Universidad de El Salvador
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Matemática

LA SUCESION DE MAYER-VIETORIS

Trabajo de Graduación

PRESENTADO POR:

José Henry García
Josè Fredy Vàsquez Vásquez

PARA OPTAR AL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

MAYO DE 1990

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR : LIC. JOSE LUIS ARGUETA ANTILLON

SECRETARIO GENERAL : ING. RENE MAURICIO MEJIA MENDEZ

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO : ING. JOAQUIN ALBERTO VANEGAS AGUILAR

SECRETARIO : ING. MARIO ARNOLDO MOLINA ARGUETA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JEFE DEL DEPARTAMENTO: LIC. ROLANDO LEMUS GOMEZ

TRABAJO DE GRADUACION

COORDINADOR: ING. JOSE FRANCISCO MARROQUIN

ASESOR : ING. JOSE FRANCISCO MARROQUIN

I N T R O D U C C I O N

Este trabajo está organizado de tal manera que inicialmente se fundamenta al lector, con los conceptos básicos de algebra homológica, los cuales se han considerado necesarios para encaminarnos a la prueba de la exactitud de la sucesión de Mayer Vietoris, que viene a ser la parte medular de este texto.

Prácticamente para llegar a establecer la prueba de la exactitud de la sucesión de Mayer-Vietoris, hemos utilizado como herramientas las sucesiones exactas cortas de complejos de cadenas; definiendo en ellas el concepto de grupo de homología.

Posteriormente definimos un homomorfismo, llamado el homomorfismo conexión con el cual unimos los complejos de cadenas obteniendo así una sucesión exacta larga de grupos de homología.

En seguida se trata la teoría de homología singular en base a cubos singulares, estableciendo en dichos cubos los aperadores caras y algunas de sus propiedades; las cuales dan la base para definir el operador frontera, asimismo se define el homomorfismo inducido a través de una función continua entre espacios topológicos dando algunas de sus propiedades homotópicas. Continuamos, dando la definición de grupos relativos de homología, lo que da pié a construir la sucesión exacta de homología del par, la cual es de mucha importancia al igual que el operador sub-división para la prueba del teorema de esei-sión.

Se aplicará esta teoría para el cálculo de grupos de homología de la esfera n-dimensional y de algunos espacios contráctil. Posteriormente se dá la prueba de la exactitud de la sucesión de Mayer-Vietoris.

Finalizando esta obra con lo que consideramos de mucha importancia:

"La relación entre el grupo fundamental y el primer grupo de homología".

Se considera que el lector debe tener a la mano los conceptos básicos de topología de los cuales hacemos uso en el desarrollo de esta obra.

Esperamos que nuestro trabajo sea útil a los lectores que se inician en el estudio de la topología algebraica, que es una rama, muy interesante de las matemáticas.

I N D I C E

Página Nº.

CAPITULO III

C A P I T U L O   I

"CONCEPTOS INTRODUCTORIOS"

1.1 ALGEBRA

En la presente sección daremos los conceptos algebraicos elementales de grupos, morfismos de grupos, suma directa y algunos conceptos elementales de álgebra Homológica, con el objeto de crear las bases algebraicas para el estudio de los capítulos posteriores.

DEFINICION 1-1

Sea G un conjunto y $*$ una operación binaria interna en G, es decir $*: G \times G \longrightarrow G$, se dice que $(G,*)$ es un grupo si cumple:

G_1: (Asociatividad) para todo a,b,c de G
$(a * b) * c = a * (b * c)$.

G_2: (existencia de lemento identidad) existe $e \in G$, tal que para todo a de G, se tiene $a * e = e * a = a$

G_3: (existencia de elemento inverso) para todo a de G, existe a^{-1} de G, tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, ($a^{-1}$ es el elemento inverso de a).

Se dice que el grupo $(G,*)$ es conmutativo o abeliano si verifica además el siguiente axioma.

G_4: (conmutatividad) para todo a,b de G $a * b = b * a$.

A lo largo del texto generalmente trabajaremos con grupos abelianos.

DEFINICION 1-2

Sean $(G,*)$, (K,ψ) dos grupos y $f: G \longrightarrow K$ una función entre sus conjuntos sub-yacentes f es un homomorfismo si cumple: $f(g_1 * g_2) = f(g_1)\psi f(g_2)$; para todo g_1, g_2 de G.

DEFINICION 1-3

Sea $S \neq \phi$, por grupo libre sobre el conjunto S entenderemos un grupo F y una función $f: S \longrightarrow F$, que gosa de la siguiente propiedad universal. Dado un grupo G y una función $g: S \longrightarrow G$, existe un único homomorfismo $h: F \longrightarrow G$ tal que $h \circ f = g$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & F \arrow[d, dotted] \\ & G \end{tikzcd} \qquad h \circ f = g$$

Fig. 1-1

Además se puede probar que el grupo libre sobre el conjunto S es único, salvo isomorfismos.

Una propiedad importante del grupo libre es el:

TEOREMA 1-1

Todo sub-grupo de un grupo libre es libre.

DEFINICION 1-4

Se dice que el grupo G es la suma directa de la familia $F = \{G_i : i = 1,2,\ldots, n\}$ de sub-grupos de G si se cumple:

1- $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$

2- $G_i \cap G_j = \{0\}$; $\forall i \neq j$, escribiremos en este caso $G = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} G_i$.

TEOREMA 1-2

Sea G un grupo y $F = \{G_i : i=1,2,\ldots, n\}$ una familia de sub-grupos de G.

$G = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} G_i$ si y sólo si todo elemento de G tiene una representación única como suma de elementos g_i de G_i.

De igual manera podemos definir la suma directa de una familia arbitraria de grupos.

DEFINICION 1-5

Se dice que el grupo G es la Suma directa de la famila $F = \{G_i : i \in I\}$ de sub-grupos de G si se cumple:

1- $G = \sum_{i\in I} + G_i$

2- $G_i \cap G_j = \{0\}$, para todo $i \neq j$, escribimos en este caso

$$G = \bigoplus_{i\in I} G_i$$

TEOREMA 1-3

La suma directa de una familia arbitraria de grupos libres es libre.

1-1 SUCESIONES EXACTAS

DEFINICION 1-6

Decimos que la Sucesión de grupos y homomorfismos $\ldots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \longrightarrow \ldots$ $n \in \mathbb{Z}$; es exacta en G_n, si $\operatorname{Ker} f_n = \operatorname{Im} f_{n+1}$. Es exacta si es exacta en G_n, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Una sucesión exacta corta (s.e.c.) es una sucesión de la forma:

$0 \longrightarrow G \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} H \longrightarrow 0$ en donde se cumple que:

1- f es inyectiva

2- Im f = Ker g

3- g es sobreyectiva

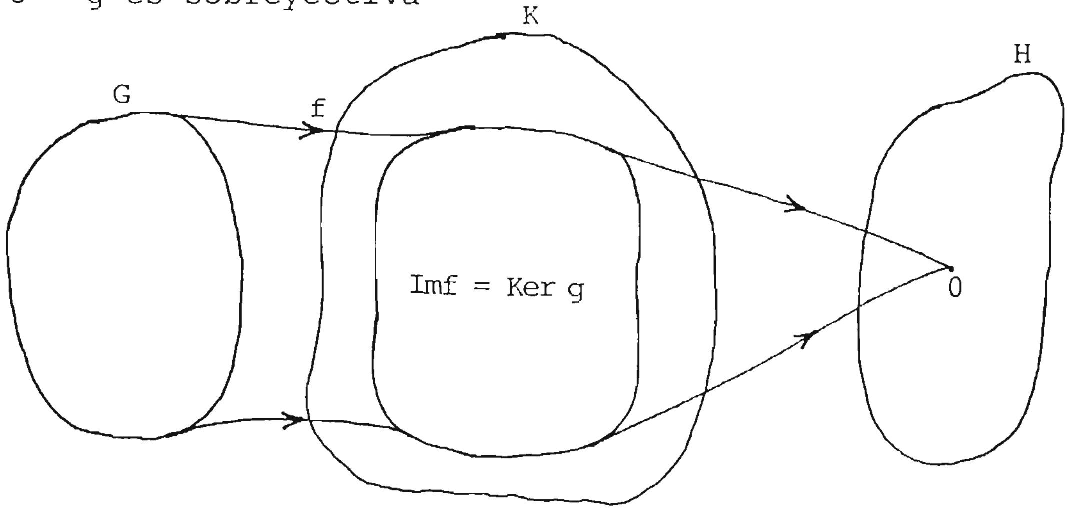


Fig. 1-2

DEFINICION 1-7

Se dice que el sub-grupo F es un sumando directo del grupo E si existe un sub-grupo K de E tales que $E = F \oplus K$.

DEFINICION 1-8

Una sucesión exacta $\ldots \longrightarrow G \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} H \longrightarrow \ldots$; de homomorfismos de grupos, se escinde en el grupo E si y sólo si el sub-grupo F = Im f = Ker g del grupo E es un sumando directo de E.

Una consecuencia inmediata de las definiciones 1-7 y

1-8 es la siguiente:

PROPOSICION 1-1

Para cada sucesión exacta corta

$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ las condiciones que siguen son equivalentes.

a) La sucesión exacta corta se escinde

b) f es inversible a la izquierda

c) g es inversible por la derecha.

Pa

a => b Supongamos que la sucesión exacta corta se escinde. Sea $F = \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$, por las definiciones 1-7 y 1-8 $B = F \oplus T$.

Se quiere probar que existe $h: B \longrightarrow A$ tal que $h \circ f = 1_A$; para ello definamos

$h: B = \operatorname{Im} f \oplus T \longrightarrow A$; para el cual se probará

$$f(y) + t \rightsquigarrow y$$

1- h está bien definida

2- h es homomorfismo

3- $h \circ f = 1_A$

1) Sean $f(y_1) + z_1,\ f(y_2) + z_2 \in \operatorname{Im} f \oplus T$

$$f(y_1) + z_1 = f(y_2) + z_2 \Rightarrow f(y_1) = f(y_2) \quad y \quad z_1 = z_2$$

$$\Rightarrow y_1 = y_2$$

$$\Rightarrow h(f(y_1) + z_1) = h(f(y_2) + z_2) //$$

2) $h\left[(f(y_1)+z_1)+(f(y_2)+z_2)\right] = h\left[f(y_1+y_2)+(z_1+z_2)\right]$

$= y_1 + y_2$

$= h(f(y_1)+z_1) + h(f(y_2)+z_2)$ //

3) Sea $x \varepsilon A$

$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(f(x)+0) = x = 1_A(x)$ //

$a \Rightarrow c$ Se probará que existe $\psi: C \longrightarrow B$ tal que $g \circ \psi = 1_C$ para definir ψ tomaremos encuenta el siguiente argumento.

Sea $x \varepsilon C$

$x \varepsilon C \Rightarrow \psi(x) = \psi(g(y))$; $y \varepsilon B$; g sobreyectiva,

$= \psi(g(f(y_1) + z_1))$

$= \psi\left[(g \circ f)(y_1) + g(z_1)\right]$

$= \psi(0 + g(z_1))$

$= z_1$, i.e.

$\psi: C \longrightarrow B$
$\quad x \rightsquigarrow \psi(x) = z,\ z \varepsilon B.$

Se probará: 1) ψ está bien definida

2) ψ es morfismo

3) $g \circ \psi = 1_C$

1) Sean $x_1, x_2 \varepsilon C$

$x_1 = x_2 \Rightarrow g(m) = g(n)$; $m, n \varepsilon B$

$\Rightarrow g(f(y_1)+z_1) = g(f(y_2)+z_2)$

$\Rightarrow g(f(y_1)) + g(z_1) = g(f(y_2)) + g(z_2)$

$\Rightarrow g(z_1) = g(z_2)$

$\Rightarrow g(z_1 - z_2) = 0$

$$\Rightarrow (z_1 - z_2) \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$$

$$\Rightarrow z_1 + \operatorname{Im} f = z_2 + \operatorname{Im} f$$

$$\Rightarrow z_1 = z_2$$

$$\Rightarrow \psi(g(z_1)) = \psi(g(z_2))$$

$$\Rightarrow \psi(g(f(y_1) + z_1) = \psi(g(f(y_2)) + z_2)$$

$$\Rightarrow \psi(g(m)) = \psi(g(n))$$

$$\Rightarrow \psi(x_1) = \psi(x_2) \quad /\!/$$

2) $\psi(x+y) = \psi(g(m) + g(n));\ m,n \in B$

$$= \psi(g(f(y_1) + z_1) + g(f(y_2) + z_2))$$

$$= \psi(g(z_1) + g(z_2))$$

$$= z_1 + z_2$$

$$= \psi(g(z_1)) + \psi(g(z_2))$$

$$= \psi(g(f(y_1) + z_1)) + \psi(g(f(y_2) + z_2))$$

$$= \psi(g(m)) + \psi(g(n))$$

$$= \psi(x) + \psi(y) \quad /\!/$$

3) Sea $x \in C$; $x = g(y)$; $y \in B$

$$(g \circ \psi)(x) = g(\psi(x))$$

$$= g(\psi(g(y)))$$

$$= (g \circ \psi)(g(f(y_1) + z_1))$$

$$= (g \circ \psi)(g(z_1))$$

$$= g(\psi(g(z_1)))$$

$$= g(z_1)$$

$$= g(f(y_1) + z_1)$$

$$= g(y)$$

$$= x$$

$$= 1_{C(x)} \quad /$$

b $\Rightarrow$ a Probaremos que la sucesión

$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ se escinde i.e. $B = \operatorname{Im} f \oplus T$, donde T es un sub-grupo de B. Dado que f posee inversa por la izquierda se tiene que existe $h: B \longrightarrow A$ tales que $h \circ f = 1_A$; tomando $T = \operatorname{Ker} h$ se probará

$B = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} h$ o bien:

1) $B = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} h$

2) $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} h = \{0\}$

1) Sea $Y \in B$ y $h(y) = x$, $x \in A$ así:

$Y = y + f(x) - f(x)$

$Y = f(x) + [y - f(x)]$

$Y = f(x) + t$; $t = y - f(x)$; $t \in \operatorname{Ker} h$ //

así $B = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} h$

2) Sea $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} h$

$$
\begin{aligned}
x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} h &\Rightarrow x \in \operatorname{Im} f \text{ y } x \in \operatorname{Ker} h \\
&\Rightarrow x = f(y) \text{ y } h(x) = 0;\ y \in A \\
&\Rightarrow h(f(y)) = 0 \\
&\Rightarrow (h \circ f)(y) = 0 \\
&\Rightarrow 1_A(y) = 0 \\
&\Rightarrow y = 0 \\
&\Rightarrow f(y) = 0 \\
&\Rightarrow x = 0 \quad //
\end{aligned}
$$

c $\Rightarrow$ a (similar b $\Rightarrow$ a).

La sucesión de grupos y homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \quad n \in \mathbb{Z};$$ es semi-exacta si y sólo si la imagen de todo homomorfismo de llegada está contenido en el núcleo del correspondiente homomorfismo de salida.

OBSERVACION 1-1

1- Si la composición de dos homomorfismos consecutivos en una sucesión es el homomorfismo "cero", entonces la sucesión es semi-exacta.

2- Toda sucesión exacta es semi-exacta, pero no toda semi-exacta es exacta.

Como lo muestra el siguiente ejemplo

EJEMPLO 1-1

Sea G_1 un sub-grupo normal propio del grupo G y sea $i: G_1 \longrightarrow G$ el homomorfismo inclusión, entonces la sucesión.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & G_1 \arrow[r, "i"] & G \arrow[r] \arrow[dr, "p"] & 0 & \text{semi - exacta} \\ & & & G/G_1 \arrow[r] & 0 \quad \text{exacta} \end{tikzcd}$$

DEFINICION 1-9

En una sucesión semi-exacta

$C: \ldots \longrightarrow G \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} H \longrightarrow \ldots$; de grupos, se llama grupo derivado de C en K el grupo cociente Ker g/Im f.

A partir de la definición 1-9, tenemos la siguiente:

PROPOSICION 1-2

Una sucesión semi-exacta de homomorfismos de grupos es exacta si y sólo si todos sus grupos derivados son el grupo trivial i.e. $\{0\}$.

Pa

"=>" Dada la sucesión $C: \ldots \longrightarrow H \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} M \longrightarrow \ldots$ exacta, debido a la exactitud, tenemos Im f = Ker g; de donde el grupo derivado en el nivel K es Ker g/Im f = $\{0\}$, así los grupos derivados de C en cualquier nivel son los triviales.

"<=" Probaremos en este caso que C es exacta i.e. Im f = Ker g. Por hipótesis general se tiene que C es semi-exacta i.e. Im f $\subset$ Ker g, bastará probar que Ker g $\subset$ Im f.

Por otra parte Ker g/Im f = $\{0\}$.

Sea $x \in$ Ker g

$x \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow x + \operatorname{Im} f \in \operatorname{Ker} g/\operatorname{Im} f$

$\Rightarrow x + \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow x \in \operatorname{Im} f$ /

así $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im} f$

$\therefore \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$

COMENTARIO 1-1

Los índices usados en cualquier sucesión semi-exacta G serán decrecientes y llamaremos a G un complejo de cadena y los homomorfismos de G se denotaran con la letra ∂, por esto un complejo de cadena tiene la forma siguiente:

$$G: \ldots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} G_n \xrightarrow{\partial_n} G_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \text{ con}$$

$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0; \ \forall n \in \mathbb{Z}$

En este caso los elementos de G_n, se llaman n-cadenas o cadenas n-dimencionales y los homomorfismos se llaman operadores de frontera al $\operatorname{Ker} \partial_n$ se le denota por $Z_n(G)$ y se llama el grupo de los n-ciclos, al grupo $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq G_n$, se le denota por $B_n(G)$ y se le llama el grupo de las n-fronteras y finalmente el grupo derivado de G en el grupo G_n, se le denota por $H_n(G)$ y se define como:

$H_n(G) = \dfrac{Z_n(G)}{B_n(G)} = \dfrac{\operatorname{Ker} \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$; el cual es tambien llamado el n-ésimo grupo de homología del complejo G.

1-2 TRANSFORMACIONES DE CADENA

DEFINICION 1-10

Dados los complejos de cadena G,D se llaman transformaciones de cadena u homomorfismo de complejos de cadena a toda familia $F = \{G_n \xrightarrow{f_n} D_n \ / \ n \in \mathbb{Z}\}$ de homomorfismos de grupos de manera que para todo $n \in \mathbb{Z}$ el diagrama siguiente sea conmutativo i.e. $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{lcccccccl}
G: \cdots & \longrightarrow & G_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & G_n & \xrightarrow{\partial_n} & G_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\
D: \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Diagrama 1-1

$f_{n-1} \circ \partial_n = \partial'_n \circ f_n$.

Antes de continuar con el estudio de los complejos de cadena daremos a conocer mediante un ejemplo la técnica a utilizar en las transformaciones de cadena, la cual es llamada el rastreo de diagramas.

EJEMPLO 1-2

Si en el siguiente diagrama conmutativo de grupos las tres filas son exactas y las dos primeras columnas tambien son exactas, entonces la tercera columna es exacta.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[dd, "\alpha_1"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[dd, "\beta_1"] & C_1 \arrow[r] \arrow[dd, "h_1"] & 0 \\
 & a_1 \arrow[r, squiggly] & f_1(a_1)=b_1 & x=g_1(b_1) \arrow[l, squiggly] & \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[dd, "\alpha_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[dd, "\beta_2"] & C_2 \arrow[r] \arrow[dd, "h_2"] & 0 \\
 & \alpha_1(a_1)=a_2 & f_2(a_2)=\beta_1(b_1) \arrow[l, squiggly] & & \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[dd] & B_3 \arrow[r, "g_3"] \arrow[dd] & C_3 \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
 & 0=\alpha_2(a_2) \arrow[r, squiggly] & f_3(\alpha_2(a_2))=0 & & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Diagrama 1-2

Se probará que:

1 - h_1 es inyectiva

2- h_2 es sobreyectiva

3- $\mathrm{Im}\ h_1 = \mathrm{Ker}\ h_2$

1) Probaremos que $\mathrm{Ker}\ h_1 = \{0\}$.

Sea $x \in C_1$, tales que $h_1(x) = 0$; como g_1 es sobreyectiva existe $b_1 \in B_1$ / $g_1(b_1) = x$; por conmutatividad del diagrama

$g_2(\beta_1(b_1) = h_1(g_1(b_1)) = h_1(x) = 0$ de donde

$\beta_1(b_1) \in \text{Ker } g_2 = \text{Im } f_2$; para el cual existe $a_2 \in A_2$ tales que

$f_2(a_2) = \beta_1(b_1)$ $*$.

Por la conmutatividad del diagrama se tiene

$$
\begin{aligned}
f_3(\alpha_2(a_2)) &= \beta_2(f_2(a_2)) \\
&= \beta_2(\beta_1(b_1)); \quad \text{por } * \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por otra parte f_3 es inyectiva y por el resultado anterior $\alpha_2(a_2) = 0$, por tanto

$a_2 \in \text{Ker } \alpha_2 = \text{Im } \alpha_1$; para el cual existe $a_1 \in A_1$ tales que

$\alpha_1(a_1) = a_2$ $**$ y por la conmutatividad del diagrama se tiene $\beta_1(f_1(a_1)) = f_2(\alpha_1(a_1))$

$$
\begin{aligned}
&= f_2(a_2); \quad \text{por } ** \\
&= \beta_1(b_1); \quad \text{por } * \;;
\end{aligned}
$$

dada la inyectividad de β_1, se tiene $f_1(a_1) = b_1$ y retomando el hecho de que $x = g_1(b_1)$ se logra

$x = g_1(b_1) = g_1(f_1(a_1)) = 0$ //

Así h_1 es inyectiva.

2)

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "\beta_1"'] & {} \arrow[d, "h_1"'] & \\
{} \arrow[r, "f_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\beta_2"'] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"'] & 0 \\
{} \arrow[r, "f_3"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

$b_2 \rightsquigarrow g_2(b_2) = Y \in C_2$

$b_3 = \beta_2(b_2) \leftsquigarrow x = g_3(b_3)$

Diagrama 1-3

probaremos que para cualquier $x \in C_3$, existe $y \in C_2$ tales que $h_2(y) = x$.

Sea $x \in C_3$, como g_3 es sobreyectiva, existe $b_3 \in B_3$ tales que $g_3(b_3) = x$; por otra parte β_2 es sobreyectiva, existe $b_2 \in B_2$ con $\beta_2(b_2) = b_3$, por conmutatividad del diagrama se tiene:

$h_2(g_2(b_2)) = g_3(\beta_2(b_2)) = g_3(b_3) = x$, tomando

$y = g_2(b_2) \in C_2$, se tiene $h_2(y) = x$ //

Así h_2 es sobreyectiva.

3)

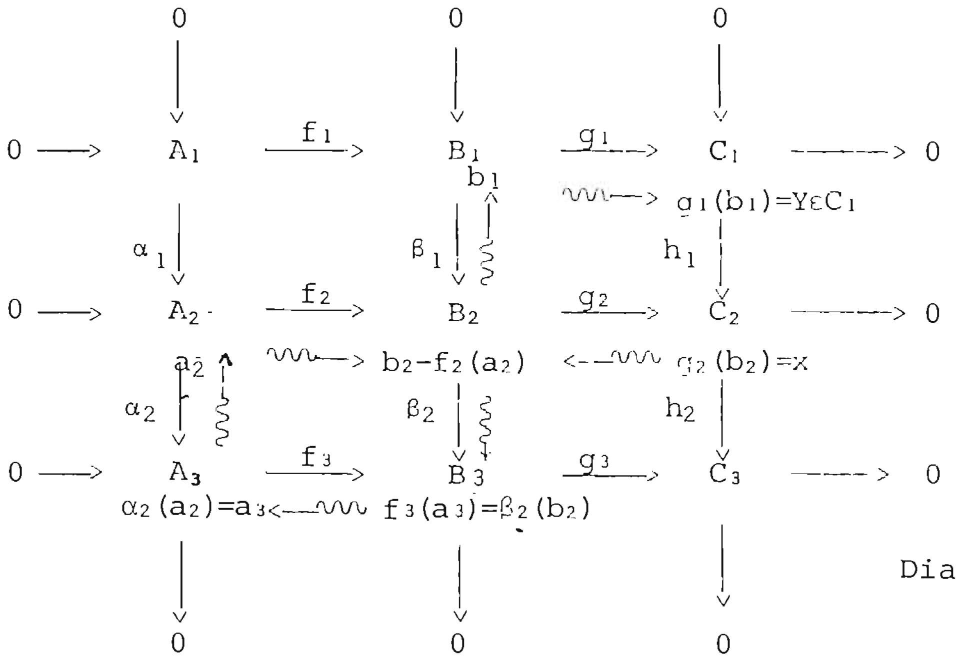


Diagrama 1-4

"C" osea $\mathrm{Ker}(h_2) \subset \mathrm{Im}\, h_1$.

Sea $x \in \mathrm{Ker}\, h_2$; se tratará de buscar un $y \in C_1$ tales que $h_1(y) = x$.

Como Ker $h_2 \subset C_2$ y g_2 es sobreyectiva, existe $b_2 \in B_2$ tales que $g_2(b_2) = x$; por conmutatividad del diagrama se tiene: $g_3(\beta_2(b_2)) = h_2(g_2(b_2)) = h_2(x) = 0$; $x \in \text{Ker } h_2$ por lo tanto $\beta_2(b_2) \in \text{Ker } g_3 = \text{Im } f_3$ i.e existe $a_3 \in A_3$ tales que $f_3(a_3) = \beta_2(b_2)$ y por sobreyectividad de α_2, a de existir $a_2 \in A_2$ tales que $\alpha_2(a_2) = a_3$; de nuevo por conmutatividad del diagrama se obtiene:

$\beta_2(f_2(a_2)) = f_3(\alpha_2(a_2)) = f_3(a_3) = \beta_2(b_2)$ así

$\beta_2(b_2) - \beta_2(f_2(a_2)) = 0$ ó

$\beta_2(b_2 - f_2(a_2)) = 0$; de donde;

$b_2 - f_2(a_2) \in \text{Ker } \beta_2 = \text{Im } \beta_1$; para el cual existe $b_1 \in B_1$ tales que $\beta_1(b_1) = b_2 - f_2(a_2)$ y por conmutatividad del diagrama se obtiene:

$$\begin{aligned} h_1(g_1(b_1)) &= g_2(\beta_1(b_1)) \\ &= g_2(b_2 - f_2(a_2)) \\ &= g_2(b_2) - g_2(f_2(a_2)) \\ &= g_2(b_2) \\ &= x \text{ ; tomando } y = g_1(b_1) \in C_1, \end{aligned}$$

$h_1(y) = x$, así $x \in \text{Im } h_1$. $\therefore$ $\text{Ker } h_2 \subset \text{Im } h_1$

"$\supset$" o sea $\text{Im } h_1 \subset \text{Ker } h_2$.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
{} \arrow[r, "f_1"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] & C_1 \arrow[r] & 0 \\
 & b_1 \arrow[d, "\beta_1"'] & c_1=g_1(b_1) \arrow[l, squiggly] \arrow[d, "h_1"'] & \\
{} \arrow[r, "f_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\beta_2"'] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"'] \arrow[u, squiggly, bend right] & 0 \\
 & {} & y=h_1(c_1) &
\end{tikzcd}
$$

DIAGRAMA 1-5

Sea $y \varepsilon \text{Im } h_1$; se tratará de probar que $h_2(y) = 0$.

