UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

INSTITUTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

" ESTUDIO COMPARATIVO DE LA INTEGRAL DE RIEMANN Y LA INTEGRAL DE LEBESGUE "

TRABAJO PRESENTADO POR:

DAVID ENRIQUE NAVARRO

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICA

ENERO DE 1977

SAN SALVADOR EL SALVADOR CENTRO AMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR EN FUNCIONES

DR. CARLOS ALFARO CASTILLO

SECRETARIO GENERAL

DR. MANUEL ATILIO HASBUN

FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DECANO

LIC. RENE VAQUERANO

SECRETARIO

LIC. SALVADOR ALBERTO VALDIVIESO

TRIBUNAL DE TESIS

LIC. MARIO MORALES BURGOS

LIC. RENE ALBERTO ZELAYA

LIC. MAURO HERNAN HENRIQUEZ

ASESOR

LIC. RENE ALBERTO ZELAYA

En el presente trabajo se pretende estudiar la Integral de Riemann y especialmente la Integral de Lebesgue. A la primera de ellas se le dedica el capítulo 1, a la segunda se le dedican los 3 siguientes capítulos. En el último capítulo se hace una comparación entre ambas integrales.

INDICE

CAPITULO 1

INTEGRAL DE RIEMANN

Este capítulo se dedica exclusivamente al estudio de la integral de Riemann. En él se estudiarán las principales propiedades de esta integral así como también el teorema de existencia de las funciones Riemann-integrables.

Se suponen conocidas las propiedades de los reales como un campo ordenado arquimedeano. Así como también algunas de sus propiedades topológicas fundamentales, las que se utilizarán más que todo al demostrar el teorema de existencia de las funciones Riemann-integrables.

A lo largo del capítulo se trabaja en un intervalo finito $[a,b]$ y, mientras no se advierta lo contrario todas las funciones se supondrán funciones reales definidas y acotadas en $[a,b]$.

DEFINICION (1)

Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado. Una partición Π de dicho intervalo es una colección finita $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ de puntos del mismo tal que

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = b$$

DEFINICION (2)

Sean Π_1 y Π_2 dos particiones del intervalo $[a,b]$. Se dice que la partición Π_2 es más fina que (o es un refinamiento de) Π_1, si todo punto de Π_1 es punto de Π_2. Es decir $\Pi_1 \subset \Pi_2$.

[illegible] de [a,b] con

[illegible]

[illegible] de [a,b]. Una Su-

[illegible]

[illegible] $f(t_k)$ [illegible] con $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

[illegible] por el [illegible] la longitud del intervalo

k-ésimo.

[illegible]

[illegible] función acotada. Se dice que f

es [illegible] en [a,b] y escribimos "f [illegible] en [a,b]"

si [illegible] dado $\varepsilon > 0$ exis-

[illegible] refinamien

to [illegible]

[illegible] por

$\int_a^b f(x)$ [illegible]

[illegible]

[illegible] partición de [a,b], [illegible]

[illegible] $\sup \{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \}$

$m_k(f) = \inf \{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \}$

Llamaremos Suma superior de Riemann de f para la partición Π, al número

$$U(\Pi,\ f)\ =\ \sum_{k=1}^{n} M_k(f).\Delta x_k$$

Similarmente se llama Suma inferior de Riemann de f para la partición Π, al número

$$L(\Pi,\ f)\ =\ \sum_{k=1}^{n} m_k(f).\Delta x_k$$

PROPOSICION (5)

Sea f una función acotada en [a,b].

a) Si $\Pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ se tiene $L(\Pi,\ f) \leq S(\Pi,\ f) \leq U(\Pi,\ f)$

b) Si Π y Π' son particiones de [a,b] tal que $\Pi' \supset \Pi$, entonces:

$$U(\Pi',\ f) \leq U(\Pi,\ f)$$

$$L(\Pi',\ f) \geq L(\Pi,\ f)$$

c) Si Π_1 y Π_2 son dos particiones cualesquiera de [a,b] se tiene $L(\Pi_1,\ f) \leq U(\Pi_2,\ f)$.

DEMOSTRACION

a) Sea $t_k \in [x_{k-1},\ x_k]$. Entonces $m_k(f) \leq f(t_k) \leq M_k(f)$ -- para $k = 1,2,\ldots,n$.

Como Δx_k es no-negativo para cualquier k, se tiene

$m_k(f)\Delta x_k \leq f(t_k)\Delta x_k \leq M_k(f).\Delta x_k$ para $k = 1,2,\ldots,n$ y así

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(f).\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k$$

$\therefore\quad L(\Pi,\ f) \leq S(\Pi,\ f) \leq U(\Pi,\ f)$.

b) Sea $\Pi = \{x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\}$. Supondremos que Π' tiene un punto de subdivisión a [illegible] Π, al que denotaremos por "c". El punto c pertenece al subintervalo j-ésimo de Π. Es decir $c \in [x_{j-1}, x_j]$. Entonces se tiene

$$U(\Pi', f) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} M_k(f).\Delta x_k + M'(f).(c-x_{j-1}) + M''(f).(x_j-c) \quad (1)$$

donde $M'(f) = \sup\{ f(x) / x \in [x_{j-1}, c]\}$

$M''(f) = \sup\{ f(x) / x \in [c, x_j]\}$.

Sabemos además que se satisfacen las siguientes desigualdades: $M'(f) \leq M_j(f)$ y $M''(f) \leq M_j(f)$. Luego:

$$\begin{aligned} M'(f).(c-x_{j-1}) + M''(f).(x_j-c) &\leq M_j(f).[(c-x_{j-1}) + (x_j-c)] \\ &\leq M_j(f).(x_j-x_{j-1}) \\ &\leq M_j(f).\Delta x_j \end{aligned}$$

Utilizando este resultado en la ecuación (1) se tiene

$$U(\Pi', f) \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} M_k(f).\Delta x_k + M_j(f)\Delta x_j = \sum_{k=1}^{n} M_k(f).\Delta x_k$$

$$\therefore \quad U(\Pi', f) \leq U(\Pi, f)$$

En forma similar se demuestra la otra parte del Lema, así:

$$L(\Pi', f) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} m_k(f).\Delta x_k + m'(f).(c-x_{j-1}) + m''(f).(x_j-c) \quad (2)$$

donde

$m'(f) = \inf\{ f(x) / x \in [x_{j-1}, c]\}$

$m''(f) = \inf\{ f(x) / x \in [c, x_j]\}$

Además se satisfacen las siguientes desigualdades

$$m'(f) \geq m_j(f) \qquad y \qquad m''(f) \geq m_j(f)$$

luego

$$m'(f).(c-x_{j-1}) + m''(f).(x_j-c) \geq m_j(f).[(c-x_{j-1}) + (x_j-c)]$$
$$= m_j(f).(x_j-x_{j-1})$$
$$= m_j(f).\Delta x_j$$

Usando este resultado en la ecuación (2), se tiene

$$L(\Pi', f) \geq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} m_k(f).\Delta x_k + m_j(f).\Delta x_j = \sum_{k=1}^{n} m_k(f).\Delta x_k$$

$$\therefore \quad L(\Pi', f) \geq L(\Pi, f).$$

c) Sea $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$. Como $\Pi_1 \subset \Pi$ y $\Pi_2 \subset \Pi$. Será

$$L(\Pi_1, f) \leq L(\Pi, f)$$
$$U(\Pi_2, f) \geq U(\Pi, f)$$

Además, por literal (a), se tiene $L(\Pi, f) \leq U(\Pi, f)$. Entonces

$$L(\Pi_1, f) \leq L(\Pi, f) \leq U(\Pi, f) \leq U(\Pi_2, f)$$

$$\therefore \quad L(\Pi_1, f) \leq U(\Pi_2, f)$$

DEFINICION (7)

[illegible] f: $[a,b]$ [illegible] acotada. Definiremos la integral superior [illegible] en $[a,b]$, así:

$$\overline{\int_a^b} f = \text{Inf}\,\{U(\Pi, f)/\Pi \in P_{[a,b]}\}$$

En forma similar se define la integral inferior de Riemann de f en $[a,b]$, así: $\underline{\int_a^b} f$ = Sup $\{L(\Pi, f)/\Pi \in P_{[a,b]}\}$

PROPOSICION (8)

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, entonces

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

DEMOSTRACION:

Para cada $\epsilon > 0$ arbitrario existe una partición Π_ϵ de $[a,b]$ tal que

$$U(\Pi_\epsilon, f) < \inf \{U(\Pi, f) / \Pi \in P_{[a,b]}\} + \epsilon$$

es decir

$$U(\Pi_\epsilon, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon \qquad (1)$$

Además, por proposición (6-c), se afirma que para toda $\Pi \in P_{[a,b]}$ es $L(\Pi, f) \leq U(\Pi, f)$. Utilizando esta desigualdad en la expresión (1) resulta

$$L(\Pi, f) \leq \overline{\int_a^b} f + \epsilon, \quad \forall \Pi \in P_{[a,b]}$$

quiere decir esto que el número real $\overline{\int_a^b} f + \epsilon$ es una cota superior para las sumas inferiores de Riemann de la función f. Luego puede asegurarse que

$\sup \{L(\Pi, f) / \Pi \in P_{[a,b]}\} \leq \overline{\int_a^b} f + \epsilon$, es decir

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f + \epsilon$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, puede tomarse tan pequeño como se quiera, y así

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

PROPOSICION (1)

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces las cuatro proposiciones siguientes son equivalentes:

a) f es Riemann-integrable en $[a,b]$

b) (Criterio de integrabilidad de Cauchy)

Para cada $\epsilon > 0$ existe una partición Π_ϵ de $[a,b]$ tal que, si Π_1 y Π_2 son refinamientos de Π_ϵ en $[a,b]$ se tiene que:

$$|S(\Pi_1, f) - S(\Pi_2, f)| < \epsilon$$

c) (Criterio de integrabilidad de Riemann)

Para cada $\epsilon > 0$ existe una partición Π_ϵ de $[a,b]$ tal que si Π es un refinamiento de Π_ϵ en $[a,b]$. Será

$$0 \leq U(\Pi, f) - L(\Pi, f) \leq \epsilon$$

d) $$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

DEMOSTRACION:

Mostraremos primeramente que si f es Riemann-integrable en $[a,b]$ entonces se satisface el criterio de integrabilidad de Cauchy. Así:

Como $f \in R$ en $[a,b]$, existe un número $I = \int_a^b f$ tal que: para todo $\epsilon > 0$ existe una partición Π_ϵ de $[a,b]$ tal que si Π_1 y Π_2 son refinamientos de Π_ϵ en $[a,b]$, será:

$$|S(\Pi_1, f) - I| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad |S(\Pi_2, f) - I| < \frac{\epsilon}{2} \qquad (1)$$

por una parte

$$|S(\Pi_1, f) - S(\Pi_2, f)| = |(S(\Pi_1, f) - I) - (S(\Pi_2, f) - I)|$$

$$\leq |S(\Pi_1, f) - I| + |S(\Pi_2, f) - I|$$

por lo tanto

$$|S(\Pi_1, f) - S(\Pi_2, f)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Mostremos ahora, que si se satisface el criterio de integrabilidad de Cauchy también se satisface el de Riemann:

Sea $\epsilon > 0$, existe entonces una partición Π_ϵ de $[a,b]$ tal que si $\Pi_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $\Pi_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ Son refinamientos de Π_ϵ en $[a,b]$, se tiene

$$|S(\Pi_1, f) - S(\Pi_2, f)| < \epsilon/2$$

Es decir que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k').\Delta x_k - \sum_{k=1}^{m} f(t_k'')\Delta y_k\right| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para } t_k' \in [x_{k-1}, x_k] \text{ y } t_k'' \in [y_{k-1}, y_k]$$

En particular puede escogerse t_{k_0}' y t_{k_0}'' en $[x_{k-1}, x_k]$ y $[y_{k-1}, y_k]$ respectivamente, de tal manera que

$f(t_{k_0}') = \sup \{f(t_k') / t_k' \in [x_{k-1}, x_k]\}$, para $k = 1, \ldots, n$

$f(t_{k_0}'') = \inf \{f(t_k'') / t_k'' \in [y_{k-1}, y_k]\}$, para $k = 1, \ldots, m$

para este caso particular, la desigualdad (1) se convierte en la siguiente

$$|U(\Pi_1, f) - L(\Pi_2, f)| = U(\Pi_1, f) - L(\Pi_2, f) < \frac{\epsilon}{2} \qquad (2)$$

también puedo escoger t'_{k_1} y t''_{k_1} en $[x_{k-1}, x_k]$ y $[y_{k-1}, y_k]$ respectivamente, de tal manera que

$f(t'_{k_1}) = \inf\{f(t'_k)/ \ t'_k \in [x_{k-1}, x_k]\}$ para $k = 1,\dots,n$

$f(t''_{k_1}) = \sup\{f(t''_k)/ \ t''_k \in [y_{k-1}, y_k]\}$ para $k = 1,\dots,m$

Para este caso la desigualdad (1) se convierte en la siguiente

$$|L(\Pi_1, f) - U(\Pi_2, f)| = U(\Pi_2, f) - L(\Pi_1, f) < \frac{\epsilon}{2} \qquad (3)$$

Sumando (2) y (3) se obtiene.

$$[U(\Pi_1, f) - L(\Pi_1, f)] + [U(\Pi_2, f) - L(\Pi_2, f)] < \epsilon$$

de donde

$$U(\Pi_1, f) - L(\Pi_1, f) < \epsilon \quad y \quad U(\Pi_2, f) - L(\Pi_2, f) < \epsilon$$

y así se satisface la condición de Riemann.

Mostremos ahora que si se satisface la condición de Riemann entonces $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$:

Sea $\epsilon > 0$, existe entonces una partición Π_ϵ de $[a,b]$ tal que si Π es un refinamiento de Π_ϵ en $[a,b]$, será $U(\Pi, f) < L(\Pi, f) + \epsilon$ y como

$$\overline{\int_a^b} f \le U(\Pi, f) \quad y \quad \underline{\int_a^b} f \ge L(\Pi, f)$$

se tiene para tal partición la siguiente desigualdad:

$$\overline{\int_a^b} f \le U(\Pi, f) \le L(\Pi, f) + \epsilon \le \underline{\int_a^b} f + \epsilon \qquad y \text{ así}$$

$$\overline{\int_a^b} \leq \underline{\int_a^b} f + \epsilon$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, puede hacerse tan pequeño como se quiera, y así

$$\overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f \qquad (1)$$

por otra parte, se sabe por la proposición (8), que

$$\overline{\int_a^b} f \geq \underline{\int_a^b} f \qquad (2)$$

de (1) y (2) se concluye el objetivo de la prueba, que es:

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

Por último mostremos que si $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = I$ entonces f es Riemann-integrable en [a,b]:

Sea $\epsilon > 0$, existe entonces una partición Π'_ϵ de [a,b] tal que

$$U(\Pi'_\epsilon, f) < \inf \{U(\Pi, f)/\Pi \in P_{[a,b]}\} + \epsilon = \overline{\int_a^b} f + \epsilon.$$

Y como $U(\Pi, f) \leq U(\Pi'_\epsilon, f)$ cuando $\Pi \supset \Pi'_\epsilon$, se puede asegurar que para toda partición Π de [a,b] más fina que Π'_ϵ se tiene

$$U(\Pi, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon \qquad (1)$$

Similarmente, para el épsilon dado existe una partición Π''_ϵ de [a,b] tal que

$$\underline{\int_a^b} f - \epsilon = \operatorname{Sup} \{L(\Pi, f)/ \Pi \in P_{[a,b]}\} - \epsilon < L(\Pi''_\epsilon, f)$$

y como $L(\Pi''_\epsilon, f) \leq L(\Pi, f)$ cuando $\Pi \supset \Pi''_\epsilon$, se puede asegurar que para toda partición Π de $[a,b]$ más fina que Π''_ϵ, se tiene

$$\underline{\int_a^b} f - \epsilon < L(\Pi, f) \qquad (2)$$

Sea $\Pi_\epsilon = \Pi'_\epsilon \cup \Pi''_\epsilon$, podemos afirmar entonces que para toda partición Π de $[a,b]$ más fina que Π_ϵ, será

$$\underline{\int_a^b} f - \epsilon < L(\Pi, f) \leq S(\Pi, f) \leq U(\Pi, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$$

Utilizando la hipótesis, resulta

$$I - \epsilon < S(\Pi, f) < I + \epsilon$$

es decir

$$|S(\Pi, f) - I| < \epsilon.$$

LEMA (10)

Sean f y g dos funciones acotadas en el intervalo finito $[a,b]$, y α, β dos números reales. Dada una partición $\Pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ se satisface la siguiente igualdad.

$$S(\Pi, \alpha f + \beta g) = \alpha . S(\Pi, f) + \beta . S(\Pi, g)$$

DEMOSTRACION:

$$S(\Pi, \alpha f + \beta g) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f + \beta g)(t_k).\Delta x_k ; \quad t_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [(\alpha f)(t_k) + (\beta g)(t_k)]\Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha . f(t_k).\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} \beta . g(t_k).\Delta x_k$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} g(t_k).\Delta x_k; \quad t_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$= \alpha.S(\Pi, f) + \beta.S(\Pi, g).$$

PROPOSICION (11)

Si f y g son dos funciones Riemann-integrables en el intervalo finito $[a,b]$, y α, β dos números reales. Entonces la función $\alpha f + \beta g$ es Riemann-integrable en $[a,b]$ y además

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

DEMOSTRACION:

Para una partición cualquiera Π de $[a,b]$, y utilizando el lema anterior, será:

$$\left| S(\Pi, \alpha f + \beta g) - (\alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g) \right| = \left| \alpha S(\Pi, f) + \beta S(\Pi, g) - \alpha \int_a^b f - \beta \int_a^b g \right|$$

$$\leq |\alpha| . \left| S(\Pi, f) - \int_a^b f \right| + |\beta| . \left| S(\Pi, g) - \int_a^b g \right|$$

Por otra parte, como f y g son Riemann-integrables, Para cada $\epsilon > 0$ existen particiones Π'_ϵ y Π''_ϵ de $[a,b]$ tales que si Π es un refinamiento de ambas en $[a,b]$ será:

$$\left| S(\Pi, f) - \int_a^b f \right| < \frac{\epsilon}{2|\alpha|} \quad \text{y} \quad \left| S(\Pi, g) - \int_a^b g \right| < \frac{\epsilon}{2|\beta|} \text{ [1]}$$

Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe una partición $\Pi_\epsilon = \Pi'_\epsilon \cup \Pi''_\epsilon$ de $[a,b]$ tal que si Π es un refinamiento

---

1. Supondremos que $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Si $\alpha = \beta = 0$ la prueba es trivial.
Si uno de ellos es cero se demuestra en forma similar.

de dicha partición se tiene:

$$\left| S(\Pi, \ \alpha f + \beta g) - [\alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g] \right| \leq \frac{|\alpha| \epsilon}{2|\alpha|} + \frac{|\beta| \epsilon}{2|\beta|} = \epsilon$$

PROPOSICION (12)

a) Si f es Riemann-integrable en cada uno de los sub intervalos [a,c] y [c,b]. Entonces f es Riemann-integrable en el intervalo [a,b] y además

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \qquad (1)$$

b) Si f es Riemann-integrable en el intervalo [a,b] y $c \in (a,b)$. Entonces f es Riemann-integrable en cada uno de los subintervalos [a,c] y [c,b] y además:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

DEMOSTRACION:

a) Por hipótesis, para cada $\epsilon > 0$ existen particiones Π'_ϵ y Π''_ϵ de [a,c] y [c,b] respectivamente tales que si Π_1 es un refinamiento de Π'_ϵ en [a,c] y Π_2 es un refinamiento de Π''_ϵ en [c,b] será:

$$\left| S(\Pi_1, \ f) - \int_a^c f \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad \left| S(\Pi_2, \ f) - \int_c^b f \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $\Pi_\epsilon = \Pi'_\epsilon \cup \Pi''_\epsilon$. Si Π es un refinamiento de Π_ϵ en [a,b], las particiones $\Pi \cap [a,c] = \Pi'$ y $\Pi \cap [c,b] = \Pi''$ son refinamientos de Π'_ϵ y Π''_ϵ, respectivamente.

Además $S(\Pi, f) = S(\Pi', f) + S(\Pi'', f)$.

De lo anterior puede asegurarse que para el épsilon dado, existe $\Pi_\epsilon = \Pi'_\epsilon \cup \Pi''_\epsilon$ partición de $[a,b]$ tal que si Π es un refinamiento de Π_ϵ en $[a,b]$, tendremos:

$$\left| S(\Pi,f) - \left(\int_a^c f + \int_c^b f\right)\right| = \left| S(\Pi',f) + S(\Pi'',f) - \int_a^c f - \int_c^b f \right|$$

$$\leq \left| S(\Pi',f) - \int_a^c f \right| + \left| S(\Pi'',f) - \int_c^b f \right|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\therefore$ f es Riemann-integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

b) Como f es Riemann-integrable en $[a,b]$, para cada $\epsilon > 0$ existe una partición Π_ϵ de $[a,b]$ con $c \in \Pi_\epsilon$ y tal que para todo refinamiento Π de Π_ϵ en $[a,b]$ será

$$U(\Pi, f) - L(\Pi, f) < \epsilon.$$

Por otra parte, $\Pi'_\epsilon = \Pi_\epsilon \cap [a,c]$ es una partición de $[a,c]$ para la cual si Π' es un refinamiento de Π'_ϵ en $[a,c]$ se tiene que $\Pi = \Pi' \cup \Pi_\epsilon$ es un refinamiento de Π_ϵ en $[a,b]$ (Coincidiendo los puntos de $[a,b]$ de dicho refinamiento, - con los puntos de $[c,b]$ de Π_ϵ).

Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe una partición $\Pi'_\epsilon = \Pi_\epsilon \cap [a,c]$ tal que si Π' es un refinamiento de Π'_ϵ en $[a,c]$ y

$\Pi = \Pi' \cup \Pi_\epsilon$ se tiene que $U(\Pi, f) - L(\Pi, f) < \epsilon$. Es decir

$$\sum_{x_k \in \Pi} M_k(f)\Delta x_k - \sum_{x_k \in \Pi} m_k(f).\Delta x_k < \epsilon$$

$$\sum_{x_k \in \Pi} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k < \epsilon$$

$$\sum_{x_k \in \Pi'} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k + \sum_{x_k \in \Pi - \Pi'} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k < \epsilon$$

entonces

$$\sum_{x_k \in \Pi'} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k < \epsilon$$

$$\sum_{x_k \in \Pi'} M_k(f)\Delta x_k - \sum_{x_k \in \Pi'} m_k(f).\Delta x_k < \epsilon$$

$$U(\Pi', f) - L(\Pi', f) < \epsilon$$

$\therefore$ f es Riemann-integrable en [a,c].

De la misma forma se muestra que f es Riemann-integrable en el subintervalo [c,b]. Como f es Riemann-integrable en cada uno de los subintervalos [a,c] y [c,b], por la parte (a) de esta proposición puede asegurarse que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

COROLARIO (13)

Sea f una función Riemann-integrable en [a,b]. Entonces f es Riemann-integrable en todo subintervalo [c,d] de [a,b].

DEMOSTRACION:

Como f es Riemann-integrable en el intervalo $[a,b]$ y $d \in [a,b]$, por la proposición anterior, concluimos que f es Riemann-integrable en el subintervalo $[a,d]$. Además, del hecho que f es Riemann-integrable en $[a,d]$ y $c \in [a,d]$ se afirma que dicha función es Riemann-integrable en el subintervalo $[c,d]$.

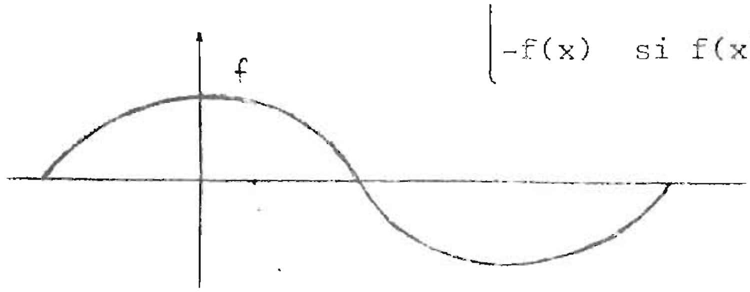
DEFINICION (14)

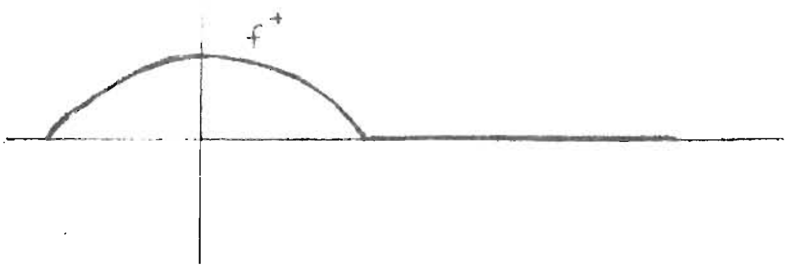
Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Se llama parte positiva de f a la función f^+ definida así:

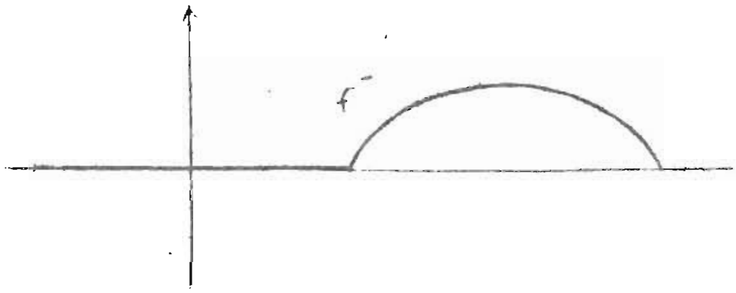
$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Similarmente se denomina parte negativa de f a la función f^- definida así:

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$







Usando las funciones definidas anteriormente se tienen las siguientes igualdades:

a) $f = f^{+} - f^{-}$

b) $|f| = f^{+} + f^{-}$

c) $f^{2} = (f^{+})^{2} + (f^{-})^{2}$

d) $f^{+} = \max(f, 0)$

e) $f^{-} = \max(-f, 0)$

PROPOSICION (15)

Si f es una función Riemann-integrable en el intervalo $[a,b]$, lo serán también las siguientes:

a) f^{+}

b) f^{-}

c) $|f|$

DEMOSTRACION:

a) Mostremos que para cualquier subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de una partición cualquiera $\Pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ se satisface la siguiente desigualdad:

$$M_k(f^{+}) - m_k(f^{+}) \leq M_k(f) - m_k(f). \qquad (1)$$

Examinemos el caso en que el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ tenga al menos un punto x para el cual $f(x) > 0$, en tal situación se cumple

$$M_k(f^+) = M_k(f) \qquad y \qquad m_k(f^+) \geq m_k(f)$$

restando la desigualdad de la igualdad resulta:

$$M_k(f^+) - m_k(f^+) \leq M_k(f) - m_k(f).$$

Por otra parte, si para todo x de $[x_{k-1}, x_k]$ es $f(x) < 0$, se sigue que

$$M_k(f^+) = m_k(f^+) = 0$$

y así será

$$M_k(f^+) - m_k(f^+) = 0 \leq M_k(f) - m_k(f).$$

Por consiguiente, en todo caso se satisface la desigualdad (1), y de este hecho se deduce la siguiente desigualdad

$$U(\Pi, f^+) - L(\Pi, f^+) \leq U(\Pi, f) - L(\Pi, f).$$

Como f es Riemann-integrable en $[a,b]$, para cada $\epsilon > 0$ -- existe una partición Π_ϵ de $[a,b]$ tal que si Π es un refinamiento de Π_ϵ en $[a,b]$ tenemos

$$U(\Pi,f^+) - L(\Pi, f^+) \leq U(\Pi, f) - L(\Pi, f) < \epsilon$$

$\therefore$ f^+ es Riemann-integrable en $[a,b]$.

b) Haciendo uso de la hipótesis y de la parte (a) de esta proposición, se afirma que f y f^+ son funciones Riemann-integrables en $[a,b]$ y por la proposición (11) podemos concluir que $f^+ - f = f^-$ es una función Riemann-integrable en $[a,b]$.

c) Como f^+ y f^- son Riemann-integrables en $[a,b]$, por proposición (11) se concluye que $f^+ + f^- = |f|$ es una función Riemann-integrable en $[a,b]$.

LEMA (16)

Sea f una función Riemann-integrable en $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces f^2 es Riemann-integrable en $[a,b]$.

DEMOSTRACION

Sea $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Tomando en cuenta las igualdades siguientes,

$$M_k(f^2) = [M_k(f)]^2 \qquad y \qquad m_k(f^2) = [m_k(f)]^2$$

tendremos

$$U(\pi, f^2) - L(\pi, f^2) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f^2) - m_k(f^2)].\Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [[M_k(f)]^2 - [m_k(f)]^2].\Delta x_k$$

$$= \sum [M_k(f) + m_k(f)].[M_k(f) - m_k(f)].\Delta x_k$$

Siendo f acotada en $[a,b]$, existirá un número real $c > 0$ tal que $c \geq f(x)$ para $x \in [a,b]$. Por consiguiente

$$U(\pi, f^2) - L(\pi, f^2) \leq \sum_{k=1}^{n} 2c[M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k$$

$$\leq 2c\left[\sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} m_k(f).\Delta x_k\right] =$$

$$= 2c.[U(\pi, f) - L(\pi, f)]$$

Como f es Riemann-integrable en $[a,b]$, para cada $\epsilon > 0$ existe una partición π_ϵ de $[a,b]$ tal que si π es un refinamiento de π_ϵ en $[a,b]$ se tendrá

$$U(\pi, f) - L(\pi, f) < \frac{\epsilon}{2M}$$

y por tanto

$$U(\pi, f^2) - L(\pi, f^2) < \epsilon.$$

PROPOSICION (17)

Si f es Riemann-integrable en $[a,b]$, lo será también f^2.

DEMOSTRACION:

Por ser f Riemann-integrable en $[a,b]$, por proposición (15) aseguramos que las funciones f^+ y f^- lo son también. Además, $f^+ \geq 0$ y $f^- \geq 0$, y por lema anterior serán $(f^+)^2$ y $(f^-)^2$ funciones integrables en $[a,b]$. Utilizando la proposición (11) se tiene que

$$(f^+)^2 + (f^-)^2 = f^2$$

es Riemann-integrable en $[a,b]$.

PROPOSICION (18)

Si f y g son funciones Riemann-integrables, lo serán también las siguientes:

a) $f.g$

b) $\max(f,g)$

c) $\min(f,g)$

DEMOSTRACION:

Evidente, pues

$$f.g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$$

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}\left[f + g + |f-g|\right]$$

$$\min(f,g) = \frac{1}{2}\left[f + g - |f-g|\right].$$

Aunque en los próximos capítulos estudiaremos con más detalle los conjuntos medibles, los cuales son de gran importancia para definir la integral de Lebesgue, en esta parte definiremos lo que se entiende por conjunto de medida cero. El objeto de esto es para enunciar y demostrar el teorema de existencia de las funciones Riemann-integrables.

DEFINICION (19) (conjunto de medida cero)

Un conjunto E de números reales es de medida cero si para cada $\epsilon > 0$ existe una colección numerable $(I_n)_{n \geq 1}$ de intervalos abiertos tales que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \epsilon$.*

Es claro que vacío es de medida cero así como también todo conjunto finito de puntos.

PROPOSICION (20)

La unión numerable de conjuntos de medida cero es un conjunto de medida cero.

DEMOSTRACION:

Sea $(E_n)_{n \geq 1}$ una colección numerable de conjuntos de medida cero. Hay que mostrar que el conjunto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

*$\ell(I_n)$ representa la longitud del intervalo I_n.

es también de medida cero. así:

Sea $\varepsilon > 0$. Como E_n es de medida cero, existe para cada E_n una sucesión $(I_{n_i})_{i \geq 1}$ de intervalos abiertos tales que $E_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n_i}$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_{n_i}) < \frac{\varepsilon}{2^n}$; para $n = 1, 2, \ldots$. Entonces:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n_i} \right) \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_{n_i}) \right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

$\therefore$ E es de medida cero.

Un enunciado concerniente a los puntos de un intervalo $[a,b]$ se dice que es cierto casi por doquier si el conjunto de puntos en $[a,b]$ para los cuales dicho enunciado es falso, es de medida cero. Así por ejemplo se dice que una función $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua casi por doquier en $[a,b]$ si el conjunto de puntos de discontinuidad de la misma es de medida cero; si f y g son funciones reales definidas sobre $[a,b]$, se dice que $f(x) \geq g(x)$ casi por doquier si el conjunto $E = \{x \in [a,b] / f(x) < g(x)\}$ es de medida cero.

Antes de enunciar el teorema de existencia de las funciones Riemann-integrables se darán otros conceptos que servirán para la demostración del mismo.

DEFINICION (21)

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función e I un intervalo abierto -

finito. Se define la <u>oscilación de f en I</u> como

$$w[f, I] = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) = \sup_{x, y \in I} (f(x) - f(y))$$

Si $x \in \mathbb{R}$, se define la <u>oscilación de f en x</u> como

$$w[f; x] = \inf \{w[f; I] / x \in I \wedge I \text{ es intervalo abierto}\}.$$

Es evidente que $w[f; I] \geq 0$, y por consiguiente también $w[f; x] \geq 0$.

<u>PROPOSICION (22)</u>

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces f es continua en x_0 si y solo si $w[f; x_0] = 0$.

<u>DEMOSTRACION:</u>

Consideremos primeramente que f es continua en x_0.- Quiere decir esto que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ entonces $f(x) \in (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$. Por lo dicho anteriormente y considerando que la longitud del intervalo $(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$ es 2ε, puede asegurarse que para cada $\varepsilon > 0$ existe un intervalo abierto $I = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ tal que $\sup_{x, y \in I} (f(x) - f(y)) \leq 2\varepsilon$.

Como ε es arbitrario, se concluye que

$$\inf \{\sup_{x, y \in I} (f(x) - f(y)) / I \in (I_k)_{k \in K}\} = 0$$

donde $(I_k)_{k \in K}$ es la familia de intervalos abiertos que contienen al punto x_0

Consideremos ahora que $w[f; x_0] = 0$. Como

$$w[f;\, x_0] = \inf\{\sup_{x,y\in I}(f(x) - f(y))/\ I \in (I_k)_{k\in K}\} = 0$$

donde $(I_k)_{k\in K}$ es la familia de intervalos abiertos que -- contienen al punto x_0. Quiere decir que para cada $\epsilon > 0$ - siempre se puede encontrar un intervalo abierto I que contiene a x_0 y tal que $\sup_{x,y\in I}(f(x) - f(y)) < \epsilon$. Es decir, -- que para cada $\epsilon > 0$ puede encontrarse un $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset I$ entonces $\sup_{x,y\in I}(f(x) - f(y)) < \epsilon$, y por consiguiente $f(x) \in (f(x_0)-\epsilon,\ f(x_0)+\epsilon)$.

$\therefore$ $f(x)$ es continua en x_0.

COROLARIO (22)

La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es discontinua en x_0 si y sólo si $w[f;\, x_0] > 0$.

DEMOSTRACION:

Inmediata.

LEMA (23)

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, y para cada $r > 0$ sea $E_r = \{x \in \mathbb{R}/\ w[f;\, x] \geq \frac{1}{r}\}$. Entonces E_r es un conjunto cerrado.

DEMOSTRACION:

Basta mostrar que E_r contiene a todos sus puntos de acumulación. Es decir, que si x es un punto de acumulación de E_r entonces $w[f;\, x] \geq \frac{1}{r}$. Así:

Sea x un punto de acumulación de E_r y $(I_k)_{k\in K}$ la familia - de todos los intervalos abiertos y acotados que contienen al punto x. Como x es de acumulación de E_r y $x \in I_k$, $\forall k\in K$, se concluye que habrá al menos un $y_k \neq x$ tal que $y_k \in I_k$ y $y_k \in E_r$, $\forall k\in K$. Del hecho que $y_k \in E_r$, $\forall k\in K$, con - cluimos que $w[f; I_k] \geq w[f; y_k] \geq \frac{1}{r}$, $\forall k\in K$.

$\therefore w[f; x] = \inf \{w[f; I_k] / k \in K\} \geq \frac{1}{r}$

LEMA (24)

Sea $f: J \to \mathbb{R}$ una función y J un intervalo cerrado y acotado. Si para cada $x \in J$ es $w[f; x] < a$, entonces exis te una partición Π de J tal que

$$U(\Pi, f) - L(\Pi, f) < a.\ell(J)$$

DEMOSTRACION:

Por hipótesis, para cada $x \in J$ existirá un subinter- valo abierto I_x * que contiene a x tal que $w[f; \overline{I}_x] < a$ **.

Es decir que existe una colección $(I_x)_{x\in J}$ de subintervalos abiertos de J tales que $J \subset \bigcup_{x\in J} I_x$ y $w[f; \overline{I}_x] < a$.

Como J es compacto, puede extraerse de tal colección una - subcolección finita $(I_{x_i})_{1 \leq i \leq m}$ tal que $J \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_{x_i}$.

* Un subintervalo abierto de J es la intersección de un intervalo a- bierto de $\mathbb{R}$ con J. Por ejemplo, si $J = [0,1]$, un subintervalo a- bierto podría ser $[0, \frac{1}{2})$.

** $\overline{I}_x$ es la cerradura de I_x. En nuestro caso será el subintervalo I_x unido a sus extremos.

Sea Π el conjunto de los puntos extremos de estos I_{x_i}. Π así definida es una partición del intervalo J. Sea --- $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$ los intervalos componentes de dicha partición entonces $w[f; I_k] < a$ para $k = 1,2,\ldots, n$.

Es decir:

$$\sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x) < a; \qquad k = 1,2,\ldots, n$$

$$M_k(f) - m_k(f) < a; \quad k = 1,2,\ldots, n$$

si $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, entonces

$$M_k(f).\Delta x_k - m_k(f).\Delta x_k < a.\Delta x_k \qquad k = 1,2,\ldots,n \tag{1}$$

Sumando miembro a miembro las desigualdades de (1) se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} M_k(f).\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} m_k(f).\Delta x_k < a \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$$

$$\therefore \; U(\Pi, f) - L(\Pi, f) < a.\ell(J)$$

<u>PROPOSICION (25)</u> (Teorema de existencia de la integral de Riemann)

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. La condición necesaria y suficiente para que dicha función sea Riemann-integrable es que tal función sea continua casi por doquier.

<u>DEMOSTRACION:</u>

Primeramente asumamos que f es continua casi por doquier en $[a,b]$ y mostremos que tal función es Riemann-integrable. Así:

Sea $\epsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{m} < \epsilon$. Sea también $E_m = \{x \in [a,b] / w[f; x] \geq \frac{1}{m}\}$. Por hipótesis se asegura -- que E_m es de medida cero, lo que significa que existe una colección $(I_n)_{n \geq 1}$ de <u>subintervalos</u> abiertos de $[a,b]$ ta-- les que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \epsilon$$

Como E_m es un conjunto cerrado (lema 23) y acotado, se pue de extraer una subcolección finita $(I_{n_i})_{1 \leq i \leq k}$ que cu-- brirá a E_m. Ahora bien, el complemento de $\bigcup_{i=1}^{k} I_{n_i}$ relati vo a $[a,b]$ es una colección finita de <u>intervalos cerrados</u> $\{J_1, J_2, \ldots, J_p\}$, que tienen la propiedad de que para cada punto $x \in J_i$ $(i = 1,2,\ldots, p)$ se tiene $w[f; x] < \frac{1}{m}$.

Quiere decir que cada uno de los intervalos J_i cumple las condiciones del lema anterior y por consiguiente, se puede afirmar que para cada J_i existe una partición Π_i tal que

$$U(\Pi_i, f) - L(\Pi_i, f) < \frac{1}{m} \ell(J_i); \quad i = 1,2,\ldots,p \qquad (1)$$

formemos la partición Π de $[a,b]$ como la reunión de todas las particiones Π_i $(i = 1,2,\ldots, p)$.

Los intervalos componentes de dicha partición son los in-- tervalos componentes de cada una de las particiones Π_i $(i = 1,2,\ldots, p)$, y los restantes, que serán subconjuntos de $\bigcup_{i=1}^{k} \bar{I}_{n_i}$. Por consiguiente

$$U(\Pi,f)-L(\Pi,f) \le \sum_{i=1}^{k} [U(\Pi_i,f) - L(\Pi_i,f)] + \sum_{i=1}^{k} \sup_{x,y\in \bar{I}_{n_i}} (f(x)-f(y)).\ell(\bar{I}_{n_i})$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \ell(I_i) + \sum_{i=1}^{k} w[f;[a,b]].\ell(\bar{I}_{n_i})$$

$$\le \frac{b-a}{n} + w[f;[a,b]] \sum_{i=1}^{k} \ell(\bar{I}_{n_i})$$

$$< \epsilon + w[f;[a,b]].\epsilon = (1 + w[f;[a,b]])\epsilon$$

Como $w[f;[a,b]]$ es finito, la diferencia $U(\Pi,f) - L(\Pi,f)$ puede hacerse tan pequeña como se quiera y por consiguiente f es Riemann-integrable.

Supongamos ahora que f es Riemann-integrable en [a,b] y mostremos que el conjunto de puntos de discontinuidad, al cual denotaremos por D, es de medida cero.

Por corolario (20) es $D = \{x \in [a,b]/w[f;x] > 0\}$. Entonces $D = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$ con $D_m = \{x \in [a,b]/w[f;x] \ge \frac{1}{m}\}$. Por proposición (20) es suficiente mostrar que cada D_m es un conjunto de medida cero, así:

Sea $\epsilon > 0$ y m un natural fijo. Como f es Riemann-integrable, existe una partición Π_ϵ de [a,b] tal que si $\Pi \supset \Pi_\epsilon$, entonces

$$U(\Pi, f) - L(\Pi, f) < \frac{\epsilon}{2m}$$

Si $(I_k)_{1 \le k \le n}$ es la colección de intervalos formados por la partición Π, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} w[f; I_k].\Delta x_k = U(\Pi, f) - L(\Pi, f)$$

por consiguiente

$$\sum_{k=1}^{n} w[f;\ I_k].\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{m} . \qquad (1)$$

por otra parte, el conjunto E_m puede particionarse en dos subconjuntos, a saber:

$$E'_m = \{x \in E_m \,/\, x \in P\} \quad y \qquad E''_m = E_m - E'_m$$

Obviamente el conjunto E'_m es de medida cero, pues éste posee un número finito de elementos. Además, cada elemento de E''_m es interior a algún intervalo de la colección $(I_k)_{1 \le k \le n}$ y por consiguiente para cada $x \in E''_m$ existirá un I_{k_0} tal que $\frac{1}{m} \le w[f;\ x] \le w[f;\ I_{k_0}]$, de donde

$$\frac{1}{m}.\ell(I_{k_0}) \le w[f;\ I_{k_0}].\ell(I_{k_0}) \qquad (2)$$

Sea $\{I_{k_1}, I_{k_2}, \ldots, I_{k_p}\}$ la familia de intervalos que contienen en su interior a algún punto de E''_m. Entonces utilizando el resultado (2) se tiene

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{m}.\ell(I_{k_i}) \le \sum_{i=1}^{p} w[f;\ I_{k_i}].\ell(I_{k_i}) \le \sum_{k=1}^{n} w[f;\ I_k].\Delta x_k$$

utilizando el resultado (1) se tiene

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{p} \ell(I_{k_i}) \le \sum_{k=1}^{n} w[f;\ I_k].\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{m}$$

de donde $\sum_{i=1}^{p} \ell(I_{k_i})$ [illegible] ε [illegible] E''_m es de medida cero. Como

E'_m y E''_m son de medida cero, se concluye que E_m también es de medida cero.

