincide con el obtenido en la ecuación 2-3-14, de modo que al sustituirlo en la 2-5-5, recordando que:

$$ck_0 \tau_L = \frac{2}{3}$$

y después de multiplicar y dividir por "2" y hacer las simplificaciones posibles, se obtiene:

$$\bar{W}_{rad} = \frac{1}{2} (m\dot{v}^{*2}) \cdot \frac{4}{3} \int_0^{\infty} (9x^2 - 12x^3 + 4x^2) \cdot e^{-6x} dx \quad 2-5-8$$

Las ecuaciones 2-5-4 y 2-5-8 las podemos expresar en función de "m" y "v*", para lo cual basta recordar que:

$$\int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-a/x} \cdot dx = n! \frac{1}{a^{n+1}} \quad 2-5-9$$

de modo que al introducir esta relación en las mencionadas ecuaciones se tenga:

$$T = \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{4^3 \cdot 3^3} \cdot \frac{1}{2} (m\dot{v}^{*2}) \quad 2-5-10$$

$$\bar{W}_{rad} = \frac{1}{3} (3^{-3}) \cdot \frac{1}{2} (m\dot{v}^{*2}) \quad 2-5-11$$

Nos faltaría la "Energía Cinética", pero para el tipo de fuerza que estamos estudiando y según el Dr. W. Cloetens (1),

$$\begin{aligned} v(\infty) &= v(0) \\ a(\infty) &= a(0) \longrightarrow = 0 \\ F_{ext}(\infty) &= F_{ext}(0) \end{aligned} \quad 2-5-12$$

de suerte que podemos estar seguros de que no hay diferencia alguna con la "Energía de Schott" para "t=0 y t=∞" y que por lo tanto tampoco habrá variación en la "Energía Cinética", es decir:

$$\Delta W_{Sch} = \Delta E_{cin} = 0 \quad 2-5-13$$

Por esta razón podemos tener la seguridad de que el "Trabajo total" aplicado al sistema:

$$T = \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \int_0^t eE_{ext}(t) \cdot v(t) dt \quad 2-5-14$$

es igual a la "Energía Total de Radiación" que sale de la partícula y se va hasta el infinito, energía que ya no será función de la estructura de la propia partícula.

Comparando estos resultados vemos que:

$$\frac{W_{rad}}{T} = \frac{32}{5}$$

o lo que es igual:

$$\begin{aligned} W_{rad} &= \left(\frac{5}{5} + \frac{27}{5} \right) T \\ &= \left(\frac{100}{100} + \frac{540}{100} \right) T \end{aligned} \quad 2-5-15$$

lo cual significa que en el caso que nos ocupa, hay creación de energía de radiación en un "540 %" del trabajo que se aplica al sistema.

(1) CLOETENS, W. J. en *An energy paradox in Lorentz invariant*
Il Nuovo Cimento, X, Vol 56A, 403, (1968)

Este mismo fenómeno o "Paradoja energética" se presenta en todas las teorías electrodinámicas de partículas extensas cuyo movimiento satisfagan las condiciones establecidas en la 2-5-12

La misma "Paradoja" ocurre en la electrodinámica de Peirls-Prigogine, cuando se considera la variación de la "Energía de campo (W) " en lugar de la energía de radiación, de modo que:

$$W_{Prig.} = \Delta W_{campo} = W_{Bohm} = W \quad 2-5-16$$

$$\begin{aligned}
 W &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4e^2}{3\pi} \int_0^t dt \int_0^t dt'' \int_0^\infty dk \cdot k^2 / g(k_0, k) / ^2 \cos ck(t-t'') \overline{v(t'')} \cdot v(t') \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi} \left\{ \left[E_{auto}^2(t) + H_{auto}^2(t) \right] - E_{auto}^2(0) \right\} dv \quad 2-5-17
 \end{aligned}$$

en la cual " E_{auto} y H_{auto} " representan los campos retardados de la partícula extensa.

En general en la electrodinámica de Peirls-Prigogine, para movimientos que satisfacen la citada condición dada en 3-5-12, se tiene:

$$W \neq T$$

y la causa de esta "paradoja" se debe a que:

" W no es lineal en la función de forma

$$/ g (k_0, k) / ^2$$

mientras que T, sí lo es, en su factor de forma:

$$/ g (k_0, k) /$$

En cambio para la ecuación del movimiento ^{con} una "Fuerza externa" debida a un " \vec{H} " constante y homogéneo en la dirección del eje " z ", estudiado en la "Sección Cuarta" de este mismo capítulo, y cuya solución viene dada por las ecuaciones 2-4-42 y 2-4-44, el "Balance de Energía" nos da como resultado:

$$E_{cin}(t) = \frac{1}{2}(mv_0^2) \cdot e^{-2\alpha t} \quad 2-5-19$$

$$\text{donde: } \alpha = \frac{\omega_0 \omega^2}{\omega_c^2 + \omega^2}$$

La "Energía de Radiación", de acuerdo con la 1-7-4, y al sustituir en ella el valor de la aceleración encontrado en la ecuación 2-4-44, será:

$$W_{rad}(t) = m\tilde{\zeta}_L \int_0^{\infty} a^2 dt$$

$$= \frac{1}{2}(mv_0^2)(1 - e^{-2\alpha t}) \quad 2-5-20$$

Sumando estas dos contribuciones energéticas, resulta:

$$E_{cin}(t) + W_{rad}(t) = \frac{1}{2}(m.v_0^2) = E_{cin}(0) \quad 2-5-21$$

De suerte que la "Energía Cinética Inicial" de la partícula, se ha transformado totalmente en energía cinética y de radiación en el tiempo " t " sin que aparezca ninguna radiación de Schott.

Esta transformación de la "Energía cinética inicial" o del "Trabajo", es independiente de la frecuencia del electrón así como de la intensidad del "Campo Magnético" en que se encuentra la partícula y el "Principio de Conservación de Energía" es válido para una estructura:

$$g = \frac{k_0^2}{k_0^2 + k^2}$$

y

$$r_0 k_0 = \frac{3}{2} \quad 2-5-22$$

y para una fuerza externa:

$$0 < w = \frac{eH}{mc} < \infty$$

Pero si ahora analizamos el mismo caso del electrón en las mismas condiciones, pero cambiando el tipo de " F_{ext} " y que ahora será:

$$\vec{F}_{ext} = eE_0 t \cdot e^{-ck_0 t} \quad 2-5-23$$

tal como aparece en la fig. 14.

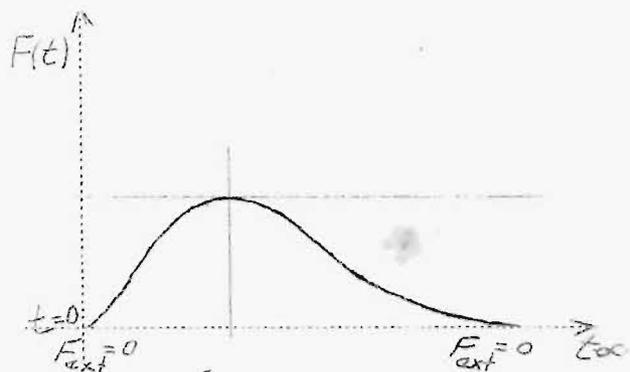


fig. 14

En estas condiciones se puede suponer que:

$$\text{para } t = 0 \quad E_{\text{cin}} = 0 \quad E_{\text{Sch}} = 0 \quad E_{\text{interna}} = 0 \quad 2-5-24$$

$$\text{para } t = \infty \quad = 0 \quad 0 \quad = 0$$

pues entonces el "movimiento es uniforme".

Para obtener el "Balance de Energía", procederemos del modo siguiente:

$$\text{Como } T = \int_0^{\infty} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot v(t) \cdot dt \quad 2-5-25$$

Sustituyendo el valor de "v(t)" encontrado en la 2-4-62 y el de la fuerza que estudiamos según la 3-5-23, resulta:

$$T = \int_0^{\infty} eE\theta t \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \cdot \frac{eE}{m} (\theta \tau_L^2) (1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right)) dt \quad 2-5-26$$

y recordando la propiedad de las integrales de acuerdo con la 2-5-9, nos da:

$$T = \frac{3}{2} \cdot \frac{(eE)^2}{m} \frac{(\theta \tau_L^2)^2}{2} \quad 2-5-27$$

Para encontrar la "Energía Cinética" bastará saber cuál es la velocidad en los instantes: "t = 0" y "t = ∞"

Sustituyendo en la 2-4-62:

$$\text{para } t = 0 \quad v(0) = \frac{eE}{m} (\theta \tau_L^2) (1 - \exp\left(-\frac{0}{\tau_L}\right)) = 0 \quad 2-5-28$$

$$\begin{aligned} \text{para } t = \infty \quad v(\infty) &= \frac{eE}{m} (\theta \tau_L^2) (1 - \exp\left(-\frac{\infty}{\tau_L}\right)) \\ &= \frac{eE}{m} (\theta \tau_L^2) \end{aligned}$$

lo que nos indica que

"Toda la energía cinética de la partícula, se debe a la velocidad de la misma, para tiempos muy grandes, de suerte que:

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}}(\infty) &= \frac{1}{2} m \cdot v^2(\infty) = \frac{1}{2} m \left[\frac{eE}{m} (\theta \tau_L^2) \right]^2 \\ &= \frac{(eE)^2}{m} \frac{(\theta \tau_L^2)^2}{2} \quad 2-5-29 \end{aligned}$$

Para hallar la "Energía de Radiación" bastará sustituir en la 2-5-20, el valor de la aceleración encontrado en la 2-4-61, de modo que:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{rad}} &= m \cdot \tau_L \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{eE}{m} \right)^2 (\theta \tau_L)^2 \cdot \exp\left(-\frac{2t}{\tau_L}\right) dt \\
 &= \frac{(eE)^2}{m} \cdot \frac{(\theta \tau_L^2)^2}{2}
 \end{aligned}
 \tag{2-5-30}$$

Sumando estas dos contribuciones se tiene:

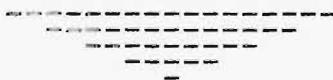
$$E_{\text{cin}}(\infty) + W_{\text{rad}} = \frac{(eE\theta \tau_L^2)^2}{m}
 \tag{2-5-31}$$

Comparando este resultado con el obtenido en la 2-5-27, vemos que no son iguales. Por lo tanto:

"Queda comprobado que en la electrodinámica de Peirls-Prigogine, no hay conservación de energía para una misma estructura:

$$g = \frac{k_0^2}{k_0^2 + k^2}$$

pero con distinta "Fuerza externa" aplicada al electrón.



