UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

CALCULO DIFERENCIAL EN ESPACIOS EUCLIDEOS

Trabajo de Graduación previo a la opción del Título de

LICENCIADO EN MATEMATICA

Presentado por

Alba Lila Rico Peña
Teresa Amelia Aguilar de Gallegos

Noviembre 1979

San Salvador El Salvador Centro América

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR: ING. FELIX ANTONIO ULLOA

SECRETARIO: LIC. RICARDO ERNESTO CALDERON

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO a.i.: ING. FELIX ANTONIO ULLOA

SECRETARIO a.i: LIC. MANUEL DE JESUS BAIRES

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

DIRECTOR: ING. CARLOS MAURICIO CANJURA

ASESOR

Lic. JOSE JAVIER RIVERA LAZO

A MIS PADRES,

Hortensia Peña de Rico

Roberto Rico Guzmán

A MI ESPOSO,

Pedro Alfonso Tejada Díaz

A MI HIJO,

Manuel Alfonso

A MI ESPOSO,

Fredy A. Gallegos

A MIS HIJOS,

Rosella Verónica

Fredy Miguel

y Mónica Gabriela,

con amor.

I N D I C E

PAGINA

INTRODUCCION

El objetivo primordial de este trabajo es que pueda ser utilizado como texto de consulta en un curso de Cálculo Diferencial, curso que es de suma importancia para los estudiantes de matemática pura y que encuentran dificultades con la bibliografía existente en nuestro medio. Inquietud nuestra es que los estudiantes de Licenciatura en Matemática, ya egresados, que tengan interés en el tema continúen con el estudio del Cálculo entre espacios euclídeos, desarrollando tópicos como: Aplicaciones del Cálculo Diferencial y seguidamente con Cálculo Integral, tomando como texto guía el libro Calculus of Several Variables de Casper Goffman.

El presente trabajo se desarrolla a través de dos Capítulos:

CAPITULO I: ESPACIOS EUCLIDEOS.

Es la parte más extensa de nuestro trabajo, ya que es la base necesaria para el desarrollo del libro antes mencionado.

El espacio euclideano es un espacio vectorial en el cual existe una función distancia que satisface ciertas condiciones. En dicho Capítulo damos la definición y propiedades principales de esos espacios. También tratamos funcio nes lineales entre espacios vectoriales y sus propiedades. Además, desarrollamos parte de la topología que puede definirse en estos espacios.

CAPITULO II: FUNCIONES DIFERENCIABLES.

Definimos continuidad y diferenciabilidad para funciones entre espacios euclídeos. Dichas definiciones son independientes de las normas, así como también de las coordenadas. Las propiedades principales de las funciones diferenciables son desarrolladas.

Agradecemos al Lic. José Javier Rivera Lazo por su magnífica orientación para que este trabajo se llevara a feliz término. Es justo hacer notar la colaboración brindada por la secretaria doña Edda Vargas y por el impresor don Mauricio García.

capitulo 1

Espacios Euclideos

1.1 ESPACIOS VECTORIALES

Definición 1.1-1

Llamaremos *Espacio Vectorial* sobre el campo de los reales a un conjunto E, con las funciones:

$$g: E \times E \longrightarrow E: (x,y) \rightsquigarrow (x+y)$$

$$\text{y} \quad v: \mathbb{R} \times E \longrightarrow E: (a,x) \rightsquigarrow ax$$

asumiendo como válidas las siguientes condiciones:

a) E es un grupo abeliano respecto a la función g.

b_1) Para todo $x \in E$ y $a,b \in \mathbb{R}$, $(ab)x = a(bx)$.

b_2) Para todo $x \in E$ y $a,b \in \mathbb{R}$, $(a+b)x = ax+bx$.

b_3) Para todo $x,y \in E$ y $a \in \mathbb{R}$, $a(x+y) = ax+ay$.

b_4) Para todo $x \in E$, $1x = x$.

Usaremos el símbolo θ para la identidad del grupo en E.

Proposición 1.1-2

Para todo $x \in E$, $0x = \theta$.

Demostración

Dado que $0+0 = 0$, para todo $x \in E$, $0x = (0+0)x = 0x+0x$, por 1.1-1; como E es grupo abeliano respecto a la función g, $0x = \theta$.

Proposición 1.1-3

Para todo $x \in E$, $(-1)x+x = \theta$; es decir $(-1)x$ es el inver so de x.

Demostración

$$
\begin{aligned}
(-1)x+x &= (-1)x+(1)x \\
&= ((-1)+1)x, \qquad \text{por } 1.1\text{-}1 \\
&= 0x \\
&= \theta \qquad , \qquad \text{por } 1.1\text{-}2
\end{aligned}
$$

Luego $(-1)x+x = \theta$.

EJEMPLOS DE ESPACIOS VECTORIALES

Ejemplo 1.1-4

Sea E el conjunto de n-adas de números reales; si $a \in \mathbb{R}$, $x = (x_1,\ldots,x_n) \in E$ y $y = (y_1,\ldots,y_n) \in E$, sean

$g(x+y) = x+y = (x_1+y_1,\ldots, x_n+y_n) \in E$

y $v(a,x) = ax = (ax_1,\ldots,ax_n) \in E$.

E con estas operaciones es un Espacio Vectorial.

a) E es un grupo abeliano respecto a la función g, por cumplir las siguientes propiedades:

i) "Cierre"

La cumple por definición de g.

ii) "Sean x, y, $z = (z_1,\ldots,z_n)$ elementos de E;

$x+(y+z) = x+(y+z)$".

$$
\begin{aligned}
x+(y+z) &= (x_1,\dots,x_n) + ((y_1,\dots,y_n) + (z_1,\dots,z_n)) \\
&= (x_1,\dots,x_n) + (y_1+z_1,\dots,y_n+z_n) \\
&= (x_1+(y_1+z_1),\dots,x_n+(y_n+z_n)) \\
&= ((x_1+y_1)+z_1,\dots, (x_n+y_n)+z_n) \text{ por ser cada componente}
\end{aligned}
$$

de las n-adas un elemento de $\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
x+(y+z) &= (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) + (z_1,\dots,z_n) \\
&= ((x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n)) + (z_1,\dots,z_n) \\
&= (x+y) + z
\end{aligned}
$$

iii) "Existe un elemento $\theta \in E$ tal que para todo $x \in E$; $x+\theta = x$".

$x = (x_1,\dots,x_n) = (x_1+0,\dots,x_n+0)$

$x = (x_1,\dots,x_n) + (0,\dots,0)$

Luego $\theta = (0,\dots,0)$

iv) "Para todo $x \in E$ existe un elemento $-x \in E$ tal que

$x+(-x) = \theta$".

Sea $x = (x_1,\dots,x_n) \in E$; dado que

$(x_1+(-x_1),\dots, x_n+(-x_n)) = (0,\dots,0)$

entonces

$x+(-x_1,\dots, -x_n) = (0,\dots,0)$

Luego

$-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$ es el inverso de x.

v) "Para todo $x,y \in E$, $x+y = y+x$".

$$
\begin{aligned}
x+y &= (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) \\
&= (y_1+x_1, \ldots, y_n+x_n); \; x_i, y_i \in \mathbb{R}, \; i = 1,2,\ldots, n \\
&= (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n) \\
&= y+x
\end{aligned}
$$

b_1) "Para todo $x \in E$ y $a,b \in \mathbb{R}$, $(ab)x = a(bx)$".

$$
\begin{aligned}
(ab)x &= (ab)(x_1, \ldots, x_n) \\
&= ((ab)x_1, \ldots, (ab)x_n) \\
&= (a(bx_1), \ldots, a(bx_n)); \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,\ldots,n \\
&= a(bx_1, \ldots, bx_n) \\
&= a(bx)
\end{aligned}
$$

b_2) "Para todo $x \in E$ y $a,b \in \mathbb{R}$, $(a+b)x = ax + bx$".

$$
\begin{aligned}
(a+b)x &= (a+b)(x_1, \ldots, x_n) \\
&= ((a+b)x_1, \ldots, (a+b)x_n) \\
&= (ax_1 + bx_1, \ldots, ax_n + bx_n) \\
&= (ax_1, \ldots, ax_n) + (bx_1, \ldots, bx_n) \\
&= a(x_1, \ldots, x_n) + b(x_1, \ldots, x_n) \\
&= ax + bx
\end{aligned}
$$

b_3) "Para todo $x,y \in E$ y $a \in \mathbb{R}$, $a(x+y) = ax + ay$".

$$\begin{aligned} a(x+y) &= a(x_1+y_1,\ldots, x_n+y_n) \\ &= (a(x_1+y_1),\ldots, a(x_n+y_n)) \\ &= (ax_1 + ay_1,\ldots, ax_n + ay_n) \\ &= (ax_1,\ldots, ax_n) + (ay_1,\ldots, ay_n) \\ &= ax + ay \end{aligned}$$

b_4) "Para todo $x \in E$, $1x = x$".

$$\begin{aligned} 1x &= 1(x_1,\ldots, x_n) \\ &= (1x_1,\ldots, 1x_n) \\ &= (x_1,\ldots, x_n) \\ &= x \end{aligned}$$

Luego E es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.1-5

Sea $A \neq \phi$ cualquier conjunto, X espacio vectorial. Sea X^A el conjunto de todas las funciones de A hacia X. Para cualquier $f,g \in X^A$, $\alpha \in A$;

$$(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha).$$

Para todo $f \in X^A$ y $a \in \mathbb{R}$;

$$(af)(\alpha) = af(\alpha)$$

Demostrar que X^A, con las funciones

$$h: X^A \times X^A \longrightarrow X^A: (f,g) \rightsquigarrow h(f,g) = f+g$$

$$J: \mathbb{R} \times X^A \longrightarrow X^A: (a,f) \rightsquigarrow J(a,f) = af$$

forma un Espacio Vectorial.

a) X^A es un grupo abeliano respecto a la función h, ya que cumple las siguientes propiedades:

i) "Cierre"

Se cumple por definición de h.

ii) "Sean $f,g,\ell \in X^A$, $(f+g)+\ell = f+(g+\ell)$".

Sea $\alpha \in A$

$$((f+g)+\ell)(\alpha) = (f+g)(\alpha) + \ell(\alpha)$$

$$= (f(\alpha) + g(\alpha)) + \ell(\alpha)$$

$= f(\alpha) + (g(\alpha) + \ell(\alpha))$, ya que pertenecen a X.

$$= f(\alpha) + (g+\ell)(\alpha)$$

$$= (f+(g+\ell))(\alpha)$$

Luego $(f+g)+\ell = f+(g+\ell)$.

iii) "Existe un elemento $q \in X^A$ tal que para todo $f \in X^A$, $f+q = f$".

