UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

TRABAJO DE GRADUACION

TOPICOS EN ALGEBRAS NORMADAS

Angel Benítez Molina

SEPTIEMBRE 1983

San Salvador El Salvador Centro América

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR: : Dr. MIGUEL ANGEL PARADA

SECRETARIO : Lic. RICARDO ERNESTO CALDERON

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO: : Ing. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

SECRETARIO : Lic. MANUEL DE JESUS BAIRES

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO : Ing. CARLOS MAURICIO CANJURA

ASESOR: Lic. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

DEDICATORIA

A LA MEMORIA DE MI MADRE : MACLOVIA MOLINA DE BENITEZ

A MI PADRE : ABEL BENITEZ

A MI ESPOSA NORMA Y A MI HIJO RODRIGO

A MIS SUEGROS : JOSE ARISTIDES MENDOZA Y GLORIA DE MENDOZA

ANGEL BENITEZ MOLINA.

I N D I C E

PAGINA

INTRODUCCION

El presente trabajo ha sido elaborado en base a los guiones de clase de la asignatura "INTRODUCCION A LAS ALGEBRAS NORMADAS" que magistralmente impartiera el Lic. José Javier Rivera Lazo durante el ciclo I del Año Académico 1979/1980.

La mayoría de las proposiciones que aparecen en el Texto han sido probadas apoyándose estrictamente en las definiciones dadas en el mismo. En otras pruebas, fué necesario, aparte de utilizar la definición, introducir pequeños e ingeniosos artificios y apoyarse en proposiciones demostradas con anterioridad como suele suceder en Matemática.

No será difícil para el lector entender ésta obra si previamente posee conocimiento básico de Algebra, Análisis Matemático y Nociones de Topología.

Por lo extenso del Tema, he omitido la parte correspondiente a Espacios Vectoriales Normados y sus propiedades topológicas así como también lo concerniente a límites, funciones contínuas, sucesiones, series y espacios completos pues supongo que el lector ya está familiarizado con éstos tópicos. De no ser así, podrá consultar con mucho provecho el libro "Nociones de Espacios Normados" de Cotlar y Cignoli.

El texto consta de un solo Capítulo dividido en seis secciones debidamente ordenados y no lo considero como un simple Trabajo de Graduación sino como el comienzo de un estudio más profundo y riguroso sobre el Tema, hasta llegar a sus aplica-

ciones. Quedo profundamente agradecido con el Lic. Rivera Lazo que fué quien me motivó a escribir sobre el Tema y asesoró el mismo.

También agradezco infinitamente a la Sra. Carmen Elena de Chavarría quien con mucha eficiencia trabajó en la versión mecanográfica de la obra.

Angel Benítez Molina.

1. ALGEBRAS

Definición 1.1

Sea E un $\mathbb{C}$ - espacio vectorial. Se dice que "E es un álgebra sobre $\mathbb{C}$" si está definida en E una operación binaria

$$(x, y) \rightsquigarrow x.y$$

Tal que:

i) $(E, +, .)$ es un anillo

ii) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $x,y \in E$.

Notación

Un álgebra sobre $\mathbb{C}$ también es llamada $\mathbb{C}$ - álgebra o simplemente álgebra.

Definición 1.2

Un álgebra A es llamada

i) Conmutativa, si el anillo A es conmutativo o sea $xy = yx$, para todo $x,y \in A$.

ii) Unitaria, si el anillo A es unitario, o sea , existe $1 \in A$ tal que $x = x.1 = 1.x$, para todo $x \in E$.

Ejemplos:

1) $\mathbb{C}$ es una $\mathbb{C}$ - álgebra (unitaria, conmutativa)

2) Sea $X \neq \phi$ un conjunto y sea $A = \{f: X \longrightarrow \mathbb{C} / f$ es función$\}$

A es un álgebra con las operaciones:

. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

. $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

. $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

. Es unitaria: $1: X \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \rightsquigarrow (1,0)$

. $(1,0)$ identidad en los complejos.

. Es conmutativa porque $\mathbb{C}$ es conmutativo.

$0 : X \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \rightsquigarrow (0,0)$

3) Si X es un e.v.n. y

$A = \{f: X \longrightarrow \mathbb{C} / f \text{ es contínua}\}$

A es un álgebra con las mismas operaciones anteriores

Hay que probar que f.g es contínua si f y g lo son.

4) Si E es un espacio vectorial (sobre $\mathbb{C}$), entonces:

$L(E) = \{f: E \longrightarrow E / f \text{ es lineal}\}$

es un álgebra con las operaciones:

. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

. $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

. $(f.g)(x) = f(g(x))$ (composición).

L(E) es unitaria, ya que la unidad es la función identidad $i: E \longrightarrow E$

$x \rightsquigarrow i(x) = x$

L(E) es conmutativa $\Longleftrightarrow$ dim E = 1

Prueba

($\Longrightarrow$) Si E es de dim > 1, existe una base con al menos dos vectores e_κ , e_ℓ , con $\ell \neq \kappa$

Definamos f y g de la siguiente manera:

$$f: E \longrightarrow E$$

$$e_i \rightsquigarrow \begin{cases} o & \text{si } i \neq \kappa \\ e_\kappa & \text{si } i = \kappa \end{cases}$$

$$g: E \longrightarrow E$$

$$e_i \rightsquigarrow \begin{cases} o & \text{si } i \neq \kappa \\ e_\ell + e_\kappa & \text{si } i = \kappa \end{cases}$$

$(f_o g)(e_\kappa) = f(e_\ell + e_\kappa) = e_\kappa$

$(g_o f)(e_\kappa) = g(e_\kappa) = e_\kappa + e_\ell$

$\Rightarrow$ $f o g \neq g o f$

($\Leftarrow$) dim E = 1 $\Rightarrow$ existe m linealmente independiente tal que m es una base de E; es decir, $[m] = E$.

Sea $x = \alpha m$.

. Si f es una función lineal, existe un escalar β asociado a f tal que $f(x) = \beta x$ para todo x

$f(x) = f(\alpha m) = \alpha f(m) = \alpha \beta m = (\alpha\beta)m = \beta(\alpha m) = \beta x$

. Si g es una función lineal, existe ∂ tal que $g(x) = \partial x$ para todo x

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\partial x) = \alpha f(x) = (\alpha\beta)(x) = \alpha(\beta x) =$

$= g(f(x)) = (gof)(x)$

$\therefore$ L(E) es conmutativa.

5) Si E es un e.v.n., sea $A = \{f: E \longrightarrow E / f$ es contínua$\}$

A es un álgebra unitaria con las mismas operaciones anteriores.

6) Si E es un e.v.n., sea:

$L(E, E) = \{f: E \longrightarrow E / f$ es lineal y contínua$\}$

es un álgebra unitaria.

7) Si E es un espacio vectorial, sea

$A = \{f: E \longrightarrow E / f$ es lineal y $fg = gf$ para toda g lineal$\}$

A es un álgebra unitaria y conmutativa.

Proposición 1.3

Si A es un álgebra, entonces $A \times \mathbb{C}$ es un álgebra unitaria con las operaciones:

. $(x,\alpha) + (y,\beta) = (x + y, \alpha + \beta)$

. $\alpha(x,\beta) = (\alpha x,\alpha\beta)$

. $(x,\alpha).(y,\beta) = (xy + \alpha y + \beta x,\alpha\beta)$

Esta álgebra es unitaria y la denotaremos $\hat{A}$

(0, 1) es el elemento identidad y $\hat{A}$ se llama extensión de A

$\alpha((x,\beta)(y,\partial)) = \alpha(x, \beta)(y, \partial) = (x, \beta). \alpha(y, \partial)$

$(\alpha xy + \alpha\beta y + \alpha\partial x, \alpha\beta\partial) = (\alpha xy + \partial\alpha x + \alpha\beta y, \alpha\beta\partial) =$

$= (x\alpha y + \beta\alpha y + \alpha\partial x, \beta\alpha\partial)$.

Proposición 1.4

Si A y B son dos álgebras, entonces $A \times B$ es un álgebra con las operaciones:

. $(x, y) + (x^1, y^1) = (x + x^1, y + y^1)$

. $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

. $(x, y).(x^1, y^1) = (xx^1, yy^1)$

Prueba. Inmediata

SUBALGEBRAS

Definición 1.5

Si A es un álgebra y $B \subset A$, se dice que "B es una subálgebra de A" si:

i) B es un subespacio vectorial de A

ii) B es un subanillo de A

Ejemplo:

Si A es un álgebra, $C(A) = \{x \in A / xy = yx$, para todo $y \in A\}$ es una subálgebra, llamada centro de A.

Proposición 1.6

Sea $(B_i)_{i \in I}$ una familia de subálgebras de A sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\bigcap_{i \in I} B_i$ es también una subálgebra de A.

Prueba

1) $x, y \in \cap B_i \Rightarrow x, y \in B_i, \forall i \in I$
$\Rightarrow x-y \in B_i, \forall i \in I$
$\Rightarrow x-y \in \cap B_i$

2) $x, y \in \cap B_i \Rightarrow x, y \in B_i, \forall i \in I$
$\Rightarrow xy \in \cap B_i$

3) $K \in \mathbb{C}$, $x \in \bigcap B_i \implies K \in \mathbb{C}$, $x \in B_i$, $\forall\, i \in I$

$\implies Kx \in B_i\ \forall i \implies Kx \in \bigcap B_i$

(1) y (2) prueba que es sub-anillo.

(1) y (3) prueba que es sub-espacio vectorial.

<u>Proposición 1.7</u>

Si $M \subset A$, $\hat{M} = \{x \in A / xy = yx$, para todo $y \in M\}$ es una sub-álgebra de A (llamada conmutante de M).

<u>Prueba</u>

1) $x, z \in \hat{M} \implies \left.\begin{array}{l} xy = yx \\ zy = yz \end{array}\right\} \forall\, y \in M.$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$(x+z)y = y(x+z)$$

$\therefore\ x + z \in \hat{M}$

2) $x, z \in \hat{M} \implies \left\{\begin{array}{l} xy = yx \\ zy = yz \end{array}\right\} \forall\, y \in M.$

$$(x\ z)y = x(zy) = x(yz) = (xy)z = (yx)z = y(xz)$$

$$\therefore\ xz \in \hat{M}$$

3) $K \in \mathbb{C}$, $x \in \hat{M}$

$x \in \hat{M} \implies xy = yx$, $\forall\, y \in \hat{M}$

$K(xy) = K(yx)$, $\forall\, y \in \hat{M}$, $K \in \mathbb{C}$

$(Kx)y = y(Kx) \implies K\,x \in \hat{M}$

Proposición 1.8

Si A es un álgebra, $\{(x, o)/\ x \in A\}$ es una subálgebra de A.

Prueba

. $(x,o) + (y, o) = (x + y, o + o) = (x + y, o)$

. $\alpha(x, o) = (\alpha x, \alpha o) = (\alpha x, o)$

. $(x, o).(y, o) = (xy + oy + ox, o.o) = (xy, o)$

MORFISMOS DE ALGEBRAS.

Definición 1.9

Si A, B son dos álgebras y $f: A \longrightarrow B$ es una función, se dice que "f es un morfismo de álgebras" si:

1) $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall\ x,y \in A$

2) $f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{C},\ x \in A$

3) $f(xy) = f(x)\ f(y) \quad \forall\ x,y \in A.$

Definición 1.10

Un morfismo $f: A \longrightarrow A$ es llamado un endomorfismo de A

Un morfismo $f: A \longrightarrow B$ es llamado:

monomorfismo, si es inyectivo

isomorfismo, si es biyectivo.

Ejemplos

i) $f: A \longrightarrow A : x \rightsquigarrow x$ es un isomorfismo.

ii) $f: A \longrightarrow A : x \rightsquigarrow o$ es un morfismo

iii) $f: A \longrightarrow \hat{A} : x \rightsquigarrow (x, o)$ es un monomorfismo.

$$f(x + y) = (x + y, o) = (x, o) + (y, o) = f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x) = (\alpha x, o) = \alpha(x, o) = \alpha f(x)$$

$$f(xy) = (xy, o) = (x, o).(y, o) = f(x).f(y)$$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow (x, o) = (y, o) \Rightarrow x = y$$

iv) $f: A \times B \longrightarrow A : (x, y) \rightsquigarrow x$ es un morfismo

v) $f: A \times B \longrightarrow B : (x, y) \rightsquigarrow y$

vi) $f: A \longrightarrow A \times B : x \rightsquigarrow (x, o)$ es un monomorfismo

vii) $f: B \longrightarrow A \times B : x \rightsquigarrow (o, x)$

viii) $f: A \times B \longrightarrow B \times A : (x, y) \rightsquigarrow (y, x)$

Proposición 1.11

Si $f: A \longrightarrow B$ es un morfismo. Entonces:

1) Si $M \subset A$ es una subálgebra de A, entonces $f(M)$ es subálgebra de B.

Prueba

. $f(x) + f(y) = f(x + y)$ $\quad (x \in M, y \in M \Rightarrow x + y \in M)$

. $\alpha f(x) = f(\alpha x)$ $\quad (x \in M \Rightarrow \alpha x \in M)$

. $f(x).f(y) = f(xy)$ $\quad (x \in M, y \in M) \Rightarrow xy \in M$

2) Si $M \subset B$ es una subálgebra de B, entonces $f^{-1}(M)$ es subálgebra de A.

Prueba

. Sean $x, y \in f^{-1}(M) \Rightarrow f(x) \in M$ y $f(y) \in M$

$\Rightarrow f(x) + f(y) \in M$

$\Rightarrow f(x + y) \in M$

$\Rightarrow x + y \in f^{-1}(M)$

. $x \in f^{-1}(M)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

$x \in f^{-1}(M) \Rightarrow f(x) \in M \Rightarrow \alpha f(x) \in M \Rightarrow f(\alpha x) \in M \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha x \in f^{-1}(M)$

. $x, y \in f^{-1}(M) \Rightarrow f(x) \in M$, $f(y) \in M$

$\Rightarrow f(x).\, f(y) \in M$

$\Rightarrow f(xy) \in M \Rightarrow xy \in f^{-1}(M)$.

3) $\operatorname{Ker} f = \{x \in A / f(x) = o\}$ es subálgebra de A.

<u>Prueba</u>

. Sean $x, y \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = o$ y $f(y) = o$

$\Rightarrow f(x) + f(y) = o$

$\Rightarrow f(x + y) = o \Rightarrow x + y \in \operatorname{Ker} f$

. $x \in \operatorname{Ker} f$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

$x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = o \Rightarrow \alpha f(x) = o \Rightarrow f(\alpha x) = o$

$\Rightarrow \alpha x \in \operatorname{Ker} f$

. $x \in \operatorname{Ker} f$, $y \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = o$ y $f(y) = o$

$\Rightarrow f(x).f(y) = o$

$\Rightarrow f(xy) = o \Rightarrow xy \in \operatorname{Ker} f$

Proposición 1.12

La composición de dos morfismos es un morfismo.

Prueba

Sean $\phi : A \longrightarrow A'$ y $\psi : A' \longrightarrow A''$

$$A \xrightarrow{\phi} A' \xrightarrow{\psi} A''$$

$$x \rightsquigarrow \phi(x) \rightsquigarrow \psi(\phi(x)) = (\psi o \phi)(x)$$

. $(\psi o \phi)(x+y) = \psi(\phi(x+y)) = \psi(\phi(x) + \phi(y)) = \psi(\phi(x)) + \psi(\phi(y))$

$= (\psi o \phi)(x) + (\psi o \phi)(y)$

. $(\psi o \phi)(\alpha x) = \psi(\phi(\alpha x)) = \psi(\alpha \phi(x)) = \alpha\ \psi(\phi(x)) = \alpha(\psi o \phi)(x)$

. $(\psi o \phi)(xy) = \psi(\phi(xy) = \psi(\phi(x).\phi(y)) = \psi(\phi(x)).\ \psi(\phi(y))$

$= (\psi o \phi)(x).(\psi o \phi)(y).$

Proposición 1.13

Sean $f: A \longrightarrow \mathbb{C}$, $g: A \longrightarrow \mathbb{C}$ dos morfismos. Entonces:

$f = g \iff \text{Ker } f = \text{Ker } g.$

Prueba

($\Rightarrow$) Sea $x \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x) = o \Rightarrow g(x) = o \Rightarrow x \in \text{Ker } g.$

$x \in \text{Ker } g \Rightarrow g(x) = o \Rightarrow f(x) = o \Rightarrow x \in \text{Ker } f.$

$\Rightarrow \text{Ker } f = \text{ker } g.$

($\Leftarrow$) 1er. Caso: $f = o$

Si $x \in A$

$f = o \Rightarrow f(x) = o \Rightarrow x \in \text{Ker } f \Rightarrow x \in \text{Ker } g \Rightarrow g(x) = o$

$\Rightarrow g = o.$

<u>2do. Caso:</u> $f \neq o$

Sean $x, y \in A$ tal que $f(x) \neq o$, $f(y) \neq o$

$$f(f(x)y - f(y)x) = f(x)f(y) - f(y).f(x) = o$$

$\Rightarrow f(x)y - f(y)x \in \text{Ker } f.$

$\Rightarrow g(f(x)y - f(y)x) = o$

$\Rightarrow f(x)g(y) - f(y).g(x) = o$

$\Rightarrow f(x)g(y) = f(y).g(x) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(y)}{g(y)}$

Luego, el escalar $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es constante, para todo x tal que $f(x) \neq o$. Es decir que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$, $\alpha \neq o$ para todo x tal que $f(x) \neq o$.

Luego $f(x) = \alpha g(x)$, para todo x tal que $f(x) \neq o$.

Luego $f(x) = \alpha.g(x)$, para todo $x \in A$.

$f(x) = (\alpha g)(x)$, para todo x.

$f = \alpha g.$

Sea $x \in A$ tal que $f(x) \neq o$

$$f(xx) = f(x).f(x) = \alpha g(x).\alpha g(x)$$
$$= \alpha^2 g(x).g(x) = \alpha^2 g(x^2)$$

Para $f(xx) = f(x^2) = \alpha g(x^2)$

$$\alpha^2 g(x^2) = \alpha g(x^2)$$

Como $g(x^2) \neq o$ entonces $\alpha^2 = \alpha$ y como $\alpha \neq o$ entonces $\alpha = 1$.