VI.- ESTABILIDAD DE LA MATERIA

Para el estudio de la "Estabilidad de la materia" dentro de la electrodinámica de Peirls-Prigogine, se utilizará el criterio de "Rutz-Hurwitz"¹, cuyos principios esenciales damos a continuación.

Dada la ecuación de grado " n ":

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s^1 + a_0 s^0 = 0 \quad 2-6-1$$

cuyos coeficientes podemos agrupar en la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccccc} a_{n-0} & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & a_{n-8} & \dots & a_{n-2i} & \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & a_{n-9} & \dots & a_{n-2(i \pm 1)} & \end{array} \quad 2-6-2$$

donde $i = 1, 2, 3, 4, \dots$

y se pueden obtener otros tipos de coeficientes a partir de los anteriores, de este modo:

$$b_{n-1} = - \frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-0} & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad b_{n-3} = - \frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-0} & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-5} = - \frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-0} & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix} \quad b_{n-7} = - \frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-0} & a_{n-8} \\ a_{n-1} & a_{n-9} \end{vmatrix}$$

y en general

$$b_{n-2(i \pm 1)} = - \frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-0} & a_{n-2i} \\ a_{n-1} & a_{n-2(i \pm 1)} \end{vmatrix}$$

y también los siguientes :

(1) Garloux, L., *Systemes linéaires*

$$c_{n-1} = - \frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix} \quad c_{n-3} = - \frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-5} = - \frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_{n-1} & b_{n-7} \end{vmatrix} \quad c_{n-7} = - \frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-9} \\ b_{n-1} & b_{n-9} \end{vmatrix}$$

y en general:

$$c_{n-2(i \pm 1)} = - \frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2i} \\ b_{n-1} & b_{n-2(i \pm 1)} \end{vmatrix}$$

De suerte que la 2-6-2 se puede escribir en la forma:

$$\left. \begin{array}{cccccccc} a_{n-0} & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & a_{n-2i} & & \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & a_{n-2(i \pm 1)} & & \\ b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & b_{n-7} & \dots & b_{n-2(i \pm 1)} & & \\ c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & c_{n-7} & \dots & c_{n-2(i \pm 1)} & & \end{array} \right\} \quad 2-6-3$$

El "Criterio de Rutz-Hurwitz" dice que:

"Un sistema es estable, sólo cuando todos los coeficientes de la Primera Columna de la 2-6-3 sean positivos."

Aplicaremos este "Criterio de Estabilidad" a los diversos casos de "Fuerzas externas" aplicadas en la electrodinámica de Peirls-Prigogine:

A.- Oscilador armónico cuya fuerza viene dada por

$$\vec{F}_{ext}(t) = -kx \quad 2-6-4a$$

En este caso vamos a tomar como "Factor de Forma":

$$g(k_0, k) = \frac{k_0^4 - \frac{1}{3}(k_0 k)^2}{(k_0^2 + k^2)^2} \quad 2-6-4b$$

que presenta un "CEFO" en el "cutt-off"

La masa electromagnética viene dada por:

$$m_{el} = \frac{\pi}{2}(r_0 k_0)m \int_0^\infty dx \frac{1 - \frac{x^2}{3}}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{3}(r_0 k_0)m \quad 2-6-5$$

de tal forma que:

$$0 < m_0 \ll m_{el} < m \quad 2-6-6$$

Si hacemos $(r_0 k_0) = 3 - |\epsilon|$ 2-6-7

donde: $|\epsilon|$ es un parámetro y tan pequeño como se quiera y entonces se tendrá:

$$0 < m_0 = m \cdot |\epsilon| \ll m$$

y 2-6-8

$$m_{el} = m - \frac{|\epsilon|}{3} m$$

Por otra parte se tiene que:

$$m_{el} = m - m_0 \quad 2-6-9$$

Luego:

$$m - \frac{|\epsilon|}{3} m = m - m_0$$

lo cual indica que: $m_0 = \frac{|\epsilon|}{3} m \gg 0$ 2-6-10

de modo que si: $m_0 \ll m$, entonces:

$$\frac{|\epsilon|}{3} \ll 1 \quad 2-6-11$$

Si ponemos como condición inicial que:

$$X(0) = \ddot{x}(0) = 0 \quad 2-6-12$$

la ecuación del movimiento toma la forma:

$$m\ddot{x}(t) = -kx + \frac{4}{3}(r_0 k_0) \int_0^t dt' \int_0^\infty dk \cdot g(k_0, k) \cos ck(t-t') \dot{x}(t) \quad 2-6-13$$

Tomando "Transformadas de Laplace" y resolviendo para "X(p)" se obtiene:

$$X(p) = \frac{\dot{x}(0) \cdot (p^2 + 3c^2 k_0^2)}{D} \quad 2-6-14$$

$$D = \left[p^4 \left(1 - \frac{2}{9} r_0 k_0\right) + p^3 \left(2 - \frac{2}{3} r_0 k_0\right) ck_0 + p^2 (w^2 + c^2 k_0^2) + p (ck_0) 2w^2 + (wck_0)^2 \right]$$

Para aplicar el criterio de estabilidad de "Ruth-Hurwitz" en la 2-6-14, necesitamos conocer el valor de los coeficientes de "p⁴" y de "p³" en dicha ecuación, para lo cual bastará sustituir el valor de "r₀k₀" dado en la 2-6-7 y 2-6-11 de modo que:

$$\text{para } p^4: \quad 1 - \frac{2}{9}(r_0 k_0) = 1 - \frac{2}{9}(3 - |\epsilon|) \approx \frac{1}{3}$$

y

$$\text{para } p^3: \quad 2 - \frac{2}{3}(r_0 k_0) = 2 - \frac{2}{3}(3 - |\epsilon|) \approx \frac{2}{3}|\epsilon|$$

Sustituyendo el valor de estos coeficientes en la 2-6-14 se tendrá que:

$$X(p) = \frac{\dot{x}(0) \cdot (p^2 + 3c^2 k_0^2)}{\frac{1}{3}p^4 + \frac{2}{3}|\epsilon|/p^3 + (w^2 + c^2 k_0^2)p^2 + 2w^2(ck_0)p + (wck_0)^2} \quad 2-6-16$$

Aquí los coeficientes de Ruth-Hurwitz son:

$$a_{n-0} = \frac{1}{3} \quad a_{n-2} = w^2 + c^2 k_0^2 \quad a_{n-4} = (wck_0)^2$$

$$a_{n-1} = \frac{2}{3}|\epsilon|/ck_0 \quad a_{n-3} = 2w^2 ck_0 \quad 2-6-17$$

$$b_{n-1} = - \frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-0} & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = - \frac{1}{\frac{2}{3}|\epsilon|/ck_0} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & w^2 + c^2 k_0^2 \\ \frac{2}{3}|\epsilon|/ck_0 & 2w^2 ck_0 \end{vmatrix}$$

y efectuando el producto del determinante resulta:

$$b_{n-1} = -\frac{w^2}{T\epsilon} < 0 \quad 2-6-17$$

de donde se ve que la 2-6-16 presenta un "Polo" con parte real negativa, lo cual hace que el Sistema estudiado sea INESTABLE.

B.- Fuerza externa producida por Un "H" constante, dada por:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} = \text{conste} \quad 2-6-18$$

La ecuación del movimiento en sus componentes "v_x y v_y" toma la forma:

$$a_x(t) - wv_y(t) = \frac{r_0 k_0}{3} \int_0^t \left[\frac{2}{3} + \frac{4}{3} ck_0(t-t') \cdot e^{-ck_0(t-t')} \right] \dot{a}_x(t') dt'$$

$$a_y(t) + wv_x(t) = \frac{r_0 k_0}{3} \int_0^t \left[\frac{2}{3} + \frac{4}{3} ck_0(t-t') \cdot e^{-ck_0(t-t')} \right] \dot{a}_y(t') dt' \quad 2-6-19$$

Al aplicar "Transformadas de Laplace (\mathcal{L})" este sistema se transforma en:

$$V_x(p) \left[p(p+ck_0)^2 - \frac{r_0 k_0}{3} \left(\frac{2}{3} p + 2ck_0 \right) p^2 \right] + V_y(p) \left[-w(p+ck_0)^2 \right] = B_1 \quad 2-6-20$$

$$V_x(p) \left[w(p+ck_0)^2 \right] + V_y(p) \left[p(p+ck_0)^2 - \frac{r_0 k_0}{3} \left(\frac{2}{3} p + 2ck_0 \right) p^2 \right] = B_2$$

donde:

$$B_1 = v_x(0)(p+ck_0)^2 - \frac{r_0 k_0}{3} \left(\frac{2}{3} p + 2ck_0 \right) \left[pv_x(0) + \dot{v}_x(0) \right] \quad 2-6-21$$

$$B_2 = v_y(0)(p+ck_0)^2 - \frac{r_0 k_0}{3} \left(\frac{2}{3} p + 2ck_0 \right) \left[pv_y(0) + \dot{v}_y(0) \right]$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones simultáneas se obtiene como resultado:

$$V_x(p) = \frac{B_1(\frac{1}{3}p^3 + 2ck_o/\epsilon/p^2 + c^2k_o^2/p) - B_2(wp^2 + 2wck_o/p + w^2c^2k_o^2)}{D} \quad 2-6-22$$

$$V_y(p) = \frac{B_2(\frac{1}{3}p^3 + 2ck_o/\epsilon/p^2 + c^2k_o^2/p) + B_1(wp^2 + 2wck_o/p + w^2c^2k_o^2)}{D}$$

ecuaciones cuyo denominador es:

$$D = \left[\frac{1}{6}p^6 + \frac{4}{3}ck_o/\epsilon/p^5 + (\frac{2}{3}c^2k_o^2 + w^2)p^4 + 4w^2ck_o/p^3 + (c^4k_o^4 + 6w^2c^2k_o^2)p^2 + 4w^2c^3k_o^3/p + w^2c^4k_o^4 \right] \quad 2-6-23$$

De acuerdo con el "Criterio Ruth-Hurwitz", vemos que los coeficientes son:

$$a_n = \frac{1}{9} > 0 \quad a_{n-1} = \frac{4}{3}ck_o/\epsilon > 0 \quad b_{n-1} = \frac{w^2ck_o}{3/\epsilon} < 0$$

y por lo tanto, es sistema anterior es también "INESTABLE"

C.- "Fuerza externa" que depende del tiempo.