LEMA (26)

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Riemann-integrable tal que $f(x) \geq 0$ casi por doquier. Entonces

$$\int_a^b f \geq 0.$$

DEMOSTRACION:

Por proposición (15) se asegura que la función f^- es Riemann-integrable. Además, para cualquier partición $\Pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ se tiene

$m_k(f^-) = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,n)$, y así $L(\Pi, f^-) = 0 \quad \forall\, \Pi \in P_{[a,b]}$

de donde $\underline{\int_a^b} f^- = 0$, y por consiguiente

$$\int_a^b f^- = 0$$

Por otra parte f^+ es también integrable y además $\int_a^b f^+ \geq 0$.

De lo cual se concluye

$$\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- = \int_a^b f^+ \geq 0.$$

PROPOSICION (27)

Sean f y g dos funciones Riemann-integrables en el intervalo $[a,b]$ tales que $f(x) \geq g(x)$ casi por doquier.

Entonces

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

DEMOSTRACION:

Por proposición (11) se afirma que f-g es una función Riemann-integrable. Además como $f(x) - g(x) \geq 0$ casi por doquier, se tiene

$$0 \leq \int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g$$

$$\therefore \int_a^b f \geq \int_a^b g$$

LEMA (28)

Si f es Riemann-integrable en $[a,b]$. Entonces $|f|$ también lo será, y además

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq \|f\| .(b-a)$$

donde $\|f\| = \operatorname{Sup} \{|f(x)| / x \in [a,b]\}$.

DEMOSTRACION:

De acuerdo a la proposición (15), $|f|$ será Riemann-integrable. Tomemos una partición $\Pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ y $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1,2,\ldots,n)$. Entonces

$$-\|f\| \leq -|f(t_k)| \leq f(t_k) \leq |f(t_k)| \leq \|f\| \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

Multiplicando por Δx_k y sumando se tiene

$$-\|f\| . \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \leq -S(\Pi,|f|) \leq S(\Pi,f) \leq S(\Pi,|f|) \leq \|f\| . \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$$

$$-\|f\| .(b-a) \leq -S(\Pi,|f|) \leq S(\Pi,f) \leq S(\Pi,|f|) \leq \|f\| .(b-a)$$

de donde

$$|S(\Pi, f)| \leq S(\Pi, |f|) \leq \|f\|(b-a)$$

Como lo anterior se cumple para cualquier partición $\Pi \in P_{[a,b]}$, se concluye que

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq \|f\|(b-a)$$

PROPOSICION (29)

Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones Riemann-integrables en $[a,b]$ que convergen uniformemente en $[a,b]$ a la función f. Entonces f es Riemann-integrable. Y además

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

DEMOSTRACION:

Sea $\epsilon > 0$, existe entonces un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$ siempre que $n \geq n_0$. Existe también una partición Π_n de $[a,b]$ tal que si $\Pi_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $\Pi_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ son refinamiento de Π_n en $[a,b]$, se tiene

$$|S(\Pi_1, f_n) - S(\Pi_2, f_n)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por otra parte, si tomamos los mismos puntos $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para f y f_n, se obtiene

$$|S(\Pi_1, f) - S(\Pi_1, f_n)| \leq \sum |f(t_k) - f_n(t_k)|.\Delta x_k \leq \|f_n - f\|(b-a) < \frac{\epsilon}{3}$$

En forma similar, para la partición Π_2, si se toman los mismos puntos $\xi_k \in [y_{k-1}, y_k]$ para f y f_n, se obtiene

$$|S(\Pi_2,f) - S(\Pi_2,f_n)| \leq \sum |f_n(\xi_k)-f(\xi_k)|.\Delta y_k \leq \|f_n-f\|(b-a) < \frac{\epsilon}{3}$$

Además se tiene

$$S(\Pi_1,f) - S(\Pi_2,f) = [S(\Pi_1,f)-S(\Pi_1,f_n)]+[S(\Pi_1,f_n)-S(\Pi_2,f_n)]+ + [S(\Pi_2,f_n)-S(\Pi_2,f)]$$

de donde

$$|S(\Pi_1,f)-S(\Pi_2,f)| \leq |S(\Pi_1,f)-S(\Pi_1,f_n)| + |S(\Pi_1,f_n)-S(\Pi_2,f_n)| + + |S(\Pi_2,f_n)-S(\Pi_2,f)|$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

$\therefore$ f es Riemann-integrable en $[a,b]$.

Como f y f_n son ambas integrables, lo será también $f-f_n$, y usando el lema anterior resulta

$$\left|\int_a^b (f-f_n)\right| \leq \int_a^b |f-f_n| \leq \|f-f_n\|.(b-a)$$

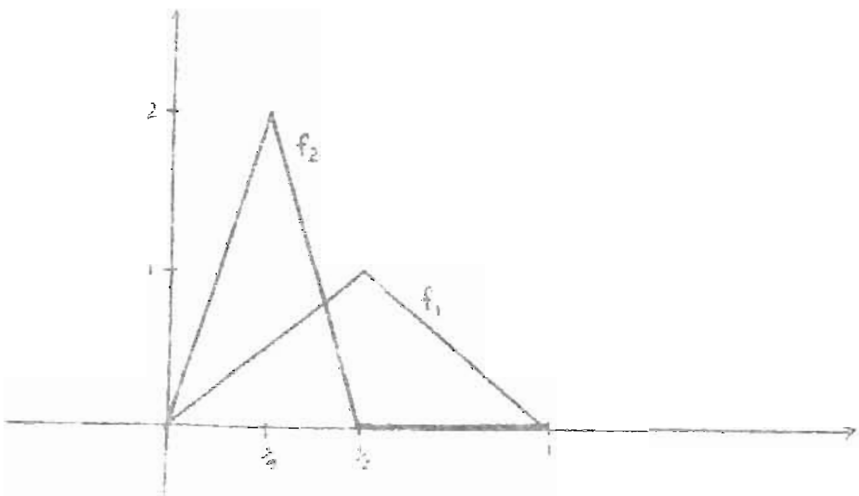
pasando al límite es $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\int_a^b (f-f_n)\right| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \|f-f_n\|.(b-a) = 0$

y así $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b (f-f_n) = \int_a^b f - \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n = 0$

$$\therefore \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n .$$

Es de importancia que la convergencia a f sea <u>uniforme</u>, -- pues si ésta no lo es, no puede asegurarse que f sea integrable y/o que $\int_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n$. Por ejemplo, sea la su cesión $(f_n)_{n\geq 1}$ definida así:

$$f_n = \begin{cases} 2n^2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ n-2n^2(x-\frac{1}{2n}) & \text{si } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Es claro que para cada n la función f_n es continua en $[0,1]$ y por lo tanto integrable. Por cálculo directo se obtiene

$$\int_0^1 f_n = \frac{1}{2} \qquad \text{para } n = 1,2,\ldots$$

Además la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a la función $f = 0$. Y como $\int_0^1 0\,dx = 0$ se tiene

$$\int_0^1 f \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n.$$

CAPITULO 2

ALGEBRA DE CONJUNTOS Y FUNCION MEDIDA

En el presente capítulo se estudia en forma general las propiedades principales de la clase de conjuntos que forman una σ-algebra, ya que interesa, en el desarrollo de la Integral de Lebesgue particularmente, el estudio de la clase de sub-conjuntos medibles de $\mathbb{R}$ la que constituye especialmente una σ-algebra de conjuntos. También se estudia en forma general la función medida (más brevemente la medida) y sus propiedades más importantes, para luego en el próximo capítulo estudiar una medida especial, como es la medida de Lebesgue.

ALGEBRA DE CONJUNTOS

DEFINICION (1)

Sea X un conjunto. Una clase no vacía R de subconjuntos de X es un anillo si:

i) $A \cup B \in R$ cuando $A, B \in R$.

ii) $A - B \in R$ cuando $A, B \in R$.

Es decir que un anillo es una clase no vacía de conjuntos, la cual es cerrada para la formación de uniones finitas y diferencias.

EJEMPLOS

Sea X un conjunto:

a) El conjunto $\{X, \Phi\}$ es un anillo.

b) El conjunto P(X) es un anillo.

PROPOSICION (2)

El conjunto vacío pertenece a todo anillo R.

DEMOSTRACION

Sea R un anillo y $E \in R$. Por (1-ii) se concluye que $\Phi = E - E \in R$.

PROPOSICION (3)

Una clase no vacía R de partes de X es un anillo si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes[1]:

i) $A \cap B \in R$; si $A, B \in R$.

ii) $A \Delta B \in R$; si $A, B \in R$.

[1] En realidad si R es un anillo, puede demostrarse que: i) (R, Δ) es un grupo abeliano; ii) $(R, \cap)$ es un semi-grupo; iii) la operación $\cap$ es distributiva respecto de Δ.

DEMOSTRACION

Se mostrará primero que si R es un anillo, él es cerrado para la formación de diferencias simétricas e intersecciones:

Sea $A, B \in R$. Como R es un anillo, $(A - B) \in R$ y $(B - A) \in R$ y por consiguiente

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \in R. \qquad (1)$$

Ahora bien, como $A \Delta B \in R$ por (1) y $A \cup B \in R$ por hipótesis. Tendremos

$$A \cap B = (A \cup B) - (A \Delta B) \in R. \qquad (2)\ .$$

Ahora hay que mostrar que si R es cerrado para la formación de diferencias simétricas e intersecciones, será cerrado para la formación de uniones y diferencias.

Basta observar las igualdades siguientes.

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$$

$$A - B = A \Delta (A \cap B)$$

PROPOSICION (4)

Un anillo R es cerrado para la formación de uniones finitas e intersecciones finitas.

DEMOSTRACION

Sea $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$; $A_i \in R$ $i = 1, 2, \ldots, n$ una sucesión finita de elementos de R. Hay que mostrar que $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \in R$ y $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \in R$.

Por definición (1) y proposición (3-i) se tiene

$$\bigcup_{i=1}^{2} A_i \in R \quad y \quad \bigcap_{i=1}^{2} A_i \in R$$

Supongamos que la proposición es válida para n - 1. Es decir

$$A' = (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \in R \quad y \quad A'' = (\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \in R.$$

Usando nuevamente la definición (1) y proposición (3-i) se puede asegurar que

$$A' \cup A_n \in R \quad y \quad A'' \cap A_n \in R$$

pero

$$A' \cup A_n = (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A'' \cap A_n = (\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$\therefore \quad (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \in R \quad y \quad (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \in R$$

<u>DEFINICION (5)</u>

Sea X un conjunto y $R \subset P(X)$. R será un σ - anillo si:

i) $A - B \in R$ cuando $A, B \in R$.

ii) Si $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de elementos de R entonces $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in R$.

DEFINICION (6)

Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subset P(X)$. Diremos que $\mathcal{A}$ es un álgebra si:

i) $\mathcal{A}$ es un anillo.

ii) Si $A \in \mathcal{A}$, $A' \in \mathcal{A}$.

Evidentemente $X \in \mathcal{A}$, pues $\phi \in \mathcal{A}$ (por ser $\mathcal{A}$ un anillo).

DEFINICION (7)

Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subset P(X)$. Diremos que es un σ-álgebra si:

i) $\mathcal{A}$ es un σ-anillo.

ii) Si $A \in \mathcal{A}$, $A' \in \mathcal{A}$

EJEMPLO

El conjunto $P(X)$ es un σ-álgebra.

LEMA (8)

La intersección de toda familia de anillos es un anillo.

DEMOSTRACION

Sea $(R_i)_{i \in I}$ una familia de anillos de partes de X; hay que mostrar que $R^* = \bigcap_{i \in I} R_i$ es un anillo.

Sean $A, B \in R^*$. Quiere decir esto que $A, B \in R_i$ $\forall\, i \in I$; y como cada R_i es un anillo, tendremos

$$A \cup B \in R_i \,, \quad \forall\, i \in I$$

$$A - B \in R_i \,, \quad \forall\, i \in I$$

por lo que

$$A \cup B \in \bigcap_{i \in I} R_i$$

$$A - B \in \bigcap_{i \in I} R_i$$

$\therefore$ R^* es cerrado para las uniones finitas y diferen--cias.

<u>PROPOSICION (9)</u>

Sea X un conjunto y $\mathcal{E}$ una clase no vacía de partes de X. Existe entonces un único anillo R_0 de partes de X que contiene a $\mathcal{E}$ y es contenido a la vez por todo anillo R de partes de X que contiene a $\mathcal{E}$.

<u>DEMOSTRACION</u>

Se puede asegurar la existencia de al menos un anillo de partes de X que contiene a $\mathcal{E}$, pues $P(X)$ es un anillo.

Sea $(R_i)_{i \in I}$ la familia de anillos de partes de X tal que $\mathcal{E} \subset R_i$, $\forall\, i \in I$, y sea $R_0 = \bigcap_{i \in I} R_i$.

Por el lema anterior R_0 es un anillo, y por construcción $R_0 \subset R_i \quad \forall\, i \in I$

Por otra parte $\xi \subset \bigcap_{i \in I} R_i = R_0$, pues $\xi \subset R_i$, $\forall i \in I$. Queda mostrado que R_0 es un anillo que contiene a ξ y es contenido a la vez por todo anillo R_i que contiene a ξ

Hay que mostrar ahora que R_0 es único. Sea R_{i_0} el más pequeño anillo que contiene a ξ. Entonces $R_{i_0} \subset R_0$ pues $\xi \subset R_0$ y R_0 es un anillo. Por otra parte $R_0 \subset R_{i_0}$ por definición de R_0. Por lo que se concluye que $R_0 = R_{i_0}$.

NOTACION

R_0 es el más pequeño anillo de partes de X que contiene a ξ. Dicho anillo se llama "el anillo generado por la clase ξ" y lo denotaremos por $R(\xi)$.

PROPOSICION (1[illegible])

Sea X un conjunto y $\xi \subset P(X)$. Todo elemento de $R(\xi)$ está contenido en una unión finita de elementos de ξ.

DEMOSTRACION

Sea $R = \{A \subset X \mid A$ está contenido en una unión finita de elementos de $\xi\}$. Hay que mostrar primero que R así definido es un anillo.

Sean $A, B \in R$. Existen entonces dos sucesiones

$(A_i)_{i=1}^{n}$ y $(B_i)_{i=1}^{m}$ con $A_i, B_i \in \xi$ tal que

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad ; \quad B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$$

por lo que

$$A \cup B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} B_i\right), \quad \text{con } A_j, B_i \in \xi \ \ \forall\, i.$$

Existen, así a lo sumo $n + m$ elementos de ξ que cubren a $A \cup B$. Por lo tanto

$$A \cup B \in R \qquad (1)$$

por otra parte

$$A - B \subset A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

es decir

$$A - B \in R \qquad (2)$$

de (1) y (2) se concluye que R es un anillo.

Finalmente hay que mostrar que $R(\xi) \subset R$.

Es evidente (por definición de R) que $\xi \subset R$. Quiere decir esto que R es un anillo de partes de X que contiene a ξ. Y por consiguiente (por proposición 9) contiene al anillo generado por ξ "$R(\xi)$".

LEMA ([illegible])

La intersección de toda familia de σ-anillos es un σ-anillo.

DEMOSTRACION

Sea $(\sigma_i)_{i\in I}$ una familia de σ - anillos de partes de X. Hay que mostrar que $\sigma = \bigcap_{i\in I} \sigma_i$ es un σ - anillo.

a) Sean $A, B \in \sigma$, entonces $A, B \in \sigma_i$ $\forall\, i \in I$. Como cada σ_i es un σ - anillo, se tiene $A - B \in \sigma_i$ $\forall\, i \in I$, por lo que $(A-B) \in \bigcap_{i\in I} \sigma_i = \sigma$. (1)

b) Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos de σ, entonces $(A_n)_{n\geq 1}$ será una sucesión de elementos de σ_i, $\forall\, i \in I$. Como cada σ_i es cerrado para las uniones numerables, se tiene $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in \sigma_i$ $\forall\, i \in I$, por lo que

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in \bigcap_{i\in I} \sigma_i = \sigma . \qquad (2)$$

De (1) y (2) se concluye que σ es un σ - anillo.

PROPOSICION (12)

Sea X un conjunto y ξ una clase no vacía de partes de X. Existe entonces un único σ - anillo $\sigma(\xi)$ de partes de X que contiene a ξ y es contenido a la vez por todo σ - anillo σ_i que contiene a ξ.

DEMOSTRACION

Se puede asegurar la existencia de al menos un

σ - anillo de partes de X que contiene a ξ, pues $P(X)$ es un σ - anillo.

Sea $(\sigma_i)_{i \in I}$ la familia de σ - anillos de partes de X tal que $\xi \subset \sigma_i$, $\forall\ i \in I$ y sea $\sigma(\xi) = \bigcap_{i \in I} \sigma_i$.

Por el lema (11) se asegura que $\sigma(\xi)$ es un σ - anillo y por construcción de $\sigma(\xi)$ se tiene

$$\sigma(\xi) \subset \sigma_i \quad \forall\ i \in I .$$

Además como $\xi \subset \sigma_i$, $\forall\ i \in I$ se tiene

$$\xi \subset \bigcap_{i \in I} \sigma_i = \sigma(\xi).$$

Hay que mostrar ahora que $\sigma(\xi)$ es único.

Sea σ_{i_0} el más pequeño σ - anillo que contiene a ξ. Entonces

$$\sigma_{i_0} \subset \sigma(\xi) \qquad \text{por ser} \quad \xi \subset \sigma(\xi). \qquad (1)$$

Además

$$\sigma(\xi) \subset \sigma_{i_0} \quad \text{por construcción de } \sigma(\xi) \qquad (2)$$

de (1) y (2) se concluye

$$\sigma(\xi) = \sigma_{i_0} .$$

NOTA

$\sigma(\xi)$ es el más pequeño σ - anillo de partes de X

que contiene a ξ. A dicho σ - anillo se le llama "el σ - anillo generado por ξ".

PROPOSICION (17)

Sea X un conjunto y ξ una clase no vacía de partes de X. Entonces cada elemento de $\sigma(\xi)$ está contenido en una unión numerable de elementos de ξ.

DEMOSTRACION

Sea $\sigma = \{A \subset X \mid A$ está contenido en una unión numerable de elementos de $\xi\}$.

Se mostrará que σ así definido es un σ - anillo.

Sean $A, B \in \sigma$, es decir que existen dos sucesiones $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ con $A_i \in \xi$ y $B_i \in \xi$ $i = 1, 2, \ldots$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

entonces $A - B \subset A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ por lo que

$$A - B \in \sigma. \qquad (1)$$

Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de σ, quiere decir esto que para cada E_n existe una sucesión $(A_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ con $A_{n_i} \in \xi$, $i = 1, 2, \ldots$ tal que

$$E_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n_i} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n_i} \Big) \qquad \text{con} \quad A_{n_i} \in \xi$$

por lo que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ está contenido en una unión numerable de elementos de ξ. Es decir

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma. \qquad (2)$$

De (1) y (2) se concluye que σ es un σ - anillo. Es claro, además que $\xi \subset \sigma$. Por lo que σ es un σ - anillo de partes de X que contiene a ξ, y por consiguiente

$$\sigma(\xi) \subset \sigma.$$

LEMA (14)

La intersección de toda familia de σ - álgebras de partes de X es una σ - álgebra de partes de X.

DEMOSTRACION:

Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de σ - álgebras de partes de X, hay que mostrar que $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ es una σ - álgebra

i) Es inmediato, por lema (11), que A es un σ - anillo de partes de X (pues cada A_i es un σ - anillo).

ii) Sea $A \in A$, quiere decir esto que $A \in A_i$ $\forall i \in I$ y como cada A_i es una σ - álgebra, tendremos

$$M \in \mathcal{A}_i \quad \forall\, i \in I \quad \text{y así}$$

$$M \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$$

De (i) y (ii) se concluye que $\mathcal{A}$ es una σ - álgebra.

PROPOSICION (15)

Sea X un conjunto y ξ una clase no vacía de partes de X. Existe entonces una única σ - álgebra $\mathcal{A}(\xi)$ de partes de X que contiene a ξ y que es contenido a la vez por toda σ - álgebra $\mathcal{A}_i$ que contiene a ξ.

DEMOSTRACION

Se puede asegurar la existencia de al menos una σ - álgebra de partes de X que contiene a ξ, pues P(X) es un σ - álgebra.

Sea $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ la familia de σ - álgebras de partes de X tal que $\xi \subset \mathcal{A}_i$, $\forall\, i \in I$ y sea $\mathcal{A}(\xi) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

Por el Lema (14) sabemos que $\mathcal{A}(\xi)$ es una σ - álgebra, y por construcción de $\mathcal{A}(\xi)$ se tiene

$$\mathcal{A}(\xi) \subset \mathcal{A}_i \qquad \forall\, i \in I$$

Además

$$\xi \subset \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}(\xi) \text{ pues } \xi \subset \mathcal{A}_i, \ \forall\, i \in I.$$

Ahora hay que mostrar que $\mathcal{A}(\xi)$ es única.

Sea A_{i_0} la más pequeña σ - álgebra que contiene a ξ. Queremos demostrar que

$$A_{i_0} \subset A(\xi) \quad \text{pues } \xi \subset A(\xi). \qquad (1)$$

Además, por construcción de $A(\xi)$ se tiene

$$A(\xi) \subset A_{i_0} . \qquad (2)$$

Luego (1) y (2) se concluye

$$A(\xi) = A_{i_0} .$$

NOTA

$A(\xi)$ se llama "la σ - álgebra generada por ξ" la cual es la más pequeña σ - álgebra que contiene a ξ.

DEFINICION (1.6)

Se llama "σ - álgebra de Borel" (y se denota por B) a la σ - álgebra generada por la clase de todos los conjuntos abiertos de R.