$y \varepsilon \text{Im } h_1 \Rightarrow \exists\ C_1 \ \varepsilon\ C_1 \ / \ h_1(C_1) = Y$; por la sobreyectividad de g_1, se tiene que existe $b_1 \varepsilon B_1$ tales que $g_1(b_1) = C_1$ y como el diagrama es conmutativo se tiene:

$g_2(\beta_1(b_1)) = h_1(g_1(b_1)) = h_1(C_1) = Y$ así

$$
\begin{aligned}
h_2(Y) &= h_2(g_2(\beta_1(b_1))) \\
&= (h_2 \circ g_2)(\beta_1(b_1)) \\
&= (g_3 \circ \beta_2)(\beta_1(b_1)) \\
&= g_3(\beta_2(\beta_1(b_1))) \\
&= g_3(0) \\
&= 0 \ // \quad ; \text{ así } Y \varepsilon \text{Ker } h_2
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $\text{Im } h_1 \subset \text{Ker } h_2$. , lo que finalmente prueba la exactitud en C_2. Luego la sucesión

$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{h_1} C_2 \xrightarrow{h_2} C_3 \longrightarrow 0$ es exacta

1-3 HOMOMORFISMOS INDUCIDOS EN TRANSFORMACIONES DE CADENA

PROPOSICION 1-3

Dada la transformación de cadena $f: G \longrightarrow D$ el homomorfismo $fn: Gn \longrightarrow Dn$, induce un homomorfismo $Hn(f)$ entre los correspondientes grupos de homología $Hn(G)$ y $Hn(D)$ i.e. $Hn(f): Hn(G) \longrightarrow Hn(D)$; el cual es llamado el homomorfismo inducido n-dimencional de f.

pa

Si definimos Hn(f) de la siguiente manera

$$Hn(f): \frac{\mathrm{Ker}\ \partial_n}{\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}} \longrightarrow \frac{\mathrm{Ker}\ \partial'_n}{\mathrm{Im}\ \partial'_{n+1}}$$

$$x + \mathrm{Im}\ \partial_{n+1} \rightsquigarrow Hn(f)(x+\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}) = fn(x) + \mathrm{Im}\ \partial'_{n+1}$$

primero debemos comprobar que está bien definida i.e.:

1) $x \in \mathrm{Ker}\ \partial_n \Longrightarrow fn(x) \in \mathrm{Ker}\ \partial'_n$

2) $x_1 + \mathrm{Im}\ \partial_{n+1} = x_2 + \mathrm{Im}\ \partial_{n+1} \Longrightarrow fn(x_1) + \mathrm{Im}\ \partial'_{n+1} = fn(x_2) + \mathrm{Im}\ \partial'_{n+1}$

1)

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & G_n & \xrightarrow{\partial_n} & G_{n-1} & \longrightarrow \\ & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & \\ \longrightarrow & D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} & \longrightarrow \end{array}$$

DIAGRAMA 1-6

Sea $x \in \mathrm{Ker}\ \partial_n$; por la conmutatividad del diagrama;

$\partial'_n(f_n(x)) = f_{n-1}(\partial_n(x)) = 0$, así $f_n(x) \in \mathrm{Ker}\ \partial'_n$ /

2)

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & G_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & G_n & \longrightarrow \\
 & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & \\
\longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & D_n & \longrightarrow
\end{array}$$

DIAGRAMA 1-7

como $x_1 + \mathrm{Im}\ \partial_{n+1} = x_2 + \mathrm{Im}\ \partial_{n+1} \Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}$

$\Rightarrow \exists Y \in G_{n+1} / \partial_{n+1}(Y) = x_1 - x_2$;

así $f_n(x_1 - x_2) = f_n(\partial_{n+1}(Y))$

$= \partial'_{n+1}(f_{n+1}(Y))$; de donde $f_n(x_1 - x_2) \in \mathrm{Im}\ \partial'_{n+1}$

o $f_n(x_1) + \mathrm{Im}\ \partial'_{n+1} = f_n(x_2) + \mathrm{Im}\ \partial'_{n+1}$ //

Ahora brobaremos que $H_n(f)$ es un homomorfismo

Sean $x_1 + \mathrm{Im}\ \partial_{n+1},\ x_2 + \mathrm{Im}\ \partial_{n+1} \in \dfrac{\mathrm{Ker}\ \partial_n}{\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}}$

$$\begin{aligned}
H_n(f)\left[(x_1 + \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}) + (x_2 + \mathrm{Im}\ \partial_{n+1})\right] &= H_n(f)\left[(x_1+x_2)+\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}\right] \\
&= f_n(x_1+x_2) + \mathrm{Im}\ \partial'_{n+1} \\
&= \left[f_n(x_1)+f_n(x_2)\right]+\mathrm{Im}\ \partial'_{n+1} \\
&= f_n(x_1)+\mathrm{Im}\ \partial'_{n+1} + \\
&\quad f_n(x_2)+\mathrm{Im}\ \partial'_{n+1} \\
&= H_n(f)(x_1+\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}) + \\
&\quad H_n(f)(x_2+\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}) \quad //
\end{aligned}$$

OBSERVACION 1-2

1) Si tenemos la transformación de cadena identidad $i: G \longrightarrow G$ i.e. la familia $\{G_n \xrightarrow{i_n} G_n / n \in \mathbb{Z}\}$. entonces $H_n(i)$ es el homomorfismo identidad en el grupo $H_n(G)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

2) Si $f: G \longrightarrow D$ y $g: D \longrightarrow E$ son dos transformaciones de cadena, entonces la familia $\{G_n \xrightarrow{g_n \circ f_n} E_n / n \in \mathbb{Z}\}$ es una transformación de cadena que denotaremos por $g \circ f: G \longrightarrow E$

$$\begin{tikzcd}
G_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & G_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & G_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"] \arrow[d, "g_n"] & D_{n-1} \arrow[d, "g_{n-1}"] \\
E_{n+1} \arrow[r, "\partial''_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "\partial''_n"] & E_{n-1}
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMA 1 - 8

donde $\partial''_n \circ g_n \circ f_n = g_{n-1} \circ f_{n-1} \circ \partial_n$ i.e. el diagrama del complejo $g \circ f$ es también conmutativo. Además $g_n \circ f_n$ induce un homomorfismo $H_n(g \circ f)$, donde $H_n(g \circ f): \dfrac{\operatorname{Ker} \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}} \longrightarrow \dfrac{\operatorname{Ker} \partial''_n}{\operatorname{Im} \partial''_{n+1}}$, en este caso tenemos que:

$\forall (x + \operatorname{Im} \partial_{n+1}) \in \dfrac{\operatorname{Ker} \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$

$H_n(g \circ f)(x + \operatorname{Im} \partial_{n+1}) = (g_n \circ f_n)(x) + \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$

$$= g_n(f_n(x)) + \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$$

$$= H_n(g)(f_n(x) + \operatorname{Im} \partial'_{n+1})$$

$$= H_n(g)(H_n(f)(x + \operatorname{Im} \partial_{n+1}))$$

$$= (H_n(g) \circ H_n(f))(x + \operatorname{Im} \partial_{n+1})$$

de donde

$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$.

3- Se llama homomorfismo trivial del complejo C en el complejo D, a la transformación de cadena $h: C \longrightarrow D$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$. $h_n: C_n \longrightarrow D_n$; $h_n = 0$, en este caso el homomorfismo $H_n(h)$ es el trivial para todo $n \in \mathbb{Z}$.

DEFINICION 1-11

Sean f,g dos transformaciones de cadena del complejo C en el complejo D, se dice que las transformaciones f y g son homotópicas si existe una familia de homomorfismos $H = \{C_n \xrightarrow{h_n} D_{n+1} / n \in \mathbb{Z}\}$ de manera que:

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{n-1}"] & {} \\
{} \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

FIGURA 1-2

$$h_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ h_n = f_n - g_n$$

en este caso H se llama homotopía de transformaciones de cadena entre f y g y lo denotaremos por $f \overset{H}{\approx} g$

PROPOSICION 1-4

Si dos transformaciones de cadena f y g $f,g: C \longrightarrow D$ son homotópicas entonces $\forall n \in \mathbb{Z}$

$H_n(f) = H_n(g): H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$

pa

Supongase $f \overset{H}{\approx} g$ i.e. $h_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ h_n = f_n - g_n$

Sea $x + \operatorname{Im} \partial_{n+1} \in \frac{\operatorname{Ker} \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$; $x \in \operatorname{Ker} \partial_n \subset C_n$

$$x \in C_n \Rightarrow f_n(x) - g_n(x) = h_{n-1}(\partial_n(x)) + \partial'_{n+1}(h_n(x))$$
$$= \partial'_{n+1}(h_n(x)) \in \operatorname{Im} \partial'_{n+1}$$
$$\Rightarrow f_n(x) + \operatorname{Im} \partial'_{n+1} = g_n(x) + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}$$
$$\Rightarrow H_n(f)(x+\operatorname{Im} \partial_{n+1}) = H_n(g)(x + \operatorname{Im} \partial_{n+1})$$
$$\forall\, x + \operatorname{Im} \partial_{n+1} \in \frac{\operatorname{Ker} \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$$
$$\Rightarrow H_n(f) = H_n(g) \quad /\!\!/$$

DEFINICION 1-12

Se dice que la sucesión $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas, si para todo $n \in \mathbb{Z}$.

$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de grupos.

PROPOSICION 1-5

Si $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de complejos de cadena, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$ la sucesión $H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E)$ es exacta.

pa

1) $\operatorname{Im} H_n(f) \subseteq \operatorname{Ker} H_n(g)$
2) $\operatorname{Ker} H_n(g) \subseteq \operatorname{Im} H_n(f)$.

1) Como $g \circ f = 0 \Rightarrow H_n(g \circ f) = 0$

$$\Rightarrow H_n(g) \circ H_n(f) = 0 \qquad /\!\!/$$

$\therefore \quad \operatorname{Im} H_n(f) \subseteq \operatorname{Ker} H_n(g)$

2)

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, dotted] & & D \arrow[d, dotted] & & E \arrow[d, dotted] & \\
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[dd, "\partial_{n+1}"] & & D_{n+1} \arrow[rr, "g_{n+1}"] \arrow[dd, "\partial'_{n+1}"] & & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[dd, "\partial''_{n+1}"] & 0 \\
 & & & d \arrow[d, squiggly] & & Y=g_{n+1}(d) \arrow[ll, squiggly] & \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[dd, "\partial_n"] & & D_n \arrow[rr, "g_n"] \arrow[dd, "\partial'_n"] & & E_n \arrow[r] \arrow[dd, "\partial''_n"] & 0 \\
 & x & & f_n(x)=z-\partial'_{n+1}(d) \arrow[ll, squiggly] \arrow[rr, squiggly] & & \partial''_{n+1}(y) = g_n(z) & \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & & D_{n-1} \arrow[rr, "g_{n-1}"] \arrow[d] & & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMA 1-9

Sea $z + \operatorname{Im} \partial'_{n+1} \in \operatorname{Ker} H_n(g)$; $z \in \operatorname{Ker} \partial'_n$,
$H_n(g)(z + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}) = g_n(z) + \operatorname{Im} \partial''_{n+1} = \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$ así
$g_n(z) \in \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$, para el cual existe $y \in E_{n+1}$ tales que
$\partial''_{n+1}(y) = g_n(z)$; como g_{n+1} es epi existe $d \in D_{n+1}$ tales que
$g_{n+1}(d) = y$, en este caso

$$\begin{aligned} g_n(\partial'_{n+1}(d)-z) &= g_n(\partial'_{n+1}(d)) - g_n(z) \\ &= \partial''_{n+1}(g_{n+1}(d)) - g_n(z) \\ &= \partial''_{n+1}(y) - g_n(z) \\ &= 0; \end{aligned}$$

entonces $(\partial'_{n+1}(d) - z) \in \operatorname{Ker} g_n = \operatorname{Im} f_n$, así
existe $x \in C_n$ tales que $f_n(x) = z - \partial'_{n+1}(d)$ ahora
$f_n(x) - z = - \partial'_{n+1}(d) \in \operatorname{Im} \partial'_{n+1}$ de donde
$f_n(x) + \operatorname{Im} \partial'_{n+1} = z + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}$
$H_n(f)(x + \operatorname{Im} \partial_{n+1}) = z + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}$; además

$$\begin{aligned} f_{n-1}(\partial_n(x)) &= \partial'_n(f_n(x)) \\ &= \partial'_n(\partial'_{n+1}(d) - z) \\ &= \partial'_n(\partial'_{n+1}(d)) - \partial'_n(z) \\ &= 0 \quad ; \end{aligned}$$

como f_{n-1} es mono $\partial_n(x) = 0$, luego $x \in \operatorname{Ker} \partial_n$ así
$z + \operatorname{Im} \partial'_{n+1} \in \operatorname{Im} H_n(f)$ //

$\therefore$ $H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E)$ es exacta. En la proposición 1-5 se probó que se pueden obtener sucesiones exactas en los grupos de homologías correspondientes.

Es posible "conectarlos" a todos ellos en una sola sucesión exacta que se llama precisamente la sucesión exacta de grupos de homologías de la sucesión exacta corta de complejos de cadena.

1-4. HOMOMORFISMO CONEXION

A continuación se tratará el proceso de definición del llamado homomorfismo de conexión (∂_n^*) del grupo $H_n(E)$ en el grupo $H_{n-1}(C)$, $\forall n \in Z$ dados en el diagrama 1-9, i.e.

$\partial_n^*: H_n(E) \longrightarrow H_{n-1}(C)$; $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted] & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, dotted] & E \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & D_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "\partial'_{n+1}"] & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & D_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\partial'_n"] & E_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "\partial_{n-1}"] & D_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d, "\partial'_{n-1}"] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-2} \arrow[r, "f_{n-2}"] \arrow[d, dotted] & D_{n-2} \arrow[r, "g_{n-2}"] \arrow[d, dotted] & E_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

$y \longleftarrow g_n(y)=z$

$x \longleftarrow f_{n-1}(x)=\partial'_n(y)$

$\partial_{n-1}(x)$

DIAGRAMA 1-10

Sea $z + \mathrm{Im}\,\partial''_{n+1} \in \dfrac{\mathrm{Ker}\,\partial''_n}{\mathrm{Im}\,\partial''_{n+1}}$; se tratará de encontrar un elemento $\partial^*_n(z + \mathrm{Im}\,\partial''_{n+1}) \in H_{n-1}(C)$.

Como $z \in E_n$ y g_n es epi existe $y \in D_n$ tales que $z = g_n(y)$, por conmutatividad del diagrama $g_{n-1}(\partial'_n(y)) = 0$; así $\partial'_n(y) \in \mathrm{Ker}\, g_{n-1} = \mathrm{Im}\, f_{n-1}$ para el cual existe $x \in C_{n-1}$ tal que $f_{n-1}(x) = \partial'_n(y)$ y de nuevo por conmutatividad $f_{n-2}(\partial_{n-1}(x)) = 0$; dado que f_{n-2} es mono $\partial_{n-1}(x) = 0$ y así $x \in \mathrm{Ker}\,\partial_{n-1}$, con el cual ahora ya se puede definir ∂^*_n como:
$\partial^*_n(z + \mathrm{Im}\,\partial''_{n+1}) = x + \mathrm{Im}\,\partial_n$; donde
$f_{n-1}(x) = \partial'_n(y)$ y $g_n(y) = z$.

Se prueba que ∂^*_n así adefinida es una función [5, pags. 51,53]

LEMA 1-1

La función ∂^*_n: $H_n(E) \longrightarrow H_{n-1}(C)$ es un homomorfismo de grupos.

pa

Sean $z_1 + \mathrm{Im}\,\partial''_{n+1}$, $z_2 + \mathrm{Im}\,\partial''_{n+1} \in H_n(E)$.
$\partial^*_n(z_1 + \mathrm{Im}\,\partial''_{n+1}) = x_1 + \mathrm{Im}\,\partial_n$; $f_{n-1}(x_1) = \partial'_n(y_1)$; $g_n(y_1) = z_1$
$\partial^*_n(z_2 + \mathrm{Im}\,\partial''_{n+1}) = x_2 + \mathrm{Im}\,\partial_n$; $f_{n-1}(x_2) = \partial'_n(y_1)$; $g_n(y_1) = z_1$
en este caso.

$$\begin{aligned} f_{n-1}(x_1 + x_2) &= f_{n-1}(x_1) + f_{n-1}(x_2) \\ &= \partial'_n(y_1) + \partial'_n(y_2) \\ &= \partial'_n(y_1 + y_2) \qquad \text{y} \end{aligned}$$

$g_n(y_1 + y_2) = g_n(y_1) + g_n(y_2) = z_1 + z_2$; luego

$$\begin{aligned}\partial_n^*[(z_1+\mathrm{Im}\,\partial''_{n+1}) + (z_2+\mathrm{Im}\,\partial''_{n+1})] &= \partial_n^*[(z_1+z_2) + \mathrm{Im}\,\partial''_{n+1}] \\ &= (x_1 + x_2) + \mathrm{Im}\,\partial_n \\ &= (x_1+ \mathrm{Im}\,\partial_n) + (x_2 + \mathrm{Im}\,\partial_n) \\ &= \partial_n^*(z_1+\mathrm{Im}\,\partial''_{n+1})+\partial_n^*(z_2+\mathrm{Im}\,\partial''_{n+1}) \quad /\end{aligned}$$

En base al Lema 1-1 y a partir de una sucesión exacta de complejos de cadena:

$S:\ 0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$; obtenemos una sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n-1}^*} H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\partial_n^*} H_{n-1}(C) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} \cdots$$

de grupos, la cual es llamada la sucesión de homologías de la sucesión exacta "S".

TEOREMA 1-4

La sucesión de homologías, de toda sucesión exacta corta de complejos de cadena, es exacta.

pa

En base a la proposición 1-5 bastará probar

1- $\mathrm{Ker}\ \partial_n^* = \mathrm{Im}\ H_n(g)$

2- $\mathrm{Im}\ \partial_n^* = \mathrm{Ker}\ H_{n-1}(f)$

1) $\mathrm{Im}\ H_n(g) \subset \mathrm{Ker}\ \partial_n^*$

$$\longrightarrow H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\partial_n^*} H_{n-1}(C) \longrightarrow \ldots,$$

Sea $y + \mathrm{Im}\, \partial''_{n+1} \in \mathrm{Im}\, H_n(g)$ y

$$x + \mathrm{Im}\, \partial'_{n+1} \in \frac{\mathrm{Ker}\, \partial'_n}{\mathrm{Im}\, \partial'_{n+1}} \text{ ; tales que}$$

$H_n(g)(x+\mathrm{Im}\, \partial'_{n+1}) = y + \mathrm{Im}\, \partial''_{n+1}$, se probará

$\partial^*_n(y + \mathrm{Im}\, \partial''_{n+1}) = \mathrm{Im}\, \partial_n$.

Se tiene $g_n(x) + \mathrm{Im}\, \partial''_{n+1} = y + \mathrm{Im}\, \partial''_{n+1}$ de donde $y - g_n(x) \in \mathrm{Im}\, \partial''_{n+1}$, para el cual existe $e \in E_{n+1}$ tal que $\partial''_{n+1}(e) = y - g_n(x)$, como g_{n+1} es epimorfismo existe $d \in D_{n+1}$ tales que $g_{n+1}(d) = e$. Además $g_n(\partial'_n(d)) = \partial''_{n+1}(g_{n+1}(d))$ $= \partial'_{n+1}(e) = y - g_n(x)$ y por definición

$\partial^*_n(y - g_n(x) + \mathrm{Im}\, \partial''_{n+1}) = \mathrm{Im}\, \partial_n$ ya que

$g_n(\partial'_{n+1}(d)) = y - g_n(x)$ y $\partial'_n(\partial'_{n+1}(d)) = 0 = f_{n-1}(0)$ para el cual $\mathrm{Im}\, \partial_n = \partial^*_n(y + \mathrm{Im}\, \partial''_{n+1}) - \partial^*_n(g_n(x) + \mathrm{Im}\, \partial''_{n+1})$

$$= \partial^*_n(y + \mathrm{Im}\, \partial''_{n+1}) - \mathrm{Im}\, \partial_n .$$

Ya que $x \in \mathrm{Ker}\, \partial'_n$; $\partial'_n(x) = 0 = f_{n-1}(0)$ y $g_n(x) = g_n(x)$ así

$\partial^*_n(y + \mathrm{Im}\, \partial''_{n+1}) = \mathrm{Im}\, \partial_n$

$\mathrm{Ker}\, \partial^*_n \subseteq \mathrm{Im}\, H_n(g)$

Sea $z + \mathrm{Im}\, \partial''_{n+1} \in \mathrm{Ker}\, \partial^*_n \subseteq \dfrac{\mathrm{Ker}\, \partial''_n}{\mathrm{Im}\, \partial''_{n+1}}$; se probará que exis

$m + \mathrm{Im}\, \partial'_{n+1}$ tales que

$H_n(g)(m + \mathrm{Im}\, \partial'_{n+1}) = z + \mathrm{Im}\, \partial''_{n+1}$, con $m + \mathrm{Im}\, \partial'_{n+1} \in \dfrac{\mathrm{Ker}\, \partial'_n}{\mathrm{Im}\, \partial'_{n+1}}$

Ahora $\partial^*_n(z + \mathrm{Im}\, \partial'_{n+1}) = x + \mathrm{Im}\, \partial_n = \mathrm{Im}\, \partial_n$ con

$g_n(y) = z$ y $f_{n-1}(x) = \partial'_n(y)$, así $x \in \operatorname{Im} \partial_n$ para el cual existe $c \in C_n$ tales que $\partial_n(c) = x$.

Además $\partial'_n(f_n(c)) = f_{n-1}(\partial_n(c))$

$$= f_{n-1}(x)$$

$$= \partial'_n(y) \quad ; \quad \text{del cual}$$

$y - f_n(c) \in \operatorname{Ker} \partial'_n$, además

$$H_n(g)(y - f_n(c) + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}) = g_n(y) + \operatorname{Im} \partial''_{n+1} - g_n(f_n(c)) + \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$$

$$= z + \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$$

tomando $m = y - f_n(c)$ se tiene:

$H_n(g)(m + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}) = z + \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$ /

La prueba de 2) es similar a 1).

C A P I T U L O I I

"DEFINICIONES Y PROPIEDADES BASICAS DE TEORIA DE HOMOLOGIA Y HOMOTOPIA"

2.1 INTRODUCCION

En el presente capítulo se tratará de dar a conocer la teoría de homología para el caso particular de n-cubos singulares, dando también el concepto de grupos relativos de homología. Y finalmente se proporcionará una técnica de sub-división de cubos, la cual será de mucha importancia para la prueba de la propiedad de escisión.

A continuación detallamos alguna terminología y notación que será usada de aquí en adelante.

$\mathbb{R}$: Recta real

I : Intervalo cerrado unitario $[0,1]$

$\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$. (n-veces) el n-ésimo espacio Euclidiano

I^n: $I \times I \times \ldots \times I$ (n-veces) el n-ésimo cubo unitario.

Por definición I^0 es un espacio consistente de un único punto.

Cualquier espacio topológico Homeomorfo a I^n puede ser llamado un cubo n-dimencional.

DEFINICION 2-1

Un n-cubo singular en un espacio topológico X, es una función continua $T: I^n \longrightarrow X$.

Se denotará por $Q_n(X)$ el grupo libre abeliano generado por el conjunto de todos los n-cubos singulares en X.

Cualquier elemento de $Q_n(X)$, tiene una expresión única como una combinación lineal finita, con coeficientes enteros, de n-cubos en X.

DEFINICION 2-2

Un n-cubo singular $T: I^n \longrightarrow X$ es degenerado si existe un entero i; $1 \leq i \leq n$ tales que $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no depende de x_i.

Observese que un 0-cubo singular no es nunca generado y un 1-cubo singular $T: I \longrightarrow X$ es degenerado si y sólo si T es una función constante.

Sea $D_n(X)$ el sub-grupo de $Q_n(X)$ generado por los n-cubos singulares degenerados y denotemos por $C_n(X)$ el grupo cociente $\frac{Q_n(X)}{D_n(X)}$ este último es llamado el grupo de las n-cadenas cúbicas singulares en X o simplemente n-cadenas en X.

OBSERVACION 2-1

Si $X = \phi$, entonces $Q_n(X) = D_n(X) = C_n(X) = \{0\}$.

Si X es el espacio consistente de un único punto, entonces $\forall n \geq 0$ existe un único n-cubo singular en X el cual es degenerado si $n \geq 1$.

Además $C_0(X)$ es un grupo cíclico infinito y $C_n(X) = \{0\}$ $\forall n > 0$.

Para cualquier espacio X, si $D_0(X) = \{0\}$, entonces $C_0(X) = Q_0(X)$.

Para cualquier espacio X, se verifica que para $n \geq 1$, $C_n(X)$ es un grupo libre abeliano en el conjunto de todos los n-cubos no degenerados en X.

2-1 LAS CARAS DE UN N-CUBO SINGULAR. $n > 0$

Sea la función $T: I^n \longrightarrow X$ un n-cubo singular en X. Para $i = 1, 2, \ldots, n$ definiremos (n-1)-cubos singulares:

$A_iT, B_iT: I^{n-1} \longrightarrow X$ mediante las fómulas

$A_iT(x_1, \ldots, x_{n-1}) = T(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1})$

$B_iT(x_1, \ldots, x_{n-1}) = T(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_{n-1})$

A_iT es llamado la i-ésima cara frontal y B_iT la i-ésima cara trasera de T, estos operadores caras satisfacen las siguientes identidades donde $T: I^n \longrightarrow X$ es un n-cubo, $n > 1$ y $1 \leq i < j \leq n$.

1) $A_i A_j T = A_{j-1}\ A_i T$

2) $B_i B_j T = B_{j-1}\ B_i T$

3) $A_i B_j T = B_{j-1}\ A_i T$

4) $B_i A_j T = A_{j-1}\ B_i T$ (2-1)

Pa

1) $$\begin{aligned} A_i A_j T(x_1,\ldots,x_{n-2}) &= A_j T(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x\ ,\ldots,\ x_{n-2}) \\ &= T(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ \ldots,x_{j-2},0,x_{j-1},\ldots,x_{n-2}) \\ &= A_i T(x_1,\ldots,x_{j-2},0,x_{j-1},\ldots,x_{n-2}) \\ &= A_{j-1} A_i T(x_1,\ldots,x_{n-2}). \quad / \end{aligned}$$

$\therefore\ A_i A_j T = A_{j-1} A_i T$

4) $$\begin{aligned} B_i A_j T(x_1,\ldots,x_{n-2}) &= A_j T(x_1,\ldots,x_{i-1},\ 1,x_i,\ldots,x_{n-2}) \\ &= T(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_i,\ldots,x_{j-2},0,x_{j-1},\ldots,x_{n-2}) \\ &= B_i T(x_1,\ldots,x_{j-2},0,x_{j-1},\ldots,x_{n-2}) \\ &= A_{j-1} B_i T(x_1,\ldots,x_{n-2}). \quad // \end{aligned}$$

$\therefore\ B_i A_j T = A_{j-1} B_i T$

La prueba de 2 y 3 es similar.

Los operadores caras tambien satisfacen las siguientes propiedades:

$\forall T: I^n \longrightarrow X$ se tiene

1) $A_i(T_k + T_j) = A_iT_k + A_iT_j$

2) $B_i(T_k + T_j) = B_iT_k + B_iT_j$

Pa

1) $A_i(T_k + T_j)(x_1,\ldots,x_{n-1}) = (T_k + T_j)(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_{n-1})$

$= T_k(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots x_{n-1}) + T_j(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_{n-1})$

$= A_iT_k(x_1,\ldots,x_{n-1})+A_iT_j(x_1,\ldots,x_{n-1})$. //

$\therefore\ A_i(T_k + T_j) = A_iT_k + A_iT_j$

La prueba de 2 es similar.

Definiremos ahora el operador frontera $\partial_n: Q_n(X) \longrightarrow Q_{n-1}(X)$, definiéndolo únicamente en sus elementos básicos, es decir, en los cubos singulares, por las propiedades de los grupos libres abelianos.

DEFINICION 2-3

Para cualquier n-cubo T, n > 0

$$\partial_n(T) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (A_iT - B_iT).$$

Se verifica facilmente para los casos n = 2,3 que $\partial_n(T)$ es la frontera del n-cubo.