Dicha fuerza puede ser del tipo:

$$\vec{F}_{ext} = eE(t)$$

Para este caso, vamos a demostrar la "INESTABILIDAD" por el llamado "Método de los polos" y de los correspondientes hodógrafos.

La ecuación del movimiento será:

$$m\ddot{\vec{a}}(t) = e\vec{E}(t) + \frac{4e^2}{3c^2} \int_0^t d\tau \int_0^\infty dk \cdot g(k_o, k) \cos ck(t-\tau) \cdot \dot{\vec{a}}(t) \quad 2-6-24$$

La estabilidad de esta ecuación lineal sólo es función de la función de transferencia "H(p)" definida así:

$$\left[H(p) \right]^{-1} = 1 - \frac{4e^2}{3\pi mc^2} \int_0^\infty g(k_o, k) \frac{p^2}{p^2 + c^2k^2} dk \quad 2-6-25$$

en la cual: " m " representa la "Masa total" del sistema y viene dada por:

$$m = m_o + m_{el} \quad 2-6-26$$

m_o = masa mecánica

m_{el} = masa electromagnética

$$= \frac{2e^2}{\pi c^2} \int_0^{\infty} g(k_o, k) dk \quad 2-6-27$$

Introduciendo una nueva notación según las siguientes convenciones:

$$x = \frac{k}{k_o} \quad p = -ic\sigma \quad r_o = \frac{e^2}{m \cdot c^2} \quad 2-6-28$$

$$\tilde{g} = \eta(k) \cdot g(k_o, k) + \eta(-k) \cdot g(k_o, -k)$$

la "Función de transferencia" dada por la 2-6-6 se transforma en

$$\left[H(-ic\sigma) \right]^{-1} = 1 + \frac{2}{3\pi} r_o k_o \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\tilde{g}\sigma}{x - \sigma} \quad 2-6-29$$

Sabemos que el "Número de polos" de la "H(p)" coincide con el "Número de ceros" de "H(p)⁻¹"

Como esta función de transferencia viene definida por una integral de Cauchy, carece de polos en el semiplano superior de modo que el "Número de Ceros (Z)" de la "H(p)⁻¹" en dicho semiplano es igual al número de veces:

$$" \text{Re } H^{-1} + \text{Im } H^{-1} "$$

que se pasa por el origen en sentido contrarreloj al recorrer el eje real " $\sigma > 0$ " desde:

$$\sigma = -\infty \text{ hasta } \sigma = +\infty$$

De suerte que el sistema será ESTABLE sí y sólo si:

$$Z = 0 \quad 2-6-30$$

Para el caso que nos ocupa actualmente, los valores que se tienen por encima del eje real son:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} H^{-1} &= 1 + \frac{2}{3\pi} r_0 k_0 \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\bar{g}}{x - \sigma} \\ \operatorname{Im} H^{-1} &= \frac{4}{3} (r_0 k_0) \sigma \bar{g}(1, \sigma) \end{aligned} \quad 2-6-31$$

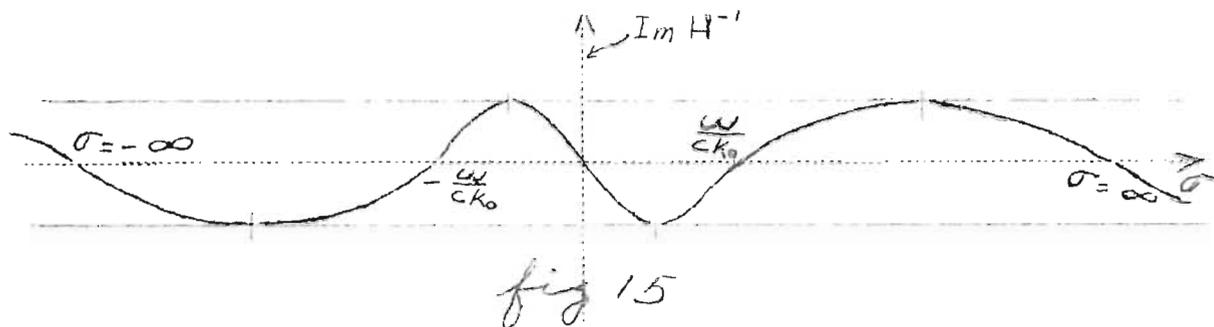
donde: $g(1, \sigma)$ representa la estructura más sencilla que se puede presentar, y viene dada por:

$$g(1, \sigma) = \left[1 - \left(\frac{ck_0 x}{w} \right)^2 \right] p(1, x) \quad 2-6-32$$

que al sustituirla en la 2-6-31 da valores nulos en los puntos

$$\sigma = \pm \infty, \quad 0, \quad \pm \frac{w}{ck_0} \quad 2-6-33$$

resultados cuya representación gráfica aparece en la fig. 15



Para construir el hodógrafo que nos indique las veces que atravesamos el origen en sentido contrarreloj, bastará evaluar la 2-6-31 en los puntos dados por la 2-6-33 encontrándose que tales valores son:

$$\begin{aligned} \sigma &: 0 \quad \pm \frac{w}{ck_0} \quad \pm \infty \\ \operatorname{Re} H^{-1} &: 1 \quad \Omega_i = 1 - \frac{4}{3} r_0 k_0 \int_0^{\infty} p(1, x) dx \quad \Omega_{\infty} = 1 - \frac{2}{3} \frac{m e l}{m} \end{aligned} \quad 2-6-34$$

Si " $m \geq 0$ ", resulta siempre que " $\Omega_{\infty} > 0$ " pero entonces el signo de " Ω " no queda determinado por el de la masa mecánica.

Si la densidad de carga es tal que " $\Omega_1 < 0$ ", el hodógrafo del sistema está dado por la fig. 16

Como podemos ver en esta figura, se pasa dos veces en torno al origen en sentido contrarreloj, y por lo tanto el sistema no es ESTABLE.

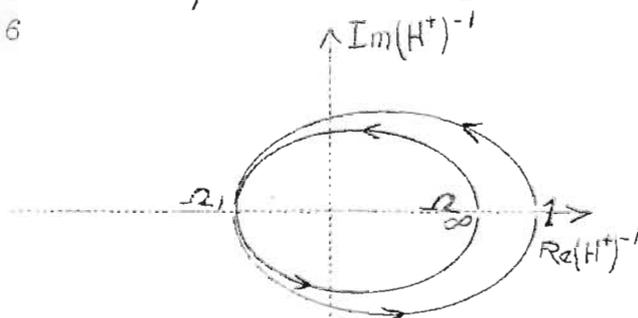


fig. 16

Vemos pues a través de los ejemplos examinados que, para una estructura determinada, expresada mediante la ecuación 2-6-4, en la electrodinámica de Peirls-Prigogine hay INESTABILIDAD, cualquiera sea el tipo de "Fuerza externa" a que se encuentre sometido el electrón. (1)

Esto nos lleva a concluir que dicha INESTABILIDAD desaparecería si se tomara como factor de forma:

$$| g (k_0 , k) | ^ 2$$

que constituye el procedimiento llamado de "Renormalización" como ocurre en la electrodinámica de Sommerfeld.



(1) CLOETENS, W. J. en 'Run-away solutions in the Prigogine Electrodynamics

aceptado por PHYSICA,

A P E N D I C E S

- A.- *Deducción y Solución de la "Ecuación electrodinámica de THOMAS ERBER*

- B.- *Solución de la "Ecuación del Movimiento de una partícula cargada sometida a una fuerza externa "Delta de Dirac"*

- C.- *Solución de la "Ecuación del Movimiento de una partícula cargada y sometida a fuerzas externas "Impulsiva y de Lorentz"*

- D.- *El "Spin de HEISENBERG" como una consecuencia de la Electrodinámica Clásica libre de singularidades*

- E.- *Bosquejo de un posible experimento para determinar la trayectoria de un haz de electrones dentro de un Campo magnético constante.*

APENDICE "A"

Deducción y Solución
de la
Ecuación de THOMAS ERBER

Acabamos de ver en la fig. 8, pág 37, que una partícula cargada se comporta como un sistema con una energía de entrada y una energía de salida, en el cual:

La energía de entrada " E_{in} " es la que se da al sistema desde fuera, es decir está representada por el "Trabajo externo"

El elemento de este trabajo externo viene dado por:

$$dE_{in} = dT_{in} = \vec{F}_{ext} \cdot v dt \quad A-A-1$$

El trabajo o Energía de salida " E_{out} " es lo que se obtiene del sistema, y está representado por la "Energía cinética" " E_{cin} " y la energía de radiación " W_{rad} ".

El elemento de trabajo de salida será por lo tanto:

$$dE_{out} = dT_{out} = dE_{cin} + dW_{rad} \quad A-A-2$$

Ecuación en la cual los elementos de Energía cinética y de Energía de radiación vienen dados respectivamente por:

$$dE_{cin} = v \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{mv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \cdot dt$$

A-A-3

$$dW_{rad} = m c_L \left\{ \frac{a^2}{\left\{1 - \frac{v^2}{c^2}\right\}^2} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})^2}{c^2 \left\{1 - \frac{v^2}{c^2}\right\}^3} \right\} \cdot dt$$

De la misma manera que en Termodinámica, podemos ahora establecer el "Teorema de la Conservación de Energía", que para movimientos lineales será:

$$E_{in} = E_{out}$$

A-A-4

$$dT = dE_{cin} + dW_{rad}$$

Sustituyendo las ecuaciones A-1, A-2, y A-3 en la A-4, se obtiene como única ecuación del movimiento para movimiento lineal:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ext} \cdot v dt = v \cdot \frac{d}{dt} \frac{m \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} dt + m \zeta_L \frac{a^2}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^2} dt \\ + m \zeta_L \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})^2}{c^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^3} dt \end{aligned} \quad \text{A-A-5}$$

Ciertamente en este caso el Teorema de la Conservación de energía se puede aceptar como la ecuación del movimiento, que también podemos escribir en la forma;

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m \cdot \vec{v}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right] = \vec{F}_{ext} - m \zeta_L \left\{ \frac{a^2}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^2} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})^2}{c^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^3} \right\} \frac{\vec{v}}{v^2} \quad \text{A-A-6}$$

para lo cual, basta simplificar por dt, dividir por "v", recordar que:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v} \cdot \frac{v}{v} = \frac{v}{v^2}$$

y reordenar convenientemente en la ecuación A-5

Para movimientos tridimensionales no es posible deducir una ecuación única del movimiento a partir del teorema de la Conservación de la Energía; por lo tanto, POSTULAREMOS que:

"la ecuación vectorial para movimientos lineales, es válida también para movimientos tridimensionales."

