Universidad de El Salvador
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Matemática

Fundamentos de Algebras de Banach

Trabajo de Graduación

PRESENTADO POR:

Ethel Beatriz Castillo Fabián

Ovidio Ismael Menéndez Valiente

PARA OPTAR AL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

Junio de 1990

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR : LIC. JOSE LUIS ARGUETA ANTILLON.

SECRETARIO GENERAL: ING. RENE MAURICIO MEJIA MENDEZ.

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO : ING. JOAQUIN ALBERTO VANEGAS AGUILA.

SECRETARIO: ING. MARIO ARNOLDO MOLINA ARGUETA.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

DIRECTOR: LIC. ROLANDO LEMUS GOMEZ.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

COORDINADOR: LIC. JOSE JAVIER RIVERA LAZO.

ASESOR: LIC. JOSE JAVIER RIVERA LAZO.

DEDICATORIA

A DIOS TODOPODEROSO.

A MIS PADRES: José Luciano Castillo L.
Raquel Alejandra B. de Castillo.

A MIS HERMANOS: Jorge Alberto,
Nidia Ileana.
José Adolfo,
Sergio Alonso y
Gerardo Fabio.

A LA FAMILIA SANCHEZ BERRIOS.

A MIS FAMILIARES Y AMIGOS.

Ethel Beatriz.

DEDICATORIA

A MI MADRE,

Rosa Esperanza Menéndez.

A MI HERMANO,

Mauricio Menéndez

Y A TODOS MIS PARIENTES, AMIGOS Y COMPAÑEROS.

Ovidio.

INTRODUCCION

El presente trabajo pretende poner al alcance de los estudiantes de Licenciatura en Matemática, temas trascendentales, como es el tratamiento de las álgebras de Banach, no de una manera exhaustiva, sino más bien como una breve introducción que le permita familiarizarse con tan importantes conceptos.

El trabajo se divide en seis Capítulos y hemos tratado que su secuencia sea lo más lógica y natural posible. Dichos Capítulos son los siguientes:

El Capítulo I trata de las propiedades preliminares de una álgebra de Banach, es decir, que presentamos resultados básicos, los cuales utilizaremos en capítulos posteriores.

En el Capítulo II, estudiamos el conjunto de funciones continuas que van de X hacia $\mathbb{C}$, es decir, el espacio $C(X)$, mostrando al final que $C(X)$ es una álgebra de Banach, donde X es un espacio compacto de Hausdorff.

El Capítulo III, trata de "El espacio de las funcionales lineales", centrando nuestro desarrollo en las propiedades fundamentales de las funcionales lineales multiplicativas sobre una álgebra de Banach.

En el Capítulo IV estudiamos "El espectro y radio espectral" de una álgebra de Banach, el cual es necesario para establecer propiedades importantes de la transformada de Gelfand, que es de lo que trata el siguiente capítulo.

El Capítulo V trata fundamentalmente de la Transformada de Gelfand; pero también estudiamos de manera elemental otro concepto importante, como es, el radical de una álgebra.

En el Capítulo VI, nuestro interés es desarrollar "El teorema de Stone-Weirstrass", cuyo tratamiento es a nivel elemental.

De manera respetuosa agradecemos la valiosa colaboración prestada por nuestro Asesor para la finalización de este trabajo.

INDICE

CAPITULO IV:

ESPECTRO Y RADIO ESPECTRAL.

CAPITULO V:

LA TRANSFORMADA DE GELFAND.

CAPITULO VI:

CAPITULO I

PROPIEDADES PRELIMINARES DE UNA ALGEBRA DE BANACH.

1.1 DEFINICION.

E es un espacio Topológico si existe una familia $\tau \subset P(E)$ tal que

1) Unión de elementos de τ es un elemento de τ.
2) Toda intersección finita de elementos de τ es elemento de τ.
3) $\phi \in \tau$
4) $E \in \tau$

· Los elementos de τ son llamados abiertos.

· Una topología sobre un conjunto E es una familia de abiertos de E. El complemento de un abierto es llamado cerrado.

1.2 DEFINICION.

Un espacio topológico E se dice que es normal si cumple la siguiente condición: Si F_1, F_2 son dos subconjuntos disjuntos cerrados de E, entonces existen dos conjuntos disjuntos abiertos, uno conteniendo a F_1 y el otro a F_2.

1.3 DEFINICION.

Un espacio topológico es de Hausdorff (o separado) si para todo $x, y \in E$, $x \neq y$, existe O_1 y O_2 abiertos de E tal que $x \in O_1$, $y \in O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \phi$

1.4 DEFINICION.

Un espacio topológico E (separado) es compacto, si para toda familia $(O_i)_{i \in I}$ de abiertos de E tal que $E = \bigcup_{i \in I} Oi$ existe $J \subset I$, J finito, tal que $E = \bigcup_{i \in J} Oi$

· Todo espacio compacto de Hausdorff es Normal.

1.5 DEFINICION.

E es un espacio métrico si para todo $x, y \in E$ existe un número $d(x,y) \geq 0$ de manera que

1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$, para todo x,y

3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, para todo x,y,z

1.6 DEFINICION.

Sea E un espacio vectorial. Se dice que "E es normado" si para todo $x \in E$, existe un número $\|x\| \geq 0$ de manera que

1) $\|x\| \geq 0$, para todo x

2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

4) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

Llamaremos "norma de x" al número $\|x\|$

1.7 DEFINICION.

Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en un espacio (E,d). Se dice que $(x_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, si a cada número real $\varepsilon > 0$ corresponde un $v \in \mathbb{N}$ tal que para todo par de números naturales n, n', no menores que v (abreviadamente: $\forall n, n' \geq v$), se verifica que $d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$.

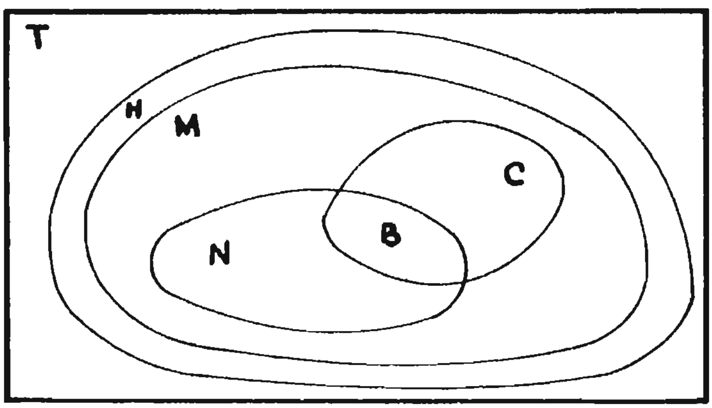
1.8 DEFINICION.

Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

1.9 DEFINICION.

Un espacio vectorial normado es de Banach, si, como espacio métrico, con la distancia $d(x,y) = \| x - y \|$, es un espacio completo.

RESUMEN:



Espacios

T: Topológico

H: Hausdorff

M: Métrico

N: Normado

C: Completo

B: Banach.

1.10 DEFINICION.

Un subgrupo N de un grupo G se dice que es un subbrupo normal de G si para todo $g \in G$ y todo $n \in N$, $gng^{-1} \in N$.

1.11 DEFINICION.

Para todo elemento $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Al elemento a^{-1} lo llamaremos elemento inverso.

· G denotará un grupo (no necesariamente abeliano).

1.12 DEFINICION.

Sea A un k-espacio vectorial; A es una "k-álgebra" si para cada $x,y \in A$ existe $xy \in A$ de modo que:

1) $(A, +, \cdot)$ es un anillo.

2) Para todo $\alpha \in K$ y para todo $x,y \in A$ se cumple que $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

1.13 EJEMPLOS DE ALGEBRAS.

· $\mathbb{C}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra · $\mathbb{C}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra

· $\mathbb{R}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra · Toda $\mathbb{C}$-álgebra es una $\mathbb{R}$-álgebra

· Toda $\mathbb{C}$-álgebra es una K-álgebra con k subcampo de $\mathbb{C}$.

· $X \neq \phi$; $A = \{f : X \to \mathbb{C} / f$ es una función$\}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)\ f(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

es una $\mathbb{C}$-álgebra unitaria y Conmutativa.

1.14 DEFINICION.

Una álgebra de Banach B es una álgebra sobre $\mathbb{C}$ con identidad 1, la cual tiene una norma convirtiéndola en un espacio de Banach y que satisface $\|1\| = 1$ y la desigualdad $\|xy\| \leq \|x\|\ \|y\|$, para $x,y \in B$.

1.15 EJEMPLOS DE ALGEBRAS DE BANACH.

$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $C(X)$, más adelante se probará que $\frac{B}{I}$ es una ál_ gebra de Banach, con I un ideal maximal.

1.16 PROPOSICION.

Si x está en el álgebra de Banach B y $\|1-x\| < 1$, entonces x es inversible y $\|x^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|1-x\|}$

PRUEBA.

Si establecemos $\delta = \|1-x\| < 1$, entonces para $N \geq M$ tenemos:

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} (1-x)^n - \sum_{n=0}^{M} (1-x)^n \right\| = \left\| \sum_{n=M+1}^{N} (1-x)^n \right\|$$

$$\leq \sum_{n=M+1}^{N} \|1-x\|^n \quad \text{, por propiedades de Norma}$$

$$\leq \sum_{n=M+1}^{N} \delta^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (\alpha)$$

Así, $$\sum_{n=M+1}^{N} \delta^n = \sum_{n=0}^{N} \delta^n - \sum_{n=0}^{M} \delta^n$$

$$= \frac{1(1-\delta^{N+1})}{1-\delta} - \frac{1(1-\delta^{M+1})}{1-\delta} \text{, ya que } \sum_{n=0}^{N} p^n = \frac{1(1-p^{N+1})}{1-p}$$

para todo $p \in \mathbb{R}$

$$\sum_{N=M+1}^{N} \delta^n = \frac{1-\delta^{N+1} -1 + \delta^{M+1}}{1 - \delta} = \frac{\delta^{M+1} - \delta^{N+1}}{1 - \delta} \leq \frac{\delta^{M+1}}{1-\delta}$$

Así, volviendo a (α) tenemos

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} (1-x)^n - \sum_{n=0}^{M} (1-x)^n \right\| \leq \sum_{n=M+1}^{N} \delta^n \leq \frac{\delta^{M+1}}{1-\delta}$$

y la sucesión de sumas parciales $\left\{ \sum_{n=0}^{N} (1-x)^n \right\}_{N \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

Dado $\varepsilon > 0$, probemos que existe $K > 0$ tal que $M,N \geq K$ implica $\left\| \sum_{n=0}^{N} (1-x)^n - \sum_{n=0}^{M} (1-x)^n \right\| < \varepsilon$

Supongamos que $N \geq M$

$$\sum_{n=0}^{N} (1-x)^n - \sum_{n=0}^{M} (1-x)^n \| \leq \frac{\delta^{M+1}}{1-\delta} \quad \text{por lo anterior ;}$$

además, existe $K > 0$ tal que $\dfrac{\delta^{K+1}}{1-\delta} < \varepsilon$

Luego $N,M \geq K$, $N \geq M$

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} (1-x)^n - \sum_{n=0}^{M} (1-x)^n \right\| \leq \frac{\delta^{M+1}}{1-\delta} < \frac{\delta^{K+1}}{1-\delta} < \varepsilon$$

Por tanto $\left\{ \sum_{n=0}^{N} (1-x)^n \right\}_{N \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

Sabemos que en todo espacio completo, toda sucesión de Cauchy es convergente.

Así $\left\{ \sum_{n=0}^{N} (1-x)^n \right\}_{N \geq 1}$ es convergente y existe el límite de esta serie.

Ahora, si $y = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$ entonces

$$xy = [1-(1-x)] \left(\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n \right) = \lim_{N\to\infty} \left([1-(1-x)] \sum_{n=0}^{N} (1-x)^n \right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} (1-x)^n - (1-x) \sum_{n=0}^{N} (1-x)^n \right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} (1-x)^n - \sum_{n=0}^{N} (1-x)^{n+1} \right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} [1+(1-x) + (1-x)^2 + \ldots + (1-x)^N - (1-x) - \ldots - (1-x)^{N+1}]$$

$$= \lim_{N\to\infty} [1 - (1-x)^{N+1}] = 1 - \lim_{N\to\infty} (1-x)^{N+1} = 1 - 0 = 1$$

también, $yx = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n \right) [1-(1-x)]$

$$yx = \lim_{N\to\infty} \left\{ \left(\sum_{n=0}^{N} (1-x)^n \right) \left[1-(1-x) \right] \right\}$$

inversibles y G_2 la colección de elementos inversibles a la derecha en B que no son inversibles.

1.18 NOTACION DE G, G_1 Y G_2.

$G = \{m \in B / \ m$ es inversible en $B\}$

$G_1 = \{p \in B / \ p$ es inversible a la izquierda en B y no es inversible a la derecha$\}$

$G_2 = \{r \in B / r$ es inversible a la derecha en B y no es inversible a la izquierda$\}$.

1.19 DEFINICION.

Un espacio métrico E es un espacio Topológico con los abiertos siguientes:

$A \subset E$ es un abierto de E si $A = \emptyset$ o si para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$, donde $B(x,r) = \{y \in E / d(x,y) < r\}$.

1.20 PROPOSICION.

Si B es una álgebra de Banach entonces cada uno de los conjuntos G, G_1, G_2 es abierto en B.

PRUEBA.

i) Probemos que G es abierto

Sea $y \in B$, $x \in G$

Como $x \in G$ entonces x es inversible

Supongamos que $\|x-y\| < \dfrac{1}{\|x^{-1}\|}$

Así, $\|x^{-1}\| \; \|x-y\| < 1$

Luego, por ser B una álgebra de Banach

$\|xy\| \leq \|x\| \; \|y\|$

entonces $\|x^{-1}(x-y)\| \leq \|x^{-1}\| \; \|x-y\| < 1$

$\|(x^{-1}x) - x^{-1}y\| < 1$

$\|1 - x^{-1}y\| < 1$

Luego, por proposición 1.16 $x^{-1}y \in G$, es decir, $x^{-1}y$ es inversible. Así $y = x\,(x^{-1}y)$ y como $x \wedge x^{-1}y \in G$ entonces $y \in G$.

Luego G contiene la bola abierta de radio $\dfrac{1}{\|x^{-1}\|}$ y centro x en G.

Por tanto G es un conjunto abierto en B.

ii) Probemos que G_1 es un abierto en B.

Si x está en G_1, entonces existe h en B tal que $hx = 1$, ya que x es inversible por la izquierda.

Si hacemos $\|x-y\| < \frac{1}{\|h\|}$ entonces

$$\|hx-hy\| \leq \|h\| \ \|x-y\| < 1$$

$$\Rightarrow \|1-hy\| \leq \|h\| \ \|x-h\| < 1, \text{ ya que } hx = 1$$

$$\Rightarrow \|1-hy\| < 1$$

Así, por proposición 1.16

$k = hy$ es inversible y la identidad

$1 = k^{-1}k = k^{-1}(hy)$

$1 = (k^{-1}h)y$, es decir, que y es inversible a la izquierda.

Además, supongamos que y es inversible, entonces $h = ky^{-1}$ es inversible (ya que k también es inversible).

Esto implica que x es inversible, ya que hemos supuesto que $x \in G_1$, es decir, $hx = 1$ lo que implica que también h es inversible a la derecha.

Pero como h es inversible entonces $hx = xh = 1$ de donde concluimos que x es inversible lo cual es una contradicción, ya que $x \in G_1$.

Está contradicción muestra que $y \in G_1$, así G_1 contiene la bola abierta de radio $\frac{1}{\|h\|}$ y centro x.

Luego G_1 es abierto en B.

iii) Probemos que G_2 es abierto en B.

Sea $x \in G_2$ entonces existe h en B tal que $xh = 1$ (x es inversible por la derecha).

Si hacemos $\|x-y\| < \frac{1}{\|h\|}$ entonces

$\|xh - yh\| \leq \|x-y\| \; \|h\| < 1$, pero $xh = 1$ de donde $\|1 - yh\| < 1$.

Luego, por proposición 1.16

$k = yh$ es inversible, y la identidad $kk^{-1}=(yh)k^{-1}=y(hk^{-1}) = 1$,

es decir, y es inversible por la derecha.

Ahora supongamos que y es inversible, entonces $h = y^{-1}k$ es inversible (ya que k es inversible).

Lo que implica que x es inversible, ya que hemos supuesto que $x \in G_2$, es decir, $xh = 1$ lo que implica que también h es inversible a la izquierda; pero como h es inversible entonces $xh = hx = 1$ de donde concluimos que x es inversible, lo cual es una contradicción, ya que $x \in G_2$.

Esta contradicción muestra que $y \in G_2$, luego G_2 contiene a la bola abierta de radio $\frac{1}{\|h\|}$ y centro x.

Luego, G_2 es abierto en B.

1.21 DEFINICION.

Sea E un espacio métrico cualquiera, $A \subset E$; se llama clausura o adherencia de A a la unión de A con sus puntos de acumulación, y se denota por $\bar{A} = A \cup A'$.
A' denota el conjunto de puntos de acumulación de A.

1.22 OBSERVACION.

Una importante caracterización de los elementos de la clausura de un conjunto es "$x \in \bar{A}$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ en A con $x_n \to x$", es decir, que son límite de sucesiones en el conjunto A.

1.23 DEFINICION.

Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico (E,d). Decimos que los conjuntos S,T son una disconexión de A si son no vacíos, disjuntos, abiertos en el subespacio (A,d) y $A= S \cup T$. Si tales conjuntos existen decimos que A admite una disconexión.

1.24 OBSERVACION.

Decimos que el conjunto A es conexo si no es disconexo, es decir si no admite disconexión.

·En general, todo espacio normado es conexo.

1.25 DEFINICION.

Sea $(A_i)_{i \in I}$ la familia de conjuntos conexos contenidos en A y que contienen al elemento x; llamaremos componente conexa del elemento x a la unión de los elementos de esta familia. Lo denotamos por $\Gamma(x)$, es decir

$$\Gamma(x) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

1.26 DEFINICION.

Un espacio métrico (E,d) es localmente conexo si para todo punto $x \in E$ y todo entorno S de x, existe un entorno T de x tal que $T \subset S$, T conexo.

·En general, en un espacio localmente conexo toda componente conexa es un conjunto abierto y cerrado.

Los dos teoremas siguientes son utilizados en próximas pruebas, aunque sus demostraciones no las incluimos. (Ver Introducción a la Topología General).

1.27 TEOREMA.

Un conjunto $M \subset F$ es abierto en el subespacio (F,d) de (E,d) si y solo si existe un conjunto A abierto en (E,d) tal que $M = A \cap F$.

1.28 TEOREMA.

Si F es una familia de conjuntos conexos de (E,d) tal que

$\bigcap_{A \in F} A \neq \phi$, entonces $\bigcup_{A \in F} A$ es conexo.

1.29 PROPOSICION.

La componente conexa de un elemento x es el máximo conjunto conexo contenido en A al cual el elemento x pertenece.

PRUEBA.

Como $\Gamma(x) = \bigcup_{i \in I} Ai$ afirmamos que $\Gamma(x)$ es un conjunto conexo, ya que $x \in \bigcap_{i \in I} Ai$ entonces $\bigcap_{i \in I} Ai \neq \phi$ y por teorema 1.28 tenemos que $\bigcup_{i \in I} Ai$ es conexo, luego $\Gamma(x)$ es un conjunto conexo.

Probemos ahora que $\Gamma(x)$ es el máximo conjunto conexo contenido en A y que contiene a x.

Basta probar que si x está en un conjunto conexo entonces ese conjunto está contenido en $\Gamma(x)$.

Sea B un conjunto conexo, $x \in B$ y $B \subset A$.

Sea $y \in B$ entonces $y \in \bigcup_{i \in I} Ai$, ya que B es un elemento de la familia $(Ai)_{i \in I}$ (en general, tenemos que $\forall_j : A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i$) luego, $B \subset \bigcup_{i \in I} Ai$ entonces $B \subset \Gamma(x)$

Así, $\Gamma(x)$ es el máximo conjunto conexo contenido en A y que contiene al elemento x.

1.30 LEMA.

Sea B un álgebra de Banach, G el grupo de elementos inversibles en B, y G_0 la componente conexa en G, la cual contiene a la identidad; si $x \in G_0$ entonces xG_0

es un conjunto conexo abierto y cerrado.

PRUEBA.

Sea $H = xG_o = \{z/z = xg,\ g \in G_o\}$

Supongamos que H no es conexo; entonces, existen $S \wedge T \subset H$, con S,T disjuntos, no vacíos y abiertos en H tal que $H = S \cup T$.

Sean $S_1 = \{m \in G_o/xm \in S\}$ y $T_1 = \{k \in G_o/xk \in T\}$

Ahora, probemos que S_1 y T_1 son una disconexión de G_o, es decir, que S_1,T_1 son disjuntos, no vacíos y abiertos en G_o tal que $G_o = S_1 \cup T_1$

S_1 y T_1 son diferentes de vacío ya que S y T son diferentes de vacío, es decir,

<u>Para S_1</u>

Sea $p \in S$ (p existe ya que $S \neq \phi$)

Como $S \subset H$ entonces $p = xg\ ,\ g \in G_o$

$$\Rightarrow g \in S_1 \Rightarrow S_1 \neq \phi$$

<u>Para T_1</u>

Sea $r \in T$ (r existe ya que $T \neq \phi$)

Como $T \subset H$ entonces $r = xg,\ g \in G_o$

$$\Rightarrow g \in T_1 \Rightarrow T_1 \neq \phi$$

Ahora probemos que $S_1 \cap T_1 = \phi$ (S_1 y T_1 disjuntos).

Supongamos que $S_1 \cap T_1 \neq \phi$, entonces, existe $h \varepsilon S_1 \cap T_1$

$h \varepsilon S_1 \cap T_1 \Longrightarrow h \varepsilon S_1 \wedge h \varepsilon T_1$

$h \varepsilon S_1 \Longrightarrow xh \varepsilon S$

$h \varepsilon T_1 \Longrightarrow xh \varepsilon T$

de donde $xh \varepsilon S \cap T$ así $S \cap T \neq \phi$

Lo cual es una contradicción ya que $S \cap T = \phi$

Probemos que S_1 y T_1 son abiertos en G_o.

<u>Para S_1</u>

Como S es abierto en H por Teorema 1.27 existe un abierto 0 en B tal que $S = 0 \cap H$

Para probar que S_1 es abierto en G_o, probaremos que $S_1 = x^{-1}0 \cap G_o$ con $x^{-1}0$ abierto.

Sea $H = \{z/z = xg, g \varepsilon G_o\}$

$x^{-1}0 = \{n/n = x^{-1}r,\ r \varepsilon 0\}$

$p \varepsilon S_1 \Longleftrightarrow xp \varepsilon S,\ p \varepsilon G_o$

$\Longleftrightarrow xp \varepsilon 0 \cap H$

$\Longleftrightarrow xp \varepsilon 0 \wedge xp \varepsilon H$

$q = xp \Longleftrightarrow x^{-1}q = x^{-1}\ xp$

$\Longleftrightarrow x^{-1}q = p\ ,\ q \varepsilon 0$

$q = xp \iff p \in x^{-1}0 \quad y \quad p \in G_0$

$\iff p \in x^{-1}0 \cap G_0$

Luego $S_1 = x^{-1}0 \cap G_0$

Por tanto S_1 es abierto en G_0.

Para T_1

Como T es abierto en H por Teorema 1.27 existe un abierto 0 en B tal que $T = 0 \cap H$.

Para probar que T_1 es abierto en G_0, probaremos que

$T_1 = x^{-1}0 \cap G_0$, con $x^{-1}0$ abierto.

Sea $H = \{z/z = xg,\ g \in G_0\}$

$x^{-1}0 = \{n/n = x^{-1}r,\ r \in 0\}$

$p \in T_1 \iff xp \in T\ ,\ p \in G_0$

$\iff xp \in 0 \cap H$

$\iff xp \in 0 \wedge xp \in H$

$q = xp \iff x^{-1}q = x^{-1}xp$

$\iff x^{-1}q = p\ ,\ q \in 0$

$\iff p \in x^{-1}0 \quad y \quad p \in G_0$

$\iff p \in x^{-1}0 \cap G_0$

Luego $T_1 = x^{-1}0 \cap G_0$

Por tanto T_1 es abierto en G_0.

Así, G_o es disconexo en G lo cual es una contradicción ya que G_o es conexo en G.

Por tanto $H = x\,G_o$ es un subconjunto conexo de G.

Ahora, probemos que $f : G \to G : y \rightsquigarrow f(y) = x^{-1}y$ es una función continua, con x fijo.

Sea $a \in G$. f es continua en a, si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(y) - f(a)| < \varepsilon$ siempre que $\| y-a\| < \delta$

$|f(y)-f(a)| = |x^{-1}y - x^{-1}a| = |x^{-1}(y-a)| = |x^{-1}|\ \| y-a\|$

$|f(y) - f(a)| < |x^{-1}|\ \delta$

tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|x^{-1}|}$ se cumple que f es continua.

Ahora probemos que xG_o es un subconjunto conexo abierto y cerrado de G, para cada $x \in G$.

Ya probamos que xG_o es un subconjunto conexo.

i) "xG_o es un subconjunto abierto"

Sea $f : G \longrightarrow G$

$y \rightsquigarrow f(y) = x^{-1}y$ una función continua

Como G_o es un conjunto abierto (por ser una componente conexa)

$$f^{-1}(G_0) = \{y \in G/f(y) \in G_0\} = \{y \in G/x^{-1}y \in G_0\}$$

$$= \{y \in G/z=x^{-1}y, z \in G_0\} = \{y \in G/y = xz, z \in G_0\}$$

$$= xG_0$$

Como la imagen inversa de un conjunto abierto es abierto resulta que xG_0 es un subconjunto abierto.

De igual forma

ii) "xG_0 es un subconjunto cerrado"

Como G_0 es un conjunto cerrado (por ser una componente conexa)

$$f^{-1}(G_0) = \{y \in G/f(y) \in G_0\} = \{y \in G/x^{-1}y \in G_0\}$$

$$= \{y \in G/z = x^{-1}y, z \in G_0\}$$

$$= \{y \in G/y = xz, z \in G_0\} = xG_0.$$

Como la imagen inversa de un conjunto cerrado es cerrado, resulta que xG_0 es un subconjunto cerrado.

1.31 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach, G el grupo de elementos inversible en B y G_0 la componente conexa en G la cual contiene la identidad; si $x \in G_0$ entonces $xG_0 x^{-1}$ y $x^{-1} G_0 x$ son conjuntos conexos.

PRUEBA.

"$xG_o\ x^{-1}$ es conexo"

Sea $Z = sG_o\ x^{-1} = \{r/r = xgx^{-1},\ g \in G_o\}$

Supongamos que Z es disconexo, es decir, existen S y T subconjuntos de Z; S y T disjuntos, no vacíos y abiertos en Z tal que $Z = S \cup T$

Sean $S_1 = \{m \in G_o/xmx^{-1} \in S\}$ y

$T_1 = \{k \in G_o/xkx^{-1} \in T\}$

Probemos que S_1 y T_1 son disjuntos, no vacíos y abiertos en G_o tal que $G_o = S_1 \cup T_1$

Probemos que S_1 y T_1 son diferentes de vacío.