Proposición 1.14

Si A es un álgebra unitaria, entonces existe un $\mathbb{C}$ - e.v.E tal que hay un isomorfismo entre A y una subálgebra de L(E).

Prueba

Sea E = A y definamos la función:

$$\Phi : A \longrightarrow L(A)$$

$$x \rightsquigarrow \Phi(x) : A \longrightarrow A$$

$$y \rightsquigarrow x.y$$

"$\Phi(x) \in L(A)$"

. $\Phi(x)(y+z) = x(y+z) = xy + xz = \Phi(x)(y) + \Phi(x)(z)$

. $\Phi(x)(\alpha y) = x(\alpha y) = \alpha(xy) = \alpha\Phi(x)(y)$.

"Φ es morfismo de álgebras".

. $\Phi(x+y) \overset{?}{=} \Phi(x) + \Phi(y)$.

$$\Phi(x+y)(z) = (x+y)z = xz + yz$$
$$= \Phi(x)(z) + \Phi(y)(z) = (\Phi(x)+\Phi(y))(z).$$

. $\Phi(\alpha x) \overset{?}{=} \alpha\Phi(x)$

$$\Phi(\alpha x)(z) = (\alpha x)(z) = \alpha(xz) = \alpha\Phi(x)(z) = (\alpha\Phi(x))(z).$$

. $\Phi(x.y) \overset{?}{=} \Phi(x).\Phi(y)$.

$$\Phi(xy)(z) = (xy)z = x(yz) = x(\Phi(y)(z)) =$$
$$= \Phi(x)(\Phi(y)(z)) = (\Phi(x).\Phi(y))(z).$$

Luego $\Phi(A)$ es una subálgebra de L (A).

"Φ es inyectivo"

$$\Phi(x) = \Phi(y) \Rightarrow \Phi(x).(1) = \Phi(y).(1)$$

$$\Rightarrow x.1 = y.1 \Rightarrow x = y.$$

Luego $\Phi : A \longrightarrow \Phi(A)$ es isomorfismo

$\Phi(A)$ es una subálgebra isomorfa con A.

Proposición 1.15

Si A es un álgebra entonces existe un $\mathbb{C}$ - e.v.E tal que hay un isomorfismo entre A y una subálgebra de L(E).

Prueba

Existe un $\mathbb{C}$ - e.v.E tal que hay un isomorfismo entre $\hat{A}$ y una subálgebra de L(E).

Hay un isomorfismo $\Phi : \hat{A} \longrightarrow B$, B una subálgebra de L(E).

Pero hay un monomorfismo $f: A \longrightarrow \hat{A}$ (Morfismo inyectivo)

$$x \rightsquigarrow (x,o)$$

$\Phi o f: A \longrightarrow B$

es un morfismo inyectivo

$$A \xrightarrow{f} \hat{A} \xrightarrow{\Phi} B$$

es un morfismo puesto que la composición de morfismos es un morfismo.

Si $h = \Phi o f$, $h : A \longrightarrow h(A)$ es isomorfismo (proposición anterior).

Proposición 1.16

Sean $f: A \longrightarrow B$, $g: A \longrightarrow B$ dos morfismos de álgebras.

Entonces:

1) $K = \{x \in A / f(x) = g(x)\}$ es una subálgebra de A.

2) Existe un morfismo $h : K \longrightarrow A$ tal que $f.h = g.h$.

3) Si M es una subálgebra y $m : M \longrightarrow A$ es un morfismo tal que $fm = gm$, entonces existe un morfismo único $\hat{m} : M \longrightarrow K$ tal que $h\hat{m} = m$.

Prueba.

1) K es subálgebra

. Sean $x, y \in K$

$f(x+y) = f(x) + f(y) = g(x) + g(y) = g(x+y)$

Luego $x+y \in K$.

. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in K$.

$f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha g(x) = g(\alpha x)$

Luego $\alpha x \in K$.

. Sean $x, y \in K$.

$f(xy) = f(x).f(y) = g(x).g(y) = g(xy)$.

Luego $xy \in K$.

2) $h : K \longrightarrow A : x \rightsquigarrow x$ es morfismo.

$$K \longrightarrow A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \qquad \begin{array}{l} f: A \longrightarrow B \\ g: A \longrightarrow B \end{array}$$

morfismos de álgebras

$(foh)(x) = f(h(x)) = f(x) = g(x) = g(h(x)) = (goh)(x).$

Entonces $foh = goh.$

3) $$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ & M \arrow[ul, "\hat{m}"] \arrow[u, "m"'] & \end{tikzcd}$$ $fm = gm.$

"Unicidad"

Sean $p : M \longrightarrow K$, $q : M \longrightarrow K$ morfismos tal que

$m = hp$, $m = hq$

Si $x \in M$

$$\left.\begin{aligned} m(x) &= (hop)(x) = h(p(x)) = p(x) \\ m(x) &= (hoq)(x) = h(q(x)) = q(x) \end{aligned}\right\} \text{ por ser h identidad.}$$

$p(x) = q(x) = m(x)$

EXISTENCIA

$\hat{m} : M \longrightarrow K$

$x \rightsquigarrow m(x)$

$m(x) \in K : f(m(x)) = (fom)(x) = (gom)(x) = g(m(x))$

EXISTENCIA: $\hat{m} : M \longrightarrow K : x \rightsquigarrow m(x).$

$m(x) \in K : f(m(x)) = (fom)(x) = (gom)(x) = g(m(x))$

$(ho\hat{m})(x) = h(\hat{m}(x)) = h(m(x)) = m(x)$

$\therefore\ ho\hat{m} = m.$

2. IDEALES

Definición 2.1

Sea A un álgebra y $B \subset A$. Se dice que "B es un ideal a la izquierda" si B es subespacio vectorial de A.

$$xy \in B, \text{ para todo } x \in A,\ y \in B.$$

Definición 2.2

Sea A un álgebra y $B \subset A$. Se dice que "B es un ideal a la derecha" si B es un subespacio vectorial de A.

$$xy \in B, \text{ para todo } x \in B,\ y \in A.$$

Definición 2.3

"B es un ideal" si es ideal a la izquierda y también ideal a la derecha.

Ejemplos:

1) Si $f: \quad A \longrightarrow B$ es un morfismo, Ker f es un ideal de A.

   . Ker f es una subálgebra, luego es un subespacio vectorial.

   . Sea $x \in A$, $y \in \text{Ker } f$

   $f(xy) = f(x).f(y) = f(x).o = o$

   $f(yx) = f(y).f(x) = o.f(x) = o$

   $xy \in \text{Ker } f$, $yx \in \text{Ker } f$.

2) Si A es un álgebra, A es un ideal de $\hat{A}$

$A \subset \hat{A}$

Definamos $f: A \longrightarrow \hat{A}$

$$x \rightsquigarrow (x, o)$$

f es un morfismo inyectivo

. $f(x+y) = (x+y,o) = (x,o) + (y,o) = f(x) + f(y)$

. $f(\alpha x) = (\alpha x, o) = \alpha(x,o) = \alpha f(x)$.

. $f(xy) = (xy, o) = (x,o)(y,o) = f(x).f(y)$

$f(x) = f(y) \Rightarrow (x,o) = (y,o) \Rightarrow x = y$.

$$A \cong f(A)$$

A es subespacio vectorial de $\hat{A}$ por ser subálgebra.

Si $(x,\alpha) \in \hat{A}$ y $(y,o) \in A$

$(x,\alpha)(y,o) = (xy + \alpha y, o) \in A$

$(y,o)(x,\alpha) = (yx + \alpha y, o) \in A$

3) Si A es un álgebra y $x \in A$

$I = \{z \in A \; / \; z = yx, \text{ para algún } y \in A\}$

es un ideal a la izquierda

$J = \{z \in A \; / \; z = xy, \text{ para algún } y \in A\}$

es un ideal a la derecha.

"I es un subespacio vectorial de A"

. Sean $z, z^1 \in I$, $z = yx$, $z^1 = y^1x$

$z + z^1 = yx + y^1x = (y + y^1)x$

. Sea $z \in I$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$z = yx$

$\alpha z = \alpha(yx) = \alpha y.x$

Es estable para la suma y producto por un escalar.

. Sea $z \in I$, $y^1 \in A$

$$z = yx \Longrightarrow y^1 z = y^1(yx) = (y^1 y)x$$

. J es ideal a la derecha.

Proposición 2.4

Si $I \subset A$ es un ideal, entonces $\frac{A}{I}$ es un álgebra con las operaciones:

. $(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$

. $\alpha(x + I) = \alpha x + I$ $\qquad$ $x \in A$: $x+I = \{x+y/y \in I\}$

. $(x + I).(y + I) = xy + I$

Prueba

Definamos una operación binaria así:

• $\frac{A}{I} \times \frac{A}{I} \longrightarrow \frac{A}{I}$: $((x+I),(y+I)) \rightsquigarrow (x+I).(y+I) = (xy+I)$

• $(\frac{A}{I}, +, .)$ es un anillo

• $(\frac{A}{I}, +)$ es un grupo conmutativo.

i) Sean $(x+I)$, $(y+I) \in \frac{A}{I}$; $(x+I)+(y+I) = (x+y+I) \in \frac{A}{I}$

ii) Sean $(x+I)$, $(y+I)$, $(z+I) \in \frac{A}{I}$; $(x+I)+((y+I)+(z+I))=$

$$= (x+I) + (y+z+I) = x + (y+z) + I = (x+y)+z+I =$$

$$= (x+y) + I + (z+I) = ((x+I)+(y+I)) + (z+I).$$

iii) existencia del elemento neutro: $(x+I)+(y+I) = (x+I)$ si $y = o$ y por consiguiente, el elemento neutro de $\frac{A}{I}$ es I.

iv) existencia del elemento inverso: $(x+I)+(y+I) = I$ si $y = -x$ y por consiguiente, el elemento inverso de $(x+I)$ es $(-x+I)$.

De la misma forma se prueba que $(\frac{A}{I}, .)$ es un semigrupo.

Ahora, $\alpha((x+I)(y+I)) = (\alpha(x+I))(y+I)) = (\alpha x+I)(y+I) =$

$$= \alpha xy+I = \alpha(xy+I) = \alpha((x+I)(y+I))$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $(x+I), (y+I) \in \frac{A}{I}$

Proposición 2.5

Si I es un ideal de A, entonces I es el núcleo de un morfismo.

Prueba

Definamos $f: A \longrightarrow \frac{A}{I}$

$$x \rightsquigarrow x + I$$

Es trivial que f es un morfismo

. $\operatorname{Ker} f = \{x \in A / f(x) = I\}$

$= \{x \in A / x+I = I\}$

$= \{x \in A / x \in I\} = I$

Definición 2.6

Un ideal I de A es llamado "propio" si $I \neq A$.

Ejemplo:

A es un ideal propio de $\hat{A}$ puesto que $A \neq \hat{A}$

Proposición 2.7

Si $I \subset A$ es un ideal y A es unitaria, entonces

I es propio $\Leftrightarrow 1 \notin I$

Prueba

($\Leftarrow$) $1 \notin I \Rightarrow I$ es propio (trivial).

($\Rightarrow$) $1 \in I \Rightarrow I = A$ $(x \in A \Rightarrow x = x.1 \in A)$

Proposición 2.8

Si A es un álgebra unitaria y $x \in C(A)$, entonces

x^{-1} existe $\Leftrightarrow x \notin I$, para todo ideal propio I.

Prueba

($\Rightarrow$) Sea I un ideal tal que $x \in I$

. $x^{-1}. x \in I$

. $1 \in I$

. $I = A$.

($\Leftarrow$) Supongamos que x no es inversible.

$I = \{Z \in A / Z = xy$, para algún $y \in A\}$es un ideal propio tal que $x \in I$.

. $Z \in I$, $m \in A$

. $Z = xy$, $mZ = m(xy) = (mx)y = (xm)y = x(my)$

. $Zm = (xy)m = x(ym)$

. $x = x.1$

. I es propio ya que $1 \notin I$ (porque x no es inversible)

Definición 2.9

Si $I \subset A$ es un ideal. Se dice que "I es un ideal maximal" si:

. $I \neq A$

. Los únicos ideales que contienen a I son I y A.

Proposición 2.10

Si A es un álgebra unitaria e $I \subset A$ es un ideal propio, entonces existe un ideal M maximal tal que $I \subset M$.

Prueba.

Sea $\Omega = \{J \subset A / J$ es un ideal propio e $I \subset J\}$

$\Omega \neq \phi$ porque $I \in \Omega$.

. Consideremos Ω ordenado por inclusión

. Sea $\Omega_0 \subset \Omega$, $\Omega_0 \neq \phi$ totalmente ordenado.

. Sea $T = \bigcup_{J \in \Omega_0} J$

"T es un elemento de Ω"

a) T es un ideal

Sean $x, y \in T$; existe J_1 y J_2 en Ω_0 tal que $x \in J_1$ e $y \in J_2$.

Como Ω_0 es totalmente ordenado, entonces $J_1 \subset J_2$ o $J_2 \subset J_1$.

Si $J_1 \subset J_2$; $x + y \in J_2$

$J_2 \subset J_1$; $x + y \in J_1$

Luego, $x + y \in T$.

. Sea $x \in T$, $\alpha \in \mathbb{C}$; existe $J \in \Omega_0$ tal que $x \in J$; luego $\alpha x \in J$.

Entonces $\alpha x \in T$.

. Sea $x \in A$, $y \in T$; existe $J \in \Omega_0$ tal que $y \in J$, entonces $xy \in J$ y $yx \in J$ $\therefore$ $xy, yx \in T$.

b) "T es propio" porque $1 \notin J$, para todo $J \in \Omega$

c) $I \subset T$ porque $I \subset J$, para todo J de Ω.

"T es una cota superior de Ω_0"

$J \subset T$ para todo $J \in \Omega_0$, por definición de T. Luego, según el Lema de Zorn,existe $M \in \Omega$, M maximal.

"M es un ideal maximal de A".

. Sea H un ideal de A tal que $M \subset H$.

. Si $H \neq A$ entonces $H \in \Omega$ $\qquad I \subset M \subset M \Rightarrow I \subset H$

. Como M es maximal de Ω entonces $M = H$.

<u>Proposición 2.11</u>

Sea A un álgebra unitaria y sea $x \in C(A)$. Entonces

x es inversible $\iff x \notin I$ para todo ideal maximal I.

Prueba

. x es inversible $\Rightarrow x \notin I$, para todo ideal I propio (proposición 2.8) $\Rightarrow x \notin I$, para todo ideal I maximal.

. $x \notin I$ para todo ideal maximal $I \Rightarrow x \notin I$, para todo ideal propio I (porque todo ideal propio está incluído en un maximal) $\Rightarrow x$ es inversible (proposición 2.8)

Definición 2.12

Sea $I \subset A$ un ideal a la izquierda; se dice que "I es modular" si existe $a \in A$ tal que $x - xa \in I$, para todo $x \in A$.

Definición 2.13

Sea $I \subset A$ un ideal a la derecha; se dice que "I es modular" si existe $a \in A$ tal que $x - ax \in I$, para todo $x \in A$.

Definición 2.14

Sea $I \subset A$ un ideal; se dice que "I es modular" si existe $a \in A$ tal que $x - ax \in I$ y $x - xa \in I$ para todo $x \in A$. "a" es llamada una identidad módulo I.

Ejemplos:

1) A es un ideal modular.

. o es una identidad módulo A.

. todo elemento de A es identidad módulo A.

2) Si A es un álgebra unitaria, entonces todo ideal de A es modular.

. $x - 1.x = x - x = o$

. $x - x.1 = x - x = o$

1 es una identidad módulo I, para todo I.

3) Si $f: A \longrightarrow \mathbb{C}$ es un morfismo suryectivo, entonces Ker f es un ideal modular de A.

Como f es sobreyectivo, existe $a \in A$ tal que $f(a) = 1$.

Si $x \in A$: $f(x-xa) = f(x) - f(xa) = f(x) - f(x).f(a)$

$$= f(x) - f(x) = 1 = f(x) - f(x) = o$$

$$x - xa \in \text{Ker } f.$$

De igual manera se prueba que $x - ax \in \text{Ker } f$.

4) Si $a \in A$ entonces:

$I = \{x - xa/x \in A\}$es un ideal a la izquierda modular.

Sea $z \in A$, $z(x - xa) = zx - (zx)a \in I$

$x - xa \in I$ y sea $y - ya \in I$;

$(x - xa) + (y - ya) = (x + y) - (x + y)a \in I$.

$\alpha(x - xa) = \alpha x - (\alpha x)a \in I$.

I es modular siendo "a" la identidad módulo I. ("a" es identidad a la izquierda).

Proposición 2.15

Sean I, J ideales de A, $I \subset J$, I modular. Entonces J es un ideal modular.

Prueba

Si a es una identidad módulo I, entonces a es una identidad módulo J.

$x - xa \in I \Rightarrow x - xa \in J$.

Proposición 2.16

Si I es un ideal modular y una identidad módulo I pertenece a I, entonces I = A.

Prueba

. Sea $a \in A$ una identidad módulo I tal que $a \in I$

. Si $x \in A$, $xa \in I$ (porque I es ideal y $a \in I$)

. Si $x \in A$, $x - xa \in I$ (porque a es identidad módulo I)

. Si $x \in A$, $x = (x - xa) + xa \in I$

$\therefore$ A = I.

Proposición 2.17

Sean $I \subset A$ un ideal, a y b en A tal que

$x - ax \in I$ y $x - xb \in I$ para todo $x \in I$. Entonces I es un ideal modular.

Prueba

Se prueba que a (ó b) es una identidad módulo I.

$o \in I$

$a - a^2 \in I$

$b - b^2 \in I$

$$\left.\begin{array}{l} a - ab \in I \\ b - ab \in I \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow a - b \in I \\ \Rightarrow a - b = m \in I \Rightarrow a = m+b \quad \text{con } m \in I. \end{array}$$

$$x - xa = x - x(m + b) = x - xm - xb$$
$$= -xm + (x - xb) \in I.$$

Luego, "a" es identidad módulo I.

. Se tiene que $x - xb \in I$

Hay que probar que $x - bx \in I$

Como $b = a - m$, $x - (a-m)x = x - ax + mx$, con $m \in I$.