Sea $\alpha \in A$

$$(f+q)(\alpha) = f(\alpha) + q(\alpha)$$

Si necesitamos que $f(\alpha) + q(\alpha) = f(\alpha)$, $q(\alpha)$ tendría que ser la función cero, la cual será definida como:

$$\theta : A \longrightarrow X: \alpha \rightsquigarrow \theta(\alpha) = \theta; \quad \text{luego}$$

$q(\alpha) = \theta(\alpha)$ entonces $q \doteq \theta$.

iv) "Para todo $f \in X^A$ existe un elemento $P \in X^A$ tal que $f+p = \theta$".

Sea $\alpha \in A$ entonces $(f+p)(\alpha) = f(\alpha) + p(\alpha)$

Si necesitamos que $f(\alpha) + q(\alpha) = \theta(\alpha) = \theta$, p tiene que ser la función

$$-f: A \longrightarrow X : \alpha \rightsquigarrow (-f)(\alpha)$$

Así

$$f(\alpha) + (-f)(\alpha) = f(\alpha) - f(\alpha) = \theta$$

v) "Para todo $f,g \in X^A$, $f + g = g + f$".

Sea $\alpha \in A$

$$\begin{aligned}(f+g)(\alpha) &= f(\alpha) + g(\alpha)\\ &= g(\alpha) + f(\alpha), \text{ por ser elementos de } X\\ &= (g+f)(\alpha)\end{aligned}$$

Luego $f+g = g+f$.

b_1) "Para todo $f \in X^A$ y $a,b \in \mathbb{R}$, $(ab)f = a(bf)$".

Sea $\alpha \in A$.

$$((ab)f)(\alpha) = (ab)f(\alpha) = a(bf(\alpha)) = a(bf)(\alpha)$$

$$= (a(bf))(\alpha)$$

Luego $(ab)f = a(bf)$.

b_2) "Para todo $f \in X^A$ y $a,b \in \mathbb{R}$, $(a+b)f = af+bf$".

Sea $\alpha \in A$

$$((a+b)f)(\alpha) = (a+b)f(\alpha)$$

$$= af(\alpha) + bf(\alpha)$$

$$= (af)(\alpha) + (bf)(\alpha)$$

$$= (af+bf)(\alpha)$$

Luego $(a+b)f = af+bf$

b_3) "Para todo $f,g \in X^A$ y $a \in \mathbb{R}$, $a(f+g) = af+ag$".

Sea $\alpha \in A$

$$(a(f+g))(\alpha) = a(f+g)(\alpha)$$

$$= a(f(\alpha) + g(\alpha))$$

$$(a(f+g))(\alpha) = af(\alpha) + ag(\alpha)$$
$$= (af)(\alpha) + (ag)(\alpha)$$
$$= (af+ag)(\alpha)$$

Luego $a(f+g) = af + ag$

b_4) "Para todo $f \in X^A$, $1\,f = f$".

Sea $\alpha \in A$

$$(1\,f)(\alpha) = 1\,f(\alpha) = f(\alpha)$$

Luego $1\,f = f$

Por consiguiente X^A es un Espacio Vectorial.

Definición 1.1-6

Sean E y T espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$; la aplicación f de E en T es un *homomorfismo* si:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

2) $f(ax) = af(x)$

para cualesquiera $x,y \in E$ y $a \in \mathbb{R}$.

Observación 1.1-7

Un homomorfismo de espacios vectoriales es llamado también *Función Lineal*.

Definición 1.1-8

Un homomorfismo f es llamado *Isomorfismo* si f es biyectiva.

Proposición 1.1-9

Sea X un espacio vectorial, entonces existe un conjunto infinito de isomorfismos distintos de X sobre él mismo.

Demostración

Definamos la función ha: $X \longrightarrow X : x \rightsquigarrow ha(x) = ax$; $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

La función está bien definida puesto que todos los elementos del dominio poseen imagen bajo ha; además la imagen es única:

$$x = y \Longrightarrow ax = ay \Longrightarrow ha(x) = ha(y)$$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a \neq b &\Longrightarrow ax \neq bx \\ &\Longrightarrow ha(x) \neq hb(x), \quad x \neq \theta \\ &\Longrightarrow ha \neq hb \end{aligned}$$

Luego existe un conjunto infinito de estas funciones ya que para cada elemento de $\mathbb{R}$ obtenemos una función.

"Isomorfismo"

i) Sean $x,y \in X$; $a,b \in \mathbb{R}$; $ha(x+y) = ha(x) + ha(y)$ y $ha(bx) = bha(x)$.

$ha(x+y) = a(x+y) = ax+ay = ha(x) + ha(y)$

$ha(bx) = a(bx) = (ab)x = (ba)x = b(ax) = b\ ha(x)$

ii) "Inyectiva"

$x \neq y \Longrightarrow ax \neq ay \Longrightarrow ha(x) \neq ha(y)$

iii) "Sobreyectiva"

Lo es ya que para todo $y \in X$ existe $x = \frac{y}{a} \in X$, $a \neq 0$, tal que $ha\left(\frac{y}{a}\right) = a\left(\frac{y}{a}\right) = y$.

Luego las funciones ha son isomorfismos de espacios vectoriales.

Definición 1.1-10

Dos espacios vectoriales E y T son *Isomórficos* si existe una función f de E en T la cual es un isomorfismo.

Definición 1.1-11

Si E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $T \subset E$, entonces T es un *Subespacio de* E, si con las operaciones de E, T forma un espacio vectorial.

Lema 1.1-12

Un subconjunto no vacío T de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$ es un subespacio de E si y solamente si cualesquiera sean $a \in \mathbb{R}$, $x,y \in E$, se cumple: $x+y \in T$ y $ax \in T$.

Demostración

La condición necesaria es evidente por definición de subespacio.

Para la condición suficiente: el negativo $-x$ de todo elemento $x \in T$ pertenece a T, ya que por la proposición 1.1-3; $-x = (-1)x$ y $(-1)x \in T$; $\theta \in T$; ya que tomando $a = 0$, $ax \in T$.

EJEMPLOS DE SUBESPACIOS VECTORIALES

Definicion 1.1-13

Sean E y T espacios vectoriales y f un homomorfismo de E en T. Se denomina *Núcleo del homomorfismo* f, al conjunto de todos los elementos $x \in E$ para los cuales $f(x) = \theta$.

NOTACION: Denotaremos al Núcleo del homomorfismo f por:

$$K(f) = \{x \in E \ / \ f(x) = \theta\}$$

Definición 1.1-14

Sean E y T espacios vectoriales y f un homomorfismo de E en T. Se denomina *Rango del homomorfismo* f, al conjunto de los elementos $u \in T$ para los cuales existe $x \in E$ tal que $f(x) = u$.

NOTACION: Denotaremos al Rango del homomorfismo f por

$$r(f) = \{u \in T \ / \ f(x) = u, \text{ para algún } x \in E\}.$$

Proposición 1.1-15

Sean E y T espacios vectoriales la función f de E en T es inyectiva si y solamente si $K(f) = \{\theta\}$.

Demostración

($\Longrightarrow$) Supongamos que f es un homomorfismo inyectivo. Puesto que f es homomorfismo, lleva el elemento θ de E al elemento θ de T; luego el elemento θ de E está contenido en el $K(f)$, ya que $f(\theta) = \theta$. Por ser f inyectiva, $f^{-1}(\theta)$, la imagen inversa del elemento $\theta \in T$, no puede contener más de un elemento de E, lo que nos implica que $K(f) = \theta$.

($\Longleftarrow$) Supongamos ahora que $K(f) = \{\theta\}$; sean $x,y \in E$. Si $f(x) = f(y)$ entonces $f(x) - f(y) = \theta$, y por ser f homomorfismo

$$f(x) - f(y) = f(x-y) = \theta$$

es decir $x-y \in K(f)$; como el único elemento de $K(f)$ es θ, entonces $x-y = \theta$; por consiguiente $x = y$. Luego f es inyectiva.

Proposición 1.1-16

Sean E y T espacios vectoriales y $f: E \to T$ un homomorfismo, entonces

a) El núcleo de f es un subespacio de E.

b) El rango de f es un subespacio de T.

Demostración

"El núcleo de f es un subespacio de T".

i) Sean $x,y \in K(f)$; por ser f homomorfismo,

$f(x+y) = f(x) + f(y) = \theta + \theta = \theta$.

Luego $x+y \in K(f)$.

ii) Sean $a \in \mathbb{R}$ y $x \in K(f)$; por ser f homomorfismo,

$f(ax) = af(x) = a\theta = \theta$

Luego $ax \in K(f)$

"El rango de f es un subespacio de T".

i) Sean $u,v \in r(f)$; existen $x,y \in E$ tal que

$f(x) = u$ y $f(y) = v$.

$f(x+y) = f(x) + f(y) = u+v$

Luego existe $x+y \in E$ tal que $f(x+y) = u+v$; así $u+v \in r(f)$.

ii) Sean $a \in \mathbb{R}$ y $u \in r(f)$; existe $x \in E$ tal que $f(x) = u$.

$f(ax) = a\, f(x) = au$

Luego existe $ax \in E$ tal que $f(ax) = au$.

Lema 1.1-17

La intersección de cualquier familia de subespacios de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$ es un subespacio de E.

Demostración

Consideremos una familia arbitrariamente elegida $\psi = \{B_i \,/\, i \in U\}$ de subespacios de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$ y denotemos por B su intersección; esto es $B = \bigcap_{i \in U} B_i$

$B \neq \phi$ puesto que cada B_i contiene a θ, $i \in U$; $B \subset B_i$ para todo $i \in U$; si $x \in B_i$, $y \in B_i$ y $a \in \mathbb{R}$, por Lema 1.1-12, $x+y \in B_i$ y $ax \in B_i$; ya que es cierto para todo $i \in U$, entonces $x+y \in B$ y $ax \in B$.

Luego B es un subespacio de E.

Definición 1.1-18

Llamaremos *subespacio generado por* A a un subespacio E_A que cumple las siguientes condiciones

i) $E \subset E_A$

ii) Si T es un subespacio tal que $A \subset T$ entonces $E_A \subset T$.

Observación 1.1-19

Si el subespacio E_A existe, por la condición ii) de la definición 1.1-18 es único.

Proposición 1.1-20

Sea E un espacio vectorial y A un conjunto arbitrario de vectores tal que $A \subset E$. Entonces el subespacio vectorial generado por A existe y es único.