Esto es equivalente a decir que:

"la fuerza microscópica actúa en la dirección de la velocidad."

En la ecuación A-6, el término del primer miembro representa el Impulso, y el corchete del segundo miembro nos está dando la "fuerza de radiación".

La A-6 representa la ecuación general del movimiento, en la que se pueden considerar tres casos límites interesantes:

Primer caso: $\lim_{\frac{v}{c} \ll 1} v(t)$; aquí pasamos por alto la radiación y todas las correcciones relativistas, de modo que la A-6 se reduce a:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{ext} \quad A-A-7$$

Segundo caso: $\lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} v(t)$; ahora sólo despreciamos las correcciones de la radiación, y entonces la A-6 toma la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{m \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \vec{F}_{ext} \quad A-A-8$$

Tercer caso: $\lim_{\frac{v}{c} \ll 1} v(t)$; en este caso sólo se pasan por alto, las correcciones relativistas, de modo que la ecuación A-6, se transforma en:

$$\begin{aligned} m \cdot \vec{a} &= \vec{F}_{ext} - m \cdot \gamma_L \left(a^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \cdot a^2 \right) \cdot \frac{v}{v^2} \\ &= \vec{F}_{ext} - m \cdot \gamma_L \left(\frac{a}{v} \right)^2 \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad A-A-9$$

pues:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \epsilon \quad \text{para} \quad \frac{v}{c} \ll 1$$

Esta ecuación A-9, es la misma que la 1-7-35, y constituye la llamada Ecuación de Thomas Erber, por haber sido el primero en escribirla en esa forma (1), para el caso de un oscilador lineal armónico, aunque su estudio y generalización ha sido realizado por el Dr. Willy Cloetens (2).

En todas estas ecuaciones, la "fuerza externa", de acuerdo con la Electrodinámica de Lorentz-Dirac, viene dada por:

$$\vec{F}_{ext} = e \cdot \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} \quad A-A-10$$

(1) Th. ERBER, en Fortschritte der Physik, 9, 348, (1961)

(2) W. CLOETENS, en Tijdschrift van de Vrije Universiteit Brussel, 3, 8, (1965)

Para resolver la Ecuación de Th. ERBER, tomaremos como fuerza externa:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{e}{c} \cdot \vec{v} \times \vec{H}$$

de suerte que la A-9, adopte la siguiente forma:

$$m \cdot \vec{a} = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} - m \zeta_L \left(\frac{a}{v}\right)^2 \vec{v} \quad A-A-11$$

Sabemos que para un " \vec{H} " monodimensional en la dirección del eje Z, se tiene:

$$H = (0 \vec{i} + 0 \vec{j} + H \vec{k}) \quad A-A-12$$

y que el producto vectorial " $\vec{v} \times \vec{H}$ " da:

$$\vec{v} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = H (v_y \vec{i} - v_x \vec{j}) \quad A-A-13$$

de modo que la ecuación A-11 toma la forma:

$$m \cdot \vec{a} = H (v_y \vec{i} - v_x \vec{j}) - m \zeta_L \left(\frac{a}{v}\right)^2 \vec{v} \quad A-A-14$$

Como por otra parte, la "Fuerza Externa" en sus componentes viene dada por:

$$m \cdot \vec{a} = m a_x \cdot \vec{i} + m a_y \cdot \vec{j} + m a_z \cdot \vec{k} \quad A-A-15$$

igualando los coeficientes de estas dos últimas expresiones:

$$m a_x = \frac{e}{c} H \cdot v_y \implies a_x = \frac{eH}{mc} v_y \implies a_x - w \cdot v_y = 0 \quad A-A-16$$

$$m a_y = - \frac{e}{c} H v_x \implies a_y = - \frac{eH}{mc} v_x \implies a_y + w \cdot v_x = 0$$

De tal manera que al sustituir estas componentes de la fuerza en la ecuación original del movimiento, la A-11, ésta toma la forma:

$$a_x - w \cdot v_y + \zeta_L \left(\frac{a}{v}\right)^2 \cdot v_x = 0$$

A-A-17

$$a_y + w \cdot v_x + \zeta_L \left(\frac{a}{v}\right)^2 \cdot v_y = 0$$

que es un "Sistema Lineal" al que podemos aplicar "Transforma-

das de Laplace", teniendo presente las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} v_x(0) &= v_0 \\ v_y(0) &= 0 \end{aligned} \quad \text{A-A-18}$$

El sistema A-17 es equivalente a:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x - w \cdot v_y + \tau_L \left(\frac{a}{v}\right)^2 \cdot v_x &= 0 \\ \dot{v}_y + w \cdot v_x + \tau_L \left(\frac{a}{v}\right)^2 \cdot v_y &= 0 \end{aligned} \quad \text{A-A-19}$$

Aplicando ahora "Transformadas de Laplace (\mathcal{L})" da:

$$\begin{aligned} p \mathcal{L} v_x - v_x(0) - w \mathcal{L} v_y + \tau_L \left(\frac{a}{v}\right)^2 \mathcal{L} v_x &= 0 \\ p \mathcal{L} v_y - v_y(0) + w \mathcal{L} v_x + \tau_L \left(\frac{a}{v}\right)^2 \mathcal{L} v_y &= 0 \end{aligned} \quad \text{A-A-20}$$

sistema que podemos resolver tanto para " $\mathcal{L} v_x$ " como para " $\mathcal{L} v_y$ ". De la ecuación A-20_a se tiene:

$$\mathcal{L} v_x = \frac{v_0 + w \mathcal{L} v_y}{p + \tau_L \left(\frac{a}{v}\right)^2} \quad \text{A-A-21}$$

que al sustituir en A-20_a y resolviendo para " $\mathcal{L} v_y$ " da:

$$\mathcal{L} v_y = -v_0 \frac{w}{\left[p + \tau_L \left(\frac{a}{v}\right)^2 \right]^2 + w^2} \quad \text{A-A-22}$$

y al llevar este valor a la ecuación A-21 resulta:

$$\mathcal{L} v_x = v_0 \frac{p + \tau_L \left(\frac{a}{v}\right)^2}{\left[p + \tau_L \left(\frac{a}{v}\right)^2 \right]^2 + w^2} \quad \text{A-A-23}$$

A partir de la ecuación A-11 podemos encontrar el valor de la constante $(a/v)^2$

Para ello elevamos al cuadrado dicha ecuación A-11, de modo que:

$$(ma)^2 = \left(\frac{e}{c}vH\right)^2 - 2\frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H} \cdot m\zeta_L \left(\frac{a}{v}\right)^2 v + \left[m\zeta_L \left(\frac{a}{v}\right) \cdot v\right]^2 \quad A-A-24$$

Dividiendo por $(mv)^2$, haciendo $\frac{eH}{mc} = w$ y recordando que

$$(\vec{v} \times \vec{H}) \cdot \vec{v} = 0$$

la anterior ecuación se reduce a:

$$(\zeta_L)^2 \cdot \left(\frac{a}{v}\right)^4 - \left(\frac{a}{v}\right)^2 + w^2 = 0 \quad A-A-25$$

que es una "Ecuación de Segundo Grado" para $\left(\frac{a}{v}\right)^2$

Resolviendo por lo tanto esta ecuación se tiene:

$$\left(\frac{a}{v}\right)^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(\zeta_L \cdot w)^2}}{2\zeta_L^2} = \quad A-A-26$$

Introduciendo este resultado en A-22 y A-23 se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1} v_x = v_0 \frac{[p - (-\alpha \zeta_L)]}{[p - (-\alpha \zeta_L)]^2 + w^2}$$

A-A-27

$$\mathcal{L}^{-1} v_y = -v_0 \cdot w^{-1} \cdot \frac{1}{[p - (-\alpha \zeta_L)]^2 + w^2}$$

Aplicando ahora "Transformadas Inversas de Laplace (\mathcal{L}^{-1})" y recordando que:

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(p-a)^2 + b^2} = \frac{1}{b} \cdot e^{at} \cdot \text{sen}(bt)$$

A-A-28

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2} = e^{at} \cdot \text{cos}(bt)$$

donde $a = -\alpha \zeta_L$ y $b = w$

El sistema A-27 tiene como solución:

$$v_x(t) = v_0 \cdot e^{-\alpha \zeta_L t} \cdot \cos(\omega t)$$

A-A-29

$$v_y(t) = -v_0 \cdot e^{-\alpha \zeta_L t} \cdot \text{sen}(\omega t)$$

Sustituyendo el valor de " α " encontrado en la A-26 y después de simplificar, se tiene finalmente como solución:

$$v_x(t) = v_0 \cdot \exp\left\{ - \frac{(-1 \pm \sqrt{1 - 4\zeta_L^2 \omega^2})t}{2\zeta_L} \right\} \cos(\omega t)$$

A-A-30

$$v_y(t) = -v_0 \cdot \exp\left\{ - \frac{(-1 \pm \sqrt{1 - 4\zeta_L^2 \omega^2})t}{2\zeta_L} \right\} \text{sen}(\omega t)$$

ecuación que también podemos escribir, factorando convenientemente, en la forma:

$$v_x(t) = v_0 \cdot \exp\left\{ \frac{t}{2\zeta_L} (1 \pm \sqrt{1 - 4\zeta_L^2 \omega^2}) \right\} \cos(\omega t)$$

A-A-31

$$v_y(t) = -v_0 \cdot \exp\left\{ \frac{t}{2\zeta_L} (1 \pm \sqrt{1 - (2\zeta_L \omega)^2}) \right\} \text{sen}(\omega t)$$

que representa la solución formal y exacta de la "Ecuación del Movimiento", de acuerdo con la formulación hecha por Thomas Erber en 1961, y resuelta según el método expuesto por el Dr. Willy Cloetens, hay también otro método que aparece en Simon Stevin.