A todo elemento de B le llamaremos "conjunto de Borel" o "Boreliano"

Nótese que todo conjunto cerrado es un Boreliano puesto que es el complemento de un conjunto abierto. Además, todo intervalo (abierto, cerrado, semi-abierto) es también un Boreliano

PROPOSICION (17)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de conjuntos y $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$. Existe entonces una sucesión $(B_n)_{n\geq 1}$ de elementos de $\mathcal{A}$ dos a dos disjuntos y tal que

$$\bigcup_{n\geq 1} B_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n .$$

DEMOSTRACION

Sea

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1 && = A_1 \\
B_2 &= A_2 - A_1 && = A_2 \cap A_1' \\
B_3 &= A_3 - (A_1 \cup A_2) && = A_3 \cap A_1' \cap A_2' \\
&\vdots && \vdots \\
B_n &= A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) && = A_n \cap A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_{n-1}' \\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{A}$ es un álgebra, los complementos e intersecciones de elementos de $\mathcal{A}$ están en $\mathcal{A}$, tenemos $B_n \in \mathcal{A}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Se mostrará ahora que los B_n son dos a dos disjuntos. Sea B_n y B_m con $n \neq m$. Supongamos $m < n$ entonces

$$B_m = A_m \cap A_1' \cap \ldots \cap A_{m-1}'$$

$$B_n = A_n \cap A_1' \cap \ldots \cap A_m' \cap \ldots \cap A_{n-1}'$$

Como en B_m aparece el conjunto A_m y en B_n aparece A_m' se tiene claramente que $B_m \cap B_n = \phi$.

Seguidamente hay que mostrar la igualdad siguiente $\bigcup_{n \geq 1} B_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n$.

Como $B_n \subset A_n$ para todo $n \in N$, la inclusión en un sentido es clara, es decir

$$\bigcup_{n \geq 1} B_n \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n . \qquad (1)$$

Mostremos ahora la inclusión en el otro sentido. Sea $x \in \bigcup_{n \geq 1} A_n$ y k el mínimo natural tal que $x \in A_k$. Tenemos entonces

$$x \in A_k - (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{k-1}) = B_k \subset \bigcup_{n \in N} B_n$$

por lo tanto

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n \subset \bigcup_{n \geq 1} B_n \qquad (2)$$

De (1) y (2) se concluye

$$\bigcup_{n \in N} A_n = \bigcup_{n \in N} B_n .$$

FUNCION MEDIDA

En esta sección se definirá en forma general lo -- que es una función medida o más comúnmente una medida, así como también se estudiará algunas propiedades de la misma; en el capítulo siguiente se estudiará particularmente la medida de Lebesgue.

DEFINICION (15) (Función de conjunto)

Sea X un conjunto. Una función de conjunto es una función ν cuyo dominio de definición es una clase de -- conjuntos $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C} \subset P(X)$ y su codominio es el sistema ampliado de números reales. Es decir

$$\nu : \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} : E \longmapsto \nu(E).$$

EJEMPLO

Sea I un intervalo (abierto, cerrado o semi-abierto) de $\mathbb{R}$ con extremos a y b $(a < b)$. Se define la longitud de dicho intervalo, la cual se denota por $\ell(I)$, -- como la diferencia de los puntos extremos

$$\ell(I) = b - a$$

la longitud así definida es una función de conjunto cuyo dominio es la clase de los intervalos de $\mathbb{R}$

<u>DEFINICION (19)</u>

Sea una función de conjunto. $\nu : \xi \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

i) Se dice que ν es <u>numerablemente aditiva</u> si para toda sucesión $(E_n)_{n\geq 1}$ de elementos de ξ dos a dos disjuntos y tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \xi$; se tiene

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) .$$

ii) Se dice que ν es <u>numerablemente subaditiva</u> si para toda sucesión $(E_n)_{n\geq 1}$ de elementos de ξ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \xi$, se tiene

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

iii) La función de conjunto ν será llamada <u>monótona</u> si $\nu(E) \leq \nu(F)$ siempre que $E \subset F$ y $E, F \in \xi$.

iv) ν será <u>sustractiva</u> si $\nu(F - E) = \nu(F) - \nu(E)$ siempre que $E \subset F$, $F - E \in \xi$, $|\nu(E)| < +\infty$ y $E, F \in \xi$.

<u>NOTA</u>

En las definiciones (i) y (ii) si las igualdades se cumplen para sucesiones finitas, se dice que ν es <u>finitamente aditiva</u> y <u>finitamente subaditiva</u>, respectivamento.

DEFINICION (20) (FUNCION MEDIDA)

Sea X un conjunto. Una función de conjunto "μ", cuyo dominio es un σ - álgebra $\mathcal{A} \subset P(X)$, es llamada medida si.

i) $\mu(\phi) = 0$

ii) $\mu(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

iii) μ es numerablemente aditiva. Es decir, si $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ dos a dos disjuntos, será

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \text{ .}$$

Evidentemente, toda medida μ es finitamente aditiva, pues $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n \cup \phi \cup \phi \ldots$

EJEMPLO

La función de probabilidad p definida sobre una σ - álgebra $\mathcal{A}$ de eventos (un evento es un subconjunto de un espacio muestral X), es medida. Aún más p es una medida finita, pues $p(E) < +\infty$ $\forall E \in \mathcal{S}$.

PROPOSICION (21)

Si μ es una medida sobre una σ - álgebra $\mathcal{A}$, entonces μ es monótona y sustractiva

DEMOSTRACION

Sean E y F elementos de $\mathbb{A}$ tales que $E \subset F$. Será $(F - E) \in \mathbb{A}$ (por ser $\mathbb{A}$ cerrada para las diferencias). Además del hecho que $F = E \cup (F - E)$ y $E \cap (F - E) = \phi$ se tiene (por ser μ finitamente aditiva)

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E) \qquad (1)$$

por lo tanto $\mu(E) \leq \mu(F)$ pues $\mu(F - E) \geq 0$. Lo que significa que μ es monótona.

Si se tiene además que $\mu(E) < + \infty$, de la ecuación (1) se concluye lo siguiente

$$\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$$

lo que significa que μ es sustractiva.

PROPOSICION (22)

Sea X un conjunto y μ una medida sobre una σ - álgebra $\mathbb{A}$ de partes de X.

i) Si $E \in \mathbb{A}$, $(E_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de elementos de $\mathbb{A}$ tal que $E_n \cap E_j = \phi$, $n \neq j$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset E$.

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu(E) .$$

ii) μ es numerablemente subaditiva. Es decir, si $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ se tiene

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

DEMOSTRACION

i) Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset E$ y μ es monótona,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \mu(E) . \qquad (1)$$

Además, por definición (20)

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) . \qquad (2)$$

De (1) y (2) se concluye

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu(E) .$$

ii) Sea $B_1 = A_1$

$$B_2 = A_2 - A_1$$

$\vdots$

$$B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$$

Con la sucesión $(B_n)_{n\geq 1}$ así formada tendremos

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{y} \quad B_k \cap B_j = \emptyset \quad \text{para } k \neq j.$$

Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n). \qquad (3)$$

Además, como $B_n \subset A_n$ para $n = 1, 2, \ldots$ y μ es monótona, se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) . \qquad (4)$$

Por lo tanto, de (3) y (4) se concluye

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

COROLARIO (23)

Si $E \in \mathbb{A}$ y $(E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de elementos de $\mathbb{A}$ tal que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Entonces

$$\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) .$$

DEMOSTRACION

Como $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y μ es monótona,

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) . \qquad (1)$$

Además, por ser μ numerablemente subaditiva

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) . \qquad (\;.\;)$$

Por lo tanto

$$\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) .$$

DEFINICION (28)

i) $(E_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión creciente de conjuntos si

$$E_n \subset E_{n+1} \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

ii) $(E_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión decreciente de conjuntos si $E_n \supset E_{n+1}$; $n = 1, 2, \ldots$

iii) Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de conjuntos, se define

$$\operatorname{Sup}_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\operatorname{Inf}_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup} A_n = \operatorname*{Inf}_{n \in N} \operatorname*{Sup}_{k \geq n} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Inf} A_n = \operatorname*{Sup}_{n \in N} \operatorname*{Inf}_{k \geq n} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k .$$

iv) Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos, se dice que $\lim_{n\to\infty} A_n$ existe y es igual a L si y sólo si

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = L.$$

LEMA (25)

a) Si $(E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de conjuntos, existe el límite y es igual a $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$.

b) Si $(E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de conjuntos, existe el límite y es igual a $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)$.

DEMOSTRACION

a) Hay que mostrar, según la definición (24-iv), que

$$\limsup_{n} E_n = \liminf_{n} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

i) $\limsup_{n} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ (1)

como $E_n \subset E_{n+1}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ se cumple que

$\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ y por consiguiente

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

y así

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \qquad (2)$$

sustituyendo (2) en (1) se obtiene

$$\operatorname*{Lim\,Sup}_n E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k . \qquad (3)$$

ii) $$\operatorname*{Lim\,Inf}_n E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \qquad (4)$$

Como $E_n \subset E_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots\ldots$ tendremos

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = E_n$$

y sustituyendo este resultado en la ecuación (4) se obtiene

$$\operatorname*{Lim\,Inf}_n E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n . \qquad (5)$$

De (5) y (3) se obtiene

$$\operatorname*{Lim\,Sup}_n E_n = \operatorname*{Lim\,Inf}_n E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n .$$

b) Sea $(E_n)_{n \geq 1}$ una sucesión decreciente de conjuntos.

Hay que mostrar, según la definición (24-iv) que

$$\operatorname*{Lim\,Sup}_n E_n = \operatorname*{Lim\,Inf}_n E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n .$$

i) $\lim\limits_{n} \text{Sup}\ E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$ (1)

Como $E_n \supset E_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = E_n \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene

$\text{Lim Sup}\ E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ (3)

ii) $\lim\limits_{n} \text{Inf}\ E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} E_k$ (4)

por el hecho de que $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} E_k \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n-1} E_k$ resulta

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right) \cap \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) se obtiene que

$\lim\limits_{n} \text{Inf}\ E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ (6)

Comparando (6) con (3) concluimos

$\lim\limits_{n} \text{Sup}\ E_n = \lim\limits_{n} \text{Inf}\ E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

PROPOSICION (26)

Sea X un conjunto y μ una medida sobre una σ - álgebra $\mathcal{A}$ de partes de X.

a) Si $(E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{A}$, será $\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n)$.

b) Si $(E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de elementos de $\mathcal{A}$ para la cual existe al menos un E_n con medida finita, entonces $\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n)$.

<u>DEMOSTRACION</u>

a) Construyamos una sucesión $(B_n)_{n\geq 1}$ de conjuntos dos a dos disjuntos y tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Así

Sea $E_0 = B_0 = \emptyset$

$B_1 = E_1 - E_0$

$B_2 = E_2 - E_1$

$\vdots$

$B_n = E_n - E_{n-1}$

$\vdots$

Evidentemente, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y además los B_n son dos a dos disjuntos. (1)

Como E_n es creciente, por lema (25) se concluye que $\lim_n E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. (2)

Tomando en cuenta (2) y (1) se afirma

$$\mu(\lim_n E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \quad . \quad (3)$$

Por otra parte

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{n} (E_i - E_{i-1})) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3) obtenemos

$$\mu(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

b) Supongamos que $\mu(A_n) < +\infty$. Por lema (25-ii) y proposición (21) (μ es monótona). Será

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \mu(A_n) \leq \mu(A_m) < +\infty \quad \forall n \geq m \quad (I)$$

Sea $B_1 = A_m$;

$B_2 = A_m - A_2$

⋮

$B_n = A_m - A_n$

⋮

La sucesión $(B_n)_{n\geq 1}$ así formada es creciente.

Aplicando lema (25-i) y proposición (26-a)

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_m - A_n) \qquad (2)$$

Cuando $n \leq m$, $\mu(A_m - A_n) = \mu(A_m) - \mu(A_n)$. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_m - A_n) = \lim_{n\to\infty} \left[\mu(A_m) - \mu(A_n)\right]$$

$$= \mu(A_m) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \qquad (3)$$

Por lo tanto, sustituyendo (3) en (2) se obtiene

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(A_m) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \qquad (4)$$

Por otra parte, tomando en cuenta la igualdad en la expresión (1), el hecho de que $\mu(A_m) < +\infty$ y la proposición (21) (μ es sustractiva) se tiene

$$\mu(A_m) - \mu(\lim_n A_n) = \mu(A_m) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) =$$

$$\mu\left(A_m - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \qquad (5)$$

Además, por el hecho de que $A_m - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

y considerando la igualdad (4) obtenemos de (5)

$$\mu(A_m) - \mu(\lim_n A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(A_m) - \lim_n \mu(A_n)$$

$$\therefore \quad \mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

CAPITULO 3
MEDIDA DE LEBESGUE

Como se verá en el capítulo 4, la condición necesaria y suficiente para que una función f sea lebesgue - integrable es que tal función sea una función medible[1]. Por tal razón, en el presente capítulo se estudiará la medida de Lebesgue y especialmente las funciones medibles.

MEDIDA EXTERIOR

La longitud $\ell(I)$ de un intervalo I con extremos a y b, (a < b), se define como la diferencia de los puntos extremos del intervalo.

Es decir

$$\ell(I) = b - a.$$

En la presente sección extenderemos la noción de longitud de intervalo a subconjuntos cualesquiera de $\mathbb{R}$.

Sea $E \subset \mathbb{R}$ y $\{\lambda_k\}_{k\in K}$ la familia de colecciones numerables de intervalos abiertos que cubren a E. Es decir $\lambda_k = (I_{k_j})_{j\geq 1}$ donde I_{k_j} es un intervalo abierto y además $E \subset \bigcup_{j\geq 1} I_{k_j}$.

DEFINICION (1) (Medida exterior de un conjunto).

Sea $E \subset \mathbb{R}$. Se define la medida exterior del conjunto E, y se denota por $\mu^*(E)$, como

$$\mu^*(E) = \operatorname*{Inf}_{k \in K} \sum_{j \geq 1} \ell(I_{k_j}) .$$

Claramente $\sum_{j \geq 1} \ell(I_{k_j})$ es infinito o bien un número positivo, pues $\ell(I_{k_j}) \geq 0$. Es decir que μ^* es una función de conjunto tal que

$$\begin{aligned} \mu^* : P(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ E &\rightsquigarrow \mu^*(E) . \end{aligned}$$

PROPOSICION (2)

i) La medida exterior del conjunto vacío es cero. Es decir, $\mu^*(\Phi) = 0$.

ii) La medida exterior de un conjunto unitario es cero. Es decir, si $x \in \mathbb{R}$ tendremos $\mu^*(\{x\}) = 0$.

iii) La medida exterior es una función de conjunto monótona.

DEMOSTRACION

i) Sea $\varepsilon > 0$ y $I = (-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$. Como Φ es subconjunto de todo intervalo se tiene $\Phi \subset I$ y por consiguiente $0 \leq \mu^*(\Phi) < \ell(I) = \varepsilon$.

Como ε es arbitrario, será tan pequeño como queramos, y así $\mu^*(\phi) = 0$.

ii) Sea $\varepsilon > 0$, tendremos $\{x\} \subset (x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2})$, luego $0 \leq \mu^*(\{x\}) < \ell((x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2})) = \varepsilon$.

Como ε es arbitrario, será $\mu^*(\{x\}) = 0$.

iii) Sea $A \subset B$ con $A, B \subset \mathbb{R}$

Como $A \subset B$, todo cubrimiento abierto de B lo es también de A y por consiguiente $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

LEMA ([illegible])

Sea $F = [a, b]$ un intervalo cerrado y $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$ una colección finita de intervalos abiertos que cubre a F. Entonces

$$\ell(F) = b - a < \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

DEMOSTRACION

Sea $I_k = (a_k', b_k')$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Como F es cubierto por la colección $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$, habrá un k_1 tal que $a \in I_{k_1} = (a_{k_1}', b_{k_1}')$. Si $b_{k_1}' \leq b$, habrá un k_2 tal que $b_{k_1}' \in I_{k_2} = (a_{k_2}', b_{k_2}')$. Si $b_{k_2}' \leq b$, habrá un k_3 tal que $b_{k_2}' \in I_{k_3} = (a_{k_3}', b_{k_3}')$, y así sucesivamente. Como el cubrimiento de F es finito el proceso terminará con algún I_k. Sea este I_{k_m}. Es decir $b'_{k_m} > b$.

Se puede entonces formar la subcolección $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$ de intervalos abiertos tal que $I_{k_i} = U_i = (a_i , b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ será por consiguiente

$$a_1 < a < b_1 \tag{1}$$

$$a_i < b_{i-1} < b_i \; ; \; i = 2, 3, \ldots, m \tag{2}$$

$$a_m < b < b_m \tag{3}$$

Como $a_1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_m$, resulta

$$b_m - a_1 = (b_1 - a_1) + \sum_{i=2}^{m} (b_i - b_{i-1}) \tag{4}$$

de la desigualdad (2) se observa que $-b_{i-1} < -a_i$ y por lo tanto

$$b_i - b_{i-1} < b_i - a_i \; ; \quad i = 2, 3, \ldots, m$$

Sumando miembro a miembro se obtiene

$$\sum_{i=2}^{m} (b_i - b_{i-1}) < \sum_{i=2}^{m} (b_i - a_i) \tag{5}$$

Del hecho que $a_1 < a < b < b_m$ se asegura que $b - a < b_m - a_1$. Sustituyendo (5) en (4) será

$$b-a < b_m - a_1 < (b_1 - a_1) + \sum_{i=2}^{m} (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \qquad (6)$$

Como $\sum_{i=1}^{m} \ell(I_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \ell(I_i)$ se concluye

$$b - a < \sum_{i=1}^{n} \ell(I_i).$$

PROPOSICION ([illegible])

La medida exterior de un intervalo I es su longitud.

DEMOSTRACION

Se analizará el caso en que el intervalo I es un intervalo cerrado y acotado de extremos a y b. Es decir, $I = [a, b]$. Mostremos primero que $\mu^*(I) \geq b - a$, para esto basta mostrar que para cualquier colección numerable $(I_i)_{i \geq 1}$ de intervalos abiertos que cubren a I se tiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) \geq b - a \qquad (7)$$

Por el teorema de Heine - Borel se puede asegurar que cualquier colección que cubre a $[a, b]$ contiene una subcolección finita que cubre también a $[a, b]$ y como la suma de las longitudes de los intervalos de la subcolección no es más grande que la suma de las longitudes de los intervalos de la colección, es suficiente probar la desigualdad (1) para colecciones finitas que cubren a $[a, b]$. Sea $(I_i)_{1 \leq i \leq n}$ una colección finita de intervalos abiertos tal que $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. Por lema (3) se afirma que $b - a < \sum_{i=1}^{n} \ell(I_i)$ y así

$$\mu^*(I) \geq b - a . \qquad (2)$$

Mostremos ahora que $\mu^*(I) \leq b - a$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$I = [a, b] \subset (a - \tfrac{\varepsilon}{2}, b + \tfrac{\varepsilon}{2})$$

y así

$$\mu^*(I) < \ell((a - \tfrac{\varepsilon}{2}, b + \tfrac{\varepsilon}{2})) = b - a + \varepsilon .$$

Como ε es arbitrario se puede hacer tan pequeño como se quiera, y por consiguiente

$$\mu^*(I) \leq b - a . \qquad (3)$$

De las desigualdades (2) y (3) se concluye

$$\mu^*(I) = b - a .$$

Seguidamente se mostrará que la proposición es cierta para un intervalo acotado cualquiera I de extremos a y b, $a < b$. Sea $\varepsilon = \frac{b - a}{2n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, se tiene que:

$[a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}] \subset I \subset [a, b]$. Como la medida exterior es monótona resulta

$$\mu^*([a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}]) \leq \mu^*(I) \leq \mu^*([a, b])$$

y usando el primer caso de la demostración se asegura

$$b - a - \varepsilon \leq \mu^*(I) \leq b - a \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como ε se puede hacer tan pequeño como quiera, con sólo tomar un n bastante grande será

$$b - a \leq \mu^*(I) \leq b - a$$

$$\therefore \quad \mu^*(I) = b - a.$$

Consideremos ahora el caso en que I es un intervalo no acotado (es decir de longitud infinita). Para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá un intervalo cerrado $F \subset I$ tal que $\mu^*(F) = \ell(F) \geq n$. Como $\mu^*(I) \geq \mu^*(F)$ entonces $\mu^*(I) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente

$$\mu^*(I) = +\infty = \ell(I)$$

PROPOSICION (5)

La medida exterior es una función de conjunto numerablemente subaditiva. Es decir, si $(E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de conjuntos de $\mathbb{R}$,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) .$$

DEMOSTRACION

Si se da el caso que al menos uno de los E_n tiene medida exterior infinita la desigualdad es evidente.

Supongamos que $\mu^*(E_n) < +\infty$ para todo n. Dado $\varepsilon > 0$, existe una colección numerable $(I_{n_i})_{i\geq 1}$ de intervalos abiertos tal que

$$E_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n_i} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_{n_i}) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \; ; \; n = 1,2,3,\ldots$$

Ahora bien, la colección $(I_{n_i})_{(n,i)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ es una colección numerable por ser unión numerable de colecciones numerables, y además $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n_i}$ por lo tanto se tiene

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_{n_i})\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left[\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right] =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon .$$

Como ε es arbitrario se puede tomar tan pequeño como se quiera, y así

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) .$$

COROLARIO (6)

Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ numerable tiene medida exterior cero.

DEMOSTRACION

Sea $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}$. Es decir que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ con $x_n \in \mathbb{R}$.

Haciendo uso de las proposiciones (6) y (2-ii) se tiene

$$\mu^*(E) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(\{x_n\}) = 0.$$

CONJUNTOS MEDIBLES

La medida de Lebesgue está definida sobre una clase especial de conjuntos, la clase de conjuntos medibles, por dicha razón estudiaremos en esta sección a tales conjuntos.

DEFINICION (7) (Conjunto medible)

Sea $E \subset \mathbb{R}$. Diremos que E es medible si para cada $A \subset \mathbb{R}$ se tiene

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$$[1].

PROPOSICION (8)

Sea $E \subset \mathbb{R}$. Una condición necesaria y suficiente para que E sea medible es que para cada $A \subset \mathbb{R}$ se cumpla

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E') . \qquad (1)$$

DEMOSTRACION

Suponiendo que E es medible, por la definición (7) se concluye inmediatamente que se da

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'), \quad \forall A \subset \mathbb{R}.$$

Supongamos ahora que se da la desigualdad (1).

Como $A = (A \cap E) \cup (A \cap E')$ y la medida exterior es subaditiva (proposición (5))

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'). \qquad (2)$$

Por consiguiente de (1) y (2) se concluye

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E').$$

NOTA

En lo sucesivo cuando se quiera probar que un con-

1. E' significa el complemento de E.

junto es medible generalmente se hará uso de la proposición precedente.