Demostración

Existen subespacios B que contienen todos los elementos de A (esto es tales que $A \subset B$); el espacio total E, es por ejemplo uno de ellos. Sea B la intersección de todos los subespacios que contienen a A; por 1.1-17 es claro que B es un subespacio que contiene a A. La condición ii) de la definición 1.1-18 también se cumple, ya que si A está contenido en el subespacio C, entonces $B \subset C$ ya que B es la intersección de todos los subespacios que contienen a A. Luego B es el espacio generado por A, es decir $B = E_A$.

Observación 1.1-21

Cuando E_A es igual al espacio total E, decimos que A es un conjunto de generadores de E y que E es generado por A.

Definición 1.1-22

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$; si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$

entonces cualquier elemento de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \quad \text{donde } a_i \in \mathbb{R},$$

se llama *Combinación Lineal* de $x_1, \ldots, x_n$.

Proposición 1.1-23

Sea E un espacio vectorial, $A \neq \phi$. El conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores en A es un subespacio de E.

Demostración:

i) Sean $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, $\sum_{j=1}^{m} b_j y_j$ combinaciones lineales de elementos de A, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{j=1}^{m} b_j y_j = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m$$

es una combinación lineal de elementos de A.

ii) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\sum_{j=1}^{m} b_j y_j$ una combinación lineal de elementos de A. Entonces

$$a \sum_{j=1}^{m} b_j y_j = \sum_{j=1}^{m} a(b_j y_j) = \sum_{j=1}^{m} (ab_j) y_j$$

es también una combinación lineal de elementos de A, puesto que $ab_j \in \mathbb{R}$, para todo $j = 1, \ldots, m$.

Proposición 1.1-24

Si $A \neq \phi$ es cualquier conjunto de vectores en un espacio vectorial E y si B es el subespacio generado por A, entonces B es igual al conjunto de combinaciones lineales de vectores de A.

Demostración

Sea $C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;/\; a_i \in \mathbb{R},\ x_i \in A,\ n \in \mathbb{N} \right\}$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de A.

" $B = C$ "

i) $B \subset C$

Por la proposición 1.1-23 C es subespacio de E. Para cada $x \in A$, $x = 1x \in A$. Luego $A \subset C$. Como B es la intersección de todos los subespacios que contienen a A entonces B está contenido en C.

ii) $C \subset B$

Si B es generado por A entonces A es subconjunto de B; como B es subespacio, toda combinación lineal de elementos de A pertenece a B; es decir todo elemento de C pertenece a B, ya que todo elemento de C es una combinación lineal de elementos de A.

Definición 1.1-25

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un subconjunto $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es llamado *Linealmente independiente* si para toda n-ada de escalares $(a_1, \ldots, a_n)$ se cumple:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \theta \Longrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

Si, por otra parte, existen escalares $a_1, \ldots, a_n$ no todos cero tales que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \theta$, diremos que A es *linealmente dependiente.*

Lema 1.1-26

Sean E y M subespacios de S; si $M \subset E$ entonces M es subespacio de E.

Demostración

Como E es subespacio de S, entonces las operaciones de E son las mismas que para S; como M es subespacio de S, las operaciones de M son las mismas que para S y como $M \subset E$ las operaciones de M son las mismas que tiene E. Luego M es subespacio de E.

Lema 1.1-27

Sea B subconjunto de A, entonces el espacio generado por B es subconjunto del espacio generado por A. Es decir

$B \subset A \Longrightarrow E_B \subset E_A$

Demostración

Sea $x \in E_B$; entonces $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, con $a_i \in \mathbb{R}$; $x_i \in B$, $i = 1,2,\ldots, n$; como $B \subset A$ entonces $x_1, \ldots, x_n \in A$.

Luego $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in E_A$.

Proposición 1.1-28

Un subconjunto A de E es linealmente independiente si y solamente si para todo subconjunto propio B de A el espacio generado por B (E_B) es un subespacio propio del espacio generado por A (E_A).

Demostración

Para la condición necesaria suponemos que A es linealmente independiente. Sea $x \in A$ tal que $x \notin B$; entonces $x \notin E_B$, por ser A linealmente independiente; luego $x \in E_A$ y $x \notin E_B$.

Como $E_B \subset E_A$ y dado que E_B y E_A son subespacios de E, entonces E_B es subespacio de E_A; por lo tanto E_B es subespacio propio de E_A.

Demostraremos la suficiencia por reducción el absurdo.

Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un subconjunto finito de A y supongamos que existe al menos un escalar $a_i \neq 0$, con $i = 1,2,\ldots,n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \theta$; sea $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_j \neq 0$; entonces

$$x_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(- \frac{a_i}{a_j} \right) x_i .$$

Hagamos $B = A - \{x_j\}$; si demostramos que B es tal que E_B no es subespacio propio de E_A, tendremos lo que deseamos. Para ello demostremos que $E_A \subset E_B$. Sea $x \in E_A$; entonces $x = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$, $y_i \in A$, $b_i \in \mathbb{R}$; si

$y_i \in B$ para todo $i = 1,2,\ldots, m$ entonces $x \in E_B$; si existe $y_r \notin B$ entonces $y_r = x_j$ es decir es de la forma $x = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} b_i y_i + b_r x_j$

$$x = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} b_i y_i + b_r \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \left(- \frac{a_i}{a_j} \right) x_i$$

$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} b_i y_i \in E_B$ ya que es una combinación lineal de elementos de B.

$$b_r \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \left(- \frac{a_i}{a_j} \right) x_i = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \left(- \frac{b_r\, a_i}{a_j} \right) x_i \in E_B$$

por ser una combinación lineal de elementos de B. Luego $x \in E_B$; por tanto $E_A \subset E_B$ lo cual es una contradicción. Luego toda combinación lineal nula de elementos de B nos implica que $a_i = 0$, para todo $i = 1,2,\ldots,n$.

Definición 1.1-29

Un espacio vectorial E posee *dimensión finita n,* si existe un conjunto linealmente independiente $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset E$ tal que cada $x \in E$ es una combinación lineal de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i\, e_i \ , \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.1-30

Una *Base* de un espacio vectorial E es cualquier subconjunto de E linealmente independiente que genera al espacio entero E.

Proposición 1.1-31

A es una base de E si y solamente si el espacio generado por A es igual a E y el espacio generado por B es diferente de E, para cualquier subconjunto propio B de A.

Demostración

Para la condición necesaria; como A es una base de E entonces A es un subconjunto de E linealmente independiente tal que A genera al espacio entero; es decir $E_A = E$; dado que A es linealmente independiente aplicando proposición 1.1-28 tendríamos que $E_B \subset E_A$ y $E_B \neq E_A$, si $B \subsetneq A$, como $E_A = E$ entonces $E_B \neq E$.

Para la condición suficiente; como A es generador de E por hipótesis, bastará probar que A es linealmente independiente; lo es aplicando Proposición 1.1-28.

Proposición 1.1-32

Si E es de dimensión finita entonces cada base de E tendrá el mismo número de elementos.

Demostración

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E, sean $y_1, \ldots, y_{n+1}$ elementos de E,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, e_j \,, \qquad i = 1, \ldots, n+1$$

Sea $\quad a_{11} = \sum_{i=2}^{n+1} b_i\, a_{i1}$

$$a_{12} = \sum_{i=2}^{n+1} b_i\, a_{i2}$$

$$a_{13} = \sum_{i=2}^{n+1} b_i\, a_{i3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_{1n} = \sum_{i=2}^{n+1} b_i\, a_{in}$$

un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, entonces existen $b_2, \ldots, b_{n+1}$ soluciones de este sistema.

$$y_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n$$

$$y_1 = \left(\sum_{i=2}^{n+1} b_i\, a_{i1}\right)e_1 + \left(\sum_{i=2}^{n+1} b_i\, a_{i2}\right)e_2 + \ldots + \left(\sum_{1=2}^{n+1} b_i\, a_{in}\right)e_n$$

$$\begin{aligned} y_1 = {} & (b_2\, a_{21}\, e_1 + b_3\, a_{31}\, e_1 + \ldots + b_{n+1}\, a_{n+1,1}\, e_1) + \\ & (b_2\, a_{22}\, e_2 + b_3\, a_{32}\, e_2 + \ldots + b_{n+1}\, a_{n+1,2}\, e_2) + \\ & \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ & (b_2\, a_{2n}\, e_n + b_3\, a_{3n}\, e_n + \ldots + b_{n+1}\, a_{n+1,n}\, e_n) \end{aligned}$$

$$y_1 = b_2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, e_j + b_3 \sum_{j=1}^{n} a_{3j}\, e_j + \ldots + b_{n+1} \sum_{j=1}^{n} a_{n+1,j}\, e_j$$

por consiguiente

$$y_1 = b_2\, y_2 + b_3\, y_3 + \ldots + b_{n+1}\, y_{n+1}$$

y así $\{y_1, \ldots, y_{n+1}\}$ es linealmente dependiente, por tanto no puede ser base. Luego toda base de E debe poseer n elementos.

Proposición 1.1-33

Dada una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, entonces todo elemento de E tiene representación única en la forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \quad \text{con } a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Demostración

Sea $x \in E$, entonces x es de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \quad , \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

Supongamos $x = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$, $b_i \in \mathbb{R}$; entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \ ;$$

restando el miembro derecho de la igualdad a ambos miembros y por ser $e_1, \ldots e_n$ elementos de un espacio vectorial y a_i, b_i escalares, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)e_i = \theta ,$$

lo que por la independencia lineal de $\{e_1,\ldots, e_n\}$ nos conduce a $a_i - b_i = 0$, para todo $i = 1,\ldots,n$; es decir:

$$a_i = b_i , \quad \text{para todo } i = 1,\ldots, n.$$

Observación 1.1-34

En términos de esta representación tenemos una función canónica ψ de E sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ de n-adas de números reales. (Ejemplo 1.1-4).

Proposicion 1.1-35

Sea E un espacio de dimensión n; la función ψ de E sobre $\mathbb{R}^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración

Dado que E es un espacio de dimensión finita n sobre $\mathbb{R}$, posee una base $\{e_1,\ldots, e_n\}$; por la Proposición 1.1-33 todo elemento $x \in E$ posee representación única en la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, con $a_i \in \mathbb{R}$.

Por la unicidad de esta expresión la función

$$\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \leadsto (a_1, \ldots, a_n)$$

está bien definida.