Solución de la Ecuación del Movimiento
de una
Partícula Cargada
sometida a una fuerza externa
" Delta de DIRAC "

En estas condiciones, la ecuación general del movimiento que hemos presentado en la ecuación 1-2-32, pág. 15 de este trabajo toma la forma:

$$m \cdot \vec{a}(t) = eE\theta\delta(t) + \frac{2}{3} r_0 k_0 \int_0^t dt' e^{-ck_0(t-t')} \cdot \vec{a}(t')$$

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{m} eE\theta\delta(t) + \frac{2}{3} \frac{r_0 k_0}{m} \int_0^t dt' e^{-ck_0(t-t')} \vec{a}(t') \quad A-B-1$$

Escogiendo como valor de la "masa electromagnética":

$$m_{el} = \frac{\varepsilon}{\pi} \left(\frac{e}{c} \right)^2 \int g(k_0, k) dk \quad A-B-2$$

Al multiplicar y dividir por "m" y haciendo $\frac{k}{k_0} = x$, la expresión anterior se transforma en:

$$m_{el} = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{m \cdot c^2} k_0 \cdot m \cdot \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \quad A-B-3$$

pero por otra parte sabemos que:

$$\frac{e^2}{m c^2} = r_0 = \text{radio promedio de la partícula} \quad A-B-4$$

$$y \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, llevando estos valores a la B-3, ésta se reduce finalmente a:

$$m_{el} = m (r_0 \cdot k_0) \quad A-B-5$$

Como además: $m_{el} = m$, entonces $m_o = 0$
de modo que:

$$m_{el} = (r_o k_o) \cdot m_{el} \quad \text{y} \quad r_o k_o = 1 \quad \text{A-B-6}$$

Por lo tanto la ecuación B-1 se reduce a:

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{m} eE\Theta \delta(t) + \frac{2}{3} \int_0^t e^{-ck_o(t-t')} \cdot \vec{a}(t') dt' \quad \text{A-B-7}$$

Si ahora aplicamos a esta expresión "Transformadas de Laplace" y recordamos que:

$$\mathcal{L} \delta(t) = 1 \quad \mathcal{L} e^{-ck_o t} = \frac{1}{p + ck_o}$$

$$\mathcal{L} \vec{a}(t) = p \cdot A(p) - \vec{a}(0) = p \cdot A(p)$$

entonces, la B-7 se transforma en:

$$A(p) = \frac{1}{m} eE\Theta + \frac{2}{3} \frac{1}{p + ck_o} A(p) \quad \text{A-B-8}$$

que resuelta para $A(p)$ nos da

$$A(p) = \frac{eE\Theta}{m} \left(\frac{p + ck_o}{p + 3ck_o} \right) \quad \text{A-B-9}$$

Sumando y restando " $2ck_o$ " dentro del paréntesis de esta expresión se tendrá como valor de $A(p)$ el siguiente:

$$A(p) = \frac{eE\Theta}{m} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{3ck_o}{p + 3ck_o} \right) \quad \text{A-B-10}$$

Ahora sí podemos aplicar "Transformadas Inversas de Laplace" recordando para ello que:

$$\mathcal{L}^{-1} 1 = \delta(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{a}{p - a} = a \cdot e^{at} \quad \text{donde} \quad a = -3ck_o$$

obteniéndose como resultado final:

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{m} eE\Theta \left[\delta(t) - 2ck_o \cdot e^{-3ck_o t} \right] \quad \text{A-B-11}$$

que representa la "Solución Exacta" de la ecuación dada.

Solución de la Ecuación del Movimiento
de una
Partícula Cargada

Sometida a una doble fuerza exterior
" Impulsiva y de Lorentz "

En estas circunstancias, la ecuación general del movimiento, es decir, la 1-2-32, toma la forma:

$$m\vec{a}(t) = eE\theta\delta(t) + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H} + \frac{2}{3}r_0k_0\int_0^t dt.e^{-ck_0(t-\tau)}.\ddot{\vec{a}}(\tau) \quad A-C-1$$

ecuación en la cual, cada término tiene un significado físico, a saber:

- Primer miembro, representa la Fuerza de Newton
- El primer término del 2º miembro representa la primera contribución de la fuerza exterior, y es un Impulso en la dirección del movimiento.
- El 2º término es la segunda contribución de la fuerza exterior, y es la fuerza de Lorentz.
- El último término, representa la fuerza de radiación

Para encontrar la solución de esta ecuación, la vamos a escribir en función de "variables complejas", tomando entonces la siguiente forma:

$$\dot{f}(t) = -iwf(t) + eE\theta\delta(t) + \int_0^t e^{-w_0(t-\tau)}.\ddot{f}(\tau) d\tau \quad A-C-2$$

y derivando respecto a "t" esta expresión se tiene:

$$\ddot{f} = -iw\dot{f} + eE\theta\dot{\delta}(t) + \ddot{f} - w_0\int_0^t e^{-w_0(t-\tau)}.\ddot{f}(\tau) d\tau \quad A-C-3$$

Multiplicando la C-2 por "w₀" y reordenando adecuadamente resulta:

$$w_0\dot{f} + iww_0f - eE\theta w_0\delta(t) = w_0\int_0^t e^{-w_0(t-\tau)}.\ddot{f}(\tau) d\tau \quad A-C-4$$

Sustituyendo la C-4 en la C-3, se tiene:

$$i\omega \dot{f} \dots eE\Theta \dot{\delta}(t) + w_0 \dot{f} + i\omega w_0 f - eE\Theta w_0 \delta(t) = 0 \quad A-C-5$$

Factorando y trasladando términos en la expresión anterior, resulta:

$$\dot{f} (w_0 + i\omega) + i\omega w_0 f = eE\Theta \dot{\delta}(t) + eE\Theta \delta(t) \quad A-C-6$$

que es una "Ecuación Lineal de Primer grado", a la cual se la puede aplicar "Transformadas de Laplace (\mathcal{L})", obteniéndose:

$$p (i\omega + w_0) \cdot F(p) + i\omega w_0 F(p) = eE\Theta p + w_0 eE\Theta \cdot 1 \quad A-C-7$$

y resolviendo para "F(p)" resulta:

$$F(p) = eE\Theta \frac{p + w_0}{p(w_0 + i\omega) + i\omega w_0} \quad A-C-8$$

expresión que también podemos escribir en la forma:

$$F(p) = eE\Theta \frac{p}{p(w_0 + i\omega) + i\omega w_0} + eE\Theta \frac{w_0}{p(w_0 + i\omega) + i\omega w_0} \quad A-C-9$$

Si ahora aplicamos "Transformadas Inversas de Laplace (\mathcal{L}^{-1})" se tendrá que:

$$f(t) = \frac{w_0}{w_0 + i\omega} eE\Theta \cdot \exp\left(-\frac{i\omega w_0}{w_0 + i\omega} t\right) + \mathcal{L}^{-1} \left[eE\Theta \frac{p}{p(w_0 + i\omega) + i\omega w_0} \right] \quad A-C-11$$

pero de acuerdo con las propiedades de las "Transformadas Inversas de Laplace" se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1} F(p) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{eE\Theta}{w_0 + i\omega} \frac{p}{p + \frac{i\omega w_0}{w_0 + i\omega}} \right] \quad A-C-12$$

Sumando y restando a esta expresión la cantidad:

$$\frac{i\omega w_0}{w_0 + i\omega}$$

se tendrá como valor de la F(p):

$$\mathcal{L}^{-1} F(p) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{eE\theta}{w_0 + iw} \cdot \left(1 - \frac{\frac{iww_0}{w_0 + iw}}{p + \frac{iww_0}{w_0 + iw}} \right) \right] \quad A-C-13$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación C-11 resulta:

$$f(t) = \frac{w_0}{w_0 + iw} eE\theta \cdot \exp\left(-\frac{iww_0}{w_0 + iw} t\right) + \frac{1}{w_0 + iw} eE\theta \delta(t) \quad A-C-14$$

$$- \frac{1}{w_0 + iw} eE\theta \cdot \frac{iww_0}{w_0 + iw} \cdot \exp\left(-\frac{iww_0}{w_0 + iw} t\right)$$

El 2º término representa un pequeño pulso inicial que se da a la partícula, y lo podemos despreciar, de modo que pasando a condiciones de límite, es decir cuando:

$$w \ll w_0$$

la ecuación anterior se reduce a:

$$f(t) = eE\theta \cdot \exp\left(-\frac{iww_0}{w_0 + iw} t\right) + i\frac{w}{w_0} eE\theta \cdot \exp\left(-\frac{iww_0}{w_0 + iw} t\right) \quad A-C-15$$

Para estas condiciones de límite, también el 2º término de A-C-15 tiende a cero, de modo que finalmente se tiene como solución de la ecuación propuesta:

$$f(t) = eE\theta \cdot \exp\left(-\frac{iww_0}{w_0 + iw} t\right) \quad A-C-16$$

que escrita en sus componentes nos da:

$$v_x(t) = v_0 \cos(\omega t) \cdot \exp(-\tau_L \omega^2 t)$$

A-C-17

$$v_y(t) = -v_0 \sin(\omega t) \cdot \exp(-\tau_L \omega^2 t)$$

que representa la "Solución Formal y Exacta" de la ecuación estudiada.



EL "SPIN DE HEISENBERG"
 como una consecuencia
 de la
 "Electrodinámica Clásica"
 libre de toda singularidad

En este Apéndice presentaremos la deducción del "Spin de Heisenberg", y luego haremos el cálculo de ese mismo spin comprobando la diferencia existente con el resultado experimental obtenido por los ya bien conocidos métodos cuánticos.

A.- Deducción del "Spin de Heisenberg"

Para el desarrollo de esta sección seguiremos al Dr. W. Cloetens (1) cuyo artículo aparecerá próximamente en "PHYSICA", y que lleva el mismo título que el que encabeza este apéndice.