$x - ax \in I$ y $mx \in I$

$\therefore$ $x - ax + mx \in I$.

Luego, "b" es identidad módulo I.

<u>Proposición 2.18</u>

Si I y J son dos ideales modulares de A entonces $I \cap J$ es un ideal modular.

<u>Prueba</u>

Si "a" es una identidad módulo I y "b" es una identidad módulo J. Hallar una identidad "c" módulo $I \cap J$.

c debe cumplir que para todo $x \in A$.

$x - cx \in I \cap J$.

$x - xc \in I \cap J$.

. $x - ax \in I$

. $x - bx \in J$

$(x - ax)(x - bx) = x^2 - xbx - ax^2 + axbx$

$(x - ax)x + (ax - x)bx \in I \cap J.$

Probemos que $b + a - ab$ es una identidad módulo $I \cap J$.

$$x - (b+a - ab)x = x - bx - ax + abx =$$

$$= (x - ax) - (b - ab)x$$

$$= \underbrace{(x - ax)}_{\in I} - \underbrace{(bx - abx)}_{\in I} \in I$$

Ahora:

$$x - (b+a - ab)x = \underbrace{(x - bx)}_{\in J} - a\underbrace{(x - bx)}_{\in J} \in J$$

$$\therefore \quad x - (b+a - ab)x \in I \cap J$$

De igual manera se prueba que $x - x(b+a - ab) \in I \cap J$.

<u>Proposición 2.19</u>

Sea $I \subset A$ un ideal. Entonces:

I es modular $\Longleftrightarrow \frac{A}{I}$ es un álgebra unitaria.

<u>Prueba</u>

($\Rightarrow$) Sea $a \in A$ tal que para todo $x \in A$: $x - ax \in I$ y

$x - xa \in I$.

Sea $y \in A$: $(y+I)(a+I) = ya + I$

Pero $y - ya \in I$; luego, $y + I = ya + I$

Por tanto, $(y + I)(a + I) = y + I$

De modo semejante : $(a+I)(y+I) = y + I$.

Luego, $a + I$ es identidad de $\frac{A}{I}$

($\Leftarrow$) Sea $a \in A$ tal que $a + I$ sea identidad de $\frac{A}{I}$

Entonces, para todo $x \in A$

$(x+I)(a+I) = x + I$ y $(a+I)(x+I) = x + I$.

Es decir, $xa + I = x + I$ y $ax + I = x + I$

Luego, $x - xa \in I$ y $x - ax \in I$

$\therefore$ I es modular

<u>Proposición 2.20</u>

Si $I \subset \hat{A}$ es un ideal tal que $I \not\subset A$, entonces $I \cap A$ es un ideal modular de A.

<u>Prueba</u>

$I \cap A$ es un ideal de A.

$I \cap A \subset A$ (la intersección de ideales es un ideal).

Ahora veamos que $I \cap A$ es modular.

. Como $I \not\subset A$, existen $(x,\alpha) \in I$, $\alpha \neq 0$

$\alpha^{-1}(x,\alpha) \in I$; es decir $(\alpha^{-1}x,1) \in I$ (definición de producto por escalar)

. Sea $a = -\alpha^{-1}x$

. Sea $z \in A$

$z - az = 1.z - az$ (1 es la identidad de $\hat{A}$)

$= (1-a)z \in I$ (I es un ideal)

$1 - a = (o,1) - (a,o) = (-a,1) = (\alpha^{-1}x,1) \in I.$

$z - za = z.1 - za = z(1-a) \in I \cap A.$

Proposición 2.21

Si $I \cap A$ es un ideal modular de A y "a" es una identidad módulo I, entonces para todo $x \in \hat{A}$:

$xa \in I \iff ax \in I.$

Prueba

"$xa \in I \Rightarrow ax \in I$"

$ax - (ax)a \in I$

$ax - (ax)a = y,\ y \in I$

$ax = y + (ax)a,\ y \in I.$

$ax = y + a(xa) \in I$ $(xa \in I)$

$xa \in I \Rightarrow a(xa) \in I.$

Proposición 2.22

Si $I \subset A$ es un ideal modular, entonces existe un único ideal $T \subset \hat{A}$ tal que $T \not\subset A$ y $T \cap A = I.$

Prueba

Como I es ideal modular, sea "b" una identidad módulo I.

Sea $T = \{x \in \hat{A} / xb \in I\}$

$$xa = x(a,o) \qquad a \in \hat{A}$$

y probemos que T es un ideal de $\hat{A}$

. $x,y \in T \Rightarrow xb \in I$ e $yb \in I$

$\Rightarrow xb + yb \in I$

$\Rightarrow (x+y)b \in I \Rightarrow x+y \in T.$

. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in T$.

$x \in T \Rightarrow xb \in I \Rightarrow \alpha(xb) \in I$

$\Rightarrow (\alpha x)b \in I \Rightarrow \alpha x \in T.$

. Sea $x \in T$, $y \in \hat{A}$

$x \in T \Rightarrow xb \in I$ hay que ver que $(xy)b \in I$.

$(xy)b - b(xy)b = z \in I$ porque b es una identidad módulo I

$(xy)b = z + b\,(xy)b$

$(xy)b = z + (bx)(yb)$

$bx - bxb \in I$, $bx - bxb = z$, $z \in I \therefore bx = z + bxb \in I$

$x \in T \Rightarrow xb \in I \Rightarrow bx \in I \Rightarrow (bx)(yb) \in I$

$(xy)b \in I \Rightarrow xy \in T$

$(yx)b - b(yx)b \in I$

$(yx)b - b(yx)b = z$, $z \in I$.

$(yx)b = z + b(yx)b = z + (by)(xb) \in I$

$(yx)b \in I \Rightarrow yx \in T.$

"$T \not\subset A$"

$b - bb \in I$

$(o,1)b - bb \in I$

$((o,1) - b))b \in I$

$(o,1) - b \in T$

Pero $(o,1) - b = (-b,1)$

Como $(-b,1) \notin A$ $\quad (1 \neq o)$ entonces $T \not\subset A$.

"$T \cap A = I$"

"$\subset$" Sea $x \in T \cap A$

$x \in T \Rightarrow xb \in I$

$x - xb \in I$

$xb + (x-xb) \in I \Rightarrow x \in I$

"$\supset$" Sea $x \in I$

$I \subset A \Rightarrow x \in A$

Ahora veamos que $x \in T$

$x - xb \in I$

$x - xb = y,\ y \in I$

$xb = x - y \in I$

$xb \in I \Rightarrow x \in T$

$\therefore\ T \cap A = I.$

"T es único"

. Sean T y J dos ideales de $\hat{A}$ tales que

$T \not\subset A$ y $T \cap A = I$,

$J \not\subset A$ y $J \cap A = I \subset J$.

. Sean $(m,\alpha) \in T;\ (m,\alpha) \notin A$

$(n,\beta) \in J;\ (n,\beta) \notin A$

$\alpha^{-1}(m,\alpha) = (\alpha^{-1}m,\ 1) \in T$

$\beta^{-1}(n,\beta) = (\beta^{-1}n,\ 1) \in J$

$m^1 = \alpha^{-1}m \qquad (m^1,1) \in T$

$n^1 = \beta^{-1}n \qquad (n^1,1) \in J$

$m^1\,(n^1,1) \in J \cap A = I$, es decir,

$(m^1n^1 + m^1,\ o) \in I$

$(m^1,1)n^1 \in T \cap A = I$, es decir,

$(m^1n^1 + n^1,\ o) \in I$

$(m^1n^1 + m^1,\ o) - (m^1n^1 + n^1,\ o) \in I$, es decir,

$(m^1 - n^1,\ o) \in I$

"$T \subset J$"

. Sea $(x,\alpha) \in T$

. $\alpha(n^1,1) \in J$, es decir, $(\alpha n^1,\alpha) \in J$

. $\alpha(m^1 - n^1,\ o) \in I$, es decir $(\alpha m^1 - \alpha n^1,\ o) \in I$

$m^1\,(x,\alpha) \in T \cap A = I$, es decir

$(m^1x + \alpha m^1,\ o) \in I$

. $(m^1,\ 1)x \in T \cap A = I$, es decir,

$(m^1x + x,\ o) \in I$

$(\alpha n^1,\alpha) + (\alpha m^1 - \alpha n^1,\ o) - (m^1x + \alpha m^1, o) + (m^1x + x,\ o) \in J$

$(x,\alpha) \in J$

Luego $T \subset J$

De igual manera se prueba que $J \subset T$.

Definición 2.23

Sea A un álgebra y E un $\mathbb{C}$ espacio vectorial. Llamaremos "representación de A en E" a todo morfismo de álgebras:

$f : A \longrightarrow L(E)$.

<u>Ejemplos</u>:

1) $f : A \longrightarrow L(A) : x \rightsquigarrow f(x) : A \longrightarrow A$

$$y \rightsquigarrow xy.$$

"f(x) es lineal"

. $f(x)(y+z) = x(y+z) = xy + xz = f(x)(y) + f(x)(z)$

. $f(x)(\alpha y) = x(\alpha y) = (\alpha x)y = \alpha(xy) = \alpha f(x)(y)$

Ahora veamos que f es un morfismo.

. $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(x+y)(z) = (x+y)z = xz + yz = f(x)(z) + f(y)(z) =$

$= (f(x) + f(y))(z)$.

. $f(\alpha x)(z) = \alpha xz = \alpha f(x)(z) = (\alpha f(x))(z)$

. $f(xy) = f(x).f(y)$

$f(xy)(z) = (xy)z = x(yz) = x\ f(y)(z)$

$= f(x)(f(y)(z)) = (f(x).f(y))(z)$.

2) Si $I \subset A$ es un ideal,

$f : A \longrightarrow L(I) : x \rightsquigarrow f(x)$

$x \rightsquigarrow f(x) : I \longrightarrow I$

$$y \rightsquigarrow xy$$

3) Si I es un ideal

$f: \ A \longrightarrow L\left(\frac{A}{I}\right)$

$x \rightsquigarrow f(x) : \frac{A}{I} \longrightarrow \frac{A}{I}$

$$y+I \rightsquigarrow xy+I$$

Definición 2.24

Si $f : A \longrightarrow L(E)$ es una representación de A en E, se dice que "f es estrictamente irreducible" si:

. $f \neq o$

. Si $M \subset E$ es un subespacio tal que $f(x)(M) \subset M$ para todo $x \in A$, entonces $M = \{o\}$ ó $M = E$

Proposición 2.25

Sea $f : A \longrightarrow L(E)$ una representación estrictamente irreducible y sea $b \in E$, $b \neq o$. Entonces:

1) $E = \{f(x)(b)/x \in A\}$

Prueba

Sea $T = \{x \in E/f(y)(x) = o$, para todo $y \in A\}$

"T es un subespacio de E"

. Sean $x,y \in T \Rightarrow f(z)(x) = o$ y $f(z)(y) = o$, para todo $z \in A$

$\Rightarrow f(z)(x) + f(z)(y) = o$, para todo $z \in A$

$\Rightarrow f(z)(x + y) = o$

$\Rightarrow x + y \in T$.

. Si $x \in T$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$x \in T \Rightarrow f(z)(x) = o$, para todo $z \in A$

$\Rightarrow \alpha.f(z)(x) = o$, para todo $z \in A$

$\Rightarrow f(z)(\alpha x) = o$, para todo $z \in A$

$\Rightarrow \alpha x \in T$.

"$y \in A \Rightarrow f(y)(T) \subset T$"

Sea $x \in T$; $f(y)(x) = o$

$f(z)(f(y)(x)) = f(z)(o) = o$

$f(y)(T) \subset T, \forall y$

$f(y)(x), x \in T$

$z \in A \Rightarrow f(z)(f(y)(x)) = o$

$T = E$ ó $T = \{o\}$.

$f \neq o \Rightarrow$ existe $y \in A$ tal que $f(y) \neq o$

Existe $x \in E$ tal que $f(y)(x) \neq o$

$x \notin T \Rightarrow T \neq E$

$\therefore T = \{o\}$

"$M = \{f(x)(b)/x \in A\}$ es un subespacio de E". $M \neq o$

$M \neq \{o\}$ porque si $M = \{o\}$ entonces b sería un elemento de

. $f(x)(b) + f(y)(b) = (f(x) + f(y))(b) = f(x+y)(b)$

. $\alpha . f(x)(b) = f(\alpha x)(b) \in M$

"$f(x)(M) \subset M$, para todo $x \in A$"

. Sea $x \in A$, $y \in M$

. $y = f(z)(b)$, $z \in A$

. $f(x)(y) = f(x)(f(z)(b)) = (f(x).f(z))(b) = f(xz)(b) \in M$.

. Luego, como $M \neq \{o\}$, se sigue que $M = E$

2) La aplicación $g : A \longrightarrow E$

$x \rightsquigarrow f(x)(b)$

es lineal y sobreyectiva.

. $g(x+y) = f(x+y)(b) = (f(x) + f(y))(b)$

$= f(x)(b) + f(y)(b) = g(x) + g(y)$

. $g(\alpha x) = f(\alpha x)(b) = (\alpha . f(x))(b) = \alpha f(x)(b) = \alpha g(x)$

. g es sobre por proposición 2.25-1

3) $\text{Ker } f = \{x \in A / xy \in \text{Ker } g;$ para todo $y \in A\}$

"$\subset$"

. Sea $x \in \text{Ker } f$

. $x \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x) = o \Rightarrow f(x)(z) = o$ para todo $z \in E$.

$\Rightarrow f(x)(f(y)(b)) = o$, para todo $y \in A$

$\Rightarrow (f(x).f(y))(b) = o$, para todo $y \in A$

$\Rightarrow f(xy)(b) = o$, para todo $y \in A$

$\Rightarrow g(xy) = o \Rightarrow xy \in \text{Ker } g$.

"$\supset$"

Sea $x \in A$ tal que $xy \in \text{Ker } g$, para todo $y \in A$

Probemos entonces que $f(x) = o$

. Sea $z \in E$;

. Sea $y \in A$ tal que $z = f(y)(b)$

. $f(x)(z) = f(x)(f(y)(b)) = (f(x).f(y))(b) = f(xy)(b) =$

$= g(xy) = o$

4) Si A es un álgebra conmutativa, $\text{Ker } f = \text{Ker } g$

. Sea $x \in \text{Ker } f$

. $x \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x) = o \Rightarrow f(x)(b) = o \Rightarrow g(x)=o \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \text{Ker } g$

. Sea $x \in \text{Ker } g$

. $x \in \text{Ker } g \Rightarrow g(x) = o \Rightarrow f(x)(b) = o$

. Sea $z \in E$; z es de la forma $z = f(y)(b)$, $y \in A$

$$f(x)(z) = f(x)(f(y)(b)) = (f(x).f(y))(b) = f(xy)(b) =$$
$$= f(yx)(b) = (f(y).f(x))(b) = f(y)(f(x)(b)) =$$
$$= f(y)(o) = o$$

Luego, $f(x) = o$

Por tanto, $x \in \text{Ker } f$.

5) Ker g es un ideal a la izquierda, maximal y modular.

"Ker g es ideal a la izquierda"

. Ker g es subespacio (todo núcleo de una función lineal es un subespacio)

. Sea $x \in \text{Ker } g$ e $y \in A$.

$$g(yx) = f(yx)(b) = (f(y).f(x))(b) = f(y)(f(x)(b)) =$$
$$= f(y)(g(x)) = f(y)(o) = o$$

Luego $yx \in \text{Ker } g$

Por tanto, es ideal a la izquierda.

"Ker g es maximal"

. Sea $I \subset A$ un ideal de A a la izquierda tal que $\text{Ker } g \subset I$.

. Como g es lineal, g(I) es subespacio de E.

. Sea $x \in A$ y sea $y \in g(I)$

$y \in g(I) \Rightarrow y = g(z)$, $z \in I$

$$f(x)(y) = f(x)(g(z)) = f(x)(f(z)(b)) = (f(x).f(z))(b) =$$
$$= f(xz)(b) = g(xz) \in g(I).$$

$f(x)(g(I)) \subset g(I)$, para todo $x \in A$

Luego, $g(I) = \{o\}$ ó $g(I) = E$

. Si $g(I) = \{o\}$, entonces:

$g(I) = \{o\} \Rightarrow I \subset \text{Ker } g \Rightarrow I = \text{Ker } g.$

. Si $g(I) = E$ entonces $I = A$.

$x \in A \Rightarrow g(x) \in E \Rightarrow g(x) \in g(I) \Rightarrow g(x) = g(y),\ y \in I.$

$\Rightarrow g(x) - g(y) = o \Rightarrow g(x-y) = o \Rightarrow x-y \in \text{Ker } g \Rightarrow$

$\Rightarrow x - y \in I \Rightarrow x - y = z,\ z \in I$

$\Rightarrow x = z + y$

$\Rightarrow x \in I$

Luego, $\text{Ker } g \subset I \Rightarrow I = \text{Ker } g$ o $I = A$.

Por tanto, es maximal.

"Ker g es modular"

. Hay que encontrar un $m \in A$ tal que $x - xm \in \text{Ker } g$, para todo $x \in A$.

. Como g es sobre, sea $m \in A$ tal que $g(m) = b$.

. Sea $x \in A$: $g(x-xm) = f(x-xm)(b)$

$$= (f(x)-f(xm))(b) = f(x)(b)-f(xm)(b) =$$
$$= f(x)(b) - (f(x).f(m))(b) =$$
$$= f(x)(b) - f(x)(f(m))(b)$$
$$= f(x)(b)-f(x)(g(m))=f(x)(b)-f(x)(b)=o$$

Definición 2.26

Un ideal $I \subset A$ es llamado primitivo, si I es el núcleo de alguna transformación estrictamente irreducible

$f: A \longrightarrow L(E)$ para algún E.

Proposición 2.27

Si $I \subset A$ es un ideal, las condiciones que siguen son equivalentes:

1) I es primitivo

2) Existe $J \subset A$, J ideal a la izquierda, maximal y modular tal que $I = \{x \in A / xy \in J$, para todo $y \in A\}$.

Prueba

(1) $\Rightarrow$ (2)

Como I es primitivo, existe un espacio vectorial E y un morfismo $f : A \longrightarrow L(E)$ tal que f es estrictamente irreducible y $\operatorname{Ker} f = I$.