<u>Para S_1</u>

Como $S \neq \phi$, existe $p \in S$; además $S \subset Z$, entonces $p = xgx^{-1},\ g \in G_o$

Así, $g \in S_1$ y se tiene que $S_1 \neq \phi$

similarmente se prueba que $T_1 \neq \phi$

Probemos que $S_1 \cap T_1 = \phi$ (Disjuntos)

Supongamos que S_1 y T_1 son no disjuntos entonces

$S_1 \cap T_1 \neq \phi$, es decir, existe $h \in S_1 \cap T_1$ luego

$h \in S_1$ y $h \in T_1$

$h \in S_1 \Rightarrow xhx^{-1} \in S$; $h \in T_1 \Rightarrow xhx^{-1} \in T$

de donde $xhx^{-1} \in S \cap T \Rightarrow S \cap T \neq \phi$ lo cual es una contradicción, ya que S y T son disjuntos.

Probemos que S_1 y T_1 son abiertos en G_0.

<u>Para S_1</u>

Por teorema 1.27, tenemos que:

Como S es abierto en Z, entonces existe un abierto 0 en B tal que $S = 0 \cap Z$

Para probar que S_1 es abierto mostraremos que

$$S_1 = x^{-1}0x \cap Z$$

$Z = \{r/r = xgx^{-1},\ g \in G_0\}$

$x^{-1}0x = \{n/n = x^{-1}rx,\ r \in 0\}$

$$\begin{aligned} p \in S_1 &\Leftrightarrow xpx^{-1} \in S\ ,\ p \in G_0 \\ &\Leftrightarrow xpx^{-1} \in 0 \cap Z \\ &\Leftrightarrow xpx^{-1} \in 0 \wedge xpx^{-1} \in Z \\ q = xpx^{-1} &\Leftrightarrow x^{-1}qx = x^{-1}x\,p\,x^{-1}x \end{aligned}$$

$$q = xpx^{-1} \iff x^{-1}qx = p$$

$$\iff p \in x^{-1}Ox \text{ y } p \in G_o$$

$$\iff p \in x^{-1}O\,x \cap G_o$$

Luego S_1 es abierto en G_o

Similarmente se prueba que T_1 es abierto en G_o

Luego, G_o es disconexo, lo cual es una contradicción ya que G_o es conexo.

Por tanto $Z = x\, G_o\, x^{-1}$ es conexo.

La prueba para $x^{-1}\, G_o x$ conexo es similar a la anterior.

1.32 PROPOSICION.

Sea B un álgebra de Banach, G el grupo de elementos inversibles en B y G_o la componente en G la cual contiene a la identidad. Entonces G_o es un subgrupo normal abierto y cerrado de G, las clases laterales de G_o son las componentes de G y $\frac{G}{G_o}$ es un grupo.

PRUEBA.

Como G es el grupo de elementos inversibles en B, entonces G es un subconjunto abierto de B.

Pero B es un álgebra de Banach, luego es un espacio normado, y así afirmamos que es un espacio conexo y por tanto, localmente conexo, ya que en general, todo espacio normado es un espacio conexo.

Por tanto G es un subconjunto abierto de un espacio localmente conexo. Luego sus componentes son subconjuntos abiertos y cerrados de G, ya que para un espacio localmente conexo, las componentes del espacio son conjuntos abiertos y cerrados.

Si x e y están en G_0, entonces $x\,G_0$ es un subconjunto conexo de G, el cual contiene a $xy \wedge x$.

i) Por el lema 1.30 $x\,G_0$ es un subconjunto conexo de G.

ii) Probemos ahora que $xy \wedge x$ están en $x\,G_0$.

$xG_0 = \{z/z = xg,\ g \in G_0\}$

como $x=x.1$, $1 \in G_0$ entonces $x \in x\,G_0$

También,

$$xy = xy\ ,\ y \in G_0 \text{ entonces } xy \in x\,G_0.$$

Ahora probemos que $G_0 \cup xG_0$ es convexo.

Como G_0 y xG_0 son conexos, por Teorema 1.28, basta mostrar que $G_0 \cap x\,G_0 \neq \phi$, como $x \in G_0$ y $x = x.1$, $1 \in G_0$ entonces $x \in xG_0$ y por tanto

$x \in G_0 \cap xG_0$, así $G_0 \cap xG_0 \neq \phi$, de donde concluimos que $G_0 \cup xG_0$ es conexo.

Por otro lado, $G_0 \cup xG_0 \subset G_0$, ya que G_0 es la componente conexa en G que contiene la identidad, de donde $xG_0 \subset G_0$.

Mostremos también que $x^{-1} G_0 \cup G_0$ es conexo.

Igual que en el caso anterior probemos que

$x^{-1}G_0 \cap G_0 \neq \phi$ por teorema 1.28, ya que sabemos que G_0 es conexo y además $x^{-1}G_0$ es conexo por lema 1.30;

Como $1 = x^{-1}x$, $x \in G_0$ entonces $1 \in x^{-1}G_0$ y $1 \in G_0$, ya que G_0 contiene la identidad.

Entonces $1 \in x^{-1}G_0 \cap G_0$, así $x^{-1}G_0 \cap G_0 \neq \phi$ de donde $x^{-1}G_0 \cup G_0$ es conexo.

Pero G_0 es la componente conexa en G que contiene la identidad entonces $x^{-1}G_0 \cup G_0 \subset G_0$

Así $x^{-1}G_0 \subset G_0$.

Por otro lado, $x^{-1} = x^{-1}.1$, $1 \in G_0$

$$\Rightarrow x^{-1} \in x^{-1} G_0 \subset G_0 \Rightarrow x^{-1} \in G_0$$

Como para $x,y \in G_0$ probamos que x y xy están en

xG_o y $xG_o \subset G_o$ entonces $x, xy \in G_o$

Además, como G es un grupo y $G_o \subset G$ entonces G_o es un semigrupo.

Por otro lado $x^{-1} \in G_o$, entonces G_o es un subgrupo de G; finalmente, mostremos que el grupo conjugado $xG_o\, x^{-1}$ es un subconjunto conexo que contiene la identidad y por tanto $xG_o\, x^{-1} = G_o$.

Probemos primero que $xG_o\, x^{-1}$ es conexo, lo cual se verifica por Lema 1.31.

Ahora, probemos que $xG_o\, x^{-1} = G_o$

"$\subset$" $xG_o\, x^{-1} \subset G_o$, esto es cierto ya que $xG_o\, x^{-1}$ es conexo y G_o es la componente conexa de G la cual contiene la identidad.

Además, $1 = x.1.x^{-1}$, $1 \in G_o \Rightarrow 1 \in xG_o\, x^{-1}$

"$\supset$" $G_o \subset xG_o\, x^{-1}$

$z \in G_o \Rightarrow z = 1.z.1 \Rightarrow z = x\, x^{-1}\, z\, x\, x^{-1}$

$\Rightarrow z = x(x^{-1}zx)x^{-1} \Rightarrow z = xmx^{-1}$, $m = x^{-1}zx \in G_o$

$\Rightarrow z \in xG_o\, x^{-1}$

Afirmamos que m está en G_o, ya que $x^{-1} G_o x$ es conexo por Lema 1.31.

Así $xG_o x^{-1} \subset G_o$ y por tanto $xG_o x^{-1} = G_o$

Luego resulta que G_o es un subgrupo normal de G, ya que $xG_o x^{-1} \subset G_o$ para todo $x \in G$.

Y por tanto $\frac{G}{G_o}$ es un grupo ya que G es un grupo y G_o es un subgrupo normal de G.

1.33 DEFINICION.

Sean A y B dos C-álgebras; $f : A \to B$ es un homomorfismo de álgebra si y sólo si

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x,y \in A$

2) $f(xy) = f(x) f(y)$, $\forall x,y \in A$

3) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall x \in A$

1.34 COROLARIO.

Sea B una álgebra de Banach, G, el grupo de elementos inversibles en B y G_o la componente conexa en G entonces la función $f : G \to \frac{G}{G_o}$ es un homomorfismo de grupo.

PRUEBA.

Sea $f : G \longrightarrow \frac{G}{G_0}$

$$x \rightsquigarrow f(x) = xG_0$$

Sea $x, y \in G$

$f(xy) = (xy)G_0 = (xG_0)(yG_0) = f(x).f(y)$

Por tanto f es un homomorfismo de Grupo.

1.35 DEFINICION.

Si B es una álgebra de Banach, entonces la función exponencial sobre B, denotada por exp, está definida así:

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

1.36 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach; si $x \wedge y$ son elementos de B, los cuales conmutan, entonces $\exp(x + y) = \exp x \, . \exp y$.

PRUEBA.

Multipliquemos las series que definen a $\exp x$ y a $\exp y$ y reordenemos.

$$\exp x.\exp.y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n$$

$$= \left[1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6!}x^6 + \ldots \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} xy^n + \frac{1}{2!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^2 y^n +$$

$$\frac{1}{3!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^3 y^n + \frac{1}{4!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^4 y^n + \frac{1}{5!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{} x^5 y^n + \ldots$$

$$= 1 + y + \frac{1}{1!} y^2 + \frac{1}{3!} y^3 + \frac{1}{4!} y^4 + \frac{1}{5!} y^5 + \frac{1}{6!} y^6 + \ldots.$$

$$+ x + xy + \frac{1}{2!} xy^2 + \frac{1}{2!} xy^3 + \frac{1}{4!} xy^4 + \frac{1}{5!} xy^5 + \ldots.$$

$$+ \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{2!} x^2 y + \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} x^2 y^2 + \frac{1}{2!} \frac{1}{3!} x^2 y^3 +$$

$$\frac{1}{2!} \frac{1}{4!} x^2 y^4 + \frac{1}{2!} \frac{1}{5!} x^2 y^5 + \ldots.$$

$$+ \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{3!} x^3 y + \frac{1}{3!} \frac{1}{2!} x^3 y^2 + \frac{1}{3!} \frac{1}{3!} x^3 y^3 +$$

$$\frac{1}{3!} \frac{1}{4!} x^3 y^4 + \frac{1}{3!} \frac{1}{5!} x^3 y^5 + \ldots.$$

$$+\frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{4!}x^4y + \frac{1}{4!}\frac{1}{2!}x^4y^2 + \frac{1}{4!}\frac{1}{3!}x^4y^3 +$$

$$\frac{1}{4!}\frac{1}{4!} + x^4y^4 + \frac{1}{4!}\frac{1}{5!}x^4y^5 + \ldots.$$

$$+ \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{5!}x^5y + \frac{1}{5!}\frac{1}{2!}x^5y^2 + \frac{1}{5!}\frac{1}{3!}x^5y^3 + \frac{1}{5!}\frac{1}{4!}x^5y^4 +$$

$$\frac{1}{5!}\frac{1}{5!}x^5y^5 + \ldots.$$

$$+ \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{6!}x^6y + \frac{1}{6!}\frac{1}{2!}x^6y^2 + \frac{1}{6!}\frac{1}{3!}x^6y^3 + \frac{1}{6!}\frac{1}{4!}x^6y^4 +$$

$$\frac{1}{6!}\frac{1}{5!}x^6y^5 + \ldots.$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Asociando tenemos,

$$\text{exp.x.exp } y = \Big[\ 1 + (x+y) + (\frac{1}{2!}x^2 + xy + \frac{1}{2!}y^2) +$$

$$(\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{2!}x^2y + \frac{1}{2!}xy^2 + \frac{1}{3!}y^3)$$

$$+ (\frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{3!}x^3y + \frac{1}{2!2!}x^2y^2 + \frac{1}{3!}xy^3 + \frac{1}{4!}y^4)$$

$$+ (\frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{4!}x^4y + \frac{1}{3!}\frac{1}{2!}x^3y^2 + \frac{1}{2!}\frac{1}{3!}x^2y^3 +$$

$$\frac{1}{4!}xy^4 + \frac{1}{5!}y^5)$$

$$+ \left(\frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{5!}x^5y + \frac{1}{4!2!}x^2y^4 + \frac{1}{3!3!}x^3y^3 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2!4!}x^2y^4 + \frac{1}{5!}xy^5 + \frac{1}{6!}y^6\right)$$

$$+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Así,

$$\exp x \ \exp y = 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

$$+ \frac{1}{4!}(x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4) + \frac{1}{5!}(x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5)$$

$$+ \frac{1}{6!}(x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Luego

$$\exp x . \exp y = 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \frac{1}{4!}(x+y)^4 + \frac{1}{5!}(x+y)^5 + \frac{1}{6!}(x+y)^6 + \ldots.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n$$

En una álgebra de Banach general, es difícil determinar los elementos en el rango de la función exponencial, esto es, los elementos que tienen un logaritmo.

El siguiente Lema da una condición suficiente.

1.37 LEMA.

Si B es una álgebra de Banach y a es un elemento de B tal que $\|1-a\| < 1$, entonces a está en exp B.

PRUEBA.

Sea exp $B = \{z \in B/z = \exp y$, para algún y en $B\}$

$$= \{z \in B/z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n \ , \ y \in B\}$$

y sea $\quad y = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (a-1)^n$

Probemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (a-1)^n$ converge absolutamente. Utilizando el criterio del cociente tenemos

$$\frac{\|Un+1\|}{\|Un\|} = \frac{\|(-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} (a-1)^{n+1}\|}{\left\|(-1)^{n+1} \frac{1}{n} (a-1)^n\right\|} = \left\|\frac{n}{n+1} (a-1)\right\| = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \|a-1\|$$

Aplicando límite cuando $n \to \infty$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|U_{n+1}\|}{\|U_n\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \|a-1\| = \|a-1\| = \|1-a\|$$

Por hipótesis, $\|1-a\| < 1$, así la serie dada converge absolutamente.

Probemos ahora que exp y = a, para algún y en B

$$\exp(y) = \exp\left(\sum_{n-1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (a-1)^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m} (a-1)^m\right)^n \qquad (\alpha)$$

$$\exp(y) = 1 + (a-1) + \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m} (a-1)^m +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m} (a-1)^m\right)^n$$

Al desarrollar la serie (α) para $n = 0$ y $n = 1$ obtenemos 1 y (a-1) respectivamente, entonces sólo basta probar que los demás sumandos son cero. Para esto trabajamos con:

$$\sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m} (a-1)^m + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m} (a-1)^m \right]^n$$

Llamemos (β) a $\sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m} (a-1)^m$ y

(γ) a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m} (a-1)^m \right]^n$

En (β) si $m = 2$ tenemos $(-1)^3 \frac{1}{2} (a-1)^2 = -\frac{1}{2} (a-1)^2$ (1)

En (γ) si $n=2$ y $m=1$ tenemos $\frac{1}{2!} \left[(-1)^2 (a-1)\right]^2 = \frac{1}{2!} (a-1)^2$ (2)

Sumando (1) $\wedge$ (2) se tiene $-\frac{1}{2} (a-1)^2 + \frac{1}{2!} (a-1)^2 = 0$

En (β) si $m=3$ tenemos $(-1)^4 \frac{1}{3} (a-1)^3 = \frac{1}{3} (a-1)^3$ (3)

En (γ) si $n=2$ tenemos

$$\frac{1}{2!} \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m} (a-1)^m \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m} (a-1)^m \right) \right]$$

Evaluando, para $m=1$ y $m=2$ tenemos

$$\frac{1}{2!} \left[(-1)^2 (a-1) \ (-1)^3 \frac{1}{2} (a-1)\right] = -\frac{1}{2} \frac{1}{2!} (a-1)^3 \qquad (4)$$

Para m=2 y m=1

$$\frac{1}{2!}\left[(-1)^3 \frac{1}{2}(a-1)^2 (-1)^2 (a-1)\right] = -\frac{1}{2}\frac{1}{2!}(a-1)^3 \tag{5}$$

En (γ) para n=3 y m=1 se tiene

$$\frac{1}{3!}\left[(-1)^2 (a-1)\right]^3 = \frac{1}{3!}(a-1)^3 \tag{6}$$

Sumando (3), (4), (5) $\wedge$ (6) tenemos

$$\frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{2}\frac{1}{2!}(a-1)^3 - \frac{1}{2}\frac{1}{2!}(a-1)^3 + \frac{1}{3!}(a-1)^3 =$$

$$\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right](a-1)^3 = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right](a-1)^3$$

$$= \left[\frac{3}{6} - \frac{1}{2}\right](a-1)^3 = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right](a-1)^3 = 0$$

En (β) si m=4 tenemos $(-1)^5 \frac{1}{4}(a-1)^4 = -\frac{1}{4}(a-1)^4$ (7)

En (γ) si n=2 tenemos

$$\frac{1}{2!}\left[\left(\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{1}{m}(a-1)^m\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{1}{m}(a-1)^m\right)\right]$$

Evaluando para m=1 y m=3 tenemos

$$\frac{1}{2!}\left[(-1)^2\,(a-1)\;(-1)^4\,\frac{1}{3}\,(a-1)^3\right] = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2!}\,(a-1)^4 \tag{8}$$

Para m=3 y m=1 obtenemos lo mismo $\frac{1}{3}\,\frac{1}{2!}\,(a-1)^4$ (9)

Para m=2 y m=2 tenemos

$$\frac{1}{2!}\left[(-1)^3\,\frac{1}{2}\,(a-1)^2\;(-1)^3\,\frac{1}{2}\,(a-1)^2\right] = \frac{1}{4}\,\frac{1}{2!}\,(a-1)^4 \tag{10}$$

En (γ) si n=3 tenemos

$$\frac{1}{3!}\left[\left(\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\,\frac{1}{m}\,(a-1)^m\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\,\frac{1}{m}\,(a-1)^m\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\,\frac{1}{m}\,(a-1)^m\right)\right]$$

Evaluando para m=1 , m=1 y m=2

m=1 , m=2 y m=1

m=2 , m=1 y m=1

obtenemos el mismo valor, así tenemos

$$3\left\{\frac{1}{3!}\left[(-1)^2\,(a-1)\;(-1)^2\,(a-1)\;(-1)^3\,\frac{1}{2}\,(a-1)^2\right]\right\} = -\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{3!}\,(a-1)^4$$

$$= -\,\frac{1}{4}\,(a-1)^4 \tag{11}$$

En (β) si n=4 y m=1 se tiene

$$\frac{1}{4!}\left[(-1)^2\ (a-1)\right] = \frac{1}{4!}(a-1)^4 \qquad (12)$$

Sumando (7), (8), (9), (10), (11) y (12) tenemos

$$-\frac{1}{4}(a-1)^4 + \frac{1}{3}\frac{1}{2!}(a-1)^4 + \frac{1}{3}\frac{1}{2!}(a-1)^4 + \frac{1}{4}\frac{1}{2!}(a-1)^4 - \frac{1}{4}(a-1)^4$$

$$+\frac{1}{4!}(a-1)^4 = \left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\right](a-1)^4$$

$$= \left[-\frac{2}{4}+\frac{2}{6}+\frac{4}{24}\right](a-1)^4 = \left[-\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\right](a-1)^4$$

$$= \left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right](a-1)^4 = 0$$

De esta manera se puede seguir verificando que los demás sumandos son cero.

Así, exp(y) = 1 + (a-1) de donde exp(y) = a.

CAPITULO II

ALGEBRA DE FUNCIONES CONTINUAS.

2.1 DEFINICION.

Sea E y F dos espacios normados, una función $f : E \to F$ es continua en un punto $a \in E$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \text{ siempre que } \|x-a\| < \delta$$

2.2 PROPOSICION.

Sea E un espacio de Banach. Las funciones

i) $f : E \times E \to E : f(x,y) = x+y$

ii) $g : \mathbb{C} \times E \to E : g(\alpha,x) = \alpha x$

iii) $h : E \to \mathbb{R} : h(x) = \|x\|$

Son continuas.

Probaremos nada más para iii).

PRUEBA para iii) $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightsquigarrow h(x) = \|x\|$$

Sea $x_0 \in E$.

Sea $\varepsilon > 0$; encontremos $\delta > 0$ tal que

$|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$ siempre que $\|x - x_0\| < \delta$

$|h(x) - h(x_0)| = |\, \|x\| - \|x_0\| \,| \leq \|x - x_0\| < \delta$

Tomando $\delta = \varepsilon$ tenemos que $h(x) = \|x\|$ es continua.

2.3 DEFINICION. (Grupo Topológico).

Sea B una álgebra de Banach, G el grupo de elementos inversibles en B. Se dice que G es un grupo Topológico si la función $\psi : G \to G$ definida $\psi(x) = x^{-1}$ es continua.

2.4 COROLARIO.

Si B es una álgebra de Banach entonces la función sobre G definida por $x \rightsquigarrow x^{-1}$ es continua. Así, G es un grupo topológico.

PRUEBA.

Sea $G = \{m \in B / m$ es inversible en $B\}$

Sea la función $\psi : G \longrightarrow G$

$$x \rightsquigarrow \psi(x) = x^{-1}$$

y sea $a \in G$; probemos que ψ es continua, es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x-a\| < \delta \Longrightarrow \|\psi(x) - \psi(a)\| < \varepsilon$$

Sea $\delta_1 = \dfrac{1}{2\|a^{-1}\|}$ tal que

$$\|a-x\| < \frac{1}{2\|a^{-1}\|} \Longrightarrow \|a^{-1}\| \; \|a-x\| < \frac{1}{2}$$

Pero,

$$\|a^{-1}(a-x)\| \leq \|a^{-1}\| \; \|a-x\| \quad y$$

$\|a^{-1}(a-x)\| = \|1 - a^{-1}x\|$, es decir

$$\|1 - a^{-1}x\| = \|a^{-1}(a-x)\| \leq \|a^{-1}\| \; \|a-x\| < \frac{1}{2}$$

Luego

$$\|1 - a^{-1}x\| < \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

También

$$\|x^{-1}\| = \|x^{-1}a\, a^{-1}\| = \|(x^{-1}a)\, a^{-1}\|$$

$$\leq \|x^{-1}a\| \; \|a^{-1}\| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Pero

$$\|x^{-1}a\| \; \|a^{-1}\| = \|(a^{-1}x)^{-1}\| \; \|a^{-1}\|$$

$$\|x^{-1}a\| \, \|a^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|1-a^{-1}x\|} \|a^{-1}\| \text{ , por Prop. 1.16}$$

$$\leq \frac{\|a^{-1}\|}{1 - \frac{1}{2}} \quad \text{Por (1)}$$

$$= \frac{\|a^{-1}\|}{\frac{1}{2}} = 2 \, \|a^{-1}\|$$

Regresando a (2) tenemos

$$\|x^{-1}\| \leq 2 \, \|a^{-1}\| \text{ .... (3)}$$

Ahora bien

$$\|x^{-1} - a^{-1}\| = \|x^{-1} (x-a)a^{-1}\| \leq \|x^{-1}\| \; \|x-a\| \; \|a^{-1}\|$$

$$\leq 2\|a^{-1}\| \; \|x-a\| \; \|a^{-1}\| \text{, por (3)}$$

$$= 2\|a^{-1}\|^2 \; \|x-a\|$$

Esto implica que

$$\|\psi(x) - \psi(a)\| = \|x^{-1} - a^{-1}\|$$

$$\leq 2\|a^{-1}\|^2 \; \|x-a\| \text{ ,}$$

$$< 2\|a^{-1}\|^2 \, \delta_2 \text{ , } \delta_2 = \frac{\varepsilon}{2\|a^{-1}\|^2}$$

Tomando $\delta = \min \{\delta_1 , \delta_2\}$ se cumple que ψ es continua.

2.5 DEFINICION.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff; $C(X)$ denotará al conjunto de funciones continuas de valores complejos sobre X, es decir,

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} / f \text{ es continua}\}$$

2.6 DEFINICION.

Para f_1 , $f_2 \in C(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos:

a) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

b) $(\lambda f_1)(x) = \lambda f_1(x)$

c) $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$

2.7 PROPOSICION.

Sea $C(X)$ el conjunto de funciones continuas de X a $\mathbb{C}$ entonces $C(X)$ es una álgebra conmutativa con identidad, con las operaciones definidas en 2.6.

PRUEBA.

En esta demostración para concluir que $C(X)$ es una álgebra conmutativa con identidad, únicamente probamos las propiedades no obvias.

i) Sean $f, g \in C(X)$ entonces $f+g \in C(X)$

Sea $a \in X$

Como $f \in C(X)$ entonces dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $\delta_1 > 0$

tal que $\|x-a\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Como $g \in C(X)$ entonces dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $\delta_2 > 0$

Tal que $\|x-a\| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Probemos que $|(f+g)(x) - (f+g)(a)| < \varepsilon$ sq $\|x-a\| < \delta$

$$
\begin{aligned}
|(f+g)(x) - (f+g)(a)| &= |f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \\
&\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se verifica que $f+g \in C(x)$

ii) Sea $f \in C(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces $\lambda f \in C(X)$

Como $f \in C(X)$ entonces dado $\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$, existe

$\delta > 0$ tq $\|x-a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$

Probemos que $|(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)| < \varepsilon$ sq $\|x-a\| < \delta$

$$
|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \Rightarrow |\lambda|\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow |\lambda f(x) - \lambda f(a)| < \varepsilon
$$

$$
\Rightarrow |(\lambda f)(x)(\lambda f)(a)| < \varepsilon \text{ sq } \|x-a\| < \delta
$$

iii) Sean $f, g \in C(X)$ entonces $fg \in C(X)$

Sea $a \in X$. Como $f \in C(X)$ entonces dado

$\dfrac{\varepsilon}{2(1 + |g(a)|)} > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\| x-a\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |g(a)|)}$$

Como $g \in C(X)$ entonces dado

$\dfrac{\varepsilon}{2(1 + |f(a)|)} > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\| x-a\| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |f(a)|)}$$

Sea $\varepsilon = 1$ entonces existe $\delta_3 > 0$ tal que

$|f(x) - f(a)| < 1$ siempre que $\| x-a\| < \delta_3$

Así $|f(x)|=|f(x)-f(a)+f(a)|\leq|f(x)-f(a)|+|f(a)|$

$$|f(x)| < 1 + |f(a)|$$

Luego,

$$\begin{aligned}|(fg)(x)-(fg)(a)| &= |f(x)g(x)-f(a)g(a)+f(x)g(a)-f(x)g(a)| \\ &= |f(x)(g(x)-g(a))+g(a)(f(x)-f(a))| \\ &\leq |f(x)||g(x)-g(a)|+|g(a)||f(x)-f(a)|\end{aligned}$$

$$|(fg)(x) - (fg)(a)| \leq |f(x)|\ |g(x) - g(a)| + (1 + |g(a)|)$$

$$(|f(x) - f(a)|)$$

$$< (1+|f(a)|)\ \frac{\varepsilon}{2(a + |f(a)|)} + (1 + |g(a)|)$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{2(1+|g(a)|)}\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Tomando $\delta = \min\ \{\delta_1\ ,\ \delta_2\ ,\ \delta_3\}$ se verifica que fg es continua.

iv) Probemos conmutatividad para suma y producto.