Para ello tomamos una partícula puntual como una "Función -Dirac" difundida mediante una distribución de frecuencias.

La ecuación del movimiento de dicha partícula, según la teoría Lorentz-Dirac para una partícula puntual delta es:

$$m \cdot \dot{w}_\mu = e \vec{F}_{\mu\nu}^{ext} \cdot u_\nu + \frac{2}{3} e^2 (\dot{w}_\mu - w_\nu \cdot w_\nu \cdot u_\mu) \quad A-D-1$$

Si tomamos: $c = 1$ y $r_0 k_0 = 1$

la ecuación anterior la podemos escribir en la siguiente forma:

$$m \dot{w}_\mu = e \cdot \vec{F}_{\mu\nu}^{ext} \cdot u_\nu + \frac{2}{3} e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}(s-s') (\dot{w}'_\mu - w'_\nu \cdot w'_\nu \cdot u_\mu) dk \quad A-D-2$$

Introduciendo una representación de "Onda plana" para la "Función Delta", dada por:

$$\mathcal{D}(s - s') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos k(s-s') dk \quad A-D-3$$

en la cual: $k^{-1} = \text{longitud de onda relativista}$

(1) CLOETENS, W. J. en "The Heisenberg Spin" as a consequence of classical electrodynamics without singularities.

Llevando esta expresión a la A-D-2, la ecuación del movimiento será:

$$m\ddot{w}_\mu = e \cdot \vec{F}_{\mu\nu}^{ext} \cdot u_\nu + \frac{4e^2}{3\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds' \int_{-\infty}^{\infty} dk \cos k(s-s') (\dot{w}'_\mu - w'_\nu w'_\nu u'_\nu) \quad A-D-4$$

Ahora podemos introducir como función de distribución:

$$g(k^2)$$

que representa la distribución de frecuencias de la auto-fuerza, de modo que la última ecuación adopta la forma:

$$m \cdot \ddot{w}_\mu = e \cdot \vec{F}_{\mu\nu}^{ext} \cdot u_\nu + \frac{4e^2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} ds' \int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot g(k^2) \cdot \cos k(s-s') (\dot{w}'_\mu - w'_\nu w'_\nu u'_\nu) \quad A-D-5$$

A la función de distribución " $g(k^2)$ " la podemos asignar por ejemplo el siguiente valor:

$$g(k^2) = \frac{1}{1 - (r_0 k)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{r_0}{k_0}\right)^2} \quad A-D-6$$

$$\text{donde: } r_0 = (k_0)^{-1}$$

Pero también se hubiera podido tomar otras distribuciones de frecuencias que dieran lugar a "auto-oscilaciones", lo cual implicaría que:

$$\ddot{w}_\mu + k_0^2 \cdot w_\mu = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{e \cdot \vec{F}_{\mu\nu}^{ext} \cdot u_\nu}{m} \right) + k_0^2 \cdot \frac{e \cdot \vec{F}_{\mu\nu}^{ext} \cdot u_\nu}{m} \quad A-D-7$$

Una partícula libre admite auto-oscilaciones relativistas en el plano " x-y ", dadas por:

$$\vec{w} = \alpha \left\{ \cos(k_0 s) \cdot \vec{I}_x + \text{sen}(k_0 s) \cdot \vec{I}_y \right\} \quad A-D-8$$

de modo que se tenga:

$$(\vec{w})^2 = \text{conste} \quad (\vec{u})^2 = \text{conste} \quad (\vec{x})^2 = \text{conste} \quad A-D-9$$

y por lo tanto:

$$ds = dt \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = dt \sqrt{1 - \left(\frac{v_c}{c}\right)^2} \quad A-D-10$$

donde " v_c " = conste

de suerte que como solución de la A-D-5, se tendría:

$$a(t) = A \cos \frac{c}{r_0} \sqrt{1 - \left(\frac{v_c}{c}\right)^2} \cdot t \cdot \vec{i}_x + \text{sen} \frac{c}{r_0} \sqrt{1 - \left(\frac{v_c}{c}\right)^2} \cdot t \cdot \vec{i}_y \quad A-D-11$$

Podemos notar que los "valores promedios" de las componentes de la Cantidad de Movimiento " \vec{p} ", en las direcciones de los ejes " $x-y$ ", son nulos, lo cual nos permite calcular el Momento Antular " L ", teniendo en cuenta las correcciones relativistas, y este Momento viene dado por:

$$\vec{L} = \frac{m \cdot r \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = A \cdot m \cdot r_0^3 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_c}{c}\right)^2}} \cdot \vec{i}_z = \frac{\hbar}{2} \cdot \vec{i}_z \quad A-D-12$$

Esto supone que:

$$\frac{v_c}{c} = \left[\left(\frac{\lambda}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v_c}{c}\right)^2} \right] \quad A-D-13$$

$$v_c = c \left[\lambda (r_0 + \lambda)^{-1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad A-D-14$$

$$\lambda = \frac{1}{2} (mc)^{-1} \cdot h (2\pi)^{-1} = \frac{1}{2mc} \frac{\hbar}{2\pi} \approx 10^{-11} \text{ cms} \quad A-D-15$$

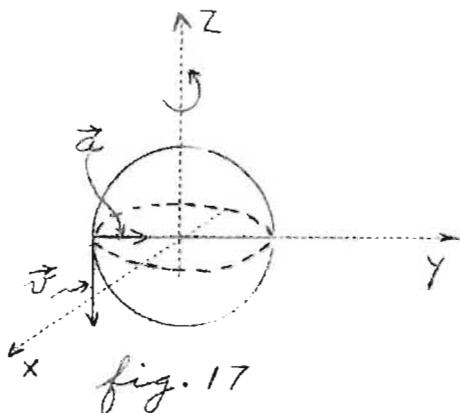
Integrando una vez más, se obtiene el radio relativista de las auto-oscilaciones, dándolo como valor:

$$r_c = \sqrt{\lambda r_0} \approx 10^{-12} \text{ cms} \quad A-D-16$$

que al multiplicarlo por " $\frac{e}{m}$ " nos da al "Magnetón de Bohr" a saber:

$$\begin{aligned} \frac{eh}{4\pi m} &= \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar}{2\pi} = \frac{e}{m} \cdot \frac{\hbar}{2} \\ &= 0.927 \cdot 10^{-21} \text{ jculs-m}^2 (\text{weeb})^{-1} \end{aligned} \quad A-D-17$$

B.- Cálculo del "Spin de Heisenberg"



De acuerdo con la imagen cuántica del "Spin del electrón", éste lo podemos representar como una esfera en rotación, tal como aparece en la fig. 17.

Suponiendo que la masa y la densidad del electrón considerado vengan dadas por:

$$m_{\text{electrón}} = m$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3}{4} \frac{m}{\pi r_0^3}$$

A-D-18

donde r_0 = radio del centro del electrón al elemento de masa considerado.

Entonces el impulso o "Cantidad de movimiento", teniendo en cuenta las correcciones relativistas será:

$$\vec{p} = \frac{m \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

A-D-19

y la "variación de ese mismo "momentum" vendrá dada por:

$$\delta \vec{p} = \frac{\rho \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

A-D-20

Por otra parte sabemos que el "Momento Angular" está dado mediante la expresión:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

A-D-21

de suerte que la "variación" de dicho Momento es:

$$\delta \vec{L} = \vec{r} \times \delta \vec{p} = \frac{3m}{4\pi r_0^3} \cdot \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

A-D-22

esto, después de sustituir el valor de " $\delta \vec{p}$ " dado por A-D-20

Considerando una rotación del electrón en torno al eje "z", la expresión última se transforma en:

$$\int L = \frac{3m}{4\pi r_0^3} \frac{r \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot \vec{1}_z \quad A-D-23$$

Para encontrar el "Momento Angular Total" en la dirección del eje "z", basta multiplicar la expresión anterior por "dV", e integrar en todo el volumen, de modo que:

$$\int_V \int L \cdot dV = \frac{3m}{4\pi r_0^3} \int_V \frac{r \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot dV \cdot \vec{1}_z \quad A-D-24$$

La ecuación de la esfera en coordenadas cartesianas es:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad A-D-25$$

de suerte que los límites de integración de la ecuación A-D-24 a lo largo del eje "z" serán:

$$z_i = 0 \quad z_s = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \quad A-D-26$$

Por lo tanto, al introducir estos límites en la A-D-24, separando las integrales, e integrando el primer miembro se tendrá:

$$L = \frac{3m}{4\pi r_0^3} \iint dx dy \cdot 2 \int_0^{R^2 - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{r \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} dz \cdot \vec{1}_z \quad A-D-27$$

ecuación en la cual el producto "rv" es una constante porque son independientes de la variable de integración, y si además recordamos que:

$$\int_0^{R^2 - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} dz = z \Big|_0^{R^2 - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \quad A-D-28$$

entonces la ecuación A-D-27 se transforma en:

$$L = \frac{3mv}{2\pi r_0^3} \iint dx dy \frac{r}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \cdot \vec{1}_z \quad \text{A-D-29}$$

Por otra parte tenemos que:

$$\begin{aligned} r &= \text{distancia del electrón al eje "z"} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

que introducido en la expresión precedente nos da:

$$L = \frac{3mv}{2\pi r_0^3} \iint dx dy \frac{r}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot \vec{1}_z \quad \text{A-D-30}$$

Ahora podemos expresar la doble integral que nos queda en coordenadas polares, para lo cual basta tener presente que:

$$\begin{aligned} dx \cdot dy &= \text{elemento de área} \\ &= dS \\ &= r \cdot d\theta \cdot dr \end{aligned} \quad \text{A-D-31}$$

cuyos límites de integración son:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq r \leq R \end{aligned}$$