. Sea $b \in E$, $b \neq o$

. La función $g: A \longrightarrow E : x \rightsquigarrow f(x)(b)$ es lineal y sobre.

. $\operatorname{Ker} g$ es un ideal a la izquierda maximal y modular y

. $\operatorname{Ker} f = \{x \in A / xy \in J$, para todo $y \in A\}$ con $J = \operatorname{Ker} g$.

$I = \operatorname{Ker} f$.

(la proposición anterior nos proporciona el J buscado).

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sea $E = \frac{A}{J}$ el espacio vectorial cociente

Sea $f : A \longrightarrow L(E)$

$x \rightsquigarrow f(x) : E \longrightarrow E$

$y+J \rightsquigarrow xy+J$

"f es un morfismo de álgebras" (trivial).

"$f \neq o$"

Como J es maximal, existe $x \in A$ tal que $x \notin J$.

Como J es modular, existe $b \in A$ tal que $y - yb \in J$, para todo $y \in A$.

$f(x)(b+J) = xb + J$

$x - xb \in J$

$x - xb = z$, $z \in J$

$x = z + xb$, $z \in J$

Como $x \notin J$, $xb \notin J$

$xb \notin J \Rightarrow xb + J \neq J \Rightarrow f(x)(b+J) \neq J \Rightarrow f(x) \neq o$

$f(x) \neq o \Rightarrow f \neq o$

. Sea $M \subset E$ tal que $f(x)\,(M) \subset M$, para todo $x \in A$.

. Hay que probar que $M = \{J\}$ ó $M = \frac{A}{J}$ donde J es el cero del cociente.

"$T = \{x \in A/x + J \in M\}$ es un ideal a la izquierda"

. Si $x,y \in T \Rightarrow x + J \in M$ y $y + J \in M$

$\Rightarrow (x+J) + (y+J) \in M \Rightarrow (x+y)+J \in M \Rightarrow x+y \in T$

. Sea $x \in T$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$x \in T \Rightarrow x+J \in M \Rightarrow \alpha(x+J) \in M \Rightarrow \alpha x+J \in M \Rightarrow \alpha x \in T$

. Sea $x \in T$, $y \in A$

$x \in T \Rightarrow x+J \in M$

$\Rightarrow f(y)(x+J) \in M \Rightarrow yx+J \in M \Rightarrow yx \in T.$

"$I \subset J$"

$x - xm \in J$

$x - xm = z$, $z \in J$

$x = xm + z.$

"$I \subset T$"

$I \subset J$; $x \in I \Rightarrow x \in J \Rightarrow x+J = J \Rightarrow x+J \in M \Rightarrow x \in T.$

. J maximal $\Rightarrow T = J$ o $T = A.$

. Si $T = J$; $M = \{J\}$

$x+J \in M \Rightarrow x \in T \Rightarrow x \in J \Rightarrow x+J = J$

. Si $T = A$; $M = \frac{A}{J}$

Luego, f es estrictamente irreducible.

"$I = \operatorname{Ker} f$"

$x \in I \Leftrightarrow xy \in I$, para todo $y \in A.$

$\Leftrightarrow xy + J = J$, para todo $y \in A.$

$\Leftrightarrow f(x)(y+J) = J$, para todo $y \in A.$

$\Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} f.$

Proposición 2.28

Si $I \subset A$ es un ideal maximal y modular, entonces I es primitivo.

Prueba

. Como I es maximal, $I \neq A$.

. Como I es modular, existe $b \in A$ tal que $x - bx \in I$ y $x - xb \in I$, para todo $x \in A$.

$b \notin I$

Si $b \in I$ y $x \in A$.

$x - bx \in I$

$x - bx = y$, $y \in I$, $x = y + bx \Rightarrow A = I$ (no puede ser).

. Sea $\Omega = \{T \subset A/T$ es un ideal a la izquierda, $I \subset T$, $b \notin T\}$

. $\Omega \neq \phi$ porque $I \in \Omega$.

. Consideremos Ω ordenado por inclusión

. Aplicando el Lema de Zorn, existe en Ω un elemento maximal. Sea $J \in \Omega$, J maximal.

. J es un ideal a la izquierda maximal.

. J es modular porque $I \subset J$ $(x - bx \in J, \forall x)$.

. Sea $T = \{x \in A/xy \in J$, para todo $y \in A\}$.

"T es un ideal"

. Si $x,y \in T \Rightarrow xz$ e $yz \in J$, para todo $z \in A$.

$\Rightarrow xz + yz \in J$, para todo $z \in A$.

$\Rightarrow (x+y)z \in J$, para todo $z \in A$.

$\Rightarrow x + y \in T$.

. $x \in T$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$xz \in T \Rightarrow \alpha(xz) \in J \Rightarrow \alpha x . z \in J$. Luego $\alpha x \in T$

. Sea $x \in T$, $y \in A$.

. Sea $z \in A$: $(xy)z = x(yz) \in J \Rightarrow xy \in T$.

$(yx)z = y(xz) \in J$, porque J es ideal a la izquierda

$\Rightarrow yx \in T$.

"$I \subset T$"

$x \in I \Rightarrow xy \in I$ para todo $y \in A \Rightarrow xy \in J$ para todo $y \in A$

$\Rightarrow x \in T$.

T es un ideal primitivo por proposición 2.27.

$T \neq A$

$b \notin T$

$\therefore \quad I = T$

Proposición 2.29

Si A es un álgebra abeliana, entonces todo ideal primitivo de A es maximal y modular.

Prueba

. Sea $I \subset A$, I un ideal primitivo.

. $I \neq A$, porque $I = \operatorname{Ker} f$, con $f: A \longrightarrow L(E)$, $f \neq o$

. Existe $J \subset A$, J ideal a la izquierda, maximal y modular tal que:

$I = \{x \in A / xy \in J$, para todo $y \in A\}$

Como A es abeliano, J es ideal

Probemos que $I = J$

Sea $x \in J$; si $y \in A$ entonces $xy \in J$ (porque J es ideal)

Entonces $x \in I$. Luego $J \subset I$

J maximal $\Rightarrow I = A$ o $I = J$

$I \neq A \Rightarrow I = J$.

3. ALGEBRAS NORMADAS

Definición 3.1

Una función $\|\ \|: A \longrightarrow R^{+} : x \rightsquigarrow \|x\|$ es llamada una "norma sobre A" si cumple las condiciones siguientes:

1) $\|o\| = o$
2) $x \neq o \Rightarrow \|x\| > o$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y$
4) $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\| \qquad \forall \alpha, \forall x.$

Definición 3.2

Sea A un álgebra; se dice que""A es un álgebra normada" si existe en A una norma tal que:

$$\|xy\| \leq \|x\|\ \|y\| \quad , \forall x, \forall y \text{ en } A.$$

Si A es unitaria, se pide que $\|1\| = 1$.

Ejemplos

a) $\mathbb{C}$ es un álgebra normada

$$|xy| = |x||y| \quad , |1| = 1.$$

b) Si E es un espacio vectorial normado, entonces L(E) es un álgebra normada.

$L(E) = \{f: E \longrightarrow E / f \text{ es lineal y contínua}\}.$

$\|f\| = \inf \{\lambda > o / \|f(x)\| \leq \lambda \|x\|, \forall x, x \in E\}$

$\|f(x)\| \leq \|f\|\ \|x\|.$

$||(f\circ g)(x)||=||f(g(x))||\leq||f||\ ||g(x)||\leq||f||\ ||g||\ ||x||$

$||fg||=\inf\{\lambda\geq o/||(fg)(x)||\leq\lambda||x||\ \forall x,\ x\in E\}$

$||fg||\leq||f||\ ||g||$

$||1_E||=1 \quad 1=\inf\{\lambda\geq o/||1_E(x)||\leq\lambda||x||,\ \forall x\}$

$||1_E(x)||=||x||\leq 1||x|| \Longrightarrow ||1_E||\leq 1.$

Ahora:

$||x||\leq||1_E(x)||$

$1||x||\leq||1_E||\ ||x|| \Longrightarrow 1\leq||1_E||$

$\therefore\ ||1_E||=1.$

c) Si $X\neq\phi$ es un conjunto, entonces:

$A=\{f: X \longrightarrow \mathbb{C}/f$ es una función acotada$\}$ con la norma

$||f||=\text{Sup}|f(x)| \quad x\in X$

$f\in A$ si existe $\lambda>o$ tal que $|f(x)|<\lambda,\ \forall x,\ x\in X.$

$||f||=\text{Sup}\ \{|f(x)|/x\in X\}$

$||fg||\overset{?}{\leq}||f||\ ||g||$.

Si $x\in X$, $|(fg)(x)|=|f(x).g(x)|=|f(x)|.|g(x)|\leq$

$\leq||f||\ ||g||$

$||fg||=\text{Sup}\ \{|(fg)(x)|/x\in X\}$

$||fg||\leq||f||\ ||g||$

$1: X \longrightarrow \mathbb{C}: x \rightsquigarrow 1$

$|1(x)|=|1|=1$

Sup $\{|1(x)|/x \in X\} = 1.$

Proposición 3.3

Si A es un álgebra normada, entonces $\hat{A}$ es un álgebra normada.

Prueba

$$||(x,\alpha)|| = ||x|| + |\alpha|$$

$$||(o,1)|| = ||o|| + |1| = o + 1 = 1$$

$$\begin{aligned}||(x,\alpha)(y,\beta)|| &= ||(xy+\alpha y+\beta x,\alpha\beta|| = ||xy+\alpha y+\beta x|| + |\alpha\beta| \\ &\le ||xy|| + ||\alpha y|| + ||\beta x|| + |\alpha|\ |\beta| \le \\ &\le ||x||\ ||y|| + |\alpha|\ ||y|| + |\beta|\ ||x|| + |\alpha|\ |\beta| \\ &\le (||x|| + |\alpha|)(||y|| + |\beta|) = ||(x,\alpha)||.||(y,\beta)||\end{aligned}$$

Proposición 3.4

La función f: A×A ——> A : (x,y) ∿∿∿> xy es contínua.

Prueba

Esta proposición es equivalente a probar la proposición siguiente.

Proposición 3.5

Si $(x_n)_{n\geq 1}$ y $(y_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones convergentes en A, entonces $(x_ny_n)_{n\,\geq\,1}$ es también convergente y

$$\lim_{n\to\infty} (x_ny_n) = \lim_{n\to\infty} x_n . \lim_{n\to\infty} y_n .$$

Prueba

Sea $\varepsilon > o$. A probar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$||xy-x_ny_n||< \varepsilon, \forall n > N.$

$xy - x_ny_n = (x-x_n)y + x_n(y-y_n)$

$$||xy-x_ny_n||=||(x-x_n)y+x_n(y-y_n)||\leq \underset{<\frac{\varepsilon}{2}}{||x-x_n||\ ||y||}+\underset{<\frac{\varepsilon}{2}}{||x_n||\,||y-y_n||}<$$

$$< ||x-x_n||\ (||y||+1) + ||x_n||\ ||y-y_n||$$

. Sea N_1 tal que $||x_n-x|| <1$, $\forall n > N_1$

$n>N_1 \Rightarrow ||x_n|| < 1 + ||x|| \qquad ||x||\leq||x-y||+||y||$

. Sea N_2 tal que $||x-x_n||< \dfrac{\varepsilon}{2(||y||+1)}$, $\forall n > N_2$

. Sea N_3 tal que $||y-y_n||< \dfrac{\varepsilon}{2(1+||x||)}$, $\forall n > N_3$

. Sea $N = \text{máx}\ (N_1, N_2, N_3)$

$n >N \Rightarrow ||xy-x_ny_n|| < \varepsilon.$

Proposición 3.6

Si $(x_n)_{n\geq1}$ es una sucesión de Cauchy en A, entonces existe una subsucesión $(y_n)_{n\geq1}$ de $(x_n)_{n\geq1}$ tal que para todo n , $||y_{n+1} - y_n|| < \dfrac{1}{2^n}$

Prueba

Sea $N_1 \in N$ tal que $||x_n - x_m|| < \frac{1}{2}$, $\forall m \geq n \geq N_1$ (por ser de Cauchy).

Sea $n_1 \geq N_1$ y sea $y_1 = x_{n_1}$

Sea $N_2 \in N$ tal que $||x_n - x_m|| < \frac{1}{2^2}$, $\forall m \geq n \geq N_2$.

Sea n_2 tal que $n_2 \geq N_1$ y $n_2 \geq N_2$

$$y_2 = x_{n_2}$$

Para cada m tendremos N_m tal que $||x_n - x_r|| < \frac{1}{2^n}$,

$\forall n \geq r \geq N_m$ y n_m tal que $n_m \geq N_i$, $\forall m \geq i \geq 1$.

$$y_m = x_{n_m}$$

Para cada m : $||y_{m+1} - y_m|| < \frac{1}{2^m}$

$$y_{m+1} = x_{n_{m+1}} \qquad n_{m+1} \geq N_m$$

$$y_m = x_{n_m} \qquad n_m \geq N_m$$

Lema

Si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en A y si $(y_n)_{n\geq 1}$ es una subsucesión convergente de $(x_n)_{n\geq 1}$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Prueba

Sea $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, y sea $\varepsilon>0$; $||x_n-y||=||x_n-y_n+y_n-y|| \leq$

$\leq ||x_n-y_n||+||y_n-y||$

Existe $N_1 \in N$ tal que $||x_n-x_m|| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq m \geq N_1$ (por ser de Cauchy).

Y existe $N_2 \in N$ tal que $||y_n-y|| < \varepsilon/2$, $\forall n > N_2$ (por ser $y = \lim_{n\to\infty} y_n$)

Luego, si $N_3 = \max (N_1, N_2)$: $||x_n-y||< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \forall n > N_3$.

Proposición 3.7

Sea $I \subset A$ un ideal cerrado, entonces $\frac{A}{I}$ es un álgebra normada.

Prueba

Sea $x \in A$ y sea $||x+I|| = \inf \{||x+y||/y \in I\}$

1) $||I||=||0+I||= \inf \{||0+y||/y \in I\} = 0$ (porque $0 \in I$)

2) Sea $x \in A$ tal que $||x+I|| = 0$;

Sea $\varepsilon > 0$; sea $y \in I$ tal que $||x+y||< \varepsilon$ (y existe por definición de ínfimo)

Luego, $-y \in B(x,\varepsilon)$, $-y \in I$

Así, $B(x,\varepsilon) \cap I \neq \phi$; $x \in \overline{I}$, I cerrado $\Rightarrow x\in I \Rightarrow x+I = I$.

3) Sean x, y $\in$ A y probemos que

$||(x+I)+(y+I)||\leq||x+I||+||y+I||$

Sea $\varepsilon > o$ y sean $z, z^1 \in I$ tal que $||x+z||<||x+I|| + \frac{\varepsilon}{2}$,

$||y+z^1||<||y+I|| + \varepsilon/2$.

$||(x+y)+(z+z^1)||=||(x+z)+(y+z^1)||\leq||x+z||+||y+z^1|| <$

$<||x+I||+||y+I||+ \varepsilon$

$||(x+y)+I||\leq||(x+y)+(z+z^1)||<||x+I||+||y+I|| + \varepsilon$

$||(x+y)+I||\leq||x+I||+||y+I||$.

4) $||\alpha(x+I)||= |\alpha| \ ||x+I|| \quad \alpha \neq o$

$||x+I||\leq||x + \frac{1}{\alpha} y||$, $\forall y \in I$

$|\alpha| \ ||x+I||\leq|\alpha| \ ||x + \frac{1}{\alpha} y$, $\forall y \in I$

$|\alpha| \ ||x+I||\leq||\alpha x+y||$, $\forall y \in I$

$\Rightarrow |\alpha| \ ||x+I|| \leq ||\alpha x+I||$

$||\alpha x+I||\leq||\alpha x+\alpha y||$, $\forall y \in I$

$||\alpha x+I||\leq|\alpha| \ ||x+y||$, $\forall y \in I$

$\frac{||\alpha x+I||}{|\alpha|} \leq ||x+y||$, $\forall y \in I$.

$\frac{||\alpha x+I||}{|\alpha|} \leq ||x+I||$

$||\alpha x+I||\leq|\alpha| \ ||x+I||$

Luego, $||\alpha x+I||=|\alpha| \ ||x+I||$

$||\alpha(x+I)||=|\alpha| \ ||x+I||$

5) $||(x+I)(y+I)||\leq||x+I|| \ ||y+I||$

$||(x+I)(y+I)||\leq||(x+z).(y+z)|| \ \forall z \in I$

$$\leq ||x+z||\ ||y+z|| \quad \forall z \in I$$
$$\leq ||x+I||.||y+I||$$

Proposición 3.8

Sea $I \subset A$ un ideal cerrado. Si A es completa entonces $\frac{A}{I}$ es completa.

Prueba

Sea $(x_n + I)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $\frac{A}{I}$

Encontraremos entonces una subsucesión convergente.

Sea $(y_n + I)_{n\geq 1}$ una subsucesión de $(x_n + I)_{n\geq 1}$ tal que $||y_{n+1} + I - y_n + I|| < \frac{1}{2^n}$ $\forall n\geq 1$ (por ser de Cauchy), es decir, se tiene $||(y_{n+1} - y_n)+I|| < \frac{1}{2^n}$ $\forall n$.

Para cada n, sea $z_n \in I$ tal que $||y_{n+1} - y_n + z_n|| < \frac{1}{2^n}$ (por definición de ínfimo)

Sea $t_n = y_{n+1} - y_n + z_n$

$||t_n|| < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ||t_n||$ existe porque existe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

Luego, $\left(\sum_{i=1}^{n} ||t_i||\right)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

$\therefore$ $\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en A.

