Universidad de El Salvador
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Matematica

LA FORMULA DE KUNNETH

Trabajo de Graduación

PRESENTADO POR:

José Antonio Fuentes Lazo

PARA OPTAR AL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

ABRIL 1991

SAN SALVADOR EL SALVADOR, CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR : DR. BENJAMÍN LÓPEZ GUILLÉN

SECRETARIO GENERAL : DRA. GLORIA ESTELA GÓMEZ DE PÉREZ

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO : ING. JOAQUÍN ALBERTO VANEGAS AGUILAR

SECRETARIO : ING. MARIO ARNOLDO MOLINA ARGUETA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE EN FUNCIONES : ING. JOAQUÍN ALBERTO VANEGAS AGUILAR

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

TRABAJO DE GRADUACION

COORDINADOR : ING. JOSÉ FRANCISCO MARROQUÍN

ASESOR : ING. JOSÉ FRANCISCO MARROQUÍN

INTRODUCCION

El presente trabajo tiene como objetivo principal presentar una generalización del Teorema de coeficientes universales, así como también, sirve de fundamentación básica para el estudio de la Topología Algebraica.

Se hace un análisis de la teoría de módulos, homomorfismos, suma directa, producto directo, módulos libres, módulos de homomorfismos, para después colocarlos en sucesiones exactas y semiexactas.

Las sucesiones semiexactas se estudian en forma amplia y básicamente las sucesiones ascendentes y descendentes, ya que, es sobre éstas que se sustanta el desarrollo posterior de el presente trabajo.

Se hace un apartado especial para el estudio de módulos proyectivos y módulos inyectivos con los cuales definimos posteriormente las resoluciones proyectivas e inyectivas, con todos estos conceptos analizados los sintetizamos en dos conceptos muy importantes como lo son: Funtores Torsión y Funtores Extensión, los cuales nos dan las condiciones básicas para el estudio del Teorema de los Coeficientes universales para homología y cohomología.

Finalmente se hace una generalización de los funtores torsión y funtores extensión inmersos en sucesiones descendentes y ascendentes respectivamente y generalizar el teorema de los coeficientes universales. Obteniendo como resultado final la fórmula de Künneth.

I N D I C E

Página No.

C A P I T U L O I

CONCEPTOS INTRODUCTORIOS

1- MODULOS

Definición 1.1

Sea R un anillo conmutativo con unidad $1 \neq 0$ arbitrario. Un módulo sobre R, o un R-módulo es un grupo abeliano aditivo X, juntamente con una función

$$u: R \times X \longrightarrow X$$

que satisface las tres condiciones siguientes:

1) La función u es biaditiva, es decir:

   $u(\alpha + \beta, x) = u(\alpha, x) + u(\beta, x)$

   $u(\alpha, x+y) = u(\alpha, x) + u(\alpha, y)$

   Son ciertas para todo α, β en R y todo x,y en X.

2) Para todo α, β en R y todo x,y en X se tiene

$$u(\alpha, u(\beta, x)) = u(\alpha\beta, x)$$

3) Para todo x en X

$$u(1, x) = x$$

La función u recibe el nombre de multiplicación escalar del módulo X.

Si definimos a la función u con una notación simplificada así

$$u: R \times X \longrightarrow X$$
$$(\alpha, x) \rightsquigarrow u(\alpha, x) = \alpha x$$

las condiciones, uno, dos y tres de determinan

$(\alpha + \beta, x) = (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

$(\alpha, x+y) = \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

$(\alpha\beta, x) = \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

$(1, x) = 1.x$

para todo α, β en R y para todo x,y en X

Definición 1.2

Un subconjunto no vacío A de X es un submódulo de X si y solamente si

1) A es un subgrupo del grupo abeliano aditivo X
2) Para todo α en R y todo x en A, $\alpha x \in A$

Proposición 1.1

(Teorema de caracterización para submódulos)

Un subconjunto no vacío A de un R-módulo X es un submódulo d, X si y sólo si cualesquiera que sean α en R y $u, v \in X$, se tiene:

1) $u + v \in A$
2) $\alpha u \in A$

Definición 1.3

Sea A un submódulo arbitrariamente dado de un R-módulo X y sea la función

$$\mu: R \times Q \longrightarrow Q$$
$$(\alpha,\ x + A) \rightsquigarrow \mu(\alpha,\ x + A) = \alpha x + A$$

para todo elemento α en R y todo x + A en Q donde $A = \frac{X}{A}$ este módulo A con μ como multiplicación escalar recibe el nombre de módulo cociente de X sobre el submódulo A.

2- HOMOMORFISMOS

Definición 1.4

Un homomorfismo de un R-módulo X en un R-módulo Y es una función

$$f: X \longrightarrow Y$$

tal que para todo α en R y u,v en X se cumplen las condiciones siguientes

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$
2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$.

Definición 1.5

Sea $h: X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de un R-módulo X en un R-módulo Y, h es un monomorfismo si h es inyectivo.

Definición 1.6

Sea $h: X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de un R-módulo X en un R-módulo Y, h es epimorfismo si h es sobreyectivo.

Definición 1.7

Sea $h: X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de un R-módulo X en un R-módulo Y decimos que h es un isomorfismo si h es inyectiva y sobreyectiva.

Definición 1.8

Dos R-módulos X e Y son isomorfos si y sólo si existe un isomorfismo $h: X \longrightarrow Y$ esto lo denotaremos por

$$X \approx Y$$

Proposición 1.2

Sean X, Y, Z R-módulos arbitrarios, la aplicación compuesta $g \circ f: X \longrightarrow Z$ de dos homomorfismos $f: X \longrightarrow Y$ y $g: Y \longrightarrow Z$ es un homomorfismo, llamado homomorfismo producto.

Proposición 1.3

Para cualquier homomorfismo $h: X \longrightarrow Y$ de un R-módulo X en un R- módulo Y, la imagen

$$h(A) = \{h(x)/x \in A\}$$

de un submódulo A de X es un submódulo de Y, y la imagen inversa

$$h^{-1}(B) = \{x \in X/h(x) \in B\}$$

de un submódulo B de Y es un submódulo de X.

Observación 1

1) Si el submódulo A de X es el propio X la imagen

$$Im(h) = h(X)$$

2) Si el submódulo B de Y es el submódulo trivial 0 de Y, la imagen inversa

$$ker(h) = h^{-1}(0)$$

es un submódulo de X llamado núcleo del homomorfismo $h: X \longrightarrow Y$.

3) La coimagen coim(h) y el conúcleo coker(h) de $h: X \longrightarrow Y$ son los módulos cocientes

$$coim(h) = \frac{X}{ker(h)}$$

$$coker(h) = \frac{Y}{Im(h)}$$

de los módulos X e Y, respectivamente.

Proposición 1.4

Si $h = g \circ f$ denota el producto de los homomorfismos

$f: X \longrightarrow Y$ y $g: Y \longrightarrow Z$ de R-módulos entonces las proposiciones siguientes son ciertas

1) Si h es monomorfismo, lo es tambien f

2) Si h es epimorfismo, lo es tambien g

Proposición 1.5

El producto $h = g \circ f$ de los homomorfismos $f: X \longrightarrow Y$ y $g: Y \longrightarrow Z$ de R- módulos es el homomorfismo trivial si y sólo si

$$\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$$

3- SUMAS DIRECTAS Y PRODUCTOS DIRECTOS

Definición 1.9

Se dice que el módulo G es la suma directa de la familia $F = \{G_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ de submódulos de G si se cumple

1) $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$

2) $G_i \cap \bigcap_{i \neq j} G_j = \{0\}$ para todo $i \neq j$

escribiremos a G en este caso

$$G = \bigoplus_{i=1}^{n} G_i$$

Teorema 1.6

Sea G un módulo y $F = \{G_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ una familia de submódulos de G.

$G = \bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ si y solamente si todo elemento de G tiene una representación única como suma de elementos g_i de G_i.

De igual manera podemos definir la suma directa de una familia arbitraria de módulos.

Definición 1.10

Se dice que el módulo G es la suma directa de la familia $F = \{G_i / i \in I\}$ de submódulos de G si se cumple

1) $G = [\bigcup_{i \in I} G_i]$

2) $G_i \cap \bigcap_{i \neq j} G_j = \{0\}$ para todo $i \neq j$, en este caso escribimos

$$G = \bigoplus_{i\ I} G_i$$

PRODUCTOS DIRECTOS

Consideremos una familia arbitrariamente dada

$$F = \{X_i / i \in M\}$$

de R-módulos X_i y designemos con

$$P = \pi_{i \in M} X_i$$

el producto cartesiano de la familia F.

Un elemento de P es una función

$$f: M \longrightarrow \bigcup$$

del conjunto M de índices en la unión $\bigcup$ de los conjuntos X_i tal que $f(i) \in X_i$ para todo $i \in M$.

Definamos una operación binaria en P, considerando, para dos elementos f y g de P, la función

$$f + g: M \longrightarrow \bigcup$$

determinada por $(f + g)(i) = f(i) + g(i)$
para todo índice $i \in M$. Se puede comprobar fácilmente que esta operación binaria dota de la estructura de grupo abeliano aditivo al conjunto P.

El elemento 0 de P es la función

$$0: M \longrightarrow \bigcup$$

$$i \rightsquigarrow 0(i) = 0 \in X_i$$

para todo $i \in M$.

El elemento opuesto de $f \in P$ es la función

$-f: M \longrightarrow \bigcup$ definida por

$$(-f)(i) = -[f(i)]$$

para todo $i \in M$.

Definamos la función μ de la siguiente manera

$$\mu: R \times P \longrightarrow P$$

$$(\alpha, f) \rightsquigarrow \mu(\alpha, f) = \alpha f: M \longrightarrow \bigcup$$

dado por

$$(\alpha f)(i) = \alpha f(i)$$

para todo $i \in M$. Se comprueba fácilmente que esta función μ dota a P con una estructura de R-módulo que es conocido con el nombre de producto directo de la familia F.

Definición 1.11

Si $X_i = X$ para todo $i \in M$, la función

$\delta: X \longrightarrow P$ definida por

$[\delta(x)](i) = x$ para todo $i \in M$, lo llamaremos homomorfismo diagonal.

Definición 1.12

Sea $X_i = X$ para todo $i \in M$ y sean

$\delta: X \longrightarrow \prod_{i \in M} X_i$ el homomorfismo diagonal

y $\phi: \prod_{i \in M} X \longrightarrow \prod_{i \in M} Y_i$ definida mediante

$[\phi(f)](i) = h_i[f(i)]$

para todo índice $i \in M$ llamaremos producto directo restringido de la familia $H = \{h_i: X_i \longrightarrow Y_i / i \in M\}$ a la función ϕ' definida de la siguiente manera

$$\phi' = \phi \circ \delta: \prod_{i \in M} Y_i$$

Teorema 1.7

Si el producto $h = g \circ f$ de dos homomorfismos $f: X \longrightarrow Y$ y $g: Y \longrightarrow Z$ de R-módulo X, Y, Z es un isomorfismo, entonces se cumple

1) f es monomorfismo
2) g es epimorfismo
3) El módulo Y es descomponible en la suma directa de imf y kerg es decir

$$Y = imf \oplus kerg$$

4- MODULOS LIBRES

Definición 1.13

Se llama módulo libre sobre un conjunto S, a una función L y un módulo F con la siguiente propiedad universal.

Para toda función f: S ——> X en un módulo X, existe un único homomorfismo g: F ——> X de manera que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "L"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$$g \circ L = f$$

Proposición 1.8

Todo módulo es isomorfo al cociente de un módulo libre

Demostración

Sea $S \subseteq X$, un conjunto de generadores de X, y F el módulo licre sobre S, tenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "i"'] & & F \arrow[dl, "f"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

existe entonces un único homomorfismo $f: F \longrightarrow X$ de módulos tal que $f \circ L = i$.

Probemos que f es sobreyectiva.

Sea $s \in S$

$$s \in S \Rightarrow s = i(s) = f(L(s)) \Rightarrow s \in f(L(s))$$
$$\Rightarrow S \subset \operatorname{Im} f$$

como S genera a X tenemos $X \subseteq \operatorname{Im} f$

de aquí que f es sobreyectiva

Luego

$$X \simeq \frac{F}{\ker f}$$

Teorema 1.9

Si el par formado por un R-módulo F y una función $f: S \longrightarrow F$ de S en F es un R-módulo libre F sobre el conjunto S, entonces f es inyectiva y su imagen $f(S)$ engendra el módulo F.

Teorema 1.10 (Teorema de Unicidad)

Si (F,f) y (F',f') son R-módulos libres sobre el mismo conjunto S, entonces existe un único isomorfismo $j: F \longrightarrow F'$ del módulo F sobre el módulo F' tal que $j \circ f = f'$.

Teorema 1.11 (Teorema de existencia)

Para cualquier conjunto S, existe siempre un R-módulo libre sobre S.

Corolario 1.12

La suma directa de una familia arbitraria $F = \{Xs/s \in S\}$ con $Xs \approx R$ para todo $s \in S$ es isomorfa al R-módulo libre engendrado por el conjunto S.

5- SUCESIONES EXACTAS

Definición 1.14

Una sucesión exacta de módulos y homomorfismos es una sucesión finita o infinita

$$\cdots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \cdots$$

tal que la imagen del homomorfismo entrante coincide con el núcleo del homomorfismo saliente de todo módulo distinto de los extremos (si existen) de la sucesión, es decir

$$\mathrm{Imf} = \mathrm{kerg}$$

en todo módulo distinto de los extremos.

Definición 1.15

Toda sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

le llamaremos sucesión exacta corta.

Observación 2

1) Es fácil probar que la sucesión

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

es exacta si y solamente si .

i) f es inyectiva

ii) Imf = kerg

iii) g es sobreyectiva

2) Dado cualquier módulo X, lo podemos poner en una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

donde F es un R-módulo libre.

Efectivamente, en la prueba del resultado de la proposición (P1.8). Dado que $X \approx \frac{F}{\mathrm{kerf}}$, es claro que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{kerf} \xrightarrow{i} F \xrightarrow{f} X \longrightarrow 0$$

es exacta, donde i es el homomorfismo inclusión.

Definición 1.16

Se dice que el submódulo F es un sumando directo del módulo E, si existe un submódulo M de E, tal que

$$E = F \oplus M$$

Definición 1.17

Una sucesión exacta

$$\ldots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \ldots$$

de homomorfismos de módulos se escinde en el módulo Y si y solamente si el submódulo F=Imf = kerg del módulo Y es un sumando directo de Y.

Teorema 1.13

Si una sucesión exacta

$$\ldots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \ldots$$

de homomorfismos de R-módulos se escinde en el módulo Y, entonces Y es isomorfo a la suma directa Imf ⊕ Img.

Demostración

Por definición, Y se escinde en la suma directa del submódulo A = Imf y otro submódulo B, basta probar que B ≅ Img.

Consideremos la restricción

$$h = g/B: B \longrightarrow Z$$

entonces h es un homomorfismo del módulo B en el módulo Z.

Como la sucesión es exacta tenemos que

$\ker g = \mathrm{Im} f = A$, $A \cap B = \{0\}$ por definición de suma directa. Se sigue que h es monomorfismo.

Probemos que la $\mathrm{Im} h = \mathrm{Im} g$.

Sea

$z \in \mathrm{Im} g \Rightarrow \exists y \in Y$ tal que $g(y) = z$

como $Y = A + B \Rightarrow \exists a \in A$ y $b \in B$ tal que

$y = a + b$

entonces $z = g(y) = g(a+b) = g(a) + g(b) = h(b)$

ya que $a \in A$, será que $g(a) = 0$

esto implica que la $\mathrm{Im} h = \mathrm{Im} g$.

Corolario 1.14

Si una sucesión exacta corta

$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ de homomorfismos de módulos se escinde, entonces Y es isomorfo a la suma directa

$$X \oplus Z$$

Esto resulta del hecho que siendo f inyectiva $\mathrm{Inf} \simeq X$ y como g es sobreyectiva $\mathrm{Img} \simeq Z$.

Corolario 1.15

Una sucesión exacta arbitraria

$\ldots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \ldots$ de homomorfismos de módulos se escinde en el módulo Y si existe un homomorfismo $h: Y \longrightarrow X$ tal que la composición $h \circ f$ es un isomorfismo del módulo X en el módulo X en este caso tenemos

$$Y \approx \mathrm{Imf} \oplus \mathrm{Img} \approx X \oplus \mathrm{Img}$$

Efectivamente

Como $h \circ f$ es inyectiva por proposición (P1.5) f es inyectiva luego $\mathrm{Imf} \approx X$.

Corolario 1.16

Una sucesión exacta arbitraria

$$\ldots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \ldots$$

de homomorfismos de R-módulos se esciende en el módulo Y si existe un homomorfismo $k: Z \longrightarrow Y$ tal que el producto $g \circ k$ es un isomorfismo del módulo Z en el módulo Z, en este caso tenemos

$$Y \approx \mathrm{Imf} \oplus \mathrm{Img} \approx \mathrm{Imf} \oplus Z$$

Definición 1.18

Sea $f: X \longrightarrow Y$ un homomorfismo arbitrario de un módulo X en un módulo Y, un inverso por la izquierda de f, es un homomorfismo $h: Y \longrightarrow X$ tal que el producto $h \circ f$ es el isomorfismo identidad del módulo X.

Análogamente un inverso por la derecha de f es un homomorfismo $k: Y \longrightarrow X$ tal que el producto $f \circ k$ es el isomorfismo identidad del módulo Y.

Corolario 1.17

Para cualquier sucesión exacta corta
$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ de homomorfismos de R-módulos las proposiciones siguientes son equivalentes.

i) La sucesión exacta corta se escinde

ii) El homomorfismo f tiene un inverso por la izquierda

iii) El homomorfismo g tiene un inverso por la derecha.

E- SUCESIONES SEMIEXACTAS

Definición 1.19

Se dice que una sucesión finita o infinita
$\ldots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \ldots$
de homomorfismos de R-módulos es semiexacta si y sólo si la imagen de todo homomorfismo de llegada está contenida en el núcleo del correspondiente homomorfismo de salida, en todo módulo que no sean los de los extremos de la sucesión en caso de que existan dichos extremos.

Observación 3

1) Es claro que una sucesión de R-módulos es semiexacta si y sólo si la composición de dos homomorfismos consecutivos

$g \circ f$ es el homomorfismo cero.

2) Toda sucesión exacta es semiexacta, pero no toda sucesión semiexacta es exacta.

Definición 1.20

En una sucesión semiexacta

$$C: \ldots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \ldots$$

de R-módulos, se llama módulo derivado de C en el módulo Y, al módulo cociente $\dfrac{\ker g}{\operatorname{Im}(f)}$

Comentario 4

1) Si los índices usados en una sucesión semiexacta C son decrecientes, llamamos a C un complejo de cadenas y los homomorfismos de C se denotarán con el símbolo ∂. Por ello un complejo de cadenas tiene la forma siguiente

$$C: \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

con $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0.$

En este caso, los elementos de C_n se llaman cadenas n-dimensionales y los homomorfismos se llaman operadores frontera: denotaremos al $\ker \partial_n$ por $Z_n(C)$ y se llama el módulo de los n-ciclos de C; la $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq C_n$ la denotaremos por $B_n(C)$ y se llama el módulo de los n-fronteras de C; finalmente el módulo derivado de C en el módulo C_n se denota por

$$H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)} = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$$

y se llama el n-ésimo módulo de homología.

2) Si los índices usados son crecientes, entonces la sucesión semiexacta C se llama un complejo de cocadenas y los homorfismos se denotan con el símbolo δ; además en lugar de subíndices se usan superindices, un complejo de cocadenas tiene la forma

$$C: \ \dots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \longrightarrow \dots$$

en este caso en lugar de los términos cadenas, ciclos y fronteras, se usan cocadenas, cociclos y cofronteras respectivamente y el módulo

$$H^n(C) = \frac{Z^n(C)}{B^n(C)} = \frac{\ker \delta^n}{\operatorname{Im} \delta^{n-1}}$$

se llama el n-ésimo módulo de cohomología de C.

Definición 1.21

Dados dos complejos de cadenas de R-módulos

$$C: \ \dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \dots$$

$$D: \ \dots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} D_n \xrightarrow{\partial'_n} D_{n-1} \longrightarrow \dots$$

Se llama homomorfismo de complejos o transformaciones de cadenas $f: C \longrightarrow D$, a toda familia $f = \{f_n : C_n \longrightarrow D_n / n \in Z\}$ de homomorfismos de módulos de manera que $\forall n \in Z$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
\cdots \arrow[r] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"] & D_{n-1}
\end{tikzcd}
$$

es decir $\partial_n \circ f'_n = f_{n-1} \circ \partial_n$, $\forall n \varepsilon Z$

Proposición 1.18

Dada la transformación de cadenas $f: C \longrightarrow D$ el homomorfismo $f_n: C_n \longrightarrow D_n$ induce un homomorfismo

$$H_n(f): H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$$

entre los respectivos módulos de homología definimos $H_n(f)$ de la siguiente manera

$$H_n(f): \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}} \longrightarrow \frac{\ker \partial'_n}{\operatorname{Im} \partial'_{n+1}}$$

$$x + \operatorname{Im} \partial_{n+1} \rightsquigarrow H_n(f)(x + \operatorname{Im} \partial_{n+1}) = f_n(x) + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}$$

Comentario 5

1) La transformación de cadenas identidad $i: C \longrightarrow C$, es la familia de homomorfismos identidad

$$i = \{i_n: C_n \longrightarrow C_n / n \varepsilon Z\}$$

es claro que en este caso $H_n(i)$ es el homomorfismo identidad del módulo $H_n(C)$, $\forall n \in Z$

2) Si $f: C \longrightarrow D$ y $g: D \longrightarrow E$ son transformaciones de cadenas, entonces la familia

$h = \{g_n \circ f_n: C_n \longrightarrow E_n / n \in Z\}$ es un homomorfismo de cadenas y lo denotamos por

$$g \circ f: C \longrightarrow E$$

de nuevo es de fácil comprobación que

$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f), \ \forall n \in Z$$

3) Se llama sucesión descendente trivial, a una sucesión descendente 0 tal que, para todo $n \in z$, 0_n consta de un sólo elemento, como toda sucesión descendente trivial es exacta, tenemos $H_n(0) = 0 \ \ \forall n \in z$.

4) Recibe el nombre de homomorfismo trivial de una sucesión descendente C en una sucesión descendente D, el homomorfismo $h: C \longrightarrow D$ tal que h_n es el homomorfismo trivial del módulo C_n en el módulo D_n para todo $n \in z$, expresaremos con $h = 0$, h es el homomorfismo trivial.

Definición 1.22

Se dice que dos transformaciones de cadenas f y g del complejo C en el complejo D son homotópicas si existe una familia de homomorfismos

$h = \{h_n: C_n \longrightarrow D_{n+1} / n \in Z\}$ de manera que

$$\partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = f_n - g_n \qquad \forall n \in Z$$

es decir

$$\begin{tikzcd}
 & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & C_{n-1} \arrow[dl, "h_{n-1}"] \\
D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & D_n &
\end{tikzcd}$$

en este caso decimos que h es una homotopía de cadenas entre las transformaciones f y g y lo denotamos por

$$f \overset{h}{\approx} g$$

Proposición 1.19

Si dos transformaciones de cadenas f y g $f, g : C \longrightarrow D$ son homotópicas entonces para todo $n \in z$

$$H_n(f) = H_n(g) \qquad \forall n \in z$$

Definición 1.23

Decimos que $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de complejos de cadenas, si $\forall n \in z$

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de R-módulos.

Proposición 1.20

Si $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de complejos de cadenas entonces la sucesión

$$H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E)$$

es exacta para todo $n \in Z$.

De la proposición (P1.20) obtenemos sucesiones exactas en los grupos de homologías que pueden ser conectados para formar una sóla sucesión exacta llamada precisamente la sucesión exacta de grupos de homología del complejo de cadenas ver el proceso de construcción de ∂^* en donde ∂_n^* es el homomorfismo de conexión el cual se define

$$\partial^*: H_n(E) \longrightarrow H_{n-1}(C)$$
$$z + \mathrm{Im}\partial''_{n+1} \rightsquigarrow \partial^*(z + \mathrm{Im}\partial''_{n+1}) = x + \mathrm{Im}\,\partial_n$$

donde $f_{n-1}(x) = \partial'_n(y)$ y $g_n(y) = z$

Lema 1.21

El elemento $x + \mathrm{Im}\,\partial_n \in H_{n-1}(C)$ es independiente del elemento $y \in D_n$ y de aquí que depende nada más del elemento $z + \mathrm{Im}\,\partial''_{n+1} \in H_n(E)$

Demostración

Sean $y_1, y_2 \in D_n$ de manera que $g_n(y_1) = g_n(y_2) = z$ y consideremos que x_1 es el elemento que cumple con

$f_{n-1}(x_1) = \partial'_n(y_1)$ y que x_2 es tal que $f_{n-1}(x_2) = \partial'_n(y_2)$.

Como $y_1 - y_2 \in \ker g_n = \operatorname{Im} f_n$, existe $a \in C_n$ de manera que $f_n(a) = y_1 - y_2$, por la conmutatividad de el diagrama se tiene que

$$f_{n-1}(\partial_n(a)) = \partial'_n(y_1 - y_2) \quad \text{y}$$
$$\partial'_n(y_1 - y_2) = f_{n-1}(x_1 - x_2) \quad \text{de a qui que}$$
$$x_1 - x_2 = \partial_n(a) \in \operatorname{Im} \partial_n \quad \text{lo que implica}$$
$$x_1 + \operatorname{Im} \partial_n = x_2 + \operatorname{Im} \partial_n.$$

Lema 1.22

La función $\partial^*: H_n(E) \longrightarrow H_{n-1}(C)$ es un homomorfismo de R-módulos.

Comentario 6

En base a lo anterior a partir de una sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

obtenemos una sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\partial^*_{n+1}} H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\partial^*_n} H_{n-1}(C) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(D) \longrightarrow \cdots$$

la cual se llama sucesión de homología de la sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

Teorema 1.23

La sucesión de homología de toda sucesión exacta corta de complejos de cadenas, es exacta. Es decir dada una sucesión exacta de complejos de cadenas.

S: $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$; obtenemos una sucesión exacta.

$$\cdots \xrightarrow{\partial^*_{n-1}} H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\partial^*} H_{n-1}(C) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} \cdot$$

la cual es llamada sucesión de homologías de la sucesión exacta S.

Observación

Consideremos una sucesión exacta corta de S de sucesiones descendentes

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

con ello queremos expresar que f: C —— D y g: D —— E son homomorfismos de sucesiones descendentes tales que

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de R-módulos para todo entero n.

Proposición 1.24

Si en la sucesión exacta corta (S), dos de las tres sucesiones descendentes C, D, E son exactas, también lo es la ter_ cera.

Demostración

Consideremos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[dd, "\partial_{n+1}"'] & D_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[dd, "\partial'_{n+1}"] & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[dd, "\partial''_{n+1}"] & 0 \\
 & & b_{n+1} & g_{n+1}(b_{n+1})=y \arrow[l, squiggly] & \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[dd, "\partial_n"'] & D_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[dd, "\partial'_n"] & E_n \arrow[r] \arrow[dd, "\partial''_n"] & 0 \\
 & a_n \arrow[r, squiggly] & b_n - f_n(a_n) & g_n(b_n)=x \arrow[l, squiggly] & \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[dd] & D_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[dd] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
 & \partial_n(a_n)=a_{n-1} & f_{n-1}(a_{n-1})=\partial'_n(b_n) \arrow[l, squiggly] & & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Las filas son exactas los rectángulos conmutativos y las dos primeras columnas son exactas; probaremos la exactitud de la tercera columna.

Sea $x \in \ker \partial''_n$, buscamos $y \in E_{n+1}$ tq $\partial''_{n+1}\ (y) = x$.

Como $\ker \partial''_n \subset E_n$ y g_n es sobreyectiva, $\exists b_n \in D_n$ tal que $g_n(b_n) = x$, por la conmutatividad del diagrama.

$$g_{n-1}(\partial'_n(b_n)) = \partial''_n(g_n(b_n)) = \partial''_n(x) = 0$$

esto implica que $x \in \ker \partial''_n$ por lo tanto

$\partial'(b_n) \in \ker \; g_{n-1} = \operatorname{Im} f_{n-1}$, es decir

$\exists\, a_{n-1} \in C_{n-1}$ tal que $f_{n-1}(a_{n-1}) = \partial'_n(b_n)$

esto implica que $\exists\, a_n \in C_n$ tal que $\partial_n(a_n) = a_{n-1}$

de nuevo por la conmutatividad del diagrama

$$\partial'_n(f_n(a_n)) = f_{n-1}(\partial_n(a_n)) = f_{n-1}(a_{n-1}) = \partial'_n(b_n)$$

asi

$$\partial'_n(f_n(a_n)) - \partial'_n(b_n) = 0$$

$$\partial'_n(f_n(a_n)) - \partial'_n(b_n) = 0$$

$$\partial'_n(b_n) - \partial'_n(f_n(a_n)) = 0$$

$$\partial'_n(b_n - f_n(a_n)) = 0$$

$\Rightarrow b_n - f_n(a_n) \in \ker \partial'_n = \operatorname{Im} \partial'_{n+1}$ para el cual existe

$b_{n+1} \in D_{n+1}$ tal que

$\partial'_{n+1}(b_{n+1}) = b_n - f_n(a_n)$ y por la conmutatividad del diagra_
ma

$$g_n(\partial'_{n+1}(b_{n+1})) = \partial''_{n+1}(g_{n+1}(b_{n+1}))$$

$$\partial''_{n+1}(g_{n+1}(b_{n+1})) = g_n(b_n - f_n(a_n))$$

$$\partial''_{n+1}(g_{n+1}(b_{n+1})) = g_n(b_n) - g_n(f_n(a_n))$$

$$\partial''_{n+1}(g_{n+1}(b_{n+1})) = g_n(b_n)$$

$$\partial''_{n+1}(g_{n+1}(b_{n+1})) = x$$

tomando $y = g_{n+1}(b_{n+1}) \in E_{n+1}$ tenemos que

$\partial''_{n+1}(y) = x$ y asi $x \in \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$

$$\therefore \ker \partial'' \subset \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$$

probaremos ahora que

$$\operatorname{Im} \partial''_{n+1} \subset \ker \partial''_n$$

consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}"'] & D_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "\partial'_{n+1}"] & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{n+1}"] & 0 \\
 & b_{n+1} & & c_{n+1}=g_{n+1}(b_{n+1}) & \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d] & D_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d] & E_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_n"] & 0 \\
 & & & y=\partial''_{n+1}(c_{n+1}) & \\
 & & D_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] & E_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

Sea $y \in \operatorname{Im} \partial''$ se probará que $\partial''_n(y) = 0$

$y \in \operatorname{Im} \partial''_{n+1} \Rightarrow \exists C_{n+1} \in E_{n+1} / \partial''_{n+1}(C_{n+1}) = y$

como g_{n+1} es sobreyectiva $\exists b_{n+1} \in D_{n+1}$ tal que

$g_{n+1}(b_{n+1}) = c_{n+1}$, como el diagrama es conmutativo

$g_n(\partial'_{n+1}(b_{n+1})) = \partial''_{n+1}(g_{n+1}(b_{n+1})) = \partial''_{n+1}(c_{n+1}) = y$

$\partial''_n(y) = \partial''_n(g_n(\partial'_{n+1}(b_{n+1}))$

$\partial''_n(y) = \partial''_n \circ g_n(\partial'_n \ (b_{n+1}))$

$\partial''_n(y) = (g_{n-1} \circ \partial'_n)(\partial'_{n+1}(b_{n+1}))$

$\partial''_n(y) = g_{n-1}(\partial'_n(\partial'_{n+1}(b_{n+1}))$

$\partial''_n(y) = g_{n-1}(0) = 0$

asi $y \in \ker \partial''_n$

$\therefore \operatorname{Im} \partial''_{n+1} \subset \ker \partial''_n$

probando asi el resultado es decir

$$\operatorname{Im} \partial''_{n+1} = \ker \partial''_{n}$$

Homomorfismo de conexión para sucesiones asendentes

A continuación se tratará el proceso de definición del homomorfismo de conexión (δ^{*n}) del módulo $H^n(E)$ en el módulo $H^{n+1}(C)$, $\forall n \in Z$.

$$\delta^{*n}: H^n(E) \longrightarrow H^{n+1}(C)$$

Sea $z + \operatorname{Im} \delta^n \in \dfrac{\ker \delta_{11}^{n+1}}{\operatorname{Im} \delta_{11}^{n}}$

consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & & {} \arrow[d] & & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "\delta^n"'] & & D^{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d, "\delta_1^n"] & & E^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta_{11}^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^n \arrow[r, "f_n"] \arrow[dd, "\delta_1^{n+1}"'] & & D^n \arrow[r, "g_n"] \arrow[dd, "\delta_1^{n+1}"] & & E^n \arrow[r] \arrow[dd, "\delta_{11}^{n+1}"] & {} \\
 & & & y \arrow[r, squiggly] & g(y)=z & & \\
0 \arrow[r] & C^{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[dd, "\delta^{n+2}"'] & & D^{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[dd, "\delta_1^{n+2}"] & & E^{n+1} \arrow[r] \arrow[dd, "\delta_{11}^{n+2}"] & 0 \\
 & x \arrow[r, squiggly] & f^{n+1}(x)=\delta_1^{n+1}(y) & = & & & \\
0 \arrow[r] & C^{n+2} \arrow[r, "f_{n+2}"] \arrow[d] & & D^{n+2} \arrow[r, "g_{n+2}"] \arrow[d] & & E^{n+2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

$z \in E_n$ y g_n es sobreyectiva, esto implica $\exists y \in D^n$ tal que

$z = g_n(y)$, por la conmutatividad del diagrama

$g_{n+1}(\delta_1^{n+1}(y)) = \delta_{11}^{n+1}(g_n(y)) = \delta_{11}^{n+1}(z) = 0$

$g_{n+1}(\delta_1^{n+1}(y)) = 0$ asi

$\delta_1^{n+1}(y) \in \ker g_{n+1} = \operatorname{Im} f_{n+1}$, para el cual

$\exists x \in C^{n+1}$ tal que $f_{n+1}(x) = \delta_1^{n+1}(y)$

por la conmutatividad del diagrama

$f_{n+2}(\delta^{n+2}(x)) = \delta^{n+2}(f_{n+1}(x)) = \delta_1^{n+2}(\delta_1^{n+2}(y)) = 0$

dado que f_{n+2} es monomorfismo $\delta^{n+2}(x) = 0$ y asi

$x \in \ker \delta^{n+2}$ con el cual se puede definir

$\partial^{*n}(z + \operatorname{Im} \delta_{11}^{n}) = x + \operatorname{Im} \delta^{n+1}$, donde $f_{n+1}(x) = \delta_1^{n+1}(y)$ y

$g_n(y) = z$

Es facil probar que δ^{xn} es una función probaremos a continuación que

$\delta^{*n}: H^n(E) \longrightarrow H^{n+1}(C)$ es un homomorfismo de módulos.

Sean

$$z_1 + \operatorname{Im} \delta_{11}^{n} \text{ y } z_2 + \operatorname{Im} \delta_{11}^{n} \in \frac{\ker \delta_{11}^{n+1}}{\operatorname{Im} \delta_{11}^{n}}$$

$\delta^{*n}(z_1+\operatorname{Im} \delta_{11}^{n}) = x_1 + \operatorname{Im} \delta^{n+1}$, $f_{n+1}(x_1) = \delta_1^{n+1}(y_1), g_n(y_1) = z_1$

$\delta^{*n}(z_2+\operatorname{Im} \delta_{11}^{n}) = x_2 + \operatorname{Im} \delta^{n+1}$, $f_{n+1}(x_2) = \delta_1^{n+1}(y_2), g_n(y_2) = z_2$

$f_{n+1}(x_1+x_2) = f_{n+1}(x_1) + f_{n+1}(x_2)$

$f_{n+1}(x_1+x_2) = \delta_1^{n+1}(y_1) + \delta_1^{n+1}(y_2)$

$f_{n+1}(x_1+x_2) = \delta_1^{n+1}(y_1+y_2)$

$g_n(y_1+y_2) = g_n(y_1) + g_n(y_2) = z_1 + z_2$ luego

$$\delta^{*n}\left[(z_1+\mathrm{Im}\ \delta^n_{11}) + (z_2+\mathrm{Im}\ \delta^n_{11})\right] = \delta^{*n}\left[(z_1+z_2) + \mathrm{Im}\ \delta^n_{11})\right]$$

$$\delta^{*n}\left[(z_n+\mathrm{Im}\ \delta^n_{11}) + (z_2+\mathrm{Im}\ \delta^n_{11})\right] = x_1 + x_2 + \mathrm{Im}\ \delta^{n+1}$$

$$\delta^{*n}\left[(z_1+\mathrm{Im}\ \delta^n_{11}) + (z_2+\mathrm{Im}\ \delta^n_{11})\right] = x_1 + x_2 + \mathrm{Im}\ \delta^{n+1}$$

$$\delta^{*n}\left[(z_1+\mathrm{Im}\ \delta^n_{11}) + (z_2+\mathrm{Im}\ \delta^n_{11})\right] = x_1 + \mathrm{Im}\ \delta^{n+1} + x_2 + \mathrm{Im}\ \delta^{n+1}$$

$$\delta^{*n}\left[(z_1+\mathrm{Im}\ \delta^n_{11}) + (z_2+\mathrm{Im}\ \delta^n_{11})\right] = \delta^{*n}(z_1+\mathrm{Im}\ \delta^n_{11})+\delta^{*n}(z_2+\mathrm{Im}\ \delta^n_{11})$$

$\therefore$ δ^{*n} es un homomorfismo de módulos.