Sean $f, g \in C(X)$ entonces

"$(f + g)(x) = (g + f)(x)$"

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$

"$(fg)(x) = (gf)(x)$"

$(fg)(x) = f(x)\ g(x) = g(x)\ f(x) = (gf)(x)$

v) Probemos la existencia de elemento identidad para la suma y producto.

· Sea $f \in C(X)$ entonces existe $g \in C(X)$ tal que

$(f + g)(x) = f(x) = (g + f)(x)$

$(f + g)(x) = f(x) \Rightarrow f(x) + g(x) = f(x)$

$\Rightarrow g(x) = 0(x)$

· Sea $f \in C(X)$ entonces existe $g \in C(X)$ tal que

$(fg)(x) = (gf)(x) = f(x)$

$(fg)(x) = f(x) \Rightarrow f(x)\ g(x) = f(x)$

$\Rightarrow g(x) = 1(x)$

vi) Probemos ahora que para $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f, g \in C(X)$

$(fg) = (\alpha f)g = f(\alpha g)$

Sea $x \in X$

$[\alpha(fg)](x) = \alpha(fg)(x) = \alpha f(x)\ g(x) = (\alpha f(x))\ g(x)$

$= (\alpha f)(x)\ g(x) = [(\alpha f)g]\ (x)$

$[(\alpha f)g](x) = (\alpha f)(x)\ g(x) = (\alpha f(x))\ g(x) = (f(x)\alpha)\ g(x)$

$= f(x)\ (\alpha g(x)) = f(x)\ (\alpha g)(x) = [f(\alpha g)](x)$

2.8 DEFINICION.

Para f en $C(X)$ denotamos $\| f \|_\infty$ como la norma de f

y la definimos por:

$\|f\|_\infty = \mathrm{Sup}\{|f(x)|/x \in X\}$

2.9 PROPOSICION.

La norma definida anteriormente, convierte a $C(X)$ en un espacio Normado.

1) $\|f\|_\infty = 0$ si y solo si $f = 0$

2) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\ \|f\|_\infty$, para $\lambda \in \mathbb{C}$

3) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

4) $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty\ \|g\|_\infty$

PRUEBA.

Para 1)

" $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$"

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty = 0 &\iff \mathrm{Sup}\,\{|f(x)|/x \in X\} = 0 \\ &\iff |f(x)| = 0\ , \forall\, x \in X \\ &\iff f(x) = 0\ , \forall\, x \in X \\ &\iff f = 0 \end{aligned}$$

Para 2)

" $||\lambda f||_\infty = |\lambda| \ ||f||_\infty$ " para $\lambda \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
||\lambda f||_\infty &= \text{Sup}\{|(\lambda f)(x) \ / x \in X\} \\
&= \text{Sup}\{|\lambda f(x)| / \ x \in X\} \\
&= \text{Sup}\{|\lambda| \ |f(x)| / x \in X\} \\
&= |\lambda| \ \text{Sup}\{|f(x)| / x \in X\} \\
&= |\lambda| \ ||f||_\infty
\end{aligned}
$$

Para 3)

" $||f + g||_\infty \leq \ \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$ "

$$
\begin{aligned}
||f+g||_\infty &= \text{Sup}\ \{|(f+g)(x)| \ / x \in X\} \\
&= \text{Sup}\{|f(x) + g(x)| / x \in X\} \leq \text{Sup}\{|f(x)| + |g(x)| / x \in X\} \\
&\leq \text{Sup}\{|f(x)| / x \in X\} + \text{Sup}\{|g(x)| / x \in X\} \\
&= ||f||_\infty + ||g||_\infty
\end{aligned}
$$

Luego $||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$

Para 4)

" $||fg||_\infty \leq ||f||_\infty \ ||g||_\infty$ "

$$\|fg\|_\infty = \mathrm{Sup}\{|(fg)(x)| / x \in X\}$$

$$= \mathrm{Sup}\{|f(x)\, g(x)| / x \in X = \mathrm{Sup}\{|f(x)||g(x)| / x \in X\}$$

$$\leq \mathrm{Sup}\{|f(x)| / x \in X\}\ \mathrm{Sup}\{|g(x)| / x \in X\}$$

$$= \|f\|_\infty\ \|g\|_\infty$$

Luego $\quad \|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty\ \|g\|_\infty$

2.10 PROPOSICION.

Si X es un espacio compacto de Hausdorff entonces $C(X)$ es un espacio de Banach.

PRUEBA.

Si $\{fn\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $C(X)$

$|fn(x) - fm(x)| \leq \|fn - fm\|_\infty = d(fn\ ,\ fm)$ para cada $x \in X$,

$\{fn(x)\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy de números complejos.

JUSTIFICACION.

$$|fn(x) - fm(x)| = |(fn - fm)(x)|$$

$$\leq \mathrm{Sup}\ \{|(fn - fm)(x)| / x \in X\}$$

$$|fn(x) - fm(x)| \leq \|fn - fm\|_\infty$$

Justifiquemos que $\{fn(x)\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$, encontremos $N > 0$ tal que

$|fn(x) - fm(x)| < \varepsilon$, para todo $n,m \geq N$

$|fn(x) - fm(x)| \leq d(fn, fm)$

Como $\{fn\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy y $\varepsilon > 0$, entonces existe $N > 0$,

$N \in \mathbb{N}$ tal que $d(fn, fm) < \varepsilon \ \forall\ n,m \geq N$

Así, $\{fn(x)\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy

Ahora definamos,

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} fn(x)$, esto se justifica porque toda sucesión de Cauchy de números complejos es convergente, ya que el espacio de los números complejos es un conjunto completo.

Probemos que $f \in C(X)$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} fn(x) = f(x)$, tenemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1 > 0$ tal que $|fn(x) - f(x)| < \varepsilon$ siempre que $n \geq N_1$

Además, para $x_0 \in X$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_2 > 0$ tal que

$|fn(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ siempre que $n \geq N_2$

$(fn)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, luego tomando $\varepsilon > 0$ y escogiendo $N > 0$ tal que $n,m \geq N$ entonces

$\|fn - fm\|_\infty < \varepsilon$.

Para $x_0 \in X$ existe una vecindad U de x_0 tal que $|f_N(x_0) - f_N(n)| < \varepsilon$ para $x \in U$ (U existe porque $f_N: X \to \mathbb{C}$ es una función continua).

Tomemos $N_3 = \max\{N_1 , N_2\}$

$$|f(x_0) - f(x)| = |f(x_0) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f_N(x) + f_N(x) - f(x)|$$

$$\leq |f(x_0) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

Así, $|f(x_0) - f(x)| < 3\varepsilon$, para todo $x \in U$.

Luego f es continua y por tanto $f \in C(X)$.

Probemos ahora que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - fn\|_\infty = 0$

Para $n \geq N$, $x \in X$ tenemos

$$|fn(x) - f(x)| = |fn(x) - \lim_{m\to\infty} fm(x)| = \lim_{m\to\infty} |fn(x) - fm(x)|$$

$$= \lim_{m\to\infty} |(fn - fm)(x)| \leq \lim_{m\to\infty} \sup_{x\in X} |(fn - fm)(x)|$$

$$\leq \lim_{m\to\infty} \|fn - fm\|_\infty \leq \lim_{m\to\infty} \varepsilon = \varepsilon$$

Luego $|fn(x) - f(x)| < \varepsilon$; entonces

$$|(fn - f)(x)| < \varepsilon \Rightarrow \sup_{x\varepsilon X} |(fn - f)(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|fn - f\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \|f - fn\|_\infty < \varepsilon$$

de donde $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - fn\|_\infty = 0$

Por tanto $C(X)$ es un espacio de Banach.

2.11 PROPOSICION.

Si X es un espacio Compacto de Hausdorff, entonces $C(X)$ es una álgebra de Banach.

En esta proposición sólo probaremos

i) $\|1\|_\infty = 1$, $1 \varepsilon C(X)$

ii) $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$, $f,g \varepsilon C(X)$

ya que en proposición 2.7 probamos que $C(X)$ es una álgebra y en proposición 2.10 que $C(X)$ es un espacio de Banach.

PRUEBA.

Para i)

Sea $1 : X \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \rightsquigarrow 1(x) = 1$

$\|1\|_\infty = \text{Sup}\{|1(x)| / x \in X\} = \text{Sup}|1| = |1| = 1$

Luego $\|1\|_\infty = 1$

Para ii)

Se verificó en proposición 2.9 que

$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$, f , $g \in C(X)$

Por tanto $C(X)$ es una álgebra de Banach.

CAPITULO III

EL ESPACIO DE LAS FUNCIONALES LINEALES.

En el estudio de espacios lineales la noción de una funcional lineal es extremadamente importante. La colección de funcionales lineales definidas sobre un espacio lineal dado, es a su vez, un espacio lineal y esta dualidad es una poderosa herramienta en el estudio de otros espacios.

Para álgebras de Banach y en particular, para C(X) la idea importante es la de una funcional lineal multiplicativa, a las cuales se dedicará gran parte del presente Capítulo.

3.1 DEFINICION.

Sea E un espacio de Banach, una función ψ de E a $\mathbb{C}$ es una funcional lineal acotada sí:

a) $\psi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \psi(x_1) + \lambda_2 \psi(x_2)$, para x_1 , x_2 en E y λ_1 , λ_2 en $\mathbb{C}$.

b) Existe $N > 0$ tal que $|\psi(x)| \leq N||x||$, para todo x en E.

3.2 PROPOSICION.

Sea ψ una funcional lineal sobre un espacio de Banach E; entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

a) ψ es acotada.

b) ψ es continua.

c) ψ es continua en cero.

PRUEBA.

" $a \Rightarrow b$"

Sea $y \varepsilon E$, queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\psi(x) - \psi(y)| < \delta$ siempre que $\|x - y\| < \delta$.

$|\psi(x) - \psi(y)| = |\psi(x - y)|$

Como ψ es acotada, existe $N > 0$ tal que

$|\psi(x) - \psi(y)| = |\psi\,(x-y)| \leq N\|x - y\|$, Si tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{N}$

entonces $|\Psi(x) - \psi(y)| = |\psi(x - y)| \leq N\|x - y\| \leq N(\frac{\varepsilon}{N})$, entonces

$|\psi(x) - \psi(y)| < \varepsilon$ y por tanto ψ es continua.

" $b \Rightarrow c$ "

Es obvia, ya que si ψ es continua en todo punto, en particular es continua en cero.

" c => a "

Como ψ es continua en cero, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\psi(x) - \psi(o)| < \varepsilon$ siempre que $\|x - 0\| < \delta$

Sea $\varepsilon = 1$ entonces $|\psi(x)| < 1$ siempre que $\|x\| < \delta$, para todo x en E.

Así para $y \neq 0$ en E tenemos:

$$|\psi(y)| = \frac{2\,\|y\|}{\delta} \left|\psi\left(\frac{\delta}{2\,\|y\|}\, y\right)\right| < \frac{2}{\delta}\,\|y\| \text{ ya que } \left\|\frac{\delta}{2\,\|y\|}\, y\right\| < \delta$$

Si $N = \frac{2}{\delta}$, se tiene $|\psi(y)| < N\,\|y\|$ y por tanto ψ es acotada.

3.3 DEFINICION.

Sea E* el conjunto de funcionales lineales acotadas sobre el espacio de Banach E. Para ψ en E* sea

$$\|\psi\| = \operatorname{Sup}\left\{\frac{|\psi(x)|}{\|x\|},\ x \neq 0\right\}.$$ Entonces E* se dice que es el espacio conjugado o espacio dual de E.

3.4 PROPOSICION.

El espacio conjugado E* es un espacio de Banach, con la norma definida en 3.3.

PRUEBA.

Que E^* es un espacio Vectorial resulta obvio, por lo que nos dedicaremos a mostrar que E^* es un espacio normado y completo.

i) $\|\psi\| \geq 0$ lo cual se cumple, porque

$$\|\psi\| = \text{Sup}\left\{\frac{|\psi(x)|}{\|x\|} \ / \ x \neq 0\right\} \geq 0 \quad \text{ya que} \quad \frac{|\psi(x)|}{\|x\|} \geq 0, \ x \neq 0$$

ii) $\|\psi\| = 0 \iff \psi = 0$

$$\|\psi\| = \text{Sup}\left\{\frac{|\psi(x)|}{\|x\|} \ / \ x \neq 0\right\} = 0 \iff \frac{|\psi(x)|}{\|x\|} = 0 \ , x \neq 0$$

$$\iff |\psi(x)| = 0 \ , \ x \neq 0$$

$$\iff \psi(x') = 0$$

$$\iff \psi = 0 \ , \text{ ya que } \psi \in E^*$$

iii) $\|\lambda\psi\| = |\lambda| \ \|\psi\| \ , \ \lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\lambda\psi\| = \text{Sup}\left\{\frac{|\lambda \ \psi(x)|}{\|x\|} \ / \ x \neq 0\right\} = \text{Sup}\left\{\frac{|\lambda|\,|\psi(x)|}{\|x\|} \ / \ x \neq 0\right\}$$

$$= \text{Sup}\left\{ |\lambda| \frac{|\psi(x)|}{\|x\|} \ / \ x \neq 0\right\} = |\lambda|\,\text{Sup}\left\{\frac{|\psi(x)|}{\|x\|} \ / x \neq 0\right\}$$

$$= |\lambda| \ \|\psi\|$$

iv) $$\|\psi_1 + \psi_2\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(\psi_1 + \psi_2)(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\psi_1(x) + \psi_2(x)|}{\|x\|}$$

$$\leq \sup_{x \neq 0} \frac{|\psi_1(x)|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{|\psi_2(x)|}{\|x\|} = \|\psi_1\| + \|\psi_2\|$$

Por tanto $\|\psi_1 + \psi_2\| \leq \|\psi_1\| + \|\psi_2\|$

Luego E^* es un espacio normado.

Finalmente mostramos que E^* es completo.

Supongamos que $(\psi_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en E^*, sea x en E; probemos que $(\psi_n(x))_{n \geq 1}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$, es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $|\psi_n(x) - \psi_m(x)| < \varepsilon$, $n,m \geq N$.

$$|\psi_n(x) - \psi_m(x)| = |(\psi_n - \psi_m)(x)| \leq \|\psi_n - \psi_m\| \; \|x\| \tag{1}$$

Como $(\psi_n)_{n \geq 1}$ es de Cauchy en E^*, entonces dado

$\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{\|x\|}$, existe $N_1 > 0$ tal que $\|\psi_n - \psi_m\| < \varepsilon_1$,

$n,m \geq N_1$

Volviendo a (1)

$$|\psi_n(x) - \psi_m(x)| \leq \|\psi_n - \psi_m\| \; \|x\| \leq \varepsilon_1 \|x\| = \frac{\varepsilon}{\|x\|} \|x\| = \varepsilon$$

$$|\psi_n(x) - \psi_m(x)| < \varepsilon \quad , \quad n,m \geq N.$$

Así la sucesión de números complejos $(\psi_n(x))_{n\geq 1}$ es de Cauchy, para cada x en E.

Como $\mathbb{C}$ es un espacio completo, podemos definir

$$\psi : E \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \rightsquigarrow \psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)$$

(Ya que toda sucesión de Cauchy en un espacio completo es convergente).

A continuación mostramos que ψ está en E^* , para lo cual probamos que ψ es lineal y acotada.

i) Probemos que ψ es lineal. Sea x,y en E, α en $\mathbb{C}$.

$\cdot\ \psi(x+y) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} (\psi_n(x) + \psi_n(y)$ ya que ψ_n es lineal.

$= \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) + \lim_{n\to\infty} \psi_n(y) + \psi(x) + \psi(y)$

$\cdot\ \psi(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} \alpha\psi_n(x)$ ya que ψ_n es lineal

$= \alpha \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \alpha\psi(x).$

Por tanto ψ es lineal.

ii) Mostremos que ψ es acotada.

Como $(\psi_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en E*, entonces dado $\varepsilon=1$ y escogiendo $N > 0$ tal que

$$||\psi_n - \psi_m|| < 1 \quad , \quad n,m \geq N,$$

Para x en E tenemos:

$$|\psi(x)| = |\psi(x)-\psi_N(x)+\psi_N(x)| \leq |\psi(x)-\psi_N(x)| + |\psi_N(x)|$$

$$\leq \left|\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) - \psi_N(x)\right| + \left|\psi_N(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\psi_n(x) - \psi_N(x)\right| + |\psi_N(x)|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\left|(\psi_n-\psi_N)(x)\right| + \left\|\psi_N\right\| \, ||x|| \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{x\neq 0}\left|(\psi_n-\psi_N)(x)\right| + |\psi_N| \, ||x||$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} ||\psi_n - \psi_N|| \, ||x|| + ||\psi_N|| \, ||x|| \leq \lim_{n\to\infty} 1. \, ||x|| + |\psi_N| \, ||x||$$

$$|\psi(x)| \leq \|x\| + \|\psi_N\| \; \|x\| = (1 + \|\psi_N\|) \; \|x\| = P\|x\| ,$$

donde $P = 1 + \|\psi_N\|$ Luego $|\psi(x)| \leq P\,\|x\|$

Así ψ es acotado y por tanto ψ está en E^*.

Sólo queda por probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\psi - \psi_n\| = 0$.

Como $(\psi_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $N_1 > 0$ tal que $\|\psi_n - \psi_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $n,m \geq N_1$.

Además, como $\psi(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \psi_m(x)$ entonces para $\frac{\varepsilon}{2}\,\|x\| > 0$ existe $N_2 > 0$ tal que $|\psi(x) - \psi_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,\|x\|$ siempre que $m \geq N_2$

Para x en E y $m,n \geq N$, con $N = \max\{N_1,N_2\}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
|(\psi - \psi_n)(x)| &= |\psi(x) - \psi_n(x) - \psi_m(x) + \psi_m(x)| \leq |\psi(x) - \psi_m(x)| \\
&\qquad + |(\psi_m - \psi_n)(x)| \\
&\leq |\psi(x) - \psi_m(x)| + \|\psi_m - \psi_n\| \; \|x\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2}\,\|x\| + \frac{\varepsilon}{2}\,\|x\| = \varepsilon\,\|x\|
\end{aligned}$$

Así, $|(\psi - \psi_n)(x)| < \varepsilon\,\|x\|$ de donde

$$\frac{|(\psi - \psi_n)(x)|}{\|x\|} < \varepsilon \Rightarrow \sup_{x\varepsilon E} \frac{|(\psi - \psi_n)(x)|}{\|x\|} < \varepsilon \Rightarrow \|\psi - \psi_n\| < \varepsilon,$$

para todo $n \geq N$.

Luego la sucesión $(\psi_n)_{n\geq 1}$ converge a ψ y por tanto E* es completo, con lo que se concluye que E* es un espacio de Banach.

Como dijimos, para álgebras de Banach, la idea importante es la de una funcional lineal multiplicativa, lo que a continuación formalizamos.

3.5 DEFINICION.

Sea B una álgebra de Banach. Una funcional lineal compleja ϕ sobre B se dice que es multiplicativa si:

a) $\phi(xy) = \phi(x)\,\phi(y)$ para x,y en B.

b) $\phi(1) = 1$

En lo que sigue de esta unidad, M denotará al conjunto de funcionales lineales multiplicativas sobre B y $M_{C(X)}$ al conjunto de funcionales lineales complejas multiplicativas sobre C(X), así como también X denotará a un espacio Compacto de Hausdorff.

Antes de probar otros resultados importantes, recordaremos dos conceptos utilizados más adelante.

3.6 DEFINICION.

Una función ψ de un espacio métrico F a un espacio métrico F' se dice que es un homeomorfismo si:

a) ψ es una biyección.

b) ψ, ψ^{-1} son continuas.

3.7 DEFINICION.

Sea F un espacio métrico, $V \subset F$ es un vecindario de un punto a de F si existe un conjunto abierto "O" tal que a está en O y $O \subset V$.

3.8 LEMA.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff, $a \in X$, $f \in C(X)$, si $f(a) \neq 0$; entonces existe un vecindario V de a tal que $f(x) \neq 0$, para todo x en V.

PRUEBA.

Como $f \in C(X)$, f es continua, en particular f es continua en $a \in X$, es decir, para todo abierto $O = B\,(f(a), \varepsilon)$ en el codominio de f, existe un abierto $S = f^{-1}(O)$ en X.

Así tenemos:

$f^{-1}(0) = \{x \in X | f(x) \in 0\} = \{x \in X / |f(x) - f(a)| < \varepsilon\}$.

Necesitamos ver que dado $\varepsilon > 0$ adecuado $f(x) \neq 0$, para cada x en V.

Para $\varepsilon = \dfrac{|f(a)|}{2}$, sea $V = f^{-1}(0)$, entonces:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{|f(a)|}{2}$$

Supongamos que $f(x) = 0$, para un x en V

$$|f(x) - f(a)| = |-f(a)| = |-1|\ |f(a)| = |f(a)| < \frac{|f(a)|}{2}$$

Lo cual es una contradicción; por tanto $f(x) \neq 0$, para todo x en V.

3.9 DEFINICION.

Sea f una función de X a $\mathbb{C}$; definimos $\overline{f}$ como la función de X a $\mathbb{C}$ tal que $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$, para todo x en X, donde $\overline{f(x)}$ es el complejo conjugado de $f(x)$.

3.10 LEMA.

Sea $(fn)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones de X a $\mathbb{C}$, $\{U_1, U_2, \ldots, U_N\}$ un cubrimiento abierto finito de X tal que para cada $n \leq N$ $fn \neq 0$ en Un; si $g = \sum_{n=1}^{N} \overline{f}n\ fn$, entonces $g \neq 0$.

PRUEBA.

Probaremos que $g(x) \neq 0$, para todo x en X.

Como $g = \sum_{n=1}^{N} \overline{f}n\ fn$ entonces

$$g(x) = \left(\sum_{n=1}^{N} \overline{f}n\ fn\right)_{(x)} = \sum_{n=1}^{N} (\overline{f}n\ fn)(x) = \sum_{n=1}^{N} \overline{f}n(x)\ fn(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \overline{fn(x)}\ fn(x) = \sum_{n=1}^{N} |fn(x)|^2$$

Sea $x \in X$, como $\{U_1, U_2, \ldots, U_N\}$ cubre a X, entonces $X = \bigcup_{n=1}^{N} U_n$, esto implica que $x \in Un$ para algún $n \leq N$, entonces $fn \neq 0$ en el vecindario Un, así

$$fn(x) \neq 0 \Rightarrow |fn(x)| > 0 \Rightarrow |fx_n(x)|^2 > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} |fn(x)|^2 > 0$$

Y por tanto $g(x) \neq 0$ para todo x en X.

La prueba del siguiente teorema no la incluimos; pero es te resultado es utilizado en la siguiente proposición. (La demostración puede hallarse en cualquier Topología).

TEOREMA 3.11

Sean (E,d) y (F,d') espacios métricos cualesquiera y A un subconjunto de E.

Si $f : A \subset E \to f(A) \subset F$ es una biyección continua en el conjunto compacto A, entonces f^{-1} es continua en $f(A)$.

Como caso particular de este teorema, tenemos:
"Si $f : E \to F$ es biyectiva, continua en E y E es compacto, entonces f es un homeomorfismo".

3.12 PROPOSICION.

Para todo x en X, sea ϕ_x una función compleja sobre $C(X)$, tal que para f en $C(X)$, $\phi_x(f) = f(x)$ y sea ψ la función de X a $M_{C(X)}$ tal que $\psi_{(x)} = \phi_x$; entonces ψ define un homeomorfismo.

PRUEBA.

Probaremos que i) ψ es biyectiva; ii) ψ, ψ^{-1} son continuas.

Para i) ; Sea $h \in M_{C(X)}$, $h : C(X) \to \mathbb{C}$ y sea

$K = \mathrm{Ker}\,h = \{f \in C(X)/h(f) = 0\}$

Supongamos por contradicción que para todo x en X, existe f_x en K tal que $f_x(x) \neq 0$; como f_x es continua, existe un vecindario U_x de x sobre el cual $f_x \neq 0$, por lema 3.8.

Como x es compacto y $\{U_x\}_{x \in X}$ es un cubrimiento abierto de X, existen $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_N}$ con $X = \bigcup_{n=1}^{N} U_{x_n}$

Sea $g = \sum_{n=1}^{N} \overline{f}_{x_n} f_{x_n}$, así

$$h(g) = h\left(\sum_{n=1}^{N} \overline{f}_{x_n} f_{x_n}\right) = \sum_{n=1}^{N} h\,(\overline{f}_{x_n} f_{x_n}) = \sum_{n=1}^{N} h(\overline{f}_{x_n})\, h(f_{x_n}) = 0$$

ya que f_{x_n} está en K, por lo que g está en K.

Pero por Lema 3.10 $g \neq 0$ sobre X, así es inversible en $C(X)$.

Esto implica que $h(1) = h\,(g\frac{1}{g}) = h(g)h\,(\frac{1}{g}) = 0$ ya que g está en K, lo cual es una contradicción ya que $h(1) = 1$.

Así, existe x_0 en X tal que $f(x_0) = 0$ para cada f en K.

Si $f \in C(X)$ entonces $f-h(f).1$ pertenece a K, ya que

$$h(f - h(f).1) = h(f) - h(h(f).1) = h(f) - h(f)h(1)$$
$$= h(f) - h(f).1 = 0$$

Luego $f - h(f).1$ está en K.

Así

$$f(x_0) - h(f) = (f - h(f).1)(x_0) = 0$$

ya que $f - h(f).1 \in K$ y todo elemento de K aplicado a $x_0 \in X$ es cero.

Luego

$$f(x_0) - h(f) = 0$$

Pero $f(x_0) = \phi_{x_0}(f)$, Por como se ha definido la función compleja ϕ_x sobre $C(X)$.

Entonces $\phi_{x_0}(f) - h(f) = 0$

$$\phi_{x_0}(f) = h(f) \text{ , para todo } f \in C(X).$$

Así $\phi_{x_0} = h$ y por tanto

ψ es sobreyectiva.

Probemos ahora que ψ es inyectiva.

Sea $\psi : X \to M_{C(X)}$

Como X es un espacio compacto de Hausdorff, X es normal, ya que todo espacio compacto de Hausdorff es normal.

Además, en los espacios separados los conjuntos unitarios son cerrados.

Así, tomando $x \neq y$ puntos distintos de X, tenemos los conjuntos cerrados $\{x\}$, $\{y\}$.

Por todo lo anterior podemos aplicar el lema de Urysohn, el cual dice:

LEMA DE URYSOHN.