$n = 2$

$$\partial_2 : Q_2(X) \longrightarrow Q_1(X)$$

$$I^2 \xrightarrow{T} X \rightsquigarrow \partial_2(T) : I \longrightarrow X, \text{ donde}$$

$$\partial_2(T) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^i (A_iT - B_iT)$$

$$= - A_1T + B_1T + A_2T - B_2T; \text{ además}$$

$$- A_1T(x) = - T(0,x)$$

$$B_1T(x) = T(1,x)$$

$$A_2T(x) = T(x,0)$$

$$- B_2T(x) = -T(x,1)$$

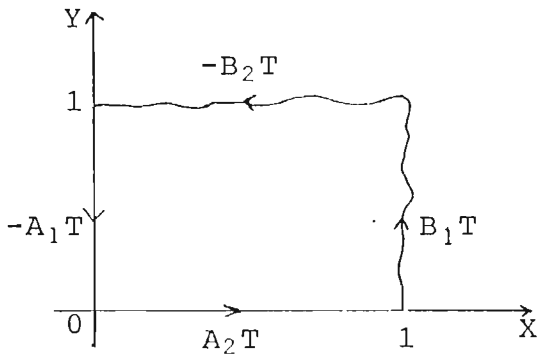


FIG. 2-1

$n = 3$

$$\partial_3 : Q_3(X) \longrightarrow Q_2(X)$$

$$I^3 \xrightarrow{T} X \rightsquigarrow \partial_3(T) : I^2 \longrightarrow X, \text{ donde}$$

$$\partial_3(T) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^i (A_iT - B_iT)$$

$$= - A_1T + B_1T + A_2T - B_2T - A_3T + B_3T; \text{ además}$$

$$- A_1T(x_1,x_2) = - T(0, x_1, x_2)$$

$$B_1T(x_1,x_2) = T(1, x_1, x_2)$$

$$A_2T(x_1,x_2) = T(x_1, 0, x_2)$$

$$-B_2T(x_1,x_2) = -T(x_1, 1, x_2)$$

$$-A_3T(x_1,x_2) = -T(x_1, x_2, 0)$$

$$B_3T(x_1,x_2) = T(x_1, x_2, 1)$$

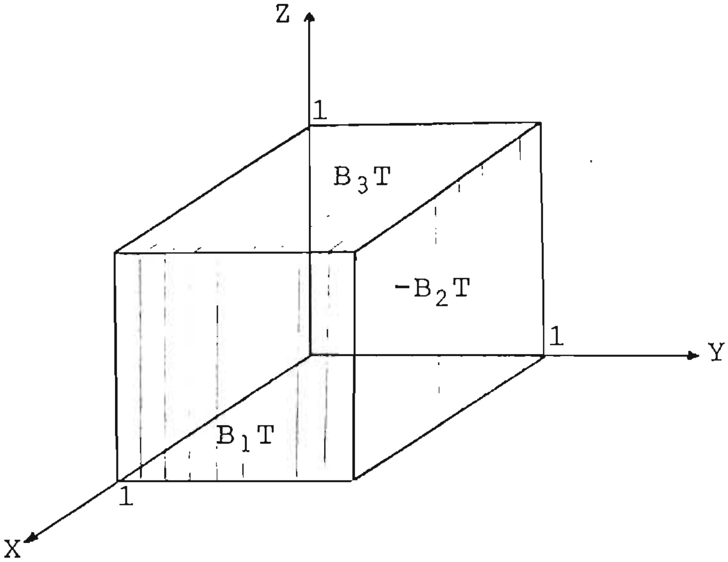


FIG. 2-2

Algunas propiedades importantes del operador frontera son:

1) $\partial_{n-1}(\partial_n(T)) = 0;\ n > 1$ (2-2)

2) $\partial_n(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X);\ n > 0$ (2-3)

Pa

1) Se tiene $\partial_n(T) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (A_iT - B_iT)$

La prueba se seguirá por inducción

a) Para n = 2.

$$\partial_1(\partial_2(T)) = \sum_{i=1}^{1}(-1)^i(A_i\partial_2(T) - B_i\partial_2(T))$$

$$= -A_1\partial_2(T) + B_1\partial_2(T)$$

$$= -A_1\Big[\sum_{i=1}^{2}(-1)^i(A_iT-B_iT)\Big] + B_1\Big[\sum_{i=1}^{2}(-1)^i(A_iT-B_iT)\Big]$$

$$= -A_1[-A_1T + B_1T + A_2T - B_2T] +$$
$$B_1[-A_1T + B_1T + A_2T - B_2T]$$

$$= A_1A_1T - A_1B_1T - A_1A_2T + A_1B_2T - B_1A_1T$$
$$+ B_1B_1T + B_1A_2T - B_1B_2T$$

aplicando adecuadamente las identidades (2-1)

se tiene que $\partial_1(\partial_2(T)) = 0$.

b) Supongamos que se cumple para n = k i.e.

$$\partial_{k-1}(\partial_k(T)) = \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j(A_j\partial_k(T) - B_j\partial_k(T)) = 0$$

c) Probaremos que tambien se cumple para n = k + 1

$$\partial_k(\partial_{k+1}(T)) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^j(A_j\partial_{k+1}(T) - B_j\partial_{k+1}(T))$$

$$= [-A_1\partial_{k+1}(T) + B_1\partial_{k+1}(T)] + [A_2\partial_{k+1}(T) - B_2\partial_{k+1}(T)] +\ldots+$$
$$[(-1)^{k-1}(A_{k-1}\partial_{k+1}(T) - B_{k-1}\partial_{k+1}(T))] +$$
$$[(-1)^k(A_k\partial_{k+1}(T) - B_k\partial_{k+1}(T))]$$

$$= \Big[-A_1\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i(A_iT-B_iT)\Big] + \Big[B_1\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i(A_iT-B_iT)\Big] + \ldots +$$

$$\Big[(-1)^{k-1}\Big(A_{k-1}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i(A_iT-B_iT) - B_{k-1}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i(A_iT-B_iT)\Big)\Big] +$$

$$[(-1)^k(A_k\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i(A_iT - B_iT) - B_k\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i(A_iT - B_iT))]$$

$$= [-A_1((-1)^{k+1}(A_{k+1}T - B_{k+1}T)) - A_1\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(A_iT - B_iT)] +$$

$$[B_1((-1)^{k+1}(A_{k+1}T - B_{k+1}T)) + B_1\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(A_iT - B_iT)]+\ldots+$$

$$[(-1)^{k-1}(A_{k-1}((-1)^{k+1}(A_{k+1}T-B_{k+1}T))+A_{k-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(A_iT-B_iT))]+$$

$$[(-1)^{k-1}(- B_{k-1}((-1)^{k+1}(A_{k+1}T-B_{k+1}T))-B_{k-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(A_iT-B_iT))]+$$

$$[(-1)^k(A_k((-1)^{k+1}(A_{k+1}T-B_{k+1}T))+A_k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(A_iT-B_iT))]+$$

$$[(-1)^k(-B_k((-1)^{k+1}(A_{k+1}T-B_{k+1}T))-B_k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(A_iT-B_iT))]$$

$$= [(-1)^{k+1}(-A_1(A_{k+1}T-B_{k+1}T) + B_1(A_{k+1}T - B_{k+1}T))] +$$

$$[(-1)^{k+1}((-1)^{k-1}(A_{k-1}(A_{k+1}T-B_{k+1}T)-B_{k-1}(A_{k+1}T- B_{k+1}T)))] +$$

$$[(-1)^{k+1}((-1)^k(A_k(A_{k+1}T-B_{k+1}T) - B_k(A_{k+1}T-B_{k+1}T)))] +$$

$$[\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i(A_i\partial_k(T) - B_i\partial_k(T))] +$$

$$[(-1)^k[A_k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(A_iT - B_iT) - B_k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(A_iT - B_iT)]]$$

$$= [(-1)^{k+1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^i[A_i(A_{k+1}T - B_{k+1}T) - B_i(A_{k+1}T - B_{k+1}T)]] +$$

$$[(-1)^k[A_k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(A_iT - B_iT) - B_k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(A_iT - B_iT)]]$$

observando los términos j-ésimos con $1 \leq j \leq k$ de las tres sumatorias, se tiene:

$$(-1)^{k+1}[(-1)^j[A_jA_{k+1}T - A_jB_{k+1}T - B_jA_{k+1}T - B_jB_{k+1}T]] +$$

$$(-1)^k[(-1)^j[A_kA_jT - A_kB_jT - B_kA_jT + B_kB_jT]] = 0 \quad //$$

aplicando las identidades (2-1) adecuadamente.

$\therefore \quad \partial_{n-1}(\partial_n(T)) = 0 \; ; \; n \geq 1$

2) Si T es un n-cubo singular degenerado, entonces $\partial_n(T)$ es un (n-1)-cubo singular degenerado.

Se sabe $\partial_n(T) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i(A_iT - B_iT)$; bastará probar que los $A_iT - B_iT$ son degenerados.

Supongamos que T es degenerado en la posición j; $1 \leq j \leq n$, luego

$$A_1T(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_{n-1}) = T(0,x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_{n-1})$$

$$A_2T(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_{n-1}) = T(x_1,0,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_{n-1})$$

$$\vdots$$

$$A_jT(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_{n-1}) = T(x_1,x_2,x_3,\ldots,0,x_j,\ldots,x_{n-1}) \overset{(1)}{=} T(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_j,x_j,\ldots,x_{n-1})$$

$$\vdots$$

$$A_nT(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_{n-1}) = T(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_j,\ldots,x_{n-1},0)$$

Así A_iT es degenerado en la posición j, similar para B_iT /

$\therefore \quad \partial_n(T)$ es degenerado.

(1) ya que T es degenerado en la posición j; podemos con-

venientemente sustituir dicha posición por x_j.

Como una consecuencia de 2-3, ∂_n induce un homomorfismo $\partial'_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$; es de notar que esta nueva secuencia de homomorfismos $\partial'_1, \partial'_2, \ldots, \partial'_n, \ldots$ satisfacen la Ec. 2-2.

Definamos ahora:

$Z_n(X) = \text{Ker } \partial'_n = \{u \in C_n(X) / \partial'_n(u) = 0\}$; $n > 0$

$B_n(X) = \text{Im } \partial'_{n+1} = \partial'_{n+1}(C_{n+1}(X))$; $n \geq 0$, de 2-2

Se sigue que $B_n(X) \subset Z_n(X)$, $n > 0$. Definimos $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$. $H_n(X)$ es llamado el grupo de homología singular n - dimensional de X.

Definiremos ahora $H_n(X)$ para $n \leq 0$, para definir $H_o(X)$, definiremos primero $Z_o(X)$ para el cual existen dos candidatos ligeramente diferentes.

DEFINICION. DE $H_o(X)$.

Esta definición es muy simple. Definiendo $Z_o(X) = C_o(X)$ y así $H_o(X) = \dfrac{Z_o(X)}{B_o(X)} = \dfrac{C_o(X)}{B_o(X)}$.

Se puede alcanzar el mismo resultado definiendo

$C_n(X) = 0$ para $n < 0$ y

$\partial'_n = 0$; $\forall n \leq 0$ y entonces $Z_o(X) = \text{Ker } \partial'_o$, más generalmente podemos entonces definir $Z_n(X) = \text{Ker } \partial'_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$; luego

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Naturalmente obtenemos $H_n(X) = \{0\}$, $\forall n < 0$. Notece que $H_o(X)$ está definido aún en el caso en que $X = \phi$.

DEFINICION DE $\tilde{H}_o(x)$

Para este propósito definiremos un Homomorfismo $\varepsilon: C_o(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z}$ denota el anillo de los enteros. Este homomorfismo es llamado amenudo aumentación.

Dado que $C_o(X) = Q_o(X)$ es un grupo libre en el conjunto de los o-cubos, definiremos $\varepsilon(T)$ para cualquier o-cubo T en X, de la manera más simple y no trivial posible; $\varepsilon(T) = 1$, de aquí que si $u = \sum_i n_i T_i$ cualquier o-cadena, entonces $\varepsilon(u) = \sum_i n_i$.

Ahora probaremos la siguiente fórmula importante:

$\varepsilon_o \partial_1' = 0$ 2-4

<u>Pa</u>

Sea $T' \varepsilon C_1(X)$; $T' = T + D_1(X)$.

Para T'en $C_1(X)$ se tiene $\partial_1'(T') = -A_1T + B_1T$. Luego

$(\varepsilon \circ \partial_1')(T') = \varepsilon(\partial_1'(T')) = \varepsilon(-A_1T + B_1T) = (-1) + (1) = 0$ /

$\therefore \ \varepsilon \circ \partial_1' = 0$

Definiremos ahora $\tilde{Z}_o(X) = \text{Ker } \varepsilon$, por la fórmula 2-4 se tiene $B_o(X) \subset \tilde{Z}_o(X)$, entonces podemos definir $\tilde{H}_o(X) = \dfrac{\tilde{Z}_o(X)}{B_o(X)}$,

$\tilde{H}o(X)$ es llamado el grupo de homología reducido o-dimencional de X.

En adelante solo consideraremos $\tilde{H}o(X)$ en el caso en que el espacio X sea diferente de vacio. Es conveniente hacer $\tilde{H}n(X) = Hn(X)\ \forall n > 0$.

Notese que $\tilde{Z}o(X)$ es un sub-grupo de $Zo(X) = Co(X)$, entonces $\tilde{H}o(X)$ es un sub-grupo de $Ho(X)$. Sea $i: \tilde{H}o(X) \longrightarrow Ho(X)$ el homomorfismo inclusión. De la fórmula 2-4 se sigue que ε induce un homomorfismo $\varepsilon*: Ho(X) \longrightarrow \mathbb{Z} / \varepsilon*(t + Bo(X)) = \varepsilon(t)$ el cual se prueba facilmente que está bien definido, es decir, si:

$$\begin{aligned} t + Bo(X) = k + Bo(X) &\Rightarrow t - k \in Bo(X) \subset Ker\ \varepsilon \\ &\Rightarrow \varepsilon(t - k) = 0 \\ &\Rightarrow \varepsilon(t) = \varepsilon(k) \\ &\Rightarrow \varepsilon*(t + Bo(X)) = \varepsilon*(k + Bo(X)) \quad / \end{aligned}$$

PROPOSICION 2-1

La siguiente sucesión de grupos y Homomorfismos
$0 \longrightarrow \tilde{H}o(X) \xrightarrow{i} Ho(X) \xrightarrow{\varepsilon*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ es exacta.

Pa

Se probará: 1) i es inyectiva (inmediato)

2) $Im\ i = Ker\ \varepsilon*$

3) $\varepsilon*$ es sobreyectiva

2) " $\subset$ "

Sea $(r + Bo(X)) \in Im\, i$, $r \in Ker\, \varepsilon$, entonces

$\varepsilon_*(r + Bo(X)) = \varepsilon(r) = 0.$

$\therefore\ (r + Bo(X)) \in Ker\, \varepsilon_*$

" $\supset$ "

Sea $(y + Bo(X)) \in Ker\, \varepsilon_*$

$$
\begin{aligned}
(y + Bo(X)) \in Ker\, \varepsilon_* &\Rightarrow \varepsilon_*(y + Bo(X)) = 0 \\
&\Rightarrow \varepsilon(y) = 0 \\
&\Rightarrow y \in Ker\, \varepsilon \\
&\Rightarrow y + Bo(X) \in \frac{Ker\, \varepsilon}{Bo(X)} \\
&\Rightarrow y + Bo(X) = i(y + Bo(X)) \in Im\, i \qquad /
\end{aligned}
$$

3) Se probará que $Im\, \varepsilon_* = \mathbb{Z}$.

" $\subset$ " Trivial

" $\supset$ "

Como $X \neq \phi$, existe $T \in Co(X)$ (o-cubo T en X)

tales que $1 = \varepsilon(T) = \varepsilon_*(T + Bo(X)) \in Im\, \varepsilon_*$

ahora sea $y \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
y \in \mathbb{Z} &\Rightarrow y = y.1 \\
&\Rightarrow y = y.\varepsilon_*(T + Bo(X)) \\
&\Rightarrow y = \underbrace{\varepsilon_*(T + Bo(X)) + \ldots + \varepsilon_*(T + Bo(X))}_{y\ -\ \text{veces}} \in Im\, \varepsilon_* \\
&\Rightarrow y = \varepsilon_*(y.T + Bo(X)) \in Im\, \varepsilon_* \qquad /
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 2-1

Sea X el espacio consistente de un solo punto entonces encontramos que:

1) $Ho(X) = \mathbb{Z}$

2) $Hn(X) = \{0\} \; \forall n \neq 0$

3) $\tilde{H}o(X) = \{0\}$, y $\varepsilon_*: Ho(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un isomorfismo.

Efectivamente:

1) para probar que $Ho(X) \simeq \mathbb{Z}$, bastará probar que ε_* es un monomorfismo.

$$\text{Sean } y + Bo(X),\; r + Bo(X) \in Ho(X)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_*(y + Bo(X)) = \varepsilon_*(r + Bo(X)) &\Rightarrow \varepsilon(y) = \varepsilon(r)\\
&\Rightarrow \varepsilon(\alpha T) = \varepsilon(\beta T)\\
&\Rightarrow \alpha = \beta\\
&\Rightarrow \alpha T = \beta T\\
&\Rightarrow y = r\\
&\Rightarrow y+Bo(X) = r+Bo(X) \quad /
\end{aligned}$$

$\therefore \; Ho(X) \simeq \mathbb{Z}$

2) $Cn(X) = \dfrac{Qn(X)}{Dn(X)} = \{Dn(X)\} = \{0\}$ ya que $Qn(X) = Dn(X)$

luego $Hn(X) = \dfrac{Zn(X)}{Bn(X)} = \dfrac{\operatorname{Ker} \partial_n'}{Bn(X)} = \{Bn(X)\} = \{0\}, \; \forall n \neq 0$

dado que $\partial_n': Cn(X) = \{0\} \longrightarrow Cn-1(X)$ /

3) Por la proposición 2-1 tenemos

$\tilde{H}o(X) \simeq \operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} \varepsilon_* = \{Bo(X)\} = 0$ /

2-2 HOMOMORFISMO INDUCIDO POR UNA FUNCION CONTINUA

La Teoría de Homología asocia con cada espacio topológico X la sucesión de grupos Hn(X) $n \geq 0$, de manera similar asocia a cada función continua f: X ——> Y entre espacios topológicos una sucesión de homomorfismos f_*: Hn(X) ——> Hn(Y); $n \geq 0$.

Ciertas propiedades topológicas de la función continua f se reflejan en propiedades algebraicas de los homomorfismos f_*.

Antes de definir f_*, definiremos el homomorfismo f#: Qn(X) ——> Qn(Y) por la regla f#(T) = f∘T, para cualquier n - cubo singular T: I^n ——> X.

Algunas propiedades importantes de f#:

Po. Aif# = f#Ai y Bif# = f#Bi

p1. Si T es un n-cubo singular degenerado, tambien lo es f#(T). Por lo tanto f# lleva de Dn(X) en Dn(Y) e induce un homomorfismo de Cn(X) en Cn(Y) al cual tambien lo llamaremos f#.

Pa

Sea T un n-cubo singular degenerado, i.e., existe i, $1 \leq i \leq n$ tales que $T(x_1,\ldots,x_n)$ no depende de x_i.

$$f\#(T(x_1,\ldots,x_n)) = f(T(x_1,\ldots,x_n))$$
$$= (f\circ T)(x_1,\ldots,x_n) \text{ el cual no depende de } x_i \quad /$$

$\therefore$ $f\#(T)$ es degenerado

P2. El siguiente diagrama es conmutativo para $n \geq 1$

$$\begin{array}{ccc} Q_n(X) & \xrightarrow{f\#} & Q_n(Y) \\ \Big\downarrow \partial_n & & \Big\downarrow \gamma_n \\ Q_{n-1}(X) & \xrightarrow{f\#} & Q_{n-1}(Y) \end{array} \qquad \gamma_n \circ f\# = f\# \circ \partial_n$$

Pa

Por definición 2-3 se tiene:

$$\gamma_n(f\#(T)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (A_i' f\#(T) - B_i' f\#(T))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (f\# A_i T - f\# B_i T)$$

$$= f\#\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^i (A_i T - B_i T)\right)$$

$$= f\#(\partial_n(T))$$

$$= (f\# \circ \partial_n)(T) \qquad /$$

Además se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo para $n \geq 1$.

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f\#} & C_n(Y) \\ \Big\downarrow \partial_n' & & \Big\downarrow \gamma_n' \\ C_{n-1}(X) & \xrightarrow[f\#]{} & C_{n-1}(Y) \end{array} \qquad \gamma_n' \circ f\# = f\# \circ \partial_n'$$

Pa

Sea $(x + D_n(X)) \in C_n(X)$

$$\begin{aligned}
\gamma'_n(f\#(x + D_n(X))) &= \gamma'_n(f\#(x) + D_n(Y)) \\
&= \gamma_n(f\#(x)) + D_{n-1}(Y) \\
&= f\#(\partial_n(x)) + D_{n-1}(Y) \\
&= f\#(\partial_n(x) + D_{n-1}(X)) \\
&= (f\# \circ \partial'_n)(x + D_n(X)) \quad //
\end{aligned}$$

además $f\#$ lleva de $Z_n(X)$ en $Z_n(Y)$ y $B_n(X)$ en $B_n(Y)$ para todo $n \geq 0$ e induce un homomorfismo $f_*: H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$, $n \geq 0$.

P3. El siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
C_o(X) \arrow[dr, "\varepsilon"] \arrow[dd, "f\#"'] & \\
& \mathbb{Z} \\
C_o(Y) \arrow[ur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd} \qquad \varepsilon \circ f\# = \varepsilon$$

Pa

Sea $T \in C_o(X)$ y $f\#(T) \in C_o(Y)$,

$\varepsilon(f\#(T)) = 1 = \varepsilon(T)$. /

Por consiguiente $f\#$ tambien lleva de $\tilde{Z}_o(X)$ en $\tilde{Z}_o(Y)$ e induce un homomorfismo de $\tilde{H}_o(X)$ en $\tilde{H}_o(Y)$ el cual es denotado por el mismo símbolo f_*.

Por otro lado se prueba que los diagramas.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_0(X) & \xrightarrow{i_X} & H_0(X) \\ \Big\downarrow f_* & & \Big\downarrow f_* \\ \tilde{H}_0(Y) & \xrightarrow{i_Y} & H_0(Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_0(X) & \xrightarrow{\varepsilon_*} & \mathbb{Z} \\ \Big\downarrow f_* & \nearrow_{\varepsilon_*} & \\ H_0(Y) & & \end{array}$$

$$f_* \circ iX = iY \circ f_* \qquad \varepsilon_* \circ f_* = \varepsilon_*$$

son conmutativos.

<u>Pa</u>

Sea $(x + B_0(X)) \; \varepsilon \; \tilde{H}_0(X) = \dfrac{\tilde{Z}_0(X)}{B_0(X)}$

$$\begin{aligned} f_*(i_X(x + B_0(X))) &= f_*(x + B_0(X)) \\ &= f\#(x) + B_0(Y) \\ &= i_Y(f\#(x) + B_0(Y)) \\ &= i_Y(f\#(x + B_0(X))) \\ &= (i_Y \circ f_*)(x + B_0(X)) \quad /\!/ \end{aligned}$$

Sea $(x + B_0(X)) \; \varepsilon \; H_0(X) = \dfrac{Z_0(X)}{B_0(X)}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_*(f_*(x + B_0(X))) &= \varepsilon_*(f\#(x) + B_0(Y)) \\ &= \varepsilon(f\#(x)) \\ &= \varepsilon(x) \\ &= \varepsilon_*(x + B_0(X)) \quad /\!/ \end{aligned}$$

P4. Sea $f: X \longrightarrow Y$ la función identidad se verifica que los siguientes homomorfismos son funciones identidad.

1) $f\#: Q_n(X) \longrightarrow Q_n(X)$

2) $f\#: C_n(X) \longrightarrow C_n(X)$

3) $f_*: H_n(X) \longrightarrow H_n(X)$

4) $f_*: \tilde{H}_0(X) \longrightarrow \tilde{H}_0(X)$

Pa

1) Se probará que $f\#(T) = T,\ \forall T \in Q_n(X)$

$$
\begin{aligned}
f\#(T)(x_1,\ldots,x_n) &= (f\circ T)(x_1,\ldots,x_n)\\
&= f(T(x_1,\ldots,x_n))\\
&= T(x_1,\ldots,x_n) \quad /
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad f\# = 1_{Q_n(X)}$

3) Sea $(T + B_n(X)) \in H_n(X)$

$$
\begin{aligned}
f_*(T + B_n(X)) &= f\#(T) + B_n(X)\\
&= T + B_n(X) \quad /
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad f_* = 1_{H_n(X)}$

2 y 4 se prueban similar.

P5. Sean X,Y,Z, espacios topológicos, $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ funciones continuas, denotemos por $f\circ g: X \longrightarrow Z$ la composición de las dos funciones continuas.

Bajo estas condiciones tenemos que $(f\circ g)_*$ y $f_*\circ g_*$ es el mismo homomorfismo de $H_n(X)$ en $H_n(Z)$ y de $\tilde{H}_0(X)$ en $\tilde{H}_0(Z)$ se sigue que $(f\circ g)_* = f_* \circ g_*$.

Pa

La prueba consistirá en verificar que los homomorfismos $(f \circ g)\#$ y $f\# \circ g\#$ son los mismos de $Q_n(X)$ en $Q_n(Z)$ y de $C_n(X)$ en $C_n(Z)$.

Sea $T \in Q_n(X)$

$$\begin{aligned}(f \circ g)\#(T) &= (f \circ g) \circ T \\ &= f(g \circ T) \\ &= f\#(g \circ T) \\ &= f\#(g\#(T)) \\ &= (f\# \circ g\#)(T)\end{aligned}$$

Sea $(T + D_n(X)) \in C_n(X) = \dfrac{Q_n(X)}{D_n(X)}$

$$\begin{aligned}(f \circ g)\#(T + D_n(X)) &= (f \circ g)\#(T) + D_n(Z) \\ &= (f\# \circ g\#)(T) + D_n(Z) \\ &= f\#(g\#(T) + D_n(Y)) \\ &= (f\# \circ g\#)(T + D_n(X))\end{aligned}$$

estos homomorfismos inducen los homomorfismos $(f \circ g)_*$ y $f_* \circ g_*$ de $H_n(X)$ en $H_n(Z)$, de donde para todo $(p + B_n(X)) \in \dfrac{Z_n(X)}{B_n(X)}$

se tiene:

$$\begin{aligned}(f \circ g)_*(p + B_n(X)) &= (f \circ g)\#(p) + B_n(Z) \\ &= (f\# \circ g\#)(p) + B_n(Z) \\ &= f\#(g\#(p)) + B_n(Z) \\ &= f_*(g\#(p) + B_n(Y)) \\ &= f_*(g_*(p + B_n(X))) \\ &= (f_* \circ g_*)(p + B_n(X)) \quad /\!/\end{aligned}$$

2-3 PROPIEDAD HOMOTOPICA DE LOS HOMOMORFISMOS INDUCIDOS

En esta sección probaremos una propiedad básica del homomorfismo inducido por una función continua.

DEFINICION 2-4

Dos funciones continuas $f,g\colon X \longrightarrow Y$ son homotopicas, si existe $F\colon I \times X \longrightarrow Y$, continua de manera que $F(0,x) = f(x)$ y $F(1,x) = g(x)$, $\forall x \in X$. Denotemos esto por $f \sim g$.

Intuitivamente hablando, $f \sim g$ si y sólo si es posible "deformar continuamente" la función f en la función g.

Se prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las funciones continuas de X en Y. Ver [4, pags., 41,42].

TEOREMA 2-1

Sean f,g funciones continuas de X en Y. Si f y g son homotópicas, entonces los homomorfismos inducidos f_*, g_* de $H_n(X)$ en $H_n(Y)$ son los mismos, también
$f_* = g_*\colon \tilde{H}_0(X) \longrightarrow \tilde{H}_0(Y)$

Pa

Sea $F: I \times X \longrightarrow Y$ una función continua tal que $F(0,x) = f(x)$ y $F(1,x) = g(x)$, mediante F construiremos una sucesión de homomorfismos. $\rho_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$, $n \geq 0$ tal que:

$$g\# - f\# = \gamma'_{n+1} \circ \rho_n + \rho_{n-1} \circ \partial'_n \qquad (2\text{-}5)$$

asumamos de momento que tal sucesión existe.

Para $n = 0$; $C_{n-1}(X) = C_{n-1}(Y) = \{0\}$ y $\partial_0 = 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & C_n(X) \arrow[r, "\partial'_n"] \arrow[dl, "\rho_n"'] \arrow[d, shift right, "f_\#"'] \arrow[d, shift left, "g_\#"] & C_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[dl, "\rho_{n-1}"'] & \cdots \\
{} \arrow[r] & C_{n+1}(Y) \arrow[r, "\gamma'_{n+1}"'] & C_n(Y) \arrow[r, "\gamma'_n"'] & C_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

FIG. 2-3

Sea $u' + \operatorname{Im} \partial'_{n+1} \in \dfrac{\operatorname{Ker} \partial'_n}{\operatorname{Im} \partial'_{n+1}}$, como $\partial'_n(u') = 0$

se tiene de (2-5) que

$g_\#(u') - f_\#(u') = \gamma'_{n+1}(\rho_n(u'))$, de donde

$[g_\#(u') - f_\#(u')] \in \operatorname{Im} \gamma'_{n+1}$, así

$f_*(u' + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}) = g_*(u' + \operatorname{Im} \partial'_{n+1})$ //

Para el caso en que $(u' + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}) \in \ddot{H}o(X)$ observese que $\rho_{-1}: C_{-1}(X) \longrightarrow Co(Y)$ es el homomorfismo cero.

Para justificar la existencia de la familia $F = \{\rho_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y),\ n \in \mathbb{Z}\}$, definiremos una sucesión de homomorfismos $\phi_n: Q_n(X) \longrightarrow Q_{n+1}(Y)$ $n \geq 0$ como sigue:

Para cada n-cubo singular $T: I^n \longrightarrow X$, definiremos un (n+1)-cubo singular $\phi_n(T): I^{n+1} \longrightarrow Y$ tal que

$\phi_n(T)(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) = F(x_1,T(x_2,x_3,\ldots,x_{n+1}))$ (2-6).

observese que:

1) $A_1\phi_n(T) = f_{\#}(T)$; $B_1\phi_n(T) = g_{\#}(T)$

2) $A_i\phi_n(T) = \phi_{n-1}A_{i-1}(T)$, $2 \leq i \leq n+1$

3) $B_i\phi_n(T) = \phi_{n-1}B_{i-1}(T)$, $2 \leq i \leq n+1$

las cuales se prueban facilmente

1)
$$\begin{aligned} A_1\phi_n(T)(x_1,\ldots,x_n) &= \phi_n(T)(0,x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ &= F(0,T(x_1,x_2,\ldots,x_n)) \\ &= f(T(x_1,x_2,\ldots,x_n)) \\ &= (f\circ T)(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ &= f_{\#}(T)(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

$\therefore\ A_1\phi_n(T) = f_{\#}(T)$

Similar se prueba $B_1\phi_n(T) = g_{\#}(T)$.

2)
$$\begin{aligned} A_i\phi_n(T)(x_1,\ldots,x_n) &= \phi_n(T)(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_n) \\ &= F(x_1,T(x_2,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_n)) \end{aligned}$$

$$= F(x_1, A_{i-1}T(x_2,\ldots,x_n))$$

$$= \phi_{n-1}\ A_{i-1}(T)(x_1,\ldots,x_n)$$

$\therefore\quad A_i\phi_n(T) = \phi_{n-1}A_{n-1}(T)$

similar se prueba 3.

Por la definición 2-3 se tiene

$$\gamma_{n+1}(\phi_n(T)) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i[A_i\phi_n(T) - B_i\phi_n(T)]$$

$$= -f_{\#}(T)+g_{\#}(T)+\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^i[\phi_{n-1}(A_{i-1}T - B_{i-1}T)]$$

$$= -f_{\#}(T)+g_{\#}(T)+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\phi_{n-1}[A_jT-B_jT];\quad j = i-1$$

$$= -f_{\#}(T)+g_{\#}(T)+\phi_{n-1}[\sum_{j=1}^{n}(-1)^j(-1)^1(A_jT-B_jT)]$$

$$= -f_{\#}(T)+g_{\#}(T)-\phi_{n-1}[\sum_{j=1}^{n}(-1)^j(A_jT - B_jT)]$$

$$= -f_{\#}(T) + g_{\#}(T) - \phi_{n-1}(\partial_n(T)).$$

luego se concluye que para cualquier $u \in Q_n(X)$

$$g_{\#}(u) - f_{\#}(u) = \gamma_{n+1}(\phi_n(u)) + \phi_{n-1}(\partial_n(u)). \qquad (2\text{-}7)$$

Observese que si T es un n-cubo singular degenerado, $n > 0$, entonces $\phi_n(T)$ es un $(n+1)$-cubo singular degenerado, de donde $\phi_n(D\ (X)) \subset D_{n+1}(Y)$. Y así ϕ_n induce el homomorfismo ρ_n: $C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$, de (2-7) resulta que ρ_n satisface (2-5) como se deseaba.

2-4 TIPOS DE HOMOTOPIA.

DEFINICION 2-5

Dos espacios X,Y son del mismo tipo de homotopia, si existen funciones continuas $f: X \longrightarrow Y$ y $g: Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f$ es homotópica a la función identidad en $X(1X)$ y $f \circ g$ es homotópica a $1Y$.