CAPITULO II

1- PRODUCTO TENSORIAL

Definición 2.1

Sean A y B dos R-módulos cualesquiera y consideremos el producto cartesiano A x B de los conjuntos A y B, una función

$$g: A \times B \longrightarrow X$$

de A x B en el módulo X es llamada bilineal si y sólo si

B1) $g(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) = \alpha_1 g(a_1, b) + \alpha_2 g(a_2, b)$

B2) $g(a_1 \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) = \beta_1 g(a_1 b_1) + \beta_2 g(a, b_2)$

para todo $a_1, a_2, a \in A$, $b_1, b_2, b \in B$ y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$

Definición 2.2

Un producto tensorial (sobre R) de módulos A y B, es un módulo T junto con una función bilineal

$$f: A \times B \longrightarrow T$$

tal que, para toda función bilineal

$$g: A \times B \longrightarrow X$$

de A x B en X, existe un único homomorfismo

$$h: T \longrightarrow X$$

del módulo T en el módulo X, que satisface la relación de conmutatividad

$$h \circ f = g$$

en el siguiente triángulo

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, "h"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Teorema 2.1

Si un R-módulo T con una función bilineal $f: A \times B \longrightarrow T$ es un producto tensorial sobre R de los módulos A y B, entonces la imagen $f(A \times B)$ genera al módulo T.

Teorema 2.2

Si (T,f) y (T',f') son productos tensoriales sobre los módulos A y B, entonces existe un único isomorfismo

$$j: T \longrightarrow T'$$

del módulo T en el módulo T' tal que

$$j \circ f = f'$$

Teorema 2.3

Dados dos R-módulos cualesquiera A y B, existe un producto tensorial sobre R de A y B.

De este resultado todo par de módulos A y B sobre R determinan un producto tensorial (T,f) esencialmente único; este módulo T se denota usualmente por $A \otimes B$ y recibe el nombre de producto tensorial sobre R de los módulos A y B y a la función bilineal $f: A \times B \longrightarrow T$ la denotaremos por $\top: A \times B \longrightarrow A \otimes B$ y la denominaremos aplicación tensorial.

$$\begin{aligned} \top: A \times B &\longrightarrow A \otimes B \\ (a,b) &\rightsquigarrow \top(a,b) = a \otimes b \end{aligned}$$

el elemento $a \otimes b$ recibirá el nombre de producto tensorial sobre R de los elementos a y b.

De el teorema (T2.1) tenemos que $\top(A \times B)$ genera el módulo $A \otimes B$, todo elemento t de $A \otimes B$ puede ser escrito en la forma

$$t = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (a_i \otimes b_i) .$$

donde $a_i \in A$, $b_i \in B$ y $\gamma_i \in R$, para todo $i = 1,2,\ldots,n$

Proposición 2.4

Sean X, Y, Z, R-módulos entonces, se cumple que

1) $X \otimes Y \approx Y \otimes X$

2) $(X \otimes Y) \otimes Z \approx X \otimes Y \otimes Z \approx X \otimes (Y \otimes Z)$

3) $X \otimes R \approx X \approx R \otimes X$

Definición 2.3

Si $f: A \longrightarrow B$ y $g: A' \longrightarrow B'$, son homomorfismos de módulos, entonces la aplicación bilineal

$$f \times g : A \times A' \longrightarrow B \times B'$$
$$(a,a') \rightsquigarrow (f(a), f(a'))$$

en este caso si $A \times B \xrightarrow{T} A \otimes B$ y $A' \times B' \xrightarrow{T} A' \otimes B'$ son los respectivos productos tensoriales; tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "T"] \arrow[d, "f x g"'] & A \otimes B \arrow[d, "k"] \\ A' \times B' \arrow[r, "T'"] & A' \otimes B' \end{tikzcd}$$

en donde $T \circ (f x g)$ es bilineal, y por la propiedad universal del producto tensorial, existe un único homomorfismo de módulos

$$k : A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B'$$

de manera que

$$k \circ T = T' \circ (f x g)$$

es decir tal que

$$k(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$$

denotamos a este homomorfismo k por $f \otimes g$ y se llama el producto tensorial de los homomorfismos f y g.

Proposición 2.5

1) Si $1_A : A \longrightarrow A$ y $1_B : B \longrightarrow B$, son los homomorfismos identidad entonces $1_A \otimes 1_B : A \otimes B \longrightarrow A \otimes B$ es el homomorfismo identidad de $A \otimes B$.

2) Si $f: A \longrightarrow A'$, $f': A' \longrightarrow A''$, $g: B \longrightarrow B'$ y $g': B' \longrightarrow B''$

Son homomorfismos de módulos, entonces

$$(f'\circ f) \otimes (g'\circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$$

consideremos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\top} & A \otimes B \\ {\scriptstyle f\times g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f\oplus g} \\ A' \times B' & \xrightarrow{\top'} & A' \otimes B' \\ {\scriptstyle f'\times g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'\oplus g'} \\ A'' \times B'' & \xrightarrow{\top''} & A'' \otimes B'' \end{array}$$

de el cual tenemos

$$(f'\times g') \circ (f\times g): A \times B \longrightarrow A' \otimes B''$$

esta función es bilineal, existe un único homomorfismo

$$k: A \otimes B \text{ —— } A'' \otimes B'' \quad \text{tal que}$$

$$k\circ\top = \top''\circ(f'\times g') \circ (f\times g) = \top''\circ(f'\circ f\times g'\circ g)$$

donde k

$$k = (f'\circ f) \otimes (g'\circ g) \quad \text{es decir}$$

$$(f'\circ f) \otimes (g'\circ g) \circ \top = (f' \otimes g') \circ \top' \circ (f\times g)$$

$$(f'\circ f) \otimes (g'\circ g) \circ \top = (f' \_ g') \circ \top' \circ (f\times g)$$

$$= \top'' \circ f' \times g' \circ f \times g$$

$$= \top'' \circ(f'\circ f \times g'\circ g)$$

y por la unicidad del homomorfismo k tenemos

$$(f'\circ f) \otimes (g'\circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$$

Teorema 2.6

Si los R-módulos A y B son descomponibles en suna directa

$$A = \sum_{U \in M} A_U \qquad B = \sum_{V \in N} B_V$$

de submódulos, entonces $A \otimes B \simeq \sum_{(U,V)} A_U \otimes B_V$

Demostración

Sean $i_U : A_U \longrightarrow A$ y $j_V : B_V \longrightarrow B$ los homomorfismos inclusión y su producto tensorial

$$i_U \otimes j_V : A_U \otimes B_V \longrightarrow A \otimes B$$

para todo $U \in M$ y $V \in N$.

Por definición, todo elemento s de la suma directa

$$S = \sum_{(U,V)} A_U \otimes B_V$$

puede ser únicamente escrito en la forma

$$s = \sum_{(U,V) \in F} x_{UV}$$

donde F es un subconjunto finito de $M \times N$ y $x_{UV} \in A_U \otimes B_V$.

para todo $(U,V) \in F$, definamos un homomorfismo

$$h : S \longrightarrow A \otimes B$$

$$s \rightsquigarrow h(s) = \sum_{(U,V) \in F} (i_U \otimes j_V)(x_{UV})$$

por otra parte consideremos las proyecciones naturales

$p_U: A \longrightarrow A_U$ y $q_V: B \longrightarrow B_V$, juntamente con su producto tensorial

$$p_U \otimes q_V: A \otimes B \longrightarrow A_U \otimes B_V$$

para todo $U \in M$, $V \in N$ el producto restringido de

$$\{p_U \otimes q_V / V \in M,\ V \in N\}$$

define un homomorfismo

$$k: A \otimes B \longrightarrow S$$

probaremos que $h \circ k$ es el homomorfismo identidad sobre $A \otimes B$.

Sean $a \in A$ y $b \in B$

$$h[k(a \otimes b)] = h[\sum_{(U,V)} (p_U \otimes q_V)(a \otimes b)]$$

$$= \sum_{(U,V)} (i_U \otimes j_V)(p_U \otimes q_V)(a \otimes b)$$

$$= \sum_{(U,V)} \{[(i_U \circ p_U)(a)] \otimes [(j_V \circ q_V)(b)]\}$$

$$= [\sum_U (i_U \circ p_U)(a)] \otimes [\sum_V (j_V \circ q_V) b)] = a \otimes b$$

como los elementos $a \otimes b$ generan al módulo $A \otimes B$ sobre R, resulta ser $h \circ k$ homomorfismo identidad sobre $A \otimes B$.

Probaremos que $k \circ h$ es el homomorfismo identidad sobre S.

Sean $\alpha \in M$, $\beta \in N$, $a \in A_\alpha$ y $b \in B_\beta$, arbitrariamente dados; consideremos además

$$a \otimes b \in A_\alpha \otimes B_\beta \subset S$$

$$k[h(a \otimes b)] = k[(i_\alpha \otimes j_\beta)(a \otimes b)]$$

$$= \sum_{(U,V)} (p_U \otimes q_V)[(i_\alpha \otimes j_\beta)(a \otimes b)]$$

$$= [\sum_U (p_U \circ i_\alpha)(a)] \otimes [\sum_V (q_V \circ j_\beta)(b)]$$

$$= a \otimes b$$

como los elementos $a \otimes b$ generan el módulo S, se deduce que $k \circ h$ es el homomorfismo identidad sobre S, luego h y k son isomorfismos.

Teorema 2.7

Si $f: A \longrightarrow A'$ y $g: B \longrightarrow B'$ son epimorfismos de R-módulos entonces el producto tensorial

$$h = f \otimes g: A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B'$$

sobre R es también un epimorfismo y su núcleo kerh es el submó dulo M de $A \otimes B$ engendrado por los elementos $a \otimes b$ de $A \otimes B$ con $a \in$ kerh o $b \in$ kerg

Corolario 2.8

Si $f: A \longrightarrow A'$ y $g: B \longrightarrow B'$ son isomorfismos de R-módulos, entonces el producto tensorial

$$h = f \otimes g: A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B'$$

es también un isomorfismo

Teorema 2.9

Si M es un R-módulo arbitrario y $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta, entonces la sucesión

$$A \otimes M \xrightarrow{f\otimes i} B \otimes M \xrightarrow{g\otimes i} C \otimes M \longrightarrow 0$$

es también exacta.

Teorema 2.10

Si la sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corga descomponible entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow A \otimes M \xrightarrow{f\otimes i} B \otimes M \xrightarrow{g\otimes i} C \otimes M \longrightarrow 0$$

es exacta y se escinde.

Demostración

Como $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta que se escinde, existe $h: B \longrightarrow A$ tal que

$$h \circ f = 1_A$$

esto implica que

$$(h \otimes 1_M) \circ (f \otimes 1_M) = h \circ f \otimes 1_M$$
$$= 1_A \otimes 1_M = 1_{A \otimes M}$$

luego por (1.17) la sucesión

$$0 \longrightarrow A \otimes M \xrightarrow{f\otimes i} B \otimes M \xrightarrow{g\otimes i} C \otimes M \longrightarrow 0$$

se escinde

y como $(h \otimes i) \circ (f \otimes i)$ es inyectiva entonces $f \otimes i$ es inyectiva

luego

$$0 \longrightarrow A \otimes M \xrightarrow{f \otimes i} B \otimes M \xrightarrow{g \otimes i} C \otimes M \longrightarrow 0$$

es exacta.

2- MODULOS DE HOMOMORFISMOS

Sean A y B R-módulos cualesquiera y consideremos el conjunto

$$\Phi = \mathrm{Hom}_R(A,B)$$

de todos los homomorfismos del módulo A en el módulo B.

Definamos una adición + en este conjunto Φ tomando como suma de los homomorfismos ϕ, ψ: $A \longrightarrow B$ el homomorfismo

i) $\phi + \psi : A \longrightarrow B$

$x \rightsquigarrow (\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$

y

ii) $\alpha\phi : A \longrightarrow B$

$x \rightsquigarrow (\alpha\phi)(x) = \alpha(\phi(x))$

para todo $\alpha \in R$.

Con la adición definida en Φ, Φ se dota de una estructura de grupo abeliano.

Por la forma que está definido (ii) define una multiplicación escalar en el grupo abeliano Φ así:

$$\mu: R \times \Phi \longrightarrow \Phi$$
$$(\alpha,\phi) \rightsquigarrow \mu(\alpha,\phi) = \alpha\phi$$

asi Φ que dotado como R-módulo recibiemdo el nombre de módulo de los homomorfismos de A en B; es de notar que el elemento cero de Φ es el homomorfismo trivial 0.

Proposición 2.11

Para todo R-módulo X se tiene siempre

$$\mathrm{Hom}(R,X) \simeq X$$

Demostración.

Sea $h: \mathrm{Hom}(R,X) \longrightarrow X$
$$\phi \rightsquigarrow h(\phi) = \phi(1)$$

por definición de adición y multiplicación escalar en Hom(R,X), se comprueba fácilmente que h es un homomorfismo de módulos.

Probaremos ahora que h es isomorfismo

Sea

$x \in X$, como R es un módulo libre engendrado por 1, existe un único homomorfismo

$$\phi: R \longrightarrow X$$

en Hom(R,X) tal que $h(\phi) = \phi(1) = x$

esto implica que h es un isomorfismo.

Definición 2.4

Sean $f: A' \longrightarrow A$, $g: B \longrightarrow B'$ dos homomorfismos cualesquiera de R-módulos y consideremos los módulos Hom(A,B) y Hom(A',B') y sea h definida de la siguiente manera

$$h: \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A',B')$$
$$\phi \rightsquigarrow h(\phi) = g \circ \phi \circ f$$

lo que ilustra el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, dash, "g\circ\phi\circ f"] \arrow[d, "f"'] & B' \\ A \arrow[r, "\phi"'] & B \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

evidentemente h es un homomorfismo del módulo Hom(A,B) en el módulo Hom(A',B') que denotaremos con el símbolo Hom(f,g).

Proposición 2.12

1) Si $i: A \longrightarrow A$ y $j: B \longrightarrow B$ son los homomorfismos identidad de los módulos A y B, entonces

$$\mathrm{Hom}(i,j): \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B)$$

es el homomorfismo identidad del módulo Hom(A,B)

2) Si $f: A' \longrightarrow A$, $f': A'' \longrightarrow A'$, $g: B \longrightarrow B'$, $g': B' \longrightarrow B''$ son homomorfismos de módulos, entonces tenemos

$$\mathrm{Hom}(f\circ f', g'\circ g) = \mathrm{Hom}(f',g') \circ \mathrm{Hom}(f,g)$$

tal como lo muestra el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A'' \arrow[r, dashed, "(g'\circ g)\circ\phi\circ(f\circ g')"] \arrow[d, "f'"'] & B'' \\
A' \arrow[r, dashed, "g\circ\phi\circ g"] \arrow[d, "f"'] & B' \arrow[u, "g'"'] \\
A \arrow[r, "\phi"'] & B \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

$Hom(f\circ f',\ g'\circ g)(\phi) = g'\circ g\circ\phi\circ f\circ f'$

$Hom(f\circ g',\ g'\circ g)(\phi) = g'\circ Hom(f,g)(\phi)\circ f'$

$Hom(f\circ g',\ g'\circ g)(\phi) = (Hom(f',f')\circ Hom(f,g))(\phi)$

3) Si $f: A' \longrightarrow A$ y $g: B \longrightarrow B'$ son isomorfismos de módulos entonces también lo es

$$Hom(f,g): Hom(A,B) \longrightarrow Hom(A',B')$$

Demostración

Existen homomorfismos $h: A \longrightarrow A'$ y $k: B' \longrightarrow B$ tales que $h\circ f$, $f\circ h$, $k\circ g$, $g\circ k$ son los homomorfismos identidad y por (p2.12) se deduce que los productos

$$Hom(h,k)\circ Hom(f,g),\ Hom(f,g)\circ Hom(h,k)$$

son los homomorfismos identidad de los módulos $Hom(A,B)$ y $Hom(A',B')$ respectivamente

Teorema 2.13

Si los R-módulos A y B son descomponibles en suma directa y producto directo

$$A = \sum_{U \in M} A_U \qquad B = \prod_{V \in N} B_V$$

entonces tenemos

$$\mathrm{Hom}(A,B) \approx \prod_{(V,U)} \mathrm{Hom}(A_U, B_V)$$

Teorema 2.14

Siendo $f: A' \longrightarrow A$ y $g: B \longrightarrow B'$, homomorfismos de módulos, el núcleo del homomorfismo

$$h: \mathrm{Hom}(f,g): \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A',B')$$

es el submódulo M de Hom(A,B) definido por

$$M = \{\phi \in \mathrm{Hom}(A,B) / \phi(\mathrm{Imf}) \subset \ker g\}$$

Demostración

Sea $\phi \in M$, arbitrariamente dado, probaremos que $M \subset \ker h$, viendo que $h(\phi) = 0$.

Sea $x \in A'$, como $f(x) \in \mathrm{Imf}$ y $\phi \in M$, tenemos $\phi(f(x)) \in \ker g$. Luego

$$[h(\phi)](x) = (g \circ \phi \circ f)(x) = g[\phi(f(x))] = 0$$

lo que prueba que $h(\phi) = 0$ y de aquí que $M \subset \ker h$

Sea $\phi \in \ker h$, entonces

$$g \circ \phi \circ f = h(\phi) = 0$$

y por la proposición (p1.5) esto implica $Im(\phi \circ f) \subset \ker g$ por la relación conjuntista $Im(\phi \circ f) = \phi(Imf)$
por consiguiente obtenemos

$$\phi[Imf] \subset \ker g$$

lo que implica que $\phi \in M$ y por tanto $\ker h \subset M$.

Corolario 2.15

Si $f: A' \longrightarrow A$ es un epimorfismo y $g: B \longrightarrow B'$ es un monomorfismo de módulos, entonces

$$h = Hom(f,g): Hom(A,B) \longrightarrow Hom(A',B')$$

es un monomorfismo

Demostración

Como $\ker[Hom(f,g)] = \{\phi \in Hom(A,B)/\phi(Imf) \subset \ker g\}$ y por hipótesis $\ker g = 0$ y $Imf = A$
$\phi \in \ker(f,g)$ si y sólo si $\phi(Imf) = 0$
si y sólo si $\phi(A) = 0$ y así $\phi = 0$
lo que prueba el resultado.

Teorema 2.16

Si M es un R-módulo arbitrario y
$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$, es una sucesión exacta de R-módulos,

entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C,M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(B,M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(A,M)$$

con $f^* = \mathrm{Hom}(f,i)$ y $g^* = \mathrm{Hom}(g,i)$, donde $i: M \longrightarrow M$ es el homomorfismo identidad del módulo M, es también exacta.

Demostración

Como g es epimorfismo e i es monomorfismo, se deduce de (c2.15) que g^* es monomorfismo, como $g \circ f = 0$, es inmediato que $\mathrm{Hom}(g \circ f, i) = 0$

luego

$$f^* \circ g^* = \mathrm{Hom}(g \circ f, i \circ i) = \mathrm{Hom}(g \circ f, i) = 0$$

en virtud de (p2.12) y (p1.5) deducimos

$$\mathrm{Im}\ g^* \subset \ker f^*$$

falta establecer la inelusión

$$\ker f^* \subset \mathrm{im}\ g^*$$

para ello, sea

$\phi \in \ker f^*$, denominemos $T = \mathrm{im} f = \ker g$

como $f^* = \mathrm{Hom}(f(i)$, se sigue de (T2.14) que

$$\phi(T) = \phi[\mathrm{Im} f] \subset \ker i = 0 \quad \text{y}$$

por ello $\phi(T) = 0$, por consiguiente, $\phi: B \longrightarrow M$

induce un homomorfismo

$$\psi: \frac{B}{T} \longrightarrow M$$

como g es un epimorfismo con T como núcleo, induce un isomorfismo

$$h\colon \frac{B}{T} \approx C$$

Sea $p\colon B \longrightarrow \frac{B}{T}$, la proyección natural, obtenemos así el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\phi"'] & & \frac{B}{T} \arrow[ul, "h"'] \arrow[dl, "\psi"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

en él los dos triángulos son conmutativos. Siendo h isomorfismo, podemos definir un homomorfismo

$$\psi \circ h^{-1}\colon C \longrightarrow M$$

entonces $\psi \circ h^{-1} \in \mathrm{Hom}(C,M)$ y

$$g^*(\psi \circ h^{-1}) = \psi \circ h^{-1} \circ g = \psi \circ p = \phi$$

luego $\phi \in \mathrm{Im}(\sigma^*)$ y $\ker f^* \subset \mathrm{Im}\, g^*$.

Teorema 2.17

Si la sucesión de homomorfismos de R-módulos $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta que se escinde, entonces igual sucede con la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C,M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(B,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,M) \xrightarrow{f^*} 0$$

donde $f^* = \mathrm{Hom}(f,i)$ y $g^* = \mathrm{Hom}(g,i)$; $i\colon M \longrightarrow M$ es el endomorfismo identidad de el módulo M.

Demostración

Por (C1.17), f tiene un inverso por la izquierda es decir, existe un homomorfismo $h: B \longrightarrow A$ tal que el producto

$$j = h \circ f$$

es el endomorfismo identidad del módulo A. Como

$$\mathrm{Hom}(f,i) \circ \mathrm{Hom}(h,i) = \mathrm{Hom}(h \circ f,i) = \mathrm{Hom}(j,i)$$

es el endomorfismo identidad de Hom(A,M), se deduce de (T1.7) que f^* es un epimorfismo y por (T2.16) la sucesión segunda de (T2.17) es una sucesión exacta corta, y en virtud de (C1.17) se descompone.

Teorema 2.18

Si M es un R-módulo arbitrario y $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es una sucesión exacta de R-módulos, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,A) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(M,B) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(M,C)$$

con $f^* = \mathrm{Hom}(i,f)$ y $g^* = \mathrm{Hom}(i,g)$; $i: M \longrightarrow M$ denota el homomorfismo identidad de M, es también una sucesión exacta.

Demostración

Como f es monomorfismo e i epimorfismo, se deduce de (C2.15) que $g^* = \mathrm{Hom}(i,f)$ es monomorfismo como $g \circ f = 0$ es inmediato que $\mathrm{Hom}(i,g \circ f) = 0$

luego $f^* \circ g^* = \mathrm{Hom}(i\circ i,\ g\circ f) = \mathrm{Hom}(i, g\circ f) = 0$ en virtud de (P2.12) y P1.5) esto implica

$$\mathrm{Im}\, f^* \subset \ker g^*$$

Establezcamos ahora

$$\ker g^* \subset \mathrm{Im}\, f^*$$

sea $\phi \in \ker g^*$

Como $g^* = \mathrm{Hom}(i,g)$ deducimos de (T2.14) que

$\phi(M) = \phi[\mathrm{Im}\ i] \subset \ker g = \mathrm{Im} f$

puesto que f es monomorfismo, existe un isomorfismo

$$j: \mathrm{Im} f \approx A$$

tal que $f\circ j$ es el homomorfismo inclusión de Imf en B. Definamos un homomorfismo

$$\psi: M \longrightarrow A \quad \text{tomando } \psi(x) = j(\phi(x))$$

para todo x M, entonces es un elemento de Hom(M,A) y

$[f^*(\psi)](x) = f\{j[\phi(x)]\} = \phi(x)$

para todo $x \in M$, esto prueba que $f^*(\psi) = \phi$ y de aquí que

$\phi \in \mathrm{Im} f^*$, luego

$$\ker g^* \subset \mathrm{Im} f^*.$$

Teorema 2.19

Si la siguiente sucesión de homomorfismos de R-módulos

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta que se escinde, entonces igual sucede con la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{HOm}(M,A) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(M,B) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(M,C) \longrightarrow 0$$

donde $f^* = \mathrm{Hom}(i,f)$ y $g^* = \mathrm{Hom}(i,g)$, donde $i: M \longrightarrow M$ es el endomorfismo identidad.

Demostración

Por (C1.17), el homomorfismo g posee inverso por la derecha, es decir, existe un homomorfismo $h: C \longrightarrow B$ tal que

$$j = g \circ h$$

es el endomorfismo identidad del módulo C, como

$$\mathrm{Hom}(i,g) \circ \mathrm{Hom}(i,h) = \mathrm{Hom}(i \circ i,\ g \circ h) = \mathrm{Hom}(i,j)$$

es el endomorfismo identidad de Hom(C,M), se deduce de (T1.7) que $g^* = \mathrm{Hom}(i,g)$ es un epimorfismo, por (T2.17), esto implica que la sucesión de la conclusión de (T2.19) es una sucesión exacta corta, se escinde en virtud de (C1.17).

3- MODULOS PROYECTIVOS

Definición 2.5

Se dice que un módulo X es proyectivo si y sólo si, para todo homomorfismo $f: X \longrightarrow B$ y todo epimorfismo $g: A \longrightarrow B$ de R-módulos, existe un homomorfismo $h: X \longrightarrow A$ que satisface

$$g \circ h = f$$

haciendo uso de diagrama esta definición puede ser expresada como sigue.

Un R-módulo X es proyectivo si y sólo si todo diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ A & \xrightarrow[g]{} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

de homomorfismos de R-módulos, cuya fila es exacta puede ser inmerso en un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$g \circ h = f \qquad .$$

Proposición 2.20

Todo R-módulo libre es proyectivo

Demostración

Sea F un módulo libre sobre S, y consideremos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & S \arrow[d, "i"] \arrow[dl, "k'"'] \\
 & F \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "k"'] \\
A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{c}
x \\ \rotatebox{-90}{$\rightsquigarrow$} \\ i(x) \\ \rotatebox{-90}{$\rightsquigarrow$} \\ a \rightsquigarrow g(a) = f(x)
\end{array}
$$

para cualquier $x \in S$, tenemos que $f(x) \in B$

como g es sobreyectiva, existen elementos en A que son preimagenes de $f(x)$. Usando el axiona de elección escogemos una de ellos de una vez por todas, es decir $g(a) = f(x)$

Definamos $k': S \longrightarrow A$

$$x \rightsquigarrow k'(x) = a,\ g(a) = f(x).$$

y así tenemos que $g \circ k' = f \circ i$ (1)

Usando la propiedad universal de módulo libre eixste un único homomorfismo $k: T \longrightarrow A$ de manera que

$$k \circ i = k' \qquad (2)$$

de (1) y (2) tenemos que

$$g \circ k' = f \circ i$$

$$g \circ k \circ i = f \circ i$$

$$(g \circ k \circ i)(y) = (f \circ i)(y);\ y \in S$$

$$(g \circ k)(y) = f(y);\quad y \in S$$

$$\therefore g \circ k = f$$

para $z \in F$, como S genera a F, $z = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_n s_n$

luego

$$(g \circ k)(z) = \alpha_1 (g \circ k)(s_1) + \alpha_2 (g \circ k)(s_2) + \dots + \alpha_n (g \circ k)(s_n)$$

$$(g \circ k)(z) = \alpha_1 (f(s_1)) + \alpha_2 (f(s_2)) + \dots + \alpha_n (f(s_n))$$

$(g \circ k)(z) = f(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_n s_n)$

$(g \circ k)(z) = f(z)$

luego $g \circ k = f$

y de esta manera el resultado está probado.

Teorema 2.21

Todo sumando directo de un R-módulo proyectivo es proyectivo.

Demostración

Supongamos que $P = U \oplus V$ y que se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & & \downarrow f & & \\ A & \xrightarrow[g]{} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

usando la proyección P_U: $P \longrightarrow U$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow P_U & & \\ & & U & & \\ & & \downarrow f & & \\ A & \xrightarrow[g]{} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

como P es proyectivo, existe un único homomorfismo

k': $P \longrightarrow A$ tal que $g \circ k' = f \circ P_U$

por otro lado sabemos que existe la inyección

$$i_U : U \longrightarrow P \text{ tal que } P_U \circ i \;=\; 1_U$$

según el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "i_U"] \arrow[ddl, "k'"'] & \\
 & U \arrow[d, "f"] & \\
A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si tomamos $k = k' \circ i_U$ tendremos

$$g \circ k = g \circ k' \circ i$$

$$g \circ k = f \circ p_U \circ i_U$$

$$g \circ k = f \circ 1_U$$

luego $g \circ k = f$ y así el resultado está probado.

Teorema 2.22

Sea X un R-módulo arbitrario, $i: X \longrightarrow X$ su endomorfismo identidad, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes

a) X es proyectivo

b) Toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0; \text{ de R-módulos}$$

se escinde

c) X es isomorfo a un sumando directo de un módulo libre

d) Si $g: A \longrightarrow B$ es epimorfismo, entonces

$$g_* = \text{Hom}\,(i,g): \text{Hom}(X,A) \longrightarrow \text{Hom}(X,B)$$ es también epimorfismo.

e) Si

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de R-módulos, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(X,A) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(X,B) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(X,C) \longrightarrow 0$$

con $f_* = \text{Hom}(i,f)$ y $g_* = \text{Hom}(i,g)$, es también una sucesión exacta corta

Demostración

(a => b)

X es proyectivo => toda sucesión exacta corta

$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$, de R-módulos se escinde.

Supongamos que X es proyectivo y consideremos el diagrama de homomorfismos

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & & \downarrow i & & \\ V & \xrightarrow[g]{} & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

por definición existe un homomorfismo $h: X \longrightarrow V$ que satisface $g\,h = i$ y de acuerdo con (C1 17) implica que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0 \quad \text{se escinde}$$

(b $\Rightarrow$ c)

Si toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$ de R-módulos se escinde, entonces X es isomorfo a un sumando directo de un R-módulo libre.

Sabemos por la proposición (P1.8) que X es isomorfo a un módulo cociente de un R-módulo libre; es decir existe un R-módulo libre F y un epimorfismo $g: F \longrightarrow X$. Sea $k = \ker g$ y $f: \ker g \longrightarrow F$, el homomorfismo inclusión, entonces obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ker g \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

y por el literal b esta sucesión se escinde y en virtud de (C1.17) implica la existencia de un homomorfismo $h: X \longrightarrow F$ tal que $g \circ h$ es el isomorfismo identidad de X y de acuerdo con (T1.7) h es monomorfismo y

$$F \approx \operatorname{Im} h \oplus \ker g$$

donde X es isomorfo al sumando directo Im h del R-módulo F.

(a $\Leftrightarrow$ d)

Si X es proyectivo si y sólo si, $g: A \longrightarrow B$ es epimorfismo entonces $g_* = \operatorname{Hom}(i,g): \operatorname{Hom}(X,A) \longrightarrow \operatorname{Hom}(X,B)$ es también epimorfismo.

Por definición, $g_* = \operatorname{Hom}(i,g)$ es epimorfismo si y sólo si, para todo elemento $f: X \longrightarrow B$ de $\operatorname{Hom}(X,B)$, existe $h: X \longrightarrow A$ de $\operatorname{Hom}(X,A)$ tal que

$$g_*(h) = g\circ h\circ i = g\circ h = f$$

luego d) se cumple si y sólo si X es proyectivo.

(d $\Longleftrightarrow$ e)

Si $g: B \longrightarrow C$, es epimorfismo, entonces $g_* = Hom(i,g): Hom(X,B) \longrightarrow Hom(X,C)$ es epimorfismo si y sólo si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de R-módulos entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom(X,A) \xrightarrow{f_*} Hom(X,B) \xrightarrow{g_*} Hom(X,C) \longrightarrow 0$$

con $f_* = Hom(i,f)$ y $g_* = Hom(i,g)$ es una sucesión exacta corta.

La prueba es una consecuencia inmediata de (T2.18).

Proposición 2.23

Consideremos el siguiente diagrama de homomorfismos de R-módulos

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & & \downarrow h & & \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

donde X es proyectivo, $g\circ h = 0$ y la fila es exacta, probar que existe un homomorfismo $k: X \longrightarrow A$ que satisface $f\circ k = h$.

Prueba

Como $g\circ h = 0$ esto implica $Im\, h \subset ker\, g = Im f$ consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "k"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "\psi"'] & \mathrm{Im}f \arrow[r, "c"'] & C \end{tikzcd}$$

ψ: A ——> Imf

   x $\rightsquigarrow$ ψ(x) = f(x)

ψ así definida es sobreyectiva y así existe

$$k: X \longrightarrow A \text{ tal que } k\circ\psi = h$$

$h(x) = (\psi\circ k)(x) = \psi(k(x)) = f(k(x)) = (f\circ k)(x)$

luego $h = f\circ k$

lo que prueba el resultado.

Proposición 2.24

Consideremos el siguiente diagrama de homomorfismos de R-módulos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "d"] & Y \arrow[r, "e"] \arrow[d, "j"] & Z \arrow[d, "k"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

donde X es proyectivo, el cuadrado es conmutativo la fila superior es semiexacta y la fila inferior es exacta, probar que existe un homomorfismo h: X ——> A que satisface

$$f\circ h = j\circ d$$

Prueba

Consideremos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "j\circ d"] \arrow[dl, "h"'] & \\
A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}
$$

probaremos que

$$g\circ j\circ d = 0$$

$$g\circ j\circ d = k\circ(e\circ d) = 0$$

y por la proposición P2.23)

$$\exists h: X \longrightarrow A \text{ tal que}$$

$$f\circ h = j\circ d$$

esto completa la demostración.

Lema 2.25

Sea $\{A_i \xrightarrow{f_i} B_i / i \in I\}$ una familia de funciones inyectivas, probar que $\{\sum A_i \longrightarrow \sum B_i / i \in I\}$ es inyectiva.

Demostración

Sea

$$
\begin{aligned}
(x_i)i \in I \in \operatorname{Ker} \sum f_i &\Rightarrow \sum f_i(x_i)i \in I = 0\\
&\Rightarrow f_i(x_i)i \in I = 0\\
&\Rightarrow f_i(x_i) = 0 \quad \forall i \in I\\
&\Rightarrow x_i = 0 \quad \forall i \in I
\end{aligned}
$$

luego $\{\sum f_i : \sum A_i \longrightarrow \sum B_i / i \in I\}$ es inyectiva.

Proposición 2.26

Probar que, para todo R-módulo libre y toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

de R-módulos, la sucesión

$$0 \longrightarrow A \otimes F \xrightarrow{f\otimes i} B \otimes F \xrightarrow{g\otimes i} C \otimes F \longrightarrow 0$$

de sus productos tensoriales con $i: F \longrightarrow F$ el endomorfismo identidad es exacta.

Demostración

Por el teorema (T2.9) $A \otimes F \xrightarrow{f\otimes i} B \otimes F \xrightarrow{g\otimes i} C \otimes F \longrightarrow 0$ es exacta. Falta probar que $f \otimes i$ es inyectiva.

Sea $F = \sum_{i\in I} R_i$; $R_i = R$, $\forall i \in I$, esto implica

$A \otimes F \simeq \sum_{i\in I} A \otimes R_i \simeq \sum_{i\in I} A_i$; $A_i \simeq A$ y así

$A \otimes F \xrightarrow{f\otimes i} B \otimes F$ es isomorfo a $\sum_{i\in I} A_i \longrightarrow \sum_{i\in I} B_i$

Como f es inyectiva por el lema (L2.25) $\sum_{i\in I} f_i$ es inyectiva

lo que prueba el resultado.

Proposición 2.27

Siendo X un R-módulo proyectivo y $h: A \longrightarrow B$ un monomorfismo de R-módulos, probar que el producto tensorial $h \otimes i: A \otimes X \longrightarrow B \otimes X$, de h y el endomorfismo identidad $i: X \longrightarrow X$ es un monomorfismo por el de (T2.22), existe un R-módulo libre F u una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} Y$$

que se escinde, entonces en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A \otimes X \arrow[r, "h\otimes i"] \arrow[d, "k\otimes f"'] & B \otimes X \arrow[d, "L\otimes f"] \\
0 \arrow[r] & A \otimes F \arrow[r, "h\otimes i"'] & B \otimes F
\end{tikzcd}$$

donde j, k, L, son los endomorfismos identidad de F, A, B respectivamente, demostrar que el rectángulo es conmutativo y que las dos columnas y la fila inferior son exactas, entonces deducir que $h \otimes i$ es un monomorfismo.

Demostración

Probaremos que el rectángulo es conmutativo

$(L \otimes f) \circ (h \otimes i) = (L \circ h) \otimes (f \circ i) = h \otimes f$

$(h \otimes j) \circ (k \otimes f) = (h \circ k) \otimes (j \circ f) = h \otimes f$

luego concluimos que el diagrama es conmutativo.

La fila inferior cumple con las hipótesis de la proposición

(P2.26) por lo tanto es exacta y así $h \otimes h$ es inyectiva.

. Como la sucesión

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta que se escinde por T2.10) la sucesión

$$0 \longrightarrow A \otimes X \xrightarrow{i \otimes f} A \otimes F \xrightarrow{i \otimes g} A \otimes Y \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta que se escinde y así

$k \otimes f$ y $L \otimes f$ son inyectivas

probaremos ahora que $h \otimes i$ es inyectiva.
Dado que el diagrama es conmutativo

$$(h \otimes j) \circ (k \otimes f) = (L \otimes f) \circ (h \otimes i)$$

como $(h \otimes j) \circ (k \otimes f)$ es inyectivo, resulta $(L \otimes f) \circ (h \otimes i)$ es inyectivo y de aquí por (P1.4) $h \otimes i$ es inyectivo para el proyecto tensorial de sucesiones exactas cortas tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.28

Sea $i: X \longrightarrow X$, el endomorfismo identidad de un R-módulo proyectivo X. Probar que toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

de R-módulos determina una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \otimes X \xrightarrow{f \otimes i} B \otimes X \xrightarrow{g \otimes i} C \otimes X \longrightarrow 0$$

Demostración

Por (T2.9) la sucesión

$$A \otimes X \xrightarrow{f\otimes i} B \otimes X \xrightarrow{g\otimes i} C \otimes X \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta y como X es proyectivo por (P2.27) la sucesión

$$0 \longrightarrow A \otimes X \xrightarrow{f\otimes i} B \otimes X$$

es exacta obteniendo así una sucesión

$$0 \longrightarrow A \otimes X \xrightarrow{f\otimes i} B \otimes X \xrightarrow{g\otimes i} C \otimes X \longrightarrow 0$$

que es exacta.

4- MODULOS INYECTIVOS

Definición 2.6

Un R-módulo X se dice que es inyectivo si y sólo si para todo homomorfismo $f: A \longrightarrow X$ y todo monomorfismo $g: A \longrightarrow B$ de R-módulos, existe un homomorfismo $h: B \longrightarrow X$ que satisface

$$h \circ g = f$$

En términos de diagrams, esta definición se enuncia como sigue.