Un espacio Topológico X es normal si y sólo si para cada dos subconjuntos disjuntos cerrados F_1 y F_2 de X y el intervalo cerrado $[a,b]$ de números reales, existe una función continua

$$f : X \to [a,b] \text{ tal que } f(F_1) = \{a\} \text{ y } f(F_2) = \{b\}$$

Así utilizando dicho lema, existe $f \in C(X)$

$$f : X \to \mathbb{C} \text{ con } f(\{x\}) = \{1\} , \quad f(\{y\}) = \{0\}$$

y $f(x) = 1$, $f(y) = 0$ tal que $f(x) \neq f(y)$

$M_{c(x)} = \{\phi : C(X) \to \mathbb{C} / \phi$ funcional lineal multiplicativa$\}$

$C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} / f$ es continua$\}$

$$\psi : X \longrightarrow M_{C(X)}$$

$$x \rightsquigarrow \psi(x) = \phi_x : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f \rightsquigarrow \phi_x(f) = f(x) = \psi_{(x)}(f)$$

Sea $x, y \in X$

$$f(x) \neq f(y) \Rightarrow \psi_{(x)}(f) \neq \psi_{(y)}(f) \Rightarrow \psi_{(x)} \neq \psi_{(y)}$$

Luego ψ es inyectiva.

Ahora mostremos que ψ es continua.

Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X que converge a x, entonces $\lim_{n\to\infty} \psi(x_n)(f) = \psi_{(x)}(f)$ para todo $f \in C(X)$.

Así la sucesión $(\psi_{(x_n)})_{n\geq 1}$ converge en la **W***- topología a $\psi_{(x)}$, por tanto ψ es continua.

Para mostrar que ψ^{-1} es continua, hacemos uso del Teorema 3.11 como ψ es una biyección continua en un espacio compacto X entonces ψ^{-1} es continua.

Por tanto ψ es un homeomorfismo.

3.13 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach; M el conjunto de funcionales lineales multiplicativas de B a $\mathbb{C}$, ϕ en M y sea

$K = \text{Ker}\ \phi$, si x está en K, entonces x no es inversible.

PRUEBA.

La demostración equivale a que probemos que si x es inversible entonces x no está en K.

Como x es inversible, entonces existe s en B tal que $xs = sx = 1$

$$xs = 1 \Rightarrow \phi(xs) = \phi(1) \Rightarrow \phi(x)\,\phi(s) = 1 \text{ ya que } \phi \in M.$$

$$\Rightarrow \phi(x) \neq 0 \Rightarrow x \notin K.$$

3.14 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach, $\phi \in M$ y $K = \text{Ker}\ \phi$; entonces

1) $$\sup_{\substack{x \in K \\ \lambda \neq 0}} \frac{|\lambda|}{\|\lambda + x\|} = \sup_{h \in K} \frac{1}{\|1+h\|}$$

2) $$\sup_{h \in K} \frac{1}{\|1+h\|} = 1$$

$\lambda + x$ representará al elemento $\lambda.1 + x$ de B.

PRUEBA 1)

Sea $P = \operatorname{Sup}\left\{\frac{|\lambda|}{\|\lambda+x\|} \mid \lambda \neq 0,\ x \in K\right\}$ y $T = \operatorname{Sup}\left\{\frac{1}{\|1+h\|} \mid h \in K\right\}$,

Probemos $P = T$

Sea $h \in K$ entonces $\frac{|1|}{\|1+h\|} \in \left\{\frac{|\lambda|}{\|\lambda+h\|} \mid \lambda \neq 0,\ x \in K\right\}$, Luego

$\left\{\frac{1}{\|1+h\|} \mid h \in K\right\} \subset \left\{\frac{|\lambda|}{\|\lambda+x\|} \mid \lambda \neq 0,\ x \in K\right\}$, lo que implica

$$\operatorname{Sup}\left\{\frac{1}{\|1+h\|} \mid h \in K\right\} \leq \operatorname{Sup}\left\{\frac{|\lambda|}{\|\lambda+x\|} \mid \lambda \neq 0,\ x \in K\right\},$$ es decir,

$$T \leq P$$

Supongamos que $T < P$, entonces

$$T < \frac{|\lambda|}{\|\lambda+x\|} = \frac{\frac{|\lambda|}{|\lambda|}}{\frac{\|\lambda+x\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{\left\|1+\frac{x}{|\lambda|}\right\|},$$ luego

$$T < \frac{1}{\|1+h\|}, \text{ con } h = \frac{x}{|\lambda|}$$

Lo cual es una contradicción, ya que

$$T = \operatorname{Sup}\left\{\frac{1}{\|1+h\|} \mid h \in K\right\},$$ y por tanto $P = T$.

PRUEBA 2)

$h \in K \Rightarrow h$ no es inversible, por lema 3.13

$\Rightarrow \|1 + h\| \geq 1$, por proposición 1.16.

$$\Rightarrow \frac{1}{\|1 + h\|} \leq 1 \Rightarrow \operatorname{Sup}\left\{\frac{1}{\|1+h\|} \mid h \in K\right\} \leq 1 ,$$

Como cero está en K, entonces $1 = \dfrac{1}{\|1+0\|}$,

Luego $\operatorname{Sup}\left\{\dfrac{1}{\|1+h\|} \mid h \in K\right\} = 1.$

3.15 PROPOSICION.

Si B es una álgebra de Banach y ϕ está en M, entonces $\|\phi\| = 1$.

PRUEBA.

Sea $K = \operatorname{Ker}\phi$, como $\phi(x - \phi(x).1) = 0$, resulta que cada elemento en B puede ser escrito de la forma $\lambda + x$, para algún λ en $\mathbb{C}$ y x en K, es decir, para y en B, hacemos

$$y = y - \phi(y).1 + \phi(y).1 \Rightarrow y = y - \phi(y).1 + \phi(y)$$

Si $x = y - \phi(y).1$ y $\lambda = \phi(y)$, se tiene que

$y = \lambda + x$

Luego $\|\phi\| = \sup\limits_{y\neq 0} \dfrac{|\phi(y)|}{\|y\|}$ para ϕ en M

$$\|\phi\| = \sup_{\substack{x\in K\\ \lambda\neq 0}} \frac{|\phi(\lambda+x)|}{\|\lambda+x\|}, \quad \text{ya que } y = \lambda + x$$

$$= \sup_{\substack{x\in K\\ \lambda\neq 0}} \frac{|\phi(\lambda)+\phi(x)|}{\|\lambda+x\|} = \sup_{\substack{x\in K\\ \lambda\neq 0}} \frac{|\phi(\lambda.1)+0|}{\|\lambda+x\|}$$, ya que $x \in K$, ϕ es lineal.

$$= \sup_{\substack{x\in K\\ \lambda\neq 0}} \frac{|\lambda\phi(1)|}{\|\lambda+x\|} = \sup_{\substack{x\in K\\ \lambda\neq 0}} \frac{|\lambda|}{\|\lambda+x\|}, \quad \text{ya que } \phi(1) = 1$$

Luego $\sup\limits_{\substack{x\in K\\ \lambda\neq 0}} \dfrac{|\lambda|}{\|\lambda+x\|} = \sup\limits_{h\in K} \dfrac{1}{\|1+h\|}$ por parte 1) de lema 3.14

Pero $\sup\limits_{h\in K} \dfrac{1}{\|1+h\|} = 1$ por parte 2) de lema 3.14

Con lo que $\|\phi\| = 1$.

3.16 DEFINICION.

Para una álgebra de Banach B, se define $(B^*)_1$ como la bola unitaria del dual de una álgebra de Banach, es decir, $(B^*)_1 = \{\phi \in B^* / \|\phi\| \leq 1\}$

3.17 PROPOSICION.

Si B es una álgebra de Banach; entonces M es un subconjunto w^*-compacto de $(B^*)_1$.

PRUEBA.

Sea $(\phi_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funcionales lineales multiplicativas en M que convergen en la w^*-topología sobre $(B^*)_1$ a un ϕ en $(B^*)_1$.

Por el Teorema de Alaoglu la bola unitaria $(E^*)_1$ del dual de un espacio de Banach es un conjunto compacto; por tanto $(B^*)_1$ es un conjunto compacto.

Para mostrar que M es un subconjunto w^*-compacto de $(B^*)_1$, utilizamos el hecho de que "todo subconjunto cerrado de un conjunto compacto es compacto en dicho conjunto". Para ello basta probar:

a) $M \subset (B^*)_1$

b) M es cerrado.

PRUEBA para a)

Sea $\phi \in M$ probaremos que $\|\phi\| \leq 1$

Por proposición 3.15 tenemos que "si B es una álgebra de Banach y ϕ está en M, entonces $\|\phi\| = 1$"

Así $\|\phi\| \leq 1$, Luego $\phi \in (B^*)_1$

y por tanto $M \subset (B^*)_1$

PRUEBA para b)

Para probar que M es cerrado basta probar que el límite de una sucesión de elementos de M está en M.

Supongamos que $\phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x)$

Como $(B^*)_1$ es un conjunto compacto él es cerrado, luego todo límite de sucesiones tomadas en $(B^*)_1$ está en $(B^*)_1$; $(\phi_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funcionales lineales multiplicativas en M que convergen en la w*-topología sobre $(B^*)_1$ a un ϕ en $(B^*)_1$, es decir, $\phi \in (B^*)_1$.

Queremos probar que $\phi \in M$;

i) "$\phi(1) = 1$"

$$\phi(1) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1 \text{ , ya que } \phi_n \in M$$

Luego $\phi(1) = 1$

ii) "$\phi(xy) = \phi(x)\,\phi(y)$"

$$\phi(xy) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(xy) = \lim_{n\to\infty} [\, \phi_n(x)\, \phi_n(y) \,] \text{ , ya que } \phi_n \in M$$

$$= \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) \lim_{n\to\infty} \phi_n(y) \text{ , por álgebra de límites}$$

$$= \phi(x)\,\phi(y)$$

Luego $\phi(xy) = \phi(x)\,\phi(y)$

Hemos probado que el límite de una sucesión de elementos de M está en M.

Por tanto M es cerrado.

de a) y b) concluimos que M es un subconjunto w*-compacto de $(B^*)_1$.

CAPITULO IV

ESPECTRO Y RADIO ESPECTRAL.

4.1 DEFINICION.

Para B una álgebra de Banach, x un elementode B, definimos el espectro de x en B, como el conjunto $Sp(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} / x - \lambda$ no es inversible en $B\}$.

$x - \lambda$ representará al elemento $x - \lambda.1$, el cual pertenece a B.

De la definición anterior obtenemos otro conjunto, el cual lo denotamos por $\rho(x)$ y le llamaremos el complemento del espectro, es decir,

$$\rho(x) = \mathbb{C} - Sp(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} / x - \lambda \text{ es inversible en } B\}.$$

4.2 DEFINICION.

Para B una álgebra de Banach, x un elemento de B, definimos el radio espectral de x en B, denotado por $\gamma(x)$, como:

$$\gamma(x) = \text{Sup } \{|\lambda| / \lambda \in Sp(x)\}.$$

Los siguientes dos lemas son necesarios en el establecimiento de proposiciones posteriores.

4.3 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach; si x es un elemento de B, la función $\psi : \mathbb{C} \to B$ definida por $\Psi(\lambda) = x - \lambda$, para todo λ en $\mathbb{C}$, es una función continua.

PRUEBA.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$

Probemos que para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\lambda - \alpha| < \delta \Rightarrow \| \psi(\lambda) - \psi(\alpha) \| < \varepsilon$$

$$\| \psi(\lambda) - \psi(\alpha) \| = \| x - \lambda - x + \alpha \| = \| \alpha - \lambda \| = \| \lambda - \alpha \|$$

Pero $\| \lambda - \alpha \| = \| \lambda.1 - \alpha.1 \| = \| (\lambda - \alpha).1 \| = |\lambda - \alpha| \, \| 1 \|$

$$= |\lambda - \alpha|.1 = |\lambda - \alpha|$$

Tomando $\delta = \varepsilon$

resulta que ψ es continua.

4.4 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach, $x \in B$; si $1 - \frac{x}{\lambda}$ es inversible entonces $x - \lambda$ es inversible, para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$.

PRUEBA.

$1 - \frac{x}{\lambda}$ es inversible entonces existe $y \in B$, $y \neq 0$ tal que

$$y\,(1 - \frac{x}{\lambda}) = (1 - \frac{x}{\lambda})\, y = 1\ ;$$

$$y(1 - \frac{x}{\lambda}) = 1 \Rightarrow y(\frac{\lambda - x}{\lambda}) = 1 \Rightarrow \frac{y}{\lambda}(\lambda - x) = 1 \Rightarrow -\frac{y}{\lambda}(x - \lambda) = 1$$

$$\Rightarrow m(x - \lambda) = 1\ ,\ m = -\frac{y}{\lambda}$$

$\Rightarrow x - \lambda$ es inversible a la izquierda.

Similarmente se prueba que $(x - \lambda)$ es inversible a la derecha.

Por tanto, $x - \lambda$ es inversible.

Antes de la siguientes proposición recordemos que un conjunto es compacto si es cerrado y acotado.

4.5 PROPOSICION.

Si B es una ålgebra de Banach y x está en B, entonces $Sp(x)$ es un conjunto compacto y $\gamma(x) \leq \|x\|$.

PRUEBA.

$Sp(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} / x - \lambda$ no es inversible en $B\}$.

Sea $\psi : \mathbb{C} \to B$ una función definida por

$\psi(x) = x - \lambda$; entonces ψ es continua por Lema 4.3.

Además

$$\psi^{-1}(G) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \psi(\lambda) \in G\} = \{\lambda \in \mathbb{C} / x - \lambda \in G\}$$

$$= \{\lambda \in \mathbb{C} / x - \lambda \text{ es inversible en } B\} = \rho(x)$$

G es un conjunto abierto en B; como ψ es continua entonces la imagen inversa de un conjunto abierto es un abierto, de donde

$\psi^{-1}(G)$ es un conjunto abierto.

Como hemos probado que $\psi^{-1}(G) = \rho(x)$, entonces $\rho(x)$ es un abierto. De aquí resulta que $Sp(x)$ es un conjunto cerrado, ya que es el complemento de $\rho(x)$.

Probemos ahora que $Sp(x)$ es un conjunto acotado.

Supongamos que $Sp(x)$ no es acotado, entonces existe $\lambda \in Sp(x)$ tal que $|\lambda| > \|x\|$, así

$\|1 - (1 - \frac{x}{\lambda})\| = \|\frac{x}{\lambda}\| = \frac{\|x\|}{\|\lambda\|} < 1$ entonces

$1 - \frac{x}{\lambda}$ es inversible por proposición 1.16

Además, si $1 - \frac{x}{\lambda}$ es inversible entonces $x-\lambda$ es inversible por Lema 4.4

Así $\lambda \in \rho(x)$, lo cual es una contradicción ya que $\lambda \in Sp(x)$

Por lo tanto $Sp(x)$ es acotado por $\|x\|$

Ahora, como $Sp(x)$ es un conjunto cerrado y acotado concluimos que $Sp(x)$ es compacto.

Probemos ahora que $\gamma(x) \leq \|x\|$

Como $Sp(x)$ es acotado por $\|x\|$ entonces para $\lambda \in Sp(x)$ se tiene $|\lambda| \leq \|x\|$ de donde

$$\sup_{\lambda \in Sp(x)} |\lambda| \leq \|x\| \text{ ; luego } \gamma(x) \leq \|x\|$$

Otra de las propiedades importantes de $Sp(x)$ es la de ser distinto de vacío; para verificar este hecho definiremos los siguientes conceptos y probaremos algunos resultados.

4.6 DEFINICION.

Sea R una región en el plano complejo y $F(\lambda)$ una función definida para todo λ en R. La función $F(\lambda)$

se dice que es analítica en R si:

$$F'(\lambda o) = \lim_{\lambda \to \lambda o} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_o)}{\lambda - \lambda o}$$

existe, para λo arbitrario que pertenece a R.

4.7 DEFINICION.

La función $F(\lambda)$ se dice que es analítica al infinito si cumple las siguientes condiciones:

a) $F(\lambda)$ está definida en alguna vecindad $\{\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| > N\}$ del punto al infinito.

b) $\lim_{\lambda \to 0} F(\frac{1}{\lambda})$ existe

c) La función $g(\lambda)$, definida para $|\lambda| < \frac{1}{N}$ con las condiciones

$g(\lambda) = F(\frac{1}{\lambda})$ para $\lambda \neq 0$

$g(0) = \lim_{\lambda \to 0} F(\frac{1}{\lambda})$ es analítica en alguna vecindad

del punto $\lambda = 0$

4.8 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach y sea F la función de

$\rho(x)$ a B, definida por $F(\lambda) = (x - \lambda.1)^{-1}$ entonces:

a) F es analítica

b) F es analítica al infinito, con 1 el elemento identidad de B.

PRUEBA para a)

Probemos que $F'(\lambda o)$ existe para λo arbitrario.

$$F'(\lambda o) = \lim_{\lambda\to\lambda_o} \frac{F(\lambda) - F(\lambda o)}{\lambda - \lambda o}$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda o} \left\{ \frac{(x - \lambda.1)^{-1} - (x - \lambda_o.1)^{-1}}{\lambda - \lambda o} \right\}$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_o} \left\{ \frac{1.(x - \lambda.1)^{-1} - (x - \lambda o.1)^{-1}.1}{\lambda - \lambda o} \right\}$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda o} \left\{ \frac{(x-\lambda o.1)^{-1}(x-\lambda o.1)(x-\lambda.1)^{-1}-(x-\lambda o.1)^{-1}(x-\lambda.1)(x-\lambda.1)^{-1}}{\lambda - \lambda_o} \right\}$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_o} \left\{ \frac{(x-\lambda o.1)^{-1} \left[(x-\lambda o.1) - (x-\lambda.1)\right] (x - \lambda.1)^{-1}}{\lambda - \lambda_o} \right\}$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda o} \left\{ \frac{(x-\lambda o.1)^{-1}(\lambda.1-\lambda o.1)(x-\lambda.1)^{-1}}{\lambda - \lambda_o} \right\}$$

$$F'(\lambda o) = \lim_{\lambda \to \lambda o} \left\{ \frac{(x-\lambda o.1)^{-1} \ (\lambda-\lambda o).1 \ (x-\lambda.1)^{-1}}{\lambda - \lambda o} \right\}$$

$$= \lim_{\lambda \to \lambda o} \ (x - \lambda o.1)^{-1}.1.(x - \lambda.1)^{-1}$$

$$= \ (x - \lambda o.1)^{-1}.1.(x - \lambda o.1)^{-1}$$

$$= \frac{1}{(x - \lambda o.1)^2}$$

Esto implica que $F'(\lambda o)$ existe para $\lambda o \in R$ y por tanto F es analítica.

PRUEBA para b)

i) Supongamos que $U_o(1)$ es una vecindad de la identidad, donde todo x en $U_o(1)$ tiene inverso. Sea $\mu = \frac{1}{\lambda}$; como $f : \mathbb{C} \to B$ tal que $f(\lambda) = (x - \lambda.1)$ es una función continua de $\frac{1}{\mu}$, existe una vecindad $\{\mu \in \mathbb{C} / |\mu| < \varepsilon , \varepsilon > 0\}$ tal que $(x - \lambda.1) \in U_o(1)$ y por tanto $(x - \lambda.1)^{-1}$ existe para $|\mu| < \varepsilon$.

Además $\lim_{\lambda \to 0} (x - \lambda.1)^{-1} = \frac{1}{x}$;

esto significa que $\{(x - \lambda.1)^{-1}\}$ existe en la vecindad $\{\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| > \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon > 0\}$ del punto al infinito.

ii) Ahora probemos $\lim_{\lambda \to 0} F(\frac{1}{\lambda})$ existe

$$F(\tfrac{1}{\lambda}) = (x - \tfrac{1}{\lambda} 1)^{-1} = \left[\frac{x\lambda - 1}{\lambda}\right]^{-1} = \frac{\lambda}{x\lambda - 1}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} F(\tfrac{1}{\lambda}) = \lim_{\lambda \to o} \frac{\lambda}{x\lambda - 1} = 0$$

Por cuanto $\lim_{\lambda \to 0} F(\frac{1}{\lambda})$ existe

iii) Veamos que $g(\lambda)$ definida para $|\lambda| < \frac{1}{N}$,

con las condiciones:

$g(\lambda) = F(\frac{1}{\lambda})$ para $\lambda \neq 0$

$g(0) = \lim_{\lambda \to 0} F(\frac{1}{\lambda})$

es analítica en alguna vecindad del punto $\lambda = 0$

Sea $g(\lambda) = (x - \frac{1}{\lambda}.1)^{-1}$

$g'(\lambda o) = \lim_{\lambda \to \lambda o} \dfrac{g(\lambda) - g(\lambda o)}{\lambda - \lambda o}$; probemos que

$g'(\lambda o)$ existe.

$$\frac{g(\lambda)-g(\lambda o)}{\lambda-\lambda o}=\frac{(x-\frac{1}{\lambda}1)^{-1}-(x-\frac{1}{\lambda o}\quad 1)^{-1}}{\lambda-\lambda o}=\frac{\left(\frac{x\lambda-1}{\lambda}\right)^{-1}-\left(\frac{x\lambda o-1}{\lambda_o}\right)^{-1}}{\lambda-\lambda o}$$

$$=\frac{\frac{\lambda}{x\lambda-1}-\frac{\lambda o}{x\lambda o-1}}{\lambda-\lambda o}=\frac{\frac{\lambda(x\lambda o-1)-\lambda o(x\lambda-1)}{(x\lambda-1)(x\lambda o-1)}}{\lambda-\lambda o}$$

$$=\frac{\lambda(x\lambda o-1)-\lambda o(x\lambda-1)}{(\lambda-\lambda o)(x\lambda-1)(x\lambda o-1)}$$

$$=\frac{\lambda o.1-\lambda.1}{(\lambda-\lambda o)\ (x\lambda-1)\ (x\lambda o-1)}=\frac{(\lambda o-\lambda).1}{(\lambda-\lambda o)\ (x\lambda-1)\ (x\lambda o-1)}$$

$$=\frac{1}{(x\lambda-1)\ (x\lambda o-1)}$$

Luego

$$g'(\lambda o)=\lim_{\lambda\to\lambda o}\frac{1}{(x\lambda-1)(x\lambda o-1)}=\frac{1}{(x\lambda o-1)^2}$$

Por tanto $g'(\lambda o)$ existe, para $\lambda\neq 0$ y así

$g(\lambda)=F(\frac{1}{\lambda})$ para $\lambda\neq 0$ es analítica.

Ahora sea

$$g(0)=\lim_{\lambda\to 0}F(\frac{1}{\lambda})$$

Pero ya sabemos que $\lim_{\lambda\to 0}F(\frac{1}{\lambda})=0$ entonces $g(0)=0$

Luego:

$$g'(0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{g(\lambda)-g(0)}{\lambda - 0} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{g(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{(x-\frac{1}{\lambda}1)^{-1}}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\left(\frac{x\lambda-1}{\lambda}\right)^{-1}}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\frac{\lambda}{x\lambda-1}}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda}{\lambda(x\lambda-1)}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{x\lambda-1} = -\frac{1}{1} = -1$$

Por cuanto $g'(0)$ existe y así $g(\lambda)$ con las condiciones dadas es analítica.

Luego F es analítica al infinito.

4.9 TEOREMA DE LIOUVILLE.

Si $F(\lambda)$ es una función analítica en el plano entero complejo, que incluye el punto al infinito, entonces $F(\lambda)$ es una constante.

Haremos uso de este Teorema, aunque no lo probamos; no obstante su demostracción se puede encontrar en cualquier libro de variable compleja.

4.10 TEOREMA.

Si B es una álgebra de Banach y x en B entonces $Sp(x)$ es distinto de vacío.

PRUEBA.

Sea la función $F : \rho(x) \longrightarrow B$

$$\lambda \rightsquigarrow F(\lambda) = (x - \lambda.1)^{-1}$$

la cual por lema 4.8 es analítica al infinito.

Supongamos además que $Sp(x) = \phi$; entonces todos los puntos en el plano serían puntos inversibles, es decir que $F(\lambda) = (x - \lambda.1)^{-1}$ es analítica en el plano entero.

Luego por teorema de Liouville $F(\lambda)$ es una constante, $F(\lambda) = c$

Observemos que $1 = (x - \lambda.1)c$ (1)

Tomando $\lambda = 0$ se obtiene que $1 = xc$ (2)

Sustituyendo (2) en (1) tenemos

$xc = (x - \lambda.1)c \Rightarrow xc = (x - \lambda)c$

$\Rightarrow xc = xc - \lambda c \Rightarrow \lambda c = 0$ para todo λ, $\lambda \in \mathbb{C}$

si $\lambda = 1$ entonces $c = 0$.

De aquí que $1 = x(0)$; entonces $1 = 0$, lo cual es una contradicción.

Por tanto $Sp(x) \neq \phi$

4.11 DEFINICION.

Sea B una álgebra; se dice que B es una álgebra división si cada x que pertenece a B, con x distinto de cero, es inversible.

4.12 DEFINICION.

Sean E, E' dos espacios normados; una función f de E a E' es un isomorfismo isométrico si cumple las siguientes condiciones:

a) f es lineal

b) f es biyectiva

c) f preserva la norma, es decir

$\| f(x) \| = \| x \|$, $x \in E$.

4.13 LEMA.

Sean A y B álgebras división, $f : A \to B$ un isomorfismo isométrico; entonces

a) $f(1) \neq 0$

b) $f(1) = 1$

PRUEBA a)

$$f : A \longrightarrow B$$
$$x \rightsquigarrow f(x)$$

Supongamos que $f(1) = 0$

$f(x) = f(x.1) = f(x)f(1) = f(x).0 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$,

para todo x en A.

Lo cual no puede ser, por ser f un isomorfismo isométrico.

Por lo que $f(1) \neq 0$.

PRUEBA b)

$f(1) = 1.f(1) = f(1.1) = f(1)f(1)$

Como $f(1) \neq 0$ entonces $f(1) = 1$

4.14 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach, la cual es una álgebra división y sea f un Isomorfismo Isométrico de B sobre $\mathbb{C}$; entonces f(x) pertenece al espectro de x.

PRUEBA.

Queremos probar que $f(x) \in Sp(x)$ es decir, que

$x - f(x).1$ no es inversible en B, o lo que es lo mismo $x - f(x).1 = 0$, ya que B es una álgebra división.

Pero, una condición suficiente para que esto suceda es que $x - f(x).1 \in \text{Ker } f$ ya que f es inyectiva.

$$\begin{aligned} f(x - f(x).1) &= f(x) - f(f(x).1), \text{ ya que f es Isomorf.} \\ &= f(x) - f(x).f(1) \quad \text{por Lema 4.13} \\ &= f(x) - f(x).1 \quad , \text{ por ser f un Isomorf.} \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $x - f(x).1 \in \text{Ker } f$

de donde $x - f(x).1 = 0$

$\Rightarrow x - f(x).1$ no es inversible en B

$\Rightarrow f(x) \in Sp(x)$

4.15 TEOREMA DE GELFAND-MAZUR.

Si B es una álgebra de Banach la cual es una álgebra división; entonces hay un único Isomorfismo Isométrico de B sobre $\mathbb{C}$.