Las funciones f y g que aparecen en esta definición son llamadas equivalencia de homotopía.

Si X e Y son homeomorficos, entonces ellos son del mismo tipo de homotopía (pero no reciprocamente).

TEOREMA 2-2

Si $f: X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces
$f_*: H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$, $n > 0$, $n \in \mathbf{Z}$ y
$f_*: \tilde{H}o(X) \longrightarrow \tilde{H}o(Y)$ son isomorfismos.

<u>Pa</u>

Como f es una equivalencia homotópica entre los espacios topológicos X e Y. Existe $g: Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq 1Y$ y $g \circ f \simeq 1X$.

Aplicando las propiedades 3 y 5 de $f_\#$ y el teorema 2-1 se tiene que $f \circ g$ y $g \circ f$ inducen los homomorfismos:

$(f \circ g)_*: H_n(Y) \longrightarrow H_n(Y)$ y

$(g \circ f)_*: H_n(X) \longrightarrow H_n(X)$, tal que

$(f \circ g)_* = f_* \circ g_* = 1_{H_n}(Y)$

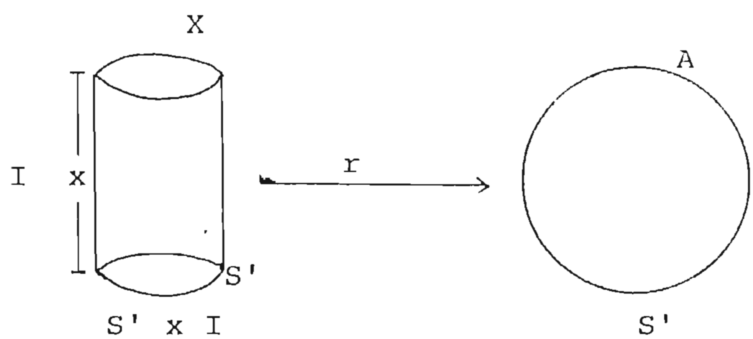
$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* = 1_{H_n}(X)$ //

$\therefore$ f_* es isomorfismo

DEFINICION 2-6

Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$, decimos que A es un retracto de X, si existe $r: X \longrightarrow A$, llamada retracción con $r(a) = a$, $\forall a \in A$.

EJEMPLO 2-2



$r(x,t) = (x,0)$.

es decir S' es un retracto de S' x I.

DEFINICION 2-7

Un sub-conjunto A de X, se llama un retracto por deformación de X, si existe una retracción de X. $r: X \longrightarrow A$ y una homotopía $F: X \times I \longrightarrow X$ tal que:

$F(x,0) = x$

$F(x,1) = r(x); \ \forall x \in X$

$F(a,t) = a, \ \forall a \in A, \ \forall t \in I.$

EJEMPLO 2-3

Si A es un retracto por deformación de X, entonces la función inclusión $i: A \longrightarrow X$ es una equivalencia de homotopía.

Efectivamente:

como A es un retracto por deformación de X, existe una retracción de X $r: X \longrightarrow A$ y una homotopía $F: X \times I \longrightarrow X$ tal que

$F(x,0) = x, \quad F(x,1) = r(x) \quad$ y

$F(a,t) = a, \ \forall a \in A, \ \forall t \in I$ tal que $i_o r = 1_X$ y $r_o i = 1_A$, luego i es una equivalencia de homotopía. /

DEFINICION 2-8

Un espacio topológico X, es contractil a un punto, si existe $x_o \in X$, de manera que $\{x_o\}$ es un rectracto por deformación de X.

Si un espacio X es contractil a un punto, entonces tiene el mismo tipo de homotopía que un espacio consistente de un solo punto. Y sus grupos de homología son como siguen

$H_o(X) \simeq \mathbb{Z}$; $\tilde{H}_o(X) \simeq 0$, $H_n(X) = 0$, $n \neq 0$ ver ejemplo 2-1

EJEMPLO 2-4

Cualquier sub-conjunto convexo de un n-espacio Euclidiano es contractil a un punto.

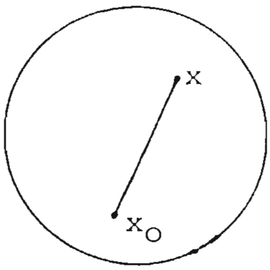


Figura 2 - 4

Definiremos $r: X \longrightarrow \{x_o\}$, de la única manera posible. Además sea $F: X \times I \longrightarrow X$ definido como $F(x,t) = (1-t)x+tx_o$, esta es continua y cumple $F(x,0) = 1_X(x)$, $F(x,1) = x_o = r(x)$ y $F(x_o,t) = x_o$. Así todo sub-conjunto convexo de un n-espacio Euclidiano es contráctil a un punto.

2-5 LA SUCESION EXACTA DE HOMOLOGIA DE UN PAR.

Para efectos de determinar la estructura de varios espacios topológicos. En esta sección generalizaremos nuestra previa definición de grupos de homología, definiendo grupos relativos de homología para cualquier par (X,A) consistente de un espacio topológico X y un sub-espacio A.

Estos grupos son denotados por $H_n(X,A)$, $n \geq 0$. Existe una interesante relación entre estos grupos relativos de homología y los homomorfismos $i_*: H_n(A) \longrightarrow H_n(X)$, inducidos por $i_\#: C_n(A) \longrightarrow C_n(X)$, las cuales se expresan en la denominada sucesión de homología de un par (X,A).

El conocimiento de la estructura de los grupos $H_n(X,A)$ proporcionará información acerca de los homomorfismos $i_*: H_n(A) \longrightarrow H_n(X)$ y vice-versa.

El interes de introducir estos grupos relativos de homología $H_n(X,A)$ es con el propósito de hacer posible el cálculo de los grupos absolutos de homología $H_n(X)$, aún cuando en ciertas circunstancias los grupos relativos tienen un interes independiente.

DEFINICION DE GRUPOS RELATIVOS DE HOMOLOGIA

Sea A un sub-espacio de un Espacio topológico X; y sea $i: A \longrightarrow X$ la función inclusión. Se verifica facilmente que el homomorfismo inducido $i_\#: C_n(A) \longrightarrow C_n(X)$ es un monomorfismo; luego podemos considerar $C_n(A)$ como un sub-grupo de $C_n(X)$; es el sub-grupo generado por todos los cubos singulares no degenerados en A. Usaremos la notación $C_n(X,A)$ para denotar el grupo cociente $\frac{C_n(X)}{C_n(A)}$; el cual es llamado el grupo de cadenas n-dimencionales del par (X,A).

El operador frontera $\partial'_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ tiene la propiedad de que $\partial_n(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$ donde $\partial_n = \dfrac{\partial'_n}{C_n(A)}$ i.e. ∂_n es la función ∂'_n restringida a $C_n(A)$. Por consiguiente induce un homomorfismo de grupos cocientes
$\partial''_n: C_n(X,A) \longrightarrow C_{n-1}(X,A)$.

Definiremos el grupo de ciclos n-dimencionales de (X,A) para $n > 0$ mediante:

$Z_n(X,A) = \operatorname{Ker} \partial''_n = \{u \in C_n(X,A) / \partial''_n(u) = 0\}$ y para $n \geq 0$ el grupo de ciclos fronteras n-dimencionales mediante:

$B_n(X,A) = \operatorname{Im} \partial''_{n+1} = \partial''_{n+1}(C_{n+1}(X,A))$.

Como $\partial''_n \circ \partial''_{n+1} = 0$ se deriva que $B_n(X,A) \subset Z_n(X,A)$ y por tanto podemos definir $H_n(X,A) = \dfrac{Z_n(X,A)}{B_n(X,A)}$.

En el caso $n = 0$ definamos

$Z_o(X,A) = C_o(X,A)$ y $H_o(X,A) = \dfrac{C_o(X,A)}{B_o(X,A)}$. Observese que si $A = \phi$, entonces $H_n(X,A) = H_n(X)$. En el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
C_{n+1}(A) \arrow[r, "i_\#"] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "J_\#"] \arrow[d, "\partial'_{n+1}"] & C_{n+1}(X,A) \arrow[d, "\partial''_{n+1}"] \\
C_n(A) \arrow[r, "i_\#"] \arrow[d, "\partial_n"] & C_n(X) \arrow[r, "J_\#"] \arrow[d, "\partial'_n"] & C_n(X,A) \arrow[d, "\partial''_n"] \\
C_{n-1}(A) \arrow[r, "i_\#"] \arrow[d] & C_{n-1}(X) \arrow[r, "J_\#"] \arrow[d] & C_{n-1}(X,A) \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMA 2-1

Las flechas verticales denotan el operador frontera apropiado ∂ y $J_\#$ denota el epimorfismo de $C_n(X)$ sobre su grupo cociente $C_n(X,A)$. Cada cuadrado en este diagrama es conmutativo.

Definamos $C_n(A) = C_n(X) = C_n(X,A) = \{0\}$ para $n < 0$. Ya se tiene que $i_\#$ induce un homomorfismo i_* de $H_n(A)$ en $H_n(X)$; $\forall n$. Similarmente, los homomorfismos $J_\#$ inducen homomorfismos $J_*: H_n(X) \longrightarrow H_n(X,A)$ $n \geq 0$.

Definiremos ahora una tercera sucesión de homomorfismos $\partial_*: H_n(X,A) \longrightarrow H_{n-1}(A)$ i.e. a través del homomorfismo conexión, de la siguiente manera:

Sea $u \in H_n(X,A) = \dfrac{Z_n(X,A)}{B_n(X,A)}$, donde $u = u' + \text{Im}\ \partial''_{n+1}$;

$u' \in Z_n(X,A) \subset C_n(X,A)$; como $J_\#$ es un epimorfismo, existe $u'' \in C_n(X)$ tal que $J_\#(u'') = u'$ y además $\partial_n'(u'') \in C_{n-1}(X)$ y por conmutatividad del diagrama 2-1

$J_\#(\partial_n'(u'')) = \partial_n''(J_\#(u'')) = \partial_n''(u') = 0$; i.e.

$J_\#(\partial_n'(u'')) = \partial_n'(u'') + C_{n-1}(A) = C_{n-1}(A)$

así $\partial_n'(u'') \in C_{n-1}(A)$ además $(\partial_{n-1} \circ \partial_n')(u'') = 0$

por lo tanto $\partial_n'(u'') \in \operatorname{Ker} \partial_{n-1} \subset C_{n-1}(A)$, definamos ahora

$\partial_*: H_n(X,A) \longrightarrow H_{n-1}(A)$ tal que

$\partial_*(u' + \operatorname{Im} \partial_{n+1}'') = \partial_n'(u'') + \operatorname{Im} \partial_n$, con la condición

$J_\#(u'') = u'$. ∂_* así definido es un homomorfismo

[1 - 4, cap. I].

Llamaremos a ∂_* el operador conexión del par (X,A).

Consideremos la siguiente sucesión infinita de grupos y homomorfismo para cualquier par (X,A).

$$\cdots \xrightarrow{J_*} H_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{J_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_*}$$

esta sucesión se denomina la sucesión de homología del par (X,A).

TEOREMA 2-3

La sucesión de homología de cualquier par (X,A) es exacta.

<u>Pa</u>

Se probará

1) $\operatorname{Im} i_* = \operatorname{Ker} J_*$

2) $\operatorname{Im} J_* = \operatorname{Ker} \partial_*$

3) $\operatorname{Im} \partial_* = \operatorname{Ker} i_*$

1) " $\subset$ "

Sea $(n + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}) \in \operatorname{Im} i_*$

$(n + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}) \in \operatorname{Im} i_* \Rightarrow \exists (h + \operatorname{Im} \partial_{n+1}) \in H_n(A)$ tal que

$i_*(h + \operatorname{Im} \partial_{n+1}) = n + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}$ o sea ,

$i_\#(h) + \operatorname{Im} \partial'_{n+1} = n + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}$, por otro lado

$$
\begin{aligned}
J_*(n + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}) &= J_*(i_\#(h) + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}) \\
&= J_\#(i_\#(h)) + \operatorname{Im} \partial''_{n+1} \\
&= i_\#(h) + C_n(A) + \operatorname{Im} \partial''_{n+1} \\
&= i(h) + C_n(A) + \operatorname{Im} \partial''_{n+1} \\
&= h + C_n(A) + \operatorname{Im} \partial''_{n+1} \\
&= C_n(A) + \operatorname{Im} \partial''_{n+1} \\
&= \operatorname{Im} \partial''_{n+1}
\end{aligned}
$$

" $\supset$ "

Sea $(r + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}) \in \operatorname{Ker} J_*$; así

$J_*(r + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}) = \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$

$J_\#(r) + \operatorname{Im} \partial''_{n+1} = \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$; de donde $J_\#(r) \in \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$

Como $J_\#(r) \in \operatorname{Im} \partial''_{n+1} \Rightarrow \exists (m + C_{n+1}(A)) \in C_{n+1}(X,A)$

tal que $\partial''_{n+1}(m + C_{n+1}(A)) = J_\#(r)$ o sea

$\partial'_{n+1}(m) + C_n(A) = r + C_n(A)$ o que

$(r - \partial'_{n+1}(m)) \in C_n(A)$; además

$\partial_n(r - \partial'_{n+1}(m)) \in C_{n-1}(A)$ ahora

$$\begin{aligned} \partial_n(r - \partial'_{n+1}(m)) &= i(\partial_n(r - \partial'_{n+1}(m))) \\ &= (i \circ \partial_n)(r - \partial'_{n+1}(m)) \\ &= (i_\#(\partial_n))(r - \partial'_{n+1}(m)) \\ &= \partial'_n(i_\#(r - \partial'_{n+1}(m))) \\ &= \partial'_n(r - \partial'_{n+1}(m)) \\ &= \partial'_n(r) - \partial'_n(\partial'_{n+1}(m)) \\ &= 0 \text{ ; es decir} \end{aligned}$$

$(r - \partial'_{n+1}(m)) \in \operatorname{Ker} \partial_n$; además

$$\begin{aligned} r + \operatorname{Im} \partial'_{n+1} &= [r - \partial'_{n+1}(m)] + \operatorname{Im} \partial'_{n+1} \\ &= i(r - \partial'_{n+1}(m)) + \operatorname{Im} \partial'_{n+1} \\ &= i_\#(r - \partial'_{n+1}(m)) + \operatorname{Im} \partial'_{n+1} \\ &= i_*[(r - \partial'_{n+1}(m)) + \operatorname{Im} \partial_{n+1}] \quad / \end{aligned}$$

$\therefore \quad r + \operatorname{Im} \partial'_{n+1} \in \operatorname{Im} i_*$

2) " c "

Sea $(m + \operatorname{Im} \partial''_{n+1}) \in \operatorname{Im} J_*$

$(m + \operatorname{Im} \partial''_{n+1}) \in \operatorname{Im} J_* \Rightarrow \exists (t + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}) \in H_n(X)$ tal que

$J_*(t + \operatorname{Im} \partial'_{n+1}) = m + \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$

$J_\#(t) + \operatorname{Im} \partial''_{n+1} = m + \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$; así

$$\begin{aligned} \partial_*(m + \operatorname{Im} \partial''_{n+1}) &= \partial_*(J_\#(t) + \operatorname{Im} \partial''_{n+1}) \\ &= \partial'_n(u'') + \operatorname{Im} \partial_n ; \; J_\#(u'') = J_\#(t) \end{aligned}$$

como $J_\#(u'') = J_\#(t) \Rightarrow u'' + C_n(A) = t + C_n(A)$

$$\Rightarrow (u'' - t) \in C_n(A) \subset C_n(X)$$

$$\Rightarrow \partial_n'(u'' - t) \in \text{Im}\, \partial_n$$

$$\Rightarrow [\partial_n'(u'') - \partial_n'(t)] \in \text{Im}\, \partial_n$$

$$\Rightarrow \partial_n'(u'') \in \text{Im}\, \partial_n \text{ ; así}$$

$\partial_*(m + \text{Im}\, \partial_{n+1}'') = \text{Im}\, \partial_n$

" $\supset$ "

Sea $(h + \text{Im}\, \partial_{n+1}'') \in \text{Ker}\, \partial_*$, i.e.

$\partial_*(h + \text{Im}\, \partial_{n+1}'') = \text{Im}\, \partial_n = \partial_n'(0) + \text{Im}\, \partial_n;\ J_\#(0) = h$

luego $h + \text{Im}\, \partial_{n+1}'' = J_\#(0) + \text{Im}\, \partial_{n+1}''$

$$= J_*(0 + \text{Im}\, \partial_{n+1}') \quad / \quad \text{así}$$

$(h + \text{Im}\, \partial_{n+1}'') \in \text{Im}\, J_*$.

3) " $\subset$ "

Sea $(p + \text{Im}\, \partial_n) \in \text{Im}\, \partial_* \subset H_{n-1}(A) = \dfrac{\text{Ker}\, \partial_{n-1}}{\text{Im}\, \partial_n}$

$(p + \text{Im}\, \partial_n) \in \text{Im}\, \partial_* \Rightarrow \exists (r + \text{Im}\, \partial_{n+1}'') \in H_n(X,A)$ tal que

$\partial_*(r + \text{Im}\, \partial_{n+1}'') = P + \text{Im}\, \partial_n$; o sea

$\partial_n'(u'') + \text{Im}\, \partial_n = p + \text{Im}\, \partial_n;\ J_\#(u'') = r$

ahora $i_*(p + \text{Im}\, \partial_n) = i_*(\partial_n'(u'') + \text{Im}\, \partial_n)$

$$= i_\#(\partial_n'(u'')) + \text{Im}\, \partial_n'$$

$$= i(\partial_n'(u'')) + \text{Im}\, \partial_n'$$

$$= \partial_n'(u'') + \text{Im}\, \partial_n'$$

$$= \text{Im}\, \partial_n' \quad /$$

$\therefore\ (p + \text{Im}\, \partial_n) \in \text{Ker}\, i_*$

" $\supset$ "

Sea $(t + \text{Im}\, \partial_n) \in \text{Ker}\, i_*;\ t \in \text{Ker}\, \partial_{n-1}$

luego $i_*(t + \mathrm{Im}\ \partial_n) = \mathrm{Im}\ \partial'_n$

$i_\#(t) + \mathrm{Im}\ \partial'_n = \mathrm{Im}\ \partial'_n$;

$t + \mathrm{Im}\ \partial'_n = \mathrm{Im}\ \partial'_n$; i.e.

$t \in \mathrm{Im}\ \partial'_n$, para el cual existe $u'' \in C_n(X)$

tal que $\partial'_n(u'') = t$; además $J_\#(u'') = u' \in C_n(X,A)$

de donde

$t + \mathrm{Im}\ \partial_n = \partial'_n(u'') + \mathrm{Im}\ \partial_n$; $J_\#(u'') = u' \in C_n(X,A)$

$= \partial_*(u' + \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1})$ //

$\therefore\ (t + \mathrm{Im}\ \partial_n) \in \mathrm{Im}\ \partial_*$

EJEMPLO 2-5

Sea (X,A) un par con $A \neq \phi$, y consideremos los grupos de homología reducidos $\tilde{H}o(A)$ y $\tilde{H}o(X)$ como sub-grupos de $Ho(A)$ y $Ho(X)$ respectivamente, se prueba que el operador conexión $\partial_*: H_1(X,A) \longrightarrow Ho(A)$, envia de $H_1(X,A)$ en $\tilde{H}o(A)$ y la siguiente sucesión es exacta.

$$\cdots \xrightarrow{J_*} H_1(X,A) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}o(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}o(X) \xrightarrow{J_*} Ho(X,A) \longrightarrow 0$$

i.e., podemos reemplazar $Ho(A)$ y $Ho(X)$ por $\tilde{H}o(A)$ y $\tilde{H}o(X)$ respectivamente en la sucesión de homología del par (X,A) y la sucesión permanece exacta.

La prueba se realiza mediante un rastreo de diagramas y tomando encuenta la sucesión de homología del par (X,A).

2-6 PROPIEDADES PRINCIPALES DE LOS GRUPOS DE HOMOLOGIA RELATIVOS.

Para determinar la estructura de los grupos de homología relativos, de un par, necesitamos conocer las propiedades generales de estos grupos de homologías recientemente definidos.

Primero consideraremos algunas propiedades que son estrictamente análogas a las discutidas en la sección 2-3.

Sean (X,A), (Y,B) pares consistentes de un espacio topológico y un sub-espacio. Diremos que una función continua f que mapea X en Y es una función del par (X,A) en el par (Y,B), si $f(A) \subset B$, usaremos la notación
$f: (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ para indicar tal función.

Nuestra primera observación, es que cualquier función de pares $f: (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ induce un homomorfismo
$f_*: H_n(X,A) \longrightarrow H_n(Y,B)$ de los correspondientes grupos de homología relativos, este homomorfismo inducido se define así:

la función continua f induce un homomorfismo
$f_\#: C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$ $\forall n$, como se describe en la sección 2-3, ya que $f(A) \subset B$, resulta que $f_\#$ envia al sub-grupo $C_n(A)$ al sub-grupo $C_n(B)$ y por consiguiente resulta inducido un homomorfismo de grupos cocientes $C_n(X,A) \longrightarrow C_n(Y,B)$, al cual lo denotaremos por $\hat{f}_\#$. Estos homomorfismos inducidos conmu-

tan con los operadores frontera, en el sentido que el siguiente diagrama es conmutativo para cada n.

$$\begin{array}{ccc} C_n(X,A) & \xrightarrow{\hat{f}_\#} & C_n(Y,B) \\ \Big\downarrow \partial''_n & & \Big\downarrow \gamma''_n \\ C_{n-1}(X,A) & \xrightarrow{\hat{f}_\#} & C_{n-1}(Y,B) \end{array}$$

DIAGRAMA 2-2

$$\gamma''_n \circ \hat{f}_\# = \hat{f}_\# \circ \partial''_n$$

Pa

$$\begin{aligned}(\gamma''_n \circ \hat{f}_\#)(m + C_n(A)) &= \gamma''_n(\hat{f}_\#(m + C_n(A))) \\ &= \gamma''_n(f_\#(m) + C_n(B)) \\ &= \gamma'_n(f_\#(m)) + C_{n-1}(B) \\ &= f_\#(\partial'_n(m)) + C_{n-1}(B); \text{ por P2 de } f_\# \\ &= \hat{f}_\#(\partial'_n(m) + C_{n-1}(A)) \\ &= \hat{f}_\#(\partial''_n(m + C_n(A))) \\ &= (\hat{f}_\# \circ \partial''_n)(m + C_n(A)) \quad /\end{aligned}$$

Resulta ahora, al igual que en la sección 2-3 $\hat{f}_\#$ induce un homomorfismo $\hat{f}_*$: $H_n(X,A) \longrightarrow H_n(Y,B)$ en los correspondientes grupos de homología $\forall n$, definido como

$\hat{f}_*(Z + \mathrm{Im}\, \partial''_{n+1}) = \hat{f}_\#(Z) + \mathrm{Im}\, \gamma''_{n+1}$ donde

∂''_{n+1}: $C_{n+1}(X,A) \longrightarrow C_n(X,A)$ y

γ''_{n+1}: $C_{n+1}(Y,B) \longrightarrow C_n(Y,B)$; tomando en cuenta que

$f\colon (x,A) \longrightarrow (X,A)$ es la función identidad se prueba que:

$\hat{f}_{\#}\colon C_n(X,A) \longrightarrow C_n(X,A)$

$\hat{f}_{*}\colon H_n(X,A) \longrightarrow H_n(X,A)$

$\hat{f}_{*}\colon \tilde{H}o(X,A) \longrightarrow \tilde{H}o(X,A)$; son tambien funciones identidades. Además si $(X,A) \xrightarrow{f} (Y,B) \xrightarrow{g} (Z,C)$ son funciones continuas entre pares de espacios topológicos, denotando por $f\circ g\colon (X,A) \longrightarrow (Z,C)$ la composición de las dos funciones continuas, bajo estas condiciones se tiene que $(\widehat{f\circ g})_*$ y $\hat{f}_* \circ \hat{g}_*$ es el mismo hmomorfismo de $H_n(X,A)$ en $H_n(Z,C)$ y de $\tilde{H}o(X,A)$ en $\tilde{H}o(Z,C)$ se sigue que $(\widehat{f\circ g})_* = \hat{f}_* \circ \hat{g}_*$. Las pruebas son similares a las realizadas en las propiedades 3-4 y 3-5 de la sección 2-3.

Pasamos a considerar la relación de homotopía para funciones de pares de espacios. La generalización apropiada de la definición 4-1 es la siguiente.

DEFINICION 2-9

Dos funciones $f,g\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ son homotópicas (como funciones de pares) si existe una función continua $F\colon (I \times X,\ I \times A) \longrightarrow (Y,B)$ tales que $F(0,x) = f(x)$ y $F(1,x) = g(x)$, $\forall\ x \in X$ el hecho es que requerimos ahora que $F(I \times A) \subset B$. Además de las condiciones de la definición 2-4 esta condición adicional nos permite probar el siguiente resultado.

TEOREMA 2-4

Sean $f,g\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ funciones de pares. Si f y g son homotópicas (como funciones de pares), entonces los homomorfismos inducidos $\hat{f}_*$ y $\hat{g}_*$ de $H_n(X,A)$ en $H_n(Y,B)$ son los mismos.

Pa

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial''_{n+1}"] & C_n(X,A) \arrow[r, "\partial''_n"] \arrow[dl, "\rho_{n\#}"'] \arrow[d, shift right, "\hat{f}_\#"'] \arrow[d, shift left, "\hat{g}_\#"] & C_{n-1}(X,A) \arrow[r] \arrow[dl, "\rho(n-1)\#"'] & {} \\
{} \arrow[r] & C_{n+1}(Y,B) \arrow[r, "\gamma''_{n+1}"'] & C_n(Y,B) \arrow[r, "\gamma''_n"'] & {} &
\end{tikzcd}
$$

DIAGRAMA 2-3

$$\hat{f}_\# - \hat{g}_\# = \gamma''_{n+1} \circ \rho_{n\#} + \rho(n-1)\# \circ \partial''_n$$

Tenemos que $F(I \times A) \subset B$, por lo tanto ρ_n es una función de $C_n(A)$ en $C_{n+1}(B)$, así ρ_n induce un homomorfismo

$\rho_{n\#}\colon C_n(X,A) \longrightarrow C_{n+1}(Y,B)$ tales que

$\rho_{n\#}(x + C_n(A)) = \rho_n(x) + C_{n+1}(B)$.

Además $f_\#$ mapea $C_n(A)$ en $C_n(B)$, por lo que $f_\#$ induce un homomorfismo $\hat{f}_\#\colon C_n(X,A) \longrightarrow C_n(Y,B)$ definido como $\hat{f}_\#(t + C_n(A)) = f_\#(t) + C_n(B)$.

así:

$$
\begin{aligned}
(\gamma''_{n+1} \circ \rho_{n\#} + \rho_{(n-1)\#} \circ \partial''_n)(x + C_n(A)) &= \\
&= \gamma''_{n+1}(\rho_{n\#}(x + C_n(A))) + \rho(n-1)\#(\partial''_n(x + C_n(A))) \\
&= \gamma''_{n+1}(\rho_n(x) + C_{n+1}(B)) + \rho(n-1)\#(\partial'_n(x) + C_{n-1}(A)) \\
&= \gamma'_{n+1}(\rho_n(x)) + C_n(B) + \rho_{n-1}(\partial'_n(x)) + C_n(B) \\
&= (\gamma'_{n+1} \circ \rho_n)(x) + (\rho_{n-1} \circ \partial'_n)(x) + C_n(B) \\
&= f_\#(x) - g_\#(x) + C_n(B) \\
&= (f_\# - g_\#)(x) + C_n(B) \\
&= (\widehat{f_\# - g_\#})(x + C_n(A)) \\
&= (\hat{f}_\# - \hat{g}_\#)(x + C_n(A))
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad f \sim g$$

Pasamos a analizar el efecto de $f: (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ sobre las sucesiones en homología de los pares (X,A), (Y,B). Es decir, podemos convenientemente arreglar las dos sucesiones exactas y los homomorfismos inducidos por f. En el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\hat{f}_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(B) \arrow[r, "i'_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "j'_*"] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial'_*"] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

DIAGRAMA 2-4

de tal manera que los cuadrados conmuten.

Pa

. Definiremos previamente algunas funciones.

$\hat{f}_{\#}: C_n(X,A) \longrightarrow C_n(Y,B) / \hat{f}_{\#}(q + C_n(A)) = f_{\#}(q) + C_n(B)$.