Un R-módulo X es inyectivo si y sólo si todo diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ & X & \end{tikzcd}$$

de homomorfismos de R-módulos, cuya fila es exacta, puede ser inmerso en un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \\ & X & h \end{tikzcd}$$

$$h \circ g = f$$

Teorema 2,29

Todo sumando directo de un R-módulo inyectivo es inyectivo.

Demostración

Supongamos que la suma directa

$$X = U \oplus V$$

de los módulos U y V sobre R es inectiva para probar que U es inyectivo, observemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \arrow[ddl, dashed, "k"] \\
& U \arrow[d, shift right, "j"'] & \\
& U \oplus V \arrow[u, shift right, "P"'] &
\end{tikzcd}$$

Sean f: A ——> U, un homomorfismo y g: A ——> B un monomorfismo arbitrariamente dados. Consideremos la inyección natural j: U ——> X y la proyección natrual P: X ——> U, X = U ⊕ V, como X es inyectivo, existe un homomorfismo k: B ——> X que satisface

$$k \circ g = j \circ f$$

Sea $h = P \circ k$: B ——> U, dado que $p \circ j$ es el endomorfismo identidad de U obtenemos

$$h \circ g = P \circ k \circ g = p \circ j \circ f = f$$

lo que completa la demostración.

Proposición 2.30

Consideremos el siguiente diagrama de homomorfismos de R-módulos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & C \\
& X &
\end{tikzcd}$$

donde X es inyectivo, $h \circ f = 0$ la fila es exacta, probar que existe un homomorfismo $k: C \longrightarrow X$ que satisface

$$k \circ g = h$$

Prueba

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & B \arrow[r, "\widehat{g}"] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{img} \arrow[dl, dashed, "k_1"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

$$k_1 \circ \widehat{g} = h$$

donde $k_1 : \mathrm{Img} \longrightarrow X$

$a \rightsquigarrow k_1(a) = h(b)$; don-e $a = g(b)$

probemos que k_1 está bien definida

Sean $b_1, b_2 \in B$

$g(b_1) = g(b_2) = a$

$\Rightarrow b_1 - b_2 \in \ker g \subset \ker h$; por que $h \circ f = 0$

$\Rightarrow h(b_1) = h(b_2)$

$\therefore k_1$ está bién definida

Además tenemos

$B \longrightarrow \mathrm{Img} \longrightarrow C$

$b \rightsquigarrow g(b) \rightsquigarrow g(b)$ donde

$g = i \circ g$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Img} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k_1"'] & C \arrow[dl, dashed, "k"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$k \circ i = k_1$$

$$k \circ g = k \circ i \circ \bar{g} = k_1 \circ g = h$$

$$\therefore\ k \circ g = h$$

lo que prueba el resultado

Proposición 2.31

Consideremos el siguiente diagrama de homomorfismos de R-módulos

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \gamma\downarrow & & \downarrow\beta & & \\ U & \xrightarrow[h]{} & V & \xrightarrow[k]{} & X \end{array}$$

donde X es inyectivo, el cuadrado es conmutativo, la fila superior es exacta y la inferior es semiexacta. Probar que existe un homomorfismo ψ: C $\longrightarrow$ X que satisface

$$\psi \circ g = k \circ \beta$$

Demostración

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & \downarrow k \circ \beta & & \\ & & X & & \end{array}$$

probemos que $k \circ \beta \circ f = 0$.

Dado que $\beta \circ f = h \circ \gamma$ tenemos que

$$k \circ h \circ \gamma = 0(\gamma) = 0$$

luego por la proposición (P2.30) tenemos que existe

$$\psi : C \longrightarrow X \quad \text{tal que}$$
$$\psi \circ g = k \circ \beta$$

lo que prueba el resultado.

Teorema 2.32

Si $\{E_j / j \in J\}$ es una familia de módulos inyectivos entonces ΠE_j es inyectivo.

Demostración

Sean λ_j y P_j las inyecciones y proyecciones de el producto ΠE_j

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \Pi E_j \arrow[r, shift left, "j"] \arrow[d] & E_j \arrow[l, shift left, "\lambda_j"] \arrow[d, dashed, no head] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"'] & B \end{tikzcd}$$

Como E es inyectivo, existe una función

$$g_j : B \longrightarrow E_j, \text{ con}$$
$$g_j \circ \alpha = P_j \circ f$$

definamos

$$\begin{aligned} h: B &\longrightarrow \Pi E_j \\ b &\rightsquigarrow (g_j(b))j \in J \end{aligned}$$

entonces

$$(h \circ \alpha)(a) = \left[(g_j \circ \alpha)(a)\right] j \in J = \left[(P_j \circ f)(a)\right] j \in J = f(a)$$

y así

$$h \circ \alpha = f$$

luego ΠE_j es inyectivo

Teorema 2.33

(Teorema de Baer)

Un R-módulo E es inyectivo si y sólamente si toda función f: I ——> E, donde I es un ideal izquierdo de R, puede ser extendido a R.

Demostración

Supongamos que E es inyectivo. Como un ideal izquierdo es un submódulo de R. La hipótesis es justamente un caso especial de la definición de inyectivo es decir.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d] & R \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

$$h \circ i = f$$

es decir h/I = f

de aquí h es una extensión de f.

para el converso

Supongamos que tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} E & \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd}$$

donde i es el homomorfismo inclusión, aproximos a el homomorfismo $g: B \longrightarrow E$, mirando entondos los módulos entre A y B que poseen una extensión de f; más precisamente.

Sea

$F = \{(A',g')/i(A) \subset A' \subset B;\ g': A' \longrightarrow E\}$ g' extiende a f $F \neq \phi$ por que $(A,f) \in F$; F es un conjunto parcialmente ordenado por

$(A',g') \leq (A'',g'')$ si $A' \subset A''$ y g'' extiende a g' por el lema de Zorn's, existe (A_0,g_0) en F que es maximas.

Si $A_0 = B$ la prueba está hecha.

Supongamos $A_0 \neq B$ y sea $x \in B - A_0$. Si $I = \{r \in R/rx \in A_0\}$ entonces I es un ideal izquierdo de R

Definimos

$$h: I \longrightarrow E$$
$$r \longmapsto h(r) = g_0(rx)$$

por hipótesis existe un morfismo $h': R \longrightarrow E$ extensión de h.

Definamos $A_1 = A_0 + Rx$ y

$g_1 : A_1 \longrightarrow E$ por $a_\circ + rx \rightsquigarrow g_\circ a_\circ + r\, h'(1)$, donde $r \in R$ probemos que g_1 está bien definida

Sea $a_\circ + rx = a_\circ' + r'x$, entonces $(r-r') = a_\circ' - a_\circ \in A_\circ$ y $(r-r') \in I$, por consiguiente $g_\circ((r-r')(x))$ y $h(r-r')$ están definidos y tenemos

$$g_\circ(a_\circ' - a_\circ) = g_\circ((r-r')(x)) = h(r-r') = h'(r-r') = (r-r')h(1)$$

y asi $g_\circ(a_\circ') - g_\circ(a_\circ) = rh'(1) - r'(h(1))$ y

$$g_\circ(a_\circ') + r'h'(1) = g_\circ(a_\circ) + rh'(1)$$

luego g_1 está bien definida

Además

$$(g_1(a_\circ) = g_\circ(a_\circ)$$

para todo $a_\circ \in A_\circ$. El par (A_1, g_1) está en F es más grande que el maximal $(A_\circ, g_\circ)$ lo cual es una contradicción por consiguiente $A_\circ = B$ y asi E es inyectivo.

Definición 2.7

Sea M un R-módulo, $m \in M$ y $r \in R$, decimos que m es divisible por r si $r\, m' = m$ para algún $m' \in M$; decimos que el módulo M es divisible si cada $m \in M$ es divisible para todo $r \in R$ no divisor de cero.

Ejemplo 2.1

El grupo aditivo de los números racionales Q, es un grupo abeliano divisible como Z-módulo.

Teorema 2.34

Todo módulo inyectivo E es divisible.

Demostración

Sea $m \in E$ y sea $r_o \in R$, r_o no es un divisor de cero

Definamos

$$f: R_{r_o} \longrightarrow E$$
$$rr_o \rightsquigarrow f(rr_o) = rm$$

probemos que f está bien definida

Sean rr_o, $r'r_o \in Rr_o$ tal que

$$rr_o = r'r_o$$

$$\Rightarrow (r - r')r_o = 0$$
$$\Rightarrow (r - r') = 0$$
$$\Rightarrow r = r'$$
$$\Rightarrow rm = r'm$$
$$\therefore f(rr_o) = f(r'r_o)$$

y asi f está bien definida

Como E es inyectivo. Existe una función

$g: R \longrightarrow E$ extensión de f. En particular

$m = f(r_o) = g(r_o) = r\, g(1)$

y asi m es divisible por r_o

Proposición 2.35

Todo cociente de un módulo divisible es divisible.

Demostración

Sea M un módulo divisible entonces $\frac{M}{N}$ es divisible para un R-módulo N arbitrario.

Como M es divisible

Sea $m \in M$ y $r \in R$, r no divisor de cero.

$m \in M \Rightarrow m = rm'$, para algún $m' \in M$ y r no divisor de cero

$\Rightarrow m + N = r(m' + N)$

$\therefore \frac{M}{N}$ es divisible

Proposición 2.36

Todo sumando de un módulo divisible es divisible.

Demostración

Sea $M = N \oplus D$ y $r \in R$, r no divisor de cero

dado que M es divisible, para $m \in M$

$m = rm'$, para algún $m' \in M$

además

$$m = n + d$$

$$m' = n' + d'$$

$$rm' = rn' + rd'$$

Si consideramos el caso par N, notamos que $n = rn'$, para $n \in N$ y algún $n' \in N$

luego N es divisible, similarmente para cuando se considera a D.

lo que prueba el resultado.

Proposición 2.37

La suma de módulos divisibles es divisible.

Demostración

Sea $F = \{M_i / i \in I\}$ una familia de módulos con M_i divisible para todo $i \in I$.

Probaremos que $\sum_{i \in I} M_i$ es divisible

Sea $r \in R$ no divisor de cero y

$$m \in \sum_{i \in I} M_i \Rightarrow m = \sum_{i \in I} m_i$$

$$\Rightarrow m = \sum_{i \in I} r(m_i')$$

$$\Rightarrow m = r \sum_{i \in I} m_i'$$

$$\Rightarrow m = rm',\ m' = \sum_{i \in I} m_i$$

luego $\sum_{i \varepsilon I} M_i$ es divisible.

Teorema 2.38

Si R es un dominio de ideales principales, entonces un R-módulo D es divisible si y sólamente si D es inyectivo.

Demostración

Por el criterio de Baer (T2.33), es suficiente extender todo homomorfismo $f: I \longrightarrow D$ a R, donde I es un ideal. Como R es un dominio de ideales principales, sabemos I = R ; claramente podemos asumir que r $\neq 0$, y así r no es un divisor de cero.

Dado que D es divisible, existe un elemento $d \varepsilon D$ con r d = f(r). Definamos $g: R \longrightarrow D$ por $r \rightsquigarrow rd$ es de notar que g extiende a f.

El converso de el teorema es justamente el criterio de Baer.

Observación 7

Todo grupo abeliano puede considerarse como Z-módulo definiendolo de la siguiente manera.

Sea G un grupo abeliano arbitrario

$$U: \mathbb{Z} \times G \longrightarrow G$$

$$(m,x) \rightsquigarrow mx = \begin{cases} 0; & m = 0 \\ x + x + \ldots + x; & m > 0 \\ (-m)(-x) & ; m < 0 \end{cases}$$

Teorema 2.39

Todo $\mathbb{Z}$-módulo es isomorfo a un submódulo de un Z-módulo inyectivo.

Sea G un Z-módulo (G un grupo abeliano) y

$G \simeq \frac{F}{N}$, F es un Z-módulo libre sobre S.

$$F = \sum_{s\varepsilon S} Z_s; \text{ con } Z_s = Z$$

Sea hs: $Z_s \longrightarrow Q$, hs la función inclusión

entonces

$$\text{Si } h = \sum_{s\varepsilon S} hs$$

tenemos

$$\sum_{s\varepsilon S} Z_s \xrightarrow{\sum_{s\varepsilon S} hs} \sum_{s\varepsilon S} Qs; \; Qs = Q$$

y asi

$$G \simeq \frac{\sum_{s\varepsilon S} Zs}{N} \simeq \frac{h(\sum_{s\varepsilon S} Zs)}{N} \subseteq \frac{\sum_{s\varepsilon S} Qs}{N}$$

como Q es divisible, lo son $\sum_{s\varepsilon S} Qs$ y $\frac{\sum_{s\varepsilon S} Qs}{N}$

y por (P2.35) y (P2.37) y (T2.38) tenemos que $\frac{\sum_{s\varepsilon S} Qs}{N}$ es inyectivo como Z-módulo y asi

$$G \approx \frac{\sum_{s \varepsilon S} Qs}{N}$$

Definición 2.8

Sean R y S dos anillos, un grupo abeliano. B es un (R-S) bimódulo, denotado por $_R B_S$. Si B es un R-módulo izquierdo y un S-módulo derecho y los dos hechos están relacionados por una ley asociativa

$$r(bs) = (rb)s$$

para todo $r \varepsilon R$, $b \varepsilon B$, y $s \varepsilon S$.

Observación 8

La última condición dice que, para cada $r \varepsilon R$ la función U_r: B ——> B dado por b $\rightsquigarrow$ rb es un S-morfismo y para cada s S, la función Us: B ——> B dado por b $\rightsquigarrow$ bs es un R-mór fismo.

Teorema 2,40

Si A es un R-módulo derecho y B es un (R-S) bimódulo, (denotados A_R y RB_S), entonces $A \otimes_R B$ es un S-módulo derecho, donde

$$(a \otimes b)s = a \otimes (bs)$$

similarmente, en la situación SA_R y R^B, entonces $A \otimes_R B$ es un S-módulo izquierdo, donde

$$S(a \otimes b) = (sa) \otimes b$$

Demostración

Tomemos $s \in S$, fijo y definamos la función $U_s : B \longrightarrow B$ asi $b \rightsquigarrow bs$ es un R-morfismo, por que B es un bimódulo. Si F es el funtor $A \oplus R$, entonces $F(U_s): B \longrightarrow B$ es un homomorfismo (de grupos). Pero $F(U_s) = 1_A \oplus U_s : a \oplus b \rightsquigarrow a \oplus (bs)$, es fácil ver que la fórmula cumple con los axiomas de módulos.

Teorema 2.41

Para dos anillos R y S. Consideremos la situación (RA, $S^B R$, Sc) entonces existe un isomorfismo.

$$\tau: \mathrm{Hom}_S(B \otimes_R A,\ C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,\ \mathrm{Hom}_S(B,C))$$

Demostración

Como B es un bimódulo, el (T2.40) muestra que $B \otimes_R A$ es un S-módulo izquierdo $[s(b \otimes a) = (sb) \otimes a]$ y además tenemos $\mathrm{Hom}_S(B,C)$ es un R-módulo izquierdo definido $[(rf)(b)] = [f(br)]$ asi ambos casos son considerados.

Si $f: B \otimes A \longrightarrow C$ es un S-morfismo, para cada $a \in A$ definamos $fa: A \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(B,C)$ definido por $a \rightsquigarrow fa$ es un R-morfismo y asi definimos

$$\tau: \mathrm{Hom}_S(B \otimes_R A, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,\ \mathrm{Hom}_S(B,C)$$
$$f \rightsquigarrow \bar{f}$$

el cual es un homomorfismo, falta probar que , es un isomorfismo, observando que posee inverso. Para lo cual asumimos que $g: A \longrightarrow Hom_S(B,C)$ es un R-morfismo y definamos

$g': B \otimes_R A \longrightarrow C$ por $b \otimes a \rightsquigarrow g_a(b)$ y la inversa de viene dada por

$$\tau^{-1}: Hom_R(A, Hom_S(B,C)) \longrightarrow Hom_S(B \otimes_R A,C)$$
$$g \rightsquigarrow g'$$

lo cual completa la demostración.

Teorema 2.42

Si D es un grupo abeliano divisible, entonces $Hom_Z(R,D)$ es un R-módulo izquierdo inyectivo.

Demostración

Sabemos que R es bimódulo, $R = {}_Z R_R$ y asi tenemos que $Hom_Z(R,D)$ es un R-módulo izquierdo definido por $rf: r' \rightsquigarrow f(r'r)$.

Mostraremos que el funtor contravariante $Hom_R(\ \ , Hom_Z(R,D)$ es exacto; para lo cual solamente basta demostrar que el converso de un monomorfismo es epimorfismo.

Sea

$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ es un R-morfismo y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(B,\ \mathrm{Hom}_Z(R,D) \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Hom}_R(A,\ \mathrm{Hom}_Z(R,D)) & \\
\mathrm{Hom}_Z(B,D) \arrow[u, "g^*"] \arrow[r, "\tau'"] & \mathrm{Hom}_Z(A,D) \arrow[u, "f^*"'] \arrow[r, dash] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $\tau = \mathrm{Hom}_R(g,\ 1\mathrm{Hom}_Z(R,D)$ y $\tau' = \mathrm{Hom}_Z(g, 1_D)$ (identificando $R \oplus_R B$ con B y $R \oplus_R A$ con A) como D es divisible éste es un Z-módulo inyectivo y asi $\mathrm{Hom}(g, 1_D)$ es epimorfismo y por la conmutatividad del diagrama y que g^* y f^* son isomorfismos tenemos que $\mathrm{Hom}_R(g,\ 1\mathrm{Hom}_Z(R,D))$ es epimorfismo.

Teorema 2.43

Todo R-módulo izquierdo M puede ser inmerso en un módulo inyectivo.

Demostración

Si consideramos a M solamente como grupo abeliano, existe un Z-mórfismo $0 \longrightarrow M \longrightarrow D$ para algún grupo divisible D (T2.39). Si $m \in M$, definamos

$$fm: R \longrightarrow M \text{ por}$$
$$r \rightsquigarrow rm$$

es fácil ver que

$$\iota: M \longrightarrow \mathrm{Hom}_Z(R,D) \text{ dado por}$$
$$m \rightsquigarrow i\ fm$$

es un R-morfismo inyectivo

Observación 9

El Teorema (T2.43) nos permite introducir a un módulo M cualquiera en una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} X \xrightarrow{p} \frac{X}{M} \longrightarrow 0$$

donde X es inyectivo.

Teorema 2.44

Siendo X un R-módulo arbitrario e i: X ——> X su endomorfismo identidad, las siguientes proposiciones son equivalentes

a) X exinyectivo

b) Toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} V \longrightarrow 0$$

de R-módulos se escinde

c) X es isomorfo a un sumando directo de un R-módulo inyectivo

d) Para todo monomorfismo g: A ——> B, es

$g^* = Hom(g,i): Hom(B,X) \longrightarrow Hom(A,X)$ un epimorfismo

e) Para toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

de R-módulos, la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom(C,X) \xrightarrow{g^*} Hom(B,X) \xrightarrow{f^*} Hom(A,X) \longrightarrow 0$$

donde $f^* = Hom(f,i)$ y $g^* = Hom(g,i)$, es también una sucesión exacta corta.

Demostración

a) => b)

Supongamos que X es inyectivo y consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & U \\ & & i\big\downarrow & \swarrow h & \\ & & X & & \end{array}$$

de homomorfismos, por definición, existe un homomorfismo $h: U \longrightarrow X$ que satisface

$$h \circ g = i$$

en virtud de (C1.17), implicamos que la sucesión exacta corta de b) se escinde.

b) => c)

Por (T2.43), X puede ser inmerso en un módulo inyectivo, en otras palabras, existe un R-módulo inyectivo U y un monomorfismo $f: X \longrightarrow U$, sea

$$k = f(x) \quad y \quad V = \frac{U}{f(x)} = \frac{U}{k}$$

entonces obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} V \longrightarrow 0$$

donde $g: U \longrightarrow V$ representa la proyección natural. Por b), esta sucesión se escinde y de aqui que k sea sumando directo de U, Como U es inyectivo y X es isomorfo a k, se cumple (c).

c) => a) es consecuencia inmediata de (T2.43)

a) <=> d)

Por definición, $g^* = Hom(g,i)$ es un epimorfismo si y só-lo si, para todo elemento $f: A \longrightarrow X$ de $Hom(A,X)$, existe un elemento $h: B \longrightarrow X$ de $Hom(B,X)$ tal que

$$g^*(h) = i \circ h \circ g = h \circ g = f$$

luego d) se cumple si y sólo si X es inyectivo

(d => e) es consecuencia inmediata de (T2.16). /

Definición 2.9

Un anillo R es hereditario izquierdo si todo ideal izquier-do es proyectivo.

Teorema 2.45 (Kaplansky)

Si R es hereditario izquierdo, entonces todo submódulo de un módulo libre es isomorfo a la suma de ideales izquierdos.

Corolario 2.45

Si R es un dominio de ideales principales todo submódulo de un módulo libre es libre

CAPITULO III

1- RESOLUCIONES

A lo largo de esta sección, X denotará un R-módulo arbitrariamente dado.

Definición 3.1

Dado un módulo X, llamaremos resolución proyectiva de X, a toda sucesión exacta descendente

$$C: \; \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

de R-módulos, que satisface las tres condiciones siguientes

PR1) $C_{-1} = X$

PR2) $C_n = 0, \; n < -1$

PE3) C_n es proyectivo, para todo entero no negativo.

En particular, si C_n es libre para todo entero no negativo entonces decimos que C es una resolución libre.

Una resolución proyectiva toma la forma siguiente

$$C: \; \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$
$$\longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \longrightarrow 0$$

Nuestra intención es probar que todo módulo tiene resolución proyectiva. En realidad vamos a probar que todo módulo X tiene resolución libre.

Teorema 3.1

Todo módulo X tiene resolución libre

Demostración

En base a la (P1.8) existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\alpha_0} F_0 \xrightarrow{\beta_0} X \longrightarrow 0$$

con F_0 libre.

Aplicando este resultado a X_0 obtenemos

$$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_1 \xrightarrow{\beta_1} \qquad \longrightarrow 0$$

con F_1 libre.

Inductivamente podemos obtener una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{\alpha n+1} F_{n+1} \xrightarrow{\beta n+1} X_n \longrightarrow 0$$

con F_{n+1} libre

obtenemos de esta manera el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & & X_n \arrow[u] \arrow[ul] & & & & & X_1 \arrow[ul] \arrow[u] & & X_0 \arrow[ul] \arrow[u] & & & \\
\cdots \arrow[r] & F_{n+1} \arrow[rr, "\alpha_n \beta_{n+1}"'] \arrow[urr, "\beta_{n+1}"] & & F_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[rrr, "\alpha_1 \beta_2"'] \arrow[urrr, "\beta_2"] & & & F_1 \arrow[rr, "\alpha_0 \beta_1"'] \arrow[urr, "\beta_1"] & & F_0 \arrow[r, "\beta_0"] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con $X_n \xrightarrow{\alpha_n} F_n$, $X_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_1$, $X_0 \xrightarrow{\alpha_0} F_0$.

definamos en base a ello una sucesión de R- módulos

$$C: \ \cdots \longrightarrow C_{n+1} \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

tomando

$$C_n = \begin{cases} X, & \text{si } n = -1 \\ 0, & \text{si } n < -1 \\ F_n, & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

$$\partial_n = \begin{cases} \beta_0, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n \leq -1 \\ \alpha_{n-1}\ \beta_n, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

para que esta sea la resolución libre falta probar que es exacta, es decir

$$\operatorname{Im} \partial_{n+1} = \ker \partial_n$$

o sea

$$\operatorname{Im} \alpha_n \circ \beta_{n+1} = \ker \alpha_{n-1} \circ \beta_n$$

para todo entero no negativo.

Sabemos que $\operatorname{Im} \alpha_n = \ker \beta_n$, será suficiente probar que

$$\operatorname{Im} \partial_{n+1} = \operatorname{Im} \alpha_n \quad \text{y} \quad \ker \partial_n = \ker \beta_n$$

Sea

$$\begin{aligned} x \in \ker \partial_n &\iff (\alpha_{n-1} \circ \beta_n)(x) = 0 \\ &\iff (\alpha_{n-1}(\beta_n(x)) = 0 \\ &\iff \beta_n(x) = 0 \\ &\iff x \in \ker \beta_n \end{aligned}$$

luego $\ker \partial_n = \ker \beta_n$

ahora probaremos que

$$\operatorname{Im} \partial_{n+1} = \operatorname{Im} \alpha_n$$

i) $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \operatorname{Im} \alpha_n$

Sea $y \in \operatorname{Im} \partial_{n+1} \Rightarrow \exists x \in F_{n+1}$ tal que

$$y = \alpha_n(\beta_{n+1}(x)) \in \operatorname{I}\ \alpha_n$$

$$\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \operatorname{Im} \alpha_n$$

ii) $\operatorname{Im} \alpha_n \subset \operatorname{Im} \partial_{n+1}$

Sea

$Y \in \operatorname{Im} \alpha_n \Rightarrow \exists z \in X_n$ tal que

$Y = \alpha_n(z)$, pero como

β_{n+1} es sobreyectiva existe $x \in F_{n+1}$ tal que

$z = \beta_{n+1}(x)$, de aquí que

$Y = \alpha_n(z) = \alpha_n(\beta_{n+1}(x)) = (\alpha_n \circ \beta_{n+1})(x) \in \operatorname{Im} \partial_{n+1}$

luego $\operatorname{Im} \alpha_n \subset \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ y así

$$\operatorname{Im} \partial_{n+1} = \operatorname{Im} \alpha_n$$

esto completa la demostración.

Sea $h: X \longrightarrow Y$ un homomorfismo arbitrario de R-módulos y sean

$$C: \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \longrightarrow 0$$

$$D: \ldots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} D_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow D_1 \xrightarrow{\partial'_1} D_0 \xrightarrow{\partial'_0} Y \longrightarrow$$

resoluciones proyectivas de X e Y respectivamente tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.2

Existe una trarsformación de cadenas

$f = \{f_n : C_n \longrightarrow D_n / n \in \mathbb{Z}\}$ de C en D de manera que

$$f_{-1} = h$$

Demostración

Definamos para $n < -1$, $f_n = 0$ ya que $C_n = 0$

para $n = -1$ sea $f_{-1} = h$ y para el caso $n = 0$

consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, dashed, "f_0"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "h=f_{-1}"] & 0 \\
D_0 \arrow[r, "\partial'_0"] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

puesto que C_0 es proyectivo y ∂'_0 es sobreyectiva.

existe

$$f_0 : C_0 \longrightarrow D_0$$

de manera que

$$\partial'_0 \circ f_0 = f_{-1} \circ \partial_0$$

explicado mejor en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C_0 \arrow[dl, dashed, "f_0"'] \arrow[d, "f_{-1} \circ \partial_0"] & \\
D_0 \arrow[r, "\partial'_0"'] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

para el caso de $n = 1$ tenemos la siguiente situación

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "\partial_1"] & C_0 \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "f_0"] & X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h=f_{-1}"] & 0 \\
D_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & D_0 \arrow[r, "\partial'_0"'] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de aquí se deriva el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[d, "f_0 \circ \partial_1"] & \\ D_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & D_0 \arrow[r, "\partial'_0"'] & {} \end{tikzcd}$$

en el cual $\partial'_0 \circ f_0 \circ \partial_1 = h \circ \partial_0 \circ \partial_1 = 0$

Además C_1 es proyectivo y la fila es exacta, por proposición (P.2.23) existe $f_1: C_1 \longrightarrow D_1$ tal que $\partial'_0 \circ f_1 = f_0 \circ \partial_1$

Supongamos ahora que para $n \quad 0$, tenemos construido

$f_m: C_m \longrightarrow D_m$, $\forall_m < n$ de tal manera que el rectángulo

$$\begin{tikzcd} C_m \arrow[r, "\partial_m"] \arrow[d, "f_m"'] & C_{m-1} \arrow[d, "f_{m-1}"] \\ D_m \arrow[r, "\partial'_m"'] & D_{m-1} \end{tikzcd}$$

es comnutativo.

Consideremos el rectángulo

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[d, "f_{n-2}"] \\ D_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & D_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"'] & D_{n-2} \end{tikzcd}$$

por la proposición (P2.24)

Existe un homomorfismo $f_n: C_n \longrightarrow D_n$ que satisface

$f_{n-1} \circ \partial_n = \partial'_n \circ f_n$

esto completa la construcción inductiva de la transformación de cadenas

$$f: C \longrightarrow D$$

Proposición 3.3

Dos homomorfismos (transformaciones de cademas)

$f = \{f_n : C_n \longrightarrow D_n / n \in z\}$

$g = \{g_n : C_n \longrightarrow D_n / n \in z\}$

de la sucesión descendente C en la sucesión descendente D, que satisfacen $f_{-1} = h = g_{-1}$ son homotópicas.

Demostración

Vamos a construir una homotopía de cadenas $h: C \longrightarrow D$, de manera que para todo n en z, existe

$h_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$, que cumple

$$\partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = f_n - g_n$$

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "h_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "h_{n-1}"] \\ D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & D_n \end{tikzcd}$$

procedemos inductivamente, para $n < -1$, como $C_n = 0$, entonces el único homomorfismo posible es $k_n = 0$ para $n = -1$ tenemos la siguiente situación

$$\begin{tikzcd} C_{-1} \arrow[r, "\partial_{-1}"] \arrow[d, "k_{-1}"'] \arrow[dr] & C_{-2} \arrow[d, "k_{-2}"] \\ D_0 \arrow[r, "\partial'_0"'] & D_{-1} \end{tikzcd}$$

tenemos del diagrama que

$f_{-1} - g_{-1} = 0 \quad y \quad k_{-2} = 0$

luego

$\partial'_0 \circ k_{-1} + k_{-2} \circ \partial_{-1} = f_1 - g_1 = h - h = 0$

de modo que

$$\partial'_0 \circ k_{-1} = 0, \text{ hacemos } k_{-1} = 0$$

procedamos a construir k_0, para ello consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "\partial_1"] & C_0 \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "g_0"] \arrow[dll, "k_0"'] & C_{-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_{-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{-1}"] \arrow[dl, dashed, "k_{-1}=0"'] & 0 \arrow[dl, dashed, "k_{-2}=0"'] \\
D_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & D_0 \arrow[r, "\partial'_0"'] & D_{-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\partial'_1 \circ k_0 + k_{-1} \circ \partial_0 = f_0 - g_0 \quad .$$

$$\partial'_1 \circ k_0 = f_0 - g_0$$

observemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C_0 \arrow[d, "f_0 - g_0"] \arrow[dl, dashed, "k_0"'] & \\
D_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & D_0 \arrow[r, "\partial'_0"'] & D_{-1}
\end{tikzcd}$$

$$\partial'_0 \, (f_0 - g_0) = \partial'_0 \circ f_0 - \partial'_0 \circ g_0$$

para definir k_0, tenemos la siguiente situación

$$\begin{tikzcd}
 & C_0 \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "g_0"] & C_{-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_{-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{-1}"] & 0 \\
D_1 \arrow[r] & D_0 \arrow[r, "\partial'_0"'] & D_{-1} &
\end{tikzcd}$$

$$\partial'_0 \circ f_0 = f_{-1} \circ \partial_0 = h \circ \partial_0$$

$$\partial' \circ g_0 = g_{-1} \circ \partial_0 = h \circ \partial_0$$

de donde

$$\partial'_0(f_0 - g_0) = \partial'_0 \circ f_0 - \partial'_0 \circ g_0 = h \circ \partial_0 - h \circ \partial_0 = 0$$

y por la proposición (P2.23) y (P2.24)

existe $k_0 : C_0 \longrightarrow D_1$, de manera que

$$\partial'_1 \circ k_0 + k_{-1} \circ \partial_0 = f_0 - g_0$$

Sea ahora $n \geq 1$ y asumamos que tenemos construido

$$k_m : C_m \longrightarrow D_{m+1}, \ \forall_m < n$$

de manera que

$$k_{m-1} \circ \partial_m + \partial'_{m+1} \circ k_m = f_m - g_m$$

y consideremos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, shift right, "g_n"'] \arrow[d, shift left] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, shift right, "g_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{n-1}"] \arrow[dl, dashed, "k_{-1}"'] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "g_{n-2}"'] \arrow[d, shift left, "f_{n-2}"] \arrow[dl, dashed, "k_{n-2}"'] & {} \\
{} \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & D_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"'] & D_{n-2}
\end{tikzcd}$$

donde

$$\partial'_n \circ k_{n-1} + k_{n-2} \circ \partial_{n-1} = f_{n-1} - g_{n-1}$$

tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & C_n \arrow[d, "j"] & \\ D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

donde $j = f_n - g_n - k_{n-1} \quad {}_n$; en este caso

$$\partial'_n \circ j = \partial'_n (f_n - g_n - k_{n-1} \circ \partial_n)$$

$$\partial' \circ j = \partial' \circ f_n - \partial' \circ g_n - \partial' \circ k_{n-1} \circ \partial_n$$

$$\partial'_n \circ j = f_{n-1} \circ \partial_n - g_{n-1} \circ \partial_n - (f_{n-1} - g_{n-1} - k_{n-2} \circ \partial_{n-1}) \partial_n$$

$$\partial'_n \circ j = k_{n-2} \circ \partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

puesto que C_n es proyectivo, de nuevo po- la proposición (P2.23)

Existe

$$k_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$$

de manera que

$$\partial'_{n+1} \circ k_n = f_n - g_n - k_{n-1} \circ \partial_n$$

luego

$$\partial'_{n+1} \circ k_n + k_{n-1} \circ \partial_n = f_n - g_n$$

esto completa la construcción inductivo de la homotopía de cadenas

$$k: C \longrightarrow D$$

entre f y g.

Comentario 9

Si aplicamos las proposiciones (P3.1) y (P3.2) el caso especial $X = Y$ y $h = 1_X$. En este caso C y D son dos resoluciones proyectivas cualesquiera del mismo módulo X. por (P3.1) existe una transformación de cadenas $f = \{f_n: C_n \longrightarrow D_n / n \in \mathbb{Z}\}$ de manera que $f_{-1} = 1_X$. De manera similar, existe una transformación de cadenas $g = \{g_n: D_n \longrightarrow C_n / n \in \mathbb{Z}\}$ donde $g_{-1} = 1_X$. Consideremos las composiciones

$$g \circ f = \{g_n \circ f_n: C_n \longrightarrow C_n / n \in \mathbb{Z}\}$$

$$f \circ g = \{f_n \circ g_n: D_n \longrightarrow D_n / n \in \mathbb{Z}\}$$

ambas son transformaciones de cadena que satisfacen

$$g_{-1} \circ f_{-1} = 1_X = f_{-1} \circ g_{-1}$$

por (P3.2) $g \circ f$ es homotópica a la transformación de cadenas $1_C: C \longrightarrow C$, identidaddel complejo C y $f \circ g$ es homotópica a la transformación de cadenas.

$1_D: D \longrightarrow D$, identidad del complejo D.

Las transformaciones de cadenas f y g que satisfacen estas condiciones se llaman equivalencias de cadenas.

En este caso $f: C \longrightarrow D$ y $g: D \longrightarrow C$, construidas anteriormente son equivalencias de cadenas y se dice que las resoluciones proyectivas C y D del módulo X, son homotópicamente equivalentes. Lo anterior lo resume el siguiente teorema.

Teorema 3.4

Todo R-módulo X tiene resolución proyectiva y dos resoluciones proyectivas cualesquiera del mismo módulo X son homotópicamente equivalente.

Definición 3.2

Una resolución inyectiva de un R-módulo X es una sucesión ascendente exacta.

$$C: \ldots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{\delta^n} C^n \xrightarrow{\delta^{n+1}} C^{n+1} \longrightarrow \ldots$$

que cumple

I(1) $C^{-1} = X$

I(2) $C^n = 0 \quad \forall_n < -1$

I(3) C^n es un R-módulo inyectivo para todo $n \geq 0$

Proposición 3.5

Todo módulo X tiene resolución inyectiva

Demostración

De la observacion (9) tenemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\beta_0} L_0 \xrightarrow{\alpha_0} X_0 \longrightarrow 0$$

es exacta, con L_0 inyectiva

haciendo lo mismo para X_1

$$0 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\beta_1} L_1 \xrightarrow{\alpha_1} X_1 \longrightarrow 0$$

es exacta con L_1 inyectiva

y así sucesivamente tenemos que sucesión

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{\beta_n} L_{n+1} \xrightarrow{\alpha_n} X_{n+1} \longrightarrow 0$$

es exacta.

Por lo que tenemos el siguiente diagrama de R-módulos

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & & & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & & 0 \\
 & & & X_0 & & & & X_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & X_n \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\varepsilon_0"] & L_0 \arrow[rr, "\beta_1 \circ \alpha_0"'] & & L_1 \arrow[r] & \cdots & L_{n-1} \arrow[rr, "\beta_n \circ \alpha_{n-1}"'] \arrow[ur] & & L_n \arrow[rr, "\beta_{n+1} \circ \alpha_n"'] \arrow[ur] & & L_{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde los L_n, $\forall n \geq 0$, son R-módulos inyectivos

definamos

$$C^n = \begin{cases} L_n ; & n \geq 0 \\ X ; & n = -1 \\ 0 ; & n < -1 \end{cases}$$

$$\delta^n = \begin{cases} \varepsilon_{n+1} \ \alpha_n ; & n \geq 0 \\ \varepsilon_0 ; & n = -1 \\ 0 ; & n < -1 \end{cases}$$

α_n es sobreyectiva y ε_n es inyectiva

luego se tiene

$$C: 0 \longrightarrow X \xrightarrow{\varepsilon_0} C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} \cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots$$

Solamente nos bastará probar que la sucesión

C es exacta en C^{n+1} es decir

$$I_m \, \delta^n = \ker \delta^{n+1}$$

$$I_m\ \beta_{n+1} = \ker\ \alpha_{n+1}$$

$$I_m\ \delta^n = I_m\ (\beta_{n+1} \circ \alpha_n) = I_m\ \beta_{n+1}$$

$$\ker\ \delta^{n+1} = \ker\ (\beta_{n+1} \circ \alpha_{n+1}) = \ker\ \alpha_{n+1}$$

por que β_{n+2} es inyectivo

$$I_m\ \delta^n = \ker\ \delta^{n+1}$$

luego X posee una resolución inyectiva

Lema 3.6

Para una sucesión exacta corta arbitrariamente dada

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{k} Z \longrightarrow 0$$

de R-módulos juntamente con resoluciones proyectivas arbitrariamente dadas C y E de los módulos X y Z, respectivamente, existe una resolución proyectiva D del módulo Y y dos transformaciones de cadenas

$$f\colon C \longrightarrow D, \quad g\colon D \longrightarrow E$$

de estas sucesiones descendentes tales que, para todo entero no negativo

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible.