PROPOSICION (9)

Sea $E \subset \mathbb{R}$ y $\mu^*(E) = 0$ entonces E es un conjunto medible.

DEMOSTRACION

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Como $A \cap E \subset E$ y la medida exterior es monótona

$$0 \leq \mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$$

de donde

$$\mu^*(A \cap E) = 0 . \qquad (1)$$

Por otra parte $A \cap E' \subset A$ y entonces

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E') \qquad (2)$$

por consiguiente de (1) y (2) se concluye la desigualdad siguiente

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$$

de la cual se concluye por la proposición (8) que el conjunto E es medible.

LEMA (10)

La familia de conjuntos medibles, denotada por $\mathcal{M}$, es un álgebra de conjuntos.

DEMOSTRACION

Mostremos primero que $\mathbb{M}$ es cerrada para la formación de uniones.

Sean E_1 y E_2 dos elementos de $\mathbb{M}$. Como E_1 es medible, para cualquier $A \subset \mathbb{R}$ se cumple

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1') . \qquad (1)$$

Como E_2 es medible, se tiene también

$$\mu^*(A \cap E_1) = \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2') \qquad (2)$$

$$\mu^*(A \cap E_1') = \mu^*(A \cap E_1' \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1' \cap E_2') =$$

$$\mu^*(A \cap E_1' \cap E_2) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)') . \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en la ecuación (1) se obtiene

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2') +$$

$$\mu^*(A \cap E_1' \cap E_2) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)'). \qquad (4)$$

Si se reemplaza A por $A \cap (E_1 \cup E_2)$ en la ecuación (4) se tiene

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2') +$$

$$\mu^*(A \cap E_1' \cap E_2) + \mu^*(\phi) \ . \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) resulta

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)')$$

$\therefore \ (E_1 \cup E_2) \in \mathbb{M}$.

Mostremos ahora que $\mathcal{M}$ es cerrada para la formación de diferencias.

Sean E_1 y E_2 dos elementos de $\mathcal{M}$. Si en la ecuación (4) se reemplaza A por $A \cap (E_1' \cup E_2) = A \cap (E_1 - E_2)'$ se obtiene

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap (E_1 - E_2)') &= \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*(\phi) \\ &\quad \mu^*(A \cap E_1' \cap E_2) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)') \\ &= \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1' \cap E_2) + \\ &\quad \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)') \qquad (6) \end{aligned}$$

Sustituyendo (6) en (4) se obtiene

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E_1 - E_2)') + \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2'))$$

$$= \mu^*(A \cap (E_1 - E_2)') + \mu^*(A \cap (E_1 - E_2))$$

$$\therefore \quad (E_1 - E_2) \in \mathcal{M}.$$

Mostremos finalmente que si $E \in \mathcal{M}$ también $E' \in \mathcal{M}$. Como E es medible, para todo $A \subset \mathbb{R}$ se cumple que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E') = \mu^*(A \cap E') + \mu^*(A \cap E).$$

Como $E = (E')'$, se tiene la siguiente igualdad

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E')) + \mu^*(A \cap (E')') \quad \therefore E' \in \mathcal{M}.$$

COROLARIO (11)

$\mathbb{R}$ y Φ son medibles.

DEMOSTRACION

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Entonces $A \cap \mathbb{R} = A$ y $A \cap \Phi = \Phi$ por lo tanto

$$\mu^*(A \cap \mathbb{R}) + \mu^*(A \cap \Phi) = \mu^*(A) + \mu^*(\Phi) = \mu^*(A)$$

$\therefore \mathbb{R}, \Phi \in \mathcal{M}$.

LEMA (12)

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ una colección finita de conjuntos medibles disjuntos dos a dos. Se tiene entonces la siguiente igualdad

$$\mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) .$$

DEMOSTRACION

Mostremos primeramente que la proposición es cierta para $n = 2$. Como E_1 es medible, se cumple la siguiente igualdad

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1'), \quad \forall A \subset \mathbb{R}. \quad (1)$$

Además E_2 es medible también, luego

$$\mu^*(A \cap E_1') = \mu^*(A \cap E_1' \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1' \cap E_2')$$

$$= \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)') \quad (2)$$

Si se sustituye (2) en (1) se obtiene

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)') \qquad (3)$$

Sustituyendo A por $A \cap (E_1 \cup E_2)$ en la ecuación (3), y tomando en cuenta las igualdades siguientes

$$A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1 = A \cap E_1$$

$$A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_2 = A \cap E_2$$

$$A \cap (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_2)' = \phi$$

se tiene la siguiente expresión

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2) \qquad (4)$$

por lo que se asegura que la proposición es válida para $n = 2$.

Supongamos que la proposición es válida para $n - 1$. Es decir

$$\mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu^*(A \cap E_i) . \qquad (5)$$

Ahora bien, $\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$ y E_n son medibles y

$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i) \cup E_n$. Por este hecho se puede hacer uso de la ecuación (4) y obtener

$$\mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) = \mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \cup E_n))$$

$$= \mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)) + \mu^*(A \cap E_n) .$$

Usando la hipótesis inductiva en la ecuación anterior resulta

$$\mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i).$$

LEMA (13)

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $(E_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos. Entonces

i) $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es medible.

ii) $\mu^*(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n)$.

DEMOSTRACION

Sea $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$.

Como F_n es medible y $\mu^*(A \cap F_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i)$, es

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap F_n').$$

Además, por la monotonía de μ^* se tiene

$\mu^*(A \cap E') \geq \mu^*(A \cap F_n')$, de donde

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E')$$

como la desigualdad anterior es válida para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta

$$\mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap E') \qquad (1)$$

como $A \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n)$, por la subaditividad de μ^*

se tiene $\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i)$. De donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap E') \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E') \qquad (2)$$

es claro además la desigualdad siguiente

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E') \geq \mu^*(A) \qquad (3)$$

Comparando las desigualdades (1), (2) y (3) se concluye

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E') \qquad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap E') = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E') \quad (5)$$

del resultado (4) se concluye que E es medible.

Para demostrar la segunda parte del lema, se sustituye A por $A \cap E$ en la ecuación (5), y así

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(\phi) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(\phi)$$

$$\therefore \quad \mu^*(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n).$$

Obsérvese que en la ecuación (5) no puede emplearse directamente la ley cancelativa, pues no se sabe si $\mu^*(A \cap E')$ es finito.

PROPOSICION (14)

La colección $\mathcal{M}$ de conjuntos medibles es una σ - álgebra de conjuntos.

DEMOSTRACION

Por lema (10) $\mathcal{M}$ es un álgebra de conjuntos, por lo que sólo resta mostrar que $\mathcal{M}$ es cerrada para las unio nes de colecciones numerables de elementos de $\mathcal{M}$. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{M}$. Por la proposición (2-17) se asegura que existe una sucesión $(B_n)_{n\geq 1}$ de elementos de $\mathcal{M}$ dos a dos disjuntos y tal que $\bigcup_{n\geq 1} B_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$, por lo que el lema anterior afirma que el conjunto $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ es medible.

LEMA (15)

Todo intervalo abierto $]a, b[$ es medible.

DEMOSTRACION

Como $]a, b[\; = \;]-\infty, b[\; \cap \;]a, +\infty[$, es suficiente mostrar que $]-\infty, b[$ y $]a, +\infty[$ son intervalos medibles.

Mostremos primeramente que $I =]-\infty, b[$ es medible. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Por proposición (8) es suficiente mostrar la siguiente desigualdad

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap I) + \mu^*(A \cap I') \, . \qquad (1)$$

En el caso que $\mu^*(A) = +\infty$ la desigualdad es obvia. Supongamos que $\mu^*(A) < +\infty$. Entonces, por definición de $\mu^*(A)$, para cada $\varepsilon > 0$ existe una colección -

numerable $(I_n)_{n\geq 1}$ de intervalos abiertos tal que

$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ y

$$\mu^*(A) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) . \qquad (2)$$

Sea $I_n' = I_n \cap I$ y $I_n'' = I_n \cap I'$[1] para $n = 1, 2, \ldots$.

Los I_n' y I_n'' así definidos son o vacíos o intervalos abiertos tales que

$$\mu^*(I_n) = \ell(I_n) = \ell(I_n') + \ell(I_n'') = \mu^*(I_n') + \mu^*(I_n'') \qquad (3)$$

Como $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ se tiene

$$A \cap I \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \cap I = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap I) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n'$$

$$A \cap I' \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \cap I' = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap I') = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n''$$

Por lo que

$$\mu^*(A \cap I) \leq \mu^*\left(\bigcup I_n'\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(I_n') \qquad (4)$$

$$\mu^*(A \cap I') < \mu^*\left(\bigcup I_n''\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(I_n'') \qquad (5)$$

---

1. I' significa complemento de I.

Sumando (4) y (5) miembro a miembro se obtiene

$$\mu^*(A \cap I) + \mu^*(A \cap I') \leq \sum_{n=1}^{\infty} [\mu^*(I_n') + \mu^*(I_n'')]$$

Por la ecuación (3) se tiene

$$\mu^*(A \cap I) + \mu^*(A \cap I') \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$$

de donde haciendo uso de la inecuación (2)

$$\mu^*(A \cap I) + \mu^*(A \cap I') < \mu^*(A) + \varepsilon .$$

Como ε es arbitrario, se puede tomar tan pequeño como se quiera, y así

$$\mu^*(A \cap I) + \mu^*(A \cap I') \leq \mu^*(A).$$

Por lo tanto $I = \,]-\infty, b[$ es medible.

Mostremos seguidamente que el intervalo $]a, +\infty[$ es medible. Por la parte anterior se puede asegurar que el intervalo $J = \,]-\infty, a[$ es medible. Y como $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra, $J' = [a, +\infty[$ será también medible. Por lo que $[a + \frac{1}{n}, +\infty[$ es medible para todo $n \in N$, y así $\bigcup_{n=1} [a + \frac{1}{n}, +\infty[\,= \,]a, +\infty[$ será medible.

$\therefore \;]-\infty, b[\,\cap\,]a, +\infty[\,=\,]a, b[\,\in \mathcal{M}.$

PROPOSICION (16)

La σ - álgebra $\mathcal{B}$ de Borel es un subconjunto de la σ - álgebra $\mathcal{M}$ de conjuntos medibles.

DEMOSTRACION

Cada conjunto abierto $\mathcal{O}$ se puede escribir como la reunión de una colección numerable de intervalos abiertos y disjuntos dos a dos[1], por lo que se puede afirmar que todo conjunto abierto $\mathcal{O}$ es un conjunto medible[2].

Significa esto que la σ - álgebra $\mathcal{M}$ contiene a la clase de los conjuntos abiertos; ahora bien, como $\mathcal{B}$ es la más pequeña σ - álgebra que contiene a la clase de los conjuntos abiertos (definición 2-10), tendremos por proposición (2-15) que $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$

DEFINICION (17) (Medida de Lebesgue).

Se llama medida de Lebesgue y se denota por μ a la función de conjunto μ^* restringida a la clase $\mathcal{M}$ de conjuntos medibles. Es decir $\mu: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ : E \rightsquigarrow \mu(E) = \mu^*(E)$.

1 Ver Real Analysis (H. L. Royden) Capítulo 2, Proposición 8

2 En particular todo conjunto abierto o cerrado es medible, aún más, todo conjunto que es la reunión e intersección numerable de abiertos y/o cerrados también es medible.

PROPOSICION (1[illegible])

La medida de Lebesgue μ es una función medida[1]. Es decir que μ satisface las tres propiedades siguientes

i) $\mu(\phi) = 0$.

ii) $\mu(A) \geq 0 \;;\quad \forall A \in \mathcal{M}$.

iii) μ es numerablemente aditiva.

DEMOSTRACION

Las propiedades i) y ii) son obvias, puesto que ellas son heredadas de la medida exterior μ^*. Hay que mostrar ahora que μ es numerablemente aditiva.

Sea $(E_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos dos a dos, por el hecho que $I \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y $I \cap E_n = E_n$ y haciendo uso del lema ([illegible] ii) se afirma que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) .$$

FUNCIONES MEDIBLES

DEFINICION ([illegible]) (Función Medible)

Sea $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función. Se dice que f es una función medible si su dominio E es medible y si se cumplen las dos condiciones siguientes

[1] Ver definición (2-20).

i) $f^{-1}(B)$ es medible para todo Boreliano B.

ii) $f^{-1}(\{-\infty\})$ y $f^{-1}(\{+\infty\})$ son conjuntos medibles.

PROPOSICION (20)

Sea $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función cuyo dominio es un conjunto medible. Las cuatro condiciones siguientes son equivalentes

i) $f^{-1}(\,]r, \infty]\,)$ es medible para todo $r \in \mathbb{R}$.

ii) $f^{-1}([r, \infty]\,)$ es medible para todo $r \in \mathbb{R}$.

iii) $f^{-1}([-\infty, r[\,)$ es medible para todo $r \in \mathbb{R}$.

iv) $f^{-1}([-\infty, r])$ es medible para todo $r \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACION

Supongamos primeramente que $f^{-1}(\,]r, \infty]\,)$ es medible para todo $r \in \mathbb{R}$. Como $[r, \infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]r - \frac{1}{n}, \infty\right]$ y $f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]r - \frac{1}{n}, \infty\right]\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left]r - \frac{1}{n}, \infty\right]\right)$ se cumple

$$f^{-1}([r, \infty]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left]r - \frac{1}{n}, \infty\right]\right)$$

por lo tanto $f^{-1}([r, \infty])$ es un conjunto medible por ser una intersección numerable de conjuntos medibles.

Supongamos ahora que $f^{-1}([r, \infty])$ es un conjunto medible para todo $r \in \mathbb{R}$. Como $[-\infty, r[= \overline{\mathbb{R}} - [r, \infty]$ y

$f^{-1}(\overline{\mathbb{R}} - [r, \infty]) = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) - f^{-1}([r, \infty]) = E - f^{-1}([r, \infty])$

se tiene

$$f^{-1}([-\infty, r[) = E - f^{-1}([r, \infty])$$

y así $f^{-1}([-\infty, r[$ es un conjunto medible por ser la diferencia de dos conjuntos medibles.

Supongamos ahora que $f^{-1}([-\infty, r[)$ es un conjunto medible para todo $r \in \mathbb{R}$. Como

$$[-\infty, r] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [-\infty, r + \frac{1}{n}[\quad \text{y}$$

$f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} [-\infty, r + \frac{1}{n}[) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}([-\infty, r + \frac{1}{n}[)$, será

$$f^{-1}([-\infty, r]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}([-\infty, r + \frac{1}{n}[$$

por lo que $f^{-1}([-\infty, r])$ es un conjunto medible por ser la intersección numerable de conjuntos medibles.

Finalmente, supongamos que $f^{-1}([-\infty, r])$ es un conjunto medible para todo $r \in \mathbb{R}$. Como $]r, \infty] = \overline{\mathbb{R}} - [-\infty, r]$ y además

$f^{-1}(\overline{\mathbb{R}} - [-\infty, r]) = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) - f^{-1}([-\infty, r]) = E - f^{-1}([-\infty, r])$, será $f^{-1}(\,]r, \infty]) = E - f^{-1}([-\infty, r])$ por lo que el conjunto $f^{-1}(\,]r, \infty])$ es medible por ser la diferencia de dos conjuntos medibles.

LEMA (21)

Sea $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función cuyo dominio es un conjunto medible. La clase $\xi = \{A \subset \overline{\mathbb{R}} \mid f^{-1}(A) \in \mathbf{M}\}$ es una σ-álgebra de conjuntos.

DEMOSTRACION

Mostremos primero que ξ es cerrada para la diferencia. Sean A_1 y A_2 dos elementos de ξ. Quiere decir esto que los conjuntos $f^{-1}(A_1)$ y $f^{-1}(A_2)$ son medibles. Como $f^{-1}(A_1 - A_2) = f^{-1}(A_1) - f^{-1}(A_2)$ se afirma que el conjunto $f^{-1}(A_1 - A_2)$ es medible, lo que significa que $(A_1 - A_2) \in \xi$.

Mostremos ahora que ξ es cerrada para las reuniones numerables. Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de elementos de ξ, lo que significa que $(f^{-1}(A_n))_{n \geq 1}$ es una sucesión de conjuntos medibles. Como $f^{-1}(\overset{\infty}{\cup} A_n) = \overset{\infty}{\cup} f^{-1}(A_n)$ se asegura que el conjunto $f^{-1}(\overset{\infty}{\cup} A_n)$ es medible para ser unión numerable de conjuntos medibles. $\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \xi$.

Finalmente, hay que mostrar que ξ es cerrada para la complementación. Sea $A \in \xi$, lo que significa que el conjunto $f^{-1}(A)$ es medible. Como $f^{-1}(A') = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}} - A) = E - f^{-1}(A)$ se concluye que el conjunto $f^{-1}(A')$ es medible y por consiguiente

$$A' \in \xi .$$

PROPOSICION (22)

Una función $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ será una función medible si y sólo si su dominio es medible y satisface una de las cuatro condiciones equivalentes de la proposición (20).

DEMOSTRACION

Partamos del hecho que f es una función medible y mostremos que el conjunto $f^{-1}(\,]r, \infty]\,)$ es medible - para cualquier r real. Como f es una función medible, E es medible. Por otra parte $f^{-1}(\{+\infty\})$ es un conjunto medible y además $f^{-1}(\,]r, \infty[\,)$ es también un conjunto medible por ser $]r, \infty[$ un Boreliano para cualquier r real. Como

$$f^{-1}(\,]r, \infty]\,) = f^{-1}(\,]r, \infty[\,) \cup f^{-1}(\{+\infty\})$$

se concluye que el conjunto $f^{-1}(\,]r, \infty]\,)$ es medible.

Supongamos ahora que se satisfacen las condiciones de la proposición (20).

Sea $\xi = \{A \subset \overline{\mathbb{R}} \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$.

Como $]a, b[\; = \;]a, +\infty] \cap [-\infty, b[$ se tiene

$f^{-1}(]a, b[) = f^{-1}(]a, +\infty]) \cap f^{-1}([-\infty, b[)$ por lo que $f^{-1}(]a, b[)$ es medible por ser intersección de dos conjuntos medibles. Quiere decir esto que el intervalo abierto $]a, b[\; \in \xi$. Como por lema (21) ξ es una σ - álgebra de conjuntos, se cumplirá que todo conjunto abierto $\mathcal{O}$ es un elemento de ξ (por ser $\mathcal{O}$ reunión numerable de intervalos abiertos).

Significa esto que la σ - álgebra ξ contiene a la clase de todos los conjuntos abiertos y por consiguiente a la σ - álgebra de Borel $\mathcal{B}$. Por lo tanto

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M} \text{ para todo } B \in \mathcal{B}. \qquad (1)$$

Como $f^{-1}(\{+\infty\}) = f^{-1}(]r, \infty]) - f^{-1}(]r, +\infty[)$

y $f^{-1}(\{-\infty\}) = f^{-1}([-\infty, r[) - f^{-1}(]-\infty, r[)$

se afirma que los conjuntos $f^{-1}(\{+\infty\})$ y $f^{-1}(\{-\infty\})$ son medibles por ser diferencias de conjuntos medibles. Por este hecho y por la conclusión (1) se asegura que f es una función medible.

De acuerdo a la proposición (9) se dice que un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es de medida cero ($\mu(E) = 0$) si y sólo si $\mu^*(E) = 0$. Es decir, que para cada $\varepsilon > 0$ existe una colección de intervalos abiertos $(I_n)_{n \geq 1}$ tales que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon .$$

Evidentemente la unión numerable de conjuntos de medida cero es de medida cero (ver proposición 5).

DEFINICION (23)

Un enunciado $P(x)$ concerniente a los puntos del -- conjunto E se dice que es verdadero casi por doquier si el conjunto de puntos de E para los cuales $P(x)$ es falso es de medida cero.

Abreviadamente, la frase casi por doquier se denotará por " c * d " .

EJEMPLOS

Sean f, g dos funciones reales cuyo dominio común es el conjunto E.

a) Se dice que $f = g$ c * d si y sólo si existe $D \subset E$ con $\mu(D) = 0$ tal que $f(x) = g(x) \quad \forall x \in E - D$.

Es decir $\mu(\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

b) Una función $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es continua casi por doquier en E, si el conjunto de discontinuidades de la misma en E es de medida cero.

LEMA (24)

Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible y $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función continua, entonces f es una función medible.

DEMOSTRACION

Sea $r \in \mathbb{R}$. Hay que mostrar que el conjunto $f^{-1}(\,]r, +\infty]\,)$ es medible. Como f es una función continua será $f^{-1}(\{+\infty\}) = \Phi$ y además existirá un abierto $O \subset \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(\,]r, +\infty[\,) = O \cap E$.

Como Φ y $O \cap E$ son conjuntos medibles, el conjunto $f^{-1}(]r, +\infty]) = f^{-1}(\,]r, +\infty[\,) \cup f^{-1}(\{+\infty\})$ es medible y por consiguiente f es una función medible.

PROPOSICION (25)

Sea $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función continua casi por doquier definida en el conjunto medible E. Entonces f es una función medible.

DEMOSTRACION

Sea $r \in \mathbb{R}$ y $A = \{x \in E \mid f(x) \text{ es discontinua}\}$. Evidentemente la función $f_{|E-A}$ es continua en todo su dominio y así $f^{-1}_{|E-A}(\,]r, +\infty])$ es un conjunto medible. Por otra parte, como $f^{-1}_{|A}(\,]r, +\infty]) \subset A$ y $\mu(A) = 0$, se asegura por proposición (9) que $f^{-1}_{|A}(\,]r, +\infty])$ es un conjunto medible. De lo anterior se asegura que

$f^{-1}(\,]r, +\infty]) = f^{-1}_{|E-A}(\,]r, +\infty]) \cup f^{-1}_{|A}(\,]r, +\infty])$ es un conjunto medible y por consiguiente **f** es una función medible.

PROPOSICION (26)

Sea $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible y D un subconjunto medible de E. Entonces la restricción $f_{|D}$ es una función medible.