$\hat{f}_{*}: H_n(X,A) \longrightarrow H_n(Y,B) / \hat{f}_{*}(z + \text{Im } \partial''_{n+1}) = \hat{f}_{\#}(z) + \text{Im } \gamma''_{n+1}$

$f_{*}: H_n(X) \longrightarrow H_n(Y) / f_{*}(k + \text{Im } \partial'_{n+1}) = f_{\#}(k) + \text{Im } \gamma'_{n+1}$

así

$$\begin{aligned} f_*(i_*(x + \text{Im } \partial_{n+1})) &= f_*(x + \text{Im } \partial'_{n+1}) \\ &= f_{\#}(x) + \text{Im } \gamma'_{n+1} \\ &= i'_*(f_{\#}(x) + \text{Im } \gamma_{n+1}) \\ &= i'_*(f_*(x + \text{Im } \partial_{n+1})) \qquad / \end{aligned}$$

$\therefore \; f_* \circ i_* = i'_* \circ f_*$. Además

$$\begin{aligned} \hat{f}_*(J_*(k + \text{Im } \partial'_{n+1})) &= \hat{f}_*(J_{\#}(k) + \text{Im } \partial''_{n+1}) \\ &= \hat{f}_{\#}(j_{\#}(k)) + \text{Im } \gamma''_{n+1} \\ &= \hat{f}_{\#}(k + C_n(A)) + \text{Im } \gamma''_{n+1} \\ &= \hat{f}_{\#}(k) + C_n(B) + \text{Im } \gamma''_{n+1} \\ &= j'_{\#}(f_{\#}(k)) + \text{Im } \gamma''_{n+1} \\ &= j'_*(f_{\#}(k) + \text{Im } \gamma'_{n+1}) \\ &= (j'_* \circ f_*)(k + \text{Im } \partial'_{n+1}) \qquad / \end{aligned}$$

$\therefore \; \hat{f}_* \circ j_* = j'_* \circ f_*$

y finalmente tenemos:

$$f_*(\partial_*(t + \text{Im }\partial''_{n+1})) = f_*(\partial'_n(u'') + \text{Im }\partial_n);\ j_\#(u'') = t$$

$$= f_\#(\partial'_n(u'')) + \text{Im }\gamma_n$$

$$= \gamma'_n(f_\#(u'')) + \text{Im }\gamma_n;\ \text{prop. 2; sec. 2-2}$$

$$= \partial'_*(u' + \text{Im }\gamma''_{n+1});\ J'_\#(f_\#(u'')) = u' \in C_n(Y,B)$$

$$= \partial'_*(J'_\#(f_\#(u'')) + \text{Im }\gamma''_{n+1})$$

$$= \partial'_*(f_\#(u'') + C_n(B) + \text{Im }\gamma''_{n+1})$$

$$= \partial'_*(\hat{f}_\#(u'' + C_n(A)) + \text{Im }\gamma''_{n+1})$$

$$= \partial'_*(\hat{f}_\#(J_\#(u'')) + \text{Im }\gamma''_{n+1})$$

$$= \partial'_*(\hat{f}_\#(t) + \text{Im }\gamma''_{n+1})$$

$$= \partial'_*(\hat{f}_*(t + \text{Im }\partial''_{n+1}))$$

$$= (\partial'_* \circ \hat{f}_*)(t + \text{Im }\partial''_{n+1}) \qquad /$$

$$\therefore\ f_* \circ \partial_* = \partial'_* \circ \hat{f}_*$$

Daremos ahora lo que es talves la propiedad más importante de los grupos de homología relativos, llamada la propiedad de ESCISION. No existe analogo de esta propiedad para grupos de homologías absolutos.

TEOREMA 2-5

Sea (X,A) un par y $W \subset A$ tales que $\bar{W} \subset \mathring{A}$, entonces la función inclusión $(X - W, A - W) \longrightarrow (X,A)$ induce un isomorfismo de grupos de homología relativos

$H_n(X - W, A - W) \approx H_n(X,A)$, $\forall\ n \geq 0$.

En otras palabras la propiedad de Escisión, significa que podemos escindir (restar) el conjunto W del espacio topológico X y del sub-espacio A sin afectar los grupos de homologías relativos.

La prueba de este teorema depende del hecho que en la definición de grupos de homología podemos restringir nuestra consideración a cubos singulares arbitrariamente pequeños y esto no cambiaría en nada. Por ejemplo si X es un espacio métrico y ε es un número pequeño positivo, podemos insistir que solo cubos singulares de diámetro menor que ε serán usados en la definición de $H_n(X,A)$ si así lo deseamos. Si X no es un espacio métrico podemos recurrir por cuestión de espacio a escoger una cubierta abierta de X. Y entonces usar solo cubos singulares suficientemente pequeños que esten contenidos en un conjunto simple de la referida cubierta abierta.

DEFINICION 2-10

Sea $\mu = \{U_\lambda / \lambda \in \Lambda\}$ una familia de sub-conjuntos del espacio topológico X de tal manera que los interiores de los conjuntos U_λ cubran a X (podemos pensar en esta familia como una generalización de la noción de una cubierta abierta de X) un n-cubo singular $T: I^n \longrightarrow X$ se dice que es pequeño de orden μ, si existe un $\lambda \in \Lambda$ tal que $T(I^n) \subset U_\lambda$.

Por ejemplo si X es un espacio métrico y ε es un número positivo pequeño, podemos escoger μ que cubra a X y que esté constituida por todas las esferas de radio ε. Podemos ahora recurrir a nuestras definiciones precedentes y sistematicamente modificarlas permitiendo solamente cubos singulares que sean pequeños de orden μ.

Este procedimiento funciona, ya que si $T: I^n \longrightarrow X$ es un n-cubo singular de orden μ, entonces $\partial_n(T)$ es una combinación lineal de (n-1)-cubos singulares, todos los cuales son también pequeños de orden μ.

NOTACION:

$Q_n(X,\mu)$ denota el sub-grupo de $Q_n(X)$ generado por los n-cubos singulares que son pequeños de orden μ.

$D_n(X,\mu) = Q_n(X,\mu) \cap D_n(X)$ y

$C_n(X,\mu) = \dfrac{Q_n(X,\mu)}{D_n(X,\mu)}$; similarmente para cualquier sub-espacio A de X.

$Q_n(A,\mu) = Q_n(A) \cap Q_n(X,\mu)$

$D_n(A,\mu) = D_n(A) \cap Q_n(A,\mu)$ y

$C_n(A,\mu) = \dfrac{Q_n(A,\mu)}{D_n(A,\mu)}$; finalmente para la cadena de grupos relativos hacemos:

$C_n(X,A,\mu) = \dfrac{C_n(X,\mu)}{C_n(A,\mu)}$; notese que ∂_n aplica

$Q_n(X,\mu)$ en $Q_{n-1}(X,\mu)$ y por tanto induce homomorfismos.

$\partial'_n: C_n(X,\mu) \longrightarrow C_{n-1}(X,\mu)$

$\partial_n: C_n(A,\mu) \longrightarrow C_{n-1}(A,\mu)$

$\partial''_n: C_n(X,A,\mu) \longrightarrow C_{n-1}(X,A,\mu)$, así podemos definir exactamente como antes

$Z_n(X,A,\mu) = \{U \in C_n(X,A,\mu)/\partial''_n(U) = 0\}$

$B_n(X,A,\mu) = \partial''_{n+1}(C_{n+1}(X,A,\mu)$, luego como

$B_n(X,A,\mu) \subset Z_n(X,A,\mu)$ podemos definir el grupo de homología

$H_n(X,A,\mu) = \dfrac{Z_n(X,A,\mu)}{B_n(X,A,\mu)}$ nótese que sucede para $n = 0$.

$Q_o(X,\mu) = Q_o(X)$ y por lo tanto se sigue que

$C_o(X,A,\mu) = C_o(X,A)$ y $Z_o(X,A,\mu) = C_o(X,A)$

luego $Ho(X,A,\mu) = \dfrac{C_o(X,A)}{B_o(X,A,\mu)}$.

Además, nótese que la inclusión $Q_n(X,\mu) \subset Q_n(X)$ induce un homomorfismo $\sigma_n: C_n(X,A,\mu) \longrightarrow C_n(X,A)$, de momento σ_n es un monomorfismo. Obviamente el homomorfismo σ conmuta con el operador frontera ∂ i.e., el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
C_n(X,A,\mu) \arrow[r, "\partial''_n"] \arrow[d, "\sigma"] & C_{n-1}(X,A,\mu) \arrow[d, "\sigma"] \\
C_n(X,A) \arrow[r, "\partial''_n"] & C_{n-1}(X,A)
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMA 2-5

Pa

$$\begin{aligned}\sigma(\partial''_n(p + C_n(A,\mu))) &= \sigma(\partial'_n(p) + C_{n-1}(A,\mu))\\ &= \partial'_n(p) + C_{n-1}(A)\\ &= \partial''_n(p + C_n(A))\\ &= \partial''_n(\sigma(p + C_n(A,\mu)))\\ &= (\partial''_n \circ \sigma)(p + C_n(A,\mu)) \quad /\end{aligned}$$

de donde σ aplica $Z_n(X,A,\mu)$ en $Z_n(X,A)$ y $B_n(X,A,\mu)$ en $B_n(X,A)$ y luego induce un homomorfismo

$\sigma_*: H_n(X,A,\mu) \longrightarrow H_n(X,A)$ $\forall$ n.

TEOREMA 2-6

Asumiendo que μ satisface las hipótesis anteriores, entonces los homomorfismos inducidos $\sigma_*: H_n(X,A,\mu) \longrightarrow H_n(X,A)$ son isomorfismos.

Este teorema es la formulación precisa de la afirmación hecha previamente de que podemos restringir nuestra consideración a cubos singulares pequeños de orden μ en la definición de $H_n(X,A)$.

La prueba se proporcionará en la proxima sección.

Daremos ahora la prueba del teorema 2-5, usando el teorema 2-6.

<u>Pa</u>

Sea el par topológico (X,A) y el conjunto W que satisfacen las condiciones del teorema 2-5. La hipótesis implica que $X = \mathring{A} \cup X - \bar{W} \subset \mathring{A} \cup \overset{\circ}{\widehat{X - W}}$; así $X = \mathring{A} \cup \overset{\circ}{\widehat{X - W}}$ por tanto $\mu = \{A, X-W\}$ es una cubierta abierta generalizada del tipo que aparece en el teorema 2-6.

Nótese que para cada n $C_n(X,\mu) = C_n(A) + C_n(X-W)$; (esta no es una suma directa). Para probar la propiedad de escisión, consideraremos el siguiente diagrama conmutativo, para cada entero n.

$$\begin{tikzcd}
C_n(X-W, A-W) \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "2"'] & & C_n(X,A) \\
& C_n(X,A,\mu) \arrow[ur, "\sigma_n"'] &
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMA 2 - 6

Cada uno de los homomorfismos indicados en el diagrama 2-6, es inducido por una función de inclusión. En términos de grupos de homología obtenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
H_n(X-W, A-W) \arrow[rr, "3"] \arrow[dr, "4"'] & & H_n(X,A) \\
& H_n(X,A,\mu) \arrow[ur, "\sigma_*"'] &
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMA 2 - 7

Deseamos ahora probar que el homomorfismo indicado por la flecha 3 es un isomorfismo, como σ_* es un isomorfismo (en base al teorema 2 - 6) es suficiente probar que 4 es un isomorfismo. Ahora el homomorfismo asignado por la flecha 4 es inducido por el homomorfismo asignado por la flecha 2; consideremos ahora este homomorfismo con más detalle. Por definición

$$C_n(X-W,\ A-W) = \frac{C_n(X-W)}{C_n(A-W)}$$

$$= \frac{C_n(X-W)}{C_n(X-W) \cap C_n(A)} \text{ ; similarmente}$$

$$C_n(X,A,\mu) = \frac{C_n(X,\mu)}{C_n(A,\mu)} = \frac{C_n(A) + C_n(X-W)}{C_n(A)}$$

ya que $C_n(A,\mu) = C_n(A) + C_n(A-W) = C_n(A)$ de donde el homomorfismo denotado por la flecha 2 consiste de homomorfismos

$$\frac{C_n(X-W)}{C_n(X-W) \cap C_n(A)} \xrightarrow{\ *\ } \frac{C_n(X-W) + C_n(A)}{C_n(A)}; \text{ para } n = 0,1,\ldots, \text{ los}$$

cuales son inducidos por las obvias relaciones de inclusión. Pero de acuerdo al teorema 2-9, capítulo I, Tse - Tsen - Hu, Algebra Homológica, un homomorfismo como el establecido por $*$ es un isomorfismo.

Por lo tanto la flecha 2 en el diagrama 2-6 designa un isomorfismo, luego el homomorfismo indicado por la flecha 4 en el diagrama 2-7 es también un isomorfismo. /

2-7 LA SUB-DIVISION DE CUBOS SINGULARES Y LA PRUEBA DEL TEOREMA 2-6.

En esta sección daremos una técnica de sub-dividir cubos singulares y la utilizaremos para demostrar el teorema 2-6.

Primero probaremos el caso cuando $\Lambda = \phi$. Para ello introduciremos un homomorfismo: Sdn: $Q_n(X) \longrightarrow Q_n(X)$; llamado el operador sub-división.

Consideremos ahora el proceso de sub-dividir un cubo singular. Probablemente la manera más simple de sub-dividir el cubo I^n es dividirlo en 2^n cubos cada uno de tamaño 1/2, mediante los hiperplanos $X_i = 1/2$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sea ξ_n el conjunto de todos los vértices del cubo I^n, una n-upla de números reales $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in \xi_n$ ssi $e_i = 0$ ó $e_i = 1$, $\forall$ i.

Definamos ahora para cualquier n-cubo singular $T: I^n \longrightarrow X$ y para cualquier $e \in \xi_n$, $Fe(T): I^n \longrightarrow X$ mediante la fórmula $Fe(T)(x) = T(\frac{1}{2}(x+e))$, para cualquier $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$.

Definamos entonces Sdn: $Q_n(X) \longrightarrow Q_n(X)$ como

$Sdn(T) = \sum_{e \in \xi_n} Fe(T)$ para $n \geq 1$; y si T es un 0-cubo singular, entonces $Sdo(T) = T$.

Algunas consecuencias inmediatas de la definición del ho momorfismo Sdn son los siguientes.

LEMA 2-1

Si T es un n-cubo degenerado, entonces lo es Fe(T).

Pa

Sea $x \in I^n$, $e \in \xi_n$.

$$Fe(T)(x_1,x_2,\ldots,x_n) = T\left(\frac{x_1+e_1}{2}, \frac{x_2+e_2}{2}, \ldots, \frac{x_n+e_n}{2}\right)$$

como T es degenerado, existe $1 \leq i \leq n$ tales que

$T\left(\frac{x_1+e_1}{2}, \frac{x_2+e_2}{2}, \ldots, \frac{x_n+e_n}{2}\right)$ no depende de $\frac{x_i+e_i}{2}$; así

$T\left(\frac{x_1+e_1}{2}, \frac{x_2+e_2}{2}, \ldots, \frac{x_n+e_n}{2}\right)$ no depende de x_i de donde Fe(T) es degenerado. /

por lo tanto Sdn aplica de $D_n(X)$ en $D_n(X)$ e induce un homomorfismo Sdn: $C_n(X) \longrightarrow C_n(X)$.

LEMA 2-2

Los homomorfismos Sdn conmutan con el operador frontera i.e. $\partial'_n \circ Sdn = Sdn-1 \circ \partial'_n$.

Para probar este lema es necesario demostrar las siguientes tres proposiciones.

PROPOSICION 2-2

Si $e, e' \varepsilon \xi_n$, tal que $e_i = e'_i$, $\forall\ i \neq j$, $e_j = 1$, $e_j = 0$, entonces $A_j Fe(T) = B_j Fe'(T)$.

Pa

$$A_j Fe(T)(X_1,\ldots,x_{n-1}) = Fe(T)(x_1,\ldots,0,\ldots,\ x_{n-1})$$

$$= T(\frac{x_1+e_1}{2},\ \ldots,\ \frac{o+e_j}{2},\ \ldots,\ \frac{x_{n-1}+e_n}{2})$$

$$= T(\frac{x_1+e_1}{2},\ \ldots,\ \frac{0+1}{2}\ ,\ \ldots,\ \frac{x_{n-1}+e_n}{2}\ )$$

$$= T(\frac{x_1+e'_1}{2},\ \ldots,\ \frac{1+e'_j}{2}\ ,\ \ldots,\ \frac{x_{n-1}+e'_n}{2})$$

$$= Fe'(T)(x_1,\ldots,\ 1,\ \ldots,\ x_{n-1})$$

$$= B_j Fe'(T)(x_1,\ldots,\ x_{n-1})\qquad /$$

PROPOSICION 2-3

Si $e\ \varepsilon\ \xi_n$, $e_j = 0$, $e'\ \varepsilon\ \xi_{n-1}$, se define como

$e' = (e_1,\ldots,\ e_{j-1},\ e_{j+1},\ \ldots,\ e_n)$ entonces

$A_j Fe(T) = Fe'(A_j T)$.

La prueba es similar a la realizada en la proposición 2-2.

PROPOSICION 2 - 4

Si $e \in \xi_n$, $e_j = 1$, $e' \in \xi_{n-1}$, definido como

$e' = (e_1, \ldots, e_{j+1}, \ldots, e_n)$, entonces

$B_j Fe(T) = Fe'(B_j T)$.

La prueba es similar a la realizada en la proposición 2 - 3.

Ilustraremos el lema 2 - 2 para los casos n = 1,2.

$n = 1$

$$
\begin{aligned}
(\partial_1 \circ Sd1)(T) &= \partial_1(Sd1(T)) \\
&= -A_1\ Sd1(T) + B_1\ Sd1(T) \\
&= -A_1 \sum_{e \in \xi_1} Fe(T) + B_1 \sum_{e \in \xi_1} Fe(T) \\
&= -A_1\ F_0(T) - A_1 F_1(T) + B_1 F_0(T) + B_1 F_1(T) \\
&= -A_1 F_0(T) + B_1 F_1(T) \\
&= -A_1 T + B_1 T;\quad A_1 F_0(T) = A_1 T \ \text{ y } \ B_1 F_0(T) = B_1 T \\
&= \partial_1(T) \\
&= Sdo(\partial_1(T)) \\
&= (Sdo \circ \partial_1)(T) \qquad /
\end{aligned}
$$

$n = 2$

$$\partial_2(Sd2(T)) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^i [A_i \; Sd2(T) - B_i \; Sd2(T)]$$

$$= \sum_{i=1}^{2} (-1)^i [A_i \sum_{e \varepsilon \xi_2} Fe(T) - B_i \sum_{e \varepsilon \xi_2} Fe(T)]$$

$$= -A_1 \sum_{e \varepsilon \xi_2} Fe(T) + B_1 \sum_{e \varepsilon \xi_2} Fe(T) + A_2 \sum_{e \varepsilon \xi_2} Fe(T)$$

$$- B_2 \sum_{e \varepsilon \xi_2} F_e(T)$$

$$= -A_1 F_{(0,0)}(T) - A_1 F_{(1,0)}(T) - A_1 F_{(1,1)}(T)$$

$$-A_1 F_{(0;1)}(T) + B_1 F_{(0,0)}(T) + B_1 F_{(1,0)}(T)$$

$$+B_1 F_{(1,1)}(T) + B_1 F_{(0,1)}(T) + A_2 F_{(1,1)}(T)$$

$$+A_2 F_{(0,0)}(T) + A_2 F_{(1,0)}(T) + A_2 F_{(1,1)}(T)$$

$$-B_2 F_{(0,0)}(T) - B_2 F_{(1,0)}(T) - B_2 F_{(1,1)}(T)$$

$$-B_2 F_{(0,1)}(T)$$

$$= -A_1 F_{(0,0)}(T) - A_1 F_{(0,1)}(T) + B_1 F_{(1,0)}(T)$$

$$+B_1 F_{(1,1)}(T) - B_2 F_{(1,1)}(T) - B_2 F_{(0,1)}(T)$$

$$+A_2 F_{(0,0)}(T) + A_2 F_{(1,0)}(T); \text{ por propos. } 2 - 3$$

$$= -F_0(A_1 T) - F_1(A_1 T) + F_0(B_1 T) + F_1(B_1 T)$$

$$+F_0(A_2 T) + F_1(A_2 T) - F_1(B_2 T) - F_0(B_2 T)$$

$$= -F_0(A_1 T - B_1 T) - F_1(A_1 T - B_1 T) +$$

$$F_0(A_2 T - B_2 T) + F_1(A_2 T - B_2 T)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i}\left[F_0(A_iT-B_iT)\right] + \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i}\left[F_1(A_iT-B_iT)\right]$$

$$= F_0 \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i}(A_iT - B_iT) + F_1 \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i}(A_iT - B_iT)$$

$$= F_0(\partial_2(T)) + F_1(\partial_2(T))$$

$$= \sum_{e\varepsilon\xi_1} Fe'(\partial_2(T))$$

$$= (Sd1 \circ \partial_2)(T) \qquad /\!/$$

La prueba para el caso general es similar aunque tediosa.

La demostración del Lema 2-2 es como sigue:

Sea $T + D_n(X) \; \varepsilon \; C_n(X)$

$$\begin{aligned}\partial'_n(Sd_n(T + D_n(X))) &= \partial'_n(Sd_n(T) + D_n(X)) \\ &= \partial_n(Sd_n(T)) + D_{n-1}(X) \\ &= (Sd_{n-1} \circ \partial_n)(T) + D_{n-1}(X) \\ &= Sd_{n-1}(\partial_n(T) + D_{n-1}(X)) \\ &= Sd_{n-1}(\partial'_n(T + D_n(X))) \\ &= (Sd_{n-1} \circ \partial'_n)(T + D_n(X)) \qquad /\!/\end{aligned}$$

LEMA 2 - 3

Si $u \; \varepsilon \; C_o(X) = Q_o(X)$, entonces $(Sd_o(u)) = \varepsilon(u)$, la prueba es trivial.

LEMA 2 - 4

Para cualquier n-cadena $u \varepsilon C_n(X)$ existe un entero $q \geq 0$ tal que $Sd_n^q(u) \varepsilon C_n(X,\mu)$, donde Sd_n^q denota el homomorfismo obtenido por la iteración q-veces de Sd_n.

Definiendo $Sd_n^q: C_n(X) \longrightarrow C_n(X,\mu)$ como

$Sd_n^q(T + D_n(X)) = Sd_n^{q(T)}(T) + D_n(X,\mu)$, es suficiente probar que para cada n-cubo singular $T: I^n \longrightarrow X$ existe un entero $q(T)$ tales que $(Sd_n^{q(T)})(T)$ es una suma de cubos pequeños de orden μ i.e. $(Sd_n^{q(T)})(T) \varepsilon Q_n(X,\mu)$.

Pa

Sea u una combinación lineal de los n-cubos singulares $T_1, T_2, \ldots, T_k$, es suficiente escoger q como el mayor de los enteros $q(T_1)$, $q(T_2) \ldots$, $q(T_k)$ para probar que tal entero $q(T)$ existe, consideremos la cubierta abierta del espacio métrico compacto I^n por las imágenes inversas bajo T de los interiores de los conjuntos de la cubierta μ.

Como I^n es un espacio métrico compacto su cubierta abierta posee un número de Lebesgue.

Sea ε el número de Lebesgue de esta cubierta, entonces si escogemos $q(T)$ de tal manera que $2^{-q(T)} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}$ la condición se satisface. En donde:

$\frac{1}{2^{q(T)}}$: nos proporciona el tamaño de la cara de un n-cubo.

$\sqrt{n}$: Es la proporción entre la longitud de la diagonal y la longitud de cada lado de un cubo n-dimencional y

$\frac{1}{2^{q(T)}} \cdot \sqrt{n}$: Nos proporciona la longitud de la diagonal del cubo; así

$\frac{1}{2^{q(T)}} \cdot \sqrt{n} < \varepsilon/2$; con lo cual se garantiza que cualquier cubo que se tome, estará contenido en un abierto de diámetro ε. /

Vamos ahora a definir los homomorfismos $\rho_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$; $n \geq 0$ tal que para cualquier $u \in C_n(X)$.

$$Sd_n(u) - u = \partial'_{n+1}(\rho_n(u)) + \rho_{n-1}(\partial'_n(u)) \qquad (2 - 8)$$

ρ es una homotopía de cadenas entre el operador sub-división Sd y la función identidad.

Para definir ρ_n definamos previamente dos funciones auxiliares.

$$\eta_0: I^2 \longrightarrow I / \eta_0(x_1, x_2) = \frac{x_1}{2-x_2}$$

$$\eta_1: I^2 \longrightarrow I / \eta_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1+1}{2-x_2} \ ; & x_1 + x_2 \leq 1 \\ 1 \ ; & x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$$

Ahora para cualquier $e \varepsilon \xi_n$ y cualquier n-cubo singular $T: I^n \longrightarrow X$ con $n > 0$, definamos un (n+1) - cubo $G_e(T): I^{n+1} \longrightarrow X$ mediante la fórmula:

$$G_e(T)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = T(\eta_{e_1}(x_1, x_{n+1}), \ldots, \eta_{e_n}(x_n, x_{n+1})).$$

definamos ahora $\Phi_n: Q_n(X) \longrightarrow Q_{n+1}(X)$, $n > 0$ mediante

$\Phi_n(T) = (-1)^{n+1} \sum_{e \varepsilon \xi_n} G_e(T)$ y para el caso $n = 0$.

$\Phi_0: Q_0(X) \longrightarrow Q_1(X)$ como la función cero.

LEMA 2 - 5

Si T en un cubo degenerado, entonces tambien lo es $G_e(T)$.

Pa

$$G_e(T)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = T(\eta_{e_1}(x_1, x_{n+1}), \ldots, \eta_{e_n}(x_n, x_{n+1}))$$

$$= T\left(\frac{x_1+e_1}{2-x_{n+1}} \ldots, \frac{x_j+e_j}{2-x_{n+1}} \ldots, \frac{x_n+e_n}{2-x_{n+1}}\right)$$

Suponiendo que T es degenerado en la posición j $1 \leq j \leq n$ asi se sigue que

$$= T\left(\frac{x_1+e_1}{2-x_{n+1}}, \ldots, x_j, \ldots, \frac{x_n+e_n}{2-x_{n+1}}\right)$$

es degenerado en la posición j. /

$\therefore$ $G_e(T)$ es degenerado

De donde Φ_n es una función de $D_n(X)$ en $D_{n+1}(X)$, e induce el homomorfismo.

$\rho_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X); \; n = 0,1,\ldots$

LEMA 2 - 6

Para cualquier n-cubo singular $T: I^n \longrightarrow X$ se tiene $(\partial_{n+1} \circ \Phi_n) = Sd_n(T) - T - (\Phi_{n-1} \circ \partial_n)(T)$ + cubos degenerados. (2 - 9)

Pa

Para n = 0 (2 - 9) es una trivialidad. Concentraremos nuestra atención en el caso $n > 0$.

Para calcular $(\partial_{n+1} \circ \Phi_n)(T)$, necesitamos las siguientes proposiciones.

PROPOSICION 2 - 5

Para cualquier (n+1)-cubo $G_e(T)$ se tiene $A_{n+1}G_e(T) = F_e(T)$.

Pa

$$\begin{aligned} A_{n+1}G_e(T)(x_1,\ldots,x_n) &= G_e(T)(x_1,x_2,\ldots,x_n,0) \\ &= T(\eta_{e_1}(x_1,0),\ldots,\eta_{e_n}(x_n,0)) \\ &= T\left(\frac{x_1+e_1}{2-0}, \;\ldots,\; \frac{x_n+e_n}{2-0}\right) \end{aligned}$$

$$= T(\tfrac{1}{2}(x_1 + e_1, \ \ldots, \ x_n + e_n))$$

$$= F_e(T)(x_1, \ldots, \ x_n) \qquad /$$

PROPOSICION 2 - 6

Para cualquier (n+1)-cubo $G_e(T)$. Si $e = (0,0,\ldots,0)$, entonces $B_{n+1}G_e(T) = T$; sino $B_{n+1}G_e(T)$ es degenerado.

$$B_{n+1}G_e(T)(x_1,\ldots,x_n) = G_e(T)(x_1,\ldots,x_n,1)$$

$$= T(\eta_{e_1}(x_1,1),\ldots, \ \eta_{e_n}(x_n,1))$$

$$= T(\frac{x_1+e_1}{2 - 1}, \ \ldots, \ \frac{x_n+e_n}{2 - 1})$$

$$= T(x_1,\ldots,x_n) \qquad /$$

por otro lado,

$$B_{n+1}G_e(T)(x_1,\ldots,x_n) = G_e(T)(x_1,x_2,\ldots,x_n,1)$$

$$= T(\eta_{e_1}(x_1,1), \ \ldots, \ \eta_{e_n}(x_n,1)$$

Supongamos que $e_j = 1, \ 1 \leq j \leq n$, entonces

$$= T(\eta_{e_1}(x_1,1),\ldots,\eta_1(x_j,1),\ldots,\eta_{e_n}(x_n,1))$$

pero dado que $x_j + 1 \geq 1$, se sigue que $\eta_1(x_j,1) = 1$ y

$$= T(\eta_{e_1}(x_1,1),\ldots,1,\ldots,\eta_{e_n}(x_n,1));$$

$\forall \ X \in I^n$ así $B_{n+1}G_e(T)$ no depende de la posición j por consiguiente es degenerado. /

PROPOSICION 2 - 7

Si $e,e' \varepsilon \xi_n$, $j \leq n$, $e_j = 1$, $e_j = 0$, y $e_i = e_i'$ para todo $i \neq j$, entonces $A_j G_e(T) = B_j G_e'(T)$; para cualquier n-cubo T.