Demostración

Sean

$$C: \ \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \longrightarrow 0$$

$$Y$$

$$D: \ \cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} D_n \xrightarrow{\partial'_n} D_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_1 \xrightarrow{\partial'_1} D_0 \xrightarrow{\partial'_0} Z \longrightarrow 0$$

dos resoluciones proyectivas de los módulos X y Z respectivamente.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, dash] & & \vdots \arrow[d, dash] & & \vdots \arrow[d, dash] & \\
0 \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[rr, "i_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}"'] & & C_{n+1} \oplus E_{n+1} \arrow[rr, "p_{n+1}"] \arrow[d, "\partial'_{n+1} \boxtimes \partial'_{n+1}"] & & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial'_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[rr, "i_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & & C_n \boxtimes E_n \arrow[rr, "p_n"] \arrow[d, "\partial_n \boxtimes \partial'_n"] & & E_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[rr, "i_{n-1}"] \arrow[d, dash] & & C_{n-1} \boxtimes E_{n-1} \arrow[rr, "p_{n-1}"] \arrow[d, dash] & & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dash] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d, dash] & & \vdots \arrow[d, dash] & & \vdots \arrow[d, dash] & \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[rr, "i_1"] \arrow[d, "\partial_1"'] & & C_1 \boxtimes E_1 \arrow[rr, "p_1"] \arrow[d, "\partial_1 \boxtimes \partial_1"] & & E_1 \arrow[r] \arrow[d, "\partial'_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_0 \arrow[rr, "i_0"] \arrow[d, "\partial_0"'] & & C_0 \boxtimes E_0 \arrow[rr, "p_0"] \arrow[d, "\partial''_0"] & & E_0 \arrow[r] \arrow[d, "\partial'_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[d] & & Y \arrow[rr, "g"] \arrow[d] & & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

como E_0 es proyectivo existe $h: E_0 \longrightarrow Y$ tal que $g \circ h = \partial'$; definamos a la función

$$\partial''_0 : C_0 \boxtimes E_0 \longrightarrow Y$$

$$(x_0, y_0) \rightsquigarrow \partial''_0(x_0, y_0) = f\partial_0(x_0) + h(y_0)$$

probemos que ∂''_0 es sobreyectiva

Sea $y \in Y$

$y \in Y \Rightarrow g(y) \in Z$

$\Rightarrow \exists y_0 \in E_0$ tq $\partial'_0(y_0) = g(y)$

Aplicando $\partial''_0(0,y_0) = f\partial_0(0) + h(y_0) = h(y_0)$

es tal que $g(h(y\ )) = \partial'_0(y_0) = g(y)$

esto implica $y - h(y_0) \in \ker g \Rightarrow \exists x_0 \in X$ tq $f(x_0) = y - h(y_0)$

Sea $x_1 \in C_0$ tq $\partial_0(x_1) = x_0$, aplicando

$\partial''(x_1,y_0) = f\ \partial_0(x_1) + h(y_0) = y - h(y_0) + h(y_0) = y$

luego ∂'' es sobreyectiva.

Probemos la conmutatividad del diagrama:

i) Para el rectángulo derecho tenemos

Sea $x_0 \in C_0$

$x_0 \in C_0 \Rightarrow\ f\ \partial_0(x_0)$ (1)

$\partial''(i_0(x_0)) = (f\ \partial_0 \oplus h)\ i_0(x_0) = (f\ \partial_0 \oplus h)(x_0,0)$

$\partial''_0(i_0(x_0)) = f\ \partial_0(x_0)$ (2)

Luego de (1) y (2) se cumple que el rectángulo derecho es conmutativo.

ii) Para el rectángulo izquierdo tenemos

$\partial'_0(p_0(x_0,y_0)) = \partial'_0(y_0)$ (1)

y

$g(\partial''_0(x_0,y_0)) = g(f\ \partial_0(x_0) + h(y_0))$

$g(\partial''_0(x_0,y_0)) = g(h(y_0)) = \partial'_0(y_0)$ (2)

luego de (1) y (2) se cumple que el rectángulo de la izquierda es conmutativo.

Probemos la exactitud en el módulo $C_0 \oplus E_0$ es decir que la $I_m(\partial_0 \oplus \partial_0) = \ker \partial_0''$

i) $\mathrm{Im}(\partial_1 \oplus \partial_1') \subset \ker \partial_0''$

Sea $(a,b) \in C_1 \oplus E_1$

$$\partial_0''(\partial_1 \oplus \partial_1')(a,b) = \partial_0''(\partial_1(a), \partial_1'(b))$$

$$\partial_0''(\partial_1 \oplus \partial_1')(a,b) = f\,\partial_0(\partial_1(a)) + h\,\partial_1'(b) = h\,\partial_1'(b)$$

Probemos que $h\,\partial_1'(b) = 0$

Aplicando g a $h\,\partial_1'(b)$ tenemos

$$g(h(\partial_1'(b)) = (g\circ h)(\partial_1'(b)) = (\partial_0' \circ \partial_1')(b) = 0$$

esto implica que

$$h\,\partial_1'(b) \in \ker g \Rightarrow \exists x \in X \text{ tq } f(x) = h\,\partial_1'(b)$$
$$\Rightarrow \exists x_0 \in C_0 \text{ tq } \partial_0(x_0) = x$$

Aplicando

$$(\partial'' \circ i_0)(x_0) = f(\partial_0(x_0)) = f(x) = h(\partial_1'(b))$$

y así

$$f(\partial_0(x_0)) + 0 = f(\partial_0(x_0)) + h(0)$$

$$f(\partial_0(x_0)) + 0 = 0 \quad + \quad h(\partial_1'(b))$$ por tener escritura única

luego $h\,(\partial_1'(b)) = 0$

lo que completa la prueba de $\mathrm{Im}(\partial_1 \oplus \partial_1') \subset \ker \partial_0''$

ii) $\ker \partial_0'' \subset \mathrm{Im}(\partial_1 \oplus \partial_1')$

Sea $(x_0,y_0) \in \ker \partial_0''$

$$(x_0,y_0) \in \ker \partial_0'' \Rightarrow \partial''(x_0,y_0) = f(\partial_0(x_0)) + h(y_0) = 0$$

$$f(\partial_0(x_0)) = 0_0 \Rightarrow \partial_0(x_0) = 0$$
$$\Rightarrow \exists x_1 \in C_1 \text{ tq } \partial_1(x_1) = x_0$$

$h(y_0) = 0 \Rightarrow \exists y_1 \in E_1$ tq $\partial_1'(y_1) = y_0$; esto

implica $(x_0,y_0) = (\partial_1 \oplus \partial_1')(x_1,y_1)$

luego $(x_0,y_0) \in Im(\partial_1 \oplus \partial_1')$

de (i) (ii) concluimos que

$$Im(\partial_1 \oplus \partial_1') = \ker \partial_0''$$

Probaremos que los cuadrados son conmutativos para todo $n \geq 1$

i) Para el cuadrado de la derecha

Sea $(a_n,b_n) \in C_n \oplus E_n$

$(a_n,b_n) \in C_n \oplus E_n \Rightarrow \partial_n'(p_n(a_n,b_n) = \partial_n'(b_n)$

por otra parte

$p_{n-1}((\partial_n \oplus \partial_n')(a_n,b_n)) = p_{n-1}(\partial_n(a_n), \partial_n'(b_n))$

$p_{n-1}((\partial_n \oplus \partial_n')(a_n,b_n) = \partial_n'(b_n)$

luego el cuadrado de la derecha es conmutativo

ii) Para el cuadrado de la izquierda

Sea $a_n \in C_n$

$a_n \in C_n \Rightarrow (\partial_n \oplus \partial_n')(i_n(a_n)) = (\partial_n \oplus \partial_n')(a_n,0) = (\partial_n(a_n),0)$

por otra parte

$i_{n-1}(\partial_n(a_n)) = (\partial_n(a_n),0)$

luego el cuadrado de la izquierda es conmutativo

Probando así que los cuadrados conmutan

Además para todo $n \geq 0$ se tienen que las filas son sucesiones exactas cortas descomponibles por la forma que están definidas en cada nivel y en el nivel $n = -1$ tenemos que el módulo Y se descompone en

$$Y = \operatorname{Im} \partial_0'' = \operatorname{Im} f\, \partial_0 \oplus \operatorname{Im} h$$

teniendo así que la sucesión exacta corta de la fila n = -1 se descompone.

Lo que prueba el lema (3.6).

2- FUNTORES TORSION

A lo largo de la presente sección X, Y denotarán R-módulos arbitrariamente dados.

Elijamos una resolución proyectiva de X

$$C: \ \dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} \dots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \longrightarrow 0$$

consideremos el producto tensorial $C \otimes Y$ que es la sucesión

$$C \otimes Y: \ \dots \longrightarrow C_{n+1} \otimes Y \xrightarrow{\partial_{n+1}\otimes 1_Y} C_n \otimes Y \xrightarrow{\partial_n \otimes 1_Y} \dots \longrightarrow C_0 \otimes Y \xrightarrow{\partial_0 \otimes 1_Y} X\otimes Y \longrightarrow 0$$

puesto que

$$(\partial_n \otimes 1_Y) \circ (\partial_{n+1} \otimes 1_Y) = \partial_n \circ \partial_{n+1} \otimes 1_Y = 0$$

la sucesión $C \otimes Y$ es semiexacta, podemos entonces obtener para cada n, el n-ésimo módulo de homología

$$H_n(C \otimes Y) = \frac{\operatorname{Ker}(\partial_n \otimes 1_Y)}{\operatorname{Im}(\partial_{n+1} \otimes 1_Y)}$$

Lema 3.7

Para cualquier otra resolución proyectiva

$$D: \ \dots D_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} D_n \xrightarrow{\partial'_n} D_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow D_0 \xrightarrow{\partial'_0} X \longrightarrow 0$$

tenemos, $\forall n \geq 0$

$$H_n(C \otimes Y) \simeq H_n(D \otimes Y)$$

Demostración

Por (T3.4) existen transformaciones de cadenas

$f = \{f_n: C_n \longrightarrow D_n / n \in \mathbb{Z}\}$

$g = \{g_n: D_n \longrightarrow C_n / n \in \mathbb{Z}\}$

de las sucesiones descendentes C y D tales que las transformaciones de cadenas

$$g \circ f = \{g_n \circ f_n: C_n \longrightarrow C_n / n \in \mathbb{Z}\}$$

$$f \circ g = \{f_n \circ g_n: D_n \longrightarrow D_n / n \in \mathbb{Z}\}$$

son homotípicas a las transformaciones de cadenas identidad de C y D respectivamente.

Sea $i: Y \longrightarrow Y$, el endomorfismo identidad de Y

Se comprueba facilmente que

$f \otimes i = \{f_n \otimes i: C_n \otimes Y \longrightarrow D_n \otimes Y/n \in \mathbb{Z}\}$

$g \otimes i = \{g_n \otimes i: D_n \otimes Y \longrightarrow C_n \otimes Y/n \in \mathbb{Z}$

son transformaciones de cadenas de las sucesiones descendentes $C \otimes Y$ y $D \otimes Y$, estas inducen homomorfismos

$$f_*: H_n(C \otimes Y) \longrightarrow H_n(D \otimes Y)$$

$$g_*: H_n(D \otimes Y) \longrightarrow H_n(C \otimes Y)$$

para todo n

Puesto que $g \circ f$ y $f \circ g$ son homotópicas a las transformaciones de cadenas identidad de las sucesiones descendentes C y D.

Se sigue que $(g\otimes i) \circ (f\otimes i)$ y $(f\otimes i) \circ (g\otimes i)$ son también homotópicas a las transformaciones de cadenas identidad de las sucesiones descendentes $C \otimes Y$ y $D \otimes Y$ por (1.18) y (C.5) implica $g_* \circ f_*$ y $f_* \circ g_*$ son automorfismos identidad de los módulos $H_n(C \otimes Y)$ y $H_n(D \otimes Y)$ respectivamente. Por tanto f_* y g_* son isomorfismos para todo entero n.

Lema 3.8

$H_n(C \otimes Y) = 0$ para todo $n \leq 0$

Demostración

Es claro que $H_n(C \otimes Y) = 0$, para $n < -1$, ya que $C \otimes Y = 0$, $\forall n < -1$.

Para los casos $n = 0$ y $n = -1$ es de hacer notar que la exactitud de

$$C_1 \otimes Y \xrightarrow{\partial_1 \otimes i} C_0 \otimes Y \xrightarrow{\partial_0 \otimes i} C_{-1} \otimes Y \xrightarrow{\partial_{-1} \otimes i} C_{-2} \otimes Y$$

en virtud de (T2.9) por tanto tenemos

$$H_n(C \otimes Y) = 0, \; H_{n-1}(C \otimes Y) = 0$$

lo que completa la demostración

Comentario 10

Por (L3.7), el módulo $H_n(C \otimes Y)$ depende esencialmente sólo del entero n y los R-módulos dados X e Y. Por (L3.8), $H_n(C \otimes Y)$

es trivial para todo $n \leq 0$, debido a esto tenemos la siguiente definición.

Definición 3.3

Para todo $n \geq 0$, el R-módulo $H_n(C \otimes Y)$ se llama el n-ésimo producto de torsión sobre R de los módulos X, Y y lo denotamos por

$$\mathrm{Tor}n^{R}(X,Y)$$

o simplemente

$$\mathrm{Tor}n(X,Y)$$

para el caso n = 1 escribimos

$$\mathrm{Tor}(X,Y)$$

Proposición 3.9

Si el módulo X es proyectivo, entonces $\mathrm{Tor}n(X,Y) = 0$ $\forall n > 0$ y para cualquier R-módulo Y.

Demostración

Puesto que X es proyectivo, tenemos una resolución proyectiva

$$C: \ \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X \xrightarrow{\partial_0} X \longrightarrow 0$$

con

$$C_n = \begin{cases} 0: & (\text{si } n \neq 0 \ \ \text{y} \ \ n = -1) \\ X: & (\text{si } n = 0 \ \ \text{ó} \ \ n = -1) \end{cases}$$

$$\partial_n = \begin{cases} 0: & n \neq 0 \\ 1x: & \text{Endomorfismo identidad de X} \end{cases}$$

Se deduce que $C \otimes Y$ es exacta y por consiguiente $\mathrm{Tor}n(X,Y) = 0$ para todo módulo Y u todo entero positivo n.

Proposición 3.10

Si el módulo Y es proyectivo, entonces $\mathrm{Tor}n(X,Y) = 0$ para todo entero positivo n y todo R-módulo X.

Demostración

Sea

$$C: \dots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \dots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\partial_0'} X \longrightarrow 0$$

Una resolución proyectiva de X, como C es exacta e Y es proyectivo se sigue que $C \otimes Y$ es exacta, esto implica

$$\mathrm{Tor}n(X,Y) = H_n(C \otimes Y) = 0 \quad \forall n > 0$$

Proposición 3.11

Si el módulo X tiene una resolución proyectiva C demanera que $C_n = 0$ para todo $n > m$, entonces tenemos que $\mathrm{Tor}n(X,Y) = 0$ $\forall n > m$ y todo R-módulo Y.

Además

$$\mathrm{Tor}m(X,Y) \approx \ker(\partial_m \otimes i)$$

donde

$$\partial_m \otimes i: C_m \otimes Y \longrightarrow C_{m-1} \otimes Y$$

denota el producto tensorial del homomorfismo

$$\partial_m : C_m \longrightarrow C_{m-1}$$

en C y el endomorfismo identidad $i: Y \longrightarrow Y$ del módulo Y

Demostración

Tenemos la siguiente situación

$$C: \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \longrightarrow 0$$

de donde resulta

$$C \otimes Y: \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow C_m \otimes Y \xrightarrow{\partial_m \otimes i} C_{m-1} \otimes Y \longrightarrow \ldots$$

como $\partial_{m+1} = 0$ será $\partial_{m+1} \otimes 1y = 0$

de aquí que $\mathrm{Torm}(X,Y) = \dfrac{\ker(\partial_m \otimes i)}{0}$

luego

$$\mathrm{Torm}(X,Y) \cong \ker(\partial_m \otimes i)$$

para $m < n$, tenemos que $C_n = 0$ y de ahí que

$$\mathrm{Torn}(X,Y) = 0$$

Corolario 3.12

Dados dos módulos X e Y sobre un dominio de ideales principales R, tenemos

$$\mathrm{Torn}(X,Y) = 0$$

para todo entero positivo n. Además

$$\mathrm{Tor}\,(X,Y) \simeq \ker\,(f \otimes i)$$

donde $f \otimes i$, representa el producto tensorial del homomorfismo $f\colon A \longrightarrow F$ en cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} X$$

con F R-módulo libre y el endomorfismo identidad $i\colon Y \longrightarrow Y$

Efectivamente existe una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$, de acuerdo con (P1.8) el módulo A también es libre. Luego F y A son proyectivos, obteniendo una resolución proyectiva de X con $C_n = 0$ para $n > 1$ y $\partial_1 = f$ entonces (C3.12) es consecuencia de (P3.11). Lo que prueba el resultado.

Lema B

Si tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "h"'] & & N \arrow[r] \arrow[dl, "f"] & 0 \\ & T & & \end{tikzcd}$$

entonces g lleva a $\ker h$ sobre $\ker f$

Demostración

Definamos

$$\hat{g}\colon \ker h \longrightarrow \ker f \quad \text{por}$$
$$x \rightsquigarrow \hat{g}(x) = g(x)$$

veamos que es sobreyectiva

Si $y \in \ker f$, como g es sobre existe x en M tal que $y = g(x)$; $\mathrm{com}(f \circ g)(x) = h(x)$ esto implica que $x \in \ker h$.

Proposición 3.13

Dados dos R-módulos X,Y cualesquiera y una sucesión exacta corta cualquiera

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

con P proyectivo, tenemos que $\forall n > 1$

$$\mathrm{Tor}_n(X,Y) \simeq \mathrm{Tor}_{n-1}(A,Y)$$

$$\mathrm{Tor}\,(X,Y) \simeq \ker\,(f \otimes i)$$

Demostración

Consideremos una resolución proyectiva de A

$$C: \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} \ldots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} A \longrightarrow 0$$

$$\partial^*_{n+1} \qquad \partial^*_n \qquad \partial^*_2 \qquad \partial^*_1 \qquad \partial^*_0$$

$$C^*: \ldots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{f\partial_0} P \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

$$A$$

como ∂_0 es epimorfismo y $f: A \longrightarrow P$ es inyectiva obtenemos una resolución proyectiva C^* de X

$$C^*: \ldots \longrightarrow C^*_{n+1} \longrightarrow C^*_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow C^*_1 \longrightarrow C^*_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

donde

$$C_n^* = \begin{cases} C_{n-1} : \text{ si } n > 0 \text{ ó } n < -1 \\ P \quad : \text{ si } n = 0 \\ X \quad : \text{ si } n = -1 \end{cases}$$

$$\partial_n^* = \begin{cases} \partial_{n-1} : \text{ si } n > 1 \\ f\ \partial_0 : \text{ si } n = 1 \\ g \quad : \text{ si } n = 0 \\ 0 \quad : \text{ si } n < 0 \end{cases}$$

nada más falta comprobar la exactitud en C_0^* y en P

. En C_0^* $\ker f \circ \partial_0 = \ker \partial_0$, ya que f es inyectiva luego

$$\ker f\ \partial_0 = \operatorname{Im} \partial_1$$

. En P $\operatorname{Im} f \circ \partial_0 = \operatorname{Im} f$ ya que ∂_0 es sobre

luego $\operatorname{Im}(f \circ \partial_0) = \ker g$

de aquí obtenemos por definición

$$\operatorname{Tor}_n(X,Y) \simeq \frac{\ker (\partial_n^* \otimes i)}{\operatorname{Im} (\partial_{n+1}^* \otimes i)} = \frac{\ker (\partial_{n-1} \otimes i)}{\operatorname{Im} (\partial_n \otimes i)} = \operatorname{Tor}_{n-1}(A,Y)$$

$\forall n > 1$

Para el caso n = 1. En virtud de (T2.9) la exactitud de

$$C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} A \longrightarrow 0$$

implica la exactitud de la sucesión

$$C_1 \otimes Y \xrightarrow{\partial_1 \otimes i} C_0 \otimes Y \xrightarrow{\partial_0 \otimes i} A \otimes Y \longrightarrow 0$$

Por lo tanto, $\partial_0 \otimes i$ es epimorfismo y

$$\operatorname{Im}(\partial_1 \otimes i) = \ker (\partial_0 \otimes i)$$

consideremos el triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C_0 \otimes Y \arrow[r, "\partial^*_1 \otimes i"] \arrow[d, "\partial_0 \otimes i"'] & P \otimes Y \\
A \otimes Y \arrow[ur, dashed, "f \otimes i"'] \arrow[d] & \\
0 &
\end{tikzcd}$$

por el lema B al ser $\partial_0 \otimes i$ epimorfismo, lleva a $\ker(\partial^*_1 \otimes i)$ sobre $\ker(f \otimes i)$

En cuyo caso tendriamos

$$\mathrm{Tor}(X,Y) = \frac{\ker(\partial^*_1 \otimes i)}{\mathrm{Im}(\partial^*_2 \otimes i)} = \frac{\ker(\partial^*_1 \otimes i)}{\mathrm{Im}(\partial_1 \otimes i)} = \frac{\ker(\partial^*_1 \otimes i)}{\ker(\partial_0 \otimes i)} \simeq \ker(f \otimes i)$$

Comentario 11

1) Por conveniencia, en el resto de esta sección definimos

$$\mathrm{Tor}_0\,(X,Y) = X \otimes Y$$

para dos R-módulos cualesquiera X,Y

2) Dada una resolución proyectiva cualquiera del módulo X

$$C: \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \longrightarrow 0$$

definimos una sucesión descendente

$$\hat{C}_n = \begin{cases} C_n, & \text{si } n \neq -1 \\ 0, & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

$$\hat{\partial}_n = \begin{cases} \partial_n, & \text{si } n > 0 \\ 0, & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

diremos que esta sucesión descendente $\hat{C}$, es una resolución proyectiva reducida del módulo X.

La utilidad de las resoluciones proyectivas reducidas es debido al hecho de que todo módulo en esta resoluciones es proyectivo.

Lema 3.14

Para R-módulos X, Y arbitrariamente dados y cualquier resolución proyectiva reducida $\hat{C}$ de X tenemos

$$H_n(\hat{C} \otimes Y) \approx Tor_n(X,Y)$$

para todo entero no negativo n.

Demostración

Para $n > 0$, tenemos

$$H_n(\hat{C} \otimes Y) = H_n(C \otimes Y) \approx Tor\ (X,Y)$$

asi nos falta establecer

$$H_n(\hat{C} \otimes Y) \approx X \otimes Y$$

en virtud de (T2.7) la exactitud de la sucesión

$$C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \longrightarrow 0$$

implica la de la sucesión

$$C_1 \otimes Y \xrightarrow{\partial_1 \otimes i} C_0 \otimes Y \xrightarrow{\partial_0 \otimes i} X \otimes Y \longrightarrow 0$$

donde i representa el endomorfismo identidad del módulo Y, por tanto $\partial_0 \otimes i$ es epimorfismo y

$$Im\ (\partial_1 \otimes i) = ker\ (\partial_0 \otimes i)$$

consecuentemente obtenemos

$$H_0(\hat{C} \otimes Y) \approx \frac{C_0 \otimes Y}{\mathrm{Im}(\partial_1 \otimes i)} \quad \frac{C_0 \otimes Y}{\ker(\partial_0 \otimes i)} \approx X \otimes Y$$

lo que completa la demostración

Comentario 12

1- Dados dos homomorfismos cualesquiera

$h: X \longrightarrow X'$ y $k: Y \longrightarrow Y'$

Si C y C' son resoluciones proyectivas de X y X' respectivamente por (P3.2) existe una transformación de cadenas

$$f = \{f : C_n \longrightarrow C'_n / n \in Z\}$$

de la sucesión descendente C en la sucesión descendente C' tal que $f_{-1} = h$, entonces

$f \otimes k = \{f_n \otimes k: C_n \otimes Y \longrightarrow C'_n \otimes Y' / n \in Z\}$

es una transformación de cadenas de la sucesión descendente $C \otimes Y$ en la sucesión descendente $C \otimes Y'$, por tanto $f \otimes k$ induce un homomorfismo

$(f \otimes k)_{*n}: \mathrm{Tor}_n(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n(X',Y)$

para todo $n > 0$, por medio de la proposición (P3.3) se puede verificar que $(f \otimes k)_{*n}$ no depende de la elección particular de la transformación de cadenas $f: C \longrightarrow C'$ y queda completamente determinado por el entero n y los homomorfismos h,k. Este homomorfismo recibirá el nombre de producto de torsión n-dimensional sobre R de los homomorfismos h, k, denotándolo por

$$Tor_n(h,k): Tor_n(X,Y) \longrightarrow Tor_n(X',Y')$$

para $n = 1$ usaremos la notación simple

$$Tor(h,k): Tor(X,Y) \longrightarrow Tor(X',Y')$$ y

lo denominaremos producto de torsión (sobre R) de las transformaciones h y k. Por conveniencia definimos

$$Tor_0(h,k) = h \otimes k$$

Teorema 3.15

Si $h_1: X \longrightarrow X'$, $h_2: X' \longrightarrow X''$, $k_1: Y \longrightarrow Y'$ y $k_2: Y' \longrightarrow Y''$ son homomorfismos de módulos entonces para todo entero nonnegativo

$$Tor_n(h_2 \circ h_1,\ k_2 \circ k_1) = Tor_n(h_2,k_2) \circ Tor_n(h_1,k_1)$$

Comentario 13

Sea X un módulo cualquiera y

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

Una sucesión exacta corta, si

$$C: \dots \longrightarrow \hat{C}_{n+1} \xrightarrow{\hat{\partial}_{n+1}} \hat{C}_n \xrightarrow{\hat{\partial}_n} \hat{C}_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \hat{C}_0 \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva reducida del módulo X. Para todo entero n, la sucesión

$$0 \longrightarrow \hat{C}_n \otimes U \xrightarrow{i_n \otimes f} \hat{C}_n \otimes V \xrightarrow{i_n \otimes g} \hat{C}_n \otimes W \longrightarrow 0$$

donde i_n representa el endomorfismo identidad del módulo $\hat{C}_n$, es exacta de acuerdo con (P2.27)

Puesto que $\hat{C}_n$ es proyectivo. Asi obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \hat{C} \otimes U \xrightarrow{i\otimes f} \hat{C} \otimes V \xrightarrow{i\otimes g} \hat{C} \otimes W \longrightarrow 0$$

de sucesiones descendentes por (T1.23) obtenemos una sucesión de homología exacta

$$\cdots \longrightarrow H_n(C\otimes U) \xrightarrow{f_*} H_n(C\otimes V) \xrightarrow{g_*} H_n(C\otimes W) \xrightarrow{\partial_n^*} H_{n-1}(C\otimes u) \longrightarrow \cdots$$

donde f_* y g_* están definidos por las transformaciones de cadenas $i \otimes f$ y $i \otimes g$, respectivamente y ∂_n^* es el homomorfismo conexión.

En base al lema (L3.13) tenemos el siguiente teorema

Teorema 3.16

Para todo R-módulo X y cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

tenemos una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_n(X,U) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Tor}_n(X,V) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Tor}_n(X,W) \xrightarrow{\partial_n^*} \mathrm{Tor}_{n-1}(X,U) \longrightarrow \cdots$$

donde

$$f_* = \mathrm{Tor}_n(i,f), \quad g_* = \mathrm{Tor}_n(i,g)$$

y ∂_n^* es el homomorfismo de conexión, esta sucesión finaliza con

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}(X,W) \xrightarrow{\partial_1^*} X \otimes U \xrightarrow{i\otimes f} X \otimes V \xrightarrow{i\otimes g} X \otimes W \longrightarrow 0$$

Demostración

Sea C una resolución proyectiva reducida del módulo X; y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_{n+1} \otimes U \arrow[r, "i\otimes f_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}\otimes 1_U"'] & C_{n+1} \otimes V \arrow[r, "i\otimes g_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}\otimes 1_V"'] & C_{n+1} \otimes W \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n+1}\otimes 1_W"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n} \otimes U \arrow[r, "i\otimes f_{n}"] \arrow[d] & C_{n} \otimes V \arrow[r, "i\otimes g_{n}"] \arrow[d] & C_{n} \otimes W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_{0} \otimes U \arrow[r, "i\otimes f_{0}"] \arrow[d] & C_{o} \otimes V \arrow[r, "i\otimes g_{0}"] \arrow[d] & C_{0} \otimes W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Dado que $0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$ es uan sucesión exacta y C_n es proyectivo para todo n en $\mathbb{Z}$ resulta que las filas son exactas

y que las columnas son semiexactas cumpliendo así las condiciones planteadas en el proceso de dedinición del homomorfismo de conexión(P26.27,28 Henry).

Resultando así la conclusión del (T3.16)

Corolario 3.17

Para cualquier módulo X sobre un dominio de ideales principales R y cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

de R-módulos, se tiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(X,U) \xrightarrow{\mathrm{Tor}(i,f)} \mathrm{Tor}(X,Y) \xrightarrow{\mathrm{Tor}(i,g)} \mathrm{Tor}(X,W) \xrightarrow{\partial^*} X\otimes U \xrightarrow{i\otimes f} X\otimes V \xrightarrow{i\otimes g} X\otimes W \longrightarrow$$

donde ∂^* es el homomorfismo de conexión, mientras que los otros homomorfismos son los productos torsión y los productos tensoriales del homomorfismo $i: X \longrightarrow X$ y los homomorfismos f y g, resphctivamente.

Demostración

Efectivamente si introducimos a X en una sucesión exacta corta

$$C: \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f'} F \xrightarrow{\xi} X \longrightarrow 0$$

con F libre, A también es libre y así obtenemos la resolución proyectiva reducida

$$\hat{C}: \ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f'} F \longrightarrow 0$$

En este caso obtenemos

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & U\otimes A \arrow[r, "f\otimes i"] \arrow[d, "i\otimes f'"] & V\otimes A \arrow[r, "g\otimes i"] \arrow[d, "i\otimes f'"] & W\otimes A \arrow[r] \arrow[d, "i\otimes f'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U\otimes F \arrow[r, "f\otimes i"] \arrow[d] & V\otimes F \arrow[r, "g\otimes i"] \arrow[d] & W\otimes F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

y de aquí obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H_1(\hat{C}\otimes U) \longrightarrow H_1(\hat{C}\otimes V) \longrightarrow H_1(\hat{C}\otimes W) \longrightarrow H_0(\hat{C}\otimes W) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_0(\hat{C}\otimes V) \longrightarrow H_0(\hat{C}\otimes W) \longrightarrow 0$$

y esto es

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(X,U) \longrightarrow \mathrm{Tor}(X,V) \longrightarrow \mathrm{Tor}(X,W) \longrightarrow X \otimes U \longrightarrow$$
$$\longrightarrow X \otimes V \longrightarrow X \otimes W \longrightarrow 0$$

y así el resultado está probado.

Teorema 3.18

Para todo R-módulo Y y cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

de R-módulos, tenemos una sucesión exacta

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_n(U,Y) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Tor}_n(V,Y) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Tor}_n(W,Y) \xrightarrow{\partial_n^*} \mathrm{Tor}_{n-1}(U,Y) \longrightarrow \ldots$$

donde

$$f_* = \mathrm{Tor}_n(f,i); \quad g_* = \mathrm{Tor}_n(g,i)$$

y ∂_n^* es el homomorfismo conexión. Esta sucesión finaliza con

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}(W,Y) \xrightarrow{\partial_*} U \otimes Y \xrightarrow{f \otimes i} V \otimes Y \xrightarrow{g \otimes i} W \otimes Y \longrightarrow 0$$

Demostración

Sean C y E dos resoluciones proyectivas de los módulos U y W, por (L3.6) existe una resolución proyectiva D del módulo V y dos transformaciones de cadenas

$$f: C \longrightarrow D \quad y \quad g: D \longrightarrow E$$

de estas sucesiones descendentes tales que para todo entero no negativo es una sucesión exacta corta descomponible y por (T2.10)

$$0 \longrightarrow C_n \otimes Y \xrightarrow{f_n \otimes i} D_n \otimes Y \xrightarrow{g_n \otimes i} D_n \otimes Y \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible para todo entero no negativo y así las filas son exactas y las columnas semiexactas cumpliendose las hipótesis R_n el proceso de construcción del homomorfismo de conexión resultando así la conclusión de (T3.18)

Teorema 3.19

Dados dos R-módulos X,Y cualesquiera en tonces $\forall n \in Z$ $Tor_n(X,Y) = Tor_n(Y,X)$

Demostración

para n = 0

$Tor_0(X,Y) = X \otimes Y$

$Tor_0(Y,X) = Y \otimes X$

luego

$Tor_0(X,Y) = Tor_0(Y,X)$

Supongamos que el teorema es cierto, cualesquiera que sean X, Y para todo $m < n$ y probemoslo para n

Sea

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

con F libre.

Por teorema (T3.18 y T3.17) tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\ldots \longrightarrow Tor_n(F,Y) \longrightarrow Tor_n(X,Y) \longrightarrow Tor_{n-1}(K,Y) \longrightarrow Tor_{n-1}(F,Y) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Tor_n(Y,F) \longrightarrow Tor_n(Y,X) \longrightarrow Tor_{n-1}(Y,K) \longrightarrow Tor_{n-1}(Y,F) \longrightarrow \ldots$$

pero $Tor_n(F,Y) = Tor_{n-1}(F,Y) = Tor_n(Y,F) = Tor_{n-1}(Y,F) = 0$

por ser F R-módulo libre

luego

$$Tor_n(X,Y) \simeq Tor_{n-1}(K,Y)$$

y

$$Tor_n(Y,X) \simeq Tor_{n-1}(Y,K)$$

como por hipótesis inductiva

$$Tor_{n-1}(K,Y) \simeq Tor_{n-1}(Y,K)$$

luego

$$Tor_n(X,Y) \simeq Tor_n(Y,X)$$

la siguiente proposición es un resultado inmediato de (T3.18) y (T3.19)

Proposición 3.19

Sea X un R-módulo e i su endomorfismo identidad, las siguientes proposiciones son equivalentes

a) $Tor(x,y) = 0$ para todo P-módulo Y

b) $Tor_n(x,y) = 0$ para todo $n > 0$ y todo R-módulo Y

c) Si $f: A \longrightarrow B$ es un monomorfismo de R-módulos, también lo es $i \otimes f$

d) Toda sucesión exacta de R-módulos permanece exacta en la multiplicación tensorial por X

e) Para todo R-módulo Y y toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

la siguiente sucesión es también exacta.

$$0 \longrightarrow U \otimes Y \xrightarrow{f\otimes i} V \otimes Y \xrightarrow{g\otimes i} X \otimes Y \longrightarrow 0$$

3- FUNTORES EXTENSION

A lo largo de la presente sección X e Y denotarán R-módulos arbitrariamente dados.

Elijamos una resolución proyectiva

$$C: \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \longrightarrow 0$$

Sea $i: Y \longrightarrow Y$ el endomorfismo identidad de Y consideremos Hom(C,Y), que es la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{\delta 0} \mathrm{Hom}(C_0,Y) \longrightarrow \ldots$$

$$\xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{Hom}(C_{n-1},Y) \xrightarrow{\delta^n} \mathrm{Hom}(C_n,Y) \xrightarrow{\delta^{n+1}} \mathrm{Hom}(C_{n+1},Y) \longrightarrow \ldots$$

donde

$$\delta^n = \mathrm{Hom}(\partial_n, i)$$

$$\delta^{n-1} = \mathrm{Hom}(\partial_{n-1}, i)$$

$$\delta^n \circ \delta^{n-1} = \mathrm{Hom}(\partial_n, i) \circ \mathrm{Hom}(\partial_{n-1}, i) = \mathrm{Hom}(\partial_{n-1} \circ \partial_n, i\ i) = 0$$

y así se tiene que Hom(C,Y) es semiexacta es decir es una sucesión ascendente semiexacta entonces tenemos definidos para todo n en Z, el n-ésimo grupo de cohomología

$$H^n(\mathrm{Hom}(C,Y)) = \frac{\ker(\mathrm{Hom}(\partial_{n+1}, i))}{\mathrm{Im}\ (\mathrm{Hom}(\partial_n, i))}$$

Tenemos los siguientes resultados.