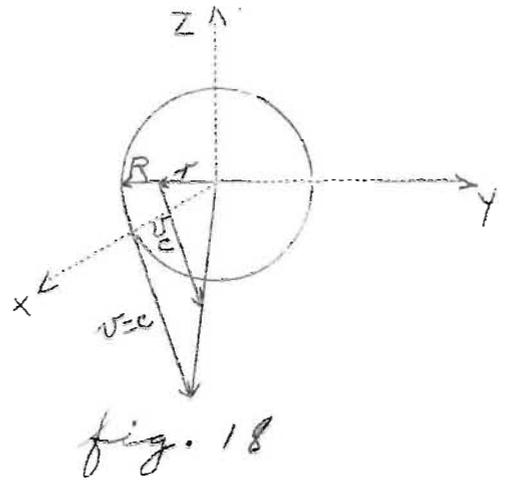
de tal manera que al llevar todos estos valores en la ecuación del momento se tiene:

$$L = \frac{3mv}{2\pi r_0^3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \frac{r}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} dr \cdot \vec{1}_z \quad \text{A-D-32}$$

e integrando respecto a "θ" resulta:

$$\begin{aligned} L &= \frac{3mv}{2\pi r_0^3} (2\pi) \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \frac{r}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} dr \cdot \vec{1}_z \\ &= \frac{3mv}{r_0^3} \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \frac{r}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} dr \cdot \vec{1}_z \end{aligned} \quad \text{A-D-33}$$

Si ahora suponemos que en el extremo de la trayectoria del electrón, su velocidad es máxima, e igual a "c", de acuerdo con la fig. 18 y la semejanza de triángulos se tendrá:



$$A-D-34 \quad \frac{v}{c} = \frac{r}{R}$$

que introducido en la ecuación anterior, después de reducir a común denominador, y hacer las simplificaciones posibles da:

$$L = \frac{3mc}{r_0^3} \int_0^R \vec{1}_z = \frac{3mc}{r_0^3} \frac{R^4}{4} \cdot \vec{1}_z \quad A-D-35$$

pero: $R =$ radio de la partícula
 $= r_0$

Luego la ecuación A-D-35 toma finalmente el siguiente valor:

$$L = \frac{3}{4} mcr_0 \cdot \vec{1}_z \quad A-D-36$$

y representa el "valor máximo" que puede tomar el "Momento Total" en la dirección del eje "Z"

Sustituyendo los valores de las constantes que aparecen en esta ecuación, se encuentra para "L" el siguiente valor:

$$\begin{aligned} \vec{L}_z &= \frac{3}{4} \cdot 0.911 \cdot 10^{-30} \text{Kgr} \cdot 2.998 \cdot 10^8 \text{m-s}^{-1} \cdot 2.85 \cdot 10^{-15} \\ &= 0.575 \cdot 10^{-38} \frac{\text{Kgr-m}^2}{\text{seg}} \text{ (Jouls-seg)} \end{aligned} \quad A-D-37$$

De acuerdo con la "Mecánica cuántica Clásica" se tiene:

$$\frac{\vec{L}}{2} = \frac{h}{4\pi} = \frac{0.623 \cdot 10^{-33}}{4 \cdot 3.14} = 0.496 \cdot 10^{-34} \text{ joul-seg} \quad A-D-38$$

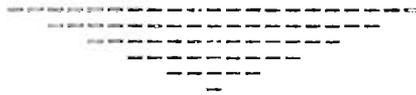
Vemos pues al comparar estos dos últimos resultados que:
 El "Momento Relativista", es decir al considerar
 al "ppin" como una consecuencia del movimiento g
 ratorio del electrón, es:

$$L_{rel.} \vec{1}_z = 1.16 \cdot 10^{-4} L_{cuánt.} \vec{1}_z \quad A-D-39$$

De todo lo anterior llegamos a la siguiente conclusión:
 "El SPIN debe ser considerado como consecuencia del
 electrón dotado de un movimiento de vibración, o sea
 con AUTO-OSCILACIONES en las dos dimensiones del
 plano "x-y", y no animado de un movimiento de ro-
 tación en torno a su propio eje."

Para visualizar algo más esta nueva concepción del "SPIN",
 podemos imaginarlo como un "planeta" con movimiento de trasla-
 ción exclusivamente alrededor del centro de su sistema, sólo
 que para nuestro caso, no hay tal centro de atracción gravita-
 cional, sino que el electrón es su "propio centro" y su fuente
 de autoabastecimiento energético para mantenerse en movimiento

Este movimiento vibracional puede ser en dos sentidos contra-
 rios de acuerdo con el signo del SPIN.



Bosquejo de un posible Experimento
para la
Medición del "Damping - Time"

A.- OBJETIVO:

Como una de las posibles consecuencias y aplicación de cuanto se ha dicho en estas páginas, vamos a delinear a grandes rasgos la experiencia que nos permita determinar un doble hecho:

- a) La trayectoria que describe un electrón acelerado y sometido a la acción de un campo magnético " \vec{H} " constante.
- b) El "DAMPING-TIME" o tiempo que dicho electrón tarda en hacer el recorrido de su trayectoria, en las condiciones antes mencionadas.

De acuerdo con las diversas soluciones presentadas en las dos Electrodinámicas estudiadas esa trayectoria puede ser: circular en el caso de la Electrodinámica de "Dirac y Lorentz" y su Escuela, o espiral, en conformidad con la solución presentada por G. N. Plass y W. J. Cloetens (1) y (2), para la misma electrodinámica el primero de estos autores y la electrodinámica de Peierls-Priogine el segundo.

B.- EQUIPO EXPERIMENTAL: Véase la fig. 19, pág. 110

Aunque el objetivo de nuestra experiencia es delicado y de un alto valor científico en el campo de la "Física Teórica", sin embargo bastará, al menos en principio, un sencillo instrumental, compuesto de:

- a) Un acelerador de partículas, un haz de electrones en nuestro caso, para lo cual utilizaremos un simple "Tubo de

(1) PLASS, G. N. en Rev. of Mod. Physics, 33, 37-62, (1961)

(2) CLOETENS, W. J. en Simon Stevin, 42, 65-75, (1968)

rayos catódicos" según aparece en la fig. 23, pág. 111

b) Un "Túnel al vacío" con un poco de gas de argón muy enrarecido. La finalidad de este "gas" es hacer visible la trayectoria de las partículas.

El pequeño ensanchamiento cilíndrico de esta sección es el que ^{permitirá} observar la trayectoria de las partículas así como calcular el Damping-time, Véase fig. 21, pág. 111

c) Generador del campo magnético " \vec{H} " con su correspondiente electroimán. Este generador es de potencia variable y a fin de que los efectos sean detectados y medibles, creemos que debe ponerse en condiciones tales que sea capaz de generar un " $\vec{H} = 0.4 \cdot 10^4$ Gauss, Véanse figs. 20 y 22

C.- FUNDAMENTO DE LA EXPERIENCIA

En ambas electrodinámicas estudiadas, hemos visto que tanto la solución presentada por G. N. Plass (1), como la solución encontrada por el Dr. W. Cloetens (2) a partir de la ecuación de Th. Erber, coinciden para los límites en que:

$$\tau_L \omega \ll 1$$

que corresponde a los campos magnéticos experimentales de uso frecuente en el Laboratorio y vienen expresadas así:

$$v_x(t) \approx v_0 \exp(-\tau_L \omega^2 t) \cdot \cos(\omega t)$$

A-B-1

$$v_y(t) \approx -v_0 \exp(-\tau_L \omega^2 t) \cdot \sin(\omega t)$$

Para esta solución, el "Damping-time" o tiempo transcurrido desde que el electrón penetra en el campo magnético hasta su

(1) PLASS, G. N. art. cit. fórmula 134

(2) CLOETENS, W. J. en Simon Stevin, 42, 65-75, fórmula 4-5
(1958)

desaparición en el centro de la "Cavidad cilíndrica" de la cámara al vacío, y viene dado por:

$$T = \frac{1}{\tau_L \cdot w^2} \quad A-E-2$$

Pero si al tratar la ecuación del movimiento tenemos en cuenta todas las correcciones (de radiación, relativistas), entonces aquélla toma la forma:

$$\frac{a_x}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} + \frac{v_x \cdot \vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} - w \cdot v_y + \tau_L \frac{a^2 \cdot v_x}{v^2 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} + \tau_L \frac{v_x \cdot \vec{v} \cdot \vec{a}}{(cv)^2 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = 0$$

A-E-3

$$\frac{a_y}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} + \frac{v_y \cdot \vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} + w \cdot v_x + \tau_L \frac{a^2 \cdot v_y}{v^2 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} + \tau_L \frac{v_y \cdot \vec{v} \cdot \vec{a}}{(cv)^2 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = 0$$

Sistema que para las condiciones iniciales escogidas en la ecuación A-A-18 de la página 90, nos da como solución;

$$a_x(0) = \frac{v_0}{2\tau_L} \sqrt{1 - (\frac{v_0}{c})^2} \left[-1 + \sqrt{1 - (2\tau_L w)^2} \right]$$

A-E-4

$$a_y(0) = -v_0 w \sqrt{1 - (\frac{v_0}{c})^2}$$

en cuyo caso el "Damping-time" viene dado por:

$$T = \frac{2\tau_L}{\sqrt{1 - (\frac{v_0}{c})^2} \left[-1 + \sqrt{1 - (2\tau_L w)^2} \right]} \quad A-E-5$$

y para campos magnéticos frecuentes en Laboratorio, es decir cuando " $\tau_L \cdot \omega \ll 1$ ", se tendrá que:

$$T \approx \frac{1}{\tau_L \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}$$

$$\approx \frac{E_{cin}(0)}{m \cdot c^2 \cdot \tau_L \cdot \omega^2}$$

A-E-6

Si nuestra partícula cargada, o haz de electrones es sometida a la acción de un campo magnético " $\vec{H} = 10^4$ Gauss ", campo no muy intenso y que por lo tanto se puede obtener fácilmente en el Laboratorio y con el aparato que se ha descrito anteriormente, el "Damping-time" debe ser:

a) en el límite no relativista: $\frac{v_0}{c} \ll 1$

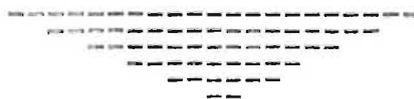
$$T \approx 5.21 \text{ seg}$$

b) en el límite relativista: $v_0 = 0.9 \cdot c$

$$T \ll 11.6 \text{ seg.}$$

efectos que son perfectamente detectables

Queda pues bosquejado el "experimento" que puede darnos las pruebas experimentales de dos tópicos tan interesantes y que permitiría comprobar si los resultados teóricos concuerdan o no con los datos experimentales.