Pa

$$
\begin{aligned}
A_j G_e(T)(x_1,\ldots,x_n) &= G_e(T)(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n) \\
&= T(\eta_{e_1}(x_1,x_n),\ldots,\eta_{e_j}(0,x_n),\ldots,\eta_{e_n}(x_{n-1},x_n)) \\
&= T(\eta_{e_1}(x_1,x_n),\ldots,\eta_1(0,x_n),\ldots,\eta_{e_n}(x_{n-1},x_n)) \\
&= T(\eta_{e_1'}(x_1,x_n),\ldots\eta_0(1,x_n),\ldots,\eta_{e_n'}(x_{n-1},x_n)) \\
&= T(\eta_{e_1'}(x_1,x_n),\ldots\eta_{e_j'}(1,x_n),\ldots,\eta_{e_n'}(x_{n-1},x_n)) \\
&= G_{e'}(T)(x_1,\ldots,x_{j-1},1,x_j,\ldots,x_n) \\
&= B_j G_{e'}(T)(x_1,\ldots,x_n) \qquad /
\end{aligned}
$$

PROPOSICION 2 - 8

Asumamos que $e \varepsilon \xi_n$, $n \geq 2$, $e' \varepsilon \xi_{n-1}$ definida como $e' = (e_1,\ldots,e_{j-1},e_{j+1},\ldots,e_n)$, $j \leq n$, luego se tiene que:

si $e_j = 0$, entonces $A_j G_e(T) = G_{e'}(A_j T)$ y

si $e_j = 1$, entonces $B_j G_e(T) = G_{e'}(B_j T)$

Pa

$$A_j G_e(T)(x_1,\ldots,x_n) = G_e(T)(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n)$$

$$= T(\eta_{e_1}(x_1,x_n),\ldots,\eta_{e_j}(0,x_n),\ldots,\eta_{e_n}(x_{n-1},x_n))$$

$$= T(\eta_{e_1}(x_1,x_n),\ldots,\eta_0(0,x_n),\ldots,\eta_{e_n}(x_{n-1},x_n))$$

$$= T(\eta_{e_1}(x_1,x_n),\ldots,0,\ldots,\eta_{e_n}(x_{n-1},x_n))$$

$$= A_j T(\eta_{e_1'}(x_1,x_n),\ldots,\eta_{e_n'}(x_{n-1},x_n))$$

$$= G_{e'}(A_j T)(x_1,\ldots,x_n) \quad /$$

para el caso $e_j = 1$ se prueba similar

para $n = 1$; $A_1G_0(T)$ y $B_1G_1(T)$ son degenerados

i.e. $A_1G_0(T)(x) = G_0(T)(0,x) = T(\eta_0(0,x)) = T(0)$

luego para todo $x \varepsilon I$, $A_1G_0(T)$ es una función constante por lo que $A_1G_0(T)$ es degenerado.

Lo mismo sucede con:

$$B_1G_1(T)(x) = G_1(T)(1,x) = T(\eta_1(1,x)) = T(1)$$

ahora probaremos (2 - 9)

$$\partial_{n+1}(\Phi_n(T)) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i[A_i\Phi_n(T) - B_i\Phi_n(T)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i[A_i\Phi_n(T)-B_i\Phi_n(T)]+(-1)^{n+1}[A_{n+1}\Phi_n(T)-B_{n+1}\Phi_n(T)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i[A_i\Phi_n(T)-B_i\Phi_n(T)]+(-1)^{n+1}[A_{n+1}(-1)^{n+1}\sum_{e\varepsilon\xi_n} G_e(T)$$

$$B_{n+1}(-1)^{n+1}\sum_{e\in\xi_n} G_e(T)\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\big[A_i\phi_n(T)-B_i\phi_n(T)\big]+A_{n+1}\sum_{e\in\xi_n}G_e(T)-B_{n+1}\sum_{e\in\xi_n}G_e(T)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\big[A_i\phi_n(T)-B_i\phi_n(T)\big]+\sum_{e\in\xi_n}A_{n+1}G_e(T)-\sum_{e\in\xi_n}B_{n+1}G_e(T)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\big[A_i\phi_n(T)-B_i\phi_n(T)\big]+\sum_{e\in\xi_n}F_e(T)-T+\sum_{e\in\xi_{n-\phi}}B_{n+1}G_e(T)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\Big[A_i(-1)^{n+1}\sum_{e\in\xi_n}G_e(T)-B_i(-1)^{n+1}\sum_{e\in\xi_n}G_e(T)\Big]+Sd_n(T)-T+$$

cubos degenerados

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(-1)^{n+1}\Big[\sum_{e\in\xi_n}A_iG_e(T)-\sum_{e\in\xi_n}B_iG_e(T)\Big]+Sd_n(T)-T+$$

cubos degenerados

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(-1)^{n+1}\Big[\sum_{e'\in\xi_n}G_{e'}(A_iT)-\sum_{e'\in\xi_n}G_{e'}(B_iT)\Big]+Sd_n(T)-T+$$

cubos degenerados

$$= -\sum_{e'\in\xi_n}(-1)^nG_{e'}\Big[\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(A_iT-B_iT)\Big]+Sd_n(T)-T+$$

cubos degenerados

$$= -(-1)^n\sum_{e'\in\xi_n}G_{e'}(\partial_n(T))+Sd_n(T)-T+\text{ cubos degenerados}$$

$$= -\phi_{n-1}(\partial_n(T))+Sd_n(T)-T+\text{ cubos degenerados}$$

$\therefore \quad (\partial_{n+1} \circ \Phi_n)(T) = Sd_n(T) - T - (\Phi_{n-1} \circ \partial_n)(T) +$ cubos degenerados

de (2 - 9) se sigue (2 - 8) i.e.

$$
\begin{aligned}
\partial'_{n+1}(\rho_n(T+D_n(X))) &= \partial'_{n+1}(\Phi_n(T) + D_{n+1}(X)) \\
&= \partial_{n+1}(\Phi_n(T)) + D_n(X) \\
&= Sd_n(T) - T - \Phi_{n-1}(\partial_n(T)) + \text{cubos degenerados} \\
&\quad + D_n(X) \\
&= -(T + D_n(X)) + Sd_n(T + D_n(X)) \\
&\quad - \rho_{n-1}[\partial_n(T) - D_{n-1}(X)] \\
&= -u + Sd_n(u) - \rho_{n-1}(\partial'_n(u)) \qquad /
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad \partial'_{n+1}(\rho_n(u)) = Sd_n(u) - u - \rho_{n-1}(\partial'_n(u))$

LEMA 2 - 7

Si $u \in C_n(X,\mu)$, entonces $\rho_n(u) \in C_{n+1}(X,\mu)$

<u>Pa</u>

$\rho_n(T + D_n(X)) = \Phi_n(T) + D_{n+1}(X,\mu)$; con $T \in Q_n(X,\mu)$, para el cual se probará que $\Phi_n(T) \in Q_{n+1}(X,\mu)$, pero

$\Phi_n(T) = (-1)^{n+1} \sum_{e \in \xi_n} G_e(T)$. Dado que $G_e(T)$ es de orden μ,

$\forall e \in \xi_n$ por definición de $G_e(T)$, así $\sum_{e \in \xi_n} G_e(T)$ es de orden μ

por consiguiente $\Phi_n(T) \in Q_{n+1}(X,\mu)$ y así $\rho_n(u) \in C_{n+1}(X,\mu)$

Definamos ahora para cualquier entero q:

$\psi_q: C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$; $n = 0,1,2,\dots$

mediante la fórmula:

$\psi_q(u) = \sum_{i=0}^{q-1} Sd^i_{n+1}(\rho_n(u))$, de (2 - 8) se sigue que:

$$Sd^q_n(u) - u = \partial'_{n+1}(\psi_q(u)) + \psi_q(\partial'_n(u)) \qquad (2 - 10)$$

e.i. Sd^q_n es homotópica a la función identidad.

<u>Pa</u> de (2 - 10)

$$\begin{aligned}
\partial'_{n+1}(\psi_q(u)) &= \partial'_{n+1}\Big(\sum_{i=0}^{q-1} Sd^i_{n+1}(\rho_n(u))\Big)\\
&= \partial'_{n+1}\big[Sd^\circ_{n+1}(\rho_n(u))+Sd'_{n+1}(\rho_n(u))+\dots+Sd^{q-1}_{n+1}(\rho_n(u))\big]\\
&= \partial'_{n+1}(\rho_n(u)) + \dots + \partial'_{n+1}(Sd^{q-1}_{n+1}(\rho_n(u)))\\
&= \big[Sd_n(u)-u-\rho_{n-1}(\partial'_n(u))\big]+\dots+\big[Sd^{q-1}_n(\partial'_{n+1}(\rho_n(u)))\big]\\
&= \big[Sd_n(u) - u - \rho_{n-1}(\partial'_n(u))\big] + \dots +\\
&\quad \big[Sd^{q-1}_n(Sd_n(u) - u - \rho_{n-1}(\partial'_n(u)))\big]\\
&= \cancel{Sd_n(u)}-u-\rho_{n-1}(\partial'_n(u))+Sd_n(Sd_n(u))-\cancel{Sd_n(u)} -\\
&\quad Sd_n(\rho_{n-1}(\partial'_n(u))) + \dots + (Sd^{q-1}_n \circ Sd_n)(u) -\\
&\quad Sd^{q-1}_n(u) - Sd^{q-1}_n(\rho_{n-1}(\partial'_n(u)))\\
&= -u - \rho_{n-1}(\partial'_n(u)) + \cancel{Sd^2_n(u)} - Sd'_n(\rho_{n-1}(\partial'_n(u)))+\dots+\\
&\quad Sd^q_n(u) - \cancel{Sd^{q-1}_n}(u) - Sd^{q-1}_n(\rho_{n-1}(\partial'_n(u)))
\end{aligned}$$

$$= -u - Sd_n^{\circ}(\rho_{n-1}(\partial_n'(u))) - Sd_n'(\rho_{n-1}(\partial_n'(u))) - \ldots -$$

$$Sd_n^{q-1}(\rho_{n+1}(\partial_n'(u))) + Sd_n^q(u)$$

$$= -u - \sum_{i=0}^{q-1} Sd_n^i(\rho_{n-1}(\partial_n'(u))) + Sd_n^q(u)$$

$$= -u - \rho_q(\partial_n'(u)) + Sd_n^q(u)$$

$$\therefore \quad \partial_{n+1}'(\rho_q(u)) + \rho_q(\partial_n'(u)) = Sd_n^q(u) - u \qquad /$$

Del Lema 2-7 se deriva el siguiente

COROLARIO 2-1

Si $u \in C_n(X,\mu)$, entonces $\psi_q(u) \in C_{n+1}(X,\mu)$ para cualquier entero $q > 0$.

Pa

$\psi_q(u) = \sum_{i=0}^{q-1} Sd_{n+1}^i(\rho_n(u))$, ahora como $u \in C_n(X,\mu)$ se tiene $\rho_n(u) \in C_{n+1}(X,\mu)$. Y así $Sd_{n+1}^i(\rho_n(u))$ sigue perteneciendo a $C_{n+1}(X,\mu)$ /

$$\therefore \quad \psi_q(u) \in C_{n+1}(X,\mu)$$

Con todos estos lemas probaremos directamente que $\sigma_*: H_n(X,\mu) \longrightarrow H_n(X)$ es un isomorfismo con

$\sigma_*(T + \operatorname{Im} \partial_{n+1}'') = T + \operatorname{Im} \partial_{n+1}'$.

Pa

σ_* es un epimorfismo.

Sea $T + \mathrm{Im}\,\partial'_{n+1} \in H_n(X)$; $T \in \mathrm{Ker}\,\partial'_n \subset C_n(X)$ por Lema 2-4, si $T \in C_n(X)$, entonces existe $q \geq 0$ tales que $Sd_n^q(T) \in C_n(X,\mu)$. Además; por Lema 2-2 se tiene:

$0 = Sd_{n-1}(\partial'_n(T)) = \partial'_n(Sd_n(T))$, así

$$\partial'_n(Sd_n(T)) = 0 \Rightarrow \partial'_n(Sd_n^q(T)) = 0$$
$$\Rightarrow Sd_n^q(T) \in \mathrm{Ker}\,\partial'_n$$

por 2-10 se tiene.

$$Sd_n^q(T) - T = \partial'_{n+1}(\psi_q(T)) + \psi_q(\partial'_n(T))$$
$$= \partial'_{n+1}(\psi_q(T));$$ lo que implica que

$(Sd_n^q(T) - T) \in \mathrm{Im}\,\partial'_{n+1}$; así

$Sd_n^q(T) + \mathrm{Im}\,\partial'_{n+1} = T + \mathrm{Im}\,\partial'_{n+1}$; por definición de σ_*

$\sigma_*(Sd_n^q(T) + \mathrm{Im}\,\partial''_{n+1}) = T + \mathrm{Im}\,\partial'_{n+1}$ /

$\therefore\ T + \mathrm{Im}\,\partial'_{n+1} \in \mathrm{Im}\,\sigma_*$

σ_* es un monomorfismo

Sea $u + \mathrm{Im}\,\partial''_{n+1} \in H_n(X,\mu)$ tal que $\sigma_*(u + \mathrm{Im}\,\partial''_{n+1}) = 0$

$$\sigma_*(u + \mathrm{Im}\,\partial''_{n+1}) = 0 \Rightarrow u + \mathrm{Im}\,\partial'_{n+1} = \mathrm{Im}\,\partial'_{n+1}$$
$$\Rightarrow u \in \mathrm{Im}\,\partial'_{n+1}$$
$$\Rightarrow \exists v \in C_{n+1}(X) / \partial'_{n+1}(v) = u$$

además $Sd^q_{n+1}(v) \in C_{n+1}(X,\mu)$; para algún entero $q \geq 0$; por 2-10 se tiene.

$$Sd^q_{n+1}(v) - v = \partial'_{n+2}(\psi_q(v)) + \psi_q(\partial'_{n+1}(v))$$
$$= \partial'_{n+2}(\psi_q(v)) + \psi_q(u)$$

aplicando ∂'_{n+1} a ambos miembros.

$$\partial'_{n+1}(Sd^q_{n+1}(v) - v) = \partial'_{n+1}(\partial'_{n+2}(\psi_q(v))) + \partial'_{n+1}(\psi_q(\partial'_{n+1}(v)))$$

$$\partial'_{n+1}(Sd^q_{n+1}(v)) - \partial'_{n+1}(v) = \partial'_{n+1}(\psi_q(u))$$

$$\partial'_{n+1}(Sd^q_{n+1}(v)) - u = \partial'_{n+1}(\psi_q(u))$$

$$\partial'_{n+1}(Sd^q_{n+1}(v) - \psi_q(u)) = u$$

$\partial''_{n+1}(Sd^q_{n+1}(v) - \psi_q(u)) = u$; de donde

$u \in \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$ así

$u + \operatorname{Im} \partial''_{n+1} = \operatorname{Im} \partial''_{n+1}$ /

$\therefore$ σ_* es un isomorfismo

Ahora probaremos el teorema 2-6 en el caso general, donde A es un sub-conjunto arbitrario de X.

Obsérvese que para cada entero n se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n(A,\mu) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\sigma''_n"] & C_n(X,\mu) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\sigma'_n"] & C_n(X,A,\mu) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r, "i_\#"] & C_n(X) \arrow[r, "j_\#"] & C_n(X,A) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Diagrama 2 - 8

donde las filas de este diagrama son sucesiones exactas de grupos de cadena.

Pasamos ahora a los correspondientes grupos de homología

$$\begin{tikzcd}
\longrightarrow H_{n+1}(X,A,\mu) \arrow[r] & H_n(A,\mu) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma''_*"] & H_n(X,\mu) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma'_*"] & H_n(X,A,\mu) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_*"] & {} \\
\longrightarrow H_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] & H_n(X,A) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

donde cada cuadrado es conmutativo.

Ya se probó que σ''_* y σ'_* son isomorfismos, basta probar ahora que σ_* tambien es un isomorfismo. Lo cual lo proporciona el siguiente.

LEMA 2-8 (Lema del quinto).

Consideremos el siguiente diagrama de grupos abelianos y homomorfismos.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "i_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "j_1"] & B_2 \arrow[r, "j_2"] & B_3 \arrow[r, "j_3"] & B_4 \arrow[r, "j_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Asumamos que cada fila es exacta, cada cuadrado es conmutativo si, f_1 es un epimorfismo, f_2 y f_4 isomorfismos, f_5 un monomorfismo entonces, f_3 un isomorfismo. Ver [5, pág. 42]

Esto prueba el caso general del teorema 2-6.

C A P I T U L O   I I I

A P L I C A C I O N E S

INTRODUCCION:

Este capítulo nos permite aplicar los resultados de los capítulos I y II para el cálculo de grupos de homología de las esferas.

Como punto central daremos una prueba de la exactitud de la sucesión de Mayer - Vietoris, para terminar con el importante resultado que proporciona la relación entre el grupo fundamental y el primer grupo de homología.

3.1 GRUPOS DE HOMOLOGIA DE ESFERAS:
APLICACIONES.

Utilizaremos la sucesión exacta de homología del par y la propiedad de escisión para determinar los grupos de homología de espacios no contráctil.

Por ejemplo la n-esfera

$S^n = \{X \in IR^{n+1} / |X| = 1\}$, este espacio es muy interesante y básico para muchos de los que siguen.

PROPOSICION 3-1

Para la O-Esfera S^0, se prueba que $H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Pa

Como $S^0 = \{1,-1\}$ y además I^0 es el espacio consistente de un punto. Por tanto existen exactamente dos funciones continuas distintas $r_1, r_2 \colon I^0 \longrightarrow \{1,-1\}$.

Supongamos que $r_1(I^0) = 1$ y $r_2(I^0) = -1$ i.e. $r_1(I^0) = -\,r_2(I^0)$, (obsérvese que $Q_0(S^0) = \{r_1, r_2\}$); por otro lado $S^0 = \{1,-1\} = \{1\} \cup \{-1\}$ con $\{1\}$ y $\{-1\}$ abiertos y cerrados en S^0.

Si hacemos $A = \{1\} = W$, $\bar{W} \subset \mathring{A}$ por tanto $\mu = \{\{1\}, \{-1\}\}$ es una cubierta abierta de S^0. Además $Q_0(S^0) = Q_0(S^0,\mu) = C_0(S^0,\mu) = C_0(S^0)$ y

$C_0(S^0,\mu) = C_0(A) + C_0(S^0-W)$

$\qquad = C_0(\{1\}) + C_0(\{-1\})$.

Veamos ahora que $H_0(S^0,\mu) \simeq H_0(\{1\}) \oplus H_0(\{-1\})$, para ello definamos:

$\gamma\colon H_0(\{1\}) \oplus H_0(\{-1\}) \longrightarrow H_0(S^0,\mu)$ tal que

$\gamma[(r_1+\mathrm{Im}\ \beta_1) + (r_2+\mathrm{Im}\ \beta_2) = (r_1+r_2) + \mathrm{Im}\ \partial_1'$; donde

$\beta_1\colon C_1(\{1\}) \longrightarrow C_0(\{1\})$

$\beta_2\colon C_1(\{-1\}) \longrightarrow C_0(\{-1\})$ y

$\partial_1^{|}: C_1(S^0,\mu) \longrightarrow C_0(S^0,\mu)$; a parobar que:

1) γ está bien definida

2) γ es un isomorfismo

1) Sean r_1, $n \in C_0(\{1\})$ y r_2, $m \in C_0(\{-1\})$

$(r_1+\text{Im }\beta_1)+(r_2+\text{Im }\beta_2) = (n+\text{Im }\beta_1)+(m+\text{Im }\beta_2) \Rightarrow r_1=n$ y $r_2=m$

ya que $\{1\}$ y $\{-1\}$ tienen un solo punto, así

$$\gamma[(r_1+\text{Im }\beta_1)+(r_2+\text{Im }\beta_2)] = (r_1+r_2) + \text{Im }\partial_1^{|}$$

$$= (n+m) + \text{Im }\partial_1^{|}$$

$$= \gamma[(n+\text{Im }\beta_1)+(m+\text{Im }\beta_2)] \quad /$$

2) $\gamma[((r_1+\text{Im }\beta_1)+(r_2+\text{Im }\beta_2))+((n+\text{Im }\beta_1)+(m+\text{Im }\beta_2))] =$

$= \gamma[(r_1+n)+\text{Im }\beta_1+(r_2+m) + \text{Im }\beta_2]$

$= [(r_1+n) + (r_2+m)] + \text{Im }\partial_1^{|}$

$= [(r_1+r_2) + (n+m)] + \text{Im }\partial_1^{|}$

$= [(r_1+r_2) + \text{Im }\partial_1^{|} + (n+m) + \text{Im }\partial_1^{|}]$

$= \gamma[(r_1+\text{Im }\beta_1)+(r_2+\text{Im }\beta_2)] + \gamma[(n+\text{Im }\beta_1)+(m+\text{Im }\beta_2)]$;

así γ es un morfismo.

Ahora sea $[(r_1+\text{Im }\beta_1) + (r_2+\text{Im }\beta_2)] \in \text{Ker }\gamma$ i.e.

$\gamma[(r_1+\text{Im }\beta_1)+(r_2+\text{Im }\beta_2)] = \text{Im }\partial_1^{|}$ o que $(r_1+r_2)+\text{Im }\partial_1^{|}=\text{Im }\partial_1^{|}$;

de done $(r_1+r_2) \in \text{Im }\partial_1^{|}$, i.e. existe $T \in C_1(S^0)$ tal que

$\partial_1^{|}(T) = r_1+r_2$; pero $\partial_1^{|}(T) \in C_0(S^0) = Q_0(S^0)$

así $\partial_1^{|}(T) = r_1$ ó $\partial_1^{|}(T) = r_2$

$\partial_1'(T) = r_1 \Rightarrow r_2 = 0$

$\Rightarrow r_1 = 0$; ya que $r_1(I^0) = -r_2(I^0)$

$\partial_1'(T) = r_2 \Rightarrow r_1 = 0$

$\Rightarrow r_2 = 0$; así

$(r_1+\text{Im } \beta_1)+(r_2+\text{Im } \beta_2) = \text{Im } \beta_1 + \text{Im } \beta_2 = \{0\} \in H_0(\{1\}) \oplus H_0(\{-1\})$

así γ es inyectiva.

Además sea $(h + \text{Im } \partial_1') \in H_0(S^0,\mu)$:

$h \in C_0(S^0,\mu) = Q_0(S^0,\mu) = Q_0(S^0) = \{r_1,r_2\}$, entonces

$h = r_1$ ó $h = r_2$

$h = r_1 \Rightarrow h + \text{Im } \partial_1' = r_1 + \text{Im } \partial_1'$

$= (r_1+0) + \text{Im } \partial_1'$

$= \gamma((r_1+\text{Im } \beta_1)+(0+\text{Im } \beta_2)) \in \text{Im } \gamma.$

$h = r_2 \Rightarrow h + \text{Im } \partial_1' = r_2 + \text{Im } \partial_1'$

$= (0 + r_2) + \text{Im } \partial_1'$

$= \gamma((0 + \text{Im } \beta_1) + (r_2 + \text{Im } \beta_2)).$ /

En ambos casos γ es sobreyectiva

$\therefore$ γ es un isomorfismo

TEOREMA 3-1

Para cualquier entero $n \geq 0$

$\tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbf{Z} & ; i = n \\ \{0\} & ; i \neq n; \end{cases}$ por tanto $H_0(S^n) = \begin{cases} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}; & n = 0 \\ \mathbf{Z} & ; n > 0 \end{cases}$

Pa

La prueba es por inducción sobre n; el teorema es verdadero para $n = i = 0$, ya que por proposición 3-1. $H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y por proposición 2-1 $H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \tilde{H}_0(S^0)$; i.e.
$\tilde{H}_0(S^0) \oplus \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Además
$\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}$ y $\frac{\tilde{H}_0(S^0) \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \simeq \tilde{H}_0(S^0)$, por Teorema 2-9 Cap. I (T ze - T sen - Hu) Algebra Homológica se tiene $\tilde{H}_0(S^0) \simeq \mathbb{Z}$.

Para $n = 0$ e $i > 0$; se tiene:

$C_i(S^0) = C_i(S^0,\mu) = C_i(\{1\})+C_i(\{-1\}) = 0 + 0 = 0$
por observación 2-1. Así $\tilde{H}_i(S^0) = H_i(S^0) = 0$.

Supongamos que se cumple para $n > 0$ resta probar para $n + 1$.

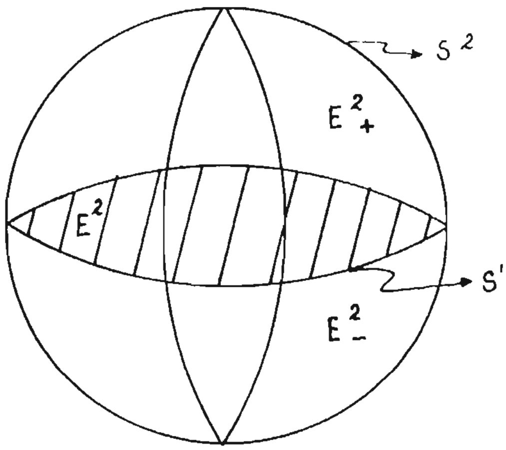
Definamos $S^n = \{X = (x_1,x_2,\ldots,x_{n+2}) \in S^{n+1}/x_{n+2} = 0\}$ consideremos dos sub-conjuntos de S^{n+1}:

$E_+^{n+1} = \{X = (x_1,x_2,\ldots,x_{n+2}) \in S^{n+1}/X_{n+2} \geq 0\}$

$E_-^{n+1} = \{X = (x_1,x_2,\ldots,x_{n+2}) \in S^{n+1}/x_{n+2} \leq 0\}$; estos sub-conjuntos denotan los hemisferios superior e inferior de S^{n+1}, Estos hemisferios son obviamente homeomorfos al conjunto:

$E^{n+1} = \{X = (x_1,x_2,\ldots,x_{n+2}) \in IR^{n+1}/|X| \leq 1 \wedge x_{n+2} = 0\}$

por proyección estereográfica, por tanto ellos son contractiles.



$S^1 = \{X=(x_1,x_2,x_3) \in S^2 / x_3 = 0\}$

$S^2 = \{X=(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / |X| = 1\}$

$E^2_+ = \{X=(x_1,x_2,x_3) \in S^2 / x_3 \geq 0\}$

$E^2_- = \{X=(x_1,x_2,x_3) \in S^2 / x_3 \leq 0\}$

$E^2 = \{X=(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / |X| \leq 1, x_3=0\}$

Ahora consideremos el siguiente diagrama de grupos de homología.

$$\tilde{H}_i(S^n) \xleftarrow{\partial_*} H_{i+1}(E^{n+1}_-, S^n) \xrightarrow{k_*} H_{i+1}(S^{n+1}, E^{n+1}_+) \xleftarrow{j_*} \tilde{H}_{i+1}(S^{n+1})$$

Diagrama 3-1

En este diagrama $j\colon S^{n+1} \longrightarrow (S^{n+1}, E^{n+1}_+)$ y $k\colon (E^{n+1}_-, S^n) \longrightarrow (S^{n+1}, E^{n+1}_+)$ denotan la función inclusión. Se pretende probar que ∂_*, k_*, j_* son Isomorfismos.

Consideremos la siguiente sucesión exacta de grupos de homología del par (E^{n+1}_-, S^n).

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(S^n) \longrightarrow H_{i+1}(E^{n+1}_-) \longrightarrow H_{i+1}(E^{n+1}_-, S^n) \xrightarrow{\partial_*} H_i(S^n) \longrightarrow \cdots$$

como $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$; para $n > 0$ y por el resultado del ejemplo 2-6 se tiene:

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(S^n) \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(E^{n+1}_-) \longrightarrow H_{i+1}(E^{n+1}_-, S^n) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_i(S^n) \longrightarrow \cdots (3\text{-}1)$$

es una sucesión exacta $\forall$ i $\geq$ 0.

Ahora por contractibilidad de E_-^{n+1} (3-1) se reduce a.

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(S^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow H_{i+1}(E_-^{n+1},S^n) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_i(S^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

de la cual podemos extraer:

$$0 \longrightarrow H_{i+1}(E_-^{n+1},S^n) \xrightarrow{\partial_*} H_i(S^n) \longrightarrow 0;$$ la cual es exacta;

de donde ∂_* es un isomorfismo.

Ahora consideremos la sucesión exacta del par (S^{n+1},E_+^{n+1})

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(E_+^{n+1}) \longrightarrow H_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{j_*} H_{i+1}(S^{n+1},E_+^{n+1}) \longrightarrow \cdots$$

por un proceso similar al anterior se tiene que:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{j_*} H_{i+1}(S^{n+1},E_+^{n+1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta, de la cual podemos de nuevo extraer la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{j_*} H_{i+1}(S^{n+1},E_+^{n+1}) \longrightarrow 0$$

así j_* es un isomorfismo .

Para completar la prueba es suficiente probar que k_* es un isomorfismo.

Observese que el par (E_-^{n+1},S^n) se obtiene a partir del par (S^{n+1},E_+^{n+1}) por escisión del conjunto $E_+^{n+1} - S^n$.

Sin embargo, no podemos aplicar el teorema 2-5, debido a que la cerradura de $E_+^{n+1} - S^n$ no está contenida en el interior de E_+^{n+1}.

Para solventar esta dificultad, definamos el conjunto:

$W = \{X = (x_1,\ldots,x_{n+2}) \in S^{n+1}/x_{n+2} \geq 1/2\}$; ahora consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_{i+1}(E_-^{n+1},S^n) \arrow[rr, "k_*"] \arrow[dr, "h_*"'] & & H_{i+1}(S^{n+1},E_+^{n+1}) \\
& H_{i+1}(S_-^{n+1}-W,E_+^{n+1}-W) \arrow[ur, "e_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Diagrama 3-2

Los símbolos h,e denotan la función inclusión, obviamente este diagrama es conmutativo. Además $\bar{W} \subset \widehat{\mathring{E}_+^{n+1}}$. Ahora aplicando el teorema 2-5 se tiene que e_* es un isomorfismo.

Como la función h es una equivalencia de homotopía de pares i.e. existe un retracto por deformación r del par $(S^{n+1}-W,E_+^{n+1}-W)$ en el par (E_-^{n+1},S^n) con:

$r: (S_-^{n+1}-W,E_+^{n+1}-W) \longrightarrow (E_-^{n+1},S^n)$ tal que

$$r(x_1,\ldots,x_{n+2}) = \begin{cases} (x_1,\ldots,x_{n+1},0); & 0 \leq x_{n+2} < 1/2 \\ (x_1,\ldots,x_{n+2}); & -1 \leq x_{n+2} \leq 0; \end{cases}$$ y una homotopía

$F: I \times (S^{n+1}-W) \longrightarrow (S^{n+1}-W)$ tal que

$F(t,(x_1,\ldots,x_{n+2}))=(x_1,x_2,\ldots,x_{n+2})(1-t)+tr(x_1,\ldots,x_{n+2})$

$F(0,(x_1,\ldots,x_{n+2})) = (x_1,\ldots,x_{n+2}) = 1(S^{n+1}-W)$

$F(1,(x_1,\ldots,x_{n+2})) = r(x_1,\ldots,x_{n+2})$.