PRUEBA.

Si x está en B, entonces $Sp(x)$ es diferente de vacío, por teorema anterior.

Si λ_x está en $Sp(x)$, entonces $x - \lambda_x$ no es inversible en B, por definición. Como B es una álgebra división entonces $x - \lambda_x = 0$.

Además, para $\lambda \neq \lambda_x$ tenemos que

$$x - \lambda_x = 0 \Rightarrow x - \lambda_x = 1.\lambda - 1.\lambda$$

$$\Rightarrow x - 1.\lambda = \lambda_x - 1.\lambda$$ el cual es inversible ya que para $\lambda_x \neq \lambda$ se tiene que $\lambda_x - \lambda \neq 0$ y así $x - 1.\lambda \neq 0$. Luego es inversible.

Así el $Sp(x)$ consiste de exactamente un número complejo λ_x para cada x en B.

La función $f : B \to \mathbb{C}$ definida por $f(x) = \lambda_x$ es un Isomorfismo Isométrico de B sobre $\mathbb{C}$.

Probemos primero que:

i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

ii) $f(kx) = kf(x)$

iii) $f(xy) = f(x)f(y)$

i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Sea $\alpha \varepsilon Sp(x)$ es decir $f(x) = \alpha$

$\delta \varepsilon Sp(y)$ es decir $f(y) = \delta$

Probemos que $\alpha + \delta \varepsilon Sp(x+y)$

Esto es

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \varepsilon Sp(x) \\ \\ \delta \varepsilon Sp(y) \end{array}\right\} \text{entonces } \alpha + \delta \varepsilon Sp(x+y)$$

$\alpha \varepsilon Sp(x) \Rightarrow x - \alpha$ no es inversible en B, por definición

(1) $\Rightarrow x - \alpha = 0$, ya que B es una álgebra división.

$\delta \varepsilon Sp(y) \Rightarrow y - \delta$ no es inversible en B, por definición

(2) $\Rightarrow y - \delta = 0$, ya que B es una álgebra división.

Sumando (1) $\wedge$ (2) tenemos

$(x - \alpha) + (y - \delta) = 0 \Rightarrow x - \alpha + y - \delta = 0$

$\Rightarrow (x + y) - (\alpha + \delta) = 0$

$\Rightarrow (x + y) - \gamma = 0$, $\gamma = \alpha + \delta$

$\Rightarrow$ $(x+y) - \gamma$ no es inversible en B, ya que B es una álgebra división

$\Rightarrow$ $\gamma \in Sp(x+y)$, por definición

$\Rightarrow$ $\alpha + \delta \in Sp(x+y)$

Así, $f(x+y) = \alpha + \delta$

$= f(x) + f(y)$

Por tanto $f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii) $f(kx) = kf(x)$

Sea k en $\mathbb{C}$,

α en $Sp(x)$ es decir $f(x) = \alpha$

Probemos que $k\alpha \in Sp(kx)$

Esto es

$k \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in Sp(x) \Rightarrow k\alpha \in Sp(kx)$

$\alpha \in Sp(x) \Rightarrow x - \alpha$ no es inversible en B, por definición

$\Rightarrow x - \alpha = 0$, ya que B es una álgebra división

$\Rightarrow k(x-\alpha) = k.0$

$\Rightarrow k(x-\alpha) = 0$

$\Rightarrow kx - k\alpha = 0$

$\Rightarrow kx - \gamma = 0 \ , \ \gamma = k\alpha$

$\Rightarrow kx - \gamma$ no es inversible en B, ya que B es una álgebra división

$\Rightarrow \gamma \varepsilon Sp(kx)$, por definición

$\Rightarrow k\alpha \ \varepsilon \ Sp(kx)$

Así, $f(kx) = k\alpha$

$= k \ f(x)$

Por tanto $f(kx) = k \ f(x)$

iii) $f(xy) = f(x) \ f(y)$

Sea $\alpha \ \varepsilon \ Sp(x)$ es decir $f(x) = \alpha$

$\delta \ \varepsilon \ Sp(y)$ es decir $f(y) = \delta$

Probemos que $\alpha \ \delta \ \varepsilon \ Sp(xy)$

Esto es:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \ \varepsilon \ Sp(x) \\ \delta \ \varepsilon \ Sp(y) \end{array}\right\} \text{ entonces } \alpha \ \delta \ \varepsilon \ Sp(xy)$$

$\alpha \in Sp(x) \Rightarrow x - \alpha$ no es inversible en B, por definición

$\Rightarrow x - \alpha = 0$, ya que B es una álgebra división

$\Rightarrow x - \alpha.1 = 0$

$\Rightarrow x = \alpha.1$ (1)

$\delta \in Sp(y) \Rightarrow y - \delta$ no es inversible en B, por definición

$\Rightarrow y - \delta = 0$, ya que B es una álgebra división

$\Rightarrow y - \delta.1 = 0$

$\Rightarrow y = \delta.1$ (2)

Multiplicando (1) $\wedge$ (2) tenemos:

$xy = (\alpha.1)(\delta.1) \Rightarrow xy - (\alpha.1)(\delta.1) = 0$

$\Rightarrow xy - \alpha(\delta.1) = 0 \Rightarrow xy - (\alpha\delta).1 = 0$

$\Rightarrow xy - \gamma.1 = 0$, $\gamma = \alpha\delta$

$\Rightarrow xy - \gamma$ no es inversible en B, ya que B es una álgebra división

$\Rightarrow \gamma \in Sp(xy)$, por definición

$\Rightarrow \alpha\,\delta \in Sp(xy)$

Así, $f(xy) = \alpha\delta$

$= f(x)\ f(y)$

Por tanto $f(xy) = f(x)\ f(y)$

Ahora probemos que f es inyectiva, sobreyectiva e Isométrico.

i) f es inyectiva.

Sea $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \rightsquigarrow f(x) = \lambda_x$

Probemos que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Sea $\alpha \in Sp(x)$ es decir $f(x) = \alpha$

$\delta \in Sp(y)$ es decir $f(y) = \delta$

$\alpha \in Sp(x) \Rightarrow x - \alpha$ no es inversible en B, por definición

$\Rightarrow x - \alpha = 0$, por ser B una álgebra división

$\Rightarrow x - \alpha.1 = 0 \Rightarrow x = \alpha.1$ (1)

$\delta \in Sp(y) \Rightarrow y - \delta$ no es inversible en B, por definición

$\Rightarrow y - \delta = 0$, por ser B una álgebra división

$\Rightarrow y - \delta.1 = 0 \Rightarrow y = \delta.1$ (2)

$f(x) = f(y) \Rightarrow \alpha = \delta \Rightarrow \alpha.1 = \delta.1$

$\Rightarrow x = y$, por (1) $\wedge$ (2)

Luego f es Inyectiva.

ii) f es Sobreyectiva.

Probaremos que para cada λ en $\mathbb{C}$, existe x en B tal que $f(x) = \lambda$

Sea $x = \lambda.1$; entonces $x - \lambda.1 = 0$,

Así, $x - \lambda.1$ no es inversible en B,

Lo que implica que $\lambda \in Sp(x)$ de donde $f(x) = \lambda$

Luego, existe x en B tal que $f(x) = \lambda$, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$.

Por tanto f es Sobreyectiva.

iii) Probemos que f es Isométrico esto es $|f(x)| = \|x\|$, para cada x en B. (Preserva la norma).

Sea $f(x) \in Sp(x)$ entonces

$x - f(x).1$ no es inversible en B.

$\Longrightarrow x - f(x).1 = 0$, ya que B es una álgebra división

$\Longrightarrow x = f(x).1$

$$\Longrightarrow \|x\| = \|f(x).1\|$$

$$= |f(x)|\ \|1\|, \text{ por prop. de norma}$$

$$= |f(x)|.1$$

$$= |f(x)|$$

Luego $\|x\| = |f(x)|$

Por tanto f es un Isomorfismo Isométrico de B sobre $\mathbb{C}$.

Ahora, supongamos que f' es otro Isomorfismo Isométrico; entonces $f'(x) \in Sp(x)$, por lema 4.14; pero, sabemos que $Sp(x)$ consiste de exactamente un número complejo λ_x
de donde $f'(x) = f(x)$

Por tanto f es el único Isomorfismo Isométrico de B so- sobre $\mathbb{C}$.

A continuación recordaremos otros conceptos, que nos serán de mucha utilidad en la prueba de resultados posteriores.

4.16 DEFINICION.

Sea A una álgebra, $I \subset A$ un Subespacio Vectorial de A se dice que I es un ideal de A, si para todo x que pertenece a A y z que pertenece a I,

se cumple que xz, zx pertenecen a I.

4.17 DEFINICION.

Sea A una álgebra, $I \subset A$ un ideal de A se dice que I es un ideal maximal de A si:

a) $I \neq A$
b) Si existe un ideal J de A tal que $I \subset J \subset A$ entonces $J = I$ ó $J = A$.

4.18 DEFINICION.

Sea A una álgebra, $I \subset A$ un ideal de A, se dice que I es un ideal propio de A si $I \neq A$.

4.19 OBSERVACION.

En el caso que A sea una álgebra unitaria, para mostrar que I es un ideal propio de A, bastará mostrar que 1 no pertenece a I.

4.20 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach conmutativa, ϕ una funcional lineal multiplicativa sobre B; entonces $\mathrm{Ker}\phi$ es un ideal propio y Maximal.

PRUEBA.

Se probará que:

a) $\mathrm{Ker}\phi$ es un ideal

b) $\mathrm{Ker}\phi$ es propio

c) $\mathrm{Ker}\phi$ es maximal.

a) $\mathrm{Ker}\phi$ es un ideal.

$\mathrm{Ker}\phi = \{x \in B/\phi(x) = 0\}$.

- $\mathrm{Ker}\phi \neq \phi$

  ya que $\phi(0) = 0$ con $0 \in B$.

- "$x,y \in \mathrm{Ker}\phi \Rightarrow x+y \in \mathrm{Ker}\phi$"

  $x \in \mathrm{Ker}\phi \Rightarrow \phi(x) = 0$

  $y \in \mathrm{Ker}\phi \Rightarrow \phi(y) = 0$

$$\Rightarrow \phi(x)+\phi(y) = 0 \Rightarrow \phi(x+y) = 0 \Rightarrow x+y \in \mathrm{Ker}\,\phi.$$

- "$x \in \mathrm{Ker}\phi,\ \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha x \in \mathrm{Ker}\phi$"

  $x\in \mathrm{Ker}\phi \Rightarrow \phi(x)=0 \Rightarrow \alpha\phi(x)=0 \Rightarrow \phi(\alpha x) = 0 \Rightarrow \alpha x \in \mathrm{Ker}\,\phi$.

- "$x \in \mathrm{Ker}\phi,\ y \in B \Rightarrow xy\ ,\ yx \in \mathrm{Ker}\phi$"

  $x\in \mathrm{Ker}\phi \Rightarrow \phi(x)=0 \Rightarrow \phi(x)\phi(y)=0\phi(y) \Rightarrow \phi(xy)=0 \Rightarrow xy \in \mathrm{Ker}\phi$.

  $x\in \mathrm{Ker}\phi \Rightarrow \phi(x)=0 \Rightarrow \phi(y)\phi(x)=\phi(y).0 \Rightarrow \phi(yx)=0 \Rightarrow yx \in \mathrm{Ker}\phi$.

  Por tanto $\mathrm{Ker}\phi$ es un ideal.

b) Probemos que $\mathrm{Ker}\phi$ es un ideal propio de B.

PRUEBA.

Supongamos que $1 \in \mathrm{Ker}\phi$ entonces $\phi(1)= 0$, lo cual es una contradicción, ya que ϕ es una funcional lineal multiplicativa y por tanto $\mathrm{Ker}\phi$ es un ideal propio de B.

c) Probemos que $\mathrm{Ker}\,\phi$ es un ideal maximal de B.

Por definición tendremos que verificar que:

i) $\mathrm{Ker}\phi \neq B$.

ii) Si existe un ideal U de B tal que $\mathrm{Ker}\phi \subset U \subset B$ entonces $B = U$ o $\mathrm{Ker}\phi = U$.

i) Que $Ker\phi \neq B$ se verifica porque $Ker\phi$ es un ideal propio.

ii) Sea U un ideal de B tal que $Ker\phi \subset U \subset B$

Supongamos que $Ker\phi \neq U$ y probemos que $B = U$, es decir probaremos que $1 \in U$.

Como $Ker\phi \neq U$ y $Ker\phi \subset U$, entonces existe $x \in U$ tal que $x \notin Ker\phi$. Además como U es un ideal $\frac{1}{\phi(x)}x \in U$, por otro lado $1 - \frac{x}{\phi(x)} \in Ker\phi$ entonces $1 - \frac{x}{\phi(x)} \in U$.

Luego $1 = \left[\left(1 - \frac{x}{\phi(x)}\right) + \frac{x}{\phi(x)}\right] \in U$ por ser U un ideal entonces $1 \in U$, es decir, $U = B$ y por tanto $Ker\phi$ es un ideal maximal.

4.21 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach Conmutativa, si I es un ideal maximal y propio, entonces I es cerrado.

PRUEBA.

$x \in I \Rightarrow x$ no es inversible, ya que I es un ideal propio

$\Rightarrow \|1-x\| \geq 1$ para todo $x \in I$ por proposición 1.16

$\Rightarrow x \notin B(1,1)$ para todo $x \in I$

$\Rightarrow B(1,1) \cap I = \phi$

$\Rightarrow 1 \notin \overline{I}$

Además como I es un ideal, entonces $\overline{I}$ es un ideal y como $1 \notin \overline{I}$, entonces $\overline{I}$ es un ideal propio de B.

También como $I \subset \overline{I} \subset B$ y como I es maximal entonces $I = \overline{I}$.

Por tanto I es cerrado.

4.22 DEFINICION.

Sea B una álgebra de Banach, I un ideal maximal de B y $\frac{B}{I}$ el espacio de Banach de las clases de equivalencia $\{[x]/x \in B\}$, donde $[x] = \{x+y/y \in I\}$ con la norma definida así

$$\|[x]\| = \underset{y \in I}{\operatorname{Inf}} \|x+y\| = \underset{h \in [x]}{\operatorname{Inf}} \|h\|$$

4.23 PROPOSICION.

Sea B una álgebra de Banach, I un ideal maximal de B, si $\frac{B}{I}$ es un espacio de Banach con la norma definida en 4.22 entonces $\frac{B}{I}$ es una álgebra de Banach con dicha norma.

PRUEBA.

Como $\frac{B}{I}$ con la norma definida es un espacio de Banach, resulta que $\frac{B}{I}$ es un espacio vectorial.

Por otro lado como I es un ideal y B un anillo, por ser álgebra de Banach, entonces resulta que $\frac{B}{I}$ es un anillo, de donde $\frac{B}{I}$ es una álgebra.

Para que $\frac{B}{I}$ sea álgebra de Banach sólo quedan dos hechos por verificar:

1) $\|[1]\| = 1$

2) $\|[x]\ [y]\| \leq \|[x]\|\ \|[y]\|$

PRUEBA para 1)

Sea $\|[x]\| = \operatorname*{Inf}_{y \varepsilon I} \|x+y\| = \operatorname*{Ing}_{h \varepsilon [x]} \|h\|$

Luego

$$\| [1] \| = \inf_{y \varepsilon I} \| 1+y \| = \inf_{y \varepsilon I} \| 1 - (-y) \| = \inf_{y \varepsilon I} \| 1-y \|$$

Verifiquemos que $\inf_{y \varepsilon I} \| 1-y \| = 1$

$\inf \{ \| 1-y \| / y \ \varepsilon \ I \} = 1$ entonces

i) $1 \leq \| 1-y \|$, $y \ \varepsilon \ I$ (es decir, 1 es una cota inferior),

Supongamos que $1 > \| 1-y \|$ para algún $y \ \varepsilon \ I$ entonces y es inversible, por proposición 1.16.

Así, existe $p \neq 0$ tal que $yp = py = 1$

Como $y \ \varepsilon \ I$ entonces $yp = py = 1 \ \varepsilon \ I$ luego $I = B$ y por tanto I no es ideal propio, lo cual es una contradicción; de aquí $1 \leq \| 1-y \|$ y así 1 es una cota inferior de $\{ \| 1-y \| / y \ \varepsilon \ I \}$.

ii) Probemos que 1 es la mayor de las cotas inferiores, es decir, para todo $\varepsilon > 0$, $1 + \varepsilon > \| 1-y \|$, para algún y en I.

Si $y = 0$ entonces $1 + \varepsilon > \| 1-0 \|$

$$\Rightarrow 1 + \varepsilon > \| 1 \| \Rightarrow 1 + \varepsilon > 1 \quad ,$$

esto significa que ningún número mayor que 1 es cota inferior para el conjunto $\{\|1-y\| / y \in I\}$.

Otra forma de probar lo anterior es:

ii) Supongamos que m es una cota inferior para el conjunto $\{\|1-y\| / y \in I\}$ entonces $m \leq 1$

$m \leq \|1-y\|$, para todo $y \in I$.

Si $y = 0$ entonces $m \leq \|1\| \Rightarrow m \leq 1$

Luego de i) e ii) tenemos

$$\|[1]\| = 1$$

PRUEBA para 2)

$$\|[x][y]\| = \|[xy]\| = \inf_{h \in I} \|xy-h\|$$

Probemos que

$$\inf_{h \in I} \|xy-h\| \leq \inf_{h_1,h_2 \in I} \|(x-h_1)(y-h_2)\|$$

Sea $P = \{\|(x-h_1)(y-h_2)\| / h_1,h_2 \in I\}$ y

$T = \{\|xy-h\| / h \in I\}$

Ahora $(x-h_1)(y-h_2) = xy - xh_2 - yh_1 + h_1h_2$

Como I es un ideal

xh_2 , yh_1 , $h_1h_2 \in I$ entonces

$xh_2 - yh_1 + h_1h_2 = z \in I$

$\Rightarrow (x - h_1)(y - h_2) = xy + z$, $z \in I$

de donde $P \subset T$

Luego $\inf T \leq \inf P$

Así resulta que

$$\inf_{h \in I} \| xy - h \| \leq \inf_{h_1,h_2 \in I} \| (x-h_1)(y-h_2) \|$$

Como $\inf \| (x-h_1)(y-h_2) \| \leq \| (x-h_1)(y-h_2) \| \leq \| x-h_1 \| \, \| y-h_2 \|$

entonces $\inf \| x-h_1)(y-h_2) \| \leq \inf (\| x-h_1 \| \, \| y-h_2 \|)$

Ahora probemos que

$\inf (\| x-h_1 \| \, \| y-h_2 \| \leq \inf \| x-h_1 \| \, \inf \| y-h_2 \|$

Sea $a = \inf (\| x-h_1 \| \, \| y-h_2 \|)$ entonces

$a \leq \| x-h_1 \| \, \| y-h_2 \|$ para todo $h_1, h_2 \in I$

fijando h_1

$$\frac{a}{\|x - h_1\|} \leq \| y-h_2\|$$ para todo $h_2 \varepsilon I$ (2a. propiedad de ínfimo)

$$\frac{a}{\|x - h_1\|} \leq \inf_{h_2 \varepsilon I} \| y-h_2\|$$ esto implica que

$$\frac{a}{\inf\limits_{h_2 \varepsilon I} \| y-h_2\|} \leq \| x - h_1\|$$

Así , $$\frac{a}{\inf\limits_{h_2 \varepsilon I} \| y-h_2\|} \leq \inf_{h_1 \varepsilon I} \|x - h_1\|$$

de donde $$a \leq \inf_{h_1 \varepsilon I} \| x-h_1\| \inf_{h_2 \varepsilon I} \| y-h_2\|$$

Luego,

$$\inf_{h_1 , h_2 \varepsilon I} (\| x-h_1\| \; \| y-h_2\|) \leq \inf_{h_1 \varepsilon I} \| x-h_1\| \inf_{h_2 \varepsilon I} \| y - h_2\|$$

Así,

$$\| [x] [y] \| = \| [xy] \| = \inf \| xy-h\|$$

$$\leq \inf_{h_1 h_2 \varepsilon I} \| (x-h_1)(h-h_2)\|$$

$$\leq \inf_{h_1 \varepsilon I} \| x-h_1\| \inf_{h_2 \varepsilon I} \| y-h_2\|$$

$$= \| [x] \| \; \| [y] \|$$

Por tanto $\| [x]\ [y] \| \leq \| [x] \|\ \| [y] \|$

4.24 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach Conmutativa, I un ideal maximal de B, entonces el álgebra Cociente $\frac{B}{I}$ es una álgebra división.

PRUEBA.

Probaremos que para todo $y \neq 0$ que pertenezca a $\frac{B}{I}$ existe y^{-1} que pertenece a $\frac{B}{I}$.

Sea $y = b + I$ tal que $b + I \neq I$ entonces $b \notin I$,

como I es un ideal maximal de B, entonces $I \neq B$ y existe un ideal $J = \{r \in B / r = a + bx,\ a \in I,\ x \in B\}$ tal que $I \subset J \subset B$ entonces $J = B$ o $J = I$; pero si $b = 0 + b.1$ entonces $b \in J$, pero como $b \notin I$ entonces $J \neq I$.

Luego $J = B$.

$$1 \in J \Rightarrow 1 = bx + a \ ,\ a \in I \ ,\ x \in B$$

$$\Rightarrow 1 - bx \in I \Rightarrow 1 + I = bx + I$$

$$\Rightarrow 1 + I = (b+I)\ (x+I)$$

Por tanto $y^{-1} = (x+I)$ y así $\frac{B}{I}$ es una álgebra división.

4.25 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach Conmutativa, I un ideal maximal de B y sea ψ un isomorfismo isométrico de $\frac{B}{I}$ a $\mathbb{C}$; si Π denota el homomorfismo natural de B a $\frac{B}{I}$ entonces

a) $\phi = \psi\Pi$ es una funcional lineal multiplicativa distinta de cero

b) $\mathrm{Ker}\phi = I$

PRUEBA a)

Sea $\psi : \frac{B}{I} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Pi : B \longrightarrow \frac{B}{I}$

$x+I \rightsquigarrow \psi(x+I) = \lambda_x + I$ $\qquad x \rightsquigarrow \Pi(x) = x+I$

Probaremos que:

i) $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, $x,y \in B$

ii) $\phi(1) = 1$

iii) $\phi \neq 0$

PARA i)

$\phi(xy) = (\psi\Pi)(xy) = \psi(\Pi(xy)) = \psi(xy+I) = \psi[(x+I)(y+I)]$

$= \psi(x+I)\ \psi(y+I)$ por ser ψ un isomorfismo isométrico

$= (\psi o\Pi)(x)\ \ (\psi o\Pi)(y) = \phi(x)\ \phi(y)$

PARA ii)

$\phi(1) = (\psi o \Pi)(1) = \psi(\Pi(1)) = \psi(1+I) = 1$ por Lema 4.13

PARA iii)

Como existe $1 \varepsilon B$ tal que $\phi(1) = 1$ entonces ϕ es una funcional lineal multiplicativa distinta de cero sobre B.

PRUEBA b)

Queremos mostrar que $I = Ker\phi$.

"C"

$x \varepsilon I \Rightarrow x+I=I \Rightarrow \psi(x+I) = \psi(I) \Rightarrow \psi(\Pi(x)) = 0$

$\Rightarrow (\psi o \Pi)(x) = 0 \rightarrow \phi(x) = 0 \Rightarrow x \varepsilon Ker\phi$

y por tanto $I \subset Ker\phi$.

$x \varepsilon Ker\phi \Rightarrow \phi(x) = 0 \Rightarrow (\psi o \Pi)(x) = 0 \Rightarrow \psi(\Pi(x)) = 0 \Rightarrow \psi(x+I) = 0$

Como ψ es un isomorfismo isométrico, entonces

$\|\psi(x+I)\| = \|x+I\| = \|0\| \Rightarrow x+I = I \Rightarrow x \varepsilon I$

Por tanto $Ker\phi \subset I$ y así $I = Ker\phi$.

4.26 PROPOSICION.

Si B es una álgebra de Banach conmutativa, entonces el conjunto M de funcionales lineales multiplicativas sobre B, está en correspondencia biyectiva con el conjunto de ideales maximales en B.

PRUEBA.

Sea ϕ una funcional lineal multiplicativa sobre B y sea $K = \operatorname{Ker}\phi = \{x \in B / \phi(x) = 0\}$, el cual por el lema 4.20 es un ideal propio y maximal.

Supongamos que I es un ideal maximal y propio de B, entonces I es cerrado, por el lema 4.21.

Por otro lado como el álgebra cociente $\frac{B}{I}$ es una álgebra de Banach, la cual por ser I maximal y B conmutativa es una álgebra división, por lema 4.24.

Por tanto por lema 4.15 existe un isomorfismo isométrico $\psi : \frac{B}{I} \to \mathbb{C}$ tal que $\psi(x+I) = \lambda_x + I$, y si Π denota el homorfismo natural de B a $\frac{B}{I}$ tal que $\Pi(x) = x+I$ entonces por el lema 4.25 la Composición $\phi = \psi\Pi$ es una funcional lineal multiplicativa distinta de cero.

Finalmente, mostremos que la correspondencia

$\phi \longleftrightarrow Ker\phi$ es biyectiva, es decir, sea

$$g : M \longrightarrow R = \{\text{Conjunto de ideales maximales en } B\}$$

$$\phi \rightsquigarrow g(\phi) = Ker\phi.$$

i) Probemos que g es inyectiva.

Sean ϕ_1, ϕ_2 en M tal que $Ker\phi_1 = Ker\phi_2$ probemos que $\phi_1 = \phi_2$

$$\phi_1(x)-\phi_2(x) = x-\phi_2(x)-(x-\phi_1(x)) = x-\phi_2(x).1-(x-\phi_1(x).1)$$

$$x-\phi_2(x).1 \in Ker\phi_2 = Ker\phi_1 \Rightarrow x-\phi_2(x).1 \in Ker\phi_1$$

$$x-\phi_1(x).1 \in Ker\phi_1 = Ker\phi_2 \Rightarrow x-\phi_1(x).1 \in Ker\phi_2$$

$$\Rightarrow x-\phi_2(x).1-(x-\phi_1(x)) \in Ker\phi_1$$

Aplicando ϕ_1 se tiene:

$$\phi_1(\phi_1(x)-\phi_2(x)) = \phi_1 \left[x-\phi_2(x).1 - (x-\phi_1(x).1)\right]$$

$$\phi_1(\phi_1(x).1-\phi_2(x).1) = 0 \Rightarrow \phi_1(x)\phi_1(1)-\phi_2(x)\phi_1(1) = 0$$

Como $\phi_1 \in M$ entonces $\phi_1(1) = 1$ entonces

$$\phi_1(x)-\phi_2(x) = 0 \Rightarrow \phi_1(x) = \phi_2(x) \rightarrow \phi_1 = \phi_2$$

Por tanto g es inyectiva.

ii) Probemos que g es sobreyectiva.