Lema 3.20

Para cualquier otra resolución proyectiva

$$D: \ldots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} D_n \xrightarrow{\partial'_n} D_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow D_0 \xrightarrow{\partial'_0} X \longrightarrow 0$$

del módulo X, se tiene que

$$H^n(\mathrm{Hom}(C,Y)) \simeq H^n(\mathrm{Hom}(D,Y)$$

Demostración

Dado que todo R-módulo X tiene una resolución proyectiva y dos resoluciones proyectivas del mismo módulo X son equivalentes homotópicamente. Existen transformaciones de cadenas

$f = \{f_n : C_n \longrightarrow D_n / n \in Z\}$

$g = \{g_n : D_n \longrightarrow C_n / n \in Z\}$

es decir

$$\begin{tikzcd}
C: \ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \ldots \arrow[r] & C_0 \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "f_0"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f_{-1}"] & 0 \\
D: \ldots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"] \arrow[d, "g_n"] & D_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-1}"] & \ldots \arrow[r] & D_0 \arrow[r, "\partial'_0"] \arrow[d, "g_0"] & X \arrow[r] \arrow[d, "g_{-1}"] & 0 \\
C: \ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & C_0 \arrow[r, "\partial_0"] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de las sucesiones descendentes C y D tales que las transformaciones de cadenas

$g \circ f = \{g_n \circ f_n : C_n \longrightarrow C_n / n \in z\}$

$f \circ g = \{f_n \circ g_n : D_n \longrightarrow D_n / n \in z\}$

son homotópicas a las transformaciones de cadenas identidad de C y D

Si tenemos que $i: Y \longrightarrow Y$ es el endomorfismo identidad

$$\begin{array}{lcccccccc}
\mathrm{Hom}(D,Y): 0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,Y) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial'_0,i)} & \mathrm{Hom}(D_n,Y) & \longrightarrow \dots \longrightarrow & \mathrm{Hom}(D_n,Y) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial'_{n+1},i)} & \mathrm{Hom}(D_{n+1},Y) & \longrightarrow \dots \\
& \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(f_{-1},1)} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(f_n,i)} & & \downarrow & \\
\mathrm{Hom}(C,Y): 0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,Y) & \xrightarrow[\mathrm{Hom}(\partial_0,i)]{} & \mathrm{Hom}(C_0,Y) & \longrightarrow \dots \longrightarrow & \mathrm{Hom}(C_n,Y) & \xrightarrow[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},i)]{} & \mathrm{Hom}(C_{n+1},Y) & \longrightarrow \dots
\end{array}$$

Además

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(C_n,Y) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},i)} & \mathrm{Hom}(C_{n+1},Y) \\
{\scriptstyle \mathrm{Hom}(f_n,i)} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \mathrm{Hom}(f_{n+1},i)} \\
\mathrm{Hom}(D_n,Y) & \xrightarrow[\mathrm{Hom}(\partial'_{n+1},i)]{} & \mathrm{Hom}(D_{n+1},Y)
\end{array} .$$

$\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},i) \circ \mathrm{Hom}(f_n,i) = \mathrm{Hom}(f_n \circ \partial_{n+1},i)$

$\mathrm{Hom}(f_{n+1},i) \circ \mathrm{Hom}(\partial'_{n+1},i) = \mathrm{Hom}(\partial'_{n+1} \circ f_{n+1},i)$

luego $\qquad \mathrm{Hom}(f_n \circ \partial_{n+1},i) = \mathrm{Hom}(\partial'_{n+1} \circ f_{n+1},i)$

y así tenemos

$\mathrm{Hom}(f,i) = \{\mathrm{Hom}(f_n,i): \mathrm{Hom}(D_n,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_n,Y)/n \in Z\}$

$\mathrm{Hom}(g,i) = \{\mathrm{Hom}(g_n,i): \mathrm{Hom}(C_n,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(D_n,Y)/n \in Z\}$

son transformaciones de cadenas de las sucesiones ascendentes $\mathrm{Hom}(C,Y)$ y $\mathrm{Hom}(D,Y)$

estas inducen homomorfismos

$$f^*: H^n(\mathrm{Hom}(D,Y)) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}(C,Y))$$

$$g^*: H^n(\mathrm{Hom}(C,Y)) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}(D,Y))$$

para todo n.

puesto que $g \circ f$ y $f \circ g$ son homotópicas a las transformaciones de cadenas identidad de las sucesiones C y D se sigue que

$$\mathrm{Hom}(g,i) \circ \mathrm{Hom}(f,i) = \mathrm{Hom}(f \circ g,i) = \mathrm{Hom}(i,i)$$

$$\mathrm{Hom}(f,i) \circ \mathrm{Hom}(g,i) = \mathrm{Hom}(g \circ f,i) = \mathrm{Hom}(i,i)$$

son homotópicas a las transformaciones de cadenas identidad de las sucesiones ascendentes

$$\mathrm{Hom}(D,Y) \quad \text{y} \quad \mathrm{Hom}(C,Y)$$

respectivamente y

$$H^n(\mathrm{Hom}(f,i)) \circ H^n(\mathrm{Hom}(g,i)) = 1_{H^n(C,Y)}$$

$$H^n(\mathrm{Hom}(g,i)) \circ H^n(\mathrm{Hom}(f,i)) = 1_{H^n(C,Y)}$$

lo que implica que f^* y g^* son isomorfismos para todo entero n.

Y así

$$H^n(\mathrm{Hom}(C,Y)) \simeq H^n(\mathrm{Hom}(D,Y)) \,.$$

Lema 3.21

$$H^n(\mathrm{Hom}(C,Y)) = 0 \quad \forall n \leq 0$$

Demostración

Para $n < -1$

$$H^n[\mathrm{Hom}(C,Y)] = 0 \quad \text{ya que}$$

$$\mathrm{Hom}(C_n,Y) = 0$$

para el caso de $n = 0$ y $n = -1$ tenemos

$$C:\ C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \xrightarrow{\partial_{-1}} 0$$

la exactitud de C implica la exactitud de Hom(C,Y)

$$\mathrm{Hom}(C,Y):\ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_0,Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial_0,i)} \mathrm{Hom}(C_1,Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial_1,i)}$$

por tanto

$$H^0\ (\mathrm{Hom}(C,Y)) = 0$$

$$H^{-1}(\mathrm{Hom}(C,Y)) = 0$$

Comentario 14

Por el lema (L3.20), el módulo $H^n[\mathrm{Hom}(C,Y)]$ depende esencialmente sólo del entero n y los R-módulos dados X,Y y por (L3.21), $H^n[\mathrm{Hom}(C,Y)]$es trivial para todo $n \leq 0$, debido a esto damos la siguiente definición.

Definición 3.4

Llamaremos al módulo $H^n[\mathrm{Hom}(C,Y)]$ el n-ésimo producto extensión de los módulos X,Y y lo denotaremos por el símbolo

$$\mathrm{Ext}^n(X,Y)$$

para el caso n = 1 escribimos simplemente

$$\mathrm{Ext}(X,Y)$$

Proposición 3.22

Si el módulo X es proyectivo, entonces

$$\mathrm{Ext}^n(X,Y) = 0$$

para todo entero positivo n y todo R-módulo Y.

Demostración

Dado que X es proyectivo tenemos una resolución proyectiva

$$C: \ldots \longrightarrow C_{n+1} \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

con

$$C_n = \begin{cases} 0, & n \neq 0,\ n \neq -1 \\ X, & n = 0 \text{ ó } n = -1 \end{cases}$$

$$\partial_n = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1x \end{cases}$$

Se deduce que Hom(C,Y) es exacta y por consiguiente

$$H^n(\mathrm{Hom}(C,Y)) = 0$$

para todo módulo Y y todo entero positivo n.

Proposición 3.23

Si el módulo Y es inyectivo, entonces

$$\mathrm{Ext}^n(X,Y) = 0$$

para todo entero positivo n y todo R-módulo X.

Demostración

Sea C una resolución proyectiva de X

$$C: \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} X \longrightarrow 0$$

como C es exacta e Y es inyectivo

Se deduce (T2.11) que Hom(C,Y) es exacta.

$$\mathrm{Ext}^n(X,Y) = H^n(\mathrm{Hom}(C,Y)) = 0 \quad \forall n \geq 0$$

Proposición 3.24

Si el módulo X tiene una resolución proyectiva C tal que $C_n = 0$ para todo $n > m$, entonces

$$\mathrm{Ext}^n(X,Y) = 0$$

para todo $n > m$ y todo R-módulo Y. Además, tenemos

$$\mathrm{Ext}^m(X,Y) \simeq \mathrm{Coker}[\mathrm{Hom}(\partial_m, i)].$$

donde

$$\mathrm{Hom}(\partial_m, i): \mathrm{Hom}(C_{m-1}, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_m, Y)$$

es el Hom del homomorfismo $\partial_m: C_m \longrightarrow C_{m-1}$ de C y el endomorfismo identidad $i: Y \longrightarrow Y$ del módulo Y.

Demostración

Puesto que $\mathrm{Hom}(C_n, Y) = 0 \quad \forall n > m$

la primera afirmación es obvia

además, puesto que

$\ker[\mathrm{Hom}(\partial_{m+1}, i)) = \mathrm{Hom}(C_m, Y)$

entonces

$$\mathrm{Ext}^m(X,Y) = \frac{\ker(\mathrm{Hom}(\partial_{m+1}, i))}{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(\partial_m, i))} \approx \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}(\partial_m, i))$$

lo que prueba el resultado.

Corolario 3.25

Para cualesquiera dos módulos X,Y sobre un dominio de ideales principales R, se tiene

$$\mathrm{Ext}^n(X,Y) = 0$$

para todo entero $n > 1$, además

$$\mathrm{Ext}(X,Y) \approx \mathrm{coker}[\mathrm{Hom}(f,i)]$$

donde Hom(f,i) representa el Hom del homomorfismo $f: A \longrightarrow F$ de cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

con F libre y el endomorfismo identidad $i: Y \longrightarrow Y$ del módulo Y.

Demostración

Efectivamente, dado que F es libre, A también es libre y así F y A son proyectivos, luego tenemos una resolución proyectivo del módulo X como $C_n = 0$, para $n > 1$ y $\partial_1 = f$
Se cumplen las hipótesis de (T3.24) resultando asi la conclusión de (C3.25).

Lema B'

Si
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & N \\ & T \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} \qquad f \circ g = h$$

es un diagrama conmutativo con f inyectiva entonces f induce un monomorfismo entre el coker g y el coker h luego

$$\frac{M}{Img} \simeq \hat{f}\left(\frac{M}{Img}\right) = \frac{f(M)}{Imh} \simeq \frac{N}{Imh}$$

Demostración

Definamos

$$\hat{f}: \frac{M}{Img} \longrightarrow \frac{N}{Imh}$$

$$x + Img \rightsquigarrow \hat{f}(x + Img) = f(x) + Imh$$

Sea

$$x_1 - x_2 \in Img \Rightarrow x_1 - x_2 = g(Y), \text{ para algún } Y \in T$$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = f(g(Y)) = h(Y) \in Imh$$

$$\therefore f(x_1) + Imh = f(x_2) + Imh.$$

Si

$$x + Img \quad \ker\hat{f} \Rightarrow f(x) \in Imh$$

$$\Rightarrow \exists y \in T \ / \ f(x) = h(y) = f(g(y))$$

$$\Rightarrow x = g(y) \in Img$$

$\therefore$ $\hat{f}$ es inyectivo

$$\text{y asi } \frac{M}{Im\ g} \simeq \hat{f}\left(\frac{M}{Im\ g}\right) \simeq \frac{f(M)}{Im\ h} \simeq \frac{N}{Im\ h}$$

Proposición 2.36

Para R-módulos X e Y artitrariamente dados y cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

com P R-módulo proyectivo, se tiene

$$Ext^n(X,Y) \simeq Ext^{n-1}(A,Y) \quad \forall n > 1$$

y

$$Ext(X,Y) \cong coker\left[Hom(f,i)\right]$$

donde $Hom(f,i)$ representa el Hom del homomorfismo $f: A \longrightarrow P$ y el endomorfismo identidad $i: Y \longrightarrow Y$ del módulo Y.

Demostración

Consideremos una resolución proyectiva de A

$$C: \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} \ldots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} A \longrightarrow 0$$

Y

$$\begin{tikzcd}
C^*: \ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial^*_{n+2}"] & C_n \arrow[r, "\partial^*_{n+1}"] & \ldots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial^*_2"] & C_0 \arrow[r, "f\partial_0 = \partial^*_1"] \arrow[dr, "\partial_0"'] & P \arrow[r, "g"] & X \arrow[r] & 0 \\
 & & & & & 0 & A \arrow[u, "f"'] \arrow[l] & 0 \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

obtenemos una resolución proyectiva C^* de X donde

$$C^*_n = \begin{cases} C_{n-1}, & n > 0 \text{ ó } n < -1 \\ P, & n = 0 \\ X, & n = -1 \end{cases}$$

$$\partial^*_n = \begin{cases} \partial_{n-1}, & n > 1 \\ f\partial_0, & n = 1 \\ g, & n = 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

la sucesión $Hom(C^*,Y)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X,Y) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\partial_0^*,i)"] & \mathrm{Hom}(P,Y) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\partial_1^*,i)"] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}(f\ ,i)"'] & \mathrm{Hom}(C_0,Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C_{n-1},Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C_n,Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C_{n+1},Y) \arrow[r] & \cdots \\
 & & & \mathrm{Hom}(A,Y) \arrow[u, "\mathrm{Hom}(\partial_0,i)"'] & & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

luego obtenemos

$$H^n(\mathrm{Hom}(X,Y) = \frac{\ker(\mathrm{Hom}(\partial^*_{n+1},i)}{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(\partial^*_n,\ i))}$$

$$H^n(\mathrm{Hom}(X,Y)) = \frac{\ker(\mathrm{Hom}(\partial_n,i))}{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(\partial_{n-1},i))})$$

$$H^n(\mathrm{Hom}(X,Y) = H^{n-1}(\mathrm{Hom}(A,Y) \quad \forall n > 1$$

para el caso n = 1 en virtud de (T2.16) la exactitud de

$$C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} A \longrightarrow 0$$

implica la exactitud de

$$\mathrm{Hom}(C,Y):\ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial_0,i)} \mathrm{Hom}(C_0,Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial_1,i)} \mathrm{Hom}(C_1,Y)$$

por lo que

$\mathrm{Hom}(\partial_0,i)$ es inyectiva asi $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(\partial_0,i)) \simeq \mathrm{Hom}(A,Y)$

además

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(\partial_0,i)) = \mathrm{Ker}\,[\mathrm{Hom}(\partial_1,i)]$$

considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(X,Y) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\partial_0^*,i)", "\mathrm{Hom}(g,i)"'] & \mathrm{Hom}(P,Y) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}(\partial_1^*,i)"] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}(f,i)"'] & & \mathrm{Hom}(C_0,Y) \arrow[r] & {} \\
 & & \mathrm{Hom}(A,Y) \arrow[ur, "\mathrm{Hom}(\partial_0,i)"'] \arrow[dr] & & \\
 & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$\text{ExT}(X,Y) = \frac{\text{Ker}(\text{Hom}(\partial_2^*,i)}{\text{Im}(\text{Hom}(f\partial_0,i))}$$

$$\text{ExT}(X,Y) = \frac{\text{ker}(\text{Hom}(\partial_1,i))}{\text{Im}(\text{Hom}(f\partial_0,i))}$$

$$\text{ExT}(X,Y) = \frac{\text{Im}(\text{Hom}(\partial_0,i))}{\text{Im}(\text{Hom}(\partial_0,i))\circ\text{Hom}(f,i))}$$

$$\text{ExT}(X,Y) \approx \frac{\text{Hom}(A,Y)}{\text{Im}(\text{Hom}(f\ ,i))}$$ por que Hom(f,i) es sobreyectiva

$$\text{ExT}(X,Y) \approx \text{koker}\left[\text{Hom}(f,i)\right]$$

Comentario 15

Por conveniencia en la parte restante de la presente sección, definimos

$$\text{ExT}^0(X,Y) = \text{Hom}(X,Y)$$

Lema 3.27

Para R-módulos X,Y arbitrariamente dados y cualquier resolución proyectiva reducida $\hat{C}$ del módulo X, se tiene

$$H^n[\text{Hom}(\hat{C},Y)] \approx \text{ExT}^n(X,Y)$$

para todo entero no negativo n.

Demostración

Dada una resolución proyectiva cualquiera del módulo X

$$C: \ \dots \longrightarrow C_{n+1} \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

y

$\hat{C}: \ \dots \longrightarrow \hat{C}_{n+1} \longrightarrow \hat{C}_n \longrightarrow \hat{C}_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \hat{C}_0 \longrightarrow 0$

una resolución proyectiva reducida del módulo X

$$\hat{C}_n = \begin{cases} C_n, & \text{si } n \neq -1 \\ o, & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

$$\hat{\partial}_n = \begin{cases} \partial_n, & \text{si } n > 0 \\ 0, & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

para n > 0 tenemos

$$H^n[\mathrm{Hom}(\hat{C},Y)] = H^n[\mathrm{Hom}(C,Y)] = \mathrm{ExT}^n(X,Y)$$

para n > 0

Falta establecer

$$H^0(\mathrm{Hom}(\hat{C},Y)] \approx \mathrm{Hom}(X,Y)$$

Sea

$C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta la exactitud de esta sucesión implica la exactitud de

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial_0,i)} \mathrm{Hom}(C_0,Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial_1,i)} \mathrm{Hom}(C_1,Y)$$

teniendo asi que

$$\mathrm{Hom}(\partial_0,i) \text{ es inyectivo}$$

$$\text{y}$$

$$\mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(\partial_0,i)] = \ker(\mathrm{Hom}(\partial_1,i)$$

consecuentemente

$$H^0(\hat{C},Y) = \frac{\ker(\mathrm{Hom}(\hat{\partial}_0,i))}{0}$$

$$H^0(\hat{C},Y) = \ker(\mathrm{Hom}(\hat{\partial}_0,i))$$

$$H^0(\hat{C},Y) \simeq \ker(\mathrm{Hom}(\partial_1,i)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(\partial_0,i)) \simeq \mathrm{Hom}(X,Y)$$

$$H^0(\hat{C},Y) \simeq \mathrm{Hom}(X,Y)$$

Comentario 16

Consideremos ahora homomorfismos arbitrariamente dados

$h: X' \longrightarrow X$ y $k: Y \longrightarrow Y'$

de R-módulosl Elijamos resoluciones proyectivas C y C' para los módulos X y X', respectivamente por (P3.1) existe una transformación de cadenas

$$f = \{f_n : C'_n \longrightarrow C_n / n \in Z\}$$

de la sucesión descendente C' en la sucesión descendente C tal que $f_{-1} = h$, entonces

$Hom(f,k) = \{Hom(f_n,k): Hom(C_n,Y) \longrightarrow Hom(C',Y)/n \in Z\}$

es una transformación de cadenas de la sucesión ascendente Hom(C,Y) en la sucesión ascendente Hom(C',Y'), por tanto Hom(f,k) induce un homomorfismo

$$Hom(f,k)^{*n}: ExT^n(X,Y) \longrightarrow ExT^n(X',Y')$$

para todo entero n por proposición (P3.3) se comprueba fácilmente que $(f,k)^{*n}$ no depende de la elección particular de la transformación de cadenas $f: C' \longrightarrow C$ y está completamente determinada por el entero n y los homomorfismos h,k. Este homomorfismo se denominará producto extensión n-dimensional sobre R de h y k; y será denotado por

$$ExT^n(h,k): ExT^n(X,Y) \longrightarrow ExT^n(X',Y')$$

en el caso n = 1, usaremos la notación más simple

$$ExT(h,k): ExT(X,Y) \longrightarrow ExT(X',Y')$$

denominado producto extensión (sobre R) de los homomorfismos dados h y k. Por conveniencia definimos

$$ExT^0(h,k) = Hom(h,k).$$

Consideremos ahora un R-módulo X y una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

de R-módulos. Elijamos una resolución proyectiva reducida

$$\hat{C}: \ \ldots \longrightarrow \hat{C}_{n+1} \longrightarrow \hat{C}_n \longrightarrow \hat{C}_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

del módulo X, para todo entero n, la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom(\hat{C}_n,U) \xrightarrow{Hom(in,f)} Hom(\hat{C}_n,V) \xrightarrow{Hom(in,g)} Hom(\hat{C}_n,W) \longrightarrow 0$$

donde in representa el endomorfismo identidad del módulo cn, es exacta de acuerdo (T2.22e) puesto que cn es proyectivo. Asi obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Hom(\hat{C},U) \xrightarrow{Hom(i,f)} Hom(\hat{C},V) \xrightarrow{Hom(i,g)} Hom(\hat{C},W) \longrightarrow 0$$

de sucesiones ascendentes. Por el dual de (T1.23) obtenemos una sucesión de cohomología exacta

$$\ldots \longrightarrow H^n[Hom(\hat{C},U)] \longrightarrow H^n[Hom(\hat{C},V)] \longrightarrow H^n[Hom(\hat{C},W)] \xrightarrow{\delta} H^{n+1}[Hom(\hat{C},U)]$$

en virtud de (L3.27) tenemos el siguiente teorema.

Para todo R-módulo X y cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

de R-módulos, tenemos una sucesión exacta

$$\ldots ExT^n(X,U) \xrightarrow{f^*} ExT^n(X,V) \xrightarrow{g^*} ExT^n(X,W) \xrightarrow{\delta} ExT^{n+1}(X,U) \longrightarrow \ldots$$

donde

$$f^* = ExT^n(i,f), \quad g^* = ExT^n(i,g).$$

y δ es el homomorfismo de conexión. Esta sucesión comienza con

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,U) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,W) \longrightarrow \mathrm{ExT}(X,U) \longrightarrow \ldots$$

Corolario 3,29

Para cualquier módulo X sobre un dominio de ideales principales R y cualquier sucesión exacta corta de R-módulos tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,U) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,f)} \mathrm{Hom}(X,V) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,g)} \mathrm{Hom}(X,W) \longrightarrow \mathrm{ExT}(X,V)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{ExT}(i,g)} \mathrm{ExT}(X,W) \longrightarrow 0$$

aquí δ es el homomorfismo de conexión mientras que los otros homomorfismos son los hom y los productos extensión del homomorfismo identidad y los homomorfismos f y g, respectivamente.

La demostración de (C3.29) es dual de (C3.17)

4- TEOREMA DE LOS COEFICIENTES UNIVERSALES

A lo largo de esta sección trabajaremos con una sucesión descendente (o complejos de cadenas) arbitrariamente dada.

$$C: \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

de R-módulos y un R-módulo G arbitrariamente dado que será denominado el módulo coeficiente.

Consideremos el producto tensorial $C \otimes G$ que es la sucesión descendente

$$C \otimes G: \ldots \longrightarrow C_{n+1} \otimes G \xrightarrow{\partial_{n+1} \otimes i} C_n \otimes G \xrightarrow{\partial_n \otimes i} C_{n-1} \otimes G \longrightarrow \ldots$$

donde $i: G \longrightarrow G$ es el homomorfismo identidad del módulo G.

El módulo de homología n-dimensional

$$Hn(C \otimes G) = \frac{Zn(C \otimes G)}{Bn(C \otimes G)} = \frac{\ker(\partial_n \otimes i)}{\mathrm{im}(\partial_{n+1} \otimes i)}$$

de $C \otimes G$ se llama módulo de homología n-dimensional de C sobre el módulo de coeficiente G y se denotará por

$$Hn(C;G)$$

Nuestro objeto es determinar Hn(C;G) en términos de Hn(C) y Hn-1(C).

Para ello, definamos un homomorfismo

$$j_n: Hn(C) \otimes G \longrightarrow Hn(C;G)$$

$$j_n: \frac{\ker \partial_n}{\mathrm{im}\, \partial_{n+1}} \otimes G \longrightarrow \frac{\ker(\partial_n \otimes i)}{\mathrm{im}(\partial_{n+1} \otimes i)}$$

para todo entero n como sigue

Sean

$$P_n: Zn(C) \longrightarrow Hn(C)$$

$$P_n: \ker \partial_n \longrightarrow \frac{\ker \partial_n}{\mathrm{im}\, \partial_{n+1}}$$

y

$$q_n: Zn(C \otimes G) \longrightarrow Hn(C;G)$$

$$q_n: \ker(\partial_n \otimes i) \longrightarrow \frac{\ker(\partial_n \otimes i)}{\mathrm{im}(\partial_{n+1} \otimes i)}$$

Las proyecciones naturales. Para definir j_n entonces

Sean

$$g \in G,\ z + \mathrm{im}\, \partial_{n+1} \in \frac{\ker \partial_n}{\mathrm{im}\, \partial_{n+1}} \quad y$$

dado que

$\ker \partial_n \subset C_n$ tenemos que $z \in C_n$ y $g \in G$, entonces

$$z \otimes g \in C_n \otimes G$$

$$(\partial_n \otimes i)(z \otimes g) = \partial_n(z) \otimes g = 0 \otimes g = 0$$

Se tendrá que $z \otimes g \in z_n(C \otimes G) = \ker(\partial_n \otimes i)$

Si $z_1 - z_2 \in \operatorname{Im} \partial_{n+1}$, entonces $(z_1 - z_2) \otimes g \in \operatorname{Im}(\partial_{n+1} \otimes i)$ es decir que la función definida por

$$j_n: \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n+1}} \otimes G \longrightarrow \frac{\ker(\partial_n \otimes i)}{\operatorname{im}(\partial_{n+1} \otimes i)}$$

$$(z+\operatorname{im}\partial_{n+1}) \otimes g \rightsquigarrow z \otimes g + \operatorname{Im}(\partial_{n+1} \otimes i)$$

está bien definida

Teorema 3.30

(Teorema de coeficientes Universales para Homología)

Si R es un dominio de ideales principales y C_n es un R-módulo libre para todo entero n, entonces existe un homomorfismo

$$k: H_n(C;G) \longrightarrow \operatorname{Tor}[H_{n-1}(C), G]$$

para todo entero n tal que

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes G \longrightarrow H_n(C;G) \longrightarrow \operatorname{Tor}[H_{n-1}(C), G] \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible y por lo tanto

$$H_n(C;G) \simeq H_n(C) \otimes G \oplus \operatorname{Tor}[H_{n-1}(C), G]$$

Demostración

Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Z_n(C) \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{d} Z_{n-1}(C) \xrightarrow{p} H_{n-1}(C) \longrightarrow 0$$

donde e representa el homomorfismo inclusión, d está definida por $\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ y p es la proyección natural, en otras palabras la sucesión

$$0 \longrightarrow \ker \partial_n \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{d} \ker \partial_{n-1} \xrightarrow{p} \frac{\ker \partial_{n-1}}{\operatorname{im} \partial_n} \longrightarrow 0$$

puesto que R es un dominio de ideales principales por Se tiene tiene que los módulos $\ker \partial_n$ y $\ker \partial_{n-1}$ son también libres y asi la sucesión es una resolución proyectiva de $H_{n-1}(C)$, luego la sucesión

$$D: \quad 0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \partial_n \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{d} \ker \partial_{n-1} \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva reducida de $H_{n-1}(C)$.

Consideremos la sucesión $D \otimes G$, es decir,

$$D \otimes G: 0 \longrightarrow Z_n(C) \otimes G \xrightarrow{e \otimes i} C_n \otimes G \xrightarrow{d \otimes i} Z_{n-1}(C) \otimes G \longrightarrow 0$$

de acuerdo con (C3.12) y (L3.14) tenemos

$$\ker (e \otimes i) = H_2(D \otimes G) \approx \operatorname{Tor}_2[H_{n-1}(C), G] = 0$$

$$\frac{\ker (d \otimes i)}{\operatorname{im}(e \otimes i)} = H_1(D \otimes G) \approx \operatorname{Tor}[H_{n-1}(C), G]$$

$$\operatorname{coker} (d \otimes i) = H_0(D \otimes G) = H_{n-1}(C) \otimes G$$

El primero afirma que $e \otimes i$ es monomorfismo y por tanto $Z_n(C) \otimes G$ es decir $(\ker \partial_n) \otimes G$ puede ser considerado un submó dulo de $C_n \otimes G$, consecuentemente

$\operatorname{Im}(\partial_{n+1} \otimes i)$ del homomorfismo

$\partial_{n+1} \otimes i: C_{n+1} \otimes G \longrightarrow C_n \otimes G$

está contenida en el submódulo $Z_n(C) \otimes G = (\ker \partial_n) \otimes G$

de $C_n \otimes G$, por consiguiente tenemos las siguientes inclusiones.

$\operatorname{Im}(\partial_{n+1} \otimes i) \subset (\ker \partial_n) \otimes G \subset \ker(\partial_n \otimes i) \subset C_n \otimes G$

La segunda afirma

$$\frac{\ker(\partial_n \otimes i)}{(\ker \partial_n) \otimes G} \approx \operatorname{Tor}\left[H_{n-1}(C), G\right]$$

y la tercera, con n sustituido por n + 1, dice que

$$\frac{(\ker \partial_n) \otimes G}{\operatorname{im}(\partial_{n+1} \otimes i)} \approx H_n(C) \otimes G$$

puesto que el módulo $A = \dfrac{(\ker \partial_n) \otimes G}{\operatorname{Im}(\partial_{n+1} \otimes i)}$ es un submódulo de

$$H_n(C;G) = \frac{\ker(\partial_n \otimes i)}{\operatorname{im}(\partial_{n+1} \otimes i)} \text{ y el cociente}$$

$$\frac{H_n(C;G)}{A} \text{ es isomorfo a } \frac{\ker(\partial_n \otimes i)}{(\ker \partial_n) \otimes G} = B$$

obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} H_n(C;G) \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0$$

donde α es el homomorfismo inclusión y β es la proyección natural.

Para probar que esta sucesión se escinde consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ker \partial_n \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{f} \operatorname{Im} \partial_n \longrightarrow 0$$

donde e es el homomorfismo inclusión y f está definido por

$\partial_n: C_n \longrightarrow C_{n-1}$, como la im ∂_n es un submódulo de C_{n-1}, también es libre y de aquí que es proyectivo luego esta sucesión exacta se escinde, en virtud de (C1.16) existe un homomorfismo

$$h: C_n \longrightarrow \ker \partial_n$$

de manera que h e = $1_{\ker \partial_n}$, luego el producto tensorial

$$h \otimes i \circ (e \otimes i) = (h \circ e) \otimes i = 1_{(\ker \partial_n)} \otimes G.$$

Si $\ker \partial_n \otimes G$ es considerado como submódulo de $C_n \otimes G$, esto implica que la restricción

$$h \otimes i/(\ker \partial_n) \otimes G$$

es el automorfismo identidad de $(\ker \partial_n) \otimes G$ por consiguiente $h \otimes i$ induce un homomorfismo

$$\gamma: H_n(C \otimes G) \longrightarrow A$$

de manera que

$\gamma \circ \alpha$ es el homomorfismo identidad de A esto implico que la sucesión

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} H(C; G) \xrightarrow{\varepsilon} B \longrightarrow 0$$

se escinde.

Si identificamos A con $H_n(C) \otimes G$ y B con $\mathrm{Tor}[H_{n-1}(C), G]$ por los isomorfismos construidos anteriormente α se reduce a j y ε da origen a un homomorfismo k, por tanto obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{j} H_n(C;G) \xrightarrow{k} \mathrm{Tor}[H_{n-1}(C), G] \longrightarrow 0$$

que se descompone.

Definición 3.5

Una aproximación libre de una sucesión descendente C sobre R es una transformación de cadenas

$$f\colon C' \longrightarrow C$$

de una sucesión descendente C' sobre R que satisface las siguientes condiciones

(AL1) C'_n; es un R-módulo libre para todo entero n

(AL2) f_n; es un epimorfismo para todo entero n

(AL3) f ; induce un isomorfismo

$$f_*\colon H_n(C') \longrightarrow H_n(C)$$

para todo entero n

Lema 3.31

Si R es un dominio de ideales principales, entonces toda sucesión descendente C sobre R tiene una aproximación libre

Demostración

Para cada entero n consideremos el submódulo

$$Z_n(C) = \ker \partial_n$$

de C_n por (P.1.7), existe un epimorfismo

$$h_n\colon F_n \longrightarrow Z_n(C)$$

de un módulo libre F_n sobre $Z_n(C)$. Consideremos el submódulo

$$G_n = h^{-1}(B_n(C)) \subset F_n, \text{ es decir}$$

$$G = h^{-1}(\operatorname{Im} \partial_{n+1})$$

tenemos que G_n también es libre

Sea

$$C'_n = F_n \oplus G_{n-1}$$

$$C'_n = F_n \oplus G_{n-1}$$

para todo entero n, entonces C'_n es R-módulo libre y asi (AL1) se cumple.

Para todo entero n, definamos un homomorfismo

$$\partial'_n : C'_n \longrightarrow C'_{n-1}$$

tomando $\partial'_n(X,Y) = (Y,0)$ para todo $x \in F_n$ y todo $y \in G_{n-1} \subset F_{n-1}$. Según esta definición, se tiene

$$\partial'_n \circ \partial'_{n+1} = 0$$

y por tanto obtenemos una sucesión descendente

$$C' : \ldots \longrightarrow C'_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} C'_n \xrightarrow{\partial'_n} C'_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

para todo entero n, definamos un homomorfismo

$$f_n : C'_n \longrightarrow C_n$$

como sigue. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & G_n \arrow[d, dash, "e_n"] & \\
C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & B_n(C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde ∂_{n+1} y e_n son los homomorfismos definidos por

$$\partial_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow C_n$$

$$h_n : F_n \longrightarrow Z_n(C)$$

$$\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) = \mathrm{im}\ (\partial_{n+1}) = B_n(C)$$

La fila es exacta. Como G_n es libre y por tanto proyectivo, existe un homomorfismo

$$k_n : G_n \longrightarrow C_{n+1}$$

que satisface $d_{n+1} \circ k_n = e_n$, entonces definimos f_n tomando

$$f_n(x,y) = h_n(x) + k_{n-1}(y)$$

para todo $x \varepsilon F_n$ y todo $y \varepsilon G_{n-1} \subset F_{n-1}$

Claramente f_n es un homomorfismo.

Para demostrar que $f = \{f_n/n \varepsilon Z\}$ es una transformación de cadenas de C' en C, debemos verificar la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} \\ {\scriptstyle f_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} \\ C_n & \xrightarrow[\partial_n]{} & C_{n-1} \end{array}$$

para ello, sean

$x \varepsilon F_n$, $y \varepsilon G_{n=1}$, arbitrariamente dados entonces

$$\begin{aligned} \partial_n[f_n(x,y)] &= \partial_n(h_n(x) + k_{n-1}(y)) \\ &= \partial_n(h_n(x)) + \partial_n(k_{n-1}(y)) \\ &= d_n(k_{n-1}(y)) \\ &= e_{n-1}(y) \end{aligned}$$

$$f_{n-1}(\partial'_n(x,y)) = f_{n-1}(y,0) = h_{n-1}(y) = e_{n-1}(y)$$

esto prueba que $\partial_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial'_n$. Por tanto f es una transformación de cadenas. Falta probar las condiciones (A12) y (A13).

Para probar (A12). Sea w un elemento cualquiera de C_n. Entonces

$$\partial_n(w) \in B_{n-1}(C)$$

como h_{n-1} es epimorfismo, existe un elemento $y \in G_{n-1}$ tal que

$$h_{n-1}(y) = \partial_n(w)$$

Sea $V = w - k_{n-1}$ tenemos

$$\partial_n(v) = \partial_n(w) - \partial_n(k_{n-1}(y)) = \partial_n(w) - h_{n-1}(y) = 0$$

esto prueba que $V \in Z_n(C)$. Cono h_n es epimorfismo existe $x \in F_n$ tal que

$$h_n(x) = v = w - k_{n-1}(y)$$

En consecuencia, obtenemos

$$f_n(x,y) = h_n(x) + k_{n-1}(y) = w$$

y por lo tanto, f_n es epimorfismo.

Para verificar (A13), observemos que

$$Z_n(C') = F_n;\ B_n(C') = G_r$$

y que $f_n(x,0) = h_n(x)$ para todo $x \in F_n$ como h es epimorfismo y $G_n = h_n^{-1}(B_n(C))$ se sigue que

$$f_*: H_n(C') \longrightarrow H_n(C) \text{ es un isomorfismo.}$$

lo que completa la demostración.

Comentario

Consideremos una aproximación libre cualquiera

$$f: C' \longrightarrow C$$

de un complejo de cadenas sobre R, para cada entero n, sea

$$C''_n = \ker f_n \subset C'_n$$

como f es una transformación de cadenas, ∂'_n aplica C''_n en C''_{n-1} y por tanto define un homomorfismo

$$\partial''_n : C''_n \longrightarrow C''_{n-1}$$

Asi obtenemos un complejo de cadenas

$$C'' : \longrightarrow C''_{n+1} \longrightarrow C''_n \xrightarrow{\partial''_{n+1}} C''_{n-1} \xrightarrow{\partial''_n}$$

Sobre R

C" es un sobcomplejo de C' al que llamaremos núcleo de la aproximación libre

$$f : C' \longrightarrow C$$

La sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow C'' \xrightarrow{e} C' \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$$

donde e representa la inclusión, recibirá el nombre de sucesión exacta corta de la aproximación libre

$$f : C' \longrightarrow C$$

Lema 3.32

El núcleo C" de cualquier aproximación libre $f: C' \longrightarrow C$ de una sucesión descendente C sobre R es una sucesión exacta.