"ψ es isomorfismo"

i) Homomorfismo

Sean $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$ elementos de E, $c \in \mathbb{R}$

con $x+y = \sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)e_i$, $cx = \sum_{i=1}^{n} (ca_i)e_i$

$$\psi(x+y) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)e_i\right)$$

$$= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

$$= (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n)$$

$$= \psi(x) + \psi(y)$$

$$\psi(cx) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} (ca_i)e_i\right)$$

$$= (ca_1, \ldots, ca_n)$$

$$= c(a_1, \ldots, a_n)$$

$$= c\ \psi(x)$$

ii) Inyectiva

Sean $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$, $ai, bi \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n.$

$$\psi(x) = \psi(y) \Longrightarrow \psi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\ e_i\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\ e_i\right)$$

$$\Longrightarrow (a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n)$$

$$\Longrightarrow a_i = b_i \ ; \text{ para todo } i = 1, \ldots, n$$

Luego $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$, es decir $x = y$

iii) Sobreyectiva.

ψ es sobreyectiva puesto que si $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ existe $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ tal que $\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$

Proposición 1.1-36

Cualesquiera dos espacios vectoriales de dimensión finita n sobre $\mathbb{R}$ son isomórficos.

Demostración

Sean V y E espacios vectoriales de dimensión finita n sobre $\mathbb{R}$; entonces existen dos isomorfismo f y g, $f: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $g: E \longrightarrow \mathbb{R}^n$; g^{-1} es un isomorfismo; luego $g^{-1} \circ f: V \longrightarrow E$ por ser composición de isomorfirmos es también un isomorfismo. Así V, E son espacios vectoriales isomórficos.

Definición 1.1-37

E es un *conjunto infinito* si existe un subconjunto propio

A de E y una función

$$f\colon A \longrightarrow E, \text{ biyectiva.}$$

Proposición 1.1-38

Todo espacio infinito dimensional posee un subespacio propio al cual es isomórfico.

Demostración

Sea B una base de E; luego B es un conjunto infinito; por lo tanto existe un subconjunto propio A de B y una función $f\colon A \to B$ la cual es biyectiva; por el Lema 1.1-27 si A es subconjunto propio de B entonces E_A es subespacio propio de E_B y como $E_B = E$ definamos un isomorfismo

$$g\colon E_A \longrightarrow E\colon x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \rightsquigarrow g\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

g está bien definida por la unicidad de la expresión

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

"g es un isomorfismo"

i) Homomorfismo

Sean $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \in E_A$, $c \in \mathbb{R}$

$$g(x+y) = g\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} b_i f(x_i)$$

$$= g(x) + g(y)$$

$$g(cx) = g\left(\sum_{i=1}^{n} (ca_i)x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (ca_i)\ f(x_i)$$

$$= c\sum_{i=1}^{n} a_i\ f(x_i)$$

$$= c\ g(x)$$

ii) Inyectiva

Sean $x \in E_A$, $x \in K(g)$; probemos que $x = \theta$.

Como $x \in E_A$, entonces $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, es decir

$$g_{(x)} = g\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) ;$$

$$x \in K(g) \Longrightarrow g\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \theta$$

y $\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) = \theta$; como f es inyectiva, $f(x_i) \neq f(x_j)$, si $i \neq j$

$f(x_i) \in B$ y B es base de E, luego $a_i = 0$, para todo i; entonces $x = \theta$.

iii) Sobreyectiva.

Sea $y \in E$, y es de la forma $y = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$, con $y_i \in B$. Como f es sobreyectiva, para $y_i \in B$ existe $x_i \in A$ tal que $y_i = f(x_i)$ o sea $y = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$, y por definición de g

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad \text{es tal que } g(x) = y.$$

1.2 DEFINICION DE ESPACIO EUCLIDEO.

Definición 1.2-1

Sea E un espacio vectorial n-dimensional, $n \geq 1$. Una función

$$(\ldots/\ldots): E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \rightsquigarrow (x/y)$$

que satisface las propiedades siguientes se llama *producto escalar* sobre E.

a) $(x/y) = (y/x)$, para todo $(x,y) \in E \times E$.

b) $(x+y\ /z) = (x/z) + (y/z)$, para todo $x,y,z \in E$.

c) $(ax/y) = a(x/y)$, para todo $(x,y) \in E \times E$ y $a \in \mathbb{R}$.

d) $(\theta/\theta) = 0$ y $(x/x) > 0$, para todo $x \in E$, $x \neq \theta$.

De las igualdades b) y c) se dice que los productos escalares son lineales con respecto al primer factor, a) expresa la ley simétrica o conmutativa. Del conjunto de estas tres resulta que el producto escalar es lineal con respecto a ambos factores (bilinealidad).

Es decir:

para toda $x,y,z \in E$, $a \in \mathbb{R}$

$$(x/ay) = (ay/x) = a(y/x) = a(x/y)$$

$$\begin{aligned}(x/y+z) &= (y+z/x) = (y/x) + (z/x) \\ &= (x/y) + (x/z)\end{aligned}$$

Proposición 1..2-2

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita n y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E. Si $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Entonces $(x/y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ es un producto escalar sobre E.

Demostración

a) "$(x/y) = (y/x)$, para todo $x, y \in E$".

$$(x/y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = (y/x)$$

b) "$(x+y/z) = (x/z) + (y/z)$, para todo $x,y,z \in E$".

$$(x+y/z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)z_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i z_i + y_i z_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i$$

$$= (x/z) + (y/z)$$

c) "$(ax/y) = a(x/y)$, para todo $x,y \in E$ y $a \in \mathbb{R}$".

$$(ax/y) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i)y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a(x_i y_i)$$

$$= a \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$= a(x/y)$$

d) "$(\theta/\theta) = 0$ y $(x/x) > 0$, $x \in E$, $x \neq \theta$".

$$(\theta/\theta) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 = \theta_1^2 + \ldots + \theta_n^2$$

$$= 0 + \ldots + 0$$

$$= 0$$

Como $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \neq \theta$, existe un j tal que $x_j \neq 0$; $x_j^2 > 0$, entonces

$$0 < x_j^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Luego $(x/x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$.

Por lo tanto $(x/y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ es un producto escalar.

Una norma puede ser introducida en E en términos del producto escalar.

Definición 1.2-3

Para todo $x \in E$ la *norma euclídea* de x está definida por

$$|x| = (x/x)^{1/2}$$

Teorema 1.2-4 (Desigualdad de Schwarz)

Para todo $x,y \in E$ se cumple:

i) $|(x/y)| \leq |x|\,|y|$.

ii) $|(x/y)| < |x|\,|y|$, si x, y son linealmente independientes.

iii) $|(x/y)| = |x|\,|y|$, si $x = ay$.

Demostración

Bastará demostrar ii), iii).

ii) " $|(x/y)| < |x||y|$, si x, y son linealmente independientes".

Supongamos entonces $x \neq \theta$, $y \neq \theta$ y $a \in \mathbb{R}$, $x - ay \neq \theta$ porque x,y son linealmente independientes

$$0 < (x - ay/x - ay) = (x/x) - (x/ay) - (ay/x) + (ay/ay)$$

$$0 < (x - ay/x - ay) = (x/x) - 2a(x/y) + a^2(y/y)$$

Sea $a^2 = \dfrac{(x/x)}{(y/y)}$, entonces

$$(x/x) - 2a(x/y) + a^2(y/y)$$

$$= (x/x) - 2\,\frac{(x/x)^{1/2}}{(y/y)^{1/2}}\,(x/y) + \frac{(x/x)}{(y/y)}\,(y/y)$$

simplificando

$$0 < (x/x) - 2\,\frac{|x|}{|y|}\,(x/y) + (x/x)$$

$$0 < 2\ (x/x)\ |y| - 2\ (x/y)\ |x|$$

$$2\ (x/y)\ |x| < 2\ (x/x)\ |y|$$

$$(x/y) < \frac{(x/x)\ |y|}{|x|}$$

$$(x/y) < \frac{|x|^2\ |y|}{|x|}$$

$$(x/y) < |x||y|$$

Además

$$(x/-y) < |x||-y| = |x||y|,$$

luego $-(x/y) = (x/-y) < |x||y|$

Por lo tanto $|(x/y)| < |x||y|$

iii) "$|(x/y)| = |x||y|$, si $x = ay$".

Existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $x = ay$

$$
\begin{aligned}
|(x/y)|^2 &= |(ay/y)|^2 \\
&= |a(y/y)|^2 \\
&= |a|^2 \, |y|^4 \\
&= |a|^2 \, |y|^2 \, |y|^2 \\
&= |a|^2 \, (y/y) \, |y|^2 \\
&= (ay/ay) \, |y|^2 \\
&= |ay|^2 |y|^2 \\
&= |x|^2 |y|^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $|(x/y)| = |x||y|$

Llegamos a la misma conclusión si $y = ax$.

Teorema 1.2-5

La norma satisface las siguientes propiedades:

a) $|\theta| = 0$, $|x| > 0$, si $x \neq \theta$.

b) $|ax| = |a||x|$, para todo $x \in E$ y $a \in \mathbb{R}$.

c) $|x+y| \leq |x| + |y|$, para todo $x, y \in E$ (Desigualdad triangular).

Demostración

a) "$|\theta| = 0$, $|x| > 0$, si $x \neq \theta$".

$|\theta| = (\theta/\theta)^{1/2} = 0$

$|x| = (x/x)^{1/2} > 0$, $x \neq \theta$, por 1.2-1

b) " $|ax| = |a||x|$, para todo $x \in E$, $a \in \mathbb{R}$ "

$$|ax|^2 = (ax/ax) = a.a(x/x) = |a|^2|x|^2.$$

Luego $|ax| = |a||x|$

c) " $|x+y| \leq |x| + |y|$, para todo $x,y \in E$ ".

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y/x+y) \\ &= (x/x) + (x/y) + (y/x) + (y/y) \\ &= |x|^2 + 2\ (x/y) + |y|^2 \\ &\leq |x|^2 + 2\ |x||y| + |y|^2 \text{ , por 1.2-4} \\ &= (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

Luego $|x + y| \leq |x| + |y|$

Definición 1.2-6

Una función

$$\| \quad \| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightsquigarrow \|x\|$$

que satisface las propiedades del Teorema 1.2-5 es decir:

a) $\|\theta\| = 0$, $\|x\| > 0$, $x \neq \theta$

b) $\|ax\| = |a| \, \|x\|$, para todo $x \in E$, $a \in \mathbb{R}$

c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in E$ es llamada una norma sobre E.