Sea $J \in R$, probemos que existe ϕ en M tal que $J = \mathrm{Ker}\phi$.

Como J es un ideal maximal, $\frac{B}{J}$ es una álgebra división luego por teorema 4.15 existe un único isomorfismo isométrico $\psi : \frac{B}{J} \to \mathbb{C}$ y si $\Pi : B \to \frac{B}{J}$ denota un homomorfismo natural, entonces

$\phi = \psi . \Pi$ es una funcional lineal multiplicativa distinta de cero y $\mathrm{Ker}\phi = J$ por el lema 4.25

Por tanto g es sobreyectiva.

Con lo que se concluye la prueba.

CAPITULO V

LA TRANSFORMADA DE GELFAND.

En el Capítulo III, mostramos que M (conjunto de funcionales lineales multiplicativas) es un subconjunto compacto de la bola unitaria del espacio conjugado de B y otras propiedades importantes de M, las cuales en este Capítulo serán de mucha utilidad. Recordamos además que para cada x en B existe una función continua $\hat{x}$ de $(B^*)_1$ a $\mathbb{C}$, definida por $\hat{x}(\phi) = \phi(x)$.

Como M está contenida en $(B^*)_1$, entonces $\hat{x}$ restringida a M también es continua, lo cual lo formalizaremos en:

5.1 DEFINICION.

Para el álgebra de Banach B, la transformada de Gelfand es la función $\Gamma : B \to C(M)$ definida por $\Gamma(x) = \hat{x}_{|M}$, esto es $\Gamma(x)(\phi) = \phi(x)$, para ϕ en M.

5.2 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach, x en B y Γ la transformada de Gelfand definida por $\Gamma(x) = \hat{x}_{|M}$; entonces

$\|\hat{x}_{|M}\|_\infty \leq \|\hat{x}\|_\infty$

PRUEBA.

$\Gamma : B \longrightarrow C(M)$

$x \rightsquigarrow \Gamma(x) = \hat{x}_{|M} : M \longrightarrow \mathbb{C}$

$\phi \rightsquigarrow \Gamma(x)(\phi) = \phi(x)$

Sea $\|\hat{x}\|_\infty = \text{Sup}\{|\hat{x}(n)| / n \in (B^*)_1\}$

$\|\hat{x}_{|M}\|_\infty = \text{Sup}\{|\hat{x}_{|M}(m)| / m \in M\}$

Sea $P = \{|\hat{x}_{|M}(m)| / m \in M\}$ y $T = \{|\hat{x}(n)| / n \in (B^*)_1\}$

Probemos que $P \subset T$

$q \in P \Rightarrow$ existe $m \in M$ tal que $\hat{x}_{|M}(m) = q$

$\Rightarrow q = \Gamma(x)(m)$, $m \in M$

$\Rightarrow q = m(x) \Rightarrow q \in T$, ya que $M \subset (B^*)_1$

$\Rightarrow P \subset T$

Como $P \subset T$ entonces $\text{Sup } P \leq \text{Sup } T$

$\text{Sup } P \leq \text{Sup } T \Rightarrow \text{Sup}\{|\hat{x}_{|M}(m)| / m \in M\} \leq \text{Sup}\{|\hat{x}(n)| / n \in (B^*)_1\}$

$\Rightarrow \|\hat{x}_{|M}\|_\infty \leq \|\hat{x}(n)\|$

5.3 PROPOSICION.

(Propiedades elementales de la Transformada de Gelfand).

Si B es una álgebra de Banach y Γ es la transformada de Gelfand, entonces

1) Γ es un homomorfismo de Algebra.

2) $\|\Gamma(x)\|_\infty \leq \|x\|$, para x en B.

PRUEBA 1) Probaremos que

i) $\Gamma(x+y) = \Gamma(x) + \Gamma(y)$, $x,y \in B$

ii) $\Gamma(\alpha x) = \alpha\Gamma(x)$, $x \in B$, $\alpha \in \mathbb{C}$

iii) $\Gamma(xy) = \Gamma(x)\Gamma(y)$, $x,y \in B$

i) Sea ϕ en M, $x,y \in B$

$\Gamma(x+y)(\phi) = \phi(x+y)$, por definición

$= \phi(x) + \phi(y)$, ya que ϕ es lineal

$= \Gamma(x)(\phi) + \phi(y)(\phi)$, por definición

$= [\Gamma(x) + \Gamma(y)](\phi)$, por álgebra de funciones

Luego $\Gamma(x+y) = \Gamma(x) + \Gamma(y)$

ii) Sea ϕ en M , $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in B$

$\Gamma(\alpha x)(\phi) = \phi(\alpha x)$, por definición

$= \alpha\phi(x)$, ya que ϕ es lineal

$= \alpha \Gamma(x)(\phi)$, por definición

$= [\alpha\Gamma(x)](\phi)$, por álgebra de funciones

Luego $\Gamma(\alpha x) = \alpha\Gamma(x)$

iii) Sean ϕ en M, x,y en B

$\Gamma(xy)(\phi) = \phi(xy)$, por definición

$= \phi(x)\phi(y)$, ya que ϕ está en M

$= \Gamma(x)(\phi)\Gamma(y)(\phi)$, por definición

$= [\Gamma(x)\Gamma(y)](\phi)$, por álgebra de funciones

Luego $\Gamma(xy) = \Gamma(x)\Gamma(y)$

Por tanto Γ es un homomorfismo de Algebra.

PRUEBA 2) $\|\Gamma(x)\|_\infty \leq \|x\|$, para x en B.

Supongamos que x está en B y mostremos que Γ es una función contractiva, es decir $\|\Gamma(x)\|_\infty \leq \|x\|$, x en B

$\|\Gamma(x)\|_\infty = \|\hat{x}_{|M}\|_\infty \leq \|\hat{x}\|_\infty$, por lema 5.2

$\|\Gamma(x)\|_\infty \leq \|\hat{x}\|_\infty = \sup_{n\varepsilon(B^*)_1} |\hat{x}(n)| \leq \sup_{n\varepsilon(B^*)_1} \|n\| \; \|x\|$

$\|\Gamma(x)\|_\infty \leq \sup 1.\|x\| \leq \|x\|$

Luego $\|\Gamma(x)\|_\infty \leq \|x\|$

5.4 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach; x,y en B, Γ la transformada de Gelfand; entonces Γ envía todos los elementos de la forma $xy - yx$ a cero.

PRUEBA.

Sea $\phi \varepsilon M$ entonces $\Gamma(xy-yx)(\phi) = \phi(xy-yx)$

$\Gamma(xy-yx) = \phi(xy) - \phi(yx)$, ya que ϕ es lineal

$= \phi(x)\phi(y) - \phi(y)\phi(x)$, ya que ϕ está en M

$= 0$, ya que $\phi(x)$, $\phi(y)$ están en $\mathbb{C}$ y este campo es conmutativo.

Por tanto $\Gamma(xy-yx) = 0$

No asumiremos en lo que sigue que B es conmutativa, hasta que esta suposición se haga necesaria.

A continuación haremos el recordatorio de una definición y sólo enunciaremos el Lema de Zorn, pues estos resultados serán utilizados más adelante.

5.5 DEFINICION.

Se dice que un conjunto parcialmente ordenado A está totalmente ordenado, si para todo α,β en A se cumple que $\alpha \geq \beta$ o $\beta \geq \alpha$

5.6 LEMA DE ZORN.

Si un conjunto parcialmente ordenado A es tal que todo subconjunto totalmente ordenado tiene una cota superior entonces A contiene un elemento maximal.

5.7 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach Conmutativa. Si $I_0 \subset B$ es un ideal propio de B entonces existe un ideal maximal I de B tal que $I_0 \subset I$.

PRUEBA.

Sea $N = \{J \subset B / J$ es un ideal propio de B, $I_0 \subset J\}$ un conjunto parcialmente ordenado;
además, sea $H \subset N$ un conjunto totalmente ordenado

iv) Sea x en B.

$y \in L \Rightarrow$ existe $J \in H$ tal que $y \in J$

Como J es un ideal entonces xy y $yx \in J \subset L$

de donde $xy \wedge yx \in L$,

luego L es un ideal de B.

2) L es propio.

Supongamos que $1 \in L$ entonces existe $J \in H$ tal que $1 \in J$; pero esto es una contradicción ya que J es un ideal propio, luego $1 \notin L$ y por tanto L es un ideal propio.

Ahora probemos que $L \in N$, es decir, que $I_0 \subset L$ como $L = \bigcup_{J \in H} J$ entonces $I_0 \subset J \subset L \Rightarrow I_0 \subset L$

Veamos que L es una cota superior de H, esdecir, $J \subset L$, para todo $J \in H$, esto es cierto ya que $L = \bigcup_{J \in H} J$, lo que implica que $J \subset L$, para todo $J \in H$.

Luego como el conjunto N parcialmente ordenado es tal que todo subconjunto H (totalmente ordenado) de N tiene una cota superior (L) entonces, por el lema de Zorn, N contiene un elemento maximal P.

Probemos que P es un ideal maximal en B.

i) $P \neq B$ (lo cual se verifica porque P es un ideal propio).

ii) Si existe un ideal R de B tal que $P \subset R \subset B$ entonces $R = P$ o $R = B$.

Supongamos que $R \neq P$ y probemos que $R = B$; como $R \neq P$ y P es maximal en N entonces $R \not\subset N$, además como $I_0 \subset P \subset R$ entonces $I_0 \subset R$.

Como $R \not\subset N$ esto implica que R no es un ideal propio de B. Por tanto $R = B$ y así P es un ideal maximal de B.

Por lo que todo ideal propio I_0 está contenido en un ideal maximal.

5.8 PROPOSICION.

Si B es una álgebra de Banach conmutativa y x está en B entonces x es inversible en B si y sólo si $\Gamma(x)$ es inversible en $C(M)$.

PRUEBA.

"$\Rightarrow$" x inversible en $B \Rightarrow \Gamma(x)$ inversible en $C(M)$

como x es inversible en B entonces existe $x^{-1} \in B$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$

Probemos que $\Gamma(x)$ es inversible en $C(M)$

$\Gamma(x^{-1}) \in C(M)$;

Probar $\Gamma(x)\Gamma(x^{-1}) = \Gamma(x^{-1})\,\Gamma(x) = 1$

Sea ϕ en M entonces $[\Gamma(x)\Gamma(x^{-1})]\,(\phi)$

$$
\begin{aligned}
[\Gamma(x)\Gamma(x^{-1})]\,(\phi) &= \Gamma(x)(\phi)\Gamma(x^{-1})(\phi)\ , && \text{por definición de producto en } C(M) \\
&= \phi(x)\phi(x^{-1}), && \text{por definición} \\
&= \phi(xx^{-1}) && , \phi \text{ es lineal} \\
&= \phi(1) && , \text{por hipótesis} \\
&= 1 && , \phi \in M
\end{aligned}
$$

Luego $\Gamma(x)\,\Gamma(x^{-1}) = 1$

De igual forma se prueba que $\Gamma(x^{-1})\,\Gamma(x) = 1$

Así $\Gamma(x)$ es inversible en $C(M)$.

"$\Leftarrow$" $\Gamma(x)$ es inversible en $C(M) \Rightarrow x$ inversible en B.

Supongamos que x no es inversible en B, es decir, que para todo z en B, $xz = zx \neq 1$

Sea $I_0 = \{yx/y \in B\}$ el cual es un ideal en B.

Probemos que I_0 es propio, para ello mostraremos que $1 \notin I_0$.

Supongamos que $1 \in I_0$ entonces $1 = yx$, $y \in B$; pero esto es una contradicción ya que $1 \neq yx$, con $y \in B$ por hipótesis.

Luego $1 \notin I_0$ y así I_0 es un ideal propio en B.

Como B es conmutativa, I_0 está contenido en algún ideal maximal I, por lema 5.7.

Por proposición 4.25 existe ϕ en M tal que $\mathrm{Ker}\phi = I$

Como $x \in I$ y $\mathrm{Ker}\phi = I$ entonces $\Gamma(x)(\phi) = \phi(x) = 0$; $\Gamma(x)(\phi) = 0 \Rightarrow \Gamma(x)(\phi) \neq 1$.

Verifiquemos que $\Gamma(x)$ no es inversible en C(M); esto significa que para todo H en C(M) tenemos

$\Gamma(x).H = H.\Gamma(x) \neq 1$ o sea $(\Gamma(x).H)(\phi) \neq 1$

$[\Gamma(x).H](\phi) = \Gamma(x)(\phi).H(\phi) = \phi(x)H(\phi) = 0.H(\phi)$, ya que $\phi(x) = 0$

$[\Gamma(x).H](\phi) = 0 \neq 1$, para algún ϕ en M.

Luego $\Gamma(x)$ no es inversible en C(M).

El siguiente teorema resume los resultados anteriores, para el caso en que B sea conmutativa.

5.9 TEOREMA (GELFAND).

Sea B una álgebra de Banach conmutativa, U el espacio de ideales maximales, M el conjunto de funcionales lineales multiplicativos sobre B y $\Gamma : B \to C(M)$ la transformada de Gelfand; entonces:

1) U es diferente de vacío.

2) Γ es un homomorfismo de álgebra.

3) $\|\Gamma(x)\|_\infty \leq \|x\|$, para x en B.

4) x es inversible en B si y sólo si $\Gamma(x)$ es inversible en $C(M)$.

PRUEBA.

Solamente se probará el numeral 1), ya que anteriormente se probaron 2), 3) y 4).

Sea $I = \{0\}$ un ideal propio de B; entonces por lema 5.7 existe un ideal maximal H de B tal que $I \subset H$, con lo que se concluye que $U \neq \phi$.

5.10 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach conmutativa, 1 está en B y $\Gamma : B \to C(M)$ la transformada de Gelfand; entonces $\Gamma(1) = 1$.

PRUEBA.

$1 \in B$, $\phi \in M$

$$\Gamma(1)(\phi) = \phi(1) \; , \quad \phi \in M$$

$$= 1$$

Luego $\Gamma(1) = 1$

5.11 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach conmutativa, x está en B y $\Gamma : B \to C(M)$ la transformada de Gelfand; entonces f es inversible si y solo si $f(\phi) \neq 0$, para todo ϕ en M y f en $C(M)$.

PRUEBA.

"$\Rightarrow$" f inversible en $C(M) \Rightarrow f(\phi) \neq 0$, $\forall \phi \in M$

como f es inversible en $C(M)$ entonces existe $g \in C(M)$ tal que

$fg = gf = 1$

$fg = 1 \Longrightarrow (fg)(\phi) = 1(\phi)\ ,\ \forall\ \phi \in M$

$\Longrightarrow f(\phi)\ g(\phi) = 1$

si $f(\phi) = 0$ entonces $f(\phi)\ g(\phi) = 0$, lo cual no puede ser ya que $f(\phi)\ g(\phi) = 1 \neq 0$

Luego $f(\phi) \neq 0\ ,\ \forall\ \phi \in M$

"$\Longleftarrow$" $f(\phi) \neq 0$, para todo ϕ en M, f es inversible en C(M)

Definamos $f^{-1} : M \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\phi \rightsquigarrow f^{-1}(\phi) = \left(\frac{1}{f}\right)(\phi) = \frac{1}{f(\phi)}$$

como $f(\phi) \neq 0$ entonces existe $\frac{1}{f(\phi)} \neq 0$

tal que $f(\phi)\ \frac{1}{f(\phi)} = 1$

Luego f es inversible en C(M).

5.12 COROLARIO.

Si B es una álgebra de Banach conmutativa y x está en B, entonces

a) $Sp(x) = \text{rango}\ \Gamma(x)$

b) $\gamma(x) = \|\Gamma(x)\|_{\infty}$

PRUEBA a)

$\Gamma : B \longrightarrow C(M)$

$x \rightsquigarrow \Gamma(x) : M \longrightarrow \mathbb{C}$

$\phi \rightsquigarrow \Gamma(x)(\phi) = \phi(x)$

$Sp(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}/x-\lambda$ no es inversible en $B\}$

rango $\Gamma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\Gamma(x)(\phi) = \lambda$, para algún ϕ en $M\}$

$= \{\lambda \in \mathbb{C}/\phi(x) = \lambda$, para algún ϕ en $M\}$

"c" $Sp(x) \subset$ rango $\Gamma(x)$

Supongamos que $\lambda \notin$ rango $\Gamma(x)$; entonces

$\Gamma(x)(\phi) \neq \lambda$, para todo ϕ en M.

$\Rightarrow \Gamma(x)(\phi) - \lambda \neq 0$, para todo ϕ en M.

$\Rightarrow \Gamma(x)(\phi) - \lambda.1 \neq 0$, para todo ϕ en M.

$\Rightarrow \Gamma(x)(\phi) - \lambda.1(\phi) \neq 0$, para todo ϕ en M.

$\Rightarrow (\Gamma(x) - \lambda.1)(\phi) \neq 0$, para todo ϕ en M.

$\Rightarrow \Gamma(x) - \lambda.1$ es inversible en $C(M)$.

$\Rightarrow \Gamma(x) - \lambda.\Gamma(1)$ es inversible en $C(M)$, por lema 5.10.

$\Longrightarrow \Gamma(x) - \Gamma(\lambda.1)$, es inversible en $C(M)$, ya que Γ es homomorfismo de álgebra.

$\Longrightarrow \Gamma(x - \lambda.1)$ es inversible en $C(M)$, por ser Γ homomorfismo de álgebra.

$\Longrightarrow x - \lambda.1$ es inversible en B, por proposición 5.8

$\Longrightarrow \lambda \notin Sp(x)$

Luego $Sp(x) \subset$ rango $\Gamma(x)$

"$\supset$" rango $\Gamma(x) \subset Sp(x)$

Supongamos que $\lambda \notin Sp(x)$ entonces

$x - \lambda.1$ es inversible en B, por definición.

$x - \lambda.1$ es inversible en B.

$\Longrightarrow \Gamma(x - \lambda.1)$ es inversible en $C(M)$, por proposición 5.8

$\Longrightarrow \Gamma(x) - \Gamma(\lambda.1)$ es inversible en $C(M)$, por ser Γ un homomorfismo de álgebra

$\Longrightarrow \Gamma(x) - \lambda.\Gamma(1)$ es inversible en $C(M)$, por ser Γ homomorfismo de álgebra.

$\Longrightarrow \Gamma(x) - \lambda.1$ es inversible en $C(M)$, por lema 5.10.

$\Rightarrow (\Gamma(x) - \lambda.1)(\phi) \neq 0$, $\forall\ \phi$ en M, se da para todo ϕ por lema 5.11.

$\Rightarrow \Gamma(x)(\phi) - \lambda.1(\phi) \neq 0$, para todo ϕ en M

$\Rightarrow \Gamma(x)(\phi) - \lambda.1 \neq 0$, para todo ϕ en M

$\Rightarrow \Gamma(x)(\phi) \neq \lambda.1$, para todo ϕ en M

$\Rightarrow \Gamma(x)(\phi) \neq \lambda$, para todo ϕ en M

$\Rightarrow \lambda \notin$ rango $\gamma(x)$

Luego rango $\Gamma(x) \subset Sp(x)$

Por tanto $Sp(x) =$ rango $\Gamma(x)$

PRUEBA para b)

Sea

$$\Gamma : B \longrightarrow C(M)$$

$$x \rightsquigarrow \Gamma(x) : M \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\phi \rightsquigarrow \Gamma(x)(\phi) = \phi(x)$$

$\gamma(x) = \text{Sup}\ \{|\lambda| / \lambda \in Sp(x)\}$

$\|\Gamma(x)\|_\infty = \text{Sup}\ \{|\Gamma(x)(\phi)| / \phi \in M\}$

$\gamma(x) = \text{Sup}\ \{|\lambda| / \lambda \in Sp(x)\}$

$$\gamma(x) = \text{Sup } \{|\lambda| / \lambda \; \varepsilon \text{ rango } \; \Gamma(x)\}$$

$$= \text{Sup } \{|\lambda| / \lambda = \Gamma(x)(\phi), \text{ para algún } \phi \text{ en } M\}$$

$$= \text{Sup } \{|\lambda| / \lambda = \phi(x), \text{ paga algún } \phi \text{ en } M\}$$

$$= \text{Sup } \{|\phi(x)| / \phi \; \varepsilon \; M\}$$

$$= \text{Sup } \{|\Gamma(x)(\phi)| / \phi \; \varepsilon \; M\}$$

$$= \| \Gamma(x) \|_\infty$$

Por tanto $\gamma(x) = \| \Gamma(x) \|_\infty$

5.13 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach; x y $(x - \lambda.1)$ en B entonces $x \wedge (x - \lambda.1)$ conmutan.

PRUEBA.

Probemos que $(x - \lambda.1)x = x(x - \lambda.1)$

$$(x - \lambda.1)x = x.x - (\lambda.1)x$$

$$= x.x - \lambda(1.x), \text{ asociando}$$

$$= xx - \lambda\,(x.1), \text{ ya que } x.1 = 1.x$$

$$= xx - x(\lambda.1), \text{ ya que } \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

$$= x\,(x - \lambda.1)$$

Por tanto $x \wedge (x - \lambda.1)$ conmutan.

5.14 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach, x en B y ϕ una función entera con coeficientes en $\mathbb{C}$ tal que

$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge a un elemento de B, entonces x y $(\phi(x) - \mu.1)$ conmutan.

PRUEBA.

Probemos que $(\phi(x) - \mu.1)x = x(\phi(x) - \mu.1)$

$$(\phi(x) - \mu.1)x = [\phi(x)]x - (\mu.1)x$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] x - \mu(x.1), \text{ sustituyendo y asociando}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n).x - \mu(x.1), \text{ ya que } x.1 = 1x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n x) - x(\mu.1), \text{ asociando y } \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^{n+1}) - x(\mu.1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^{1+n}) - x(\mu.1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x\ x^n) - x(\mu.1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(a_n x^n) - x\ (\mu.1)$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n - x(\mu.1)$$

$$= x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n - \mu.1\right]$$

$$= x\ (\phi(x) - \mu.1)$$

Por tanto $x \wedge (\phi(x) - \mu.1)$ conmutan.

5.15 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach, x en B y ϕ una función entera con coeficientes en $\mathbb{C}$; entonces $(x - \lambda.1)$ y $(\phi(x) - \mu.1)$ conmutan.

PRUEBA.

Probemos que $(x - \lambda.1)\ (\phi(x) - \mu.1) = (\phi(x) - \mu.1)(x - \lambda.1)$

$(x-\lambda.1)(\phi(x) - \mu.1) = x(\phi(x) - \mu.1) - (\lambda.1)(\phi(x) - \mu.1)$ Distribu- yendo.

$= (\phi(x)-\mu.1)x - \lambda[1(\phi(x)-\mu.1)]$ Por lema 5.14 y asociando.

$= (\phi(x)-\mu.1)x - \lambda[(\phi(x)-\mu.1).1]$, ya que 1 es la identidad.

$= (\phi(x)-\mu.1)x-(\phi(x)-\mu.1)(\lambda.1)$, ya que $\lambda(xy)=(\lambda x)y = x(\lambda y)$

$= (\phi(x)-\mu.1)\ (x - \lambda.1)$

Por tanto $(x-\lambda.1)$ ^ $(\phi(x)-\mu.1)$ conmutan.

5.16 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach, x en B y ϕ una función entera con coeficientes en $\mathbb{C}$; entonces $(x - \lambda.1)$ y $(\phi(x) - \mu.1)^{-1}$ conmutan.

PRUEBA.

Debemos mostrar que:

$(x-\lambda.1)(\phi(x)-\mu.1)^{-1} = (\phi(x)-\mu.1)^{-1}\ (x-\lambda.1).$

$(x-\lambda.1) = (x-\lambda.1)$

$\Rightarrow (x - \lambda.1) = (x - \lambda.1).1$

$\Rightarrow (x - \lambda.1) = (x - \lambda.1)\ (\phi(x) - \mu.1)\ (\phi(x) - \mu.1)^{-1}$

$\Rightarrow (x - \lambda.1) = (\phi(x) - \mu.1)(x-\lambda.1)(\phi(x) - \mu.1)^{-1}$, por lema 5.15

$\Rightarrow 1.(x - \lambda.1) = (\phi(x) - \mu.1)\ (x - \lambda.1)\ (\phi(x) - \mu.1)^{-1}$

$\Rightarrow (\phi(x)-\mu.1)(\phi(x)-\mu.1)^{-1}(x-\lambda.1)=(\phi(x)-\mu.1)(x-\lambda.1)(\phi(x)-\mu.1)^{-1}$

$\Rightarrow (\phi(x)-\mu.1)^{-1}\ (x-\lambda.1) = (x-\lambda.1)(\phi(x)-\mu.1)^{-1}$

Por tanto $(x-\lambda.1)$ y $(\phi(x)-\mu.1)^{-1}$ conmutan.

5.17 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach, $\Gamma : B \to C(M)$ la transformada de Gelfand y ϕ una función entera con coeficientes en $\mathbb{C}$ tal que $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge a un elemento de B entonces

$$\Gamma(\phi(x)) = \phi(\Gamma(x))$$

PRUEBA.

$$\Gamma(\phi(x)) = \Gamma\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$$, ya que ϕ es una función entera

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(a_n x^n)$$, ya que Γ es continua

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(x^n)$$, ya que Γ es un homomorfismo de álgebra

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(x)^n$$, por ser Γ un homomorfismo de álgebra.

$$= \phi(\Gamma(x))$$

Por tanto $\Gamma(\phi(x)) = \phi(\Gamma(x))$

5.18 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach, $\Gamma : B \to C(M)$ la transformada de Gelfand y ϕ una función entera con coeficiente en $\mathbb{C}$; entonces rango $\phi(\Gamma(x)) = \phi(\text{rango } \Gamma(x))$.

PRUEBA.

"$\subset$" rango $\phi(\Gamma(x)) \subset \phi(\text{rango } \Gamma(x))$

$$z \in \text{rango } \phi(\Gamma(x)) \Rightarrow z = \phi(\Gamma(x))(h)$$

$$\Rightarrow z = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\Gamma(x))^n\right)(h)$$

$$\Rightarrow z = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n (\Gamma(x))^n\right](h)$$

$$\Rightarrow z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ (\Gamma(x))^n \ (h)$$

$$\Rightarrow z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ (\Gamma(x)(h))^n$$

$$\Rightarrow z = \phi(\Gamma(x)(h))$$

$$\Rightarrow z \in \phi \ (\text{rango } \Gamma(x))$$

"$\supset$" $\phi(\text{rango } \Gamma(x)) \subset \text{rango } \phi(\Gamma(x))$

$$z \in \phi(\text{rango } \Gamma(x)) \Rightarrow z = \phi(\Gamma(x)(h))$$

$$\Rightarrow z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ (\Gamma(x)(h))^n$$

$$\Rightarrow z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n[(\Gamma(x))^n](h)$$

$$\Rightarrow z = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(\Gamma(x))^n](h)$$

$$\Rightarrow z = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\Gamma(x))^n\right)(h)$$

$$\Rightarrow z = \phi(\Gamma(x))\ (h)$$

$$\Rightarrow z \in \text{rango } \phi(\Gamma(x))$$

Por tanto rango $\phi(\Gamma(x)) = \phi(\text{rango } \Gamma(x))$

5.19 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach, x en B, ϕ una función entera con coeficientes en $\mathbb{C}$ entonces la subálgebra B_0 de B generada por $1, x, (x - \lambda.1)^{-1}$ y $(\phi(x) - \mu.1)^{-1}$ es conmutativa.