Se tiene entonces, por definición de sucesión de Cauchy:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} t_i - \sum_{i=1}^{m} t_i\right\| = \left\|\sum_{i=m+1}^{n} t_i\right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|t_i\|$$

$$n,m : \left\|\sum_{i=1}^{n} t_i - \sum_{i=1}^{m} t_i\right\| = \left\|\sum_{i=m+1}^{n} t_i\right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|t_i\| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} \|t_i\| - \sum_{i=1}^{m} \|t_i\|\right| < \xi, \ n,m>N$$

Como A es completo, existe $t \in A$ tal que $t = \sum_{n=1}^{\infty} t_n$

" $t = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \Longrightarrow t+I = \sum_{n=1}^{\infty} (t_n+I)$ "

Sea $\xi > o$; existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|t - \sum_{i=1}^{n} t_i\right\|_{n\geq 1} < \xi$, $\forall n > N$.

$$n > N \Longrightarrow \left\|(t+I) - \sum_{i=1}^{n} (t_i+I)\right\| = \left\|t+I - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) + I\right\| =$$

$$= \left\|\left(t - \sum_{i=1}^{n} t_i\right) + I\right\| \leq \left\|t - \sum_{i=1}^{n} t_i\right\| < \xi$$

$$\Longrightarrow t+I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (t_i+I) \Longrightarrow t+I = \sum_{n=1}^{\infty} (t_n+I)$$

. Para cada $n > 1$: $y_n - y_1 = \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - y_i)$

$$(y_n - y_1) + I = (\sum(y_{i+1}-y_i) + I = \sum_{i=1}^{n-1} ((y_{i+1}-y_i)+I) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (t_i+I) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (y_n-y_1)+I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} (t_i+I) = t+I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (y_n+I) = (t+y_1) + I$$

Luego, la sucesión $(x_n+I)_{n\geq 1}$ es convergente en $\frac{A}{I}$.

Definición 3.9

Un álgebra normada A es llamada "Algebra de Banach" si toda sucesión de Cauchy en A es convergente en A.

Ejemplos:

1) $\mathbb{C}$ es un álgebra de Banach.

2) Si E es un espacio vectorial normado completo, entonces: $L(E,E) = \{f: E \longrightarrow E / f \text{ es lineal y contínua}\}$ es un álgebra de Banach.

4. ALGEBRAS INVOLUTIVAS

Definición 4.1

Sea A un álgebra y $f: A \longrightarrow A$ una función. Se dice que "f es una involución en A" si se cumplen las condiciones siguientes:

1) $f(\alpha x+\beta y) = \bar{\alpha}f(x)+ \bar{\beta}f(y)$, para todo $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $x,y \in A$.
2) $f^2(x) = x$, para todo $x \in A$.
3) $f(xy) = f(y).f(x)$.

Definición 4.2

El álgebra A es llamada "involutiva" si existe en A una involución.

Notación

Para una involución $f: A \longrightarrow A$, si $x \in A$, $f(x)$ se denota por x^*, o sea que tendremos:

$$(\alpha x+\beta y)^* = \bar{\alpha}x^* + \bar{\beta}y^*$$

$$x^{**} = x$$

$$(xy)^* = y^*x^*$$

Ejemplo

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longrightarrow x^* = \bar{x}$$

En lo que sigue, A denota un álgebra involutiva.

Proposición 4.3

$\hat{A}$ es un álgebra con la involución

$$(x,\alpha)^* = (x^*,\bar{\alpha})$$

<u>Prueba</u>

$*:\hat{A} \longrightarrow \hat{A}$

$(x,\alpha) \longrightarrow (x,\alpha)^* = (x^*,\bar{\alpha})$

- $(\beta(x,\alpha)+ \partial(y,\varepsilon))^* = ((\beta x,\beta\alpha)+(\partial y,\partial\varepsilon))^*$

  $= ((\beta x+\partial y,\beta\alpha+\partial\varepsilon))^*$

  $= ((\beta x+\partial y)^* , \overline{\beta\alpha+\partial\varepsilon})$

  $= (\bar{\beta}x^*+\bar{\partial}y^* , \overline{\beta\alpha} + \overline{\partial\varepsilon})$

  $= (\bar{\beta}x^*,\overline{\beta\alpha}) + (\bar{\partial}y^*,\overline{\partial\varepsilon})$

  $= \bar{\beta} (x^*, \bar{\alpha}) + \bar{\partial} (y^*, \bar{\varepsilon})$

  $= \bar{\beta} (x,\alpha)^* + \bar{\partial} (y,\varepsilon)^*$

- $(x,\alpha)^{**} = (x,\alpha)$

  $(x,\alpha)^{**} = (x^*,\bar{\alpha})^* = (x^{**}, \bar{\bar{\alpha}}) = (x,\alpha)$

- $[(x,\alpha)(y,\beta)]^* = (y,\beta)^*(x,\alpha)^*$

  $[(x,\alpha)(y,\beta)]^* = (xy+\beta x+\alpha y,\alpha\beta)^* = ((xy)^*+\bar{\beta}x^*+\bar{\alpha}y^*,\bar{\alpha}\,\bar{\beta}))=$

  $=(y^*x^*+\bar{\alpha}y^*+\bar{\beta}x^*,\bar{\beta}\,\bar{\alpha})$

  $=(y^*, \bar{\beta})(x^*, \bar{\alpha}) = (y,\beta)^* (x,\alpha)^*$

<u>Definición 4.4</u>

Sea $x \in A$

x^* es llamado "adjunto de x"

x es llamado "autoadjunto" si $x = x^*$

x es llamado "normal" si $xx^* = x^*x$.

Proposición 4.5

Sea $x \in A$. Entonces

1) xx^* es autoadjunto.

Prueba

$xx^* = x^{**}x^* = (xx^*)^*$

2) $x + x^*$ es autoadjunto.

Prueba

$x + x^* = (x^{**}+x^*) = (x^*+x)^* = (x+x^*)^*$

3) Si x es autoadjunto, x es normal.

Prueba

Como x es autoadjunto, entonces

$xx^* = xx = x^*x$;

luego, x es normal.

4) Si A es unitaria y x^{-1} existe, entonces $(x^*)^{-1}$ existe y $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.

Prueba

Si A es unitaria y existe x^{-1}, entonces $x^{-1}x = 1$.

$(xx^{-1})^* = 1^* = 1.1^*$

$\Rightarrow (x^{-1})^* x^* = 1^*$

$\Rightarrow (x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$ para que su producto sea 1^*

Definición 4.6

Si $B \subset A$, denotamos por B^* al conjunto $B^* = \{x \in A / x^* \in B\}$.

Proposición 4.7

Si $B \subset A$ es un ideal, entonces B^* es un ideal.

Prueba

. Sean $x, y \in B^*$, entonces $x^*, y^* \in B$. Pero B es un ideal de A, luego, $x^* + y^* \in B \Rightarrow x+y \in B^*$

. Sean $x \in B^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$$x \in B^* \Rightarrow x^* \in B \Rightarrow \bar{\alpha}x^* \in B \Rightarrow \alpha x \in B^*$$

. Sea $x \in B^*$, $y \in A$

$x \in B^* \Rightarrow x^* \in B \Rightarrow x^*y^* \in B \Rightarrow xy \in B^*$

De la misma manera se prueba que $yx \in B^*$

Proposición 4.8

Si $B \subset A$ es un ideal maximal, entonces B^* es un ideal maximal.

Prueba

i) "$B^* \neq A$"

$B \neq A \Rightarrow$ existe $x \in A$, $x \notin B$

$x \notin B \Rightarrow x^* \notin B^*$

ii) Sea I un ideal tal que $B^* \subset I$

"$B \subset I^*$"

$x \in B \Rightarrow x^* \in B^* \Rightarrow x^* \in I \Rightarrow x^{**} \in I^* \Rightarrow x \in I^*$

$B = I^*$ o $I^* = A$

Si $B = I^*$

$x \in I \Rightarrow x^* \in I^* \Rightarrow x^* \in B$

$\Rightarrow x \in B^*$

$I \subset B^*$

Si $I^* = A$

Sea $x \in A$, $x^* \in A$, $x^* \in I^*$, $x \in I$.

Definición 4.9

Sea $B \subset A$ una subálgebra. Se dice que "B es una subálgebra simétrica" si para todo $x \in B$, $x^* \in B$.

Definición 4.10

Si $I \subset A$ es un ideal, se dice que "I es un ideal simétrico" si $x \in I$ implica $x^* \in I$.

Definición 4.11

Si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo entre álgebras involutivas, se dice que "f es un morfismo simétrico" si $f(x^*) = f(x)^*$, para todo $x \in A$.

Proposición 4.12

Si $I \subset A$ es un ideal simétrico, entonces

$\frac{A}{I}$ es un álgebra involutiva.

Prueba

$\frac{A}{I}$ es un álgebra (ya probado). Definamos una involución en $\frac{A}{I}$, así:

. $(\alpha(x+I)+\beta(y+I))^* = \bar{\alpha}(x+I)^* + \bar{\beta}(y+I)^*$

. $(x+I)^{**} = (x^*+I)^* = (x^{**}+I) = (x+I)$

. $((x+I)(y+I))^* = (y+I)^*(x+I)^*$

Proposición 4.13

$f: A \longrightarrow \frac{A}{I} : x \longrightarrow x+I$ es un morfismo simétrico.

Prueba

. $f(x+y) = (x+y)+I = (x+I)+(y+I) = f(x) + f(y)$

. $f(\alpha x) = \alpha x+I = \alpha(x+I) = \alpha f(x)$

. $f(xy) = xy + I = (x+I)(y+I) = f(x).f(y)$

. $f(x^*) = (x^*+I) = (x+I)^* = f(x)^*$

Proposición 4.14

Si $f: A \longrightarrow B$ es un morfismo simétrico, entonces, Ker f es un ideal simétrico.

Prueba

Ker f es un ideal (ya probado)

. A probar que si $x \in$ Ker f entonces $x^* \in$ Ker f

. Si $x \in$ Ker f luego, $f(x) = o$

. Pero f es un morfismo simétrico; luego, $f(x^*) = f(x)^* =$

$= o^* \Longrightarrow x^* \in \operatorname{Ker} f$

5. ESPECTROS

Definición 5.1

Sea A un álgebra unitaria y sea $x \in A$. Llamaremos "espectro 1 de x en A" al conjunto $S_{p1}(x,A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / x - \lambda.1 \text{ no es inversible}\}$

Ejemplos

a) Si $n > 0$, sea A el álgebra de las matrices cuadradas de orden n sobre $\mathbb{C}$, es decir, $A = M_n(\mathbb{C})$. Si $x \in A$ entonces $S_{p1}(x,A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \det(x - \lambda.1) = 0\}$.

b) Si $X \neq \phi$ es un conjunto, sea A el álgebra de las funciones de X en $\mathbb{C}$, es decir, $A = \{f: X \longrightarrow \mathbb{C} / f \text{ es un función}\}$

Si $f \in A$, entonces $S_{p1}(f, A) = f(X)$

$f,g \in A$, $(fg)(x) = f(x).g(x)$.

$$1 : X \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \rightsquigarrow 1$$

Si $f \in A$, f es inversible $\Longleftrightarrow f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$

$f.g = 1$

$f(x).g(x) = 1(x) = 1 \qquad g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, $f(x) \neq 0$.

Sea $f \in A$

$$\begin{aligned} S_{p1}(f,A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} / f - \lambda.1 \text{ no es inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} / \text{existe } x \in X \text{ tal que } (f-\lambda.1)(x) = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} / \text{existe } x \in X \text{ tal que } f(x) = \lambda\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} / \lambda \in f(X)\} = f(X) \end{aligned}$$

c) Si X es un espacio vectorial normado, sea A el álgebra:

$A = \{f: X \longrightarrow \mathbb{C} / f \text{ es acotada}\}$. Si $f \in A$, entonces

$S_{p1}(f,A) = \overline{f(X)}$

. f es acotada si existe $\lambda > o$ tal que $|f(x)| < \lambda$ para todo $x \in X$.

$1 : X \longrightarrow \mathbb{C} : x \rightsquigarrow 1$

$f \in A$ es inversible $\Longleftrightarrow \forall x : \dfrac{1}{|f(x)|} < \lambda \;, \lambda > o$

$\Longleftrightarrow |f(x)| > \lambda$, para un $\lambda > o$, $\forall x \in X$.

Sea $f \in A$

$\lambda \notin S_{p1}(f,A) \Longleftrightarrow (f - \lambda.1)$ es inversible.

$\Longleftrightarrow$ existe $\delta > o$ tal que $|(f-\lambda.1)(x)| > \delta \;\; \forall x$.

$\Longleftrightarrow$ existe $\lambda > o$ tal que $|f(x)-\lambda| > \delta \;\; \forall x$.

$\Longleftrightarrow f(x) \notin B(\lambda,\delta)$, $\forall x$, para algún $\delta > o$

$\Longleftrightarrow B(\lambda,\delta) \cap f(X) = \phi$, para álgún $\delta > o$

$\Longleftrightarrow \lambda \notin \overline{f(X)}$

Luego, $S_{p1}(f,A) = \overline{f(X)}$

<u>Proposición 5.2</u>

Si A es un álgebra unitaria, entonces

$$S_{p1}(o,A) = \begin{cases} \phi, & \text{si } A = \{o\} \\ \{o\}, & \text{si } A \neq \{o\} \end{cases}$$

Prueba

$A = \{o\}$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$: $0 - \lambda.o = o-o = o$ es inversible

$\Rightarrow \lambda \notin S_{p1}(o,A) \Rightarrow S_{p1}(o,A) = \phi$

Si $A \neq \{o\}$, $1 \neq o$

$o - o.1 = o-o = o$ no es inversible $\Rightarrow o \in S_{p1}(o,A)$

Si $\lambda \neq o$: $o- \lambda.1= - \lambda.1$ es inversible

$$- \lambda.1 \; . \; (- \frac{1}{\lambda} \; . \; 1) = - \lambda.(- \frac{1}{\lambda}).1.1 = 1.1 = 1 \Rightarrow \lambda \notin S_{p1}(o,A)$$

Proposición 5.3

Si A es un álgebra unitaria, entonces:

Si $x \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$: $S_{p1}(x+\alpha.1,A) = \alpha+S_{p1}(x,A)$

Prueba

"$\subset$" Sea $\lambda \in S_{p1}(x+\alpha.1,A)$

$\lambda = \alpha + (\lambda-\alpha)$

Veamos si $(\lambda-\alpha) \in S_{p1}(x,A)$

$x - (\lambda-\alpha).1 = x-\lambda.1+\alpha.1 = (x+\alpha.1)-\lambda.1$

no es inversible porque $\lambda \in S_{p1}(x+\alpha.1,A)$.

"$\supset$" Sea $\lambda \in \alpha + S_{p1}(x,A)$

λ es de la forma $\lambda= \alpha+\beta$, $\beta \in S_{p1}(x,A)$

$$(x+\alpha.1)-\lambda.1 = x+\alpha.1 - (\alpha+\beta).1$$
$$= x+\alpha.1 - \alpha.1 - \beta.1 = x - \beta.1$$

no es inversible porque $\beta \in S_{p1}(x,A)$

Proposición 5.4

Si A es un álgebra unitaria, entonces:

Si $x \in A$ es inversible, entonces $S_{p1}(x,A) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\lambda \neq 0$ y $\lambda^{-1} \in S_{p1}(x^{-1},A)\}$.

Prueba

. Si $\lambda \neq 0$: $x-\lambda.1 = -\lambda x(x^{-1}-\lambda^{-1})$

. Si $\lambda \in S_{p1}(x,A)$, $x-\lambda.1$ no es inversible

. Si $\lambda = 0$ entonces x no es inversible, luego $\lambda \neq 0$.

. Supongamos que $\lambda^{-1} \notin S_{p1}(x^{-1},A)$, entonces $x^{-1} - \lambda^{-1}.1$ es inversible.

Existe $y \in A$ tal que $y(x^{-1}-\lambda^{-1}.1) = (x^{-1}-\lambda^{-1}.1)y = 1$

$(x^{-1}-\lambda^{-1}.1)y = (x-\lambda.1)(-\lambda^{-1}x^{-1})y = 1$

$- \lambda^{-1}x^{-1}y\ (x-\lambda.1) = -\lambda^{-1}x^{-1}yx + x^{-1}y = x^{-1}(-\lambda^{-1}yx+y) =$

$= x^{-1}y(-\lambda^{-1}x+1) = x^{-1}y(x^{-1}-\lambda^{-1}.1)x = x^{-1}.1.x = x^{-1}.x = 1$

Puesto que y es el inverso de $x^{-1}-\lambda^{-1}.1$ entonces

$\lambda^{-1} \notin S_{p1}(x,A)$.

Ahora, sea $\lambda \notin S_{p1}(x,A)$ entonces $x - \lambda.1$ es inversible en A.

Existe $y \in A$ tal que $y\ (x-\lambda.1) = (x-\lambda.1)y = 1$

$(x-\lambda.1)y = (x^{-1}-\lambda^{-1}.1)(-\lambda x)y = 1$

$-\lambda xy(x^{-1}-\lambda^{-1}.1) = -\lambda xyx^{-1} + \lambda x\lambda^{-1}y$

$$= x(-\lambda yx^{-1}+y)$$

$$= xy(-\lambda x^{-1}+1) = xy(x-\lambda.1)x^{-1}$$

$$= x.1.x^{-1} = x.x^{-1} = 1$$

$\therefore \lambda \notin S_{p1}(x^{-1}, A)$.

Proposición 5.5

Si A es un álgebra unitaria, $x,y \in A$ entonces $S_{p1}(xy, A) = S_{p1}(yx, A)$.

Prueba

. $S_{p1}(yx, A) \subset S_{p1}(xy, A)$.

$\lambda \notin S_{p1}(xy, A) \Rightarrow \exists z \in A$ tal que $(xy-\lambda.1)z=1=z(xy-\lambda.1)$.

Probemos que $\lambda^{-1}yzx - \lambda^{-1}.1$ es el inverso de $yx - \lambda.1$.

i.e. $(yx - \lambda.1)(\lambda^{-1}yzx-\lambda^{-1}.1) = (\lambda^{-1}yzx-\lambda^{-1}.1)(yx-\lambda.1)=1$.

$$(xy-\lambda.1)z = 1 \Rightarrow xyz-\lambda z = 1 \Rightarrow xyz = 1 + \lambda z.$$

$$(yx-\lambda.1)(\lambda^{-1}yzx-\lambda^{-1}.1) =$$

$$= y(x\lambda^{-1}yz)x - yx\lambda^{-1} - \lambda\lambda^{-1}yzx +\lambda.\lambda^{-1} =$$

$$= y(\lambda^{-1}xyz)x - y\lambda^{-1}x - yzx + 1 =$$

$$= y(\lambda^{-1}(1+\lambda z))x - y\lambda^{-1}x - yzx + 1 =$$

$$= y(\lambda^{-1}+z)x - y\lambda^{-1}x - yzx + 1 =$$

$$= y\lambda^{-1}x + yzx - y\lambda^{-1}x - yzx + 1 = 1$$

luego, $\lambda \notin S_{p1}(yx, A)$.