DEMOSTRACION

Sea $r \in \mathbb{R}$. Como f es una función medible, $f^{-1}(\,]r, +\infty])$ es un conjunto medible y por consiguiente el conjunto

$$f^{-1}_{|D}(\,]r, +\infty]) = f^{-1}(\,]r, +\infty]) \cap D$$

es medible por ser intersección de conjuntos medibles de lo cual se concluye que la función $f_{|D}$ es medible.

PROPOSICION (27)

Sean $f, g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones tales que $f = g$ c $_*$ d. Entonces si f es una función medible, también lo será g.

DEMOSTRACION

Sea $r \in \mathbb{R}$ y $D = \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$. Hay que mostrar que el conjunto $g^{-1}(\,]r, +\infty]\,)$ es medible. Como $g^{-1}(\,]r, +\infty]\,) = g^{-1}_{|E-D}(\,]r, +\infty]\,) \cup g^{-1}_{|D}(\,]r, +\infty]\,)$ basta mostrar que cada uno de los conjuntos de la derecha de la igualdad es medible; así [illegible]

Como $\mu(D) = 0$ y $g^{-1}_{|D}(\,]r, +\infty]\,) \subset D$. Puede afirmarse por la proposición (9) que $g^{-1}_{|D}(\,]r, +\infty]\,) \in \mathcal{M}$.

Por otra parte $g_{|E-D} = f_{|E-D}$, y por la proposición anterior se afirma que la función $f_{|E-D}$ es medible y por consiguiente

$$g^{-1}_{|E-D}(\,]r, +\infty]\,) = f^{-1}_{|E-D}(\,]r, +\infty]\,) \in \mathcal{M}.$$

LEMA (28)

Sean $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones medibles. Los siguientes conjuntos son medibles

i) $\{x \in E \mid f(x) < g(x)\}$

ii) $\{x \in E \mid f(x) \leq g(x)\}$

iii) $\{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$.

DEMOSTRACION

i) Para cada $x \in E$ tal que $f(x) < g(x)$ existirá, por la propiedad arquimedeana de $\mathbb{R}$[1], un racional r tal que $f(x) < r < g(x)$. Por consiguiente se tiene la igualdad siguiente

$$\{x \in E \mid f(x) < g(x)\} = \bigcup_{r \in Q} \left[\{x \in E \mid f(x) < r\} \cap \{x \in E \mid r < g(x)\}\right]$$

$$= \bigcup_{r \in Q} \left[f^{-1}([-\infty, r[) \cap g^{-1}(]r, +\infty])\right].$$

Como f y g son funciones medibles, los conjuntos $f^{-1}([-\infty, r[)$ y $g^{-1}(]r, +\infty])$ serán medibles para todo $r \in Q$. Y además, como Q es un conjunto numerable, se tiene que el conjunto $\{x \in E \mid f(x) < g(x)\}$ es medible por ser unión numerable de conjuntos medibles.

[1] Entre dos números reales cualesquiera siempre existe al menos un número racional.

ii) Por hipótesis E es un conjunto medible y por el literal anterior el conjunto $\{x \in E \mid g(x) < f(x)\}$ es también medible. Por lo tanto

$$\{x \in E \mid f(x) \leq g(x)\} = E - \{x \in E \mid g(x) < f(x)\}$$

es un conjunto medible por ser diferencia de dos conjuntos medibles.

iii) Por el literal anterior los conjuntos

$\{x \in E \mid f(x) < g(x)\}$ y $\{x \in E \mid g(x) \leq f(x)\}$

son medibles. Por consiguiente el conjunto

$$\{x \in E \mid f(x) = g(x)\} = \{x \in E \mid f(x) \leq g(x)\} \cap \{x \in E \mid g(x) \leq f(x)\}$$

es medible por ser intersección de dos conjuntos medibles.

PROPOSICION (29)

Sea $c \in \mathbb{R}$ y $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones medibles. Entonces son medibles las funciones siguientes

i) $f + c$

ii) $c\,f$

iii) $f + g$

iv) $f - g$

v) $f \cdot g$.

DEMOSTRACION

i) Sea $r \in \mathbb{R}$ y $h(x) = f(x) + c$. Hay que mostrar que el conjunto $h^{-1}(]r, +\infty])$ es medible.

$$h^{-1}(]r, +\infty]) = \{x \in E \mid f(x) > r - c\}$$

$$= f^{-1}(]r - c, +\infty]).$$

Como f es una función medible, el conjunto $f^{-1}(]r - c, +\infty])$ es medible y por consiguiente también $h^{-1}(]r, +\infty])$ lo será. De lo cual se concluye que la función $h = f + c$ es medible.

ii) Sea $r \in \mathbb{R}$ y $i(x) = c\, f(x)$.

Si $c = 0$, $i(x) = 0$ y, evidentemente, $i(x)$ es una función medible por ser constante.

Si $c > 0$ resulta

$$i^{-1}(]r, +\infty]) = \{x \in E \mid cf(x) > r\}$$

$$= \{x \in E \mid f(x) > \frac{r}{c}\}$$

$$= f^{-1}(]\frac{r}{c}, +\infty]).$$

Como $f^{-1}(]\frac{r}{c}, +\infty])$ es medible, la función $i(x) = c\, f(x)$ es medible.

Si $c < 0$ resulta

$$i^{-1}(\,]r,+\infty]) = \{x\in E \mid cf(x)>r\} = \{x\in E \mid f(x) < \tfrac{r}{c}\}$$

$$= f^{-1}([-\infty, \tfrac{r}{c}[).$$

Como $f^{-1}([-\infty, \tfrac{r}{c}[)$ es un conjunto medible, la función $i(x) = c\, f(x)$ es medible.

iii) Sea $r \in \mathbb{R}$ y $j(x) = f(x) + g(x)$. Entonces se tiene la siguiente igualdad

$$j^{-1}(\,]r,+\infty]) = \{x\in E \mid f(x)+g(x)>r\} = \{x\in E \mid -f(x)<g(x)-r\} \quad (1)$$

Por los literales i) y ii) de esta misma proposición se afirma que las funciones $g(x) - r$ y $-f(x)$ son medibles y seguidamente utilizando el lema (28) se asegura que, el conjunto $\{x\in E \mid -f(x)<g(x)-r\}$ es medible. Por consiguiente, de la ecuación (1) se concluye que la función $j(x) = f(x) + g(x)$ es medible.

iv) Sea $r \in \mathbb{R}$ y $k(x) = f(x) - g(x)$. Por el literal ii) se afirma que la función $-g(x)$ es medible y seguidamente utilizando literal iii) se concluye que la función $k(x) = f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$ es medible.

v) Primeramente mostremos que el cuadrado de una función medible es de nuevo una función medible. Así Sea $r \in \mathbb{R}$ y $q(x) = [f(x)]^2$. Hay que mostrar que es medible el conjunto siguiente

$$q^{-1}(\,]r, +\infty]) = \{x \in E \mid [f(x)]^2 > r\}.$$

Si $r < 0$ resulta

$\{x \in E \mid [f(x)]^2 > r\} = E$ de donde se afirma que el conjunto $q^{-1}(\,]r, +\infty])$ es medible.

Si $r \geq 0$ se tiene

$$[f(x)]^2 > r \iff |f(x)| > \sqrt{r} \iff$$

$$\iff (f(x) < -\sqrt{r} \ \vee \ f(x) > \sqrt{r})$$

de donde se afirma que

$$\{x \in E \mid [f(x)]^2 > r\} = \{x \in E \mid f(x) < -\sqrt{r}\} \cup \{x \in E \mid f(x) > \sqrt{r}\}$$

$$= f^{-1}([-\infty, -\sqrt{r}) \cup f^{-1}(\,]\sqrt{r}, +\infty]).$$

De lo cual se asegura que el conjunto $q^{-1}(\,]r, +\infty])$ es medible por ser unión de dos conjuntos medibles.

Por consiguiente la función $q = f^2$ es medible.

Para mostrar que la función $f \cdot g$ es medible, basta observar que las funciones $(f+g)^2$, f^2 y g^2 son medibles por la primera parte de la demostración.

Y entonces se afirma que la función

$f \cdot g = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - (f^2+g^2)\right]$ es medible.

PROPOSICION (30)

Sea $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ una colección finita de funciones medibles con el mismo dominio "E" de definición. Entonces son medibles las funciones siguientes.

i) $g(x) = \text{Max}\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$

ii) $h(x) = \text{Min}\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$.

DEMOSTRACION

i) Sea $r \in \mathbb{R}$. Entonces tenemos

$$g^{-1}(\,]r, +\infty]) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\,]r, +\infty]).$$

Como cada $f_i^{-1}(\,]r, +\infty])$ es un conjunto medible se sigue que $g^{-1}(\,]r, +\infty])$ es medible y por consiguiente $g(x)$ es una función medible.

ii) Para mostrar que $h(x)$ es una función medible es suficiente observar la igualdad siguiente

$h(x) = -\text{Max}\{-f_1(x), -f_2(x), \ldots, -f_n(x)\}$ y utilizar el resultado del literal anterior.

COROLARIO (31)

Si $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible, son medibles las funciones siguientes

i) f^+

ii) f^-

iii) $|f|$.

DEMOSTRACION

Evidente, pues $f^+ = \text{Max}\,\{f, 0\}$, $f^{-1} = \text{Max}\,\{-f, 0\}$ y $|f| = f^+ + f^-$.

PROPOSICION (32)

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles con el mismo dominio E. Entonces son medibles las funciones siguientes

i) $M(x) = \text{Sup}\ \{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$

ii) $m(x) = \text{Inf}\ \{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$

iii) $f^*(x) = \lim_{n\to\infty} \text{Sup}\ f_n(x)$

iv) $f_*(x) = \lim_{n\to\infty} \text{Inf}\ f_n(x)$.

DEMOSTRACION

i) Sea $r \in \mathbb{R}$. Entonces

$$M^{-1}(\,]r, +\infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in T \mid f_n(x) > r\}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(\,]r, +\infty]) \,.$$

Como $f_n^{-1}(\,]r, +\infty]$ es medible para todo $n \in \mathbb{N}$, será medible el conjunto $M^{-1}(\,]r, +\infty])$ y así $M(x)$ será una función medible.

ii) Como $\operatorname{Inf}\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} = -\operatorname{Sup}\{-f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ se concluye por el literal anterior que la función $m(x)$ es medible.

Los últimos dos literales son inmediatos de los literales anteriores, pues

$$f^* = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup} f_n = \operatorname*{Inf}_{n\in\mathbb{N}} \operatorname*{Sup}_{k\geq n} f_k$$

$$f_* = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Inf} f_n = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} \operatorname*{Inf}_{k\geq n} f_k$$

PROPOSICION (33)

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles con el mismo dominio de definición T. Si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ c*d entonces la función f es también una función medible.

DEMOSTRACION

Sea $A = \{x \in E \mid \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$..

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \notin A \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin A \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Como $\mu(A) = 0$ se tiene

$$g_n = f_n \quad \text{c.t.d} \qquad (1)$$

$$g = f \quad \text{c.t.d} \qquad (2)$$

De la igualdad (1) se afirma que $(g_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones medibles. Como el objetivo de la demostración es probar que la función f es medible, a causa de la igualdad (2) es suficiente demostrar que g es una función medible. Así

$$\text{Si } x \in A, \text{ es } \lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0 = g(x) \qquad (3)$$

$$\text{Si } x \notin A, \ \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = g(x)\,. \qquad (4)$$

De (3) y (4) se afirma lo siguiente

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \quad ; \quad x \in E$$

de lo cual, por la proposición (32-iii-iv) se concluye que g es una función medible.

Si A es cualquier conjunto, definiremos la función característica X_A del conjunto A, como

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

PROPOSICION (34)

Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$. Entonces

i) $X_{A\cap B} = X_A \cdot X_B$

ii) $X_{A\cup B} = X_A + X_B - X_A \cdot X_B$.

DEMOSTRACION

i) $x \in A \cap B \Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$

$$\Longleftrightarrow (X_A(x) = 1 \wedge X_B(x) = 1)$$

$$\Longleftrightarrow (X_A(x) \cdot X_B(x) = 1)$$

Por lo tanto $X_{A\cap B}(x) = X_A(x) \cdot X_B(x)$. (1)

$x \notin A \cap B \iff (x \notin A \vee x \notin B)$

$\iff (X_A(x) = 0 \vee X_B(x) = 0)$

$\iff (X_A(x) \,.\, X_B(x) = 0)$

Por lo tanto $X_{A \cap B}(x) = X_A(x) \,.\, X_B(x).$ (2)

De los resultados (1) y (2) se concluye la prueba de i)

ii) $x \notin A \cup B \iff (x \notin A \wedge x \notin B)$

$\iff (X_A(x) = 0 \wedge X_B(x) = 0)$

$\implies (X_A(x) + X_B(x) - X_A(x) \,.\, X_B(x) = 0)$

Por lo tanto

$= X_{A \cup B}(x) = X_A(x) + X_B(x) - X_A(x) \,.\, X_B(x).$ (3)

Supongamos que $x \in A \cup B$. En tal caso puede darse tres posibilidades

a) $(x \in A \wedge x \in B) \iff (X_A(x) = 1 \wedge X_B(x) = 1)$

$\implies (X_A(x) + X_B(x) - X_A(x) \,.\, X_B(x) = 1$

b) $(x \in A \wedge x \notin B) \iff (X_A(x) = 1 \wedge X_B(x) = 0$

$\implies X_A(x) + X_B(x) - X_A(x) \,.\, X_B(x) = 1$

c) $(x \notin A \wedge x \in B) \iff (X_A(x) = 0 \wedge X_B(x) = 1)$

$\implies (X_A(x) + X_B(x) - X_A(x) \,.\, X_B(x) = 1.$

Por lo que se puede observar que en cualquiera de las tres posibilidades se tiene

$$h = \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B \qquad (4)$$

Del resultado (3) y (4) se concluye la prueba.

Existe una clase importante de funciones medibles llamadas funciones simples las cuales se definen a continuación.

DEFINICION (25)

Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible. Una función $\phi: E \longrightarrow \mathbb{R}$ es simple si existe una colección finita $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos y una colección finita $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de números reales tales que

$$\phi(x) = \begin{cases} a_i & \text{si } x \in E_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{i=1}^{m} E_i \end{cases} \qquad (1)$$

La función simple ϕ definida en (1) puede también denotarse como una combinación de funciones características así

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i}(x) \qquad (1')$$

EJEMPLOS

(a) La función escalón es una función simple.

(b) La función característica de un conjunto A medible es simple

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Nótese que la representación de $\phi(x)$ dada en (1) y (1') no es única. Existe una representación de $\phi(x)$ llamada Representación Canónica que consiste en la siguiente.

Sea $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ el conjunto de imágenes de ϕ diferentes de cero y diferentes entre sí y sea $A_i = \phi^{-1}(a_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{A_i}(x) .$$

PROPOSICION (36)

Sea $c \in \mathbb{R}$ y φ, Ψ dos funciones simples definidas sobre el mismo conjunto medible E.

Entonces son simples las funciones siguientes.

i) $c\,\Phi$

ii) $\Phi + c$

iii) $\Phi + \Psi$

iv) $\Phi\,\Psi$.

DEMOSTRACION

Sean $\sum_{i=1}^{m} a_i X_{A_i}$ y $\sum_{i=1}^{n} b_i X_{B_i}$ las representaciones canónicas de Φ y Ψ respectivamente.

i) $c\,\Phi = c \sum_{i=1}^{m} a_i X_{A_i} = \sum_{i=1}^{m} c\, a_i X_{A_i}$.

Como cada $c\,a_i$ es un número real, se concluye que $c\,\Phi$ es una función simple.

ii) Sea $A_0 = \{x \in E \mid \Phi(x) = 0\}$ y $a_0 = 0$ y así será $E = \bigcup_{i=0}^{m} A_i$ y por consiguiente

$\Phi + c = \sum_{i=0}^{m} (a_i + c) X_{A_i}$ de donde se concluye que $\Phi + c$ es una función simple.

iii) Sean $A_0 = \{x \in E \mid \Phi(x) = 0\} = \Phi^{-1}(0)$

$B_0 = \{x \in E \mid \Psi(x) = 0\} = \Psi^{-1}(0)$

$a_0 = b_0 = 0.$

Y así serán

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i X_{A_i} \quad \text{y} \quad \Psi(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i X_{B_i}$$

y por consiguiente

$$\Phi + \Psi = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (a_i + b_j) X_{A_i \cap B_j}$$

Como cada $A_i \cap B_j$ $i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n$ es un conjunto medible y cada $(a_i + b_j)$ es un número real, se concluye que la función $\Phi + \Psi$ es simple.

iv) $$\Phi \,.\, \Psi = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_{A_i} \right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j X_{B_j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j X_{A_i} X_{B_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j X_{A_i \cap B_j}$$

De la igualdad anterior se deduce que $\Phi \,.\, \Psi$ es una función simple.

CAPITULO 4
INTEGRAL DE LEBESGUE

En este capítulo se definirá la integral de Lebesgue de una función $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ y se estudiarán sus propiedades principales. Para ello comenzaremos estudiando la integral de una función simple para luego extender dicho estudio a las funciones acotadas. Seguidamente se estudiará la integral de las funciones no-negativas (no necesariamente acotadas) y por último se extenderá el estudio a las funciones arbitrarias.

INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN SIMPLE

En esta sección $E \subset \mathbb{R}$ será un conjunto medible y $S(E)$ denotará el conjunto de funciones simples cuyo dominio es E. Además en ésta y en próximas secciones representaremos el soporte de una función $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ con la notación $N(f)$ el cual se define como sigue

$$N(f) = \{x \in E \mid f(x) \neq 0\} .$$

DEFINICION (1) (Integral de una función simple)

Sea $\phi \in S(E)$ con $\mu(N(\phi)) < +\infty$ y cuya representación canónica es $\sum_{i=1}^{n} a_i X_{A_i}$. Definiremos la integral de ϕ sobre E, y la denotaremos por el símbolo

$\int_E \phi(x)\,dx$ ó más simplemente por $\int_E \phi$, como el número real $\sum_{i=1}^{n} a_i\,\mu(A_i)$.

Como una función simple no siempre vendrá expresada por su forma canónica, conviene investigar como se expresará la integral de dicha función. El siguiente lema responde a dicha interrogante.

LEMA (2)

Sea $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, X_{E_i}(x)$ una función simple definida sobre E; con $E_i \cap E_j = \Phi$ para $i \neq j$ y cada E_i es medible y de medida finita . Entonces

$$\int_E \phi = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \mu(E_i) .$$

DEMOSTRACION

Sea $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ el conjunto de imágenes de $\phi(x)$ diferentes de cero y diferentes entre sí.

Para cada $k = 1, 2, \ldots, m$ puede reunirse en un solo conjunto A_k a todos los conjuntos E_i que tienen la misma imagen a_k, así $A_k = \bigcup_{c_i = a_k} E_i$ $k = 1, 2, \ldots, m$.

Entonces la función simple $\phi(x)$ tendrá una representación canónica como sigue

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} a_k \, X_{A_k}(x) \ ; \quad \text{con} \quad A_k = \phi^{-1}(a_k)$$

por consiguiente su integral será

$$\int_E \phi = \sum_{i=1}^{m} a_k \, \mu(A_k) \ . \qquad (1)$$

Ahora bien, como $A_k = \bigcup_{c_i = a_k} E_i$ y los E_i son dos a dos disjuntos, se tiene la siguiente igualdad

$$\mu(A_k) = \sum_{c_i = a_k} \mu(E_i) \ .$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1) se obtiene

$$\int_E \phi = \sum_{i=1}^{m} a_k \left[\sum_{c_i = a_k} \mu(E_i) \right] = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(E_i) \ .$$

La integral de una funcion simple tiene varias propiedades, las cuales tienen expresadas por la siguiente proposición.

PROPOSICION (3)

Sea $c \in \mathbb{R}$; ϕ y ψ dos funciones simple definidas sobre E tales que $\mu(N(\phi)) < +\infty$ y $\mu(N(\Psi)) < +\infty$.

Entonces

i) $\int_E c\,\Phi = c \int_E \Phi$

ii) $\int_E (\Phi + \Psi) = \int_E \Phi + \int_E \Psi$

iii) Si $\Phi(x) \geq 0$ c.t.d entonces $\int_E \Phi \geq 0$.

iv) Si $\Phi \leq \Psi$ c.t.d entonces $\int_E \Phi \leq \int_E \Psi$

<u>DEMOSTRACION</u>

Sean $\sum_{i=1}^{n} a_i X_{A_i}$ y $\sum_{i=1}^{m} b_i X_{B_i}$ las representaciones canónicas de Φ y Ψ respectivamente.

i) $c\,\Phi = c \sum_{i=1}^{n} a_i X_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} c\, a_i X_{A_i}$ por consiguiente

$$\int_E c\,\Phi = \sum_{i=1}^{n} c\, a_i\, \mu(A_i) = c \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu(A_i) = c \int_E \Phi .$$

ii) Sean $A_0 = \{x \in E \mid \Phi(x) = 0\}$

$B_0 = \{x \in E \mid \Psi(x) = 0\}$

$a_0 = b_0 = 0.$

Por proposición (3-36) $\Phi + \Psi$ es una función simple la cual puede expresarse así

$$\Phi + \Psi = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (a_i + b_j) \; X_{A_i \cap B_j} \quad , \text{ entonces}$$

$$\int_E \Phi + \Psi = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (a_i + b_j) \; \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i \; \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_j \; \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{m} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=0}^{m} b_j \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \; \mu(A_i) + \sum_{j=0}^{m} b_j \; \mu(B_j)$$

$$= \int_E \Phi + \int_E \Psi \; .$$

iii) Sea $D = \{x \in E \mid \Phi(x) < 0\}$.