PRUEBA.

Sean $1, x, (x - \lambda.1)^{-1}$ y $(\phi(x) - \mu.1)^{-1}$ elementos de B.

Como B_o es la subálgebra de B generada por dichos elementos, bastará probar que ellos conmutan entre sí.

Probemos que 1 conmuta con $x,(x-\lambda.1)^{-1}, (\phi(x)-\mu.1)^{-1}$

i) $1x = x = x.1 \Rightarrow 1.x = x.1$

ii) $1.(x-\lambda.1)^{-1} = (x-\lambda.1)^{-1} = (x-\lambda.1)^{-1}.1$

$\Rightarrow 1(x-\lambda.1)^{-1} = (x-\lambda.1)^{-1}.1$

iii) $x.(\phi(x)-\mu.1)^{-1} = (\phi(x)-\mu.1)^{-1} = (\phi(x)-\mu.1)^{-1}.1$

$\Rightarrow 1(\phi(x)-\mu.1)^{-1} = (\phi(x)-\mu.1)^{-1}.1$

x conmuta con $1,(x-\lambda.1)^{-1}, (\phi(x)-\mu.1)^{-1}$

i) $x.1 = 1.x$

ii) "$x(x-\lambda.1)^{-1} = (x-\lambda.1)^{-1}x$"

$x=x \Rightarrow x = x.1$

$\Rightarrow x = x(x-\lambda.1)(x-\lambda.1)^{-1}$

$\Rightarrow x = (x-\lambda.1)x(x-\lambda.1)^{-1}$, por lema 5.13

$\Rightarrow 1.x = (x-\lambda.1)x(x-\lambda.1)^{-1}$

$\Rightarrow (x-\lambda.1)(x-\lambda.1)^{-1}x = (x-\lambda.1)x(x-\lambda.1)^{-1}$

$\Rightarrow (x-\lambda.1)^{-1}x = x(x-\lambda.1)^{-1}$

iii) "$x(\phi(x) - \mu.1)^{-1} = (\phi(x) - \mu.1)^{-1}.x$"

$x = x \Rightarrow x = x.1$

$\Rightarrow x = x\ (\phi(x)-\mu.1)(\phi(x)-\mu.1)^{-1}$

$\Rightarrow x = (\phi(x)-\mu.1)x\ (\phi(x)-\mu.1)^{-1}$, por lema 5.14

$\Rightarrow 1.x = (\phi(x)-\mu.1)x\ (\phi(x)-\mu.1)^{-1}$

$\Rightarrow (\phi(x)-\mu.1)(\phi(x)-\mu.1)^{-1}x = (\phi(x)-\mu.1)x(\phi(x)-\mu.1)^{-1}$

$\Rightarrow (\phi(x)-\mu.1)^{-1}x = x(\phi(x)-\mu.1)^{-1}$.

$(x-\lambda.1)^{-1}$ conmuta con $1, x, (\phi(x) - \mu.1)^{-1}$

i) $(x - \lambda.1)^{-1}.1 = 1.(x - \lambda.1)^{-1}$

ii) $(x - \lambda.1)^{-1}.x = x(x - \lambda.1)^{-1}$

iii) "$(x-\lambda.1)^{-1}\ (\phi(x)-\mu.1)^{-1} = (\phi(x)-\mu.1)^{-1}\ (x-\lambda.1)^{-1}$"

$[\phi(x) - \mu.1)]^{-1} = [\phi(x) - \mu.1]^{-1}$

$\Rightarrow [\phi(x) - \mu.1]^{-1} = [\phi(x) - \mu.1]^{-1}.1$

$\Rightarrow [\phi(x) - \mu.1]^{-1} = [\phi(x) - \mu.1]^{-1}\ (x-\lambda.1)\ (x-\lambda.1)^{-1}$

$\Rightarrow [\phi(x)-\mu.1]^{-1} = (x-\lambda.1)[\phi(x)-\mu.1]^{-1}(x-\lambda.1)^{-1}$, por lema 5.16

$\Rightarrow 1.[\phi(x)-\mu.1]^{-1} = (x-\lambda.1)[\phi(x)-\mu.1]^{-1}\ (x-\lambda.1)^{-1}$

$$\Rightarrow (x-\lambda.1)(x-\lambda.1)^{-1}[\phi(x)-\mu.1]^{-1}=(x-\lambda.1)[\phi(x)-\mu.1]^{-1}(x-\lambda.1)^{-1}$$

$$\Rightarrow (x-\lambda.1)^{-1}[\phi(x)-\mu.1]^{-1} = [\phi(x)-\mu.1]^{-1}(x-\lambda.1)^{-1}$$

Por tanto B_0 es conmutativa.

5.20 COROLARIO.

Si B es una álgebra de Banach, x en B y ϕ es una función entera con coeficientes en $\mathbb{C}$, entonces

$$Sp(\phi(x)) = \phi(Sp(x)) = \{\phi(\lambda)/\lambda \in Sp(x)\}$$

PRUEBA.

Si $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es la serie de Taylor expandida para ϕ, entonces $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ puede verse que converge a un elemento de B.

Si B_0 es la subálgebra de B generada por $1, x$, y los elementos de la forma $(x-\lambda.1)^{-1}$ para λ en $\rho(x)$ y $(\phi(x) - \mu,1)^{-1}$ para μ en $\rho(\phi(x))$ entonces B_0 es conmutativa, por lema 5.19, además, $Sp_B(x) = Sp_{B_0}(x)$ y $Sp_B(\phi(x)) = Sp_{B_0}(\phi(x))$

"$Sp_B(x) = Sp_{B_0}(x)$"

$Sp_B(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} / x - \lambda.1$ no es inversible en $B\}$

$Sp_{Bo}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} / x - \lambda.1$ no es inversible en $B_o\}$

"$\subset$" $Sp_B(x) \subset Sp_{Bo}(x)$

$\lambda \in Sp_B(x) \Rightarrow x - \lambda.1$ no es inversible en B

Como $Bo \subset B$ entonces $x - \lambda.1$ no es inversible en B_o

$\Rightarrow \lambda \in Sp_{Bo}(x)$, luego $Sp_B(x) \subset Sp_{Bo}(x)$.

"$\supset$" $Sp_{Bo}(x) \subset Sp_B(x)$

supongamos que $\lambda \notin Sp_B(x)$.

$\lambda \notin Sp_B(x) \Rightarrow \lambda \in \rho_B(x)$

$\Rightarrow x - \lambda.1$ es inversible en B

$\Rightarrow (x - \lambda.1)^{-1}$ existe y está en B_o

$\Rightarrow (x - \lambda.1)$ es inversible en B_o

$\Rightarrow \lambda \in \rho_{Bo}(x)$

$\Rightarrow \lambda \notin Sp_{Bo}(x)$

Luego $Sp_{Bo}(x) \subset Sp_B(x)$

Por tanto $Sp_B(x) = Sp_{Bo}(x)$

Ahora probemos que $Sp_B(\phi(x)) = Sp_{Bo}(\phi(x))$

como ya probamos que $Sp_B(x) = Sp_{Bo}(x)$ con x en B

entonces $Sp_B(\phi(x)) = Sp_{Bo}(\phi(x))$ con $\phi(x)$ en B.

Ahora, podemos asumir que B es conmutativa y usar la transformada de Gelfand para probar que

$$Sp(\phi(x)) = \phi(sp(x))$$

$Sp(\phi(x))$ = rango $\Gamma(\phi(x))$, por corolario 5.12

= rango $\phi(\Gamma(x))$, por lema 5.17

= ϕ (rango $\Gamma(x)$), por lema 5.18

= $\phi(Sp(x))$

Antes de pasar a definir el concepto de radical de una álgebra, probaremos otros resultados que posteriormente nos servirán en la justificación de algunas proposiciones.

5.21 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach conmutativa, a un elemento de B, si J es un ideal maximal de B tal que $a \notin J$ y si $L = \{ z/z = x - ya , x \in J, y \in B\}$ entonces $L=B$.

PRUEBA.

Para probar que $L=B$ se tiene que verificar:

1) L es un ideal de B.

2) $J \subset L$.

3) $J \neq L$.

Para 1).

i) $L \neq \phi$, porque existe $0 \in L$ tal que $0 = 0 - 0.a$

ii) "Sea $m,n \in L$; probemos que $M+n \in L$"

$m \in L \Rightarrow m = x-ya$; $x \in J$, $y \in B$.

$n \in L \Rightarrow n = s-ra$; $s \in J$, $r \in B$.

$\Rightarrow m+n = x+s - (y+r)a$; con $x+s \in J$, $y+r \in B$

iii) "Sea $m \in L$, $\alpha \in \mathbb{C}$; probemos que $\alpha m \in L$"

$m \in L \Rightarrow m = x-ya$; $x \in J$, $y \in B$

$\Rightarrow \alpha m = \alpha x - \alpha ya$; $\alpha x \in J$, $\alpha y \in B$.

$\Rightarrow \alpha m \in L$.

iv) "Sea $z \in L$, $r \in B$; probemos que rz , $zr \in L$"

$z \in L \Rightarrow z = x-ya$; $x \in J$, $y \in B$.

$\Rightarrow rz = rx - rya$; $rx \in J$, $ry \in B$

$\Rightarrow rz \in L$.

Por otro lado sea $z \in L$

$z \in L \Rightarrow z = x - ya$; $x \in J$, $y \in B$

$\Rightarrow zr = (x-ya)r \Rightarrow zr = xr - yar$, como B es conmutativa $ar = ra$

$\Rightarrow zr = xr - yra$; $xr \in J$, $yr \in B$.

$\Rightarrow zr \in L$

Con lo que se concluye que L es ideal de B.

Para 2).

Sea $n \in J$,

$n \in J \Rightarrow n = n - 0.a$; $0 \in B$

$\Rightarrow n \in L \Rightarrow J \subset L$.

Para 3).

Hemos probado que $J \subset L$; para que $L \neq J$, es necesario exhibir un elemento que pertenece a L, tal que éste no pertenezca a J.

$a \notin J$; pero $a = 0 - (-1)a$; $0 \in J$, $-1 \in B$
entonces $a \in L$, con lo que se concluye que
$L \neq J$.

Luego de 1), 2) y 3) $L = B$.

5.22 LEMA.

Sea B una álgebra de Banach, J un ideal de B, si $1 \in J$ entonces J no es un ideal propio de B.

PRUEBA.

La prueba consiste en mostrar que $J = B$.

Tenemos que $J \subset B$, ya que J es un ideal de B.

Solo probaremos que $B \subset J$.

Sea $x \in B$; como J es un ideal de B y $1 \in J$ entonces $x = 1.x \in J$, por tanto $x \in J$.

Así $B \subset J$, con lo que se concluye que $J = B$, de donde resulta que J no es un ideal propio de B.

5.23 LEMA.

Sea A un anillo unitario y conmutativo, $a \in A$, si $a \neq 0$ y no inversible entonces existe un ideal propio I de A, tal que $a \in I$.

PRUEBA.

Sea $I = \{z \in A / z = ay \ , \ y \in A\}$;

Probemos que I es un ideal propio.

i) $I \neq \phi$ ya que existe $0 \in I$ tal que

$0 = a.0 \quad 0 \in A.$

ii) Sean $m,n \in I$; probemos $m+n \in I$

$m \in I \Rightarrow m = ay \ , \ y \in A$

$n \in I \Rightarrow n = ax \ , \ x \in A$

$\Rightarrow m+n = ay + ax$

$\Rightarrow m+n = a(y+x) \ , \ y + x \in A$

$\Rightarrow m+n \in I.$

iii) Sean $\alpha \in \mathbb{C}$, $m \in I$; probemos que $\alpha m \in I$

$m \in I \Rightarrow m = ax \qquad x \in I$

$\Rightarrow \alpha m = \alpha a x$

$\Rightarrow \alpha m = a(\alpha x) \quad \alpha \in I$

$\Rightarrow \quad \alpha m \in I.$

iv) Sean $m \in I$; $r \in A$ probemos que $rm, mr \in A$

$m \in I \Rightarrow m = ay \ , \ y \in A$

$rm = ray$ pero como A es conmutativa $ra=ar$

$rm = a(ry)$ $ry \in A$

$\Rightarrow rm \in I$

Por otro lado:

$m \in I \Rightarrow m = ay \quad , y \in A.$

$mr = ayr$

$mr = ary \quad ry \in A$

$\Rightarrow mr \in I$.

v) Probemos que $1 \notin I$.

Supongamos $1 \in I$

$1 \in I \Rightarrow 1 = ay$, $y \in I$

$\Rightarrow$ a es inversible

lo cual es una contradicción, por tanto $1 \notin I$ y así I es un ideal propio de A.

5.24 DEFINICION.

Sea B una álgebra de Banach y G el grupo de elementos inversibles en B; el radical de B, denotado por R se define como el conjunto:

$R = \{x \in B/1 + ax \in G, \forall a \in B\}$.

5.25 DEFINICION.

El álgebra B, se dice que es semisimple si $R = \{0\}$.

5.26 PROPOSICION.

Sea B un álgebra de Banach conmutativa, G el grupo de elementos inversibles en B, R el radical de B; entonces R es la intersección de los ideales maximales en B.

PRUEBA.

Sea $R = \{x \in B/1 + zx \in G \ , \forall z \in B\}$, queremos mostrar que $R = \bigcap\limits_{J \text{ ideal maximal en } B} J$

"$\subset$"

Sea $a \in R$ y J un ideal maximal de B; entonces se probará que $a \in J$.

Supongamos que $a \notin J$ y sea $L = \{z/z = x-ya, x \in J, \ y \in B\}$.

Entonces $L = B$, lo cual se verifica por lema 5.21.

Además como $L = B$ en particular $1 \in B$; también 1 pertenece a L, es decir, $1 \in L$; entonces

$1 = x - ya$, $x \in J$, $y \in B$, luego

$x = 1 + ya$, como $a \in R$ entonces $1 + ya$ es inversible, es decir, que x es inversible, en otras palabras, existe $r \in B$ tal que $rx = xr = 1$, como $x \in J$, entonces $xr \in J$, es decir, $1 \in J$, lo cual no puede ser, ya que por ser J ideal maximal, es un ideal propio de B (es decir, $1 \notin J$, por lema 5.22).

Así $a \in J$, y por tanto $R \subset \bigcap_{J \text{ maximal}} J$

"$\supset$"

Sea $x \in \bigcap_{J \text{ ideal maximal en } B} J$.

entonces $x \in J$, para todo J ideal maximal.

Supongamos que:

$x \notin R$; entonces $1 + ax$ no es inversible para algún $a \in B$, es decir, $(1+ax)^{-1}$ no existe para algún $a \in B$

entonces

$z = 1 + ax$ pertenece a algún ideal maximal J, por lema 5.23 lo cual implica que: $1 = z - ax$;

luego como $z \in J$, J es un ideal y $x \in J$ entonces $ax \in J$ de donde

$$1 = z - ax \in J$$

lo cual no puede ser, ya que J por ser ideal maximal es propio, es decir $1 \notin J$, y por tanto $x \in R$, y así

$$\bigcap_{J \text{ ideal maximal en } B} J \subset R$$

Por consiguiente $R = \bigcap_{J \text{ ideal maximal en } B} J$.

5.27 COROLARIO.

Sea B una álgebra de Banach conmutativa, R el radical de B, entonces R es un ideal cerrado en B.

PRUEBA.

La prueba consiste en:

1) R es un ideal.

2) R es cerrado.

Para 1).

Como en la proposición 5.26 se mostró que

$$R = \bigcap_{J \text{ ideal maximal en } B} J$$

; entonces R es un ideal, ya que en general la intersección de ideales es un ideal.

Para 2).

Ya que

$$R = \bigcap_{J \text{ ideal maximal en } B.} J$$

Como todo ideal maximal J es un ideal cerrado y la intersección de una familia cualquiera de cerrados es un conjunto cerrado, se sigue que R es cerrado.

Por tanto R es un ideal cerrado.

5.28 PROPOSICION.

Si B es una álgebra de Banach conmutativa, entonces B es semisimple si y sólo si la Transformada de Gelfand es inyectiva.

PRUEBA.

"=>"

Sabemos que Γ es lineal,

Supongamos que Γ no es inyectiva y probemos que $R \neq \{0\}$

Sea $x \neq 0$ tal que $x \in \mathrm{Ker}\Gamma$, vamos a probar que $x \in R$.

Sea J un ideal maximal de B; existe $\phi \in M$ tal que $\mathrm{Ker}\phi = J$,

$$x \in \mathrm{Ker}\Gamma \Rightarrow \Gamma(x) = 0 \Rightarrow \Gamma(x)(\phi) = 0 \Rightarrow \phi(x) = 0$$

$\Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\phi \Rightarrow x \in J$; pero $R = \bigcap\limits_{J \text{ ideal maximal}} J$;

de donde $x \in R$.

Y por tanto $R \neq \{0\}$, con lo que se concluye que Γ es inyectiva.

"<="

Sea $x \in R$; la prueba consistirá en demostrar que $x = 0$.

Sabemos que $R = \bigcap\limits_{J \text{ ideal maximal en } B} J$.

Sea ϕ en M, entonces por el lema 4.20 Kerϕ es un ideal maximal; además

$$x \in R \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\phi \Rightarrow \phi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma(x)(\phi) = \phi(x) = 0 \Rightarrow \Gamma(x)(\phi) = 0 \Rightarrow \Gamma(x) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\Gamma$$

Pero como Γ es inyectiva, KerΓ = {0}.

Por tanto $x = 0$, lo que implica que $R = \{0\}$.

Y por consiguiente B es semisimple.

CAPITULO VI

TEOREMA DE STONE - WEIERSTRASS.

6.1 DEFINICION.

Sea B una álgebra de Banach, $A \subset B$; se dice que A es una subálgebra de B si y sólo si

a) $A \neq \phi$

b) Si x, z pertenecen a A, entonces $x+z$ y xz pertenecen a A.

c) Si α pertenece a $\mathbb{C}$ y x pertenece a A, entonces αx pertenece a A.

6.2 DEFINICION.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff; un subconjunto H de $C(X)$ se dice que es autoadjunto, si cuando f pertenece a H entonces $\overline{f}$ está en H.

Donde $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$ como en definición 3.9.

6.3 DEFINICION.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff, S una álgebra de $C(X)$; se dice que S separa los puntos de X, si existe para cada par de puntos w_1, w_2 de X un elemento f de S tal que $f(w_1) \neq f(w_2)$.

6.4 DEFINICION.

Para X un espacio compacto de Hausdorff, $C_r(X)$ denotará el álgebra real de funciones continuas sobre X. Además en lo que sigue del presente capítulo U será una subálgebra cerrada autoadjunta de $C(X)$, la cual separa los puntos de X y contiene la función constante uno; así como también Ur denotará el conjunto de funciones reales en U, es decir,

$C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} / f \text{ es continua}\}$.

$Cr(X) = \{f \in C(X) / f(y) \in \mathbb{R} , y \in X\}$.

$Ur = \{f \in U / f(y) \in \mathbb{R} , y \in X\}$.

6.5 DEFINICION.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff; para f_1, f_2 en $C(X)$ y α un número complejo, definamos:

i) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

ii) $(f_1\ f_2)(x) = f_1(x).f_2(x)$.

iii) $(\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x)$

iv) $\alpha(x) = \alpha$

v) $(\alpha + f_1)(x) = \alpha + f_1(x)$.

Los siguientes resultados serán de mucha utilidad cuando estudiemos el teorema de Stone-Weierstrass.

6.6 LEMA.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff, Ur el conjunto de funciones reales en U; entonces la función constante 1 pertenece a Ur.

PRUEBA.

Sea $1 : x \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \rightsquigarrow 1(x) = 1$; pero $1 \in \mathbb{R}$, por tanto

1 pertenece a Ur.

6.7 PROPOSICION.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff, si Ur denota el conjunto de funciones reales en U, entonces Ur es una subálgebra cerrada de $Cr(X)$.

PRUEBA.

i) $Ur \neq \phi$, ya que la función constante 1 le pertenece, por lema 6.6.

ii) "Sea $f,g \in Ur$, probemos que $f+g \in Ur$".

$f \in Ur \Rightarrow f(X) \subset \mathbb{R}$

$g \in Ur \Rightarrow g(X) \subset \mathbb{R}$

Necesitamos mostrar que $(f+g)(X) \subset \mathbb{R}$, para esto sea

$A = (f+g)(X) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, z = (f+g)(x)$, para algún x en $X\}$.

Probemos nada más que $A \subset \mathbb{R}$.

$m \in A \Rightarrow m = (f+g)(x)$, para algún x en X.

$\Rightarrow m = f(x) + g(x)$; $f(x), g(x)$ en $\mathbb{R}$

$\Rightarrow m \in \mathbb{R} \Rightarrow A \subset \mathbb{R}$. Por tanto $f+g \in Ur$.

iii) "Sea $f, g \in Ur$; probemos que $fg \in Ur$".

Necesitamos mostrar que $(fg)(X) \subset \mathbb{R}$, entonces sea

$$A = (fg)(X) = \{z \in \mathbb{C} / z = (fg)(x) \text{, para algún } x \text{ en } X\}.$$

$$p \in A \Rightarrow p = (fg)(x) \text{ , para algún } x \text{ en } X$$

$$\Rightarrow p = f(x)\, g(x)$$

$$\Rightarrow p \in \mathbb{R} \Rightarrow A \subset \mathbb{R} \text{, por tanto } fg \in Ur.$$

iv) "Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in Ur$; probemos $\alpha f \in Ur$".

Sea $A = (\alpha f)(X) = \{z \in \mathbb{C} / z = (\alpha f)(x)$, para algún x en $X\}$.

Probemos que $A \subset \mathbb{R}$

$$r \in A \Rightarrow r = (\alpha f)(x) \text{ , para algún } x \text{ en } X.$$

$$\Rightarrow r = \alpha f(x) \Rightarrow r \in \mathbb{R} \Rightarrow M \subset \mathbb{R}$$

y por tanto $\alpha f \in Ur$.

Luego de i), ii), iii), iv) Ur es una subálgebra de $Cr(X)$.

Por último mostremos que Ur es cerrada, es decir, $Ur = \overline{U}r$.

Bastará mostrar que $\overline{Ur} \subset Ur$.

Sea $f \in \overline{Ur}$; entonces existe una sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ en Ur tal que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, es decir, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para x en X.

Deseamos mostrar que $f(x) \in \mathbb{R}$.

Como $(f_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en Ur, entonces para x en X y para todo $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \in \mathbb{R}$, lo que implica que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ ya que $\mathbb{R}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{C}$; por tanto $f(x) \in \mathbb{R}$ y así $f \in Ur$, con lo que se concluye que Ur es cerrada.

6.8 COROLARIO.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff; entonces la función constante definida por $\beta(x) = \beta$, pertenece a Ur, para todo β en $\mathbb{C}$.

PRUEBA.

Sea $\beta : X \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \rightsquigarrow \beta(x) = \beta.$

Como por proposición 6.7 Ur es una subálgebra de Cr(X) y por lema 6.6 1 pertenece a Ur, la prueba con sistirá en mostrar que $\beta.1 = \beta$.

$(\beta.1)(x) = \beta(1(x)) = \beta.1 = \beta = \beta(x)$

Por tanto $\beta.1 = \beta$ y así $\beta \in Ur$.

6.9 PROPOSICION.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff; para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_n = (-1)^n \binom{1/2}{n} = \dfrac{(-1)^n m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}$, con $m = \frac{1}{2}$, entonces

1) La serie binomial para la función $\phi(t) = (1-t)^{1/2}$ es $\sum\limits_{n=0}^{\alpha} \alpha_n t^n$

2) La sucesión $\left\{\sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n t^n\right\}_{N\geq 1}$ converge uniformemente a ϕ en el intervalo $[0,1-\delta]$ para $\delta > 0$.

PRUEBA 1.

En general $(1-t)^p = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{n!} (-t)^n$, $p \in \mathbb{R}$

si $p = \frac{1}{2}$

$$\phi(t) = (1-t)^{1/2} = 1 - \frac{\frac{1}{2}t}{1!} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)t^2}{2!} - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)t^3}{3!} + - \ldots$$

$$+ - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\, t^n$$

Si $\alpha_n = \dfrac{(-1)^n\, \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}$ entonces

$$\alpha_n = (-1)^n \binom{1/2}{n}$$

Luego $\phi(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n$

PRUEBA 2.

Sea $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n \binom{1/2}{n} t^n$ la enésima suma parcial de $\phi(t)$.

Utilizando el criterio de la razón para la convergencia de series tenemos:

$$\frac{|\alpha_{n+1} \quad t^{n+1}|}{|\alpha_n \quad t^n|} = \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha - (n+1) + 1\ t^{n+1}}{(n+1)\ !}\right|}{\left|\frac{(-1)^n\alpha(\alpha-1)\ (\alpha-2)\ldots(\alpha- n+1)\ t^n}{n!}\right|}\ ,\ \alpha = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{|n!(-1)^n(-1)\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)t^n\ t|}{|(n+1)\ n!\ (-1)^n\ \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))t^n|}$$

$$= \frac{|(-1)\ (\alpha-n)\ t\ |}{|n+1|}$$

$$= \frac{|-1||\alpha-n||t|}{n+1}$$

$$= \frac{|\alpha-n|}{n+1}\ |t|$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_{n+1}t^{n+1}|}{|\alpha_n\ t^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n|}{n+1}\ |t| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{\alpha}{n}\ -1|}{1+\frac{1}{n}}\ |t|$$

$$= \frac{|-1|}{1}\ |t| \ = \ |t| < 1$$

Entonces $\left\{\sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^n\right\}_{N\geq 1}$ converge absolutamente en el intervalo $-1 < t < 1$; pero si converge absolutamente, converge puntualmente en ese mismo intervalo y utilizando el criterio de Weierstrass el cual dice que "Dada una serie de funciones ΣUn que converge puntualmente hacia una función f en un conjunto A, si existe una serie numérica convergente de términos positivos ΣM_n tal que $0 < |Un(x)| \leq Mn$, para todo $n \geq 1$ y todo x de A, entonces la serie ΣU_n converge uniformemente en A",

se tiene que $\left\{ \sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^n \right\}_{N \geq 1}$ converge puntualmente a

ϕ en $-1 < t < 1$,

Como la convergencia uniforme en un intervalo S se da para todo t de S y $[0, 1-\delta] \subset]-1,1[$ entonces $\left\{ \sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^n \right\}_{N \geq 1}$ converge uniformemente sobre el intervalo cerrado $[0,1-\delta]$, para $\delta > 0$.