De igual modo se prueba que $\lambda^{-1}yzx -\lambda^{-1}.1$ es el inverso de $xy -\lambda.1$.

Definición 5.6

Sea A un álgebra y $x \in A$. Llamaremos "espectro de A" al conjunto $S_p(x, A) = S_{p1}(x, \hat{A})$

$\hat{A} = A \times \mathbb{C}$ se llama una extensión del álgebra con las operaciones:

$(x,\alpha)(y,\beta) = (xy+\beta x+\alpha y,\alpha\beta)$

En este caso, $S_p(x,A) = \{\lambda \in \mathbb{C}/(x, -\lambda)$ no es inversible$\}$.

$S_{p1}(x, \hat{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}/x-\lambda.1$ no es inversible en $\hat{A}\}$.

$= \{\lambda \in \mathbb{C}/(x,o)-\lambda(o,1)$ no es inversible en $\hat{A}\}$.

$= \{\lambda \in \mathbb{C}/(x,o) - (o,\lambda)$ no es inversible en $\hat{A}\}$.

$= \{\lambda \in \mathbb{C}/(x, -\lambda)$ no es inversible en $\hat{A}\}$.

Propiedades

1) Si $x \in A$, entonces $o \in Sp(x, A)$.

Basta ver que (x,o) no es inversible en $\hat{A}$ pues $(x,o)(y,\alpha) \neq (o,1)$.

2) Si A es unitaria: $S_p(x,A) = S_{p1}(x,\hat{A}) \cup \{o\}$

Prueba

$\lambda \notin S_p(x,A)$ entonces $(x, -\lambda)$ es inversible y sea (y,α) su inverso.

$(x,-\lambda)(y,\alpha) = (xy+\alpha x-\lambda y,-\lambda\alpha) = (o,1)$

$xy + \alpha x - \lambda y = o \quad ; \quad - \lambda\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = - \lambda^{-1}$

$xy - \lambda^{-1}x - \lambda y = o \Rightarrow xy - \lambda^{-1}x - \lambda y + 1 = 1$

$\Rightarrow (x-\lambda.1)(y-\lambda^{-1}.1) = 1$

$$\Longrightarrow x - \lambda.1 \text{ es inversible}$$

$$\Longrightarrow \lambda \notin S_{p1}(x, \hat{A}) \cup \{o\}$$

Ahora, sea $\lambda \notin S_{p1}(x, \hat{A}) \cup \{o\}$;

$x - \lambda.1$ es inversible en $\hat{A}$, entonces existe $y \in \hat{A}$ tal que $(x - \lambda.1)y = y(x - \lambda.1) = 1$

Probemos que $(x,-\lambda)$ es inversible en $\hat{A}$; suponiendo que $(z,\alpha)(x,-\lambda) = (o,1)$:

$(xz+\alpha x-\lambda z,-\lambda\alpha) = (o,1)$

$xz + \alpha x - \lambda z = o$ y $- \lambda\alpha = 1$

$- \lambda\alpha = 1 \Longrightarrow \alpha = - \lambda^{-1}$

$xz- \lambda^{-1}x- \lambda z = o \Longrightarrow xz- \lambda z = \lambda^{-1}x \Longrightarrow z\,(x-\lambda.1) = \lambda^{-1}x$

$z = \lambda^{-1}x\,(x-\lambda.1)^{-1} = \lambda^{-1}xy$ puesto que $(x-\lambda.1)y = 1 \Longrightarrow$

$y = (x-\lambda.1)^{-1}$; Se verifica que

$(\lambda^{-1}xy, -\lambda^{-1})(x,-\lambda) = (o,1) = (x,-\lambda)(\lambda^{-1}xy, -\lambda^{-1})$

3) Si $x,y \in A$: $S_p(xy, A) = S_{p1}(xy, \hat{A})$

$$= S_{p1}(yx, \hat{A}) = S_p(yx, A).$$

4) Si I es un ideal de A y $x \in A$: $S_p(x+I, \frac{A}{I}) \subset S_p(x, A)$

Prueba

Sea $\lambda \notin S_p(x, A)$, entonces $(x, -\lambda)$ es inversible. Sea (y,β) el inverso de $(x, -\lambda)$ y probemos que $(y+I,\beta)$ es el inverso de $(x+I,-\lambda)$ en $\frac{\hat{A}}{I}$.

Puesto que (y,β) es el inverso de $(x, -\lambda)$, se tiene:

$(y,\beta)(x,-\lambda) = (yx-\lambda y +\beta x, -\beta\lambda) = (o,1)$

$\therefore\ yx - \lambda y + \beta x = o$ y $-\beta\lambda = 1$.

Ahora, $(y+I,\beta)(x+I,-\lambda) = ((y+I)(x+I)-\lambda(y+I)+\beta(x+I),-\beta\lambda))$

$$= ((yx+I) - (\lambda y+I) + (\beta x+I), - \beta\lambda))$$

$$= ((yx-\lambda y+\beta x) + I, 1)) = (o+I, 1) = (I, 1)$$

Luego, $\lambda \notin S_p(x+I, \frac{A}{I})$.

Definición 5.7

Si $x,y \in A$ definimos $xoy = x+y - xy$.

Proposición 5.8

$xoo = x$, para todo $x \in A$.

Prueba

$xoo = x+o - x.o = x$.

Proposición 5.9

$xo(yoz) = (xoy)oz$, $\forall x,y,z \in A$.

Prueba

$$\begin{aligned} xo(yoz) &= x + (yoz) - x(yoz) \\ &= x + (y+z - yz) - x(y+z - yz) \\ &= x+y+z - yz - xy - xz + xyz \\ &= (x+y-xy)+z - xz - yz + xyz \\ &= (x+y-xy)+z - (x+y-xy)z \end{aligned}$$

$$= (x \circ y)+z - (x \circ y)z = (x \circ y)\circ z \quad \forall x,y,z \in A.$$

Denotemos: $A^{\circ} = \{x \in A / x \circ y = y \circ x = o$ para algún $y \in A\}$.

A° es un grupo (con la operación $\circ$)

Proposición 5.10

Si $x \in A$: $x \in A^{\circ} \iff (x, -1)$ es inversible en $\hat{A}$.

Prueba

($\Rightarrow$) $x \in A^{\circ} \Rightarrow \exists y \in A$ tal que $x \circ y = o$ i.e. $x+y-xy = o$

$$(x, -1)(y, -1) = (xy-y-x, 1) = (o,1)$$

$$(y, -1)(x, -1) = (o,1)$$

($\Leftarrow$) $(x, -1)$ inversible en $\hat{A} \Rightarrow$ existe $(y, -1) \in \hat{A}$ tal que

$$(x, -1)(y, -1) = (y, -1)(x, -1) = (o,1)$$

$$(x, -1)(y, -1) = (xy-y-x, 1) = (o,1)$$

$$xy - y - x = o \Rightarrow x + y - xy = o \Rightarrow x \in A^{\circ}$$

Proposición 5.11

Si $x \in A^{\circ}$ y $x^2 = x$, entonces $x = o$.

Prueba

Si $x \in A^{\circ}$ entonces existe $y \in A$ tal que $x \circ y = o$ i.e. $x+y-xy=o$

$$x^2 + xy - x^2y = o$$

i.e. $x + xy - xy = o$

i.e. $x = o$.

Proposición 5.12

Si $x \in A$ entonces $S_p(x,A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \lambda \neq o$ y $\lambda^{-1}x \notin A^o\} \cup \{o\}$.

Prueba

"$\supset$" Sea $\lambda \notin S_p(x,A)$; $\lambda \neq o$

- $\lambda \notin S_p(x,A) \Rightarrow (x, -\lambda)$ es inversible en $\hat{A}$
- Sea (y,β) el inverso de $(x, -\lambda)$ en $\hat{A}$, entonces

  $(x, -\lambda)(y,\beta) = (o,1) = (y,\beta)(x,-\lambda)$
- $(xy - \lambda y + \beta x, - \lambda\beta) = (o,1) = (yx + \beta x - \lambda y, - \beta\lambda)$

$$- \lambda\beta = 1 \quad \text{y} \quad xy - \lambda y + \beta x = o.$$

$$- \lambda\beta = 1 \Rightarrow \beta = - \lambda^{-1}$$

$xy -\lambda y - \lambda^{-1}x = o$

$yx - \lambda^{-1}x - \lambda y = o$

$\lambda^{-1}x + \lambda y - xy = o$

$\lambda^{-1}x + \lambda y - yx = o$

$\lambda^{-1}x \circ \lambda y = o$

$\lambda y \circ \lambda^{-1}x = o$; también $\lambda^{-1}x \circ \lambda y = o$; luego

$\lambda^{-1}x \in A^o$.

"$\subset$" Sea $\lambda \neq o$ tal que $\lambda^{-1}x \in A^o$

Probemos que $\lambda \notin S_p(x,A)$.

$\lambda^{-1}x \in A^o \Rightarrow$ existe $y \in A$ tal que $\lambda^{-1}x \circ y = y \circ \lambda^{-1}x = o$.

$\lambda^{-1}x + y - \lambda^{-1}xy = o$

$y + \lambda^{-1}x - \lambda^{-1}yx = o$

$(x,-\lambda)(\lambda^{-1}y, -\lambda^{-1}) = (o,1) = (\lambda^{-1}y, -\lambda^{-1})(x,-\lambda)$.

$(\lambda^{-1}xy-\lambda^{-1}x - y,1) = (o,1)$.

Proposición 5.13

Si I es un ideal de A y $x \in I$, entonces $S_p(x,A)=S_p(x,I)$.

Prueba

Si $\lambda \notin S_p(x,A)$, $\lambda \neq o$, $\lambda^{-1}x \in A^o$

Si $y \in A$ tal que $\lambda^{-1}x o y = y o \lambda^{-1}x = o$

$\lambda^{-1}x + y - \lambda^{-1}xy = o$

$y = \lambda^{-1}xy-\lambda^{-1}x \Rightarrow y \in I \Rightarrow \lambda^{-1}x o y = y o \lambda^{-1}x=o$, $y \in I \Rightarrow \lambda^{-1}x \in I^o$

$\lambda^{-1}x \in I^o \Rightarrow \lambda \notin S_p(x,I)$

$\lambda \notin S_p(x,I) \Rightarrow \lambda^{-1}x \in I^o$

$\Rightarrow \lambda^{-1}x \in A^o \Rightarrow \lambda \notin S_p(x,A)$.

6. RADIO ESPECTRAL.

En todo lo que sigue, A denota un álgebra normada.

Proposición 6.1

Si $(x_n)_{n\geq o}$ es una sucesión de números reales, entonces:

. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \text{Sup}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

. $\lim\limits_{n\to\infty} \text{Sup}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$

$$= \lim_{n\to\infty} \text{Sup}\, x_n$$

Esta proposición puede tambien enunciarse de la siguiente manera:

Sea $(x_n)_{n\geq o}$ una sucesión de números reales. Entonces:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \text{Sup}\, x_n$

Prueba

($\Rightarrow$) Sea $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, y sea $\varepsilon > o$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$

tal que:

$|x-x_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$ (definición de límite), o sea:

$|x-x_{N+p}| < \varepsilon$, $\forall p \geq o$

$- \varepsilon < x_{N+p} - x < \varepsilon$

$x_{N+p} < x + \varepsilon$, $\forall p \geq o$

$\text{Sup}_p\, x_{N+p} \leq x + \varepsilon$

$\inf_n (\mathrm{Sup}\ x_{n+p}) \leq x + \varepsilon$

$\lim \mathrm{Sup}\ x_n \leq x + \varepsilon,\ \forall\varepsilon$

$\lim \mathrm{Sup}\ x_n \leq x$

$-\varepsilon + x < x_{N+p}\ ,\ \forall p$

$-\varepsilon + x \leq \inf_p x_{N+p}$

$-\varepsilon + x \leq \mathrm{Sup}_n (\inf_{p\geq o} x_{n+p})$

$-\varepsilon + x \leq \lim \inf x_n$

$x \leq \lim \inf x_n + \xi\ ,\ \forall\xi > o$

$x \leq \lim \inf x_n$

$\lim \mathrm{Sup}\ x_n \leq x \leq \lim \inf x_n$

($\Longleftarrow$) Sea $x = \lim \inf x_n = \lim \mathrm{Sup}\ x_n$.

Sea $\xi > o$

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Sup}_p\ x_{N+p} < x + \xi$

$x_{N+p} < x + \xi,\ \forall p$

$x_n < x + \xi,\ \forall_n \geq N \Longrightarrow x_n - x < \xi\ \ \forall_n \geq N.$

$-\xi + x$

Existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$-\xi + x < \inf_p x_{N_1+p}$

$-\xi + x < x_{N+p}\ ,\ \forall_p$

$-\xi + x < x_n\ ,\ \forall_n \geq N_1 \Longrightarrow x_n - x > -\xi,\ \forall_n \geq N_1$

Sea $N_2 = \text{máx}\ (N, N_1)$

$- \varepsilon < x_n - x < \varepsilon,\ \forall n > N_2 \iff |x_n - x| < \varepsilon,\ \forall n \geq N_2$

<u>Proposición 6.2</u>

Si $x \in A$ entonces $||x^n|| \leq ||x||^n$, $\forall n \in N$

<u>Prueba</u>

Por inducción.

$||x|| \leq ||x||$

Supongamos que la desigualdad es cierta para $n = k$ i.e

$||x^k|| \leq ||x||^k$

Ahora, $||x^{k+1}|| = ||x^k . x|| \leq ||x^k||\ ||x|| \leq ||x||^k\ ||x|| \leq ||x||^{k+1}$

<u>Proposición 6.3</u>

Si $x \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} ||x^n||^{1/n}$ existe y $\lim\limits_{n\to\infty} ||x^n||^{1/n} =$

$= \inf\limits_{n} ||x^n||^{1/n}$

$\inf \{||x^n||^{1/n} / n \in N\}$

<u>Prueba</u>

Sea $b = \inf ||x^n||^{1/n}$ y sea $\varepsilon > o$.

Sea $m \in N$ tal que $||x^m||^{1/m} < b + \varepsilon$ (m existe por definición de ínfimo).

Para cada $n \in N$ sean $q(n)$, $r(n)$ tal que $n = m.q(n) + r(n)$, $o \leq r(n) < m$

$$\begin{array}{r|l} n & m \\ \hline r(n) & q(n) \end{array}$$

$$x^n = x^{m.q(n)+r(n)} = x^{m\,q(n)} . x^{r(n)}$$

$$\begin{aligned} ||x^n|| = ||x^{m\,q(n)} . x^{r(n)}|| &\leq ||x^{m.q(n)}||\ ||x^{r(n)}|| \\ &= ||(x^m)^{q(n)}||\ ||x^{r(n)}|| \\ &\leq ||x^m||^{q(n)}\ ||x||^{r(n)} \\ &< (b+\varepsilon)^{m\,q(n)} . ||x||^{r(n)} \end{aligned}$$

$$||x^n||^{1/n} < (b+\varepsilon)^{\frac{m\,q(n)}{n}} . ||x||^{\frac{r(n)}{n}}$$

$$\lim \operatorname{Sup} ||x^n||^{1/n} \leq \lim \operatorname{Sup} (b+\varepsilon)^{\frac{m\,q(n)}{n}} . ||x||^{\frac{r(n)}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} (b+\varepsilon)^{\frac{m.q(n)}{n}} . ||x||^{\frac{r(n)}{n}} = (b+\varepsilon)^{\lim_{n\to\infty} \frac{m.q(n)}{n}} . ||x||^{\lim_{n\to\infty} \frac{r(n)}{n}}$$

Pero $\lim_{n\to\infty} \frac{m.q(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{r(n)}{n}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{r(n)}{n} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{r(n)}{n} = o$ $\quad \frac{r(n)}{n} < \frac{m}{n}$; donde $(b+\varepsilon)^{\lim_{n\to\infty} \frac{m.q(n)}{n}} . ||x||^{\lim_{n\to\infty} \frac{r(n)}{n}} =$

$= (b+\varepsilon)^1 . ||x||^o = (b+\varepsilon).1 = b+\varepsilon$.

$\lim \text{Sup}\, ||x^n||^{1/n} \leq b+\varepsilon$, $\forall \varepsilon$, luego, $\lim \text{Sup}\, ||x^n||^{1/n} \leq b$.

$b \leq ||x^n||^{1/n}$, $\forall n$

$b \leq ||x^{n+p}||^{1/n+p}$; $\forall_p, \forall_n$.

$b \leq ||x^{n+p}||^{1/n+p}$, n fijo, $\forall_p$.

$$b \leq \inf_p ||x^{n+p}||^{1/n+p}$$

$$b \leq \text{Sup}_n (\inf_p ||x^{n+p}||^{1/n+p})$$

$$b \leq \lim \inf ||x^n||^{1/n}$$

$$\lim \text{Sup}\, ||x^n||^{1/n} \leq b \leq \lim \inf ||x^n||^{1/n}$$

Luego $b = \lim \text{Sup}\, ||x^n||^{1/n} = \lim \inf ||x^n||^{1/n}$

$$\therefore \quad b = \lim_{n\to\infty} ||x^n||^{1/n}$$

Si $x \in A$, el número $\lim\limits_{n\to\infty} ||x^n||^{1/n}$ es llamado "radio espectral de x" y es denotado por $\rho(x)$.

PROPIEDADES DE $\rho(x)$.

1) $\forall x : o \leq \rho(x) \leq ||x||$

$\cdot\rho(x) = \inf ||x^n||^{1/n} \Rightarrow o \leq \rho(x)$

$\cdot\rho(x) \leq ||x^n||^{1/n}$, $\forall_n \geq 1$.