Demostración

Sea

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, dash] & \vdots \arrow[d, dash] & \vdots \arrow[d, dash] & \\
0 \arrow[r] & \ker f_n \arrow[r, "e_n"] \arrow[d, dash] & C'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, dash] & C_n \arrow[r] \arrow[d, dash] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathrm{ke}\ f_{n-1} \arrow[r, "e_{n-1}"] \arrow[d, dash] & C'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, dash] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dash] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
{} \arrow[r] & C'' \arrow[r] & C' \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

la sucesión de homología

$$\longrightarrow H_n(C'') \longrightarrow H_n(C') \xrightarrow{H_n(f)} H_n(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C'') \longrightarrow \ldots$$

y como $H_n(C') = 0$ y $H_{n-1}(C'') = 0$

y asi $H_n(C') \simeq H_n(C)$

Definición 3.6

Llamaremos producto de torsión de una sucesión descendente C y un módulo G, a la sucesión descendente

$$\mathrm{Tor}(C,G): \ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}(C_{n+1},G) \xrightarrow{\mathrm{Tor}(\partial_{n+1},i)} \mathrm{Tor}(C_n,G) \xrightarrow{\mathrm{Tor}(\partial_n,i)} \mathrm{Tor}(C_{n-1},G) \longrightarrow \ldots$$

donde $\partial_n: C_n \longrightarrow C_{n-1}$, $i: G \longrightarrow G$

Teorema 3.33

Si C es una sucesión descendente sobre un dominio de ideales principales R, y G es un R-módulo tal que la sucesión descendente

$\operatorname{Tor}(C,G)$ es exacta, entonces existe un homomorfismo

$$K\colon H_n(C;G) \longrightarrow \operatorname{Tor}\left[H_{n-1}(C),G\right]$$

para todo entero n tal que

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{j} H_n(C;G) \xrightarrow{k} \operatorname{Tor}\left[H_{n-1}(C),G\right] \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible, y por consiguiente

$H_n(C;G)$ es isomorfo a la suma directa de
$H_n(C) \otimes G$ y $\operatorname{Tor}\left[H_{n-1}(C),G\right]$

Demostración

De acuerdo con (L3.31), existe una aproximación libre $f\colon C' \longrightarrow C$ de la sucesión descendente dada C consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C'' \xrightarrow{e} C' \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$$

de la aproximación libre $f\colon C' \longrightarrow C$. Como C'_n es libre y por tanto proyectivo, para todo n, tenemos

$$\operatorname{Tor}(C',G) = 0$$

Por consiguiente, se deduce de T3.18) que tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}(C,G) \xrightarrow{\partial} C'' \otimes G \xrightarrow{e\otimes i} C' \otimes G \xrightarrow{f\otimes i} C \otimes G \longrightarrow 0$$

de sucesiones descendentes, donde i representa el endomorfismo identidad del módulo G y ∂ designa el homomorfismo de conexión Esta sucesión exacta se descompone en las dos cuseciones exacta cortas siguientes.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(C,G) \xrightarrow{\partial} C'' \otimes G \xrightarrow{\S} \mathrm{Im}(e \otimes i) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\ (e \otimes I) \xrightarrow{\eta} C' \otimes G \xrightarrow{f \otimes i} C \otimes G \longrightarrow 0$$

donde e está definido por $e \otimes i$ y η es la inclusión.

Por nuestra hipótesis, la sucesión descendente Tor(C,G) es exacta. En virtud de (L3.32) la sucesión descendente C" es exacta. Por ser submódulo de un R-módulo libre para todo n, luego por (T3.30)

$$H_n(C'',G) \approx [H_n(C'') \otimes G] \oplus \mathrm{Tor}[H_{n-1}(C''),\ G] = 0$$

para todo entero n. Esto implica que la sucesión descendente $C'' \otimes G$ es también exacta, por (   ), la exactitud de Tor(C,G) y $C'' \otimes G$ implica que la sucesión descendente $\mathrm{Im}(e \otimes i)$ es exacta. Por (T1.23), este hecho y la sucesión de homología exacta de la suceión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(e \otimes i) \xrightarrow{\eta} C' \otimes G \xrightarrow{f \otimes i} C \otimes G$$

implican que el homomorfismo inducido

$$\alpha_n = (f \otimes i)_*\colon H_n(C';G) \longrightarrow H_n(C;G)$$

es isomorfismo para todo entero n.

Por (AL3) para la aproximación libre $f\colon C' \longrightarrow C$, el homomorfismo inducido

$$f_*\colon H_n(C') \longrightarrow H_n(C)$$

es isomorfismo para todo entero n. Esto implica que los homomorfismos

$$B = f_* \otimes i\colon H_n(C') \otimes G \longrightarrow H_n(C) \otimes G$$

$$\gamma_n = \mathrm{Tor}(f_*,i)\colon \mathrm{Tor}\ [H_n(C'),G] \longrightarrow \mathrm{Tor}\ \ [H_n(C),G]$$

son isomorfismos para todo entero n.

Como C'_n es R-módulo libre, podemos aplicar (T3.30) a C' y obtenemos

$$0 \longrightarrow H_n(C') \otimes G \xrightarrow{j'} H_n(C';G) \xrightarrow{k'} \mathrm{Tor}\,[H_{n-1}(C'),G] \longrightarrow 0$$

que es una sucesión exacta corta descomponible

definamos un homomorfismo

$$k\colon H_n(C;G) \longrightarrow \mathrm{Tor}\,[H_{n-1}(C),G]$$

para todo entero n tomando

$$k = \gamma_{n-1} \circ k' \circ \alpha_n^{-1}$$

queda por establecer que

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{j} H_n(C;G) \xrightarrow{k} \mathrm{Tor}\,[H_{n-1}(C),G)] \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible.

Para ello, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_n(C') \otimes G \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\beta_n"] & H_n(C';G) \arrow[r, "k'"] \arrow[d, "\alpha_n"] & \mathrm{Tor}\,[H_{n-1}(C'),G] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_n(C) \otimes G \arrow[r, "j"] & H_n(C;G) \arrow[r, "k"] & \mathrm{Tor}\,[H_{n-1}(C),G] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

según la definición de j y j' dadas al principio de esta sección, el rectángulo de la izquierda es conmutativo. La definición de k dada anteriormente implica que el rectángulo de la derecha es conmutativo y además como la fila superior es exacta corta descomponible existe

$$h'\colon \mathrm{Tor}\,[H_{n-1}(C),G] \longrightarrow H_n(C';G) \quad \text{tal que}$$

$$k' \circ h' = 1_{\mathrm{Tor}}\left[H_{n-1}(C'),G\right]$$

Sea h: Tor $\left[H_{n-1}(C),G\right] \longrightarrow H_n(C;G$ tal que

$$h = \alpha_n \circ h' \circ \gamma_{n-1}^{-1}$$

y asi

$$k \circ h = k \circ \alpha_n \circ h' \circ \gamma_{n-1}^{-1}$$

$$k \circ h = \gamma_{n-1} \circ k' \circ \alpha_n^{-1} \circ \alpha_n \circ h' \circ \gamma_{n-1}^{-1}$$

$$k \circ h = \gamma_{n-1}^{1} \circ k' \circ h' \circ \gamma_{n-1}^{-1}$$

$$k \circ h = \gamma_{n-1} \circ 1_{\mathrm{Tor}}\left[H_{n-1}(C),G\right] \circ \gamma_{n-1}^{-1}$$

$$k \circ h = \gamma_{n-1} \circ \gamma_{n-1}^{-1}$$

$$k \circ h = 1_{\mathrm{Tor}}\left[H_{n-1}(C),G\right]$$

probando asi que existe h de manera que

$$k \circ h = 1_{\mathrm{Tor}}\left[H_{n-1}(C),\ G\right]$$

luego por proposición ( ) la sucesión

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes G \longrightarrow H_n(C;G) \longrightarrow \mathrm{Tor}\left[H_{n-1}(C),G\right] \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta que se escinde.

Ahora, consideremos Hom(C,G) que designa la sucesión ascendente (complejo de cocadenas)

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_{n-1},G) \xrightarrow{\delta^n} \mathrm{Hom}(C_n,G) \xrightarrow{\delta^{n+1}} \mathrm{Hom}(C_{n+1},G) \longrightarrow \ldots$$

donde $\delta^n = \mathrm{Hom}(\partial_n, i)$ es el Hom de $\partial_m : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ y el homomorfismo identidad

$$i: G \longrightarrow G$$

El módulo de cohomología n-dimensional

$$H^n[\mathrm{Hom}(C,G)] = \frac{Z^n[\mathrm{Hom}(C;G)]}{B^n[\mathrm{Hom}(C,G)]}$$

de Hom(C,G) recibe el nombre de módulo de cohomología n-dimensional de C sobre el módulo coeficiente G y se designa por

$$H^n(C;G)$$

nuestro objeto es determinar $H_n(C;G)$ en términos de $H_n(C)$ y $H_{n-1}(C)$

para ello, definamos un homomorfismo

$$h: H^n(C;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,[H_n(C),G]$$

$$h: H^n[\mathrm{Hom}(C,G)] = \frac{\ker\,[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G)]}{\mathrm{im}\,[\mathrm{Hom}(\partial_n,1_G)]} \longrightarrow \mathrm{Hom}\left[\frac{\ker \partial_n}{\mathrm{im}\ \partial_{n+1}},G\right]$$

$$h: \frac{\ker\,[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G)]}{\mathrm{Im}\,[\mathrm{Hom}(\partial_n,\ 1_G)]} \longrightarrow \mathrm{Hom}\left[\frac{\ker\ \partial_n}{\mathrm{im}\ \partial_{n+1}}\ ,\ G\right]$$

para todo entero n como sigue. Sea

$$p: Z^n\ [\mathrm{Hom}(C,G)] \longrightarrow H^n(C;G)$$

$$p: \ker\,[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G)] \longrightarrow \frac{\ker\,[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G)]}{\mathrm{im}\,[\mathrm{Hom}(\partial_n,1_G)]}$$

$$p: \ker\,[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G)] \longrightarrow \frac{\ker\,[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G)]}{\mathrm{im}\,[\mathrm{Hom}(\partial_n,1_G)]}$$

p es la proyección natrual. Para definir h

$$h: \frac{\ker\,[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G)]}{\mathrm{im}\,[\mathrm{Hom}(\partial_n,1_G)]} \longrightarrow \mathrm{Hom}\left[\frac{\ker\ \partial_n}{\mathrm{im}\ \partial_{n+1}},\ G\right]$$

$$\ker\,[\mathrm{Hom}[\partial_{n+1},1_G] \xrightarrow{p} \frac{\ker\,[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G)]}{\mathrm{im}\,[\mathrm{Hom}(\partial n,1_G)]} \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}\left[\frac{\ker\ \partial_n}{\mathrm{im}\ \partial},G\right]$$

$$z \rightsquigarrow p(z) = x \rightsquigarrow h(x) = z_*$$

$z \in \ker[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1}, 1_G)] \subset \mathrm{Hom}(C_n, G)$ que satisfaga $p(z) = x$

donde

$$z: C_n \longrightarrow G$$

como $\delta^{n+1}(z) = z \circ \partial_{n+1} = 0$, z aplica el submódulo Im ∂_{n+1} en el elemento 0 de G. Por tanto z induce un homomorfismo

$$z_*: \frac{\ker \partial_n}{\mathrm{im}\ \partial_{n+1}} \longrightarrow G$$

Asi, z_* es un elemento de $\mathrm{Hom}[H_n(C), G]$. Se puede fácilmente comprobar que z_* no depende de la elección de z y por tanto está completamente determinado por el elemento dado x de $H^n(C;G)$ por consiguiente podemos definir

$$h: \frac{\ker[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1}, 1_G)]}{\mathrm{im}[\mathrm{Hom}(\partial_n, 1_G)]} \longrightarrow \mathrm{Hom}\left[\frac{\ker \partial_n}{\mathrm{im}\ \partial_{n+1}}, G\right]$$

$$x \rightsquigarrow h(x) = z_*$$

Es inmediato verificar que h es un homomorfismo.

Teorema 3.34 (Coeficiente Universal para Cohomologías

Si R es un dominio de ideales principales y C_n es un R-módulo libre para todo entero n, entonces existe un homomorfismo

$$g: \mathrm{ExT}[H_{n-1}(C), G] \longrightarrow H^n(C;G)$$

para todo entero n tal que

$$0 \longrightarrow \mathrm{ExT}[H_{n-1}(C), G] \xrightarrow{g} H^n(C;G) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}[H_n(C), G] \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible. y por consiguiente, $H^n(C;G)$ es isomorfo a la suma directa de $\mathrm{Ext}[H_{n-1}(C), G]$ y $\mathrm{Hom}[Hn(C), G]$

Demostración

Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Z_n(C) \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{d} Z_{n-1}(C) \xrightarrow{p} H_{n-1}(C) \longrightarrow 0$$

donde e representa el homomorfismo inclusión, de está definida por $\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ y p es la proyección natural, en otras palabras la sucesión

$$0 \longrightarrow \ker \partial_n \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{\partial n} \ker \partial_{n-1} \xrightarrow{p} \frac{\ker \partial_{n-1}}{\operatorname{im} \partial_n} \longrightarrow 0$$

puesto que R es un dominio de ideales principales se tiene que los módulos $\ker \partial_n$ y $\ker \partial_{n-1}$ son R- módulos libres y asi la sucesión D es una resolución proyectiva reducida de

$$H_{n-1}(C) = \frac{\ker \partial_{n-1}}{\operatorname{im} \partial n}$$

$$D: 0 \longrightarrow \ker \partial_n \xrightarrow{e} \xrightarrow{\partial_n} \ker \partial_{n-1} \longrightarrow 0$$

obteniendo Hom[D,G] tenemos:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}[\ker\partial_{n-1}, G] \xrightarrow{\operatorname{Hom}(\partial_n, 1_G)} \operatorname{Hom}[C_n, G] \xrightarrow{\operatorname{Hom}(C, 1_G)} \operatorname{Hom}[\ker\partial_n, G] \longrightarrow 0$$

1) $H^0(D,G) = \dfrac{\ker[\operatorname{Hom}(\partial_n, 1_G)]}{0} \approx \operatorname{Hom}[H_{n-1}(C), G]$

2) $H^1(D,G) = \dfrac{\ker[\operatorname{Hom}(C, 1_G)]}{\operatorname{im}[\operatorname{Hom}(\partial_n, 1G]} \approx \operatorname{ExT}[H_{n-1}(C), G]$

3) $H^2(D,G) = \dfrac{\operatorname{Hom}[\ker \partial_n, G]}{\operatorname{im}[\operatorname{Hom}(C, 1_G)]} = 0$ esto implica

que $\operatorname{Hom}(C, 1_G)$ es sobreyectiva, esto implica

$$\operatorname{Hom} \ker \partial_n, G \approx \frac{\operatorname{Hom}[(C_n, G)]}{\ker[\operatorname{Hom}(C, G)]}$$

por 2 tenemos con n aumentado en 1

$$\mathrm{Hom}\left[H_n(C),G\right] \simeq \ker\left[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G)\right]$$

vemos que

$$\ker\left[\mathrm{Hom}(\mathcal{C},1_G)\right] \subset \ker\left[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G)\right]$$

Sea

$$\phi \in \ker\left[\mathrm{Hom}(\mathcal{C},1_G)\right] \Rightarrow \phi(\mathrm{Im}\,\mathcal{C}) = 0$$
$$\Rightarrow \phi(\ker \partial_n) = 0$$

dado que $\mathrm{Im}\ \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$

$$\phi(\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}) = 0$$
$$\phi \in \ker\left[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G)\right]$$

y asi temenos la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow \frac{\ker\left[\mathrm{Hom}(\mathcal{C},1_G)\right]}{\mathrm{im}\left[\mathrm{Hom}(\partial_n,1_G)\right]} \xrightarrow{\alpha} \frac{\ker\left[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G)\right]}{\mathrm{im}\left[\mathrm{Hom}(\partial_n,1_G)\right]} \xrightarrow{\beta} \ker\left[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G)\right]$$

probemos que es exacta

Sea

$$\ker(\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G) \xrightarrow{p} \frac{\ker\left[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G)\right]}{\mathrm{im}\left[\mathrm{Hom}(\partial_n,1_G)\right]} \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}\left(\frac{\ker \partial_n}{\mathrm{im}\partial_{n+1}},G\right) \longrightarrow 0$$

$$z \rightsquigarrow z + \mathrm{Im}\left[\mathrm{Hom}(\partial_n,1_G)\right] \rightsquigarrow z^*$$

$$z^* = 0 \iff z(\ker \partial_n) = 0$$
$$\iff \ker\left[\mathrm{Hom}(\mathcal{C},1_G)\right] = 0$$

$$\therefore \ker B = \frac{\ker\ (\mathrm{Hom}(\mathcal{C},1_G))}{\mathrm{im}\ (\mathrm{Hom}(\partial_n,1_G))} = \mathrm{Im}\ \alpha.$$

y dado que $\mathrm{Hom}(H\ (C),G) \simeq \ker\left[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1},1_G)\right]$

tenemos que

$$D: 0 \longrightarrow \frac{\ker[\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, 1_G)]}{\mathrm{im}[\mathrm{Hom}(\partial_n, 1_G)]} \xrightarrow{\alpha} \frac{\ker[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1}, 1_G)]}{\mathrm{im}[\mathrm{Hom}(\partial_n, 1_G)]} \xrightarrow{B} \ker[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1}, 1_G)]$$

Sea $f: \ker[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1}, 1_G)] \longrightarrow \dfrac{\ker[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1}, 1_G)]}{\mathrm{im}[\mathrm{Hom}(\partial_n, 1_G)]}$

$B \circ f = 1 \ker[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1}, 1_G)]$ luego existe f

y a si es una sucesión exacta corta descomponible

si identificamos

$$\frac{\ker[\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, 1_G)]}{\mathrm{im}[\mathrm{Hom}(\partial_n, 1_G)]} \simeq \mathrm{ExT}[H_{n-1}(C), G], \quad \frac{\ker[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1}, 1_G)]}{\mathrm{im}[\mathrm{Hom}(\partial_n, 1_G)]} = H^n(C;G)$$

y $\ker[\mathrm{Hom}(\partial_{n+1}, 1_G)] \simeq \mathrm{Hom}(H_n(C), G)$ tenemos

$y \; \alpha = g, \quad \beta = h$

$$0 \longrightarrow \mathrm{ExT}[H_{n-1}(C), G] \xrightarrow{g} H^n(C;G) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}[H_n(C), G] \longrightarrow 0$$

se escinde luego

$$H^n(C;G) \simeq \mathrm{ExT}[H_{n-1}(C), G] \oplus \mathrm{Hom}[H_n(C), G] \longrightarrow 0$$

lo que prueba el resultado.

Teorema 3.35

Si C es una sucesión descendente sobre un dominio de ideales principales y G es un R-módulo tal que la sucesión ascendente ExT(C,G) es exacta, entonces existe un homomorfismo

$$g: \mathrm{ExT}[H_{n-1}(C), G] \longrightarrow H^n(C;G)$$

para todo entero n tal que

$$0 \longrightarrow \mathrm{ExT}[H_{n-1}(C), G] \longrightarrow H^n(C;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}[H_n(C), G)] \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible, y por consiguiente $H^n(C;G)$ es isomorfo a la suma directa de $\mathrm{Ext}[H_{n-1}(C),G]$ y $\mathrm{Hom}(H_n(C),G)$.

Demostración

De acuerdo con (L3.31) existe una aproximación libre $f\colon C' \longrightarrow C$ de la sucesión descendente dada C.

Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C'' \xrightarrow{e} C' \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$$

de la aproximación libre $f\colon C' \longrightarrow C$. Como C'_n es libre y por tanto proyectivo para todo n, tenemos

$$\mathrm{Hom}(C';G) = 0 \qquad .$$

por lo que se deduce de (C3.29) que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(e,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C',G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f,1_G)} \mathrm{Hom}(C'',G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(e,1_G)} \mathrm{ExT}(C,G) \xrightarrow{\partial^*} 0$$

es una sucesión exacta de sucesiones ascendentes, ∂^* designa el homomorfismo de conexión, esta sucesión exacta se descompone en las dos sucesiones exacta cortas siguientes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\,[\mathrm{Hom}(e,1_G)] \xrightarrow{\xi} \mathrm{Hom}[C'',G] \xrightarrow{\partial^*} \mathrm{ExT}(C,G) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C,G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f,1_G)} \mathrm{Hom}(C',G) \xrightarrow{\eta} \mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(e,1_G)] \longrightarrow 0$$

por nuestra hipótesis $\mathrm{ExT}(C,G)$ es exacta

luego

$$H^n(C'';G) \approx \mathrm{ExT}[H_{n-1}(C''),G)] \oplus \mathrm{Hom}[H_n(C''),G)] = 0$$

para todo entero n, esto implica que Hom(C",G) es también exacta. La exactitud de Hom(C,G) y Hom(C",G) implica que la sucesión ascendente $Im[Hom(e,1_G)]$es exacta por (T1.23) y
Este hecho y la sucesión de homología exacta de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Hom(C.G) \xrightarrow{Hom(f,1_G)} Hom(C',G) \xrightarrow{n} Im[Hom(e,1_G)]$$

implican que el homomorfismo inducido

$$\alpha_n = Hom(f,1_G)_*: H^n(C;G) \longrightarrow H^n(C',G)$$

es isomorfismo para todo entero n

Por (AL3) para la aproximaciones libres f: C' ⟶ C el homomorfismo inducido

$$f_*:H_n(C') \longrightarrow H_n(C)$$

es isomorfismo para todo entero n, esto implica que los homomorfismos

$$\varepsilon_n = Hom(f_*.1_G): Hom\ [H_n(C),G)] \longrightarrow Hom[H_n(C'),G]$$

$$\gamma_n = ExT(f_*,1_G): ExT[H_n(C),G] \longrightarrow ExT[H_n(C'),G]$$

Son isomorfismos para todo entero n, como C'_n es libre podemos aplicar a C'

$$0 \longrightarrow ExT[H_{n-1}(C'),G] \xrightarrow{j'} H^n(C';G) \xrightarrow{h'} Hom[H_n(C'),G] \longrightarrow$$

que es una sucesión exacta corta descomponible
Definamos un homomorfismo

$$j: \mathrm{ExT}\left[H_{n-1}(C),G)\right] \longrightarrow H^n(C;G)$$

$$j: \alpha_n^{-1} \circ j' \circ \gamma_{n-1}$$

queda por establecer que

$$0 \longrightarrow \mathrm{ExT}\left[H_{n-1}(C),G)\right] \xrightarrow{j} H^n(C;G) \xrightarrow{k} \mathrm{Hom}(H_n(C),G] \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible

para ello, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{ExT}\left[H_{n-1}(C),G\right] & \xrightarrow{j} & H^n(C;G) & \xrightarrow{k} & \mathrm{Hom}\left[H_n(C),G\right] & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_n} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_n} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{ExT}\left[H_{n-1}(C'),G\right] & \xrightarrow{j'} & H^n(C';G) & \xrightarrow{k'} & \mathrm{Hom}\left[H_n(C'),G)\right] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Razonando en forma similar a el teorema T3.33) se concluye que

$$0 \longrightarrow \mathrm{ExT}\left[H_{n-1}(C),G\right] \xrightarrow{j} H^n(C;G) \xrightarrow{k} \mathrm{Hom}\left[H_n(C),G\right] \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta que se ecinde.

Lema 3.36

Si R es un dominio de ideales principales, entonces toda sucesión ascendente C sobre R tiene una aproximación libre.

Demostración

Sea

$$C: \ldots \longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{\delta^n} C_n \xrightarrow{\delta^{n+1}} C_{n+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow$$

para cada entero consideremos el submódulo $z^n(C) = \ker \delta^{n+1}$ de C_n. Por (P.1.8) existe un epimorfismo

$$h : F_n \longrightarrow \ker \delta^{n+1}$$

de un módulo libre F_n sobre $z^n(C)$. Consideremos el submódulo

$$G_n = h_n^{-1}(\mathrm{Im}\ \delta^n)$$

de F_n como F_n es R-módulo libre, por (   ) es C_n un R-módulo libre . Sea

$$C'_n = F_n \oplus G_{n+1},$$

para todo entero n. Entonces C'_n es un R-módulo libre por tanto (AL1) se cumple.

Para todo entero n, definamos un homomorfismo

$$\delta_1^{n+1} : C'_n \longrightarrow C'_{n+1}$$

$$(x,y) \rightsquigarrow \delta_1^{n+1}(x,y) = (y,0)$$

para todo $x \in F$ y todo $y \in G_{n+1} \subset F_{n+1}$, según esta definición se tiene

$$\delta_1^{n+2}(\delta_1^{n+1}(x,y)) = \delta_1^{n+2}(y,0) = (0,0)$$

y por tanto obtenemos una sucesión ascendente

$$C' : \ldots \longrightarrow C'_{n-1} \xrightarrow{\delta_1^n} C'_n \xrightarrow{\delta_1^{n+1}} C'_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

Para todo entero n, definamos un homomorfismo f_n, considerando el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & F_n \oplus G_{n+1} \arrow[r, "\delta_1^{n+1}"] \arrow[d, "f_n"] & F_{n+1} \oplus G_{n+2} \arrow[r, "\delta_1^{n+2}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & F_{n+2} \oplus G_{n+13} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+2}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\delta^{n+1}"'] & C_{n+1} \arrow[r, "\delta^{n+2}"'] & C_{n+2} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

tal que el siguiente triángulo es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & G_{n+1} & & \\ & k_n & \Big\downarrow h_{n+1} & & \\ C_n & \xrightarrow[\delta^{n+1}]{} & \mathrm{Im}\ \delta^{n+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con $\delta^{n+1} \circ k_n = h_{n+1}$

asi tenemos

$$f_n : F_n \oplus G_{n+1} \longrightarrow C_n$$
$$(x,y) \leadsto f(x,y) = h_n(x) + k_n(y)$$

para todo $x \in F_n$ y todo $y \in G_{n+1}$, es evidente que f_n es un homomorfismo. Para demostrar que $f = \{f_n / n \in z\}$ es una transformación de cadenas de C'_n en C_n, debemos verificar la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_n \oplus G_{n+1} & \xrightarrow{\delta^{n+1}} & F_{n+1} \oplus G_{n+2} \\ f_n \Big\downarrow & & \Big\downarrow f_{n+1} \\ C & \xrightarrow[\delta^{n+1}]{} & C_{n+1} \end{array}$$

$$\delta^{n+1}(f_n(x,y)) = \delta^{n+1}(h_n(x) + k_n(y)) =$$

$$\delta^{n+1}(f_n(x,y)) = \delta^{n+1}(h_n(x)) + \delta^{n+1}(k_n(y))$$

$$\delta^{n+1}(f_n(x,y)) = h_{n+1}(y)$$

y

$$f_{n+1}(\delta_1^{n+1}(x,y)) = f_{n+1}(y,0) = h_{n+1}(y)$$

esto prueba que

$$\delta^{n+1} \circ f_n = f_{n+1} \circ \delta_1^{n+1}$$

por lo tanto f es una transformación de cadenas.

Falta probar las condiciones (AL2) y (AL3)

Para probar (AL2).

Sea w un elemento cualquiera de e_n. Entonces

$\delta^{n+1}(w) \in \operatorname{Im} \delta^{n+1}$ y como h_{n+1} es sobre

$\exists\, y \in G_{n+1}$ tal que $h_{n+1}(y) = \delta^{n+1}(w)$

Sea

$$V = w - k_n(y)$$

$$\delta^{n+1}(V) = \delta^{n+1}(w) - \delta^{n+1}(k_n(y)) = \delta^{n+1}(w) - h_{n+1}(y) = 0$$

esto prueba que

$V \in \ker \delta^{n+1} \Rightarrow \exists x \in F_n$ tal que $h_n(x) = v = w - k_n(y)$

en consecuencia obtenemos

$$f_n(x,y) = h_n(x) + k_n(y)$$
$$f_n(x,y) = v + k_n(y)$$
$$f_n(x,y) = w - k_n(y) + k_n(y)$$
$$f_n(x,y) = w$$

por lo tanto f_n es sobreyectiva

para verificar (AL3)

observemos que

$$H_n(C') = \frac{\ker \delta_1^{n+1}}{\operatorname{Im} \delta_1^n} = \frac{F_n}{G_n}$$

y que $f_n(x,0) = h_n(x)$, como h_n es epimorfismo

y $G_n = h_n^{-1}(\operatorname{Im} \delta^n)$, se sigue que

$$f_*: H_n(C') = \frac{F_n}{G_n} \simeq H_n(C)$$

lo que completa la demostración

Teorema 3.37

Si R es un dominio de ideales principales y C_n es un R-módulo libre para todo entero n, entonces existe un homomorfismo

$$k: H^n(C;G) \longrightarrow \mathrm{Tor}\,[H^{n+1}(C),G]$$

para todo entero n tal que

$$0 \longrightarrow H^n(C) \otimes G \xrightarrow{j} H^n(C;G) \xrightarrow{k} \mathrm{Tor}\,[H^{n+1}(C),G] \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible, y por lo tanto $H^n(C;G)$ es isomorfo a la suma directa de $H^n(C) \otimes G$ y $\mathrm{Tor}\,[H^{n+1}(C),G]$

Demostración

Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \ker \delta^{n+1} \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{\delta^{n+1}} \ker \delta^{n+2} \xrightarrow{p} \frac{\ker \delta^{n+2}}{\mathrm{im}\ \delta^{n+1}} \longrightarrow 0$$

donde e es el homomorfismo inclusión y p es la proyección natural. Como R es un dominio de ideales principales, se sigue de ( ) y nuestra hipótesis, que los módulos $\ker \delta^{n+1}$ y $\ker \delta^{n+2}$ son R-módulos libres y por tanto esta sucesión es una resolución proyectiva del módulo $\dfrac{\ker \delta^{n+2}}{\mathrm{Im}\ \delta^{n+1}} = H^{n+1}(C)$. Por consiguiente, la sucesión

$$D: 0 \longrightarrow \ker \delta^{n+1} \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{\delta^{n+1}} \ker \delta^{n+2} \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva reducida D del módulo $H^{n+1}(C)$. Consideremos el producto tensorial $D \otimes G$ de D y G

$$0 \longrightarrow \ker \delta^{n+1} \otimes G \xrightarrow{e\otimes i} C_n \otimes G \xrightarrow{\delta^{n+1}\otimes 1} \ker \delta^{n+2} \otimes G \longrightarrow 0$$

de acuerdo con (L3.14) y (C3.12) tenemos

1) $H^0(D \otimes G) = \dfrac{\ker \delta^{n+2} \otimes G}{\mathrm{Im}\ (\delta^{n+1} \otimes i)} \simeq H^{n+1}(C) \otimes G = \mathrm{Coker}\ (\delta^{n+1} \otimes i)$

2) $H'(D \otimes G) = \dfrac{\ker\ (\delta^{n+1} \otimes i)}{\mathrm{Im}(e \otimes i)} \simeq \mathrm{Tor}[H^{n+1}(C), G]$

3) $H^2(D \otimes G) = \ker\ (e \otimes i) = \mathrm{Tor}_2[H^{n+1}(C), G] = 0$

la tercera establece que $e \otimes i$ es inyectivo, la

Segunda $\dfrac{\ker\ (\delta^{n+1} \otimes i)}{\mathrm{Im}\ \delta^{n+1} \otimes G}$ y la condición (1) disminuido n en uno

$$\frac{\ker \delta^{n+1} \otimes G}{\mathrm{Im}\ (\delta^n \otimes i)} \simeq H^n(C) \otimes G$$

como $\dfrac{\ker\ (\delta^{n+1} \otimes i)}{\ker \delta^{n+1} \otimes G} \simeq \dfrac{\ker\ (\delta^{n+1} \otimes i)/\mathrm{Im}\ (\delta^n \otimes i)}{\ker G^{n+1} \otimes G/\mathrm{Im}\ (\delta^n \otimes i)}$

obtenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \frac{\ker \delta^{n+1} \otimes G}{\mathrm{Im}\ (\delta^n \otimes i)} \xrightarrow{\alpha} \frac{\ker\ (\delta^{n+1} \otimes i)}{\mathrm{Im}\ (\delta^n \otimes i)} \xrightarrow{\beta} \frac{\ker\ (\delta^{n+1} \otimes i)}{\ker \delta^{n+1} \otimes G} \longrightarrow 0$$

donde α es la inclusión y β es el homomorfismo proyección

Para probar que esta sucesión exacta corta se descompone, consdieremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ker \delta^{n+1} \xrightarrow{e} C_n \xrightarrow{\delta^{n+1}} \mathrm{Im}\ \delta^{n+1} \longrightarrow 0$$

donde e es el homomorfismo inclusión luego existe

$h: C_n \longrightarrow \ker \delta^{n+1}$ tal que $h \circ e = 1_{\ker \delta^{n+1}}$

También

$h \otimes i: C_n \otimes G \longrightarrow \ker \delta^{n+1} \otimes G$ si hacemos

$(h \otimes i) \circ (e \otimes i) = 1_{\ker} \ \delta^{n+1} \otimes G$ y asi la restricción

$h \otimes i/\ker \delta^{n+1} \otimes G = 1_{\ker} \ \delta^{n+1} \otimes G$

luego induce el homomorfismo

$$\gamma: \frac{\ker (\delta^{n+1} \otimes i)}{\mathrm{im}\ (\delta^{n} \otimes i)} \longrightarrow \frac{\ker (\delta^{n+1} \otimes G}{\mathrm{Im}\ (\delta^{n+1} \otimes i)}$$

de manera que

$\gamma \circ \alpha$ es el homomorfismo identidad de

$$\frac{\ker \delta^{n+1} \otimes G}{\mathrm{Im}\ (\delta^{n+1} \otimes I)}$$

lo que prueba el resultado.

Si identificamos a los módulos de la siguiente manera

$H^n(C) \otimes G = \ker \delta^{n+1} \otimes G/\mathrm{Im}(\delta^n \otimes i)$

$H^n\ (C;G) \ = \ker (\delta^{n+1} \otimes i)/ \mathrm{Im}\ (\delta^n \otimes i)$

$\mathrm{Tor}\ [H^{n+1}(C),G] = \ker (\delta^{n+1} \otimes i)/\ker \delta^{n+1} \otimes G$ y $\alpha = j$,
$k = \beta$

obtenemos

$$0 \longrightarrow H^n(C) \otimes G \xrightarrow{j} H^n(C;G) \xrightarrow{k} \mathrm{Tor}\ [H^{n+1}(C),G] \longrightarrow 0$$

que es una sucesión exacta corta que se escinde.

Teorema 3.38

Si C es una sucesión ascendente sobre un dominio R de ideales principales, y G es un R-módulo tal que sucesión ascendente Tor(C,G) es exacta, entonces existe un homomorfismo

$$k\colon H^n(C \otimes G) \longrightarrow \mathrm{Tor}\,[H^{n+1}(C),G]$$

para todo entero n tal que

$$0 \longrightarrow H^n(C) \otimes G \xrightarrow{j} H^n(C \otimes G) \xrightarrow{k} \mathrm{Tor}\,[H^{n+1}(C),G] \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible, y por consiguiente $H^n(C \otimes G)$ es isomorfo a la suma directa de

$H^n(C) \otimes G$ y $\mathrm{Tor}\,[H^{n+1}(C),G]$.

Demostración

De acuerdo con (L3.36) existe una aproximación libre $f\colon C' \longrightarrow C$ de la sucesión ascendente qada C. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C'' \xrightarrow{e} C' \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$$

de la aproximación libre $f\colon C' \longrightarrow C$. Como C'_n es libre y por tanto proyectivo para todo n, tenemos

$$\mathrm{Tor}(C',G) = 0$$

por consiguiente. Se deduce de (T3.18) que tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(C,G) \xrightarrow{\partial} C'' \otimes G \xrightarrow{e\otimes i} C' \otimes G \xrightarrow{f\otimes i} C \otimes G \longrightarrow 0$$

de sucesiones ascendentes, donde i representa el endomorfismo identidad del módulo G y ∂ designa el homomorfismo de conexión. Esta sucesión exacta se descompone en las dos sucesiones exacta-cortas siguientes

$$0 \longrightarrow Tor(C,G) \xrightarrow{\partial} C'' \otimes G \xrightarrow{\xi} Im(e \otimes i)$$

$$0 \longrightarrow Im(e \otimes I) \xrightarrow{\eta} C' \otimes G \xrightarrow{f\otimes i} C \otimes G \longrightarrow 0$$

Donde ξ está definido por $e \otimes i$ y η es la inclusión por nuestra hipótesis la sucesión ascendente Tor(C,G) es exacta en virtud de (   ), la sucesión ascendente C" es exacta. Por ser submódulo de un R-módulo libre C'_n un R-módulo libre para todo n. Luego por (T3.37)

$$H^n(C'';G) \simeq H^n(C') \otimes G \oplus Tor\left[H^{n+1}(C''),G\right] = 0$$

para todo entero n esto implica que la sucesión ascendente $C'' \otimes G$ es también exacta. Por (13.36'), la exactitud de Tor(C,G) y $C'' \otimes G$ implica que la sucesión ascendente $Im(e \otimes i)$ es exacta por (   ), este hecho y la sucesión de cohomologia exacta de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow I(e \otimes i) \xrightarrow{\eta} C' \otimes G \xrightarrow{f\otimes i} C \otimes G$$

implican que el homomorfismo inducido

$$\alpha_n = (f\otimes i)_*: H^n(C' \otimes G) \longrightarrow H^n(C \otimes G)$$

es isomorfismo para todo entero n

Por (AL3) para la aproximación libre $f: C' \longrightarrow C$, el homomorfismo inducido

$$f_*: H_n(C') \longrightarrow H_n(C)$$

es un isomorfismo para todo entero n. Esto implica que los homomorfismos

$$\beta_n = f_* \otimes i: H_n(C') \otimes G \longrightarrow H_n(C) \otimes G$$

y

$$\gamma_n = \mathrm{Tor}(f_*, i): \mathrm{Tor}\ H^n(C), G \longrightarrow \mathrm{Tor}\ [H^n(C), G]$$

son isomorfismos para todo entero n.

Como C'_n es R-módulo libre, podemos aplicar (T3.37) a C' y obtenemos

$$0 \longrightarrow H^n(C') \otimes G \xrightarrow{j'} H^n(C' \otimes G) \xrightarrow{k'} \mathrm{Tor}\ [H^{n+1}(C'), G] \longrightarrow 0$$

que es una sucesión exacta corta descomponible.
Definamos un homomorfismo

$$k: H^n(C \otimes G) \longrightarrow \mathrm{Tor}\ [H^{n+1}(C), G]$$

$$k = \gamma_{n+1} \circ k' \circ \alpha_n^{-1}$$

es fácil por establecer que

$$0 \longrightarrow H^n(C) \otimes G \xrightarrow{j} H^n(C \otimes G) \xrightarrow{k} \mathrm{Tor}\ [H^{n+1}(C), G] \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible
y asi

$$H^n(C \otimes G) \simeq H^n(C) \oplus \mathrm{Tor}\ [H^{n+1}(C), G].$$

CAPITULO IV

LA FORMULA DE KUNNETH

A lo largo de esta sección, C y D denotarán sucesiones descendentes arbitrariamente dadas (complejos de cadenas) de R-módulos.