Proposición 1.2-7

La norma en un n-espacio euclídeo satisface la ley del paralelogramo

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2 \, |x|^2 + 2 \, |y|^2$$

Demostración

$$\begin{aligned} |x+y|^2 + |x-y|^2 &= (x+y/x+y) + (x-y/x-y) \\ &= (x/x) + (x/y) + (y/x) + (y/y) + (x/x) - (x/y) - (y/x) \\ &\quad + (y/y) \\ &= 2(x/x) + 2\,(y/y) \\ &= 2\,|x|^2 + 2|y|^2 \end{aligned}$$

Luego $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2\,|x|^2 + 2\,|y|^2$

Proposición 1.2-8

Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Para todo $x = (x_1,\ldots, x_n)$ e $y = (y_1,\ldots, y_n)$ puntos cualesquiera de $\mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq |x|\,|y| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2}$$

Demostración

Si $x = \theta$ ó $y = \theta$, entonces la desigualdad se reduce a $0 \leq 0$ y es, por tanto, verdadera. Consideremos el caso en que $x \neq \theta$ y $y \neq \theta$, es decir en el que $|x| \neq 0$ y $|y| \neq 0$.

Sean $a,b \in \mathbb{R}$, $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ o, equivalentemente $2ab \leq a^2 + b^2$

Como a y b son números reales arbitrarios tomemos

$$a = \frac{|x_i|}{|x|} \quad y \quad b = \frac{|y_i|}{|y|}$$

Entonces, para cualquier i,

$$2\,\frac{|x_i|}{|x|}\,\frac{|y_i|}{|y|} \leq \frac{|x_i|^2}{|x|^2} + \frac{|y_i|^2}{|y|^2}$$

Como $|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ es la norma euclídea, entonces

$$2\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_iy_i|}{|x|\,|y|} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2}{|x|^2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|^2}{|y|^2} = \frac{|x|^2}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|y|^2}$$

$$2\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_iy_i|}{|x|\,|y|} \le 2 \Longrightarrow \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_iy_i|}{|x|\,|y|} \le 1$$ Luego

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \le |x|\,|y|$$

Proposición 1.2-9

Sea ℓ^2 el conjunto de todas las sucesiones $x = \{x_n\}$ $(n = 1,2,...)$ de elementos de $\mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty ,$$

entonces ℓ^2 es un espacio vectorial con producto escalar.

Demostración

Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ elementos de ℓ^2; definimos

$$x+y = \{x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots\}$$

$$\lambda x = \{\lambda x_1,\ \lambda x_2, \ldots\}$$

Para demostrar que ℓ^2 es un espacio vectorial bastará verificar

i) $\lambda\, x \in \ell^2$

ii) $x+y \in \ell^2$

i) "$\lambda x \in \ell^2$"

Sea $\{x_n\} \in \ell^2$

$$\{\lambda x_n\} \in \ell^2 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2\, x_n^2 < \infty$$

Sea $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq x \implies \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \lambda^2 x$$

$$\implies \sum_{i=1}^{n} \lambda^2\, x_i^2 \leq \lambda^2 x$$

Luego $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^2 x_i^2$ existe por que $\sum_{i=1}^{n} \lambda^2\, x_i^2 \leq \lambda^2 x$, para todo $n \geq 1$.

ii) "$x + y \in \ell^2$"

$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^2$ existe, si existe $A \geq 0$ tal que

$\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^2 \leq A$, para todo $n \geq 1$, ya que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^2$$

Entonces por 1.2-5 (aplicado a R^n)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2\right)^{1/2}$$

De donde

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^2\right]^{1/2} \leq C \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^2 \leq C^2 = A$$ lo que implica la convergencia de la sucesión creciente $\left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^2\right\}_{n\geq 1}$.

Además por 1.2-8

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right]^{1/2}$$

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\right]^{1/2} = A$$

Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq A$; entonces la sucesión es acotada y creciente, luego $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i|$ existe.

Podemos ahora verificar que

$$(x/y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

define un producto escalar en ℓ^2; la prueba es similar a la de Proposición 1.2-2.

Definición 1.2-10

Sea E un espacio vectorial con producto escalar; x,y $\in$ E; la *distancia* entre x é y es el número positivo

$$d(x,y) = |x - y|$$

Proposición 1.2-11

La distancia en E cumple las siguientes propiedades: para todo x, y, z $\in$ E

a) $d(x,x) = 0$, $d(x,y) > 0$; si $x \neq y$

b) $d(x,y) = d(y,x)$

c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Demostración:

a) "$d(x,x) = 0$, $d(x,y) > 0$; si $x \neq y$".

$d(x,y) = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x = y$.

$d(x,y) > 0$, si $x \neq y$

b) "$d(x,y) = d(y,x)$, para todo $x,y \in E$".

$$d(x,y) = |x - y| = |y - x| = d(y,x)$$

c) "$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$".

$$d(x,y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)|$$

$$\leq |x - z| + |z - y| \text{ , por 1.2-5}$$

$$\leq d(x,z) + d(z,y)$$

Definición 1.2-12

Si en E puede definirse una distancia, entonces E se llama *Espacio Métrico*.

Definición 1.2-13

Si E está dotado de una norma, E se denomina *espacio vectorial normado*.

Definición 1.2-14

El espacio vectorial E de dimensión finita n, junto con un producto escalar y la correspondiente norma y distancia, es llamado *espacio euclídeo de dimensión finita n* y será denotado por *n-espacio euclídeo*.

1.3 BASES ORTONORMALES.

Definición 1.3-1

Sea E un n-espacio euclídeo. Si $x, y \in E$, x *es ortogonal a y* si

$$(x/y) = 0$$

Definición 1.3-2

Un vector $x \in E$ es llamado *normal* si $|x| = 1$.

Definición 1.3-3

Un conjunto $A \subset E$ es llamado *ortonormal*, si todo $x \in A$

es normal y si para $x,y \in A$, $x \neq y$, x e y son ortogonales.

Proposición 1.3-4

θ es ortogonal a todo $y \in E$.

Demostración

Sea $y \in E$

$(\theta/y) = (0y/y) = 0(y/y) = 0$

Proposición 1.3-5

Todo conjunto ortonormal es linealmente independiente.

Demostración

Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto ortonormal y sea $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \theta$.

Para cada j, $(x_j / \sum_{i=1}^{n} a_i x_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_j / a_i x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \; (x_j / x_i)$$

$$= a_j$$

ya que $(x_j/x_i) = 1$, si $i = j$ y $(x_j/x_i) = 0$, si $i \neq j$

Luego

$$a_j = (x_j \; / \; \sum_{i=1}^{n} a_i x_i)$$

$$a_j = (x_j \; / \; \theta)$$

$$= 0 \; , \quad \text{para todo } j \; .$$

Teorema 1.3-6

Todo n-espacio euclídeo E tiene una base ortonormal.

Demostración

Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de E. Partiendo de esta base construiremos un conjunto ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$; por 1.3-5 este conjunto es linealmente independiente, entonces será una base de E, ya que todo subconjunto de E linealmente independiente de n elementos es una base de E.

$\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente; sea $e_1 = \dfrac{v_1}{|v_1|}$ entonces,

$$(e_1 \; / \; e_1) = \left(\frac{v_1}{|v_1|} \; / \; \frac{v_1}{|v_1|}\right) = \frac{1}{|v_1|^2} (v_1 \; / \; v_1) = 1 \quad \text{de donde } |e_1| = 1;$$

sea $y_2 = v_2 - (v_2 \; / \; e_1)e_1$; veamos si y_2 y e_1 son ortogonales.

$$(y_2/e_1) = (v_2 - (v_2/e_1)e_1/e_1)$$

$$= (v_2/e_1) - (v_2/e_1)(e_1/e_1)$$

$$= (v_2/e_1) - (v_2/e_1)$$

$$= 0$$

Luego y_2 y e_1 son ortogonales.

Sea $e_2 = \dfrac{y_2}{|y_2|}$; entonces $|e_2| = 1$.

$(e_2 / e_1) = 0$. En efecto:

$$(e_2 / e_1) = (\frac{y_2}{|y_2|} / e_1) = \frac{1}{|y_2|} (y_2 / e_1)$$

$$= \frac{1}{|y_2|} . 0 = 0$$

Supongamos que hemos construído $\{e_1, \ldots, e_k\}$ conjunto ortonormal, $k < n$.

Entonces para $k+1$ tenemos

$$y_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (v_{k+1} / e_i) e_i$$

$$(y_{k+1}/e_j) = (v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (v_{k+1}/e_i)e_i/e_j)$$

$$= (v_{k+1}/e_j) - (v_{k+1}/e_j)$$

$$= 0$$

Como $y_{k+1} \neq \theta$, $e_{k+1} = \dfrac{y_{k+1}}{|y_{k+1}|}$ es normal.

Luego $\{e_1, \ldots, e_{k+1}\}$ es un conjunto ortonormal.

Por inducción tendremos un conjunto ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Definición 1.3-7

Los espacios euclídeos E y F son *isomórficos* si existe una función

$$T : E \longrightarrow F ,$$

que es un isomorfismo de espacios vectoriales tal que preserva los productos escalares, es decir: $(x/y) = (T(x)/T(y))$, para todo $x,y \in E$.

Proposición 1.3-8

Un isomorfismo de espacios euclídeos preserva la distancia:

$$d(x,y) = d(T(x), T(y)).$$

Demostración

$$d(x,y) = |x-y|$$

$$|x-y|^2 = (x-y/x-y) = (T(x-y)/T(x-y))$$

$$= |T(x-y)|^2$$

entonces,

$$|x-y| = |T(x-y) = |T(x)-T(y)| = d(T(x), T(y)).$$

Luego $d(x,y) = d(T(x), T(y))$.

Teorema 1.3-9

Si E y F son espacios euclídeos de dimensión n, entonces ellos son isomórficos.

Demostración

Verifiquemos que existe un isomorfismo de espacios vectoriales $T: E \to F$ tal que $(x/y) = (T(x) / T(y))$.

Sea $\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base ortonormal en E y $\{\overline{e}_1,\ldots, \overline{e}_n\}$ una base ortonormal en F.

Definimos la función T como sigue $T(e_i) = \overline{e}_i$, $i = 1,\ldots,n$. Entonces

para $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, tenemos $T(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{e}_i$.