$\Longrightarrow \rho(x) \leq ||x|| \quad (n=1).$

2) $\forall x, \forall \alpha : \quad \rho(\alpha x) = |\alpha| \, \rho(x)$

$$\rho(\alpha x) = \inf ||(\alpha x)^n||^{1/n} = \inf ||\alpha^n x^n||^{1/n} =$$

$$= \inf ((|\alpha^n| \; ||x^n||)^{1/n}) = \inf(|\alpha^n|^{1/n}||x^n||^{1/n}) =$$

$$= \inf |\alpha| \; ||x^n||^{1/n} = |\alpha| \inf ||x^n||^{1/n} = |\alpha|\rho(x).$$

3) $\rho(x^p) = \rho(x)^p.$

$$\rho(x^p) \leq ||(x^p)^n||^{1/n} \quad \forall_n$$

$$= ||(x^n)^p||^{1/n} = ||x^n.x^n\ldots x^n||^{1/n} \leq (||x^n||\ldots||x^n||)^{1/n}$$

$$= ||x^n||^{1/n}.||x^n||^{1/n}\ldots||x^n||^{1/n} \quad \text{p veces}$$

$$\therefore \rho(x^p) \leq ||x^n||^{1/n}\ldots ||x^n||^{1/n} \;, \forall_n$$

Luego, $\rho(x^p) \leq \lim\limits_{n\to\infty}(||x^n||^{1/n}\ldots||x^n||^{1/n}) = \lim\limits_{n\to\infty}||x^n||^{1/n} \ldots \lim\limits_{n\to\infty} ||x^n||^{1/n} = \rho(x).\rho(x)\ldots\rho(x) = \rho(x)^p$

$$\therefore \rho(x^p) \leq \rho(x)^p$$

Ahora, $\rho^p(x) = \rho(x).\rho(x)\ldots\rho(x) \leq ||x^{pn}||^{1/pn}\ldots||x^{pn}||^{1/pn}, \forall_n.$

$$= ||x^{pn}||^{1/n} = ||(x^p)^n||^{1/n}$$

$$\rho^p(x) \leq ||(x^p)^n||^{1/n}, \; \forall_n$$

Luego, $\rho^p(x) \leq \rho(x^p)$

$\therefore\ \rho(x^p) = \rho(x)^p.$

4) Si $xy = yx$ entonces $\rho(xy) \leq \rho(x).\rho(y)$.

$$\rho(xy) = \lim_{n\to\infty} ||(xy)^n||^{1/n} = \lim_{n\to\infty} ||x^n.y^n||^{1/n}.$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} (||x^n||\ ||y^n||)^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} ||x^n||^{1/n}. \lim_{n\to\infty} ||y^n||^{1/n}$$

$$= \rho(x)\ .\ \rho(y)$$

5) $\rho(x) = \lim_{n\to\infty} ||x^{2^n}||^{1/2^n}$

Sea $\varepsilon > o$; existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$||\rho(x) - ||x^n||^{1/n}|| < \varepsilon,\ \forall_n > N.$$

$$n > N \Rightarrow 2^n > n > N \Rightarrow 2^n > N \Rightarrow ||\rho(x)-||x^{2^n}||^{1/2^n}||< \varepsilon.$$

6) $\rho(x)=||x||$, para todo $x \in A \Leftrightarrow ||x^2||=||x||^2$, para todo $x \in A$.

$(\Rightarrow)$ $||x^2||=||x.x||\leq||x||\ ||x|| = ||x||^2$

$||x^2||\leq||x||^2$

$$||x||^2=||x||.||x||=\rho(x).\rho(x)\leq||x^2||^{1/2}.||x^2||^{1/2}=||x^2||.$$

$$||x||^2\leq||x^2||\ ,\ ||x^2||=||x||^2.$$

$(\Leftarrow)$ Probemos por inducción, que $||x^{2^n}|| = ||x||^{2^n}$

$n = 1: \quad ||x^2|| = ||x||^2$

Supongamos que $||x^{2^n}|| = ||x||^{2^n}$ y probemos que $||x^{2^{n+1}}|| =$

$= ||x||^{2^{n+1}}$

$$||x^{2^{n+1}}|| = ||x^{2^n \cdot 2}|| = ||(x^{2^n})^2|| = ||x^{2^n}||^2 = (||x||^{2^n})^2 =$$
$$= ||x||^{2^n \cdot 2} = ||x||^{2^{n+1}}$$

$||x^{2^n}|| = ||x||^{2^n}, \ \forall n$

$$\lim_{n\to\infty} ||x^{2^n}||^{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} (||x||^{2^n})^{1/2^n}; \ \rho(x) = \lim_{n\to\infty} ||x|| = ||x||.$$

7) Si $x \in A$, entonces

$\rho(x) < 1 \Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} x^i)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} ||x^n||$ es convergente.

Criterio de D'Alembert en $\mathbb{R}$: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge si $\lim_{n\to\infty} (x_n)^{1/n} < 1$

$\lim_{n\to\infty} ||x^n||^{1/n} = \rho(x) < 1$

Según el criterio de D'Alembert ya que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||x^n||} = \rho(x) < 1$

Luego $(\sum_{i=1}^{n} ||x^i||)_{n\geq 1}$ es convergente.

$\therefore \quad (\sum_{i=1}^{n} ||x^i||)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, A probar que $\left(\sum_{i=1}^{n} x^i\right)_{n\geq 1}$ es de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$; existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \sum_1^n ||x^i|| - \sum_1^m ||x^i|| \right| < \varepsilon$, $\forall n,m > N$

Para $n,m > N$, $n > m$

$$\left|\left| \sum_{i=1}^{n} x^i - \sum_{i=1}^{m} x^i \right|\right| = \left|\left| \sum_{m+1}^{n} x^i \right|\right| \leq \sum_{m+1}^{n} ||x^i|| = \left| \sum_{i=1}^{n} ||x^i|| - \sum_{i=1}^{m} ||x^i|| \right| < \varepsilon$$

$\therefore$ Para $n, m > N$, $n > m$

$$\left|\left| \sum_{i=1}^{n} x^i - \sum_{i=1}^{n} x^i \right|\right| < \varepsilon$$

Luego, $\left(\sum_{i=1}^{n} x^i\right)_{n\geq 1}$ es de Cauchy

<u>Definición 6.4</u>

Un álgebra normada A es llamada "completa" o de "Banach", si toda sucesión de Cauchy en A es convergente en A.

<u>Ejemplos</u>

1) $\mathbb{C}$ es un álgebra de Banach.

2) Si E es un espacio vectorial normado completo, entonces: $A = \{f: E \longrightarrow E / f$ es lineal y contínua$\}$ es un álgebra de Banach.

3) Si H es un espacio de Hilbert, el conjunto $L_c(H)$ de to-

das las funciones lineales contínuas $T: H \longrightarrow H$ es un álgebra de Banach, relativa a las definiciones

$(S+T)x = Sx + Tx$

$(\lambda T)x = \lambda(Tx)$

$(ST)x = S(Tx)$

$||T|| = \text{Sup}\ \{||Tx|| : ||x|| \leq 1\}$.

Proposición 6.5

Sea A un álgebra unitaria de Banach y $x \in A$. Si $\rho(1-x) < 1$ entonces, $x \neq o$ es inversible y $x^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n$

Prueba

La sucesión $\left(\sum_{i=1}^{n}(1-x)^n\right)_{n\geq 1}$ es de Cauchy. Como A es de Banach o completo, existe $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n$.

Sea $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n$ y probemos que "y" es el inverso de x.

$$xy = x(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n) = x + x\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n = x + \sum_{n=1}^{\infty}x(1-x)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n(x-1+1) = \sum_{n=1}^{\infty}((x-1)(1-x)^n + (1-x)^n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(x-1)(1-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n$$

$$= x - \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)(1-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n = x - \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n .$$

$$= x + (1-x) - \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n = 1.$$

De igual modo, $yx = 1$; luego x es inversible.

Proposición 6.6

Sea A un álgebra unitaria de Banach y sea $x \in A$, $x \neq o$ tal que $||1-x|| < 1$. Entonces x es inversible.

Prueba

$\lim\limits_{n\to\infty}||(1-x)^n||^{1/n} = \rho(1-x) \leq ||1-x|| < 1$. Luego, $\rho(1-x) < 1$

Por proposición anterior, x es inversible.

Proposición 6.7

Sea A un álgebra unitaria de Banach y sea $M = \{x \in A/x$ es inversible$\}$ entonces M es un abierto de A.

Prueba

Sea $x \in M$ y encontremos $r > o$ tal que $B(x,r) \subset M$.

Sea $y \in A$; $||1-x^{-1}y|| = ||x^{-1}(x-y)|| \leq ||x^{-1}||\ ||x-y||$

Si $||x-y|| < \dfrac{1}{||x^{-1}||}$ entonces $||1-x^{-1}y|| < 1$.

Entonces $x^{-1}y$ es inversible, sea $z \in A$ tal que $z(x^{-1}y) =$ $= (x^{-1}y)z = 1$.

$x^{-1}(yz) = 1 \Rightarrow yz = x$.

$y(zx^{-1}) = (yz)x^{-1} = xx^{-1} = 1$; y es inversible.

$y^{-1} = zx^{-1}$; luego $B(x,r) \subset M$, con $r = \dfrac{1}{||x^{-1}||}$. Puesto que se ha podido encontrar una bola abierta totalmente contenida en M, entonces M es abierto.

<u>Proposición 6.8</u>

Sea A un álgebra unitaria de Banach, $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos inversibles en A; para cada n, sea y_n tal que $x_n y_n = y_n x_n = 1$.

Si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión convergente y $(y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ es inversible en A.

<u>Prueba</u>

Sea $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y sea $k > o$ tal que $||y_n|| < k$ para todo n ya que $(y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada.

Si $n \in N$, $||1-y_n x|| = ||y_n x_n - y_n x|| = ||y_n(x_n-x)||$. Pero

$||y_n(x_n-x)|| \leq ||yn||\ ||x_n-x|| < k\ ||x_n-x||$

Existe $N \in N$ tal que $||x_n-x|| < 1/k \quad \forall n > N$ por ser $(x_n)_{n\geq 1}$

una sucesión convergente.

Sea $n > N$, $||1-y_n x|| < 1 \Rightarrow y_n x$ es inversible.

Sea $z \in A$ el inverso de $y_n x$ tal que $(y_n x)z = z(y_n x) = 1$.

$(y_n x)z = 1 \Rightarrow y_n(xz) = 1 \Rightarrow xz = x_n$

$x(zy_n) = (xz)y_n = 1 \Rightarrow zy_n = x^{-1}$

Luego, $\lim_{n\to\infty} x_n$ tiene inverso.

<u>Proposición 6.9</u>

Sea A un álgebra de Banach y $x \in A$. Si $\rho(x) < 1$ entonces $x \in A^o$

<u>Prueba</u>

$\rho(x)$ es menor que $1 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x^n\right)_{n\geq 1}$ es de Cauchy. Como A es de Banach, existe $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Sea $y = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

$$xoy = x+y-xy = x - \sum_{n=1}^{\infty} x^n + x\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$= x - \left(x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n\right) + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}$$

$$= x - x - \sum_{n=2}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = o+o = o.$$

$\therefore$ $xoy = x + y - x - xy = o$

De modo semejante:

$$yox = y+x-yx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + x - \sum_{n=1}^{\infty} x^n . x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + x - x - \sum_{n=2}^{\infty} x^n . x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} x^n . x = o$$

$\therefore$ $yox = y+x-yx = o$

luego, $x \in A^o$.

Proposición 6.10

Si A es un álgebra de Banach y $x \in A$ es tal que $||x|| < 1$. Entonces $x \in A^o$.

Prueba

$\lim_{n\to\infty} ||x^n||^{1/n} = \rho(x) \leq ||x|| \Rightarrow \rho(x) < 1 \Rightarrow x \in A^o$ (por proposición anterior).

Proposición 6.11

Si A es un álgebra de Banach, entonces A^o es un abierto de A.

Prueba

Sea $x \in A^o$ y encontremos un $r > o$ tal que $B(x,r) \subset A^o$.

Sea $y \in A$ tal que $xoy = yox = o$ (por estar x en A^o).

Sea $z \in A$; $zoy = zoy + o = zoy - o = zoy - (x+y-xy) =$

$$= zoy + (xy-x-y).$$
$$= z+y-zy+xy-x-y = z-zy+xy-x =$$
$$= (z-x) + (-z+x)y.$$

$$||zoy|| = ||(z-x)+(x-z)y|| \leq ||z-x||+||(x-z)y||$$
$$\leq ||z-x||+||z-x||\ ||y||$$
$$\leq ||z-x||\ (1+||y||).$$

Si $||z-x|| < \dfrac{1}{1+||y||}$ entonces $||zoy|| < \dfrac{1}{1+||y||}.\ 1+||y||=1$

luego, $||zoy|| < 1$, de donde:

$zoy \in A^o$. Sea $m \in A^o$ tal que $(zoy)om = mo(zoy) = o$

$(moz)oy = o \Longrightarrow moz = x.$

$(yom)oz = yo(moz) = yox = o$

Luego, $z \in A^o$ si $z \in B(x,r)$ con $r = \dfrac{1}{1+||y||}$

Proposición 6.12

Sea A un álgebra de Banach y sea $x \in A$ tal que $||x|| < 1$. Entonces, el elemento $(1-x)$ es inversible y $(1-x)^{-1} =$ $1 + x + \ldots\ldots + x^n + \ldots\ldots$

Prueba

. Sea $S_n = 1 + x + ...+ x^n + ...$ una sucesión en A.

. $||S_n - S_{n+k}|| = ||x^{n+1} + ...+ x^{n+k}|| \leq ||x^{n+1}|| + ...+ ||x^{n+k}||$

$$\leq ||x||^{n+1} + ...+ ||x||^{n+k}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} ||x||^{n+i}$$

. Sea $S_n^1 = ||x||^{n+1} + ||x||^{n+2} + ...+ ||x||^{n+k}$

$||x|| S_n^1 = \qquad ||x||^{n+2} + ...+ ||x||^{n+k} + ||x||^{n+k+1}$

$(1 - ||x||) S_n^1 = ||x||^{n+1} - ||x||^{n+k+1}$

$$\therefore \quad S_n^1 = \frac{||x||^{n+1} - ||x||^{n+k+1}}{1 - ||x||} \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

Luego , S_n es una sucesión de Cauchy. Como A es un espacio completo, ésta sucesión converge a un elemento $S \in A$.

. $S(1-x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(1-x) = \lim\limits_{n\to\infty} (1+x+...+x^n+...)(1-x)$

$$= \lim_{n\to\infty} (1-x^{n+1}) = 1$$

. Se demuestra de la misma forma que $(1-x)S = 1$

Luego, $(1-x)$ es inversible y $(1-x)^{-1} = 1+x+...+x^n + ...$

Proposición 6.13

Sea A un álgebra de Banach y sea $x \in A$ tal que $||x|| < 1$, entonces

$$||(1+x)^{-1}-1+x|| \leq \frac{||x||^2}{1-||x||}$$

Prueba

$$||(1+x)^{-1}-1+x|| = ||\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-(1+x)(1+x)^{-1}+x|| =$$

$$= ||\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + x|| =$$

$$= ||\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-1-x)+x|| = ||\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(-x)+x|| =$$

$$= ||\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n+x|| = ||\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^n||$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty}||x^n|| \leq \sum_{n=2}^{\infty}||x||^n$$

. Sea $S_n = ||x||^2 + ||x||^3 + \ldots\ldots + ||x||^n$

$$||x||S_n = \qquad ||x||^3 + \ldots\ldots + ||x||^n + ||x||^{n+1}$$

$$\therefore \quad (1-||x||)S_n = ||x||^2 + ||x||^{n+1}$$

Luego, $S_n = \dfrac{||x||^2 + ||x||^{n+1}}{1-||x||}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||x||^2 + ||x||^{n+1}}{1 - ||x||} = \frac{||x||^2}{1 - ||x||}$$

Luego, $\sum_{n=2}^{\infty} ||x||^n = \dfrac{||x||^2}{1-||x||}$

$$\therefore \quad ||(1+x)^{-1} - 1 + x|| \leq \frac{||x||^2}{1-||x||}$$

Proposición 6.14

Supongamos que x es inversible, $||x^{-1}|| = 1/\alpha$, $h \in A$, y $||h|| = \beta < \alpha$. Entonces $x+h$ es inversible, y

$$||(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}h\, x^{-1}|| \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}$$

Prueba

$||x^{-1}h|| \leq ||x^{-1}||\ ||h|| \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \beta = \frac{\beta}{\alpha} < 1$ por ser $\beta < \alpha$

Aquí, $1 + x^{-1}h$ es inversible, por proposición anterior, y puesto que $(x+h) = x(1+x^{-1}h)$, se tiene que $x + h$ es inversible y $(x+h)^{-1} = (1+x^{-1}h)^{-1}x^{-1}$

Así,

$$(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}h\, x^{-1} = [(1+x^{-1}h)^{-1} - 1 + x^{-1}h]\, x^{-1}$$

Luego, $||[(1+x^{-1}h)^{-1} -1 + x^{-1}h]x^{-1}|| \leq \dfrac{||x^{-1}h||^2}{1-||x^{-1}h||}\,||x^{-1}||$

$$\leq \frac{\frac{\beta^2}{\alpha^2}}{1-\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

$$\leq \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

$$\leq \frac{\beta^2}{\alpha^2} \times \frac{1}{\alpha-\beta} \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}$$

$$\therefore \; ||(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}h\, x^{-1}|| \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}$$

Proposición 6.15

Sea A un álgebra de Banach y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos de A tal que $x_n \in A^o$ para todo n y $(x_n)_{n\geq 1}$ es convergente i.e. $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Si para cada n,

$x_n o y_n = y_n o x_n = o$ y si $(y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A^o$.

Prueba

. Puesto que $(y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada, sea k > o tal que $||y_n|| < k$, para todo n.

. Si $n \in N$:

$$y_n o x = y_n o x + o = y_n o x + y_n x_n - y_n - x_n$$
$$= y_n + x - y_n x + y_n x_n - y_n - x_n$$
$$= x - y_n x + y_n x_n - x_n = (x-x_n)+y_n(x_n-x)$$

$$||y_n o x||=||(x-x_n)+y_n(x_n-x)|| \leq ||x-x_n||+||y_n(x_n-x)||$$
$$\leq ||x-x_n||+||y_n||\ ||x_n-x||$$
$$\leq ||x-x_n||\ (1+||y_n||)$$
$$< ||x-x_n||\ (1+k)$$

. Por ser $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión convergente tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, se tiene que para $N \in N$ tal que $n > N \Rightarrow$

$$||x-x_n|| < \frac{1}{1+k}$$

De donde, para $n \in N$, se tiene $||y_n o \lim_{n\to\infty} x_n||<1$, luego

$y_n o x \in A^o$.