Para todo entero n, consideremos la suma directa

$$E_n = \sum_{p+1=n} C_p \otimes D_q$$

y el homomorfismo

$$\partial: E_n \longrightarrow E_{n-1}$$

definido sobre los generadores

$$\partial_n : \sum_{p+q=n} C_p \otimes D_q \longrightarrow \sum_{p+q=n-1} C_p \otimes D_q$$

tal que $\partial_n(x \otimes y) = \partial_p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes \partial_q(y)$

haciendo la composición $\partial_{n-1} \circ \partial_n$ tenemos

$\partial_{n-1}(\partial_n(x\otimes y)) = \partial_{n-1}(\partial_p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes \partial_q(y))$

$\partial_{n-1}(\partial_n(x\otimes y)) = \partial_{n-1}(\partial_p(x) \otimes y + (-1)^p(\partial_{n-1}(x \otimes \partial_q(y))$

$$\partial_{n-1}(\partial_n(x\otimes y)) = (\partial_{p-1}(\partial_p(x)) \otimes y + (-1)^{p-1}(\partial_p(x) \otimes \partial_q(y))$$
$$+(-1)^p(\partial_p(x)\otimes\partial_q(y)) + (-1)^p x \otimes (\partial_{q-1}(\partial_q(y)))=0$$

$\partial_{n-1}(\partial_n(x\otimes y)) = 0$; por lo que obtenemos

Una sucesión descendente

$$E: \ldots \longrightarrow E_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} E_n \xrightarrow{\partial_n} E_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

de R-módulos, que recibe el nombre de producto tensorial sobre R de las sucesiones dadas C y D (descendente) y se denotará

$$E = C \otimes D$$

Si C y D son positivas esto es, si $C_n = 0$, $D_n = 0$ para todo entero negativo n, entonces igual sucede con su producto tensorial $E = C \otimes D$. En este caso, tenemos también la suma directa finita

$$E_n = \sum_{p=0}^{n} C_p \otimes D_{n-p}$$

para todo entero no negativo n.

Para todo par de enteros p y q, definamos un homomorfismo

$$\Pi_{pq}: H_p(C) \otimes H_q(D) \longrightarrow H_{p+q}(C \otimes D)$$

de R-módulos como sigue

$$\Pi_{pq} : \frac{\ker \partial_p}{\mathrm{Im}\ \partial_{p+1}} \otimes \frac{\ker \partial_q}{\mathrm{Im}\ \partial_{q+1}} \longrightarrow \frac{\ker \partial_n}{\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}}$$

$$(x+\mathrm{Im}\ \partial_{p+1}) \otimes (y+\mathrm{Im}\ \partial_{q+1}) \rightsquigarrow x \otimes y + \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}$$

como $\partial_p(x) = 0$ y $\partial_q(y) = 0$, obtenemos que

$\partial_n(x \otimes y) = \partial_p(x) \otimes y + (-1)\ x \otimes \partial_q(y) = 0$ lo que garantiza que $x \otimes y \in \ker \partial_n$. Es fácil probar que Π_{pq} está bien definida.

Para todo entero n, la suma directa (realizada)

$$\Pi = \sum_{p+q=n} \Pi_{pq}: \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes H_q(D) \longrightarrow H_n(C \otimes D)$$

de la manera siguiente

$$\sum_{p+q=n} \Big(\sum_{i=1}^{n_{qp}} (x_{ip} + \mathrm{Im}\ \partial_{p+1}) \otimes (y_{iq} + \mathrm{Im}\ \partial_{q+1}) \Big)$$

$$\rightsquigarrow \sum_{p+q=n} \sum_{i=1}^{m_{pq}} (x_{ip} \otimes y_{iq} + \mathrm{Im}\ \partial_{n+1})$$

a Π asi definido se denominará producto de homología (n-dimensional) de las sucesiones descendentes dadas C y D. En particu lar, si

$$D_n = \begin{cases} G, & (\text{si } n = 0) \\ 0, & (\text{si } n \neq 0) \end{cases}$$

donde G es un R-módulo arbitrariamente dado,

tenemos

$$E_n = C_n \otimes G$$

para todo entero n y por consiguiente $C \otimes D$ se reduce al producto tensorial $C \otimes G$ definido en la sección precedente. Además, como

$$H_n(D) = \begin{cases} G, & (\text{si } n = 0) \\ 0, & (\text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

el producto de homología Π se reduce al homomorfismo

$$j: H_n(C) \otimes G \longrightarrow H_n(C \otimes G)$$

de la sección precedente.

Definición 4.1

Un R-módulo X se dice plano si y sólo si se tiene

$$\text{Tor}\ (X,Y) = 0$$

Nota: Las condiciones necesarias y suficientes están en (P3.19')

Lema 4.1

Si G es un R-módulo plano, entonces

$$\Pi = j: H_n(C) \otimes G \longrightarrow H_n(C \otimes G)$$

es un isomorfismo para todo entero n.

Demostración.

Sea n un entero arbitrariamente dado designemos

$$B_n = B_n(C) = \mathrm{Im}\ \partial_{n+1};\ z_n = z_n(C) = \ker\ \partial_n$$

y $H_n = \dfrac{\ker\ \partial_n}{\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}}$

entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\ \partial_{n+1} \arrow[u] \arrow[r, "e"] & \ker\ \partial_n \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & \dfrac{\ker\ \partial_n}{\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}} \arrow[r] & 0 \\
 & C_{n+1} \arrow[u, "\hat{\partial}_{n+1}"] \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n \arrow[d] & & \\
 & & C_{n-1} & &
\end{tikzcd}$$

donde ∂_n y ∂_{n+1}, son los homomorfismos de la sucesión descendente C; e y f son los homomorfismos inclusión y p es la proyección natural de z_n sobre su módulo cociente $H_n = \frac{z_n}{B_n}$. Las filas i columnas de este diagrama son evidentemente exactas.

Efectuando los productos tensoriales con el homomorfismo identidad i: G ——> G, obtenemos un diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[d] & & \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} \partial_{n+1} \otimes G \arrow[rr] & & \ker \partial_n \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "f \otimes i"] & \dfrac{\ker \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}} \otimes G \arrow[r] & 0 \\
 & C_{n+1} \otimes G \arrow[u, "\hat{\partial}_{n+1} \otimes i"] \arrow[rr, "\partial_{n+1} \otimes i"] & & C_n \otimes G \arrow[d, "\partial_n \otimes i"] & & \\
 & & & C_{n-1} \otimes G & &
\end{tikzcd}$$

Como G es plano, se deduce de (P3.19'd) que las filas y columnas de este diagrama de productos tensoriales son también exactas.

De la exactitud de la fila larga, se deduce que $p \otimes i$ es epimorfismo e induce un isomorfismo

$$k = (p \otimes i)_*: H_n(C) \otimes C \approx \frac{(\ker \partial_n) \otimes G}{\ker (p \otimes i)} \approx \frac{(\ker \partial_n) \otimes G}{\operatorname{Im} (e \otimes i)}$$

ya que $\operatorname{Im}(e \otimes i) = \ker (p \otimes i)$ por la exactitud de la fila

De la exactitud de la columna corta implica que $\hat{\partial}_{n+1} \otimes i$ es epimorfismo, mientras que la exactitud de la columna larga implica que $f \otimes i$ es monomorfismo y $\operatorname{Im}(f \otimes i) = \ker (\partial_n \otimes i)$ puesto que el rectángulo es conmutativo y $\hat{\partial}_{n+1} \otimes i$ es epimorfismo

$$\operatorname{Im} (f \otimes i \circ e \otimes i) = \operatorname{Im} (\partial_{n+1} \otimes i)$$

y

$$\operatorname{Im} (f \otimes i \circ e \otimes i) = f \otimes i (\operatorname{Im} (e \otimes i)$$

En consecuencia, el homomorfismo $f \otimes i$ induce un isomorfismo.

$$\lambda = (f \otimes i)_*: \frac{\ker \partial_n \otimes G}{\operatorname{Im} (e \otimes i)} \approx \frac{\ker (\partial_n \otimes i)}{\operatorname{Im} (\partial_{n+1} \otimes i)}$$

ya que

$$0 \longrightarrow \ker \partial_n \otimes G \longrightarrow C_n \otimes G$$

y

$$0 \longrightarrow \frac{\ker \partial_n \otimes G}{\mathrm{Im}\ (e \otimes i)} \longrightarrow \frac{\ker\ (\partial_n \otimes i)}{\mathrm{Im}\ (\partial_{n+1} \otimes i)}$$

por que $(f \otimes i)(\mathrm{Im}(e \otimes i)) = \mathrm{Im}\ (\partial_{n+1} \otimes i)$

y

$\ker\ (\partial_n \otimes i) = \mathrm{Im}\ (f \otimes i)$ y

considerando que

$$H_n(C) \otimes G \xrightarrow{k} \frac{\ker \partial_n \otimes G}{\mathrm{Im}\ (e \otimes i)} \xrightarrow{\lambda} H_n(C \otimes G)$$

obtenemos $\lambda \circ k = j\colon H_n(C) \otimes G \longrightarrow H_n(C \otimes G)$

implicando así que j es un isomorfismo /.

Más generalmente, sea q un entero. Si $D_n = 0$ para todo $n \neq q$, entonces tenemos

$$H_n(D) = \begin{cases} D_q, & (\text{si } n = q) \\ 0, & (\text{si } n \neq q) \end{cases}$$

En este caso, el producto de homología Π es

$$\Pi\colon H_{n-q}(C) \otimes D_q \longrightarrow H_n(C \otimes D)$$

Análogamente a (I.4.1) se puede establecer el siguiente lema

Lema 4.2

Si $D_n = 0$ para todo $n \neq q$ y D_q es un R-módulo plano entonces

$$\Pi: H_{n-q} \otimes D \longrightarrow H_n(C \otimes D)$$

es un isomorfismo para todo entero n

Demostración

Sea n un entero arbitrariamente dado designemos con

$$B_{n-q} = \operatorname{Im} \partial_{n-q+1} : z_{n-q} = \ker \partial_{n-q} \quad y$$

$$H_{n-q} = \frac{\ker \partial_{n-q}}{\operatorname{Im} \partial_{n-q+1}}$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} \partial_{n-q+1} \arrow[u] \arrow[rr, "e"] & & \ker \partial_{n-q} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & \dfrac{\ker \partial_{n-q}}{\operatorname{Im} \partial_{n-q+1}} \arrow[r] & 0 \\
 & C_{n-q+1} \arrow[u, "\hat{\partial}_{n-q+1}"] \arrow[rr, "\partial_{n-q+1}"] & & C_{n-q} \arrow[d, "\partial_{n-q}"] & & \\
 & & & C_{n-q-1} & &
\end{tikzcd}$$

donde ∂_{n-q} y ∂_{n-q+1} son los homomorfismos de la sucesión descendente C, e y f son los homomorfismos inclusión y p es la proyección natural del $\ker \partial_{n-q}$ sobre su módulo cociente $\dfrac{\ker \partial_{n-q}}{\operatorname{Im} \partial_{n-q+1}}$. Las filas y columnas de este diagrama son exactas.

Efectuando los productos tensoriales con el homomorfismo identidad $i: D_q \longrightarrow D_q$, obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} \partial_{n-q+1} \otimes D_q \arrow[r, "e\otimes i"] & \ker \partial_{n-q} \otimes D_q \arrow[r, "p\otimes i"] \arrow[d, "f \otimes i"] & \dfrac{\ker \partial_{n-q}}{\operatorname{Im} \partial_{n-q+1}} \otimes D_q \arrow[r] & 0 \\
& C_{n-q+1} \otimes D_q \arrow[u, "\hat{\partial}_{n-q+1}\otimes i"] \arrow[r, "\partial_{n-q+1}\otimes i"] & C_{n-q} \otimes D_q \arrow[d, "\partial_{n-q}\otimes i"] & & \\
& & C_{n-q+1} \otimes D_q & &
\end{tikzcd}$$

como D_q es plano, se deduce que las filas y columnas de este diagrama de productos tensoriales son también exactas.

De la exactitud de la fila larga, se deduce que $p \otimes i$ es epimorfismo e induce unisomorfismo

$$k = (p \otimes i)_*: \frac{\ker \partial_{n-q}}{\operatorname{Im} \partial_{n-q+1}} \otimes D_q \simeq \frac{\ker \partial_{n-q} \otimes D_q}{\ker (p \otimes i)}$$

$$\simeq \frac{\ker \partial_{n-q} \otimes D_q}{\operatorname{Im} (e \otimes i)}$$

ya que $\operatorname{Im} (e \otimes i) = \ker (p \otimes i)$ por ser la fila exacta.

De la exactitud de la columna corta implica que $\hat{\partial}_{n-q+1} \otimes i$ es epimorfismo, mientras que la exactitud de la co- lumna larga implica que $f \otimes i$ es monomorfismo y que

$$\operatorname{Im} (f \otimes i) = \ker (\partial_n \otimes i)$$

puesto que el rectángulo es conmutativo y $\hat{\partial}_{n-q+1} \otimes i$ es epi- morfismo

$$\operatorname{Im} (f \otimes i \circ e \otimes i) = \operatorname{Im} \partial_{n-q+1} \otimes i$$

$$\operatorname{Im} (f \otimes i \circ e \otimes i) = f \otimes i \,(\operatorname{Im} (e \otimes i))$$

En consecuencia, el homomorfismo $f \otimes i$ induce un isomorfismo.

$$\lambda = (f \otimes i)_*: \frac{\ker \partial_{n-q} \otimes D_q}{\mathrm{Im}\ (e \otimes i)} \approx \frac{\ker (\partial_{n-q} \otimes i)}{\mathrm{Im}\ (\partial_{n-q+1} \otimes i)}$$

ya que

$$0 \longrightarrow \ker \partial_{n-q} \otimes D_q \longrightarrow C_{n-q} \otimes D_q$$

y

$$0 \longrightarrow \frac{\ker \partial_{n-q} \otimes D_q}{\mathrm{Im}\ (e \otimes i)} \approx \frac{\ker (\partial_{n-q} \otimes i)}{\partial_{n-q+1} \otimes i)}$$

por que

$$(f \otimes i)\ (\mathrm{Im}\ (e \otimes i)) = \mathrm{Im}\ (\partial_{n-q+1} \otimes i)$$

y

$$\ker (\partial_{n-q} \otimes i) = \mathrm{Im}\ (f \otimes i)$$

asi

$$\frac{\ker \partial_{n-q}}{\mathrm{Im}\ \partial_{n-q+1}} \otimes D_q \xrightarrow{k} \frac{\ker \partial_{n-q} \otimes Dq}{\mathrm{Im}\ (e \otimes i)} \xrightarrow{\lambda} \frac{\ker (\partial_{n-q} \otimes i)}{\mathrm{Im}\ (\partial_{n-q+1} \otimes i)}$$

$$\lambda \circ k = \Pi_{(n-q)q}: H_{n-q} \otimes D \longrightarrow H_n(C \otimes D)$$

es un isomorfismo.

Definición 4.2

Una sucesión descendente D de R-módulos se dice que tiene borde trivial si y sólo si

$$\partial'_n: D_n \longrightarrow D_{n-1}$$

es el homomorfismo trivial cero para todo entero n.

Si D tiene borde trivial, entonces tenemos

$$H_n(D) = D_n$$

para todo entero n. En este caso el producto de homología Π es

$$\Pi: \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes D_q \longrightarrow H_n(C \otimes D_q)$$

Además, D Es la suma directa de los D_q considerados como sucesiones descendentes y por tanto

$$H_n(C \otimes D) = \sum_{q \varepsilon z} H_n(C \otimes D_q)$$

por consiguiente, el lema siguiente es una consecuencia directa de (L4.2)

Lema 4.3

Si D tiene borde trivial y D_n es un R-módulo plano para todo entero n, entonces

$$\Pi: \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes D_q \longrightarrow H_n(C \otimes D_q)$$

es un isomorfismo para todo entero n.

Demostración

Por (L4.2)

$$\Pi_{(n-q)q}: H_{n-q}(C) \otimes D_q \longrightarrow H_n(C \otimes D_q)$$

es un isomorfismo y como la suma de isomorfismos es isomorfismo tenemos

$$\sum_{q \varepsilon z} \Pi_{(n-q)q}: \sum_{q \varepsilon z} H_{n-q}(C) \otimes D_q \longrightarrow \sum_{q \varepsilon z} H_n(C \otimes D_q)$$

Si hacemos

$$\Pi_{pq}: \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes D_q \longrightarrow \sum_{q \in Z} H_n(C \otimes D_q)$$

concluimos que Π_{pq} es un isomorfismo para todo entero n.

Para todo entero n, consideremos la suma directa

$$F_n = \sum_{p+q=n} \mathrm{Tor}(C_p, D_q)$$

y el homomorfismo

$$\partial: F_n \longrightarrow F_{n-1}$$

definido por

$$\partial_n / \mathrm{Tor}(C_p, D_q) = \mathrm{Tor}(\partial_p, i_q) + (-1)^p \mathrm{Tor}(i_p, \partial_q)$$

donde $\partial_p: C_p \longrightarrow C_{p-1}$, $\partial_q: D_q \longrightarrow D_{q-1}$ son los homomorfismos borde e $i_p: C_p \longrightarrow C_p$, $i_q: D_q \longrightarrow D_q$ son los homomorfismos identidad.

Si

$$\partial_{n-1}/\mathrm{Tor}(C_{p-1}, D_q) = \mathrm{Tor}(\partial_{p-1}, i_q) + (-1)^{p-1}\mathrm{Tor}(i_{p-1}, \partial_q)$$

y

$$\partial_{n-1}/\mathrm{Tor}(C_p, D_{q-1}) = \mathrm{Tor}(\partial_p, i_{q-1}) + (-1)^p \mathrm{Tor}(i_p, \partial_{q-1})$$

haciendo la composición $\partial_{n-1} \circ \partial_n$ tenemos que

$$(\mathrm{Tor}(\partial_{p-1}, i_q) + (-1)^{p-1}\mathrm{Tor}(i_{p-1}, \partial_q)) \circ \mathrm{Tor}(\partial_p, i_q)$$

$$+$$

$$(-1)\ (\mathrm{Tor}(\partial_p, i_{q-1}) + (-1)^p \mathrm{Tor}(i_p, \partial_{q-1})) \circ \mathrm{Tor}(i_p, \partial_q)$$

$$=$$

$$\mathrm{Tor}(\partial_{p-1} \circ \partial_p, i_q) + (-1)^{p-1}\mathrm{Tor}(\partial_p, \partial_q) + (-1)^p \mathrm{Tor}(\partial_p, \partial_q)$$
$$+ (-1)^{2p}\mathrm{Tor}(i_p, \partial_{q-1}\partial_q)$$

Por lo que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ luego obtenemos una sucesión descendente

$$F: \ldots \longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

de R-módulos, que se llama producto torsión sobre R de las sucesiones descendentes dadas C y D y se denotará por $F = \mathrm{Tor}(C,D)$. Si las sucesiones descendentes dadas C y D son positivas, entonces también lo es $F = \mathrm{Tor}(C,D)$. En este caso, tenemos también la suma directa finita

$$F_n = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{Tor}(C_p, D_{n-p})$$

para todo entero no negativo n.

Los módulos de homología $H_n(C)$ de cualquier sucesión descendente sobre R para todo entero n constituyen una sucesión descendente H(C) con borde trivial. Por tanto las sucesiones descendentes

$$H(C) \otimes H\ (D) \quad . \ \mathrm{Tor}\left[H(C), H(D)\right]$$

están bien definidas y tienen borde trivial. Para todo entero n, sus componentes n-dimensionales son

$$\{H(C) \otimes H(D)\}_n = \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes H_q(D),$$

y

$$\{\mathrm{Tor}\ H(C), H(D)\}_n = \sum_{p+q=n} \mathrm{Tor}\left[H_p(C), H_q(D)\right]$$

por medio de ellas, el producto de homología Π de las sucesiones descendentes dadas C y D es

$$\Pi: \{H(C) \otimes H(D)\}_n \longrightarrow H_n(C \otimes D)$$

para todo entero n y por tener borde trivial constituye una transformación de cadenas

$$\Pi: H(C) \otimes H(D) \longrightarrow H(C \otimes D)$$

de las sucesiones descendentes $H(C) \otimes H(D)$ y $H(C \otimes D)$ con borde trivial.

Establezcamos ahora el siguiente teorema.

Teorema 4.4

Si $Z_n(D)$ y $B_n(D)$ son R-módulos planos para todo entero n, entonces existe un homomorfismo

$$\Theta: H_n(C \otimes D) \longrightarrow \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1}$$

para todo entero n tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\Pi} H_n(C\otimes D) \xrightarrow{\Theta} \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1} \longrightarrow 0$$

Demostración

Los módulos planos

$$Z_n = Z_n(D), \quad Q_n = \frac{D_n}{Z_n} \simeq B_{n-1}(D)$$

constituyen sucesiones descendentes Z y Q con borde trivial. Asi obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

de sucesiones descendentes sobre R, donde f denota la inclusión y g la proyección natural. Como Q_q es plano para todo entero q, tenemos

$$\mathrm{Tor}(C_p,Q_q) \approx \mathrm{Tor}(Q_q,C_p) = 0$$

para todo p y todo q por (T3.16), esto implica que la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow C \otimes Z \xrightarrow{i\otimes f} C \otimes D \xrightarrow{i\otimes g} C \otimes D \longrightarrow 0$$

es exacta, donde i: C ——> C designa la transformación de cadenas identidad.

Aplicando (T1.23) a esta sucesión exacta corta de sucesiones descendentes sobre R obtenemos una sucesión exacta

$$H_{n+1}(C\otimes Q) \xrightarrow{\partial^*_{n+1}} H_n(C\otimes Z) \xrightarrow{i\otimes f} H_n(C\otimes D) \xrightarrow{(i\otimes g)_*} H_n(C\otimes Q) \xrightarrow{\partial^*_n} H_{n-1}(C\otimes Z)$$

para todo entero n, donde ∂_n y ∂_{n+1} representan los homomorfismos de conexión. Por consiguiente obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker} \partial^*_{n+1} \xrightarrow{\phi} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{\psi} \ker \partial^*_n \longrightarrow 0$$

donde ϕ y ψ están inducidos por $(i \otimes f)_*$, $(i \otimes g)_*$ respectivamente.

Por la definición del módulo de homología $H_q(D)$ de la sucesión, obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Q_{q+1} \xrightarrow{\xi_q} Z_q \xrightarrow{\eta_q} H_q(D) \longrightarrow 0$$

para todo entero q, donde ξ_q está inducido por

$\partial_{q+1}: D_{q+1} \longrightarrow D_q$ y η_q es la proyección natural. Como Z_q se ha su puesto plano tenemos

$$\mathrm{Tor}[H_p(C),Z_q] \approx \mathrm{Tor}[Z_q,H_p(C)] = 0$$

para todo par de enteros p y q por (T3.16); esto implica que la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}[H_p(C),H_q(D)] \xrightarrow{\partial} H_p(C)\otimes Q_{q+1} \xrightarrow{i_p\otimes\xi_q} H_p(C)\otimes Z_q \xrightarrow{i_p\otimes\eta_q} H_p(C)\otimes H_q(D) \longrightarrow 0$$

es exacta para todo p y q, donde ∂^* es el homomorfismo de conexión, i_p representa el endomorfismo identidad de $H_p(C)$.

Puesto que Z_q y Q_{q+1} son planos para todo entero q, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{p+q=n} H_p(C)\otimes Q_{q+1} & \xrightarrow{h_{n+1}} & \sum\limits_{p+q=n} H_p(C)\otimes Z_q \\ \lambda\downarrow & & \downarrow u \\ H_{n+1}(C\otimes Q) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(C\otimes Z) \end{array}$$

para todo entero n, donde h_{n+1} es la suma directa

$$h_{n+1} = \sum_{p+q=n} i_p \otimes \xi_q \quad ,$$

λ y u son los homomorfismos dados por (L4.3), y ∂^*_{n+1} es el homomorfismo de conexión construido anteriormente y para nuestro caso particular tenemos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_p\otimes Z_{q+1} & \xrightarrow{i_p\otimes f} & C_p\otimes D_{q+1} & \xrightarrow{i_p\otimes g} & C_p\otimes Q_{q+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & x\otimes y & \leftarrow\!\sim\!\sim & (x\otimes(y+\ker\partial_{q+1})) & & \\ & & \downarrow i_p\otimes\xi_{q+1} & & \downarrow i_p\otimes\partial_{q+1} & & \downarrow i_p\otimes\partial_{q+1} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_p\otimes Z_q & \xrightarrow{i_p\otimes f} & C_p\otimes D_q & \xrightarrow{i_p\otimes g} & C_p\otimes Q_q & \longrightarrow & 0 \\ & & x\otimes\partial_{q+1}(y) & \leftarrow\!\sim\!\sim & x\otimes\partial_{q+1}(y) & & & & \end{array}$$

y asi $\partial^*_{n+1}(x\otimes(y+\ker\partial_{q+1})) = x\otimes\partial_{q+1}(y)$

con ∂^*_{n+1} asi definido probemos que el diagrama superior es conmutativo

Sea $(\bar{x} \otimes \bar{y}) \in H_p(C) \otimes Q_{q+1}$ donde $\bar{x}, \bar{y}$ son clases

$$\partial^*_{n+1}(\lambda(x \otimes y)) = \partial^*_{n+1}(x \otimes y) = x \otimes \partial_{q+1}(y)$$

$$\mu(\lambda_{n+1}(\bar{x} \otimes \bar{y})) = \mu(\bar{x} \otimes \overline{\partial_{q+1}(y)}) = x \otimes \partial_{q+1}$$

luego el diagrama es conmutativo.

Consideremos la suma directa de la sucesión exacta precedente para todos los enteros p,q tales que p + q = n y haciendo uso de este rectángulo conmutativo, obtenemos una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \{\mathrm{Tor}[H(C),H(D)]\}_n \xrightarrow{\alpha} H_{n+1}(C\otimes Q) \xrightarrow{\partial^*_{n+1}} H_n(C\otimes Z) \xrightarrow{\beta} \{H(C)\otimes H(D)\}_n \longrightarrow 0$$

debido a la exactitud de esta sucesión, los homomorfismos α y β inducen isomorfismos

$$\alpha^*_{n+1}: \{\mathrm{Tor}[H(C),\ H(D)]\}_n \approx \ker \partial^*_{n+1}$$

$$\beta^*_{n+1}: \mathrm{coker}\ \partial^*_{n+1} \approx \{H(C) \otimes H(D)\}_n$$

para todo entero n. Asi podemos definir

$$\Pi = \phi \circ (\beta_{n+1})^{-1}$$

y

$$\Theta = (\alpha^*_n)^{-1} \circ \Psi$$

entonces obtenemos una sucesión

$$0 \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\Pi} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{\Theta} \mathrm{Tor}[H(C),H(D)]\}_{n-1} \longrightarrow 0$$

y como

$$\mathrm{Im}(\phi \circ (\beta_{n+1})^{-1}) = \mathrm{Im}\ \phi$$

y

$$\ker((\alpha^*_n)^{-1} \circ \Psi) = \ker \Psi$$

de esto concluimos que la sucesión es una sucesión exacta corta.

Corolario 4.5

Si Z (D) y H (D) son R-módulos proyectivos para todo entero n, entonces

$$\Pi : \{H(C) \otimes H(D)\}_n \longrightarrow H_n(C \otimes D)$$

es un isomorfismo para todo entero n.

Demostración

Como $H_n(D)$ es proyectivo, la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow B_n(D) \xrightarrow{\alpha} Z_n(D) \xrightarrow{\beta} H_n(D) \longrightarrow 0$$

se descompone de acuerdo con (T2.22b). Aquí α denota el homomorfismo inclusión y β representa la proyección natural. Por (C1.14), esto implica que $B_n(D)$ es isomorfo a un sumando directo de $Z_n(D)$. Puesto que $Z_n(D)$ es proyectivo en virtud de (P3.9), $Z_n(D)$ y $B_n(D)$ son R-módulos planos. Por consiguiente, podemos aplicar (T4.4) a este caso.

Por otra parte, como $H_n(D)$ es proyectivo para todo entero n, tenemos

$$\mathrm{Tor}[H_p(C), H_q(D)] \approx \mathrm{Tor}[H_q(D), H_p(C)] = 0$$

para todo par de enteros p y q. Esto implica

$$\mathrm{Tor}[H(C), H(D)]_{n-1} = 0$$

para todo par de enteros p y q. Esto implica que Π es un isomorfismo para todo entero n.

Teorema 4.6

Fórmula de Kunneth

Si C y D son sucesiones descendentes de módulos libres sobre un dominio R de ideales principales, entonces existe un homomorfismo

$$\Theta: H_n(C \otimes D) \longrightarrow \{Tor[H(C),H(D)]\}_{n-1}$$

para todo entero n tal que

$$0 \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\Pi} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{\Theta} \{Tor[H(C),H(D)]\}_{n-1} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible y, por consiguiente, tenemos

$$H_n(C \otimes D) \simeq \{H(C) \otimes H(D)\}_n \otimes Tor[H(C),H(D)]\}_{n-1}$$

para todo entero n.

Demostración

Por ser submódulos de un módulo libre D_n sobre un dominio de ideales principales, los módulos $Z_n(D)$ y $B_n(D)$ son libres y por tanto planos. Por lo tanto, podemos aplicar (T4.4) a este caso y obtener el homomorfismo Θ, asi como la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\Pi} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{\Theta} \{Tor[H(C),H(D)]\}_{n-1} \longrightarrow 0$$

para todo entero n. Queda por probar que esta sucesión exacta corta se descompone.

Para ello, consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Z_n(C) \xrightarrow{\alpha_n} C_n \xrightarrow{\beta_n} B_{n-1}(C) \longrightarrow 0$$

donde α_n denota el homomorfismo inclusión y β_n está definido por $\partial_n: C_n \longrightarrow C_{n-1}$. Por ser submódulo de un módulo libre C_{n-1} sobre un dominio de ideales principales R, $B_{n-1}(C)$ es libre y por tanto proyectivo por (T2.22b) se deduce que se descompone. De acuerdo con (C1.17ii), esto implica que el homomorfismo tiene un inverso por la izquierda, esto es, un homomorfismo

$$\gamma_n : C_n \longrightarrow Z_n(C)$$

tal que $\gamma_n \circ \alpha_n = 1Z_n(C)$, sea

$$\delta_n: Z_n(C) \longrightarrow H(C)$$

la proyección natural. Entonces obtenemos un homomorfismo definido

$$C_n \xrightarrow{\gamma_n} Z_n(C) \xrightarrow{\delta_n} H_n(C)$$

$$\Psi_n = \delta_n \circ \gamma_n: C_n \longrightarrow H_n(C)$$

$$\text{si } \Psi_n/Z_n(C): Z_n(C) \longrightarrow H_n(C)$$

tenemos

$$\Psi_n \circ \alpha_n = \delta_n \circ \gamma_n \circ \alpha_n = \delta_n$$

Análogamente, existe un homomorfismo

$$\Psi_n : D_n \longrightarrow H_n(D)$$

tal que Ψ_n/Z (D) es la proyección natural de $Z_n(D)$ sobre $H_n(D)$.

Para enteros arbitrarios p y q, consideremos el producto tensorial

$$\phi_p \otimes \Psi_q: C_p \otimes D_q \longrightarrow H_p(C) \otimes H_q(D)$$

Estos homomorfismos constituyen una transformación de cadenas

$$\phi \otimes \Psi: C \otimes D \longrightarrow H(C) \otimes H(D)$$

de las sucesiones descendentes $C \otimes D$ y $H(C) \otimes H(D)$ por tener borde trivial se anula sobre los bordes de $C \otimes D$. Por tanto $\phi \otimes \Psi$ induce un homomorfismo

$$(\phi \otimes \Psi)_*: H_n(C \otimes D) \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\}$$

para todo entero n, como $\phi_p/Z_p(C)$ y $\Psi_q/Z_q(D)$ son las proyecciones naturales. Tenemos

$$\Pi_{pq}(\phi_p \otimes \Psi_q) = \Pi_{rq}(\bar{x} \otimes \bar{y}) = x \otimes y$$

que es la identidad en el módulo
$H_n(C \otimes D)$, verificando asi que $(\phi \otimes \Psi)_*$ es inverso por izquierda de Π y de (T2.22) concluimos que

$$0 \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\Pi} H_n(C\otimes D) \xrightarrow{\Theta} \{Tor[H(C),H(D)]\}_{n-1} \longrightarrow 0$$

se descompone y asi

$$H_n(C \otimes D) \approx \{H(C) \otimes H(D)\}_n \oplus \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1}$$

para todo entero n.

Lema 4.7

Si C y D son sucesiones descendentes de módulos sobre un dominio R de ideales principales, entonces la sucesión descendente $C \otimes D$ es exacta con tal que se satisfagan las dos condiciones siguientes:

a) Para todo entero n, D_n es un R-módulo libre

b) o bien C o bien D es exacta

Demostración

Podemos aplicar (T6.4) a este caso y obtener una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\Pi} H_n(C\otimes D) \xrightarrow{\Theta} \{Tor[H(C),H(D)]\}_n \longrightarrow 0$$

para todo entero n. Como $C \circ D$ es exacta debemos tener

$$\{H(C) \otimes H(D)\}_n = 0; \ \{Tor[H(C),H(D)]\}_n = 0$$

para todo entero n. Esto implica que la sucesión descendente $C \otimes D$ es exacta ya que $H_n(C \otimes D) = 0$

Lo que prueba el resultado.

Teorema 4.8

Si C y D son sucesiones descendentes de módulos sobre un dominio R de ideales principales, tales que la sucesión descendente Tor(C,D) es exacta, entonces existe un homomorfismo

$$\Theta: H_n(C \otimes D) \longrightarrow \{Tor[H(C).H(D)]\}_{n-1}$$

para todo entero n tal que

$$0 \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\Pi} H_n(C\otimes D) \xrightarrow{\Theta} \{Tor[H(C),H(D)]\}_{n-1} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible, y por lo tanto tenemos

$$H_n(C\otimes D) \approx \{H(C) \otimes H(D)\} \oplus \{Tor[H(C),H(D)]\}_{n-1}$$

para todo entero n.

Demostración

Por (L3.31), existen aproximaciones libres

$$f: C' \longrightarrow C, \quad g: D' \longrightarrow D$$

de las sucesiones descendentes dadas C y D, respectivamente. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow D'' \xrightarrow{j} D' \xrightarrow{g} D \longrightarrow 0$$

de la aproximación libre $g: D' \longrightarrow D$, donde j representa la inclusión, como D' es libre y por tanto proyectivo para todo entero n, tenemos Tor $(C,D') = 0$

Por consiguiente, se deduce de (T3.16) que

$$0 \longrightarrow Tor(C,D) \xrightarrow{\partial *} C \otimes D'' \xrightarrow{i\otimes j} C \otimes D' \xrightarrow{i\otimes g} C \otimes D \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de sucesiones descendentes, donde i representa la transformación de cadenas identidad de la sucesión descendente C.

Por nuestra hipótesis, Tor(C,D) es exacta por otra parte, como D" es libre y exacta en virtud de (L3.32) y (L4.7) se sigue que $C \otimes D''$ es exacta, esto implica que

$$(i \otimes g)_*: H_n(C \otimes D') \longrightarrow H_n(C \otimes D)$$

es isomorfismo para todo entero n.

Consideremos ahora la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C'' \xrightarrow{e} C' \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$$

de la aproximación libre $f: C' \longrightarrow C$, donde e representa la inclusión. Como el módulo D' es libre y por ello proyectivo para todo entero n, determina una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C'' \otimes D' \xrightarrow{e \otimes i'} C' \otimes D' \xrightarrow{f \otimes i} C \otimes D' \longrightarrow 0$$

en virtud del (P2.27). Aquí i' representa la transformación de cadenas identidad de la sucesión descendente D'. Por (L4.7), la sucesión descendente $C'' \otimes D'$ es exacta. Esto implica que el homomorfismo inducido

$$\alpha_n = (f \otimes i)_*: H_n(C' \otimes D') \longrightarrow H_n(C \otimes D')$$

es isomorfismo para todo entero n.

De acuerdo con la condición (AL3) para las aproximaciones libres $f: C' \longrightarrow C$ y $g: D' \longrightarrow D$, los homomorfismos inducidos

$$f_{*n}: H_n(C') \longrightarrow H_n(C), \quad g_{*n}: H_n(D') \longrightarrow H_n(D)$$

Son isomorfismos para todo entero n. Luego los homomorfismos

$$\beta_n = \sum_{p+q=n} f_{*p} \otimes g_{*q}: \{H(C') \otimes H(D')\}_n \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\}_n$$

$$\gamma_n = \sum_{p+q=n} tor(f_{*p}, g_{*q}): \{Tor[H(C'), H(D')]\}_n \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\}_n$$

son isomorfismos para todo entero n.

Puesto que C'_n y D'_n son R-módulos libres, podemos aplicar (T4.6) a las sucesiones descendentes C' y D' para obtener una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \{H(C')\otimes H(D')\}_n \xrightarrow{\Pi'} H_n(C'\otimes D') \xrightarrow{\Theta'} \{Tor[H(C'),H(D')]\}_{n-1} \longrightarrow$$

descomponible. Definamos un homomorfismo

$$\Theta: H_n(C \otimes D) \longrightarrow \{Tor[H(C),H(D)]\}_{n-1}$$

para todo entero n tomando

$$\Theta = \gamma_{n-1} \circ \Theta' \circ \alpha_n^{-1}$$

queda por establecer que

$$0 \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\Pi} H_n(C\otimes D) \xrightarrow{\Theta} \{Tor[H(C),H(D)]\}_{n-1} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible.

Para ello, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \{H(C') \otimes H(D')\}_n \arrow[r, "\Pi'"] \arrow[d, "\beta_n"'] & H_n(C'\otimes D') \arrow[r, "\Theta'"] \arrow[d, "\alpha_n"] & \{Tor[H(C'),H(D')]\}_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \{H(C) \otimes H(D)\}_n \arrow[r, "\Gamma"] & H_n(C \otimes D) \arrow[r, "\Theta"] & \{Tor[H(C),H(D)]\}_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por la definición de Π y Π' dada al principio de esta sección, el rectángulo de la izquierda es conmutativo, la defición de Θ dada antes implica que el rectángulo de la derecha es también conmutativo. Puesto que los homomorfismos verticales son isomorfismos y la fila superior es una sucesión exacta corta descomponible, se puede probar similarmente a (T3.33) que la fila inferior es una sucesión exacta corta descomponible.