Sean $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ é $y = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$

$$(x/y) = (\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \,/ \sum_{i=1}^{n} b_i e_i)$$

$$= (a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n / b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n)$$

$$= (a_1 e_1 / b_1 e_1) + \ldots + (a_1 e_1 / b_n e_n) + \ldots + (a_n e_n / b_1 e_1) + \ldots +$$

$$+ (a_n e_n / b_n e_n).$$

$$(x/y) = a_1 b_1 (e_1/e_1) + \ldots + a_1 b_n (e_1/e_n) + \ldots + a_n b_1 (e_n/e_1) + \ldots +$$

$$+ a_n b_n (e_n/e_n)$$

$$= a_1 b_1 + \ldots + 0 + \ldots + 0 + \ldots + a_n b_n$$

$$= a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

Luego $(x/y) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\bar{e}_i \quad y \quad T(y) = \sum_{i=1}^{n} b_i\bar{e}_i$$

$$(T(x)/T(y)) = (a_1\bar{e}_1 + \ldots + a_n\bar{e}_n/b_1\bar{e}_1 + \ldots + b_n\bar{e}_n)$$

$$= (a_1\bar{e}_1/b_1\bar{e}_1) + \ldots + (a_1\bar{e}_1/b_n\bar{e}_n) + \ldots + (a_n\bar{e}_n/b_1e_1) + \ldots +$$

$$+ (a_n\bar{e}_n/b_n\bar{e}_n)$$

$$= a_1b_1(\bar{e}_1/\bar{e}_1) + \ldots + a_1b_n(\bar{e}_1/\bar{e}_n) + \ldots + a_nb_1(\bar{e}_n/\bar{e}_1) + \ldots +$$

$$+ a_nb_n(\bar{e}_n/\bar{e}_n)$$

$$= a_1b_1 + \ldots + 0 + \ldots + 0 + \ldots + a_nb_n$$

Luego $(T(x)/T(y)) = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$

Por lo tanto $(x/y) = (T(x)/T(y))$.

Definición 1.3-10

Una matriz cuadrada A de orden n se llama *ortogonal* si y solo si, cada fila de A tiene norma 1 (como un elemento de $\mathbb{R}^n$), y dos filas cualesquiera son ortogonales. Es decir

$A = (a_{ij})$ es ortogonal si y solo si $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, a_{ij} = 1$ para todo i ,

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{jk} = 0$ si $i \neq j$.

Proposición 1.3-11

Sea E un n-espacio euclídeo, sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ bases ortonormales en E. Entonces la matriz de cambio de base es ortogonal.

Demostración

Dado que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base, escribamos los vectores $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ como combinaciones lineales de la otra base.

Para $i = 1, \ldots, n$, $\bar{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, e_j$

$$1 = (\bar{e}_i/\bar{e}_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j \,/\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j\right)$$

$$= (a_{i1}e_1 + \ldots + a_{in}e_n/a_{i1}e_1 + \ldots + a_{in}e_n)$$

$$= (a_{i1}e_1/a_{i1}e_1) + \ldots + (a_{i1}e_1/a_{i1}e_n) + \ldots + (a_{in}e_n/a_{i1}e_1) +$$

$$+ \ldots + (a_{in}e_n/a_{in}e_n)$$

$$= a_{i1}a_{i1} + \ldots + 0 + \ldots + 0 + \ldots + a_{in}a_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, a_{ij}$$

$$0 = (\bar{e}_i/\bar{e}_j) = (a_{i1}e_1 + \ldots + a_{in}e_n/a_{j1}e_1 + \ldots + a_{jn}e_n)$$

$$= (a_{i1}e_1/a_{j1}e_1) + \ldots + (a_{i1}e_1/a_{jn}e_n) + \ldots + (a_{in}e_n/a_{j1}e_1) +$$

$$+ \ldots + (a_{in}e_n/a_{jn}e_n).$$

$$0 = (\bar{e}_i/\bar{e}_j) = a_{i1}a_{j1}(e_1/e_1) + \dots + a_{i1}a_{jn}(e_1/e_n) + \dots + a_{in}a_{jn}(e_n/e_1)+$$

$$+ \dots + a_{in}a_{jn}(e_n/e_n).$$

$$= a_{i1}a_{j1} + \dots + 0 + \dots + 0 + \dots + a_{in}a_{jn}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} \quad , \qquad i \neq j .$$

Luego la matriz (a_{ij}) es ortogonal, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$.

1.4 EL ESPACIO $L(E,F)$

Consideraremos solamente funciones de un espacio vectorial sobre otro; sean E un espacio vectorial de dimensión finita n y F un espacio vectorial de dimensión finita m.

Definición 1.4-1

Una función $f: E \to F$ pertenece al conjunto de *funciones lineales de E en F*, si:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

2) $f(ax) = af(x)$

cualesquiera sean $x,y \in E$ y $a \in \mathbb{R}$.

NOTACION:

Al conjunto de funciones lineales de E en F lo denotaremos por $L(E,F)$.

Proposición 1.4-2

$g \circ f$ pertenece a $L(E,H)$; siempre que $f \in L(E,F)$ y $g \in L(F,H)$.

Demostración

i) "Sean $x,y \in E$; $(g \circ f)(x+y) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$".

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x+y) &= g(f(x+y)) \\
&= g(f(x) + f(y)), \quad f \in L(E,F) \\
&= g(f(x)) + g(f(y)), \quad g \in L(F,H) \\
&= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)
\end{aligned}
$$

ii) "Sea $a \in \mathbb{R}$ y $x \in E$; $(g \circ f)(ax) = a(g \circ f)(x)$"

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(ax) &= g(f(ax)) \\
&= g(af(x)), \quad f \in L(E,F) \\
&= ag(f(x)), \quad g \in L(F,H) \\
&= a(g \circ f)(x).
\end{aligned}
$$

Proposición 1.4-3

$L(E,F)$ forma un espacio vectorial con las operaciones dadas en el ejemplo 1.1-5

Demostración

En el ejemplo 1.1-5 se demostró que $F^E = \{f/f: E \to F\}$ es un espacio vectorial; luego bastará verificar que $L(E,F)$ es un subespacio de F^E.

a) $f+g \in L(E,F)$

i) "Sean f,g elementos de $L(E,F)$ y x,y elementos de E;

$(f+g)(x+y) = (f+g)(x) + (f+g)(y)$".

$$\begin{aligned}(f+g)(x+y) &= f(x+y) + g(x+y)\\ &= f(x) + f(y) + g(x) + g(y);\ f,g \in L(E,F)\\ &= (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y));\ \text{por ser elementos de } F\\ &= (f+g)(x) + (f+g)(y).\end{aligned}$$

ii) "Sean $a \in \mathbb{R}$ y $x \in E$; $(f+g)(ax) = a(f+g)(x)$".

$$\begin{aligned}(f+g)(ax) &= f(ax) + g(ax)\\ &= af(x) + ag(x)\\ &= a(f(x) + g(x))\\ &= a(f+g)(x)\end{aligned}$$

b) $bf \in L(E,F)$

i) "Sean $x,y \in E$, $b \in \mathbb{R}$ y $f \in L(E,F)$; $(bf)(x+y) = (bf)(x) + (bf)(y)$".

$$\begin{aligned}(bf)(x+y) &= b\, f(x+y)\\ &= b(f(x) + f(y))\\ &= bf(x) + bf(y)\\ &= (bf)(x) + (bf)(y)\end{aligned}$$

ii) "Sean $a \in \mathbb{R}$, $x \in E$ y $f \in L(E,F)$; $(bf)(ax) = a(bf)(x)$".

$$\begin{aligned}(bf)(ax) &= bf(ax)\\ &= b(af(x))\\ &= (ba)\, f(x)\\ &= (ab)\, f(x)\\ &= a(bf)(x).\end{aligned}$$

Luego $L(E,F)$ es un subespacio de F^E y por lo tanto es un espacio vectorial.

Definición 1.4-4

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E y $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_m\}$ una base de F. Entonces para cada $i = 1, \ldots, n$ y para cada $j = 1, \ldots, m$ definiremos la función

$$e_{ij} : E \to F \ , \quad \text{tal que}$$

$$e_{ij}(e_k) = \begin{cases} \bar{e}_j \ , & \text{cuando } i = k \\ \theta \ , & \text{cuando } i \neq k \end{cases}$$

y para $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in E$

$e_{ij}(x) = a_i \bar{e}_j$

Proposición 1.4-5

e_{ij} es un elemento de $L(E,F)$.

Demostración

"Sean $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \in E$,

$\lambda \in \mathbb{R}$; $e_{ij}(x+y) = e_{ij}(x) + e_{ij}(y)$ y $e_{ij}(\lambda x) = \lambda e_{ij}(x)$".

i) $$e_{ij}(x+y) = e_{ij}\left\{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)e_i\right\}$$

$$= (a_i + b_i)\bar{e}_j$$

$$= a_i\bar{e}_j + b_i\bar{e}_j; \quad \bar{e}_j \in E$$

$$= e_{ij}(x) + e_{ij}(y)$$

ii) $e_{ij}(\lambda x) = e_{ij}\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i)e_i\right)$

$= (\lambda a_i)\overline{e}_j$

$= \lambda(a_i\overline{e}_j)$

$= \lambda e_{ij}(x)$

Luego $e_{ij} \in L(E,F)$

Proposición 1.4-6

Sean f y g elementos de $L(E,F)$ y $f(e_i) = g(e_i)$ para $i = 1,\dots, n$ con $\{e_1,\dots, e_n\}$ base de E; entonces $f = g$.

Demostración

Sea $x = \sum_{i=1}^{n} a_ie_i \in E$;

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_ie_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\ f(e_i);\ f \in L(E,F)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\ g(e_i)$$

$$f(x) = g\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, e_i\right) \;; \quad g \in L(E,F)$$

$$= g(x)$$

Luego $f = g$.

Proposicion 1.4-7

El conjunto cuyos elementos son los e_{ij}; $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$ es una base en $L(E,F)$.

Demostración

En la definición de e_{ij} observamos que i puede ser uno cualquiera de los números $1,\ldots,n$ y j uno cualquiera de los números $1,\ldots, m$; formando todas las combinaciones de i con j el conjunto de los e_{ij} posee nm elementos. Demostraremos que los nm elementos del conjunto de los e_{ij} forman una base de $L(E,F)$. Verifiquemos que:

i) "Los elementos e_{ij} son linealmente independientes".