6.10 LEMA.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff,
$g_\delta = \delta + (1 - \delta)f^2$ y sean los conjuntos

$$A = \left\{ \left| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n (1-g_\delta(x))^n - \phi(1-g_\delta(x)) \right| / x \in X \right\},$$

$$B = \left\{ \left| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^n - \phi(t) \right| / t \in |0,1-\delta| \right\}, \text{ con } \alpha_n = (-1)^n \binom{1/2}{n};$$

entonces Sup A $\leq$ Sup B, para f en Ur, $\|f\|_\infty \leq 1$ y $\delta \in]0,1]$

PRUEBA.

Observemos que $0 \leq 1 - g_\delta \leq 1 - \delta$. Bastará que $A \subset B$.

$p \in A \Rightarrow p = \left| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n (1-g_\delta(x))^n - \phi(1-g_\delta(x)) \right|$, para algún $x = x_o$ en X.

Como $1 - g_\delta \in [0,1-\delta]$ entonces $1 - g_\delta(x) \in [0,1-\delta]$, x en X lo cual se da ya que

$$1 - g_\delta \in [0,1-\delta] \Rightarrow 0 \leq 1 - g_\delta \leq 1 - \delta$$

$$\Rightarrow 0(x) \leq (1 - g_\delta)(x) \leq (1-\delta)(x), \text{ para todo x en X}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1(x) - g_\delta(x) \leq 1 - \delta$$

$$\Rightarrow 1 - g_\delta(x) \in [0, 1 - \delta]$$

Si hacemos $t = 1 - g_\delta(x)$, para $x=x_0$ en X, entonces

$$p = \left| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^n - \phi(t) \right| , \quad \text{para algún } t \text{ en } [0,1-\delta]$$

Por tanto $p \in B$ y así $A \subset B$, luego Sup $A <$ Sup B.

6.11 DEFINICION.

Sea f una función de X a $\mathbb{C}$; definimos $|f|$ como la función de X a $\mathbb{C}$, tal que $|f|(x) = |f(x)|$, para todo x en X.

6.12 PROPOSICION.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff; f una función en Ur, $\|f\|_\infty \leq 1$, $g_\delta = \delta + (1-\delta)f^2$ para δ en $|0,1|$ y si la serie binomial para la función $\phi(t) = (1-t)^{1/2}$ es $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n$, con $\alpha_n = (-1)^n \binom{1/2}{n}$, entonces:

1) $h_N = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n (1-g_\delta)^n$ pertenece a Ur, para $\delta > 0$ fijo

2) $\lim_{N\to\infty} \| h_N - (g_\delta)^{1/2} \|_\infty = 0$

3) $\lim_{\delta\to 0} \| \, |f| - (g_\delta)^{1/2} \|_\infty = 0$

PRUEBA 1)

Por corolario 6.8, $\delta \in Ur$, entonces $(1-\delta)f^2 \in Ur$, ya que $f \in Ur$, de donde $g_\delta = \delta + (1-\delta)f^2 \in Ur$; luego $1 - g_\delta \in Ur$, lo que implica que $(1-g_\delta)^n \in Ur$ y también $\alpha_n(1-g_\delta)^n \in Ur$, para todo $n \in N$.

Y por tanto $h_N = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(1-g_\delta)^n$ pertenece a Ur.

PRUEBA 2)

Sabemos que:

$$\| h_N - (g_\delta)^{1/2} \|_\infty = \sup_{x \in X} \left| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n (1-g_\delta(x))^n - \phi(1-g_\delta(x)) \right|$$

ya que $(g_\delta(x))^{1/2} = \phi(1-g_\delta(x))$

Si $t = (1-g_\delta(x))$ para algún x en X, entonces

$$\| h_N - (g_\delta)^{1/2} \|_\infty = \sup_{x \in X} \left| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n (1-g_\delta(x))^n - \phi(1-g_\delta(x)) \right|$$

$$\sup_{t \in [0,1-\delta]} \left| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^n - \phi(t) \right| \quad \text{por lema 6.10}$$

Queremos mostrar que $\lim_{N\to\infty} \| h_N - (g_\delta)^{1/2} \|_\infty = 0$, es decir, que para todo $\varepsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que $\| h_N - (g_\delta)^{1/2} \|_\infty < \varepsilon$, para todo $N \geq k$

Sea $\varepsilon > 0$; sabemos $\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n$, para $t \in [0,1-\delta]$, es decir, $\phi(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^n$, esto implica que existe $k > 0$ tal que

$\| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^n \ \phi(t) \|_\infty < \varepsilon$, para todo $N \geq k$ y para todo $t \in [0,1-\delta]$, ya que $\left\{ \sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^n \right\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente a ϕ.

$$\| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^n - \phi(t) \|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \sup_{t \in [0,1-\delta]} \left| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^n - \phi(t) \right| < \varepsilon ,$$

Para todo $N \geq k$

$$\Rightarrow \| h_N - (g_\delta) \|_\infty^{1/2} < \varepsilon , \quad \text{para todo } N \geq k.$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} h_N = (g_\delta)^{1/2}$$

PRUEBA 3)

Como la raíz cuadrada es una función uniformemente continua en $[0,1]$ entonces,

$$\lim_{\delta\to 0} (g_\delta)^{1/2} = \lim_{\delta\to 0} [\delta+(1-\delta)f^2]^{1/2} = [\lim_{\delta\to 0} (\delta+(1-\delta)f^2]^{1/2}$$

$$= (f^2)^{1/2} = |f|$$

Luego $\lim_{\delta\to 0} \| \, |f| - (g_\delta)^{1/2}\|_\infty = \| \lim_{\delta\to 0}|f| - \lim_{\delta\to 0} (g_\delta)^{1/2}\|_\infty$

$$= \| \, |f| - |f| \, \|_\infty = \| 0\|_\infty = 0$$

Por tanto $\lim_{\delta\to 0} \| \, |f| - (g_\delta)^{1/2}\|_\infty = 0.$

6.13 COROLARIO.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff, Ur una subálgebra cerrada de Cr(X), f una función en Ur, $\|f\|_\infty \leq 1$, si $g_\delta = \delta + (1-\delta)f^2$, para δ en $]0,1]$ y $h_N = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n (1-g_\delta)^n$, con $\alpha_n = (-1)^n \binom{1/2}{n}$, entonces $(g_\delta)^{1/2}$ y $|f|$ pertenecen a Ur.

PRUEBA.

Primero probemos que $(g_\delta)^{1/2}$ pertenece a Ur.

Por proposición 6.12 $\lim_{N\to\infty} h_N = (g_\delta)^{1/2}$, como $(h_N)_{\geq 1}$ es una sucesión de elementos de Ur y Ur es cerrada, se concluye de aquí $(g_\delta)^{1/2}$ pertenece a Ur.

Mostremos ahora que $|f|$ pertenece a Ur.

También por proposición 6.12 $\lim_{\delta\to 0} (g_\delta)^{1/2} = |f|$, para $\delta \in]0,1]$.

Como $0 \in \overline{]0,1]}$, existe una sucesión $(\delta_n)_{n\geq 1}$ en $]0,1]$ tal que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

Luego $|f| = \lim_{n\to\infty} (g_{\delta_n})^{1/2}$, entonces $|f|$ es el límite de una sucesión $(g_{\delta_n})^{1/2}$ de Ur, por tanto $|f| \in \overline{Ur}$ y como Ur es cerrada, $|f| \in Ur$.

6.14 DEFINICION.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff. entonces las funciones $f \vee g$ y $f \wedge g$, para f,g que pertenecen a Ur se definen:

$(f \vee g)(x) = \max \{f(x) , g(x)\}$,

$(f \wedge g)(x) = \min \{f(x) , g(x)\}$, para $x \in X$.

6.15 LEMA.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff, si $f,g,|f-g|$ pertenecen a Ur, entonces las funciones

i) $f \vee g$

ii) $f \wedge g$ pertenecen a Ur.

PRUEBA i)

La prueba consistirá en verificar la identidad:

$f \vee g = \frac{1}{2} \{f+g+ |f-g|\}$. Supongamos que $\max \{f(x),g(x)\} = f(x)$, entonces debe probarse que

$(f \vee g)(x) = [\frac{1}{2} (f+g+|f-g|)](x) = f(x)$.

$[\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)](x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2} |f-g|(x)$

$= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}|(f-g)(x)| = \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}g(x)+\frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$

$= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2} (f(x)-g(x))$ ya que $f(x)$ es el máximo

$$= \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}g(x)$$

$$= f(x)$$

De igual manera si $g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.

Por tanto $f \vee g \in Ur$, ya que $\frac{1}{2}f$, $\frac{1}{2}g$, $\frac{1}{2}|f-g| \in Ur$.

PRUEBA ii)

Solo verificaremos la identidad $f \wedge g = \frac{1}{2}\{f+g-|f-g|\}$.

Supongamos que $\min\{f(x), g(x)\} = f(x)$, entonces debe probarse que $(f \wedge g)(x) = \left[\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)\right](x) = f(x)$

$$\left[\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)\right](x) = \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{2}|f-g|(x) = \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{2}|(f-g)(x)|$$

$$= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$$

$$= \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{2}(-(f(x)-g(x))) \text{ ya que } f(x) \text{ es el mínimo}$$

$$= \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{2}(g(x)-f(x)) = \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{2}g(x)+\frac{1}{2}f(x)$$

$$= f(x)$$

De igual manera si $g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.

Por tanto $f \wedge g \in Ur.$ ya que $\frac{1}{2}f, \frac{1}{2}g, \frac{1}{2}|f-g| \in Ur.$

6.16 LEMA.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff, si f_1 , f_2 , f_3 pertenecen a Ur, entonces

1) $(f_1 \wedge f_2) \wedge f_3 = f_1 \wedge (f_2 \wedge f_3)$

2) $(f_1 \vee f_2) \vee f_3 = f_1 \vee (f_2 \vee f_3)$ (Asociatividad)

PRUEBA para 1)

Queremos probar en general que:

$$[(f_1 \wedge f_2) \wedge f_3](x) = \min\{(f_1 \wedge f_2)(x), f_3(x)\} = \min\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$$
$$= \min\{f_1(x), (f_2 \wedge f_3)(x)\}.$$

Haremos solo una parte de estas pruebas y dejaremos al lector la comprobación de las otras.

Sea $A = \{(f_1 \wedge f_2)(x), f_3(x)\}$, $B = \{f_1(x), f_2(x) f_3(x)\}$.

- Supongamos que $\min A = (f_1 \wedge f_2)(x)$, entonces $\min A = f_1(x)$ o $\min A = f_2(x)$.

i) Si $\min A = f_1(x)$ entonces

$f_1(x) \leq f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_3(x)$, esto implica que

$f_1(x) = \min B$.

ii) Si $\min A = f_2(x)$ entonces

$f_2(x) \leq f_1(x)$, $f_2(x) \leq f_3(x)$, lo que implica que

$f_2(x) = \min B$.

· Supongamos que $\min A = f_3(x)$ entonces

$f_3(x) \leq f_1(x)$, $f_3(x) \leq f_2(x)$, por tanto $f_3(x) = \min B$.

Por consiguiente $\min A = \min B$, así

$(f_1 \wedge f_2) \wedge f_3 = f_1 \wedge (f_2 \wedge f_3)$

La prueba para 2) es análoga.

6.17 COROLARIO.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff, si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ pertenecen a Ur, entonces las funciones:

$f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n$, $f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_n$ pertenecen a Ur.

PRUEBA.

Sólo mostraremos que $f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n$ pertenecen a Ur; para la otra función, la prueba es análoga.

POR INDUCCION.

i) Si $f_1, f_2 \in Ur$ entonces $f_1 \wedge f_2 \in Ur$ por lema 6.15.

ii) Supongamos que

$f_1, f_2, \ldots, f_n \in Ur \Rightarrow f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n \in Ur$; Hipótesis inductiva.

iii) Probemos que

"$f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1} \in Ur \Rightarrow f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n \wedge f_{n+1} \in Ur$"

$f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n \wedge f_{n+1} = (f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n) \wedge f_{n+1}$ por lema 6.16

$(f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n) \in Ur$ por hipótesis inductiva,

Además $f_{n+1} \in Ur$, entonces $(f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n) \wedge f_{n+1} \in Ur$ por lema 6.15

Por tanto $f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n \wedge f_{n+1} \in Ur$, por consiguiente $f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n \in Ur$.

6.18 LEMA.

Sea x,y dos puntos distintos de X, a,b números reales arbitrarios y f una función en Ur, tal que $f(x) \neq f(y)$ entonces existe una función g en Ur tal que $g(x) = a$, $g(y) = b$.

PRUEBA.

La prueba consistirá en mostrar que la función g, definida por $g(z) = a + (b-a)\dfrac{f(z) - f(x)}{f(y) - f(x)}$ está en Ur, para luego establecer que: $g(x) = a$ y $g(y) = b$.

Sea

$$g(z) = a + (b-a)\frac{f(z)-f(x)}{f(y)-f(x)} = a + \frac{(b-a)}{f(y)-f(x)}(f(z)-f(x))$$

$$= a + \left[\frac{(b-a)}{f(y)-f(x)}\right] f(z) - \left[\frac{(b-a)}{f(y)-f(x)}\right] f(x)$$

$$= a + \alpha f(z) - \alpha f(x) \qquad ; \alpha = \frac{b-a}{f(y)-f(x)}$$

$$= a - \alpha f(x) + \alpha f(z)$$

$$= \beta + \alpha f(z) \qquad ; \beta = a - \alpha f(x)$$

$= \beta + (\alpha f)(z)$

$= (\beta + (\alpha f))(z)$

Por tanto

$g = \beta + \alpha f$, de donde g pertenece a Ur.

Además:

$g(x) = a + (b-a)\dfrac{f(x) - f(x)}{f(y) - f(x)} = a$, por tanto $g(x) = a$.

$g(y) = a + (b-a)\dfrac{f(y) - f(x)}{f(y) - f(x)} = a + b - a = b$,

y así $g(y) = b$.

6.19 PROPOSICION.

Sea X un espacio de Hausdorff; si f es una función que pertenece a $Cr(X)$ y x_0 en X, entonces:

1) Para todo x en X, existe g_x en Ur tal que $g_x(x_0) = f(x_0)$ y $g_x(x) = f(x)$.

2) Para todo x en X existe un vecindario abierto U_x de x tal que $g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon$, para todo y en U_x , $\varepsilon > 0$.

PRUEBA 1)

Por lema 6.18, como $f \in Cr(X)$, para cada x en X, existe una función $g_x \in Ur$ tal que

$g_x(x_o) = f(x_o)$ y $g_x(x) = f(x)$.

PRUEBA 2)

Sean los conjuntos abiertos

$A = B\,(g_x(x), \varepsilon/2)$ y $0 = B(f(x), \varepsilon/2)$ (Ya que son bolas abiertas), entonces:

$g_x^{-1}(A)$ y $f^{-1}(0)$ son conjuntos abiertos, ya que g_x y f son funciones continuas y $A, 0$ son abiertos.

Luego haciendo $U_x = g_x^{-1}(A) \cap f^{-1}(0)$, U_x es un conjunto abierto porque es la intersección de dos conjuntos abiertos.

Verifiquemos que $x \in U_x$, es decir, veamos que $x \in g_x^{-1}(A)$ y $X \in f^{-1}(0)$.

$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \Rightarrow |g_x(x)-g_x(x)| < \varepsilon/2 \Rightarrow g_x(x) \in A \Rightarrow x \in g_x^{-1}(A)$; también

$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \Rightarrow |f(x)-f(x)| < \varepsilon/2 \Rightarrow f(x) \in 0 \Rightarrow x \in f^{-1}(0)$

y por tanto $x \in U_x$.

Ahora:

$$y \in U_x \Rightarrow y \in g_x^{-1}(A) \wedge y \in f^{-1}(0)$$

$$\Rightarrow g_x(y) \in A \wedge f(y) \in 0$$

$$\Rightarrow |g_x(x) - g_x(y)| < \varepsilon/2 \wedge |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$$

Así:

$$|g_x(y)-f(y)| = |g_x(y)-g_x(x)+g_x(x)-f(y)|$$

$$\leq |g_x(y)-g_x(x)|+|g_x(x)-f(y)|$$

$$\leq |g_x(x)-g_x(y)|+|f(x)-f(y)| \text{ ya que } f(x)=g_x(x)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por tanto $|g_x(y) - f(y)| \leq \varepsilon$

$$g_x(y) - f(y) \leq \varepsilon$$

$$g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon$$

6.20 LEMA.

Sea X un espacio compacto de Hausdorff, si h pertenece a $C(X)$ entonces existen h_1, h_2 que pertenecen a $Cr(X)$ tal que $h = h_1 + i\, h_2$.

PRUEBA.

Definamos primero las funciones h, h_1 y h_2

$$h : X \longrightarrow \mathbb{C} \qquad ; \quad h_1 : X \longrightarrow \mathbb{C} \qquad ;$$
$$x \rightsquigarrow h(x) \qquad\qquad x \rightsquigarrow h_1(x) = \operatorname{Re} h(x)$$

$$h_2 : X \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \rightsquigarrow h_2(x) = \operatorname{Im} h(x)$$

Solo mostraremos que h_1 , h_2 son continuas.

PARA h_1.

Sea $\varepsilon > 0$; como $h \in C(X)$ es continua, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|h(x) - h(y)| < \varepsilon$ siempre que $\|x-y\| < \delta$, luego $|h_1(x)-h_1(y)| = |\operatorname{Re} h(x) - \operatorname{Re} h(y)| = |\operatorname{Re}(h(x) - h(y))|$

$\leq |h(x) - h(y)| \leq \varepsilon$ y por tanto

$|h_1(x) - h_1(y)| < \varepsilon$ siempre que $\|x-y\| < \delta$, de donde resulta que h_1 es continua.

PARA h_2 LA PRUEBA ES ANALOGA.

De aquí que h_1, h_2 pertenecen a $C(X)$ y como por definición h_1, h_2 son funciones que tienen su rango en $\mathbb{R}$, entonces h_1, h_2 pertenecen a $Cr(X)$.

Por último veamos que: $h = h_1 + i\,h_2$.

Sea $x \in X$.

$$(h_1 + i\,h_2)(x) = h_1(x) + i\,h_2(x)$$

$$= \operatorname{Re} h(x) + i \operatorname{Im} h(x)$$

$$= h(x)$$

y por tanto $h = h_1 + i\,h_2$.

6.21 TEOREMA (STONE - WEIERSTRASS).

Sea X un espacio compacto de Hausdorff. Si U es una subálgebra cerrada autoadjunta de $C(X)$ que separa los puntos de X y contiene la función constante 1, entonces $U = C(X)$.

PRUEBA.

La prueba del teorema consistirá en demostrar primero que $Ur = Cr(X)$ para luego concluir que $U = C(X)$.

Por definición tenemos que $Ur \subset Cr(X)$ con lo cual se prueba la primera inclusión.

Antes de probar que $Cr(X) \subset Ur$, estableceremos algunas condiciones que nos serán de mucha utilidad, para lo cual haremos uso de los resultados anteriores.

Comenzamos estableciendo que si f está en Ur entonces $|f|$ está en Ur.

Por proposición 6.9 se verifica que la serie binomial para la función

$$\phi(t) = (1-t)^{1/2} \text{ es } \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n \ , \ \alpha_n = (-1)^n \binom{1/2}{n}$$

y que la sucesión $\left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^n\right)_{N \geq 1}$ converge uniformemente a ϕ en el intervalo cerrado $[0,1-\delta]$ para $\delta > 0$.

Observamos que si f está en Ur tal que $\|f\|_\infty \leq 1$ y si $g_\delta = \delta + (1-\delta)f^2$ para δ en $]0,1]$ entonces $0 \leq 1 - g_\delta \leq 1 - \delta$.

Por parte 1) de proposición 6.12, para $\delta > 0$ fijo

$h_N = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n (1-g_\delta)^n$ está en Ur.

$$\|h_N - (g_\delta)^{1/2}\|_\infty = \sup_{x \in X} \left| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n (1-g_\delta(x))^n - (1-g_\delta(x)) \right| \text{ , por definición.}$$

$$\leq \sup_{t \in [0,1-\delta]} \left| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n t^n - \phi(t) \right| \text{ , por lema 6.10}$$

Luego, por parte 2) de la proposición 6.12

$\lim_{N\to\infty} \| h_N - (g_\delta)^{1/2} \|_\infty = 0$, así por corolario 6.13 tenemos $(g\ )^{1/2}$ pertenece a Ur.

Luego como la función raíz cuadrada es uniformemente continua sobre $[0,1]$, tenemos que $\lim_{\delta\to 0} \| \, |f| - (g_\delta)^{1/2} \|_\infty = 0$ por parte 3) de proposición 6.12 y por tanto $|f|$ está en Ur por corolario 6.13, para $f \in$ Ur y $\|f\|_\infty \leq 1$.

Ahora si $f \in$ Ur, $\|f\|_\infty > 1$ probemos que $|f| \in$ Ur.

Sea $h = \dfrac{1}{\|f\|_\infty} \cdot 1$; $h \in$ Ur

$$\|h\| = \left\| \frac{1}{\|f\|_\infty} \cdot f \right\| = \frac{1}{\|f\|_\infty} \|f\| = 1, \text{ por tanto } \|g\| < 1,$$

luego $|h| \in$ Ur

$|h| \in \text{Ur} \Rightarrow \|f\|_\infty \, |h| \in$ Ur, pero

$$\|f\|_\infty |h| = \|f\|_\infty \left| \frac{1}{\|f\|_\infty} \cdot f \right| = \|f\|_\infty \frac{1}{\|f\|_\infty} \, |f| = |f|$$

entonces $|f| \in$ Ur.

Además, si x,y son puntos distintos en X, a,b números reales arbitrarios y f una función en Ur tal que $f(x) \neq f(y)$ entonces la función g definida por

$g(z) = a + (b-a)\dfrac{f(z) - f(x)}{f(y) - f(x)}$ está en Ur y tiene la propiedad que $g(x) = a$ y $g(y) = b$; lo cual fue verificado en lema 6.18. Por tanto existen funciones en Ur, tomando valores preestablecidos a dos puntos de X.

"$Cr(X) \subset Ur$"

Tomando f en $Cr(X)$, $\varepsilon > 0$ y fijando x_o en X, para cada x en X podemos encontrar una función g_x en Ur tal que $g_x(x_o) = f(x_o)$ y $g_x(x) = f(x)$ por lema 6.18.

Como f y g_x son continuas, existe un conjunto abierto U_x de x tal que $g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon$ para todo y en U_x, por proposición 6.19.

Los conjuntos abiertos $\{U_x\}_{x\varepsilon X}$ cubren a X y por ser X compacto existe una subcubierta finita $U_{x_1}, U_{x_2},\ldots,U_{x_n}$.

Sea $h_{x_o} = g_{x_1} \wedge g_{x_2} \wedge \ldots \wedge g_{x_n} \;\varepsilon\; Ur$; por corolario 6.17

$$\begin{aligned} h_{x_o}(x_o) &= (g_{x_1} \wedge g_{x_2} \wedge \ldots \wedge g_{x_n})(x_o) \\ &= \min\{g_{x_1}(x_o), g_{x_2}(x_o),\ldots,g_{x_n}(x_o)\} \end{aligned}$$

$= \min \{f(x_0), f(x_0), \ldots, f(x_0)\}$

$= f(x_0)$

Por tanto $h_{x_0}(x_0) = f(x_0)$ y $h_{x_0}(y) \leq f(y) + \varepsilon$, para y en X por proposición 6.19.

En forma análoga, como h_{x_0} y f son continuas existe un conjunto abierto V_{x_0} de x_0 tal que $f(y) - \varepsilon \leq h_{x_0}(y)$ para y en V_{x_0}, y la familia $\{V_{x_0}\}_{x_0 \varepsilon X}$ cubre a X y así existe una subcubierta finita $V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots, V_{x_m}$.

Si hacemos $k = h_{x_1} \vee h_{x_2} \vee \ldots \vee hx_m$, entonces k está en Ur por corolario 6.17, y como k y f son funciones continuas existe un conjunto abierto S_x de x tal que $f(y) - \varepsilon < k(y) < f(y) + \varepsilon$, para y en S_x.

$f(y)-\varepsilon<k(y)\leq f(y)+\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon\leq k(y)-f(y)\leq\varepsilon \Rightarrow |k(y)-f(y)|\leq\varepsilon$

$\Rightarrow |(k-f)(y)| \leq \varepsilon \Rightarrow \sup_{y\varepsilon X}|(k-f)(y)| \leq \varepsilon \Rightarrow \|k-f\|_\infty \leq \varepsilon$, es decir,

existe $k \varepsilon Ur$ tal que $k \varepsilon B(f,\varepsilon)$,

$k \varepsilon B(f,\varepsilon) \rightarrow B(f,\varepsilon) \cap Ur \neq \phi \Rightarrow f \varepsilon \overline{Ur} \Rightarrow f \varepsilon Ur$, ya que Ur es una subálgebra cerrada, por tanto $Cr(X) \subset Ur$, con lo que se concluye que $Ur = Cr(X)$.

Como dijimos al principio de la prueba, debemos mostrar que $U = C(X)$, para lo cual tenemos que $U \subset C(X)$ es una inclusión obvia.

Sólo verifiquemos que $C(X) \subset U$.

Sea h una función que pertenece a $C(X)$; entonces existen dos funciones h_1, h_2 que pertenecen a $Cr(X)$ tal que $h = h_1 + i\, h_2$, por lema 6.20.

$h_1, h_2 \in Cr(X) \Rightarrow h_1, h_2 \in Ur \Rightarrow h_1, h_2 \in U$

$\Rightarrow h_1 + i\, h_2 \in U$, por ser U una subálgebra de $C(X)$

$\Rightarrow h = h_1 + i\, h_2 \in U \Rightarrow C(X) \subset U$.

Por tanto $U = C(X)$.

BIBLIOGRAFIA

1. COTLAR, MIscha y CIGNOLI, Roberto. "Nociones de Espacios Normados". Editorial Universitaria, Buenos Aires, 1967.

2. CHURCHILL, Ruel V. "Complex Variables and Applications". McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

3. DOUGLAS, Ronald G. "Banach Algebra Techniques in Operathor Theory". Academic Press, New York, 1972.

4. HERSTEIN, I. N. "Algebra Moderna". Editorial F. Trillas, S. A. México, 1970.

5. IRIBARREN, Ignacio L. "Topología de Espacios Métricos". Editorial LIMUSA-Wiley.

6. NAIMARK, M. A. "Normed Rings". Noordhoff, Groningen, 1959.

7. PERVIN, William J. "Foundations of General Topology". Academic Press, New York, 1964.

8. RICKART, Charles E. "General Theory of Banach Algebras". D. Van Nostrand Company, 1960.

9. RUDIN, Walter. "Functional Analysis". McGraw-Hill. Book Company, New York, 1973.

10. SWOKOWSKI, Earl W. "Cálculo con Geometría Analítica". Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1979.

nvdr