A lo largo de ésta sección, C y D denotarán sucesiones ascendentes arbitrariamente dadas (complejos de cocadenas) de R-módulos.

Para todo entero n, consideremos la suma directa

$$E^n = \sum_{p+q=n} C^p \otimes D^q$$

y el homomorfismo

$$\delta^n \colon E_{n-1} \longrightarrow E_n$$

$$\delta^n \colon \sum_{p+q=n-1} C^p \otimes D^q \longrightarrow \sum_{p+q=n} C^p \otimes D^q$$

definido sobre los generadores

$$\delta^n(x \otimes y) = \delta^p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes \delta^q(y)$$

Haciendo la composición $\delta^{n+1} \circ \delta^n$ tenemos

$$\delta^{n+1} \circ (\delta^n(x \otimes y)) = \delta^{n+1}(\delta^p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes \delta^q(y))$$

$$= \delta^{n+1}(\delta^p(x) \otimes y) + (-1)^p \delta^{n+1}(x \otimes \delta^q(y))$$

$$= \delta^{p+1}(\delta^p(x)) \otimes y + (-1)^{p+1}\delta^p(x) \otimes \delta^q(y) + (-1)^p[\delta^p(x) \otimes \delta^q(y) + (-1)^{p+1} \otimes \delta^{q+1}\delta^q(y)]$$

$$= (-1)^{p+1}\delta^p(x) + (-1)^p \delta^p(x) \otimes \delta^q(y) = 0 \quad \text{y asi}$$

$\delta^{n+1}(\delta^n(x \otimes y)) = 0$, por lo que obtenemos

una sucesión ascendente

$$E\colon \ldots \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{\delta^n} E_n \xrightarrow{\delta^{n+1}} E_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

de R-módulos, que recibe el nombre de producto tensorial sobre R de las sucesiones ascendentes dadas C y D y se denotará por $E = C \otimes D$.

Si C y D son positivas, esto es, si $C^n = 0$ y $D^n = 0$ para todo entero negativo n, entonces igual sucede con su producto tensorial $E = C \otimes D$. En este caso tenemos también la suma directa finita

$$E^n = \sum_{p=0}^{n} C^p \otimes D^{n-p}$$

para todo entero no negativo n.

Para todo par de enteros p y q. definamos un homomorfismo

$$\Pi^{pq}: H^p(C) \otimes H^q(D) \longrightarrow H^{p+q}(C \otimes D)$$

$$\Pi^{pq}: \frac{\ker \delta^{p+1}}{\operatorname{Im} \delta^p} \otimes \frac{\ker \delta^{q+1}}{\operatorname{Im} \delta^q} \longrightarrow \frac{\ker \delta^{n+1}}{\operatorname{Im} \delta^n}$$

$$(x + \operatorname{Im} \delta^p) \otimes (y + \operatorname{Im} \delta^q) \rightsquigarrow (x \otimes y) + \operatorname{Im} \delta^n$$

es fácil verificar que $(x \otimes y) \in \ker \delta^{n+1}$ y que Π^{pq} está bien definida.

Para todo entero n, la suma directa realizada

$$\Pi = \sum_{p+q=n} \Pi^{pq}: \sum_{p+q=n} H^p(C) \otimes H^q(D) \longrightarrow H^n(C \otimes D)$$

de la manera siguiente

$$\sum_{p+q=n} \sum_{i=1}^{m_{pq}} (x_{ip} + \operatorname{Im} \delta^p) \otimes (y_{iq} + \operatorname{Im} \delta^q))$$

$$\rightsquigarrow \sum_{p+q=n} \sum_{i=1}^{m_{pq}} ((x_{ip} \otimes y_{iq}) + \operatorname{Im} \delta^n$$

En particular si

$$D^n = \begin{cases} G, & (\text{si } n = 0) \\ 0, & (\text{si } n \neq 0) \end{cases}$$

donde G es un R-módulo arbitrariamente dado,

tenemos

$$E^n = C^n \otimes G$$

para todo entero n y por consiguiente $C \otimes D$ se reduce al producto tensorial $C \otimes G$ definido en la sección precedente, además

$$H^n(D) = \begin{cases} G & (\text{si } n = 0 \\ 0 & (\text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

El producto de cohomología Π se reduce al homomorfismo

$$j \colon H^n(C) \otimes G \longrightarrow H^n(C \otimes D)$$

Lema 4.9

Si G es un R-módulo plano, entonces

$$\Pi = j \colon H^n(C) \otimes G \longrightarrow H^n(C \otimes D)$$

es un isomorfismo para todo entero n.

Demostración

Sea n un entero arbitrariamente dado y designemos con

$$B^n = B^n(C), \quad Z^n = Z^n(C), \quad H^n = H^n(C)$$

entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} \delta^n \arrow[u] \arrow[r, "e"] & \ker \delta^{n+1} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & \dfrac{\ker \delta^{n+1}}{\operatorname{Im} \delta^n} \arrow[r] & 0 \\
 & C^{n-1} \arrow[u, "\hat{\delta}^n"] \arrow[r, "\delta^n"] & C^n \arrow[d, "\delta^{n+1}"] & & \\
 & & C^{n+1} & &
\end{tikzcd}$$

Donde δ^n, δ^{n+1} son los homomorfismos de la sucesión ascendente C, e y f son los homomorfismos inclusión y p es la proyección natural de Z^n sobre el módulo cociente $H^n = \frac{Z^n}{B^n}$. Las filas y columnas de este diagrama son evidentemente exactas. Efectuando los productos tensoriales con el homomorfismo identidad
i: G ——> G obtenemos un diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} \delta^n \otimes G \arrow[u] \arrow[r, "e\otimes i"] & \ker \delta^{n+1} \otimes G \arrow[r, "p\otimes i"] \arrow[d, "f\otimes i"] & \frac{\ker \delta^{n+1}}{\operatorname{Im} \delta^n} \otimes G \arrow[r] & 0 \\
 & C^{n-1} \otimes G \arrow[u, "\hat{\delta}^n \otimes i"] \arrow[r, "\delta^n \otimes i"] & C^n \otimes G \arrow[d, "\delta^{n+1}\otimes i"] & & \\
 & & C^{n+1} \otimes G & &
\end{tikzcd}$$

Como G es plano, se deduce de (P3.19'd) que las filas y columnas de este diagrama de productos tensoriales son también exactas.

De la exactitud de la fila larga, se deduce que p ⊗ i es epimorfismo e induce un isomorfismo

$$k = (p \otimes i)_*: H^n(C) \otimes C \simeq \frac{(\ker \delta^{n+1})\otimes G}{\ker (p\otimes i)} \simeq \frac{(\ker \delta^{n+1})\otimes G}{\operatorname{Im} (e \otimes i)}$$

ya que $\operatorname{Im}(e\otimes i) = \ker (p\otimes i)$ por ser exacta.

La exactitud de la columna corta implica que $\hat{\delta}^n \otimes i$ es epimorfismo, mientras que la exactitud de la columna larga implica que $(f\otimes i)$ es monomorfismo y que

$$\operatorname{Im} (f\otimes i) = \ker (\delta^{n+1} \otimes i)$$

puesto que el rectángulo es conmutativo y $\delta^n \otimes i$ es epimorfismo

$$\mathrm{Im}\ (f \otimes i \circ e \otimes i) = \mathrm{Im}\ \delta^n \otimes i$$

$$\mathrm{Im}\ (f \otimes i \circ e \otimes i) = f \otimes i(\mathrm{Im}(e \otimes i))$$

en consecuencia, el homomorfismo $f \otimes i$ induce un isomorfismo.

$$\lambda = (f\otimes i)_*: \frac{\ker \delta^{n+1}\otimes G}{\mathrm{Im}\ (e \otimes i)} \cong \frac{\ker\ (\delta^{n+1}\otimes i)}{\mathrm{Im}\ (\delta^n \otimes i)}$$

ya que

$$0 \longrightarrow \ker \delta^{n+1} \otimes G \xrightarrow{f\otimes i} C^n \otimes G$$

$$0 \longrightarrow \frac{\ker \delta^{n+1} \otimes G}{\mathrm{Im}\ (e \otimes i)} \longrightarrow \frac{\ker\ (\delta^{n+1} \otimes i)}{\mathrm{Im}\ (\delta^n \otimes i)}$$

por que $(f\otimes i)(\mathrm{Im}(e\otimes i)) = \mathrm{Im}\ (\delta^n\otimes i)$, considerando que

$$H^n(C) \otimes G \xrightarrow{k} \frac{\ker \delta^{n+1}\otimes G}{\mathrm{Im}\ (e \otimes i)} \xrightarrow{\lambda} \frac{\ker\ (\delta^{n+1}\otimes i)}{\mathrm{Im}\ (\delta^n\otimes i)}$$

obtenemos $j = \lambda \circ k: H_n(C) \otimes G \longrightarrow H_n(C \otimes D)$ es un isomorfismo.

Más generalmente, se q un entero. Si $D^n = 0$ para todo $n \neq q$, entonces tenemos

$$H^n(D) = \begin{cases} D, & (\text{si } n = q) \\ 0, & (\text{si } n \neq q) \end{cases}$$

En este caso, el producto de homología Π es

$$\Pi : H^{n-q}(C) \otimes D^q \longrightarrow H^n(C \otimes D)$$

Análogamente se puede establecer el siguiente lema

Lema 4.10

Si $D^n = 0$ para todo $n \neq q$ y D^q es un R-módulo plano entonces

$$\Pi : H^{n-q}(C) \otimes D^q \longrightarrow H^n(C \otimes D^q)$$

es un isomorfismo para todo entero n.

Demostración

Sea n un entero arbitrariamente dado y designemos con $B^{n-q} = B^{n-q}(C)$, $Z^{n-q} = Z^{n-q}(C)$, $H^{n-q} = H^{n-q}(C)$ entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
{} & {} \arrow[d] & & \\
\mathrm{Im}\ \delta^{n-q} \arrow[u] \arrow[r, "e"] & \ker \delta^{n-q+1} \arrow[r, "e"] \arrow[d] & \dfrac{\ker \delta^{n-q+1}}{\mathrm{Im}\ \delta^{n-q}} \arrow[r] & 0 \\
C_{n-q-1} \arrow[u, "\delta^{n-q}"] \arrow[r, "\delta^{n-q}"] & C^{n-q} \arrow[d, "\delta^{n-q+1}"] & & \\
& C^{n-q+1} & &
\end{tikzcd}$$

Donde δ^{n-q}, δ^{n-q+1} son los homomorfismos de la sucesión ascendente C. e y f son los homomorfismos inclusión y p es la proyección natural de Z^{n-q} sobre su módulo cociente $H^{n-q}(C)$, las filas y columnas de este diagrama son evidentemente exactas. Efectuando los productos tensoriales con el homomorfismo identidad $i: D^q \longrightarrow D^q$ obtenemos un diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} \delta^{n-q} \otimes D^q \arrow[r, "e\otimes i"] \arrow[d, "\delta^{n-q}\otimes i"'] & & \ker \delta^{n-q+1} \otimes D^q \arrow[r, "p\otimes i"] \arrow[d, "f\otimes i"] & \dfrac{\ker \delta^{n-q+1}}{\operatorname{Im} \delta} \otimes D^q \\
 & C^{n-q-1} \otimes D^q \arrow[rr, "\delta^{n-q}\otimes i"] & & C^{n-q} \otimes D^q \arrow[d, "\delta^{n-q+1}\otimes i"] & \\
 & & & C^{n-q+1} \otimes D^q &
\end{tikzcd}$$

como D^q es plano, se deduce d (P3.19') que las filas y columnas de este diagrama de productos tensoriales son exactas. De la exactitud de la fila larga, se deduce que $p \otimes i$ es epimorfismo e induce un isomorfismo

$$k = (P\otimes i)_*: H^{n-q}(C) \otimes D^q \longrightarrow \frac{\ker \delta^{n-q+1} \otimes Dq}{\operatorname{Im} (e \otimes i)}$$

la exactitud la columna corto implica que $\delta^{n-q} \otimes i$ es epimorfismo, mientras que la exactitud de la columna larga impli- ca que $f \otimes i$ es monomorfismo y que $\operatorname{Im} (f\otimes i) = \ker (\delta^{n-q+1} \otimes i)$ Puesto que el rectángulo es conmutativo y

$$\delta^{n-q} \otimes i \text{ es epimorfismo}$$

$$\operatorname{Im} (f\otimes i \circ e\otimes i) = \operatorname{Im} \delta^{n-q} \otimes i$$

$$\operatorname{Im} (f\otimes i \circ e\otimes i) = f\otimes i\ (\operatorname{Im}(e\otimes i)$$

en consecuencia, el homomorfismo $f\otimes i$ induce un isomorfismo.

$$\lambda = (f \otimes i)_*: \frac{\ker \delta^{n-q+1} \otimes D^q}{\operatorname{Im} (e \otimes i)} \simeq \frac{\ker (\delta^{n-q+1} \otimes i}{\operatorname{Im} (\delta^{n-q} \otimes i)}$$

ya que

$$0 \longrightarrow \ker \delta^{n-q+1} \otimes D^q \longrightarrow C^{n-q} \otimes D^q$$

$$0 \longrightarrow \frac{\ker \delta^{n-q+1} \otimes D^q}{\operatorname{Im} (e \otimes i)} \longrightarrow \frac{\ker (\delta^{n-q+1} \otimes i)}{\operatorname{Im} (\delta^{n-q} \otimes i)}$$

por que $(f \otimes i)(\mathrm{Im}(e\otimes i)) = \mathrm{Im}\,(\delta^{n-q} \otimes i)$, considerando

$$H^{n-q}(C) \otimes D^q \longrightarrow \frac{\ker \delta^{n-q+1} \otimes i\ D}{\mathrm{Im}\ (e \otimes i)} \xrightarrow{\lambda} \frac{\ker\ (\delta^{n-q+1} \otimes i)}{\mathrm{Im}\ (\delta^{n-q} \otimes i)}$$

luego

$$j = \lambda \circ k: H^{n-q} \otimes D^q \longrightarrow \frac{\ker\ (\delta^{n-q+i} \otimes i)}{\mathrm{Im}\ (\delta^{n-q} \otimes i)}$$

$$j = \Pi: H^{n-q}(C) \otimes D^q \longrightarrow H^n(C \otimes D)$$

es isomorfismo

Definición 4.3

Una sucesión ascendente D de R-módulos se dice que tiene coborde trivial si y sólo si

$$\delta_1^n: D^{n-1} \longrightarrow D^n$$

es el homomorfismo trivial cero para todo entero n. Si D tiene coborde trivial, entonces tenemos:

$$H^n(D) = D^n$$

para todo entero n. En este caso el producto de cohomología Π es:

$$\Pi: \sum_{p+q=n} H^p(C) \otimes D^q \longrightarrow H^n(C \otimes D)$$

Además D es la suma directa de los D considerados como sucesiones ascendentes y por tanto

$$H^n(C \otimes D) = \sum_{q \in Z} H^n(C \otimes D^q)$$

Lema 4.11

Si D tiene coborde trivial y D^n es un R-módulo plano para todo entero n entonces

$$\Pi: \sum_{p+q=n} H^p(C) \otimes D^q \longrightarrow H^n(C \otimes D)$$

es un isomorfismo para todo entero n.

Demostración

Por (L4.10) tenemos $\Pi^{(n-q)q}: H^{n-q}(C) \otimes D^q \longrightarrow H^n(C \otimes D)$ es un isomorfismo y asi

$$\sum \Pi^{(n-q)q}: \sum_{q\varepsilon z} H^{n-q} \otimes D^q \longrightarrow \sum_{q\varepsilon z} H^n(C \otimes D^q).$$

y como la suma de isomorfismo es isomorfismo concluimos que

$$\Pi = \sum_{p+q=n} \Pi_{pq}: \sum_{p+q=n} H^p(C) \otimes D^q \longrightarrow H^n(C \otimes D)$$

es isomorfismo.

Para todo entero n, consideremos la suma directa

$$F_n = \sum_{p+q=n} \mathrm{Tor}(C^p, D^q)$$

y el homomorfismo

$$\partial: F_{n-1} \longrightarrow F_n$$

$$\partial_n: \sum_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}(C^p, D^q) \longrightarrow \sum_{p+q=n} \mathrm{Tor}(C^p, D^q)$$

definido por

$$\partial_n/\mathrm{Tor}\ (C^p, D^q) = \mathrm{Tor}\ (\delta^p, iq/ + (-1)^p \mathrm{Tor}(ip, \delta^q)$$

donde, δp: $C^{p-1} \longrightarrow C^p$, δ^q: $D^{q-1} \longrightarrow D^q$ son los homomorfismos coborde e ip: $C^p \longrightarrow C^p$; $iq: D^q \longrightarrow D^q$ son los homomorfismos identidad si realizamos $\delta^{n-1} \circ \delta^n$ tenemos que

$$\delta^{n+1}/\mathrm{Tor}(C^{p+1}, D^q) = (\mathrm{Tor}(\delta^{p+1}, iq) + (-1)^{p+1}(i_{p+1}, \delta^q)$$

y

$$\delta^{n+1}/\mathrm{Tor}(C^p, D^{q+1}) = \mathrm{Tor}(\delta^p, i_{q+1}) + (-1)^p(ip, \delta^{q+1})$$

Aplicando

$$(\mathrm{Tor}(\delta^{p+1}, i_q) + (-1)^{p+1}(i_{p+1}, \delta^q)) \circ \mathrm{Tor}(\delta^p, i_q) +$$

$$(-1)^p[\mathrm{Tor}(\delta^p, i_{q+1}) + (-1)^p(i_p, \delta^{q+1}) \circ \mathrm{Tor}(i_p, \delta^q)$$

$$= \mathrm{Tor}(\delta^{p+1} \circ \delta^p, i_q) + (-1)^{p+1}(i_{p+1}, \delta^q) + (-1)^p \mathrm{Tor}(\delta^p, \delta^q)$$
$$+ (-1)^{2p} \mathrm{Tor}(i_p, \delta^{q+1} \circ \delta^q) = 0$$

De lo anterior tenemos que $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ obteniendo asi una sucesión ascendente

$$F: \ldots \longrightarrow F^{n-1} \xrightarrow{\delta^n} F^n \xrightarrow{\delta^{n+1}} F^{n+1} \longrightarrow \ldots$$

de R-módulos, que se llama producto de torsión sobre R de las sucesiones ascendentes dadas C y D y se denotará por

$$F = \mathrm{Tor}(C, D)$$

Si las sucesiones ascendentes dadas C y D son positivas, entonces también lo es $F = \mathrm{Tor}(C,D)$. En este caso, tenemos también la suma directa

$$F^n = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{Tor}(C^p, D^{n-p})$$

para todo entero n no negativo.

Los módulos de cohomología $H^n(C)$ de cualquier sucesión ascendente sobre R para todo entero n constituyen una sucesión ascendente H(C) con borde trivial, por lo tanto las sucesiones ascendentes

$$H(C) \otimes H(D) \ ; \quad \mathrm{Tor}\left[H(C),\ H(D)\right]$$

estan bien definidas y tienen coborde trivial para todo entero n, sus componentes n-dimensionales son

$$\{H(C) \otimes H(D)\}^n = \sum_{p+q=n} H^p(C) \otimes H^q(D)$$

$$\{\mathrm{Tor}[H(C),H(D)]\}^n = \sum_{p+q=n} \mathrm{Tor}\ [H^n(C),\ H^q(D)]$$

por medio de ellas, el producto de cohomología Π de las sucesiones ascendentes dadas C y D es

$$\Pi\colon \{H(C) \otimes H(D)\}^n \longrightarrow H^n(C \otimes D)$$

para todo entero n y, por tener coborde trivial constituye una transformación de cadenas

$$\Pi\colon H(C) \otimes H(D) \longrightarrow H(C \otimes D)$$

de las sucesiones ascendentes $H(C) \otimes H(D)$ y $H(C \otimes D)$

Teorema 4.12

Si $Z^n(D)$ y $B^n(D)$ son R-módulos planos para todo entero n, entonces existe un homomorfismo

$$\Theta\colon H^n(C \otimes D) \longrightarrow \{\mathrm{Tor}\ [H(C),\ H(D)]\}_{n+1}$$

para todo entero n tal que la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\} \xrightarrow{\Pi} H^n(C \otimes D) \xrightarrow{\Theta} \{\mathrm{Tor}[H(C),H(D)]\}_{n+1}$$

Demostración

Los módulos planos

$$Z^n = \ker \delta^{n+1} \quad ; \quad Q^n = \frac{D^n}{\ker \delta^{n+1}}$$

constituyen sucesiones ascendentes Z y Q con coborde trivial. Asi obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

de sucesiones ascendentes sobre R, donde f denota la inclusión y g la proyección natural.

Como Q_q es plano para todo entero q, tenemos

$$\mathrm{Tor}(C^p, Q^q) \approx \mathrm{Tor}[\, Q^q, C^p] = 0$$

para todo p y todo q por (T3.16) esto implica que la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow C \otimes \ker \delta \xrightarrow{i \otimes f} C \otimes D \xrightarrow{i \otimes g} C \otimes Q \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $i: C \longrightarrow C$ designa la transformación de cadenas identidad. Aplicando (T1.23) a esta sucesión exacta corta.

$$H^{n-1}(C \otimes Q) \xrightarrow{\delta^n} H^n(C \otimes Z) \xrightarrow{(i \otimes g)_*} H^n(C \otimes D) \xrightarrow{(i \otimes f)_*} H^n(C \otimes Q) \xrightarrow{\delta^{n+1}} H^{n+1}(C \otimes Z)$$

para todo entero n, donde δ^n, δ^{n+1} representan los homomorfismos de conexión por consiguiente obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker} \delta^n \xrightarrow{\psi} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{\phi} \ker \delta^{n+1}$$

donde ϕ y ψ están inducidos por $(i \otimes f)_*$ e $(i \otimes g)_*$ respectivamente.

Por la definición del módulo de cohomología $H^q(D)$ de la sucesión ascendente D, obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Q^{q-1} \xrightarrow{\xi_q} Z^q \xrightarrow{\eta_q} H^q(D)$$

para todo entero q, donde ξ_q está inducido por

$$\delta^q: D^{q-1} \longrightarrow D^q \quad y \quad \eta_q$$

es la proyección natural como Z_q se ha supuesto plano tenemos

$$\mathrm{Tor}\left[H^q(C),\ Z^q\right] \approx \mathrm{Tor}\left[Z^q, H^p(C)\right] = 0$$

para todo par de enteros p y q por (T3.16) esto implica que la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}\left[H^p(C), H^q(D)\right] \longrightarrow H^p(C) \otimes Q^q \xrightarrow{i_p \otimes \xi_q} H^p(C) \otimes Z^{q+1}$$
$$\xrightarrow{i_p \otimes \eta_q} H^p(C) \otimes H^{q+1}(D) \longrightarrow 0$$

es exacta para todo p y q, donde δ^* es el homomorfismo conexión, i_p representa el homomorfismo identidad de $H^p(C)$.

Puesto que Z^q y Q^{q+1} son planos para todo entero q, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\sum\limits_{p+q=n} H^p(C) \otimes Q^q & \longrightarrow & \sum\limits_{p+q=n} H^p(C) \otimes Z^{q+1} \\
\Big\downarrow \lambda & & \Big\downarrow \mu \\
H^n(C \otimes Q) & \xrightarrow{\delta^{*n+1}} & H^{n+1}(C \otimes Z)
\end{array}$$

para todo entero n, donde h_n es la suma directa

$$h_n = \sum_{p+q=n} i_p \otimes \xi_q$$

λ y μ son los homomorfismos dados por (L4.11) y δ^{*n+1} es el homomorfismo de conexión construido por el dual de (T1.23) similarmente a (T4.4) se comprueba que este diagrama es conmutativo para todo entero n.

Considerando la suma directa de la sucesión exacta precedente para todos los enteros p,q tales que $p + q = n$ y haciendo uso del rectángulo conmutativo, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \{\mathrm{Tor}|H(C),H(D)|\}^n \xrightarrow{\alpha} H^n(C\otimes Q) \xrightarrow{\delta^{*n+1}} H^{n+1}(C\otimes Z)$$

$$\xrightarrow{\beta} \{H(C)\otimes H(D)\}^{n+1} \longrightarrow 0$$

En forma dual a (T4.4) se comprueba que la sucesión

$$0 \longrightarrow \{H(C)\otimes H(D)\}^n \xrightarrow{\Pi} H^n(C\otimes D) \xrightarrow{\Theta} \{\mathrm{Tor}[H(C),H(D)]\}_{n+1} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta.

Corolario 4.13

Si $Z^n(D)$ y $H^n(D)$ son R-módulos proyectivos para todo entero n, entonces

$$\Pi: \{H(C) \otimes H(D)\} \longrightarrow H^n(C \otimes D)$$

es un isomorfismo para todo entero n

Demostración

Como H (D) es proyectivo, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\ \delta^n \xrightarrow{\alpha} \ker\ \delta^{n+1} \xrightarrow{\beta} \frac{\ker\ \delta^{n+1}}{\mathrm{Im}\ \delta^n} \longrightarrow 0$$

Se descompone, aquí α es la inclusión y β es la proyección natural, por (C1.14), esto implica que Im δ^n es isomorfo a un sumando directo de $Z^n(D)$, puesto que $Z^n(D)$ es proyectivo se dedu ce de (P3.q) que $Z^n(D)$ y $B^n(D)$ son R-módulos planos por consiguiente podemos aplicar (T4.12) a este caso

$$0 \longrightarrow \{H(C)\otimes H(D)\}^n \xrightarrow{\Pi} H^n(C\otimes D) \xrightarrow{\epsilon} \{Tor[H(C),H(D)]\}^{n+1} \longrightarrow 0$$

y como $H^n(D)$ es proyectivo para todo n

$$Tor[H^p(C),H^q(D)] \simeq Tor[H^q(C), H^p(D)] = 0$$

para todo par de enteros p y q

y asi $\{Tor[H(C), H(D)]\}^{n+1} = 0$

para todo entero n, por tanto la exactitud de la sucesión anterior implica que Π es isomorfismo.

Teorema 4.14

(Fórmula de Kunneth)

Si C y D son sucesiones ascendentes de módulos libres sobre un dominio R de ideales principales, entonces existe un homomorfismo

$$\Theta: H^n(C\otimes D) \longrightarrow \{Tor[H(C),H(D)]\}^{n+1}$$

para todo entero n tal que

$$0 \longrightarrow \{H(C)\otimes H(D)\}^n \xrightarrow{\Pi} H^n(C\otimes D) \xrightarrow{\epsilon} \{Tor[H(C),H(D)]\}^{n+1} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible y por consiguiente, tenemos que

$$H^n(C\otimes D) \simeq \{H(C) \otimes H(D)\}^n \oplus \{Tor[H(C),H(D)]\}^{n+1}$$

Demostración

Por ser submódulos de un módulo libre D^n sobre un dominio

R de ideales principales, los módulos $Z^n(D) = \ker \delta^{n+1}$ y $B_n(D) = \mathrm{Im}\ \delta^n$ son libres y por tanto planos, podemos aplicar (T3.12) a este caso y obtener el homomorfismo Θ, asi como la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\}^n \xrightarrow{\Pi} H^n(C \otimes D) \xrightarrow{\Theta} \{\mathrm{Tor}[H(C),H(D)]\}^{n+1} \longrightarrow$$

para todo entero n, queda por probar que esta sucesión exacta corta se descompone para ello, consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ker \delta^{n+1} \xrightarrow{\alpha_n} C^n \xrightarrow{\beta_n} \mathrm{Im}\ \delta^{n+1} \longrightarrow 0$$

donde α_n denota el homomorfismo inclusión y β_n está definido $^{n+1}$: $C^n \longrightarrow C^{n+1}$.

Por ser submódulo de un módulo libre C^{n+1} sobre un dominio de ideales principales R, la $\mathrm{Im}\ \delta^{n+1}$ es libre y por tanto proyectivo, por (T2.22) se deduce que se descompone. De acuerdo con (C1.17ii) esto implica que el homomorfismo α tiene un inverso por la izquierda, esto es, un homomorfismo

$$\gamma^n: C^n \longrightarrow \ker \delta^{n+1}$$

tal que

$$\gamma^n \circ \alpha_n = 1\ker \delta^{n+1}$$

Sea
$$\xi^n: \ker \delta^{n+1} \longrightarrow \frac{\ker \delta^{n+1}}{\mathrm{Im}\ \delta^n}$$

la proyección natural. Entonces obtenemos un homomorfismo

$$C^n \xrightarrow{\gamma^n} \ker \delta^{n+1} \xrightarrow{\delta^n} \frac{\ker \delta^{n+1}}{\mathrm{Im}\ \delta^n}$$

obtenemos $\phi_n = \delta^n \circ \delta^n$: $C^n \longrightarrow \dfrac{\ker \delta^{n+1}}{\mathrm{Im}\ \delta^n}$

Si restringimos ϕ_n: $\ker \delta^{n+1} \longrightarrow \dfrac{\ker \delta^{n+1}}{\mathrm{Im}\ \delta^n}$

obtenido de

$$\ker \delta^{n+1} \xrightarrow{\alpha_n} \ker \delta^{n+1} \xrightarrow{\phi_n} \frac{\ker \delta^{n+1}}{\mathrm{Im}\ \delta^n}$$

$$\phi_n/\ker \delta^{n+1} = \phi_n \circ \alpha_n = \delta^n \circ \gamma^n \circ \gamma^n \circ \alpha_n = \delta^n$$

análogamente, existe un homomorfismo

$$\psi_n\colon D^n \longrightarrow H^n(D)$$

tal que $\psi_n/Z_n(D)$ es la proyección natural de $Z^n(D)$ sobre $H^n(D)$.

Para enteros arbitrarios p y q consideremos el producto tensorial

$$\phi_p \otimes \psi_q\colon C^p \otimes D^q \longrightarrow H^p(C) \otimes H^q(D)$$

Estos homomorfismos constituyen una transformación de cadenas

$$\phi \otimes \psi\colon C \otimes D \longrightarrow H(C) \otimes H(D)$$

de las sucesiones ascendentes $C \otimes D$ y $H(C) \otimes H(D)$ por que claramente se anula sobre los cobordes de $C \otimes D$. Por tanto $\phi \otimes \psi$ induce un homomorfismo

$$(\phi \otimes \psi)_*\colon H^n(C \otimes D) \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\}^n$$

para todo entero n.

Como $\phi_p/Z\ (C)$ y $\psi_q/Z\ (D)$ son las proyecciones naturales, se verifica fácilmente que $(\phi \otimes \psi)_*$ es inverso por la izquierda de Π. Por (T2.22) esto implica que la sucesión exacta corta de (T4.14) se descompone.

Lema 4.15

Si C y D son sucesiones ascendentes de módulos sobre un dominio R de ideales principales, entonces la sucesión ascendente $C \otimes D$ es exacta con tal que se satisfagan las dos condiciones siguientes

a) Para todo entero, D^n es un R-módulo libre

b) O bien C o bien D es exacta

Demostración

Aplicando (T4.14) obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \{H(C)\otimes H(D)\}^n \xrightarrow{\Pi} H^n(C\otimes D) \xrightarrow{\Theta} \{Tor[H(C),H(D)]\}^{n+1} \longrightarrow 0$$

para todo entero n, como $C \circ D$ es exacta, debemos tener

$$\{H(C) \otimes H(D)\}^n = 0, \ \{Tor[H(C),H(D)]\}^n = 0$$

para todo entero n. En consecuencia tenemos

$$H^n(C \otimes D) = 0$$

para todo entero n. Esto implica que la sucesión ascendente $C \otimes D$ es exacta.

Teorema 4.16

Si C y D son sucesiones ascendente de módulos sobre un dominio R de ideales principales, tales que la sucesión ascendente Tor(C,D) es exacta, entonces existe un homomorfismo.

$$\Theta: H^n(C \otimes D) \longrightarrow \{Tor[H(C),H(D)]\}^{n+1}$$

para todo entero n tal que

$$0 \longrightarrow \{H(C)\otimes H(D)\}^n \xrightarrow{\Pi} H^n(C\otimes D) \xrightarrow{\Theta} \{Tor[H(C),H(D)]\}^{n+1} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible y por lo tanto, tenemos

$$H^n(C \otimes D) \simeq \{H(C) \otimes H(D)\}^n \oplus \{Tor[H(C), H(D)]\}^{n+1}$$

para todo entero n.

Demostración

En virtud de (L3.36) existen aproximaciones libre

$$f: C' \longrightarrow C \quad , \; g: D' \longrightarrow D$$

de las sucesiones ascendentes dadas C y D, respectivamente. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow D'' \xrightarrow{j} D' \xrightarrow{g} D \longrightarrow 0$$

de la aproximación libre $g: D' \longrightarrow D$, donde j representa la inclusión. Como D'_n es libre y por tanto proyectivo para todo entero n, tenemos

$$Tor(C,D') = 0$$

por consiguiente se deduce de (T3.16) que

$$0 \longrightarrow Tor(C,D) \xrightarrow{\delta *} C \otimes D'' \xrightarrow{i\otimes j} C \otimes D' \xrightarrow{i\otimes g} C \otimes D \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de sucesiones ascendentes donde i representa la transformación de cadenas identidad de la sucesión ascendente.

Por nuestra hipótesis, Tor (C,D) es exacta; por otra parte, como D" es libre y exacta en virtud de (L3.32) y (L4.15) se sigue que C ⊠ D" es también exacta, esto implica que el homomorfismo inducido en cohomología

$$(i \otimes g)_*: H^n(C \otimes D') \longrightarrow H^n(C \otimes D)$$

es un isomorfismo para todo entero n.

Consideremos ahora la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C'' \xrightarrow{e} C' \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$$

de la aproximación libre f: C' ⟶ C, donde e representa la inclusión.

Como el módulo D'_n es libre y por ello proyectivo para todo entero n, determina una sucesión exacta corta.

$$0 \longrightarrow C'' \otimes D' \xrightarrow{e\otimes i} C' \otimes D' \xrightarrow{f\otimes i} C \otimes D' \longrightarrow 0$$

en virtud de (P2.27). Aqui i' representa la transformación de cadenas identidad de la sucesión ascendente D' por (L4.7), la sucesión ascendente C" ⊠ D' es exacta. Esto implica que el homomorfismo inducido

$$\alpha_n = (f\otimes i')_*: H^n(C' \otimes D') \longrightarrow H^n(C \otimes D')$$

es isomorfismo para todo entero n.

De acuerdo la condición (AL3) para las aproximaciones libres f: C' ⟶ C y g: D' ⟶ D, los homomorfismos inducido

$$f_{*n}: H^n_n(C') \longrightarrow H^n(C) \quad , \; g_{*n}: H^n(D') \longrightarrow H^n(D)$$

son isomorfismos para todo entero n. Luego los homomorfismos

$$\beta_n = \sum_{p+q=n} f*p \otimes g*q : \{H(C'0 \otimes H(D'))\}^n \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\}^n$$

$$\gamma_n = \sum_{p+q=n} \mathrm{Tor}(f*p, g*q) : \{\mathrm{Tor}[H(C'),H(D')]\}^n \longrightarrow \{\mathrm{Tor}[H(C),H(D)]\}^n$$

es isomorfismo para todo entero n .

Puesto que C'_n y D'_n son R-módulos libres. Podemos aplicar (T4.14) a las sucesiones ascendentes C' y D' para obtener Una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \{H(C')\otimes H(D')\}^n \xrightarrow{\Pi'} H^n(C'\otimes D') \xrightarrow{\Theta'} \{\mathrm{Tor}[H(C'),H(D')]^{n+1} \longrightarrow 0,$$

descomponible. Definamos un homomorfismo

$$\Theta: H^n(C\otimes D) \longrightarrow \{\mathrm{Tor}[H(C),H(D)]\}^{n+1}$$

para todo entero n tomando

$$\Theta = \gamma_{n-1} \circ \Theta' \circ \alpha_n^{-1}$$

queda por establecer que

$$0 \longrightarrow \{H(C)\otimes H(D)\}^n \xrightarrow{\Pi'} H\ (C\otimes D) \xrightarrow{\Theta'} \{\mathrm{Tor}[H(C),H(D)]\}^{n+1} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible.

Para ello, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \{H(C') \otimes H(D')\}^n & \xrightarrow{\Pi'} & H^n(C' \otimes D') & \xrightarrow{\Theta'} & \{\mathrm{Tor}[H(C'),H(D')]\}^{n+1} \\
& \downarrow \varrho_n & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \gamma_{n+1} \\
0 \longrightarrow & \{H(C) \otimes H(D)\}^n & \xrightarrow{\Pi} & H^n(C \otimes D) & \xrightarrow{\Theta} & \{\mathrm{Tor}[H(C),H(D)]\}^{n+1}
\end{array}$$

por definición de Π Π' dada al principio de esta sección el rectángulo de la izquierda es conmutativo. La definición de Θ dada antes implica que el rectángulo de la derecha es conmutativo. Puesto que los homomorfismos verticales son isomorfismos y la fila superior es una sucesión exacta corta descomponible, se puede probar.

Similarmente a (T3.33) que la fila inferior es exacta.

Observación final

Para el caso particular en que

$$D_n = \begin{cases} G, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

entonces la fórmula de Kunnel es una generalización de el Teorema de Coeficiente Universal para homología y cohomología.

BIBLIOGRAFIA

1. INTRODUCCION AL ALGEBRA HOMOLOGICA
SZE - TSEN HU,
ED. VICENS - VIVES

2. INTRODUCCION A LA TOPOLOGIA ALGEBRAICA
WILLIAM S. MASSEY
ED. REVERTÉ, S.A., BARCELONA, 1972

3. LA SUCESION DE MAYER - VIETORIS
JOSÉ HENRY GARCÍA
JOSÉ FREDY VÁSQUEZ VÁSQUEZ
TRABAJO DE GRADUACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
MAYO DE 1990.