Podemos representar a Φ de la manera siguiente

$$\Phi = \sum_{i=1} a_i^+ \; X_{A_i^+} + \sum_{i=1}^{q} a_i^- \; X_{A_i^-}$$

donde a_i^+ y a_i^- son las imágenes positivas y negativas de Φ, respectivamente, y además

$$A_i^+ = \Phi^{-1}(a_i^+) \quad \text{y} \quad A_i^- = \Phi^{-1}(a_i^-) \ .$$

La integral de Φ será entonces

$$\int_E \Phi = \sum_{i=1}^{p} a_i^+ \ \mu(A_i^+) + \sum_{i=1}^{q} a_i^- \ \mu(A_i^-) \ .$$

Como cada $A_i^- \subset D$ y $\mu(D) = 0$ se tiene

$\mu(A_i^-) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, q$ y por consiguiente

$$\int_E \Phi = \sum_{i=1}^{p} a_i^+ \ \mu(A_i^+) \geq 0 \ .$$

iv) Como por hipótesis $\Phi \leq \Psi$ c $_*$ d , puede afirmarse que $\Psi - \Phi \geq 0$ c $_*$ d , y utilizando luego los literales anteriores se tiene

$$\int \Psi - \int \Phi = \int \Psi - \Phi \geq 0$$

$$\therefore \quad \int \Psi \geq \int \Phi \ .$$

Sea $\Phi \in S(E)$ y A una parte medible de E. Se define la integral de Φ sobre A como

$$\int_A \Phi = \int_E \Phi \ X_A \ .$$

INTEGRAL DE LEBESGUE DE UNA FUNCIÓN ACOTADA DEFINIDA SOBRE UN CONJUNTO DE MEDIDA FINITA.

En esta sección se extenderá la noción de integral a las funciones acotadas sobre un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ de medida finita.

Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $\mu(E) < +\infty$

$$\alpha : E \longrightarrow \mathbb{R} : x \rightsquigarrow \alpha(x) = \operatorname*{Inf}_{x \in E} f(x)$$

$$\beta : E \longrightarrow \mathbb{R} : x \rightsquigarrow \beta(x) = \operatorname*{Sup}_{x \in E} f(x) .$$

Las funciones α y β así definidas son dos funciones constantes, y por consiguiente simples, tales que $\alpha \leq f \leq \beta$: $x \in E$.

Se denotará con $L(f)$ al conjunto de todas las funciones simples $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\varphi \leq f$. Y con $U(f)$ al conjunto de todas las funciones simples $\Psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\Psi \geq f$. Es decir

$$L(f) = \{\varphi \in S(E) \mid \varphi \leq f\}$$

$$U(f) = \{\Psi \in S(E) \mid \Psi \geq f\} .$$

Los conjuntos $L(f)$ y $U(f)$ son no-vacíos pues al menos $\alpha \in L(f)$ y $\beta \in U(f)$.

Asociados a los conjuntos $L(f)$ y $U(f)$ podemos encontrar los conjuntos de números reales siguientes

$$\{ \int_E \phi \, dx \mid \phi \in L(f) \} \qquad (1)$$

$$\{ \int_E \Psi \, dx \mid \Psi \in U(f) \} \qquad (2)$$

El primero de tales conjuntos está acotado superiormente puesto que $\phi \leq f \leq \beta = \operatorname{Sup}_{x \in E} f$, $\forall \phi \in L(f)$

y por consiguiente

$$\int_E \phi \, dx \leq \int_E \beta \, dx = \beta \, \mu(E) < + \infty \quad ; \quad \forall \phi \in L(f) .$$

El segundo está acotado inferiormente pues de la desigualdad siguiente $\operatorname{Inf}_{x \in E} f = \alpha \leq f \leq \Psi$, $\forall \Psi \in U(f)$

se sigue

$$- \infty < \mu(E) \, \alpha = \int_E \alpha \, dx \leq \int_E \Psi \, dx \quad , \quad \forall \Psi \in U(f).$$

Se definirá pues, la <u>integral inferior</u> de Lebesgue de f sobre E como el supremo del primer conjunto y la denotaremos como $\underline{\int_E} f \, dx$ ó más simplemente por $\underline{\int_E} f$.

Es decir $\underline{\int_E} f = \operatorname{Sup}_{\phi \in L(f)} \int_E \phi$.

Similarmente se definirá la integral superior de Lebesgue de f sobre E como el ínfimo del segundo conjunto y la denotaremos como $\overline{\int_E} f\, dx$ ó más simplemente por $\overline{\int_E} f$. Es decir $\overline{\int_E} f = \operatorname*{Inf}_{\psi \in U(f)} \int_E \psi$.

Como para toda $\phi \in L(f)$ y toda $\psi \in U(f)$ siempre se da que $\phi \leq \psi$, es inmediata la siguiente desigualdad

$$\operatorname*{Sup}_{\phi \in L(f)} \int_E \phi = \underline{\int_E} f \leq \overline{\int_E} f = \operatorname*{Inf}_{\psi \in U(f)} \int_E \psi .$$

Es evidente que cuando f sea una función simple se cumplirá la igualdad

$$\underline{\int_E} f = \overline{\int_E} f = \int_E f \qquad (1)$$

pues como $f \in S(E)$ se tiene $f \in L(f)$ y $f \in U(f)$ y así será

$$\int_E f \leq \operatorname*{Sup}_{\phi \in L(f)} \int \phi = \underline{\int_E} f \leq \overline{\int_E} f = \operatorname*{Inf}_{\psi \in U(f)} \int_E \psi \leq \int_E f$$

de donde se deduce la igualdad (1).

<u>DEFINICION (4)</u> (Función integrable)

Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y

$\mu(E) < +\infty$. Se dice que f es una función Lebesgue - integrable (o simplemente integrable) si se cumple la siguiente igualdad

$$\underline{\int_E} f\, dx = \overline{\int_E} f\, dx .$$

Al valor común se le llama la integral de f sobre E y se denota por el símbolo $\int_E f\, dx$ ó más simplemente por $\int_E f$.

La siguiente proposición da una caracterización de las funciones integrables.

PROPOSICION (5)

Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $\mu(E) < +\infty$. La condición necesaria y suficiente para que dicha función sea integrable es que ella sea una función medible.

DEMOSTRACION

Supongamos primeramente que la función f es una función medible y acotada. Sean

$$\alpha = \operatorname*{Inf}_{x\in E} f(x) \qquad y \qquad \beta = \operatorname*{Sup}_{x\in E} f(x) + 1 .$$

Claramente se satisface la siguiente desigualdad $\alpha \leq f(x) < \beta$, $\forall\, x \in E$.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\delta = \frac{\beta - \alpha}{n}$.

$E_1 = f^{-1}([\alpha, \alpha + \delta[) = \{x \in E \mid \alpha \leq f(x) < \alpha + \delta\}$

$E_2 = f^{-1}([\alpha + \delta, \alpha + 2\delta[) = \{x \in E \mid \alpha + \delta \leq f(x) < \alpha + 2\delta\}$

.
.
.

$E_n = f^{-1}([\alpha + (n-1)\delta, \delta + n\delta[) = f^{-1}([\alpha + (n-1)\delta, \beta[)$.

Como f es medible, cada uno de los conjuntos E_i es medible. Además los E_i son disjuntos dos a dos y $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, por consiguiente

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) . \qquad (1)$$

Sean ϕ_n , ψ_n dos funciones simples definidas sobre E, así

$$\phi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha + (i-1)\delta) X_{E_i}(x)$$

$$\psi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha + i\delta) X_{E_i}(x) .$$

Se tiene entonces la siguiente desigualdad

$$\phi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x) , \qquad \forall x \in F$$

por consiguiente $\phi_n \in L(F)$ y $\psi_n \in U(f)$, de donde

$$\underline{\int}_E f \geq \int_E \phi_n = \sum_{i=1}^{n} (\alpha + (i-1)\delta)\ \mu(E_i) \qquad (2)$$

$$\overline{\int}_E f < \int_E \psi_n = \sum_{i=1}^{n} (\alpha + i\delta)\ \mu(E_i) \qquad (3)$$

restando la desigualdad (2) de (3) se obtiene

$$0 \leq \overline{\int}_E f - \underline{\int}_E f \leq \int_E \psi_n - \int_E \phi_n = \int_E \psi_n - \phi_n = \delta \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

de donde utilizando (1) resulta

$$0 \leq \underline{\int}_E f - \overline{\int}_E f \leq \delta\ \mu(E) \qquad (4)$$

Como $\delta = \frac{\beta - \alpha}{n}$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, con solo tomar un "$\underline{n}$" bastante grande, y $\mu(E) < +\infty$ resultará de (4): $\int_E f = \underline{\int}_E f$ lo que significa que f es una función integrable.

Supongamos que f es una función integrable y mostremos que f es medible.

Como f es integrable se satisface la siguiente igualdad

$$\operatorname{Sup}_{\phi \in L(f)} \int_E \phi = \underline{\int}_E f = \overline{\int}_E f = \operatorname{Inf}_{\psi \in U(f)} \int_E \psi$$

de la cual puede afirmarse que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen dos funciones $\phi_n \in L(f)$ y $\psi_n \in U(f)$ tales que

$$\int_E \phi_n > \underline{\int_E} f - \frac{1}{2n} \qquad (5)$$

y

$$\int_E \psi_n < \overline{\int_E} f + \frac{1}{2n} \qquad (6)$$

restando (5) de (6) resulta:

$$0 \leq \int_E (\psi_n - \phi_n) = \int_E \psi_n - \int_E \phi_n \leq \overline{\int_E} f - \underline{\int_E} f + \frac{1}{n}$$

y como por hipótesis es $\overline{\int_E} f = \underline{\int_E} f$, se afirma

$$0 \leq \int(\psi_n - \phi_n) < \frac{1}{n}. \qquad (7)$$

Definamos dos funciones $\phi(x)$ y $\psi(x)$ como sigue:

$$\phi(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n(x)$$

$$\psi(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \psi_n(x)$$

por proposición (3-32 i, ii) se afirma que dichas funciones son medibles. Además $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, $\forall\, x \in E$.

Como nuestro objetivo es mostrar que $f(x)$ es una función - medible, bastará mostrar que $\phi(x) = f(x)$ c.t.d ó $\psi(x) = f(x)$ c.t.d. En nuestra prueba se mostrará que se dan las dos. Es decir que $\phi(x) = \psi(x)$ c.t.d:

Sea m un número natural arbitrario y consideremos los - conjuntos siguientes:

$$D_m = \{x \in E/ \ \psi(x) - \phi(x) > \frac{1}{m}\}$$

$$D_{mn} = \{x \in E/ \ \psi_n(x) - \phi_n(x) > \frac{1}{m}\}; \quad n = 1,2,\ldots$$

Se puede ver claramente la siguiente desigualdad:

$$\psi_n(x) - \phi_n(x) \geq \frac{1}{m} \chi_{D_{mn}}(x) \qquad n = 1,2,\ldots$$

de donde integrando miembro a miembro se tiene:

$$\int_E (\psi_n - \phi_n) \geq \frac{1}{m} \int_E \chi_{D_{mn}} = \frac{1}{m} \mu(D_{mn}) \tag{8}$$

Comparando (7) y (8) resulta $\frac{1}{m} \mu(D_{mn}) < \frac{1}{n}$; $\quad n = 1,2,\ldots$

$$\mu(D_{mn}) < \frac{m}{n}; \qquad n = 1,2,\ \ldots \tag{9}$$

Como $\phi_n \leq \phi \leq \psi \leq \psi_n$ para $n = 1,2,\ldots$ tendremos

$$D_m \subset D_{mn} \qquad \text{para } n = 1,2,\ \ldots$$

de donde $\mu(D_m) \leq \mu(D_{mn})$ para $n = 1,2,\ \ldots$

Utilizando este último resultado en (9) será

$$\mu(D_m) \leq \frac{m}{n} \qquad \text{para } n = 1,2,\ \ldots$$

por lo tanto $\mu(D_m) = 0$. $\qquad$ (10)

Como m es un natural arbitrario, el resultado (10) es váli-do para todo $m \in \mathbb{N}$ y así por proposición (3-5) se afirma

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m\right) = 0 \tag{11}$$

Ahora bien, como

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in E/ \ \psi(x) - \phi(x) > \frac{1}{m}\} = \{x \in E/\psi(x) - \phi(x) > 0\}$$

Se asegura que $\psi(x) - \phi(x) = 0$ c.t.d o sea $\psi(x) = \phi(x)$ c*d

y por lo tanto $f(x)$ es una función medible.

PROPOSICION (6)

Sean f y g dos funciones medibles y acotadas definidas sobre un conjunto E de medida finita y sea c un número real. Entonces:

i) $\int_E c\,f = c\int_E f$

ii) $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$

iii) $f = g$ c*d $\Longrightarrow \int_E f = \int_E g$

iv) $f \leq g$ c*d $\Longrightarrow \int_E f \leq \int_E g$

v) $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$

vi) Si A y B son dos conjuntos medibles y disjuntos tales que $A \cup B \subset E$. Entonces:

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

DEMOSTRACION:

i) Por proposición (3-29) se sabe que c f es medible y por consiguiente integrable.

Supongamos primeramente que $c \geq 0$, entonces

$$\phi \in L(f) \iff c\phi \in L(cf), \text{ y así}$$

$$c\int_E f = c\left\{\operatorname*{Sup}_{c\phi \in L(cf)} \int_E \phi\right\} = \operatorname*{Sup}_{c\phi \in L(cf)} c\int_E \phi =$$

$$= \operatorname*{Sup}_{c\phi \in L(cf)} \int_E c\phi = \int_E cf$$

Supongamos ahora que $c < 0$, entonces $\phi \leq f \iff c\phi \geq cf$ es decir $\phi \in L(f) \iff c\,\phi \in U(cf)$, y así

$$c\int_E f = (-1)(-c)\{\operatorname*{Sup}_{\phi \in L(f)} \int_E \phi\} = -\{\operatorname*{Sup}_{\phi \in L(f)} (-c)\int_E \phi\}$$

$$= -\{\operatorname*{Sup}_{c\phi \in U(cf)} -\int_E c\phi\} = \operatorname*{inf}_{c\phi \in U(cf)} \int_E c\phi = \int_E cf$$

ii) Por proposición (3-29) se asegura que $f + g$ es medible y por consiguiente integrable. Sean $\psi' \in U(f)$, $\psi'' \in U(g)$ de donde se obtiene $\psi' + \psi'' \in U(f+g)$ y por consiguiente:

$$\int_E f+g \leq \int_E \psi' + \psi'' = \int_E \psi' + \int_E \psi''$$

de la desigualdad anterior se deduce que el número real $\int_E (f+g)$ es una cota inferior para los valores $\left\{\int_E \psi' + \int_E \psi''\right\}$ por lo tanto $\int_E f+g \leq \int_E f + \int_E g.$ (1)

Sean $\phi' \in L(f)$ y $\phi'' \in L(g)$ y así se tiene $\phi' + \phi'' \in L(f+g)$ de donde se obtiene

$$\int_E f+g \geq \int_E \phi' + \phi'' = \int_E \phi' + \int_E \phi''$$

de la desigualdad anterior se deduce que el número real $\int_E (f+g)$ es una cota superior para los valores $\left\{\int_E \phi' + \int_E \phi''\right\}$

por lo tanto

$$\int_E f+g \geq \int_E f + \int_E g \qquad (2)$$

De las desigualdades (1) y (2) se concluye

$$\int_E f+g = \int_E f + \int_E g$$

iii) A causa de los literales anteriores es suficiente mostrar que $\int_E (f-g) = 0$. Así: como $f-g = 0$ c$*$d se tiene

$\psi \geq 0$ c$*$d para toda $\psi \in U(f-g)$. Por este hecho se puede asegurar por la proposición (3-iii) que $\int_E \psi \geq 0$ para toda $\psi \in U(f-g)$.

Quiere decir que cero es una cota inferior para tales integrales y por consiguiente

$$\int_E f-g \geq 0. \qquad (1)$$

En forma similar aseguramos que $\phi \leq 0$ c$*$d para todo $\phi \in L(f-g)$ y por proposición (3-iii) se afirma $\int_E \phi \leq 0$ para todo $\phi \in L(f-g)$. Quiere decir que cero es una cota superior para tales integrales y por consiguiente

$$\int_E f-g \leq 0 \qquad (2)$$

De (1) y (2) se concluye que $\int_E (f-g) = 0$.

iv) Como $g \geq f$ c.t.d se tiene $g-f \geq 0$ c.t.d. Entonces $\int_E \psi \geq 0$ para todo $\psi \in U(g-f)$. Significa esto que cero es cota inferior para tales integrales y por lo tanto $\int_E (g-f) \geq 0$. Utilizando los literales (i y ii) se tiene $\int_E g - \int_E f \geq 0$ de donde $\int_E g \geq \int_E f$.

v) A causa de la desigualdad $-|f| \leq f \leq |f|$ y utilizando el literal anterior se asegura $-\int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|$ de donde $\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|$.

vi) $$\int_{A\cup B} f = \int_E f\, X_{A\cup B} = \int_E f(X_A + X_B)$$

$$= \int_E (f\, X_A + f\, X_B) = \int_E f\, X_A + \int_E f\, X_B$$

$$= \int_A f + \int_B f.$$

<u>COROLARIO (7)</u>

Si $f: E \to \mathbb{R}$ es una función medible y acotada con $\mu(E) < +\infty$. Entonces las funciones f^+ y f^- son también me dibles y acotadas y además:

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

$$\int_E |f| = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

DEMOSTRACION:

Es evidente que f^+ y f^- son acotadas, y por Corolario (3-31) se asegura que son funciones medibles y por consiguiente integrables.

Como $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$ entonces

$$\int_E f = \int_E f^+ - f^- = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

$$\int_E |f| = \int_E f^+ + f^- = \int_E f^+ + \int_E f^-,$$

PROPOSICION (8) (Teorema de la Convergencia Acotada)

Sean $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre un conjunto de medida finita E, y supongamos que existe un número real M tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in E$. Si $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ para cada $x \in E$, entonces $\int_E f = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n$

DEMOSTRACION:

Hay que mostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \int_E f_n - \int_E f \right| < \varepsilon$ siempre que $n \geq n_o$. Ahora bien, como por proposición (6-i-ii) se afirma que

$$\int_E f_n - \int_E f = \int_E (f_n - f)$$

y por proposición (6-v) lo siguiente:

$$\left|\int_E (f_n-f)\right| \leq \int_E |f_n-f|,$$

entonces es suficiente mostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\int_E |f_n-f| < \varepsilon$ siempre que $n \geq n_o$. Así:

Sea $\varepsilon > 0$ y $S_n = \{x \in E / |f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon\}$ para $n = 1,2,\ldots$

Consideremos la sucesión $(E_n)_{n \geq 1}$ con $E_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} S_k$.

La sucesión en cuestión es creciente, y además, como por - hipótesis $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ para cada $x \in E$, tendremos

$$\lim_{n \to \infty} E_n = E \qquad (1)$$

Utilizando la proposición (2-26 a) se asegura que

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = \mu(E)$$

lo que significa que existe un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$\mu(E_n) > \mu(E) - \varepsilon$ para todo $n \geq n_o$. De donde

$$\mu(E-E_n) = \mu(E) - \mu(E_n) < \varepsilon; \ \forall\ n \geq n_o \qquad (2)$$

Luego para todo $n \geq n_o$ se tiene:

$$\int_{E_n} |f_n-f| \leq \int_{E_n} \varepsilon \leq \int_E \varepsilon = \varepsilon\, \mu(E) \qquad (3)$$

$$\int_{E-E_n} |f_n - f| \le \int_{E-E_n} (|f_n| + |f|) \le \int_{E-E_n} 2M = 2M\,\mu(E-E_n) \le 2M\varepsilon \quad (4)$$

utilizando (3) y (4) tendremos:

$$\int_E |f_n - f| = \int_{E_n} |f_n - f| + \int_{E-E_n} |f_n - f| < \varepsilon(\mu(E) + 2M); \quad \text{si } n \ge n_0$$

La Integral de una Funcion No-negativa

Hemos visto que la integral de Lebesgue de una función medible $\left(\int_E f\,dx\right)$ tiene un significado preciso bajo el su -- puesto que dicha función sea acotada y $\mu(E) < +\infty$. Vamos a prescindir en esta sección de esas restricciones, considerando que f es una función medible no-negativa (no necesariamente acotada) definida sobre un conjunto E (no necesariamente de medida finita).

Sea E un conjunto medible. Al conjunto de funciones - definidas sobre E medibles y acotadas, y cuyo soporte es - finito lo denotaremos por A(E). Es decir:

$A(E) = \{h: E \to \mathbb{R} /\ h$ es medible y acotada, y $\mu(N(h)) < +\infty\}$

Para extender la integral a una función no-negativa f considereremos el siguiente conjunto:

$$L^*(f) = \{h /\ h \in A(E) \text{ y } h \le f\}$$

DEFINICION (9) (Integral de una Función No-negativa)

Sea $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible no-negativa. Definiremos.

$$\int_E f\,dx = \sup_{h \in L^*(f)} \int_E h\,dx$$

Nótese que si la función no-negativa f es acotada y además $\mu(E) < +\infty$, tendremos entonces que $f \in L^*(f)$ y la integral $\int_E f$ se reduce a la integral definida en la sección anterior.

De acuerdo a la definición (9), la integral de una función no-negativa f no siempre será finita, lo cual dependerá de la función en cuestión y/o del conjunto E. Por este hecho daremos la definición de lo que entenderemos por función integrable sobre E.

DEFINICION (10) (Función Integrable)

Una función $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ medible, no-negativa es llamada integrable si y solo si:

$$\int_E f < +\infty.$$

PROPOSICION (11)

Sean f y g dos funciones medibles no-negativas definidas sobre E, entonces:

i) $\int_E cf = c\int_E f \;;\quad c > 0$

ii) $\int_E f+g = \int_E f + \int_E g$

iii) $f \leq g$ c.t.d $\Longrightarrow \int_E f \leq \int_E g$.

DEMOSTRACION:

i) Como $c > 0$ es evidente la siguiente equivalencia:

$$h \in L^*(f) \iff c\,h \in L^*(cf)$$

Además por proposición (3-42 i) se tiene $c\int_E h = \int_E ch$ para $h \in L^*(f)$. Por consiguiente

$$c\int_E f = c\{\sup_{h\in L^*(f)} \int_E h = \sup_{h\in L^*(f)} \{c\int_E h\} = \sup_{ch\in L^*(cf)} \int_E ch = \int_E cf$$

ii) Mostremos primeramente la siguiente desigualdad:

$$\int_E f + \int_E g \leq \int_E (f+g) \qquad (1)$$

para este propósito tomemos $h \in L^*(f)$ y $k \in L^*(g)$, y así tendremos $h+k \leq f+g$, y por consiguiente $\int_E h + \int_E k \leq \int_E (f+g)$.