ESQUEMAS DEL MONTAJE DEL EXPERIMENTO

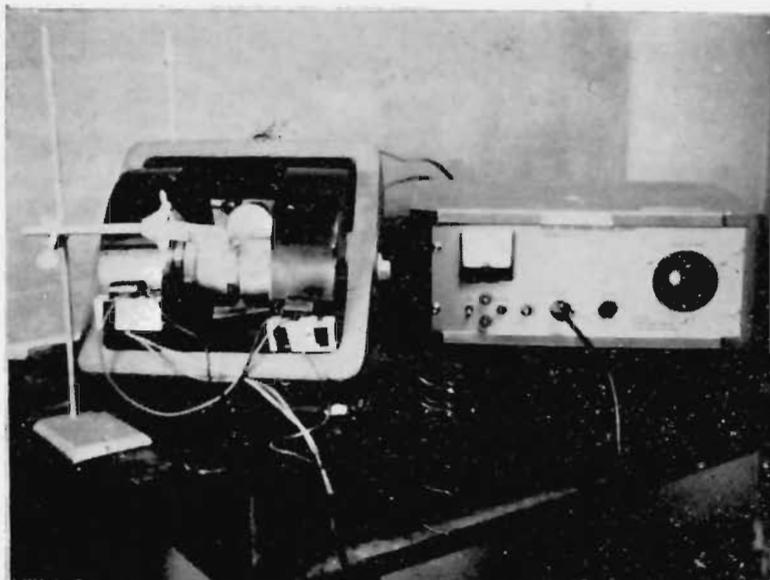


Fig. 19

Esquema mostrando el conjunto del montaje necesario para realizar la experiencia.

Fig. 20

Generador de Potencia para crear el Campo magnético.

Capacidad Máxima:
 $0.4 \cdot 10^4$ Gauss.



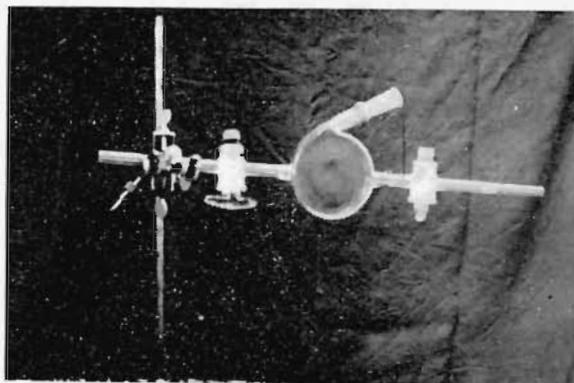


Fig 21

Cámara al vacío con gas de argón a muy baja presión para hacer visible la trayectoria de los electrones.

Fig. 22

Electroimán

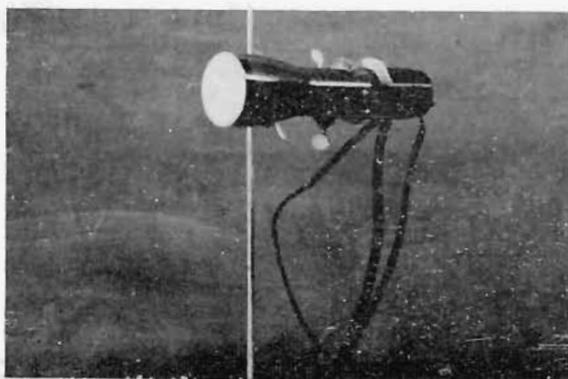
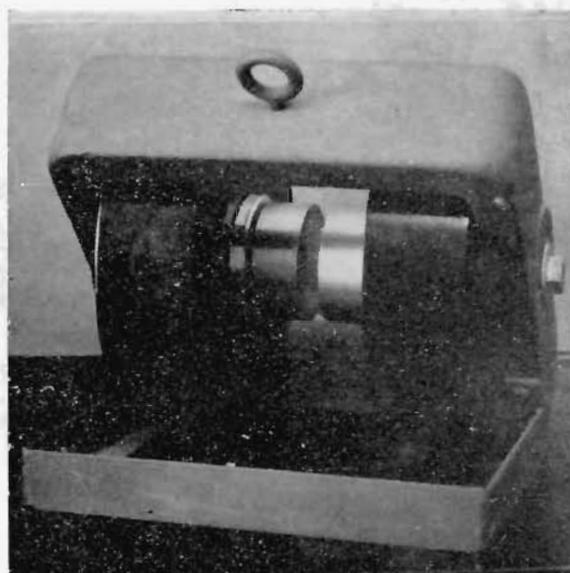


Fig. 23

Lámpara de rayos catódicos, utilizada como fuente de electrones.

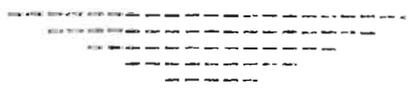
Esta lámpara va acoplada al circuito de la Cámara al vacío de la figura 21.

B I B L I O G R A F I A

- BALESCU, R. en "Statistical Mechanics of charged particles"
Interscience, N. Y. 1963
- BOHN, D. WEINSTEIN, M. en "The self-oscillations of a charged
particle".
Physical Review, Vol. 74, 12, 1789-1798, (1948)
- CLOETENS, W. J. M., en "On the equation of motion and form fac-
tors of charged particles in classical
electrodynamics".
Physica, 30, 1453-1458, (1964)
- " en "Over al de oplossingen van niet-lineaire vergel-
kingen".
Simon Stevin, 236-247, (1965)
- " en "Basis voor een nieuwe elektrodynamika en een nieu-
we relativiteit."
Mémoire de Licence, Univ. Libre de Brux. (1966)
- " en "De Schott-energie en het constante magnetische veld
in de elektrodynamika van Prigogine."
Faculté des Sciences, Univ. Libr. Brux. (1966)
- " en "Stability of charged matter".
Simon Stevin, 41 Jaargang, 260-268, (1968-69)
- " en "Notas manuscritas del curso de Mecánica"
Universidad de El Salvador, Dpto. Física, (1967)
- " en "An energy paradox in the Lorentz invariant electro-
dynamics."
Il Nuovo Cimento, S. X, Vol. 56-A, 403-408, (1968)
- " en "Damping-time of relativistic charged particle with
self-interaction in a constant homogeneous magnetic
field."
Simon Stevin, 42 Jaarg. 65-75, (1968)
- " en "A theoretical energy paradox in the Lorentz-Dirac-
Wheeler-Feynman-Rohrlich electrodynamics".
Aceptado por Il Nuovo Cimento, marzo de 1968
- " en "Run-away solutions in the Prigogine electrodynamics"
Aceptado por PHYSICA 43, 563-578, (1969)

- CLOETENS, W. J., en "The SPIN OF HESENBURG as a consequence of self-oscillations without singularities."
Presentado a PHYSICA, julio de 1969
- DIRAC, P.A.M. en "Classical theory of radiating electron."
Proc. Royal Society, London A-167, 148-168,
(1938)
- DOETSCH, G., en "Laplace Transformation"
Dover, New York, 1943
- ELIEZER, C. J. en "Classical Electrodynamics."
Review of Modern Physics, 19, 147-155, (1947)
- ERBER, Th., en "Fortschritte der Physik, 9, 384-390, (1961)
- HEITLER, W., en "Quantum Theory of Radiation."
Clarendon Press, Oxford, 1936
- HERGLOTZ, G., en Gött. Nachr, 357, (1903)
- HOBSON, E., en "Theory of functions of a real variable"
Dover Publications, New York, 3th. edition,
Vol. II, 1957
- IRVING, J., en "Non Physical solutions in classical finite electron theory"
Rev. of Mod. Phys. II, 1125-1131, (1950)
- LANDAU, E. y LIFCHITZ, E., en "Téorie classique des champs."
Editions de la Paix, Moscou, (1963)
- LEHMANN, H., en "Ann. Physics", 8, 109, (1950)
- LORENTZ, H. A., en "Colección de todos sus trabajos"
Vol. II, 281-343, (1962)
- " en "La Teoría de los Electrones."
Leipzig, 1909
- MARKOV, M., en "Journal Physics", U.R.S.S., 10, 159, (1946)

- Mc MANUS, H., en "Classical electrodynamics without singularities".
Proc. Royal Society, London, I, 323-336, (1948)
- NODVICK, J. S., en "Ann. Physics", 28, 225, (1964)
- PRIGOGINE, I. y HENIN, F., en "On a reformulation of the classical electron theory."
Academia Real de Bélgica, XXXV, 1780, (1965)
- PLASS, G. N. en "Classical electrodynamics equations of motion with radiative reaction."
Rev. of Mod. Physics, Vol. 33, 37-62, (1961)
- ROHRLICH, F., en "American Journal Physics" 28, 639, (1960)
- " en "Classical charged particles"
Adison-Wesley Publ. Corporation, (1965)
- SCHOTT, G. A., en "Philosophy Magazine", 29, 49, (1915)
- " en "Electromagnetic Radiations"
Cambridge University Press, 1912
- SHIH, Hsio-Chang, en "Classical theory of extended charges"
Tesis Doctoral en Física por el I. T. T. 1968
- " en "On the self-force of a charge distribution"
Tesis para el Master in Physics, I.T.T. 1962
- SOMMERFELD, A., en "Gott Nachr ", 2, 99, (1904)
- " en "Gott Nachr .", 5, 363, (1904)
- WILDERMUTH, K., en "Naturf", 10-A, 450, (1955)
- WHEELER, J.A. y FEYNMAN, R.P., en Trabajo en colaboración"
Rev. of Mod. Phys. 17, 157, (1945)



F E D E R R A T A S :

Pág. 35, después de la línea 11, falta lo siguiente:

"La aceleración es continua para todo " τ ",
mientras que la aceleración de la partícula neu-
tra es discontinua en: $\tau = 0$ y $\tau = \tau_1$.

Pág. 76, Falta la referencia de la nota al pie de la página
Esta referencia es:

GARLOUX, L. en Systemes Linéaires

Pág. 84, Falta completar la referencia al pie de la página:

CLOETENS, W. J. en Tesis Doctoral, Universidad Libre de
Bruzelas, 1967

" en Prix Empain, 1966

Pág. 99, Después de la fórmula A-D-5 debe añadirse:

Esta ecuación representa la solución exacta sin nin-
guna aproximación. Solamente aparece incluida la idea
por otra parte ya bien aceptada, del CUT -OFF.