. Sea $z \in A$ tal que $(y_n o x) o z = z o (y_n o x) = o$

$(z o y_n) o x = o$

$y_n o (x o z) = o \Rightarrow x o z = x_n$

$x o (z o y_n) = (x o z) o y_n = x_n o y_n = o$

<u>Proposición 6.16</u>

Sea A un álgebra de Banach. Si $x \in A$, entonces $S_p(x,A)$ es un conjunto compacto.

Prueba

(i) $S_p(x,A)$ es cerrado

Sea $x \neq o$ y sea $\lambda \notin S_p(x,A)$; entonces λ es inversible en A y por consiguiente, existe λ^{-1}. Entonces $\lambda^{-1}x \in A^o$.

- Como A^o es abierto, existe $r > o$ tal que $B(\lambda^{-1}x,r) \subset A^o$.
- Sea $\xi = \text{mín} \left\{ \frac{|\lambda|}{2}, \frac{r|\lambda|^2}{2||x||} \right\}$
- Hay que probar que el complemento de $S_p(x,A)$ es abierto, es decir, hay que encontrar una bola abierta de centro λ totalmente contenida en $\complement S_p(x,A)$. Probemos que $B(\lambda,\xi) \subset \complement S_p(x,A)$.
- Sea $\alpha \in B(\lambda,\xi)$ y veamos si $\alpha^{-1}x \in B(\lambda^{-1}x, r)$

$$||\alpha^{-1}x-\lambda^{-1}x||=||(\alpha^{-1}-\lambda^{-1})x||=|\alpha^{-1}-\lambda^{-1}|\ ||x||= \left|\frac{\alpha-\lambda}{\alpha\lambda}\right| ||x||=$$

$$= \frac{|\alpha-\lambda|}{|\alpha|\ |\lambda|} . ||x|| < \frac{\frac{r\ |\lambda|^2}{2||x||}}{\frac{|\lambda|}{2} . \lambda} ||x|| = r$$

$$|\alpha-\lambda| < \xi \Longrightarrow |\alpha-\lambda| < \frac{|\lambda|}{2} \Longrightarrow |\lambda| \leq |\alpha-\lambda|+|\alpha| \leq \frac{|\lambda|}{2} + |\alpha|$$

$$\frac{|\lambda|}{2} < |\alpha|.$$

(ii) $S_p(x,A)$ es acotado.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$; $|\lambda|>\rho(x) \Rightarrow \rho(\lambda^{-1}x) < 1$

$\Rightarrow \lambda^{-1}x \in A^{o} \Rightarrow \lambda \notin S_p(x,A)$

Luego, $\lambda \in S_p(x,A) \Rightarrow |\lambda| \leq \rho(x)$ y por tanto, $S_p(x,A)$ es acotado.

$\therefore$ $S_p(x,A)$ es compacto porque en $\mathbb{C}$, todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.

PROPIEDADES TOPOLOGICAS.

1) Si M es una subálgebra de A, $\overline{M}$ es una subálgebra de A.

$\overline{M} = \{x \in A/x = \lim_{n\to\infty} x_n$, con $(x_n)_{n\geq 1}$ sucesión de puntos de M$\}$

. Sean $x,y \in \overline{M} \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, con $x_n, y_n \in M$, $\forall n$.

. $x+y = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (x_n+y_n) \Rightarrow x+y \in \overline{M}$.

. Sea $x \in \overline{M} \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n$ con $x_n \in M$.

$\alpha x = \lim_{n\to\infty} \alpha x_n \Rightarrow \alpha x \in \overline{M}$

Así, $\overline{M}$ es un subespacio de A.

Ahora probaremos que $(\overline{M},.)$ es un semigrupo

Sean $x,y \in \overline{M} \Rightarrow x=\lim_{n\to\infty} x_n$, $y=\lim_{n\to\infty} y_n$ $\quad x_n, y_n \in M$.

$x.y = \lim_{n\to\infty} (x_n.y_n) \Rightarrow x.y \in \overline{M}$. Así, $\overline{M}$ es subálgebra de A.

2) Si $S \subset A$ y $\Omega = \{M \subset A / M$ es subálgebra cerrada y $S \subset M\}$

entonces $\overline{[S]} = \bigcap_{M\in\Omega} M$

"$\subset$" $[S] = \bigcap J$ con $S \subset J$

M subálgebras.

$\overline{[S]} \subset \bigcap M$ con M subálgebra cerrada $S \subset M$

$[S] \subset \bigcap M$ ya que $[S] \subset \bigcap J \subset \bigcap M$.

$\overline{[S]} \subset \bigcap M$

"$\supset$" $\bigcap M \subset \overline{[S]}$ ya que $\overline{[S]}$ es una subálgebra cerrada que contiene a S.

3) Si $P \subset A$ es una subálgebra conmutativa, entonces $\overline{P}$ es una subálgebra conmutativa.

. $\overline{P}$ es una subálgebra (propiedad 1)

. Probaremos que $\overline{P}$ es conmutativa

. Sean $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$; $x_n, y_n \in P$.

. $xy = \lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} (y_n x_n)$ ya que P es una subálgebra conmutativa.

$\lim_{n\to\infty} (y_n x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n . \lim_{n\to\infty} x_n = yx$

$\therefore$ $\overline{P}$ es una subálgebra conmutativa.

4) Si $P \subset A$ es una subálgebra conmutativa maximal, entonces P es cerrada.

Por lo anterior, $\overline{P}$ es una subálgebra conmutativa. Además $P \subset \overline{P}$, así, como P es maximal, entonces $P = \overline{P}$. Luego P es cerrada.

5) Si $S \subset A$, $T = \{x \in A / xy = yx$ para todo $y \in S\}$ es una subálgebra cerrada.

Sean $z, z^1 \in T \implies zy = yz \quad \forall y \in S.$

y $z^1 y = yz^1 \quad \forall y \in S.$

$\therefore (z+z^1)y = y(z+z^1) \quad \forall y \in S \implies z+z^1 \in T.$

. Sea $z \in T$ y $\alpha \in \mathbb{C} \implies zy = yz \quad \forall y \in S.$

$\implies \alpha(zy) = \alpha(yz) \quad \forall y \in S.$

$\implies (\alpha z)y = y(\alpha z) \quad \forall y \in S.$

$\implies \alpha z \in T.$

$\therefore$ T es un sub-espacio.

Sean $z, z^1 \in T \implies$

$$\begin{array}{c} zy = yz \\ z^1 y = yz^1 \\ \hline zyz^1y = yzyz^1 \\ zz^1yy = yyzz^1 \end{array}$$

$(zz^1)y = y(zz^1) \implies z.z^1 \in T.$

. Probemos que T es cerrada, es decir $T = \bar{T}$

"$\subset$" $T \subset \bar{T}$ (inmediata)

"$\supset$" $\bar{T} \subset T$

Sea $x \in \bar{T} \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n$ con $x_n \in T$

Sea $y \in S$. A probar que $xy = yx$

$xy = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n)$ con $y_n = y$ para todo $n \in N$.

$= \lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} (y_n x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n . \lim_{n\to\infty} x_n = yx.$

6) Si $I \subset A$ es un ideal, $\bar{I}$ es un ideal.

. Sea $x \in \bar{I}$ y sea $z \in A$ probemos que $x.z \in I$

. $x \in \bar{I} \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $x_n \in I$.

$\lim_{n\to\infty}(x_n z) = xz \Rightarrow xz \in \bar{I}$

7) Si $I \subset A$ es un ideal propio y si A es unitaria y de Banach, entonces:

(i) $\bar{I}$ es ideal propio

. I es propio $\Rightarrow 1 \notin I$

. Probemos que $1 \notin \bar{I}$

"$B(1,1) \cap I = \phi$"

Si $x \in B(1,1) \Rightarrow ||x-1|| < 1 \Rightarrow x$ es inversible

$\Rightarrow x \notin I.$

Luego, $B(1,1) \cap I = \phi$

(ii) Si I es maximal, I es cerrado.

I maximal $\Rightarrow$ I es propio $\Rightarrow$ $\bar{I}$ es propio $\Rightarrow$ $\bar{I} \neq A$.

$(I \subset \bar{I},\ \bar{I} \neq A) \Rightarrow I = \bar{I}$

$\therefore$ I es cerrado.

8) Sea A un algebra de Banach. Entonces

(i) Si $I \subset A$ es un ideal modular propio, $\bar{I}$ es un ideal modular propio.

Sea $b \in A$ la identidad módulo I

I propio $\Rightarrow b \notin I$

Probemos que $b \notin \bar{I}$

"$B(b,1) \cap I = \phi$"

Sea $x \in B(b,1) \Rightarrow ||x-b|| < 1 \Rightarrow b-x \in A^o \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists y \in A$ tal que

$(b-x)oy = yo(b-x) = o$

$b-x+y-(b-x)y = o$

$b-x+y-by+xy = o$

$b = (by-y) + (x-xy)$

$\Rightarrow x \notin I \qquad (x \in I \Rightarrow b \in I)$

(ii) Si $I \subset A$ es un ideal modular maximal, entonces I es cerrado.

I maximal $\Rightarrow$ I es propio.

I propio y modular $\Rightarrow$ $\bar{I}$ es propio y modular.

$\bar{I}$ propio $\Rightarrow \bar{I} \neq A$, $\bar{I} \neq A$, I maximal $\Rightarrow I = \bar{I}$

$\therefore$ I es cerrado.

(iii) Si $P \subset A$ es un ideal primitivo. Entonces P es cerrado.

- Como P es primitivo, existe $I \subset A$, I un ideal a la izquierda maximal y modular tal que

  $P = \{x \in A / xy \in I, \forall y \in A\}$
- Sea $x \in \overline{P}$; entonces existe $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in P$ tal que $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
- Sea $y \in A$; $xy = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)y = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n y)$
- $xy = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n y) \Rightarrow xy \in \overline{I}$

$$\Rightarrow xy \in I$$

$$\Rightarrow x \in P$$

$$\therefore P = \overline{P}$$

(iv) $R(A)$ es cerrado

$R(A) = \bigcap\limits_{P\in\Pi(A)} P$ es cerrado puesto que la intersección de ideales es cerrada.

Proposición 6.17

Sea $A \neq \{o\}$ un álgebra unitaria tal que $(A,+,.)$ es un cuerpo, entonces hay un isomorfismo entre A y $\mathbb{C}$.

Prueba

- Si $x \in A$, sabemos que existe $\lambda \in S_{p1}(x,A)$ tal que $\rho(x) \leq |\lambda|$; luego, $S_{p1}(x,A) \neq \phi$.

. Sean $\alpha,\beta \in S_{p1}(x,A)$; entonces $x - \alpha.1$ y $x - \beta.1$ no son inversibles en A, luego $x - \alpha.1 = o = x - \beta.1$, de donde $\alpha=\beta$.

Luego $S_{p1}(x,A)$ posee únicamente un elemento.

Sea $f: A \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longrightarrow \lambda$, λ tal que $x - \lambda.1 = o$

"f es un morfismo"

. Si $x, y \in A$

$(x+y)-(f(x)+f(y)).1 = (x-f(x).1)+(y-f(y).1) = o + o = o$

Luego, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

. $\delta x - (\delta f(x)).1 = \delta x - \delta(f(x).1) = \delta(x-f(x).1) = \delta.o = o$

Luego, $f(\delta x) = \delta f(x)$.

. $xy - (f(x).f(y)).1 = xy - f(x).1.f(y).1 =$

$xy-f(x).1y+f(x).1y-f(x).1f(y).1=(x-f(x).1)y+f(x).1(y-f(y).1)=$

$= o.y+f(x).1.o = o+o = o.$

"f es inyectivo"

$f(x)=f(y) = \lambda \Rightarrow x-\lambda.1 = o = (y-\lambda.1) \Rightarrow x=\lambda.1=y \Rightarrow x = y.$

"f es sobre"

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces $\lambda = f(\lambda.1)$

<u>Proposición 6.18</u>

Si A es unitaria conmutativa y $M \subset A$ es un ideal maximal entonces $\frac{A}{M}$ es un cuerpo.

Prueba

. Sea $z \in \frac{A}{M}$, $z = a + M$, $a \notin M$

. Si $a \notin M$ entonces $M \subsetneq M + I$ con $I = \{xa/x \in A\}$

M maximal $\Rightarrow M + I = A$

. Sean $m \in M$ y $b \in I$ tal que $1 = m+b$, $b = xa$, $x \in A$.

$1 = m+xa \Rightarrow 1+M = (m+xa) + M = (m+M)+(xa+M) = M+(xa+M) =$

$= xa + M = (x+M)(a+M).$

Luego: $1+M = (x+M)(a+M)$

$\therefore$ $a + M$ es inversible.

Proposición 6.19

Si A es unitaria y conmutativa y $M \subset A$ un ideal, entonces:

M es maximal $\Leftrightarrow$ M es primitivo.

Prueba

($\Leftarrow$) Cierto, porque todo ideal primitivo es maximal y modular (caso abeliano).

($\Rightarrow$) Cierto, porque todo ideal maximal es primitivo y en un álgebra unitaria, todo ideal es modular.

Proposición 6.20

Si A es unitaria y conmutativa, entonces $R(A) = \bigcap_{I \in M(A)} I$,

$M(A) = \{I \subset A/I$ es un ideal maximal$\}$.

Prueba

Porque I es primitivo $\Leftrightarrow$ I es maximal.

Proposición 6.21

Si A es unitaria y conmutativa, entonces $R(A) = \{x \in A / 1+yx$ es inversible para todo $y \in A\}$.

Prueba

"$\subset$" . Sea $x \in R(A)$ entonces $x \in I$, para todo I, ideal maximal.

. Sea M un ideal maximal y sea $y \in A$;

$x \in M \Rightarrow yx \in M \Rightarrow 1+yx \notin M$. porque si

$1 + yx \in M \Rightarrow 1+yx-yx \in M$

$1 + yx - yx \in M \Rightarrow 1 \in M \Rightarrow M = A$.

$1 + yx \notin M \quad \forall M$ maximal $\Rightarrow 1+yx$ es inversible.

"$\supset$" . Sea $x \in A$ tal que $1+yx$ es inversible, $\forall y \in A$.

. Sea $M \subset A$ un ideal maximal y probemos que $x \in M$.

Si $x \notin M$ entonces $A = M + I$, $I = \{ax/a \in A\}$

(porque $x \in M + I$ y $x \notin M$ y $M \subset M+I$ y M es maximal)

$1 = m+ax$, $a \in A$, $m \in M$.

$m = 1 - ax \Rightarrow m$ es inversible $\Rightarrow m^{-1}m \in M \Rightarrow 1 \in M$ (contradicción).

Luego, $x \in M$.

Proposición 6.22

Si A, B son dos álgebras unitarias y $f: A \longrightarrow B$ un morfismo suryectivo, entonces:

1) $f(1) = 1$.

2) Si $I \subset A$ es un ideal, entonces $f(I)$ es un ideal de B.

Prueba

1) Sea $x \in A$ tal que $f(x) = 1$ porque f es sobre; entonces:

$f(1) = 1.f(1) = f(x).f(1) = f(x.1) = f(x) = 1$

2) $f(I)$ es un subespacio (evidente).

Sea $x \in B$, $y \in f(I)$; sea $z \in A$ tal que $f(z) = x$ y sea $y^1 \in I$ tal que $y = f(y^1)$

$xy = f(z).f(y^1) = f(zy^1) \Rightarrow xy \in f(I)$ porque $zy^1 \in I$

De igual manera, $yx \in f(I)$.

Proposición 6.23

Sea A un álgebra de Banach unitaria y conmutativa

$M(A) = \{f: A \longrightarrow \mathbb{C} / f$ es un morfismo suryectivo$\}$. Entonces:

$f \in M(A) \Rightarrow f$ es contínua y $||f|| = 1$.

Prueba

"f es contínua"

. Encontremos $\lambda \geq o$ tal que $|f(x)| \leq \lambda ||x||$, $\forall x \in A$.

. Sea $x \neq o$ y supongamos que $||x|| < |f(x)|$

$$||x|| < |f(x)| \Rightarrow \frac{||x||}{|f(x)|} < 1 \Rightarrow ||\frac{1}{f(x)} . x|| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|1 - (1 - \frac{1}{f(x)} \cdot x\| < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{f(x)} \cdot x \text{ es inversible.}$$

. Sea $y \in A$ el inverso de $1 - \frac{1}{f(x)} \cdot x$

$$1 = f(1) = f(y(1 - \frac{1}{f(x)} \cdot x)) = f(y).f(1- \frac{1}{f(x)} \cdot x) =$$

$$= f(y)(f(1) - \frac{1}{f(x)} \cdot f(x)) = f(y)(1 - \frac{1}{f(x)}.f(x) =$$

$$= f(y)(1-1) = f(y).o = o$$

1 = o es una contradicción !

Luego, $|f(x)| \leq \|x\|$; tomamos $\lambda = 1$.

$\therefore$ f es contínua.

Sea $\alpha \geq o$ tal que $|f(x)| \leq \alpha\|x\| \quad \forall x$

$|f(1)| \leq \alpha\|1\|$

$1 < \alpha.\alpha$

Luego, $1 = \inf 1 = \inf \{\lambda \geq o / |f(x)| \leq \lambda \|x\| \forall x \}$

BIBLIOGRAFIA

1. Nociones de Espacios Normados

   COTLAR Y CIGNOLI

2. Introducción al Análisis Moderno

   J. DIEUDONNE

3. Técnicas de Algebras de Banach en Teoría de Operadores.

   RONALD C. DOUGLAS.

4. Algebras Normadas

   M.A. NAIMARK

5. Algebra (Cap. III)

   N. BOURBAKI

6. Teorías Espectrales

   N. BOURBAKI

7. REAL AND COMPLEX ANALISYS.

   WALTER RUDIN

8. FUNTIONAL ANALISYS

   WALTER RUDIN