Significa la precedente desigualdad que la integral $\int_E (f+g)$ es una cota superior para los valores reales $\int_E h + \int_E k$, de lo cual se deduce (1).

Seguidamente mostremos la desigualdad en el otro sentido, es decir:

$$\int_E (f+g) \leq \int_E f + \int_E g \qquad (2)$$

Para esto tomemos $\ell \in L^*(f+g)$. Es decir que la función $\ell: E \to \mathbb{R}$, es medible, acotada y con soporte finito. Además

$$\ell(x) \leq f(x) + g(x). \qquad (3)$$

Sean

$$h(x) = \mathrm{Min}\{f(x), \ell(x)\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) < \ell(x) \\ \ell(x) & \text{si } \ell(x) \leq f(x) \end{cases}$$

$$k(x) = \ell(x) - h(x) = \begin{cases} \ell(x) - f(x) & \text{si } f(x) < \ell(x) \\ 0 & \text{si } \ell(x) \leq f(x) \end{cases}$$

Las funciones h y k así definidas son medibles y acotadas, y con soporte finito (pues $h(x) = k(x) = \ell(x)$ si $\ell(x) = 0$). Además $h \leq f$ y $k \leq g$ de donde se afirma que $h \in L^*(f)$ y $k \in L^*(g)$.

Como $\ell = h+k$ se tiene

$$\int_E \ell = \int_E (h+k) = \int_E h + \int_E k \leq \int_E f + \int_E g$$

La precedente desigualdad significa que la expresión $\left(\int_E f + \int_E g\right)$ es una cota superior para los valores reales $\int_E \ell$ de donde se deduce la desigualdad (2).

De los resultados (1) y (2) se concluye la demostra -- ción.

iii) Como por hipótesis $f \leq g$ c.t.d, será $h \leq k$ c.t.d para $h \in L^*(f)$ y $k \in L^*(g)$. Utilizando proposición (5-iv) resulta $\int_E h \leq \int_E k$, por lo tanto

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

PROPOSICION (12)

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión creciente de funciones medibles no-negativas (definidas sobre el mismo dominio E) tales que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, entonces

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$

DEMOSTRACION:

Sea $h \in L(f)$ y $h_n(x) = \min\{h(x), f_n(x)\}$ para $n = 1,2...$ Cada h_n es una función medible, acotada (por la cota de h). Además $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$ para cada $x \in N(h)$. Utilizando la proposición (8) se tiene

$$\int_E h = \int_{N(h)} h = \lim_{n\to\infty} \int_{N(h)} h_n \qquad (1)$$

Por otra parte, como $h_n \leq f_n$ tendremos

$$\int_{N(h)} h_n = \int_E h_n \leq \int_E f_n \qquad \text{para } n = 1,2,...$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{N(h)} h_n \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \qquad (2)$$

De las inecuaciones (1) y (2) se afirma que $\int_E h \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$ lo que significa que la expresión $\left(\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\right)$ es una cota superior para los valores reales $\left(\int_E h\right)$, y así

$$\int_E f \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \qquad (3)$$

Ahora bien, como $f_n \leq f$ para $n = 1,2,\dots$. Será $\int_E f_n \leq \int_E f$ para $n = 1,2,\dots$ y por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \leq \int_E f \qquad (4)$$

De las inecuaciones (3) y (4) se concluye

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n .$$

COROLARIO (13)

Sea $(U_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles no-negativas definidas sobre E y $f = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$, entonces

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E U_n$$

DEMOSTRACION:

Sea $f_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$, entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones medibles no-negativas tales que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Utilizando la proposición anterior resulta

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \lim_{n\to\infty} \int_E \sum_{i=1}^{n} U_i = \lim_{n\to\infty} \{ \sum_{i=1}^{n} \int_E U_i \} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E U_n$$

PROPOSICION (14)

Sea $f: E \to \mathbb{R}$ una función medible no-negativa y $(E_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos medibles, disjuntos dos a dos -- tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f$$

DEMOSTRACION:

Sea $U_n = fX_{E_n}$, entonces

$$f = fX_E = fX_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = f\{\sum_{n=1}^{\infty} X_{E_n}\} = \sum_{n=1}^{\infty} fX_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

aplicando el corolario anterior, tenemos:

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E U_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E fX_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f$$

La Integral de Lebesgue Generalizada

En esta sección extenderemos la noción de integral a las funciones medibles (arbitrarias).

Recordemos que una función medible $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ puede expresarse como una combinación lineal de dos funciones medibles no-negativas, así:

$$f = f^+ - f^-.$$

Por este hecho estamos en condición de definir la integral de la función f basándonos en las funciones no-negativas f^+ y f^-.

DEFINICION (15)

Una función $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ medible será integrable sobre E si y sólo si las funciones f^+ y f^- son ambas integrables sobre E. Y en este caso definiremos

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Similarmente como en las secciones anteriores si $A \subset E$, será $\int_A f = \int_E fX_A$.

PROPOSICION (16)

Si la función $f: E \to \bar{\mathbb{R}}$ es integrable, dicha función - es finita casi por doquier. Es decir, los subconjuntos $f^{-1}(\{+\infty\})$ y $f^{-1}(\{-\infty\})$ son de medida nula.

DEMOSTRACION:

Mostremos primeramente que el conjunto $A = \{x \in E / f(x) = +\infty\} = f^{-1}(\{+\infty\})$ es de medida cero.

Para cada natural n y cada $x \in E$ se tiene la siguiente desigualdad $nX_A(x) \leq f^+(x)$ de donde $\int_E f^+ \geq n\int_E X_A = n\mu(A)$ y así $\frac{1}{n}\int_E f^+ \geq \mu(A)$.

Como n es un natural arbitrario y $\int_E f^+ < +\infty$ será $\mu(A)= 0$.

Mostremos ahora que el conjunto $B = \{x \in E/ f(x) = -\infty\} = f^{-1}(\{-\infty\})$ es de medida cero:

Para cada natural n y cada $x \in E$ se tiene $nX_B(x) \leq f^-(x)$, de donde $\int_E f^- \geq n\int_E X_B = n\mu(B)$. Y así $\frac{1}{n}\int f^- \geq \mu(B)$

Como n es un natural arbitrario y $\int f^- < +\infty$ será $\mu(B) = 0$.

PROPOSICION (17)

Sea $f: E \to \bar{\mathbb{R}}$ una función. Si $\mu(E) = 0$, f será una -- función medible e integrable tal que: $\int_E f = 0$.

DEMOSTRACION:

Como para cada $r \in \mathbb{R}$ es $f^{-1}(]r, +\infty]) \subset E$, podemos asegurar por proposición (3-9) que el conjunto $f^{-1}(]r, +\infty])$ es medible y de medida cero. Por consiguiente por proposición -- (3-22) f es una función medible y utilizando luego el corolario (31) se afirma que f^+ y f^- son funciones medibles.

Como $\int_E h = 0$ y $\int_E k = 0$[1] para $h \in L^*(f^+)$ y $k \in L^*(f^-)$ se tiene $\int_E f^+ = \operatorname{Sup}_{h\in L^*(f^+)} \int_E h = 0$ y $\int_E f^- = \operatorname{Sup}_{k\in L^*(f^-)} \int_E k = 0$ y

así afirmamos que f^+ y f^- son integrables y por consiguiente:

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = 0$$

LEMA (18)

Sean f, f_1 y f_2 funciones integrables sobre el conjunto medible E tales que $f = f_1 - f_2$, $f_1 \geq 0$ y $f_2 \geq 0$. Entonces:

$$\int_E f = \int_E f_1 - \int_E f_2 .$$

DEMOSTRACION:

Como $f = f_1 - f_2$ y $f = f^+ - f^-$ se tiene $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$ y así

$$\int_E f^+ + f_2 = \int_E f_1 + f^-$$

1. Es claro que $\int_E h = 0$ pues $\int_E h \leq \int_E \operatorname{Sup}\{h(x)/x\in E\} = \operatorname{Sup}\{h(x)/x\in E\}.\mu(E)$ lo mismo se afirma para $\int_E k$.

$$\int_E f^+ + \int_E f_2 = \int_E f_1 + \int_E f^-$$

$$\int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E f_1 - \int_E f_2$$

$$\int_E f = \int_E f_1 - \int_E f_2$$

PROPOSICION (19)

Sean c un número real, f y g funciones integrables sobre E. Entonces:

i) cf es integrable en E y $\int_E cf = c\int_E f$

ii) f+g es integrable en E y $\int_E f+g = \int_E f + \int_E g$

iii) Si A y B son conjuntos medibles y disjuntos contenidos en E, entonces $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$

iv) $f \geq 0$ c.d $\Longrightarrow \int_E f \geq 0$

v) $f \geq g$ c.d $\Longrightarrow \int_E f \geq \int_E g$

DEMOSTRACION:

i) Supongamos primeramente que $c \geq 0$. En este caso se tiene $(cf)^+ = cf^+$ y $(cf)^- = cf^-$.

Como f es integrable lo serán f^+ y f^- y por consiguiente también $cf^+ = (cf)^+$ y $cf^- = (cf)^-$ y así:

$$\int_E cf = \int_E (cf)^+ - \int_E (cf)^- = \int_E cf^+ - \int_E cf^- = c\{\int_E f^+ - \int_E f^-\} = c\int_E f$$

Supongamos ahora que $c < 0$. Entonces

$$(cf)^+ = [(-c)(-f)]^+ = -c(-f)^+ = -cf^-$$

$$(cf)^- = [(-c)(-f)]^- = -c(-f)^- = -cf^+$$

Como f es integrable lo serán también f^+ y f^- y así también $-cf^+ = (cf)^-$ y $-cf^- = (cf)^+$. Tendremos por lo tanto:

$$\int_E cf = \int_E (cf)^+ - \int_E (cf)^- = \int_E -cf^- - \int_E -cf^+ = -c\int_E f^- + c\int_E f^+ =$$

$$= c\{\int_E f^+ - \int_E f^-\} = c\int_E f$$

ii) Se tienen las siguientes igualdades:

$$f+g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-) \tag{1}$$

$$f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- \tag{2}$$

$$|f+g| = (f+g)^+ + (f+g)^- \tag{3}$$

De la ecuación (1) se deduce la siguiente desigualdad:

$$|f+g| \leq f^+ + g^+ + f^- + g^- \tag{4}$$

Sustituyendo (3) en (4) se obtiene:

$$(f+g)^+ + (f+g)^- \leq f^+ + g^+ + f^- + g^-$$

de la cual afirmamos por proposición (11-iii-ii) que

$$\int_E (f+g)^+ + \int_E (f+g)^- \leq \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E f^- + \int_E g^- \tag{5}$$

Como por hipótesis f y g son integrables, tendremos que cada una de las cuatro funciones positivas f^+, g^+, f^- y g^-

son integrables y por consiguiente la expresión de la derecha de la inecuación (5) es un número real y así $\int (f+g)^+ \leq +\infty$ y $\int (f+g)^- \leq +\infty$ de donde se afirma que la función $f+g$ es <u>integrable</u>.

Por otra parte, utilizando la igualdad (1) y el lema anterior se tiene

$$\int_E (f+g) = \int_E (f^+ + g^+) - \int_E (f^- + g^-)$$

$$= \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^-$$

$$= \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^-$$

$$= \int_E f + \int_E g$$

iii) $\int_{A \cup B} f = \int_E f X_{A \cup B} = \int_E (f X_A + f X_B) = \int_A f + \int_B f$

iv) Sea $D = \{x \in E / f(x) < 0\}$; por hipótesis $\mu(D) = 0$. Utilizando (iii) se tiene: $\int_E f = \int_{E-D} f + \int_D f$

Como $\int_D f = 0$ por propocición (17). Entonces

$$\int_E f = \int_{E-D} f \geq 0$$

v) Utilizando (ii y iv) se tiene $0 \leq \int_E (f-g) = \int_E f - \int_E g$ por lo tanto

$$\int_E f \geq \int_E g$$

CAPITULO 5

COMPARACION ENTRE LA INTEGRAL DE RIEMANN Y LEBESGUE

En esta sección haremos una comparación entre las integrales de Riemann y Lebesgue.

La proposición (1.25) asegura que la condición necesaria y suficiente para que una función acotada sobre un intervalo finito sea Riemann-integrable es que sea continua casi por doquier y la proposición (4-5) afirma que dicha función será Lebesgue-integrable si y solo sí ella es medible. Como toda función continua casi por doquier es medible (proposición 3-25), podemos asegurar que toda función que es Riemann-integrable lo es también en el sentido de Lebesgue. Y así, la familia de funciones que son Lebesgue-integrables es mucho más amplia que las que son Riemann-integrables.

El siguiente ejemplo muestra un caso de una función que es Lebesgue-integrable pero no es Riemann-integrable:

$$\text{Sea } f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ tal que } x \rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{D} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{D}' \end{cases}$$

para cualquier partición Π de $[0,1]$ se tiene

$M_k(f) = 1$ y $m_k(f) = 0$ para $k = 1,2,\ldots n$. Y así.

$$U(\Pi, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f).\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1$$

$$L(\Pi, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f).\Delta x_k = 0$$

por consiguiente:

$$R\overline{\int_a^b} f = 1 \qquad y \qquad R\underline{\int_a^b} f = 0 \ *$$

$\therefore$ f no es Riemann-integrable.

En cambio, dicha función si es Lebesgue-integrable como - veremos:

Sea $E = \{x \in [0,1] / x \in \mathbb{D}\}$, y así $f(x) = \chi_E(x)$ es una -- función simple y por lo tanto

$$L\int_0^1 f = L\int_0^1 \chi_E = 1.\mu(E) = 0.$$

Cuando dos funciones f y g son iguales casi por do - quier y una de ellas es Lebesgue-integrable la otra lo es también y el valor de sus integrales coinciden. Mientras que con la integral de Riemann no puede hacerse la misma - afirmación como lo veremos en el siguiente ejemplo:

Sean f, g: $[0,1] \to \mathbb{R}$ tales que

$$g(x) = 0 \quad y \quad f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{D} \\ 0 & si\ x \in \mathbb{D}' \end{cases}$$

* Para hacer distinción entre Integral de Riemann e Integral de Lebesgue antepondremos al símbolo de integral una R o una L según -- sea el caso.

es claro que $f = g$ c.d y que la función g es Riemann-integrable (su integral es igual a 0). Mientras que la función f no es Riemann-integrable como se vió en el ejemplo anterior.

Cuando nos ocupamos de funciones medibles, todas -- las operaciones ordinarias y en especial las de paso al límite nos conducen a funciones medibles y así como vimos en la proposición (4-8) cualquier función acotada obtenida -- por un proceso de límite de funciones Lebesgue-integrables será Lebesgue-integrable, en cualquier conjunto de medida finita. Para la integral de Riemann no es cierta, en general, la afirmación análoga como veremos en el siguiente -- ejemplo:

Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones acotadas definidas sobre $[0,1]$ así:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ tal que } x \rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ con } q<n \wedge p,q \in Z_0^+ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así serán: $f_1(x) = 0$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{0,1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{0, \frac{1}{2}, 1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\vdots$

Como cualquier número racional r del intervalo [0,1] puede escribirse como $\frac{v}{t}$ con v, t $\in Z_o^+$, se sigue que dicha sucesión converge a la función

$$f: [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{tal que } x \rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}' \end{cases}$$

pues siempre puede encontrarse una función f_n, de la sucesión, tal que $f_n(r) = 1$ (con solo tomar n = t+1). Es claro además que cada f_n es Riemann-integrable en [0,1] y su integral es igual a cero. Por otra parte f(x) no es Riemann-integrable como se vió en el ejemplo anterior.

Los ejemplos anteriores corroboran nuestra afirmación de que la familia de funciones que son Lebesgue-integrables es mucho más amplia que la de Riemann-integrables. Aún más, puede demostrarse que si una función es Riemann-integrable el valor de la integral de Riemann coincide con el valor de la integral de Lebesgue de dicha función, como lo veremos más adelante.

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $\Pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de [a,b]. En el capítulo 1 definimos para cada subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ los valores

$$M_k(f) = \sup_{x \in I_k} f(x)$$

$$m_k(f) = \inf_{x \in I_k} f(x)$$

tomando en cuenta lo anterior, para cada partición $\Pi \in P_{[a,b]}$ puede construirse las función escalón ψ, $\phi:[a,b] \to \mathbb{R}$ así:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f).X_{I_k}(x)$$

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f).X_{I_k}(x)$$

dichas funciones son tales que $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ para $x \in [a,b]$

La integral de Riemann de cada una de las funciónes esca--lón ψ y ϕ será:

$$\int_a^b \psi(x)dx = \int_{a=x_0}^{x_1} M_1(f).dx + \int_{x_1}^{x_2} M_2(f)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} M_n(f).dx = \sum_{k=1}^{n} M_k(f).\Delta x_k$$

$$\int_a^b \phi(x)dx = \int_{a=x_0}^{x_1} m_1(f).dx + \int_{x_1}^{x_2} m_2(f)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} m_n(f).dx = \sum_{k=1}^{n} m_k(f).\Delta x_k$$

Nótese que las integrales $\int_a^b \psi$ y $\int_a^b \phi$ corresponden respectivamente a una suma superior de Riemann y a una suma inferior de Riemann de f para la partición Π. De aquí que podemos definir la integral superior e inferior de Riemann de la función f en $[a,b]$ así:

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_{\psi \geq f} \int_a^b \psi \qquad \text{y} \qquad \underline{\int_a^b} f = \sup_{\phi \leq f} \int_a^b \phi$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las funciones escalón ψ mayores que f y el supremo sobre todas las funciones esca lón menores que f; como cada función escalón es un caso particular de función simple se puede intuir que la integral de Lebesgue es una extensión de la integral de Riemann. Dicha aseveración viene fundamentada en la siguiente proposición:

PROPOSICION (1)

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si f es Riemann-integrable en $[a,b]$, entonces es también Lebesgue-integrable en $[a,b]$ y además

$$R\int_a^b f = L\int_a^b f$$

DEMOSTRACION:

Como cada función escalón es una función simple será:

$$R\underline{\int}_a^b f \leq \sup_{\phi \in L(f)} \int_a^b \phi = L\underline{\int}_a^b f$$

y

$$R\overline{\int}_a^b f \geq \inf_{\psi \in U(f)} \int_a^b \psi = L\overline{\int}_a^b f.$$

Y como para toda función f es $L\underline{\int}_a^b f \leq L\overline{\int}_a^b f$, resulta

$$R\underline{\int}_a^b f \leq L\underline{\int}_a^b f \leq L\overline{\int}_a^b \leq R\overline{\int}_a^b f. \qquad (1)$$

Además por hipótesis es $R\underline{\int}_a^b f = R\overline{\int}_a^b f$, y así de la expresión (1) resulta la siguiente igualdad:

$$R\int_{-a}^{b} f = L\int_{-a}^{b} f = L\int_{a}^{\bar{b}} f = R\int_{a}^{\bar{b}} f$$

$\therefore$ f es Lebesgue-integrable y $R\int_a^b f = L\int_a^b f$.

La proposición precedente nos permite no hacer alguna distinción entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue para las funciones que son Riemann-integrables -- (continuas casi por doquier).

Muchas veces, aunque una función medible f no sea Riemann-integrable, para calcular la integral de Lebesgue se - puede utilizar los conceptos de la integral de Riemann buscando para ello una función g que sea Riemann-integrable y tal que f = g c.d. Por ejemplo, calcular $L\int_1^4 f(x)dx$ si

$$f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} \text{ tal que } x \rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in \mathbb{Q}' \\ -3 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

es claro que f no es Riemann-integrable en [1,4], pero sí lo es la función

$$g: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} \text{ tal que } x \rightsquigarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

y además f = g c.d. Por lo tanto

$$L\int_1^4 f = L\int_1^4 g = R\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big]_1^4 = 2$$

El procedimiento anterior también puede ser utilizado para integrar funciones no acotadas. Por ejemplo, para la función f definida en el ejemplo anterior calcular:

$$L\int_0^1 f \qquad (1)$$

Es claro que f no es acotada en el intervalo [0,1]. Similarmente como en el ejemplo precedente definamos la función $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ para $x \in \overline{\mathbb{R}}$ y así la integral (1) es igual a la siguiente $L\int_0^1 g$.

Como g tampoco es acotada, tratemos de utilizar la proposición (4-12) construyendo una sucesión $(g_n)_{n \geq 1}$ de funciones no-negativas y acotadas que converjan a la función g. Así sean $g_n(x) = \min\{g(x), n\}$ para $n = 1,2,\ldots$ es decir

$$g_n(x) = \min\{\frac{1}{\sqrt{x}}, n\} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq \frac{1}{n^2} \\ n & \text{si } x < \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

es claro que la sucesión $(g_n(x))_{n \geq 1}$ es creciente hacia la función $g(x)$ y además cada $g_n(x)$ es acotada y Riemann-integrable. Y así:

$$R\int_0^1 g_n = \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_0^{\frac{1}{n^2}} n\,dx = \left(2 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n}; \quad \text{para } n = 1,2,\ldots$$

por lo tanto por proposición (4-12), resulta

$$L\int_0^1 g = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n = \lim_{n\to\infty} \left\{\left(2 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n}\right\} = 2$$

$$\therefore \quad L\int_0^1 f = 2$$

BIBLIOGRAFIA

Apostol, Tom. "Análisis Matemático"
Ed. Reverté, Barcelona 1960

Bartle, Robert G. "The Elements of Real Analysis"
John Wiley y Sons, N.Y. 1964

Halmos, Paul R. "Measure Theory"
Springer-Verlag, N.Y. 1974

Royden, H. L. "Real Analysis"
Mc-Millan Publishing, N.Y. 1968

Sze-Tsen-Hu. "Elements of Real Analysis"
Holden-Day, 1967