Esto afirma que h es una equivalencia de homotopía. Lo que implica que h_* es un isomorfismo (por Teorema 2-2 Cap. II)

Se sigue de la conmutatividad del diagrama 3-2 que k_* es un Isomorfismo, luego $\tilde{H}_i(S^n) \approx \tilde{H}_{i+1}(S^{n+1})$ y

Se concluye finalmente que para

$n > 0, H_0(S^n) \simeq \tilde{H}_0(S^n) \oplus \mathbb{Z} \simeq 0 \oplus \mathbb{Z} \simeq Z$ i.e.

$H_0(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ /

Apartir de este resultado daremos algunas aplicaciones y consecuencias inmediatas.

PROPOSICION 3-2

La esfera S^n no es contractil a un punto.

Pa

Supongamos que S^n es contractil a un punto, entonces $H_0(S^n) \simeq \mathbb{Z}$, $\forall$ n $\geq$ 0. Esto contradice el teorema 3-1 de que $H_0(S^0) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ /

PROPOSICION 3-3

S^n no es un retracto de E^{n+1}.

Pa

Supongamos que S^n es un retracto de E^{n+1}; i.e., $r: E^{n+1} \longrightarrow S^n$, es una retracción de E^{n+1}. Pero entonces la función $i: S^n \longrightarrow E^{n+1}$ induce un isomorfismo de $H_i(S^n)$ en $H_i(E^{n+1})$; i.e. $\forall\ n \geq 0$

$$H_i(S^n) \simeq H_i(E^{n+1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}\ , & i = 0 \\ \{0\}, & i > 0 \end{cases}$$; dada la contractibilidad de E^{n+1}, $H_0(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ lo que contradice el teorema 3-1 de que $H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ /.

PROPOSICION 3-4

Los grupos relativos de homología del par (E^n, S^{n-1}) para $n \geq 1$, son como siguen:

$$H_i(E^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & ; i \neq n \\ \mathbb{Z} & ; i = n \end{cases}$$

Pa

Consideremos la sucesión exacta de grupos de homología del par (E^n, S^{n-1}).

$$\ldots \longrightarrow H_i(E^n) \xrightarrow{j_*} H_i(E^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{i-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{i-1}(E^n) \longrightarrow \ldots$$

sustituyendo por sus respectivos grupos de homología reducidos se tiene:

$$\ldots \longrightarrow \tilde{H}_i(E^n) \xrightarrow{j_*} H_i(E^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{i-1}(E^n) \longrightarrow \ldots$$

por la contractibilidad de E^n se tiene que:

$0 \longrightarrow H_i(E^n,S^{n-1}) \xrightarrow{\partial *} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \longrightarrow 0$; $\forall\, n \geq 1$ es una sucesión exacta, i.e.,

$$H_i(E^n,S^{n-1}) \approx \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} , & i = n \\ 0 ; & i \neq n \end{cases} \quad ; \text{ por teorema 3-1.} \quad /$$

PROPOSICION 3-5 (Teorema de punto fijo de Brouwer).

Cualquier función continua f: $E^n \longrightarrow E^n$ tiene almenos un punto fijo i.e. existe $x \in E^n$ tal que $f(x) = x$.

Pa

Asumamos lo contrario i.e., que $f(x) \neq x$ para todo $x \in E^n$, entonces los dos puntos x y $f(x)$ determinan una única línea recta la cual intersecta a S^{n-1} en dos puntos.

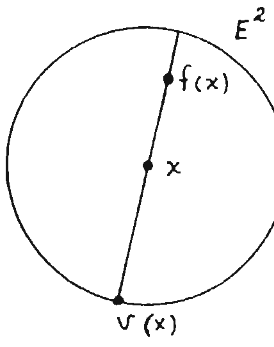


Fig. 3-1

Sea $v(x)$ el punto de intersección, tal que x está entre $f(x)$ y $v(x)$ ó x es igual a $v(x)$.

Es posible expresar a $v(x)$ en términos de x y $f(x)$ y se muestra de esta manera que v es continua, y por lo tanto v es una retracción de E^n en S^{n-1}, pero esto contradice la proposición 3-3 por lo tanto f tiene almenos un punto fijo . /

3-2 LA SUCESION EXACTA DE MAYER - VIETORIS.

Sea X un espacio topológico tal que $X = A \cup B$, donde A y B son sub-espacios topológicos de X.

En lo que sigue estaremos interesados en averiguar que relaciones existen entre los grupos de homología de los tres subespacios A,B, $A \cap B$ y el grupo de homología de X.

Con los sub-espacios topológicos de X podemos construir una sucesión exacta, similar a la sucesión de homología del par. Tal sucesión la denominaremos la sucesión de Mayer-Vietoris.

Esta sucesión exacta desempeña el mismo papel en la teoría de homología que el teorema de seifert-Van Kampen juega en el estudio del grupo fundamental

Para describir esta sucesión exacta, sea:

$i_*: H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A)$

$j_*: H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(B)$

$k_*: H_n(A) \longrightarrow H_n(X)$ y

$L_*: H_n(B) \longrightarrow H_n(X)$; todos ellos son homomorfismos indu cidos por la función inclusión. Usando estos homomorfismos definamos los siguientes homomorfismos

$\rho: H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B)$ y

$\psi: H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(X)$; mediante las fórmulas

$\rho(x) = (i_*(x), j_*(x))$; $x \in H_n(A \cap B)$ y

$\psi(u,v) = k_*(u) - L_*(v)$; $u \in H_n(A)$, $v \in H_n(B)$.

TEOREMA 3-2

Sean A,B sub-conjuntos de un espacio topológico X tal que $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$, entonces es posible definir el homomorfismo natural

$\Delta: H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B)$, $\forall n$ tal que la siguiente sucesión es exacta.

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\rho} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} \cdots$$

Si $A \cap B \neq \phi$, podemos sustituir los grupos de homología reducidos por grupos de homología ordinarios de dimensión cero y la sucesión permanece exacta.

Pa

Sea $\mu = \{A,B\}$ en vista de la hipótesis asumidas en A y B podemos aplicar el teorema 2-6 para concluir que el homomorfismo inclusión

$\sigma: C_n(X,\mu) \longrightarrow C_n(X)$; induce el ismorfismo

$\sigma_*: H_n(X,\mu) \longrightarrow H_n(X);\ \forall n.$

Notese que $C_n(X,\mu) = C_n(A) + C_n(B)$; donde el grupo de la derecha es el más pequeño sub-grupo de $C_n(X)$ que contiene a $C_n(A)$ y $C_n(B)$ (esta no es una suma directa) por tanto los homomorfismos:

$K_\#: C_n(A) \longrightarrow C_n(X)$

$L_\#: C_n(B) \longrightarrow C_n(X)$; tienen la propiedad que sus respectivas imágenes estan contenidas en el sub-grupo del par $C_n(X,\mu)$. Luego tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} & C_n(X,\mu) \arrow[d, "\sigma"] \\ C_n(A) \arrow[ur, "K'_\#"] \arrow[r, "K_\#"'] & C_n(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C_n(X,\mu) \arrow[d, "\sigma"] \\ C_n(B) \arrow[ur, "L'_\#"] \arrow[r, "L_\#"'] & C_n(X) \end{tikzcd}$$

Diagrama 3-3

efectivamente: $\sigma(K'_\#(T + D_n(A))) = \sigma(T + D_n(X,\mu)$

$= T + D_n(X)$

$= K_\#(T + D_n(A))$ /

Por analogía con la definición de los homomorfismos ρ y ψ definiremos los siguientes homomorfismos.

$\Phi: C_n(A \cap B) \longrightarrow C_n(A) \oplus C_n(B)$

$\Psi: C_n(A) \oplus C_n(B) \longrightarrow C_n(X,\mu)$, mediante las siguientes fórmulas:

$\Phi(x) = (i_{\#}(x), j_{\#}(x))$ y

$\Psi(u,v) = k_{\#}(u) - L_{\#}(v)$.

Ahora consideremos el siguiente diagrama de grupos de cadena y homomorfismos.

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_{n+1}(A \cap B) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & C_{n+1}(A) \oplus C_{n+1}(B) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\partial'_{n+1}"] & C_{n+1}(X,\mu) \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n(A \cap B) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\partial_n"] & C_n(A) \oplus C_n(B) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\partial'_n"] & C_n(X,\mu) \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1}(A \cap B) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & C_{n-1}(A) \oplus C_{n-1}(B) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d] & C_{n-1}(X,\mu) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Diagrama 3-4

En este diagrama las flechas verticales denotan el operador apropiado en cada caso. En el caso de las flechas verticales de la columna de en medio esto significa la suma directa de los operadores frontera en A y en B.

Cada cuadrado de este diagrama es conmutativo y además cada línea es exacta. Efectivamente:

$$\begin{aligned}
\partial'_{n+1}(\Phi(x)) &= \partial'_{n+1}(i_\#(x),\ j_\#(x)) \\
&= (\partial_{n+1}(i_\#(x)),\ \gamma_{n+1}(j_\#(x))) \\
&= (i_\#(\partial_{n+1}(x)),\ j_\#(\gamma_{n+1}(x))) \\
&= (i_\#(\partial_{n+1}(x)),\ j_\#(\partial_{n+1}(x))) \quad \text{i.e.} \\
&\quad\ \partial_{n+1} = \gamma_{n+1} \ \text{ en } C_n(A \cap B) \\
&= \Phi(\partial_{n+1}(x)). \text{ A demás}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial''_{n+1}(\psi(u,v)) &= \partial''_{n+1}(k_\#(u) - L_\#(v)) \\
&= \partial''_{n+1}(k_\#(u)) - \partial''_{n+1}(L_\#(v)) \\
&= k_\#(\partial_{n+1}(u)) - L_\#(\gamma_{n+1}(v)) \qquad (1) \\
&= \psi(\partial_{n+1}(u),\ \gamma_{n+1}(v)) \\
&= \psi(\partial'_{n+1}(u,v))
\end{aligned}$$

(1) Los cuadrados:

$$\begin{tikzcd}
C_n(A) \arrow[r, "k_\#"] \arrow[d, "\partial_n"] & C_n(X,\mu) \arrow[d, "\partial''_n"] \\
C_{n-1}(A) \arrow[r, "k_\#"] & C_{n-1}(X,\mu)
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
C_n(B) \arrow[r, "L_\#"] \arrow[d, "\gamma_n"] & C_n(X,\mu) \arrow[d, "\partial''_n"] \\
C_{n-1}(B) \arrow[r, "L_\#"] & C_{n-1}(X,\mu)
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Que la línea

$$0 \longrightarrow C_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\Psi} C_n(X,\mu) \longrightarrow 0$$

es exacta, se da por lo siguiente:

1) $\Phi: C_n(A\cap B) \longrightarrow C_n(A) \oplus C_n(B)$ es inyectiva.

Sea $x \in \operatorname{Ker} \Phi$.

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}\Phi &\Rightarrow \Phi(x) = (0,0) \\ &\Rightarrow (i_\#(x),\ j_\#(x)) = (0,0) \\ &\Rightarrow i_\#(x) = 0 \ \text{ y } \ j_\#(x) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0;\ \text{así } \Phi \text{ es inyectiva.} \end{aligned}$$

2) $\operatorname{Im}\Phi = \operatorname{Ker}\Psi$

Sea $p \in \operatorname{Im}\Phi$.

$p \in \operatorname{Im}\Phi \Rightarrow p = (i_\#(x),\ j_\#(x))$; para algún $x \in C_n(A\cap B)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Psi(p) &= \Psi(i_\#(x),\ j_\#(x)) \\ &= k_\#(i_\#(T + D_n(A\cap B))) - L_\#(j_\#(T + D_n(A\cap B))); \\ &\quad \text{con } x = T + D_n(A\cap B) \\ &= (\sigma\circ k'_\#)(i_\#(T+D_n(A\cap B))) \\ &\quad -(\sigma\circ L'_\#)(j_\#(T + D_n(A\cap B))) \\ &= \sigma[k'_\#(T+D_n(A\cap B)) - L'_\#(T+D_n(A\cap B))] \\ &= \sigma[T+D_n(X,\mu) - T+D_n(X,\mu)] \\ &= \sigma(D_n(X,\mu)) \\ &= 0 \quad \therefore \quad p \in \operatorname{Ker}\Psi \end{aligned}$$

Ahora sea $p \in \operatorname{Ker}\Psi$; $p = (u,v)$ y

$u - T + D_n(A)$; $T \in Q_n(A)$ y $v = T_1 + D_n(B)$; $T_1 \in Q_n(B)$

$p \in \operatorname{Ker}\Psi \Rightarrow \Psi(p) = D_n(X,\mu)$

$\Rightarrow k_{\#}(u) - L_{\#}(v) = D_n(X,\mu)$

$\Rightarrow (\sigma\circ k'_{\#})(u) - (\sigma\circ L'_{\#})(v) = D_n(X,\mu)$

$\Rightarrow \sigma\left[k'_{\#}(T+D_n(A)) - L_{\#}(T_1 + D_n(B))\right] = D_n(X,\mu)$

$\Rightarrow \sigma\left[T + D_n(X,\mu) - T_1 + D_n(X,\mu)\right] = D_n(X,\mu)$

$\Rightarrow \sigma\left[T - T_1 + D_n(X,\mu)\right] = D_n(X,\mu)$

$\Rightarrow T - T_1 + D_n(X,\mu) = D_n(X, \mu)$

$\Rightarrow T - T_1 \in D_n(X,\mu)$

$\Rightarrow T - T_1 \in D_n(A)$ ó $T - T_1 \in D_n(B)$

Ahora.

$T - T_1 \in D_n(A) \Rightarrow T - T_1 = k \in Q_n(A)$

$\Rightarrow T_1 = T - k \in Q_n(A)$

$\Rightarrow T_1 \in Q_n(A\cap B)$; como

$T - T_1 \in D_n(A) \Rightarrow T + D_n(A) = T_1 + D_n(A)$ i.e.

$u = T + D_n(A) = T_1 + D_n(A)$ y $v = T_1 + D_n(B)$ así

$(u,v) = (i_{\#}(T + D_n(A\cap B), j_{\#}(T + D_n(A\cap B))) = (i_{\#}(x), j_{\#}(x)) = \Phi(x) \in \operatorname{Im}\Phi$

$T - T_1 \in D_n(B) \Rightarrow T - T_1 = k' \in Q_n(B)$

$\Rightarrow T = k' + T_1 \in Q_n(B)$

$\Rightarrow T \in Q_n(A\cap B)$; como

$T - T_1 \in D_n(B) \Rightarrow T + D_n(B) = T_1 + D_n(B)$; así

$u = T + D_n(A)$; $v = T + D_n(B)$

$(u,v) = (i_{\#}(T+D_n(A\cap B)), j_{\#}(T+D_n(A\cap B)))=(i_{\#}(x), j_{\#}(x))=\Phi(x)\,\varepsilon \mathrm{Im}\ \Phi.$

$$\therefore \mathrm{Im}\ \Phi = \mathrm{Ker}\ \Psi$$

y finalmente se prueba que $\Psi: C_n(A) \oplus C_n(B) \longrightarrow C_n(X,\mu)$ es sobreyectiva.

Sea $T + D_n(X,\mu)\ \varepsilon\ C_n(X,\mu)$, $T\ \varepsilon\ Q_n(X,\mu)$; así

$T = \sum_{\lambda=1}^{n} n_\lambda T_\lambda$; con T_λ de orden μ.

$= \Sigma n_j T_j + \Sigma n_i T_i$; $T_j: I^n \longrightarrow A$, $T_i: I^n \longrightarrow B$

luego:

$T + D_n(X,\mu) = \Sigma n_j T_j + \Sigma n_i T_i + D_n(X,\mu)$; una observación inmediata es ver que $D_n(X,\mu) = D_n(A) + D_n(B)$ y en efecto si:

$h\ \varepsilon\ D_n(X,\mu) \Rightarrow h = \sum_{k=1}^{n} n_k T_k$; T_k de orden μ

$= \Sigma n_j T_j + \Sigma n_i T_i$; T_i, T_j degenerados

$= n + m$; $n\ \varepsilon\ D_n(A)$ y $m\ \varepsilon\ D_n(B)$

luego $h\ \varepsilon\ D_n(A) + D_n(B)$. De donde

$$\begin{aligned}\Sigma n_j T_j + \Sigma n_i T_i + D_n(X,\mu) &= \Sigma n_j T_j + \Sigma n_i T_i + D_n(A) + D_n(B)\\ &= \Sigma n_j T_j + D_n(A) + \Sigma n_i T_i + D_n(B)\\ &= (r_1+D_n(A))+(r_2+D_n(B))\ \varepsilon\ C_n(A) \oplus C_n(B)\end{aligned}$$

pero también $(r_1+D_n(A)) + (-r_2+D_n(B))\ \varepsilon\ C_n(A) + C_n(B)$

Además:

$$\Psi[(r_1+D_n(A))+(-r_2+D_n(B))] = k_{\#}(r_1+D_n(A))-L_{\#}(-r_2+D_n(B))$$
$$= r_1+D_n(X,\mu) + r_2 + D_n(X,\mu)$$
$$= (r_1 + r_2) + D_n(X,\mu)$$
$$= T + D_n(X,\mu)$$

luego Ψ es sobreyectiva. Lo que finalmente prueba que la sucesión $0 \longrightarrow C_n(A\cap B) \xrightarrow{\Phi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\Psi} C_n(X,\mu) \longrightarrow 0$ es exacta. //

De la misma manera que se definió, el operador conexión en la sucesión de homología del par, podemos definir el homomorfismo Δ

$$\Delta\colon H_n(X,\mu) \longrightarrow H_{n-1}(A\cap B)\ ;\ \forall\, n$$

Además los métodos usados para probar la exactitud de la sucesión de homología del par se aplican sin ningún cambio para probar la exactitud de la siguiente sucesión de grupos y homomorfismos.

$$\ldots \xrightarrow{\Delta} H_n(A\cap B) \xrightarrow{\rho} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi} H_n(X,\mu) \xrightarrow{\Delta} \ldots$$

Definamos $\Delta\colon H_n(X,\mu) \longrightarrow H_{n-1}(A\cap B)$ de la siguiente manera:

Sea $m+\mathrm{Im}\,\partial''_{n+1} \in H_n(X,\mu) = \dfrac{\mathrm{Ker}\,\partial''_n}{\mathrm{Im}\,\partial''_{n+1}}$; $m \in \mathrm{Ker}\,\partial''_n \subset C_n(X,\mu)$

como Ψ es sobreyectiva, existe $(u,v) \in C_n(A) \oplus C_n(B)$ tal que $\psi(u,v) = m$; además por conmutatividad del diagrama:

$\Psi(\partial'_n(u,v)) = \partial''_n(\Psi(u,v)) = \partial''_n(m) = 0$, luego

$\partial'_n(u,v) \in \text{Ker } \Psi = \text{Im } \Phi$; i.e. existe $x \in C_{n-1}(A \cap B)$ tal que $\Phi(x) = \partial'_n(u,v)$. De nuevo por conmutatividad del diagrama.

$\Phi(\partial_{n-1}(x)) = \partial'_{n-1}(\Phi(x)) = \partial'_{n-1}(\partial'_n(u,v)) = 0$

de donde $\partial_{n-1}(x) \in \text{Ker } \Phi = \{0\}$ i.e. $\partial_{n-1}(x) = 0$

y así $x \in \text{Ker } \partial_{n-1}$. Ahora

$\Delta: H_n(X,\mu) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B)$

$m + \text{Im } \partial''_{n+1} \leadsto x + \text{Im } \partial_n$; $\Phi(x) = \partial'_n(u,v)$ y $\Psi(u,v) = m$.

Para ver que Δ es un homomorfismo. [1-4, cap. I]

Ahora se probará que la sucesión planteada es exacta.

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\rho} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi} H_n(X,\mu) \xrightarrow{\Delta} \cdots$$

1) $\text{Im } \rho = \text{Ker } \psi$

" $\subset$ "

Sea $(u,v) \in \text{Im } \rho$

$(u,v) \in \text{Im } \rho \Rightarrow \exists\, x \in H_n(A \cap B) / \rho(x) = (u,v)$

pero $\rho(x) = (u,v) = (i_*(x), j_*(x))$, ahora

$\psi(\rho(x)) = \psi(i_*(x), j_*(x))$

$= k_*(i_*(x)) - L_*(j_*(x))$

$= k_*(i_*(m+\text{Im } \partial_{n+1})) - L_*(j_*(m+\text{Im } \partial_{n+1}))$; $x = m+\text{Im } \partial_{n+1}$

$$= k_*(m + \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}) - L_*(m + \mathrm{Im}\ \gamma_{n+1})$$

$$= (k_\#(m) + \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1}) - (L_\#(m) + \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1})$$

$= 0$, ya que

como $m \in C_n(A)$ y $m \in C_n(B)$ se tiene

$m = r_1 + D_n(A)$ y $m = r_2 + D_n(B)$; así

$$k_\#(m) = K_\#(r_1 + D_n(A)) \quad \text{y} \quad L_\#(m) = L_\#(r_2 + D_n(B))$$

$$= r_1 + D_n(X) \quad \text{y} \quad = r_2 + D_n(X) \text{ ; ahora}$$

como $m = r_1 + D_n(A)$ y $m = r_2 + D_n(B)$, se tiene

$$r_1 + D_n(A) = r_2 + D_n(B) \Rightarrow [r_1 + D_n(A)] + D_n(X) = [r_2 + D_n(B)] + D_n(X)$$

$$\Rightarrow r_1 + [D_n(A) + D_n(X)] = r_2 + [D_n(B) + D_n(X)]$$

$$\Rightarrow r_1 + D_n(X) = r_2 + D_n(X)$$

$$\Rightarrow k_\#(m) = L_\#(m); \text{ así}$$

$\psi(\rho(x)) = \psi(u,v) = 0$; de donde $(u,v) \in \mathrm{Ker}\ \psi$.

" $\supset$ "

Sea $(u,v) \in \mathrm{Ker}\ \psi$

$$(u,v) \in \mathrm{Ker}\ \psi \Rightarrow \psi(u,v) = \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1}$$

$$\Rightarrow k_*(u) - L_*(v) = \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1};\ u \in H_n(A),\ v \in H_n(B)$$

$$\Rightarrow k_*(t + \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}) - L_*(n + \mathrm{Im}\ \gamma_{n+1}) = \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1}$$

$$t \in \mathrm{Ker}\ \partial_n,\ n \in \mathrm{Ker}\ \partial_n$$

$$\Rightarrow k_\#(t) + \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1} - L_\#(n) + \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1} = \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1}$$

$$\Rightarrow k_\#(t) - L_\#(n) + \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1} = \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1}$$

$$\Rightarrow (k_\#(t) - L_\#(n)) \in \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1};\ \text{i.e. existe}$$

$r + D_{n+1}(X,\mu)$ tal que $\partial''_{n+1}(r+D_{n+1}(X,\mu)) = k_{\#}(t) - L_{\#}(n)$

por la sobreyectividad de Ψ, existe

$(m,p) \in C_{n+1}(A) \oplus C_{n+1}(B)$ tal que $\Psi(m,p) = r + D_{n+1}(X,\mu)$

y por la conmutatividad del diagrama.

$\Psi(\partial'_{n+1}(m,p)) = \partial''_{n+1}(\Psi(m,p)) = k_{\#}(t) - L_{\#}(n)$ i.e.

$$\Psi(\partial'_{n+1}(m,p)) = k_{\#}(t) - L_{\#}(n) \Rightarrow \Psi(\partial_{n+1}(m),\gamma_{n+1}(p))=k_{\#}(t)-L_{\#}(n)$$

$$\Rightarrow k_{\#}(\partial_{n+1}(m))-L_{\#}(\gamma_{n+1}(p))=k_{\#}(t)-L_{\#}(n$$

$$\Rightarrow k_{\#}(t-\partial_{n+1}(m))-L_{\#}(n-\gamma_{n+1}(p))=0$$

$$\Rightarrow \Psi(t-\partial_{n+1}(m),\ n - \gamma_{n+1}(p)) = 0$$

$$\Rightarrow (t-\partial_{n+1}(m),n-\gamma_{n+1}(p))\in \text{Ker } \Psi=\text{Im } \Phi$$

i.e. existe $x \in C_n(A\cap B)$ tal que:

$\Phi(x) = (i_{\#}(x),\ j_{\#}(x)) = (t - \partial_{n+1}(m),\ n - \gamma_{n+1}(p))$ por ser suma directa se tiene:

$i_{\#}(x) = t - \partial_{n+1}(m)$ y $j_{\#}(x) = n - \gamma_{n+1}(p)$ o que

$t = i_{\#}(x) + \partial_{n+1}(m)$ y $n = j_{\#}(x) + \gamma_{n+1}(p)$

sustituyendo en las expresiones para u,v se tiene:

$u = t + \text{Im } \partial_{n+1}$ y $v = p + \text{Im } \gamma_{n+1}$

$= i_{\#}(x) + \partial_{n+1}(m) + \text{Im } \partial_{n+1}$ y $v = j_{\#}(x) + \gamma_{n+1}(p) + \text{Im } \gamma_{n+1}$

$= i_{\#}(x) + \text{Im } \partial_{n+1}$ y $v = j_{\#}(x) + \text{Im } \gamma_{n+1}$

$= i_{*}(x + \text{Im } \partial_{n+1})$ y $v = j_{*}(x + \text{Im } \partial_{n+1})$, así

$(u,v) = (i_{*}(x + \text{Im } \partial_{n+1}),\ j_{*}(x + \text{Im } \partial_{n+1}))$

$= \rho(x + \text{Im } \partial_{n+1})$; $x + \text{Im } \partial_{n+1} \in H_n(A\cap B)$, luego

$(u,v) \varepsilon \text{ Im } \rho$.

Además se prueba que $\text{Im } \psi = \text{Ker } \Delta$.

" $\supset$ "

Sea $T + \text{Im } \partial''_{n+1} \varepsilon \text{ Ker } \Delta$, por definición

$\Delta(T + \text{Im } \partial''_{n+1}) = x + \text{Im } \partial_n;\ \Phi(x) = \partial'_n(u,v)$ y $\Psi(u,v) = T$

por condición:

$$
\begin{aligned}
T + \text{Im } \partial''_{n+1} &= \Psi(u,v) + \text{Im } \partial''_{n+1} \\
&= k_{\#}(u) - L_{\#}(v) + \text{Im } \partial''_{n+1} \\
&= k_{\#}(u) + \text{Im } \partial''_{n+1} - L_{\#}(v) + \text{Im } \partial''_{n+1} \\
&= k_{*}(u + \text{Im } \partial_{n+1}) - j_{*}(v + \text{Im } \gamma_{n+1}) \\
&= \psi(u + \text{Im } \partial_{n+1}, v + \text{Im } \gamma_{n+1}) \text{ con}
\end{aligned}
$$

$u + \text{Im } \partial_{n+1} \varepsilon H_n(A)$ y $v + \text{Im } \gamma_{n+1} \varepsilon H_n(B)$.

$\therefore\ T + \text{Im } \partial''_{n+1} \varepsilon \text{ Im } \psi$

" $\subset$ "

Sea $T + \text{Im } \partial''_{n+1} \varepsilon \text{ Im } \psi$

$T + \text{Im } \partial''_{n+1} \varepsilon \text{ Im } \psi \Rightarrow \exists (u,v) \varepsilon H_n(A) \oplus H_n(B)/\psi(u,v) = T + \text{Im } \partial''_{n+1}$

$$
\begin{aligned}
\psi(u,v) = T + \text{Im } \partial''_{n+1} &\Rightarrow k_{*}(u) - L_{*}(v) = T + \text{Im } \partial''_{n+1} \\
&\Rightarrow k_{*}(r_1 + \text{Im } \partial_{n+1}) - L_{*}(r_2 + \text{Im } \gamma_{n+1}) = T + \text{Im } \partial''_{n+1} \\
&\Rightarrow k_{\#}(r_1) + \text{Im } \partial''_{n+1} - L_{\#}(r_2) + \text{Im } \partial''_{n+1} = T + \text{Im } \partial''_{n+1} \\
&\Rightarrow k_{\#}(r_1) - L_{\#}(r_2) + \text{Im } \partial''_{n+1} = T + \text{Im } \partial''_{n+1}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \Psi(r_1,r_2) + \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1} = T + \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1}$$

$$\Rightarrow \Delta(\Psi(r_1,r_2) + \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1}) = \Delta(T+\mathrm{Im}\ \partial''_{n+1})$$

$$\Rightarrow x+\mathrm{Im}\ \partial_n=\Lambda(t+\mathrm{Im}\ \partial''_{n+1});\ \text{con}\ \Phi(x)=\partial'_n(u',v')$$

$$\text{y}\ \Psi(u',v')=\Psi(r_1,r_2), x \in \mathrm{Ker}\ \partial_{n-1} \subset C_{n-1}(A\cap B)$$

por $\Psi(u',v') = \Psi(r_1,r_2) \Rightarrow k_\#(u')-L_\#(v') = k_\#(r_1) - L_\#(r_2)$

$$\Rightarrow k_\#(u',r_1) - L_\#(v'-r_2) = 0$$

$$\Rightarrow \Psi(u' - r_1,\ v' - r_2) = 0.\quad \text{i.e.}$$

$(u' - r_1,\ v' - r_2) \in \mathrm{Ker}\ \Psi = \mathrm{Im}\ \Phi$, luego existe $x' \in C_n(A\cap B)$ tal que $\Phi(x') = (u' - r_1,\ v' - r_2)$.

$$\begin{aligned}\Phi(x') = (u' - r_1,\ v' - r_2) \dashrightarrow \partial'_n(\Phi(x')) &= \partial'_n(u' - r_1,\ v' - r_2)\\ &= (\partial_n(u'-r_1),\gamma_n(v'-r_2))\\ &= (\partial_n(u')-\partial_n(r_1),\gamma_n(v')-\gamma_n(r_2))\\ &= (\partial_n(u'),\ \gamma_n(v'))\\ &= \partial'_n(u',v'),\ \text{por condición}\\ &= \Phi(x).\quad \text{i.e.}\end{aligned}$$

$\partial'_n(\Phi(x')) = \Phi(x) \Rightarrow \Phi(\partial_n(x')) = \Phi(x)$; por conmutatividad

$\Rightarrow \partial_n(x') = x$; por ser Φ inyectiva

$\Rightarrow x \in \mathrm{Im}\ \partial_n$, luego

$\Delta(T+\mathrm{Im}\ \partial''_{n+1}) = \mathrm{Im}\ \partial_n$, así $T + \mathrm{Im}\ \partial''_{n+1} \in \mathrm{Ker}\ \Delta$

El hecho que Im Δ = Ker ρ, es similar a la del par. Luego la sucesión

$$\ldots \longrightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\rho} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi} H_n(X,\mu) \xrightarrow{\Delta} \ldots$$

es exacta.