Formemos una combinación lineal de ellos y supongamos que

$$C = \sum_{j=1}^{m} b_{1j}\, e_{1j} + \sum_{j=1}^{m} b_{2j}\, e_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{m} b_{nj}\, e_{nj} = 0$$

con $b_{ij} \in \mathbb{R}$; $i = 1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,m$. Aplicando esta combinación a e_k; para un $k \leq n$.

$$C(e_k) = b_{k1}\, \overline{e}_1 + b_{k2}\, \overline{e}_2 + \ldots + b_{km}\, \overline{e}_m = 0$$

ya que por definición de e_{ij}

$e_{ij}(e_k) = 0$, para $i \neq k$

$e_{ij}(e_k) = e_j$, para $i = k$

y dado que $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m\}$ forman una base para F, son linealmente independientes; entonces

$$b_{kj} = 0 \ , \quad \text{para todo } j \ ; \ j = 1, \ldots, m.$$

Luego los e_{ij} son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

ii) "Los elementos e_{ij} generan al espacio $L(E,F)$"

Sea $f \in L(E,F)$

$f(e_1)$ pertenece a F y como cualquier elemento de F es una combinación lineal sobre $\mathbb{R}$ de $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m\}$.

$$f(e_1) = \sum_{j=1}^{m} b_{1j} \, \bar{e}_j \ ; \quad b_{1j} \in \mathbb{R}$$

Generalizando

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \, \bar{e}_j \ ; \quad i = 1, \ldots, n .$$

Consideremos una función

$f_o = \sum_{\substack{i \leq n \\ j \leq m}} b_{ij} \, e_{ij}$ y calculemos $f_o(e_k)$

para el vector de base e_k; tenemos:

$$f_o(e_k) = \left(\sum_{\substack{i\leq n\\ j\leq m}} b_{ij}\ e_{ij}\right)(e_k)$$

$$= \sum_{\substack{i\leq n\\ j\leq m}} b_{ij}\ e_{ij}(e_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} b_{kj}\ \bar{e}_j \quad ; \quad \text{por } 1.4\text{-}4$$

$$= f(e_k)$$

Asi las funciones lineales f_o y f coinciden sobre una base de E y por 1.4-6 $f_o = f$. Pero f_o es una combinación lineal de los e_{ij}; de donde f debe ser la misma combinación lineal.

Luego $e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{in} \ldots, e_{nm}$ forman una base del espacio $L(E,F)$

Proposición 1.4-8 (Corolario)

Si E posee dimensión finita n y F posee dimensión m entonces la dimensión del espacio $L(E,F)$ es nm.

Demostración

Por la proposición 1.4-7, tenemos que $\{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{in}, \ldots, e_{nm}\}$ es una base de $L(E,F)$ que posee nm elementos, y dado que la dimensión de un espacio es el número de elementos de cualquiera de sus bases, la dimensión del espacio $L(E,F)$ es nm.

Definición 1.4-9

Sean $\{e_1,\ldots, e_n\},\{e_1,\ldots, e_m\}$ bases de E y F respectivamente. Sea $x \in E$, con $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Difiniremos la función $f : E \to F$ así:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x)e_j \ ; \quad \text{donde } f_j : E \to \mathbb{R},$$

con $j = 1,\ldots, m$ son llamadas funciones coordenadas de f.

Proposición 1.4-10

La función $f : E \to F$ es lineal si y solamente si las funciones coordenadas $f_1,\ldots, f_m$ son lineales.

Demostración

($\Longrightarrow$) Fijemos una base $\{e_i,\ldots, e_m\}$ en F.

1) Sean $x,y \in E$,

$$\sum_{j=1}^{m} f_j(x+y)\overline{e}_j = f(x+y)$$

$$\sum_{j=1}^{m} f_j(x+y)\overline{e}_j = f(x) + f(y); \text{ por ser } f \text{ lineal}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} f_j(x)\overline{e}_j + \sum_{j=1}^{m} f_j(y)\overline{e}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (f_j(x) + f_j(y))\overline{e}_j$$

entonces $f_j(x+y) = f_j(x) + f_j(y)$; $j = 1,\dots,m$ por 1.1-33

ii) Sea $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j=1}^{m} f_j(ax)\overline{e}_j = f(ax)$$

$$= a\, f(x) \text{ ; por ser } f \text{ lineal}$$

$$= a\sum_{j=1}^{m} f_j(x)\overline{e}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (af_j(x))\overline{e}_j$$

entonces $f_j(ax) = a\, f_j(x)$; $j = 1,\dots,m$.

Luego $f_1,\dots,f_m$, son lineales

($\Longleftarrow$) demostraremos que f es lineal

i) Sean $x,y \in E$

$$f(x+y) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x+y)\bar{e}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (f_j(x) + f_j(y))\bar{e}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} f_j(x)\bar{e}_j + \sum_{j=1}^{m} f_j(y)\bar{e}_j$$

$$= f(x) + f(y)$$

ii) Sea $a \in \mathbb{R}$.

$$f(ax) = \sum_{j=1}^{m} f_j(ax)\bar{e}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a\, f_j(x)\bar{e}_j$$

$$= a \sum_{j=1}^{m} f_j(x)\bar{e}_j$$

$$= a\, f(x)$$

Luego f es lineal.

Proposición 1.4-11

Si x_i , $i = 1,\ldots,n$ son las coordenadas de x en la base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ y si $f_j(x)$, $j = 1,\ldots,m$ son las coordenadas de $f(x)$ en la base $\{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_m\}$ entonces

$$(a_{ji})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

con $a_{ji} = f_j(e_i)$

Demostración

$$(a_{ji})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_j(e_i))\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(a_{ji})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(e_1) & \dots & f_1(e_n) \\ f_2(e_1) & \dots & f_2(e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(e_1) & \dots & f_m(e_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dado que $f_j(e_i)$ es una matriz de orden m x n y $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es una matriz de orden n x 1 podemos efectuar el producto así:

$$(a_{ji})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\ f_1(e_1) + \dots + x_n\ f_1(e_n) \\ x_1\ f_2(e_1) + \dots + x_n\ f_2(e_n) \\ \vdots \\ x_1\ f_m(e_1) + \dots + x_n\ f_m(e_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(x_1e_1) + \dots + f_1(x_ne_n) \\ f_2(x_1e_1) + \dots + f_2(x_ne_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1e_1) + \dots + f_m(x_ne_n) \end{pmatrix} ; \quad f_i \in L(E,\mathbb{R})$$

$$(a_{ji}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\right) \\ f_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\right) \\ \vdots \\ f_m\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\, e_i\right) \end{pmatrix}$$

entonces

$$(a_{ji}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

Definición 1.4-12

Matriz asociada a un elemento de $L(E,F)$.

Sean $f \in L(E,F)$, $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de E y $\{\overline{e}_1,\dots,\overline{e}_m\}$ una base de F, entonces $f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\overline{e}_i$ y

$$f(e_1) = \sum_{j=1}^{m} a_{j1}\, \overline{e}_j$$

$$f(e_2) = \sum_{j=1}^{m} a_{j2}\, \overline{e}_j$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f(e_n) = \sum_{j=1}^{m} a_{jn}\, \overline{e}_j$$

Entonces la matriz

$$M(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es llamada *matriz asociada a f* ó representación matricial de f con respecto a las bases fijadas.

Proposición 1.4-13

Sean E, F y G espacios vectoriales de dimensión finita n, m y r respectivamente, $\{e_1,..,e_n\}$, $\{\bar{e}_1,...,\bar{e}_m\}$ y $\{\bar{\bar{e}}_1,...,\bar{\bar{e}}_r\}$ bases para cada uno de los espacios. Sean

$g: E \to F$ y $f: F \to G$ funciones lineales, $M(g)$ la matriz asociada a g y $M(f)$ la matriz asociada a f. Entonces la matriz asociada a $f\circ g$ es el producto de matrices o sea

$$M(f\circ g) = M(f)M(g).$$

Demostración

Si $g(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, \bar{e}_j$, la i-ésima columna de $M(g)$ es

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

Si $f(\overline{e}_j) = \sum_{k=1}^{r} b_{kj}\ \overline{\overline{e}}_k$, la j-ésima columna de M(f) es $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{pmatrix}$

Ahora

$$(f\circ g)(e_i) = f(g(e_i))$$

$$= f\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\ \overline{e}_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\ f(\overline{e}_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \sum_{k=1}^{r} b_{kj}\ \overline{\overline{e}}_k$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{r} a_{ji}\ b_{kj}\ \overline{\overline{e}}_k\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(a_{ji}\ b_{1j}\ \overline{\overline{e}}_1 + \ldots + a_{ji}\ b_{rj}\ \overline{\overline{e}}_r\right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\ b_{1j}\right)\overline{\overline{e}}_1 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\ b_{rj}\right)\overline{\overline{e}}_r$$

la i-ésima columna de M(f∘g) es

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\ b_{1j} \\ \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\ b_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\ b_{rj} \end{pmatrix}$$

Entonces el término general de $M(f \circ g)$ es

$$\alpha_{ki} = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, b_{kj}.$$

El término general de la matriz $M(f)M(g)$ es

$$\beta_{ki} = \sum_{j=1}^{m} b_{kj}\, a_{ji}.$$

Como $\mathbb{R}$ es conmutativo

$$a_{ji}\, b_{kj} = b_{kj}\, a_{ji}.$$

Luego $M(f \circ g) = M(f)M(g)$.

1.5 NORMAS EN $L(E,F)$

Definición 1.5-1

Sean E y F espacios vectoriales normados; definiremos la norma en $L(E,F)$ por la función:

$$\begin{aligned} \|\quad\| : L(E,F) &\longrightarrow \mathbb{R}^{+} \\ f &\rightsquigarrow \|f\| \end{aligned}$$

con $\|f\| = \operatorname{Sup}\{|f(x)| : x \in E;\ |x| = 1\}$.

Proposición 1.5-2

Si la norma del n-espacio vectorial E es la euclídea, entonces la función norma está bien definida.