Por Teorema 2-6 $H_n(X,\mu) \simeq H_n(x)$ y la sucesión:

$$\ldots \longrightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\rho} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} \ldots$$

Se mantiene exacta /

3.3 LA RELACION ENTRE EL GRUPO FUNDAMENTAL Y EL PRIMER GRUPO DE HOMOLOGIA.

Los teoremas de esta sección afirman que para un espacio arco-conexo, el grupo fundamental determina completamente el primer grupo de homología.

Los enunciados precisos se daran después de algunas definiciones preliminares.

Para familiarisarse con la teoría del grupo fundamental ver [4, cap. I, II]

En seguida para cualquier espacio topológico X y cualquier punto base $x_0 \in X$, definamos $hX: \pi(X,x_0) \longrightarrow H_1(X)$ como sigue:

Sea $\alpha \in \pi(X, x_0)$, seleccionemos un camino cerrado $f: I \longrightarrow X$ que pertenece a la clase de equivalencia α. Podemos pensar que f es un 1-cubo singular y por lo tanto un elemento que determina una cadena en $C_1(X)$.

Como $f(0) = f(1) = x_0$; $\partial_1(f) = 0$. Ya que

$$\begin{aligned}(\partial_1 f)(x) &= (-A_1 f)(x) + (B_1 f)(x)\\ &= -f(0) + f(1)\\ &= -x_0 + x_0\\ &= 0.\end{aligned}$$

En otras palabras $f \in \text{Ker } \partial_1$, luego podemos definir $hX(\alpha)$ como la clase de homología del ciclo f i.e. $hX(\alpha) = f + \text{Im } \partial_2'$.

Se prueba que hX está bien definida, efectivamente si $\alpha = \beta$, entonces $hX(\alpha) = hX(\beta)$.

Sea $f \in \alpha$ y $\alpha = \beta \Rightarrow hX(\alpha) = f + \text{Im } \partial_2$
$$= hX(\beta).$$

Además:

$hX(\alpha.\beta) = hX(\alpha) + hX(\beta)$ ya que si seleccionamos un elemento representativo $f: I \longrightarrow X$ y $g: I \longrightarrow X$ para α, β respectivamente, entonces

$f.g: I \longrightarrow X$ es un elemento representativo de $\alpha.\beta$ donde

$$(f.g)(t) = \begin{cases} f(2t) \; ; & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1); & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$ y además

f.g es un ciclo.

Ahora definamos un 2-cubo $T\colon I^2 \longrightarrow X$ mediante la fórmula:

$$T(x_1,x_2) = \begin{cases} f(x_1 + 2x_2) & ; \quad x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ g\left(\dfrac{x_1 + 2x_2 - 1}{x_1 + 1}\right) & ; x + 2x_1 \geq 1; \end{cases}$$ la función T fue seleccionada de manera que a lo largo de la línea horizontal es una constante como se muestra en la figura 3-1.

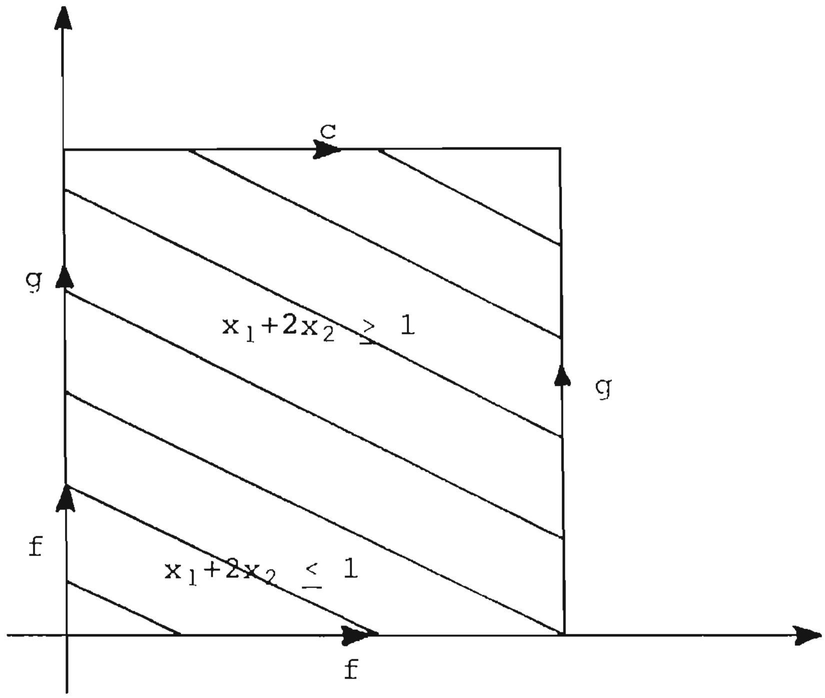


Fig. 3-1

Es claro que $\partial_2(T) = f + g - f.g - c$, donde c es un 1-cubo singular degenerado. Además

$$\partial_2'(T + D_2(X)) = \partial_2(T) + D_1(X); \quad T + D_2(X) \in \frac{Q_2(X)}{D_2(X)}$$

$$= f + g - f.g - c + D_1(X)$$

$$= f + g - f.g + D_1(X)$$

$$\Rightarrow \left[f + g - f.g + D_1(X)\right] \in \operatorname{Im} \partial_2'$$

$\Rightarrow f + g + \mathrm{Im}\ \partial_2' = f.g + \mathrm{Im}\ \partial_2'$

$\Rightarrow f + g + \mathrm{Im}\ \partial_2' = f.g + \mathrm{Im}\ \partial_2'$

$\Rightarrow hX(\alpha) + hX(\beta) = hX(\alpha.\beta)$

$\therefore$ hX es un homomorfismo

El homomorfismo hX, satisface la siguiente propiedad.

Sea $\rho : X \longrightarrow Y$ una función continua tal que $\rho(x_0) = y_0$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \pi(X,x_0) & \xrightarrow{\rho_*} & \pi(Y,y_0) \\ \downarrow h_X & & \downarrow h_Y \\ H_1(X) & \xrightarrow{\rho_*} & H_1(Y) \end{array} \qquad hY \circ \rho_* = \rho_* \circ hX.$$

Diagrama 3 - 5

efectivamente; definiendo

$\rho_* : \pi(X,x_0) \longrightarrow \pi(Y,y_0) / \rho_*(\alpha) = \rho \circ f$; donde $f \in \alpha$ y $\rho \circ f$ es un camino cerrado en Y; se tiene

$$\begin{aligned} hY(\rho_*(\alpha)) &= hY(\rho \circ f) \ ; \ f \in \alpha \\ &= \rho \circ f + \mathrm{Im}\ \gamma_2' \\ &= \rho_{\#}(f) + \mathrm{Im}\ \gamma_2' \\ &= \rho_*(f + \mathrm{Im}\ \partial_2') \\ &= \rho_*(hX(\alpha)) \quad / \end{aligned}$$

El homomorfismo h satisface las siguientes dos propiedades:

a) Si el espacio no es arco-conexo, entonces $H_1(X)$ es la suma directa de los grupos $H_1(X_\lambda)$ donde $\{X_\lambda/\lambda \in A\}$ denota el conjunto de arco-componentes de X. Es claro que la imagen de el homomorfismo hX está enteramente contenido, en el primer grupo de homología de alguno de los arco-componentes de X la cual contiene al punto base x .

En el caso que el espacio sea arco-conexo el homomorfismo hX es más interesante.

b) Como $H_1(X)$ es abeliano, el sub-grupo conmutador de $\pi(X,x_0)$ denotado por $\pi''(X,x_0) = \left[\pi(X,x_0),\ \pi(X,x_0)\right]$ está contenido en el Ker hX.

En efecto, si $\theta \in \pi''(X,x_0)$; $\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_i$, entonces

$$h_X(\theta) = h_X\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_X(\alpha_i \beta_i \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_X(\alpha_i \bar{\alpha}_i) + \sum_{i=1}^{n} h_X(\beta_i \bar{\beta}_i)$$

$$= nB_1(X) + nB_1(X)$$

$$= B_1(X)$$

de donde $\pi''(X,x_0) \subset \operatorname{Ker} h_X$.

En lo que sigue usaremos la notación $\pi'(X,x_0)$ para denotar "El grupo fundamental abelianizado" i.e. el grupo cociente

$\pi(X,x_0)/\pi''(X,x_0)$, entonces h_X induce un homomorfismo $h'_X: \pi'(X,x_0) \longrightarrow H_1(X)$.

En lo que sigue, calcularemos grupos de homología singulares de espacios arco-conexos; usando solamente cubos singulares los cuales tienen todos sus vértices mapeados sobre el punto base x_0. En esta sección habrá una cierta analogía con la terorία usada para la prueba del teorema 2-6.

Sea $Q_n(X/x_0)$ el sub-grupo de $Q_n(X)$ generado por todos los n-cubos singulares $T: I^n \longrightarrow X$ tal que $T(v) = x_0$, para cualquier vértice v del cubo I^n. Además

$D_n(X/x_0) = D_n(X) \cap Q_n(X/x_0)$ y

$C_n(X/x_0) = \dfrac{Q_n(X/x_0)}{D_n(X/x_0)}$. Notese que el operador frontera

$\partial_n: Q_n(X) \longrightarrow Q_{n-1}(X)$ obviamente mapea del sub-grupo $Q_n(X/x_0)$ en $Q_{n-1}(X/x_0)$ y por lo tanto induce un operador frontera $\partial'_n: C_n(X/x_0) \longrightarrow C_{n-1}(X/x_0)$. Como es usal definiremos el grupo de n-ciclos.

$Z_n(X/x_0)$ como el Ker ∂'_n i.e.

$Z_n(X/x_0) = \{u \in C_n(X/x_0)/\partial'_n(u) = 0\}$ y el grupo de ciclos fronteras $B_n(X/x_0)$ como $\partial'_{n+1}(C_{n+1}(X/x_0))$. Así $B_n(X/x_0) \subset Z_n(X/x_0)$ y luego definimos.

$H_n(X/x_0) = \dfrac{Z_n(X/x_0)}{B_n(X/x_0)}$; la inclusión $Q_n(X/x_0) \subset Q_n(X)$ induce un homomorfismo

$\tau_n: C_n(X/x_0) \longrightarrow C_n(X)$ y este induce a

$\tau_*: H_n(X/x_0) \longrightarrow H_n(X)$

LEMA 3-1

Si el espacio X es arco-conexo, entonces el homomorfismo $\tau_*: H_1(X/x_0) \longrightarrow H_1(X)$ es un isomorfismo.

Pa

Construiremos un homorfismo $\rho_n: Q_n(X) \longrightarrow Q_{n+1}(X)$ tal que $\rho_n(D_n(X)) \subset D_{n+1}(X)$; para el cual procederemos de la siguiente manera:

Para el caso n = 0

Podemos identificar los o-cubos singulares con los puntos de X.

Para cada $x \in X$ tal que $x \neq x_0$, seleccionemos un camino $T: I \longrightarrow X$, tal que $T(0) = x_0$ y $T(1) = x$. Y entonces definiremos $\rho_0(x) = T$; para completar esta definición hacemos $\rho_0(x_0) = x_0$. Así

$\partial_1(\rho_0(x)) = - A_1\rho_0(x) + B_1\rho_0(x) = -A_1T + B_1T = x - x_0$ i.e.

$\partial_1(\rho_0(x)) = x - x_0$.

Para el caso n = 1.

Sea $T: I \longrightarrow X$ un 1-cubo singular; tenemos que definir un 2-cubo singular $\rho_1 T: I^2 \longrightarrow X$. Ya tenemos definida la homotopía de cadena sobre las dos caras A_1T y B_1T y queremos una nueva definición que sea consistente con la ya definida.

Para eso imponemos las siguientes tres condiciones sobre $\rho_1 T$.

$\beta_1\rho_1(T) = T$

$A_2\rho_1(T) = \rho_0(A_1T)$

$B_2\rho_1(T) = \rho_0(B_1T)$; notese que estas tres condiciones implican que $A_1\rho_1 T \in Q_1(X/x_0)$, efectivamente

$$\begin{aligned}\partial_2(\rho_1(T)) &= -A_1\rho_1(T) + B_1\rho_1(T) + A_2\rho_1(T) - B_2\rho_1(T)\\ &= -A_1\rho_1(T) + T + \rho_0(A_1T) - \rho_0(B_1T)\\ &= -A_1\rho_1(T) + T - \rho_0(-A_1T + B_1T)\end{aligned}$$

Aplicando ∂_1 a ambos miembros se tiene:

$0 = -\partial_1(A_1\rho_1(T)) + \partial_1(T) - \partial_1(\rho_0(-A_1T + B_1T))$

$0 = -\partial_1(A_1\rho_1(T)) + \partial_1(T) - \partial_1(\rho_0(\partial_1(T)))$

$0 = -\partial_1(A_1\rho_1(T)) + \partial_1(T) - \partial_1(T) + x_0$; de donde

$\partial_1(A_1\rho_1(T)) = x_0 \in Q_1(X/x_0)$ i.e. la frontera de $A_1\rho_1(T)$ es x_0, por tanto $A_1\rho_1(T) \in Q_1(X/x_0)$.

Así, dado un 1-cubo singular T, siempre existe un 2-cubo singular $\rho_1(T)$ satisfaciendo las condiciones impuestas anteriormente, por que el sub-conjunto de I^2 que consiste de la unión de cualquiera de sus tres lados es un retracto de I^2.

En efecto si A es la unión de los segmentos $\overline{(0,0)(1,0)}$, $\overline{(1,0)(1,1)}$, $\overline{(1,1)(0,1)}$ del plano, existe la retracción $r: I^2 \longrightarrow A$ ya que se prueba que A es homeomorfo a I y además I^2 se puede retraer a I mediante la función proyección; por lo tanto existe la retracción de I^2 en A, como se muestra geométricamente.

$$\begin{tikzcd}
I^2 \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "\rho_1 T \circ r"'] \arrow[dr, "r"] & I \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
X & A \arrow[l, "\rho_1 T"]
\end{tikzcd}$$

Fig. 3-2

Además imponemos las siguientes dos condiciones adicionales, las cuales son consistentes con las impuestas anteriormente.

a) Si $T \in Q_1(X/x_0)$, entonces definimos $\rho_1(T)(x_1,x_2) = T(x_2)$

b) Si T es un 1-cubo degenerado, entonces definimos $\rho_1(T)(x_1,x_2) = \rho_0(A_1T)(x_1) = \rho_0(B_1T)(x_1)$. En ambos casos $\rho_1(T)$ es degenerado.

Caso n = 2.

Dado un 2-cubo singular $T: I^2 \longrightarrow X$ queremos definir $\rho_2(T): I^3 \longrightarrow X$ tal que la definición sea consistente con la definida para ρ_1 sobre las caras de T. Por eso imponemos las siguientes condiciones sobre $\rho_2(T)$.

$$B_1\rho_2(T) = T$$

$$A_i\rho_2(T) = \rho_1(A_{i-1}T) \quad ; \; i = 2,3$$

$$B_i\rho_2(T) = \rho_1(B_{i-1}T) \quad ; \; i = 2,3;$$ Notese que

$A_1\rho_2(T) \; \varepsilon \; Q_2(X/x_0)$, efectivamente aplicando ∂_3 al $\rho_2(T)$ se tiene:

$$\partial_3(\rho_2(T)) = -A_1\rho_2(T) + B_1\rho_2(T) + A_2\rho_2(T) - B_2\rho_2(T) - A_3\rho_2(T) + B_3\rho_2(T)$$

$$= -A_1\rho_2(T) + T + \rho_1(A_1T) - \rho_1(B_1T) - \rho_1(A_2T) + \rho_1(B_2T)$$

$$\partial_3(\rho_2(T)) = -A_1\rho_2(T) + T - \rho_1(-A_1T + B_1T + A_2T - B_2T)$$

$$0 = -\partial_2(A_1\rho_2(T)) + \partial_2(T) - \partial_2(\rho_1 \circ \partial_2(T))$$

$$\partial_2(A_1\rho_2(T)) = \partial_2(T) + A_1\rho_1(\partial_2(T)) - \partial_2(T) + \rho_0(\partial_1(\partial_2(T)))$$

$$= A_1\rho_1(\partial_2(T)) \; \varepsilon \; Q_1(X/x_0)$$

Dado un 2-cubo singular T, siempre existe un 3-cubo singular $\rho_2(T)$ satisfaciendo estas cinco condiciones, ya que la unión de cualquiera cinco caras de I^3 es un retracto de I^3.

Esta afirmación se prueba mediante un proceso similar para la existencia de un 2-cubo singular $\rho_1(T)$ realizado anteriormente.

También imponemos las siguientes 2 condiciones adicionales las cuales son consistentes con las previas cinco definicio nes y con las antes definidas.

a) Si $T \varepsilon Q_2(X/x_0)$, entonces definimos $\rho_2(T)$ por

$\rho_2(T)(x_1,x_2,x_3) = T(x_2,x_3)$.

b) Si T es un 2-cubo degenerado, entonces definimos $\rho_2(T)$ como sigue:

como T es degenerado, $T(x_1,x_2) = A_1T(x_2) = B_1T(x_2)$ ó $T(x_1,x_2) = A_2T(x_1) = B_2T(x_1)$, para el primer caso definamos:

$$\rho_2(T)(x_1,x_2,x_3) = \rho_1(A_1T(x_1,x_3)) = \rho_1(B_1T(x_1,x_3))$$

mientras que en el segundo caso.

$$\rho_2(T)(x_1,x_2,x_3) = \rho_1(A_2T(x_1,x_2)) = \rho_1(B_2T(x_1,x_2))$$

en ambos casos $\rho_2(T)$ es degenerado.

Para $n = 1,2$ se verifica que:

$\partial_{n+1}(\rho_n(T)) = T - A_1\rho_n(T) - \rho_{n-1}(\partial_n(T))$ o que

$\partial_{n+1}(\rho_n(T)) + \rho_{n-1}(\partial_n(T)) = T - A_1\rho_n(T)$ Ec. 3-1

mientras que para $n = 0$.

$\partial_1(\rho_0(x)) = x - x_0$ Ec. 3-2.

Definida $\rho_n(T)$ para los casos $n = 0, 1,2$ que son los casos de interés para probar el lema 3-1 pasaremos a definir $\rho'_n: Q_n(X) \longrightarrow Q_n(X/x_0)$; para $n = 0,1,2$ para $n = 0$; $\rho'_0(x) = x_0$; para cualquier 0-cubo x, para $n = 1,2$; $\rho'_n(T) = A_1\rho_n(T)$.

Observese que $\rho'_n: \Omega_n(X/x_0) \longrightarrow \Omega_n(X/x_0)$ es la función identidad.

Para n = 0; es una trivialidad.

para n = 1

$\rho'_n(T) = A_1\rho_n(T)$; ahora

$\rho'_n(T)(x) = A_1\rho_n(T)(x)$

$= \rho_n(T)(0,x)$

$= T(x), \forall\ x \in I.$ Así

$\rho'_n(T) = T.$

Similar para n = 2.

Además $\rho_n(D_n(X)) \subset D_{n+1}(X)$ y $\rho'_n(D_n(X)) \subset D_n(X/x_0)$. Por lo tanto ambas inducen los homomorfismos:

$\rho'_n: C_n(X) \longrightarrow C_n(X/x_0)$ y

$\Phi_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$ tal que demanera analoga a 3-1 y 3-2 cumplen:

para n = 0:

$\partial_1(\Phi_0(u)) = u - \rho'_0(u)$; $u \in C\ (X)$ Ec. 3-3

para n = 1,2

$\partial_{n+1}(\Phi_n(u)) + \Phi_{n-1}(\partial_n(u)) = u - \rho'_n(u)$; $u \in C_n(X)$, Ec. 3-4

Además se prueba que ρ'_n, conmuta con el operador frontera ∂_n i.e. $\partial_n \circ \rho'_n = \rho'_{n-1} \circ \partial_n$ efectivamente de Ec. 3-1 se sigue que:

para n = 1

$$\partial_1(\partial_2(\rho_1(T))) = \partial_1(T) - \partial_1(A_1\rho_1(T)) - \partial_1(\rho_0(\partial_1(T)))$$

$$0 = \partial_1(T) - \partial_1(A_1\rho_1(T)) - (\partial_1 \circ \rho_0)(\partial_1(T))$$

$$\partial_1(A_1\rho_1(T)) = \partial_1(T) - \partial_1(T) + (\rho'_0 \circ \partial_1)(T)$$

$$(\partial_1 \circ \rho'_1)(T) = (\rho'_0 \circ \partial_1)(T)$$

para n = 2

$$\partial_2(\partial_3(\rho_2(T))) = \partial_2(T) - \partial_2(A_1\rho_2(T)) - \partial_2(\rho_1(\partial_2(T)))$$

$$0 = \partial_2(T) - \partial_2(A_1\rho_2(T)) - \partial_2(\rho_1(\partial_2(T)))$$

$$\begin{aligned} \partial_2(A_1\rho_2(T)) &= \partial_2(T) - \big[-A_1\rho_1(\partial_2(T)) + B_1\rho_1(\partial_2(T)) + A_2\rho_2(\partial_2(T)) \\ &\qquad - B_2\rho_1(\partial_2(T))\big] \\ &= \partial_2(T) + \rho'_1(\partial_2(T)) - \partial_2(T) - \rho_0(A_1\partial_2(T)) + \rho_0(B_1\partial_2(T \\ &= \rho'_1(\partial_2(T)) + \rho_0(A_1\partial_2(T) + B_1\partial_2(T)) \\ &= \rho'_1(\partial_2(T)) + \rho_0(\partial_1(\partial_2(T))) \\ \partial_2(\rho'_2(T)) &= \rho'_1(\partial_2(T)). \end{aligned}$$

Como se desiaba.

De manera trivial también se prueba que $\partial'_n \circ \rho'_n = \rho'_{n-1} \circ \partial'_n$. Por lo tanto ρ'_n: $C_n(X) \longrightarrow C_n(X/x_0)$ induce un homomorfismo ρ_*: $H_n(X) \longrightarrow H_n(X/x_0)$ para n = 0.1,2.

Además se prueba que $\rho'_n \circ \tau_n$ es la función identidad en $C_n(X/x_0)$, para n = 0,1,2, de donde $\rho'_n \circ \tau_n$ induce al homomorfis mo $\rho_* \circ \tau_*$ el cual es la función identidad en $H_n(X/x_0)$ para $n = 0,1,2$.

De Ec. 3-3 y Ec. 3-4 tenemos que Φ_n: $C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$ es una homotopía de cadenas en las funciones $\tau_n \circ \rho'_n$ y la función identidad de $C_n(X)$ por lo tanto el homomorfismo inducido por $\tau_n \circ \rho'_n$ i.e. $\tau_* \circ \rho_*$ es la función identidad en $H_n(X)$ así τ_* es un isomorfismo /.

En base al lema 3-1, probaremos de manera inmediata el siguiente:

TEOREMA 3-3

Sea X un espacio arco-conexo, entonces h es un isomorfismo de $\pi'(X,x_0)$ sobre $H_1(X)$.

Pa

Antes de todo notese que $Z_1(X/x_0) = C_1(X/x_0)$ por lo tanto existe un epimorfismo natural k: $C_1(X/x_0) \longrightarrow H_1(X/x_0)$ tal que Ker $k = B_1(X/x_0)$.

Definamos ahora el homomorfismo

ℓ: $Q_1(X/x_0) \longrightarrow \pi'(X,x_0)$ de la manera mas simple:

Como $Q_1(X/x_0)$ es un grupo abeliano libre y $\pi'(X,x_0)$ es abeliano, es suficiente definir sobre los elementos básicos de $Q_1(X/x_0)$ i.e. sobre los 1-cubos singulares.

Para cada elemento básico $T: I \longrightarrow X \quad T(0) = T(1) = x_0$ por lo tanto T determina un único elemento de $\pi(X,x_0)$.

Así podemos definir $\ell: Q_1(X/x_0) \longrightarrow \pi'(X,x_0)$ como $\ell(T) = \alpha + \pi''(X,x_0) \; ; \; T \in \alpha$.

Nótese que ℓ induce un homomorfismo $\ell': C_1(X/x_0) \longrightarrow \pi'(X,x_0)$, el cual obviamente es un epimorfismo. Además se prueba que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
C_1(X/x_0) \arrow[r, "\ell'"] \arrow[d, "K"] & \pi'(X,x_0) \arrow[d, "h"] \\
H_1(X/x_0) \arrow[r, "\tau_*"] & H_1(X)
\end{tikzcd}$$

Diagrama 3-6

en efecto si $T + D_1(X/x_0) \in C_1(X/x_0)$;

$$\begin{aligned}
h(\ell'(T + D_1(X/x_0))) &= h(\ell(T) + \pi''(X,x_0)) \\
&= h(\alpha + \pi''(X,x_0)) \\
&= hX(\alpha) + B_1(X) \\
&= T + B_1(X) \; ; \; T \in \alpha \\
&= \tau_*(T + B_1(X/x_0)) \\
&= \tau_*(T + D_1(X/x_0) + B_1(X/x_0)) \\
&= \tau_*(K(T + D_1(X/x_0)) \\
&= (\tau_* \circ K)(T + D_1(X/x_0))
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad h \circ \ell' = \tau_* \circ K$$

Además se tiene que si $T + D_1(X/x_0) \in \operatorname{Ker} \ell'$ i.e. $\ell'(T + D_1(X/x_0)) = 0$, entonces

$h(\ell'(T + D_1(X/x_0))) = 0$, o que

$\tau_*(k(T + D_1(X/x_0))) = 0$, como τ_* es isomorfismo

$k(T + D_1(X/x_0)) = 0$, de donde

$T + D_1(X/x_0) \in \text{Ker } K = B_1(X/x_0)$ por lo que Ker $\ell' \subset B_1(X/x_0)$.

Además se prueba que dada la sucesión de grupos y homorfismos:

$$Q_2(X/x_0) \xrightarrow{\partial_2} Q_1(X/x_0) \xrightarrow{\ell} \pi'(X,x_0),\quad \ell_0\partial_2 = 0.$$

Sea $T \in Q_2(X/x_0)$ un elemento básico, luego

$$\begin{aligned}\ell(\partial_2(T)) &= \ell(-A_1T + B_1T + A_2T - B_2T)\\ &= \ell(-A_1T).\ell(B_1T).\ell(A_2T).\ell(-B_2T)\\ &= (\bar{\alpha}+\pi''(X,x_0))(\alpha+\pi''(X,x_0))(\bar{\beta}+\pi''(X,x_0))(\beta+\pi''(X,x_0))\\ &= \bar{\alpha}\alpha\bar{\beta}\beta + \pi''(X,x_0)\\ &= \pi''(X,x_0), \quad \text{así}\end{aligned}$$

$\ell\circ\partial_2 = 0 \qquad \therefore \quad \text{Im } \partial_2 \subset \text{Ker } \ell.$

Se concluye de esto que Ker ℓ' = Ker K

Además dado $u \in H_1(X)$, por la sobreyectividad de τ_*, existe $u' \in H_1(X/x_0)$ tal que $\tau_*(u') = u$. Y Como K es sobreyectiva existe $n \in C_1(X/x_0)$ tal que $K(n) = u'$, de donde $u = \tau_*(u') = \tau_*(K(n)) = h(\ell'(n))$, por lo tanto h es sobreyectiva.

Por otro lado si $h(u) = 0$, $u \in \pi'(X,x_0)$ y como ℓ' es epimorfismo, existe $u' \in C_1(X/x_0)$ tal que $\ell'(u') = \mu$ así:

$h(u) = h(\ell'(u')) = (h\circ\ell')(u') = (\tau_*\circ K)(u') = \tau_*(K(u'))$

de donde $\tau_*(K(u')) = h(u) = 0$ así

$K(u') = 0$ por consiguiente,

$u' \in \operatorname{Ker} K = \operatorname{Ker} \ell'$, entonces $\ell'(u') = 0 = u$

lo cual aplica que h es un monomorfismo. /

B I B L I O G R A F I A

1- FOUNDATIONS OF GENERAL TOPOLOGY

William J. Pervin

Ed. Acadmic Press, 1964

2- INTRODUCCION A LA TOPOLOGIA ALGEBRAICA

William S. Massey

Ed. Revertê, S.A. Barcelona, 1972

3- SINGULAR HOMOLOGY THEORY

William S. Massey

Ed. Springer - Verlag. New York; 1980

4- EL GRUPO FUNDAMENTAL DEL CIRCULO

William Castro Guzmán

Julio, 1986.

5- INTRODUCCION AL ALGEBRA HOMOLOGICA

Sze-Tsen Hu,

Ed. Vicens-Vives