Demostración

La prueba se reduce a verificar si el supremo existe. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E y sea $\{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{in}, \ldots, e_{nm}\}$ la base del espacio $L(E,F)$, sean $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$ y $f \in L(E,F)$, $f = \sum_{\substack{i \leq n \\ j \leq m}} a_{ij}\, e_{ij}$; por hipótesis la norma de x está dada por

$$|x| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right\}^{1/2}, \text{ tal que } |b_j| \leq |x| \text{ para todo } j,\ j=1,\ldots,n.$$

$$|f(x)| = \left| \left(\sum_{\substack{i \leq n \\ j \leq m}} a_{ij}\, e_{ij} \right)(x) \right|$$

$$= \left| \sum_{\substack{i \leq n \\ j \leq m}} a_{ij}\, e_{ij}(x) \right|$$

$$= \left| \sum_{\substack{i \leq n \\ j \leq m}} a_{ij}\, (b_i \bar{e}_j) \right|$$

$$\left| b_1 \sum_{j=1}^{m} a_{1j} \bar{e}_j + \ldots + b_n \sum_{j=1}^{m} a_{nj} \bar{e}_j \right|$$

$$\leq |b_1| \left| \sum_{j=1}^{m} a_{1j} \bar{e}_j \right| + \ldots + |b_n| \left| \sum_{j=1}^{m} a_{nj} \bar{e}_j \right|$$

$$|f(x)| = \leq |x|\left|\sum_{j=1}^{m} a_{1j}\,\bar{e}_j\right| + \dots + |x|\left|\sum_{j=1}^{m} a_{nj}\,\bar{e}_j\right|$$

$$\leq \left|\sum_{j=1}^{m} a_{1j}\,\bar{e}_j\right| + \dots + \left|\sum_{j=1} a_{nj}\,\bar{e}_j\right| \quad ; \quad |x| \leq 1$$

Luego

$$|(f(x)| \leq \left|\sum_{j=1}^{m} a_{1j}\,\bar{e}_j\right| + \dots + \left|\sum_{j=1}^{m} a_{nj}\,\bar{e}_j\right| \quad ; \quad |x| \leq 1$$

así esta suma es cota superior para $|f(x)|$. Luego

$$\text{Sup}\,\{|f(x)| \,:\, x \in E;\ |x| \leq 1\} \text{ existe.}$$

Proposición 1.5-3

Sea $f \in L(E,F)$ y sean

$A = \{|f(x)| \,:\, x \in E;\ |x| \leq 1\}$ y

$B = \{|f(x)| \,:\, x \in E;\ |x| = 1\}$; entonces

$$\text{Sup } A = \text{Sup } B.$$

Demostración

Sean $\text{Sup } A = a$ y $\text{Sup } B = b$. Supongamos $|x| = 1$;

$$\begin{aligned} |x| = 1 &\Longrightarrow |x| \leq 1 \\ &\Longrightarrow |f(x)| \in A \\ &\Longrightarrow |f(x)| \leq a \\ &\Longrightarrow b \leq a \end{aligned}$$

Supongamos $|x| \leq 1$;

Si $x \leq 1$ entonces $|x| = 1$ ó $|x| < 1$

a) $|x| = 1 \Longrightarrow |f(x)| \in B \Longrightarrow |f(x)| \leq b$

cuando $x = \theta \Longrightarrow |f(x)| = 0 \Longrightarrow |f(x)| \leq b$

b) Si $0 < |x| < 1$ tomemos $y = \dfrac{x}{|x|}$

entonces $|y| = 1$ por tanto

$$|f(y)| \in B \Longrightarrow |f(y)| \leq b$$

$$\Longrightarrow \left|f\left\{\frac{x}{|x|}\right\}\right| \leq b$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{|x|} \left|f(x)\right| \leq b$$

$$\Longrightarrow |f(x)| \leq b|x|$$

$$\Longrightarrow |f(x)| \leq b \quad ; \quad |x| < 1$$

Luego $|f(x)| \leq b$, para todo x, $|x| \leq 1$; por tanto $a \leq b$

Luego Sup A = Sup B.

Proposición 1.5-4

$\|f\| = \text{Sup } \{|f(x)| : x \in E; |x| = 1\}$ cumple con las propiedades de norma.

Demostración

a) Sea $f \in L(E,F)$ tal que f es la función cero, entonces

$f(x) = \theta$ para todo $x \in E$. Luego $\|f\| = 0$.

Si f no es la función cero, entonces existe un x tal que $f(x) \neq \theta$; por lo tanto $x \neq \theta$ y $|x| \neq 0$; $y = \frac{x}{|x|}$ es tal que $|y| = 1$ y $f(y) \neq \theta$. Entonces,

$$0 < |f(y)| \leq \|f\|.$$

Luego $\|f\| > 0$.

b) " $\|af\| = |a|\ \|f\|$, para todo $f \in L(E,F)$, $a \in \mathbb{R}$".

$$\begin{aligned}
\|af\| &= \mathrm{Sup}\ \{|f(ax)| : x \in E\ ;\ |x| = 1\} \\
&= \mathrm{Sup}\ \{|af(x)| : x \in E\ ;\ |x| = 1\} \\
&= \mathrm{Sup}\ \{|a|\,|f(x)| : x \in E\ ;\ |x| = 1\} \\
&= |a|\ \mathrm{Sup}\ \{|f(x)| : x \in E;\ |x| = 1\} \\
&= |a|\ \|f\| .
\end{aligned}$$

c) " $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$, para todo $f,g \in L(E,F)$".

$$\begin{aligned}
\|f+g\| &= \mathrm{Sup}\ \{|(f+g)(x)| : x \in E;\ |x| = 1\} \\
&= \mathrm{Sup}\ \{|f(x) + g(x)| : x \in E;\ |x| = 1\} \\
&\leq \mathrm{Sup}\ \{|f(x)| + |g(x)| : x \in E;\ |x| = 1\} \\
&\leq \mathrm{Sup}\ \{|f(x)| : x \in E;\ |x| = 1\} + \mathrm{Sup}\ \{|g(x)| : x \in E;\ |x|=1\} \\
&\leq \|f\| + \|g\| .
\end{aligned}$$

Así $\|f\|$ es una norma para el espacio $L(E,F)$.

1.6 EL ESPACIO DUAL

Definición 1.6-1

Llamaremos *Espacio Dual de E* al conjunto de funciones lineales definidas del espacio vectorial n-dimensional E, sobre el espacio vectorial de una dimensión $\mathbb{R}$.

NOTACION:

Usaremos el símbolo E^* para designar al espacio dual de E.

Definición 1.6-2

Un elemento de E^* se llamará *Funcional Lineal.*

Observación 1.6-3

Por definición 1.4-1 el espacio dual de E es un caso particular del Espacio $L(E,F)$ en el cual $F = \mathbb{R}$.

Proposición 1.6-4

Si E es un espacio vectorial n-dimensional entonces E^* es también n-dimensional.

Demostración

Dado que E^* es un caso particular de $L(E,F)$, la dimensión de E^* viene dada por la dimensión de E multiplicada por la dimensión de $\mathbb{R}$; luego la dimensión de E^* es $n \times 1 = n$.

Definición 1.6-5

De la misma manera como definimos la base en $L(E,F)$ lo hacemos para E^* considerando $m = 1$.

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de E entonces $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ es una base en E^* tal que

$$e_i^*(e_k) = \begin{cases} 1 \; ; & \text{cuando } k = i \\ \\ 0 \; ; & \text{cuando } k \neq i \end{cases}$$

y para todo elemento $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$

$$e_i^*(x) = a_i$$

Proposición 1.6-6

El conjunto de los $e_i^* \in E^*$, $i=1,\ldots, n$, forman una base en E^*.

Demostración

Similar a la proposición 1.4-7, para el caso en que $F = \mathbb{R}$.

Definición 1.6-7

El conjunto $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\} \subset E^*$ de la proposición 1.6-6 es llamado *Base Dual de* $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Ejemplo 1.6-8

Encontrar la base dual de la base

$A = \{(1,0,1), (-1,2,0), (0,0,3)\}$

Sea $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ en $\mathbb{R}^3$

a) $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base en $\mathbb{R}^3$

i) "Es linealmente independiente"

Sean $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tal que

$a_1(1,0,1) + a_2(-1,2,0) + a_3(0,0,3) = (0,0,0)$

$(a_1,0,a_1) + (-a_2,2a_2,0) + (0,0,3a_3) = (0,0,0)$

de donde

$$a_1 - a_2 = 0 \Longrightarrow a_1 = a_2$$

$$2a_2 = 0 \Longrightarrow a_2 = 0$$

$$\Longrightarrow a_1 = 0$$

$$a_1 + 3a_3 = 0 \Longrightarrow a_3 = 0$$

Luego A es un conjunto de vectores linealmente independientes.

ii) "Es generador"

Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) = \sum_{i=1}^{3} b_i e_i$$

$$= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

$$= (b_1, 0, b_1) + (-b_2, 2b_2, 0) + (0, 0, 3b_3)$$

$$= (b_1 - b_2,\ 2b_2,\ b_1 + 3b_3)$$

entonces

$$x = b_1 - b_2$$

$$y = 2b_2$$

$$z = b_1 + 3b_3$$

de donde:

$$b_1 = x + \frac{y}{2}$$

$$b_2 = \frac{y}{2}$$

$$b_3 = \frac{1}{3}\left(z - x - \frac{y}{2}\right)$$

Luego $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$.

b) Formemos la Base Dual de $\{e_1, e_2, e_3\}$

Sea $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \rightsquigarrow b_1 = x + \frac{y}{2}$

$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \rightsquigarrow b_2 = \frac{y}{2}$

$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \rightsquigarrow b_3 = \frac{1}{3}(z - x - \frac{y}{2})$

Luego $\{f_1,f_2,f_3\}$ es la base dual de $\{e_1,e_2,e_3\}$.

Lema 1.6-9

Si $x \in E$, la función Ψ_x definida de E^* sobre $\mathbb{R}$ tal que $\Psi_x(f) = f(x)$ es lineal.

Demostración

a) "Sean $f,g \in E^*$, $x \in E$; $\Psi_x(f+g) = \Psi_x(f) + \Psi_x(g)$".

$$\begin{aligned} \Psi_x(f+g) &= (f+g)(x) \\ &= f(x) + g(x) \\ &= \Psi_x(f) + \Psi_x(g) \end{aligned}$$

b) "Sean $a \in \mathbb{R}$ y $f \in E^*$; $\Psi_x(af) = a\Psi_x(f)$"

$$\begin{aligned} \Psi_x(af) &= (af)(x) \\ &= af(x) = a\Psi_x(f) \end{aligned}$$

Observación 1.6-10

Dado que ψ_x es lineal, ψ_x está en el espacio dual de E^*; es decir $\psi_x \in (E^*)^*$; este espacio se denotará E^{**} y lo llamaremos *el segundo dual de E*.

Proposición 1.6-11

Existe un isomorfismo natural entre E y E^{**}.

Demostración

Definiremos la función $\psi : E \to E^{**} : x \leadsto \psi(x)$; donde $\psi(x)(f) = f(x)$, para toda $f \in E^*$.

a) i) ψ está bien definida ya que $\psi(x)$ es lineal.

ii) "Unicidad de las imágenes"

Sean $x,y \in E$.

$$x = y \Longrightarrow f(x) = f(y)$$
$$\Longrightarrow \psi(x)(f) = \psi(y)(f)$$
$$\Longrightarrow \psi(x) = \psi(y)$$

b) ψ es un morfismo

i) "Sean $x,y \in E$, $f \in E^*$; $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$".

$$\psi(x+y)(f) = f(x+y)$$
$$= f(x) + f(y)$$
$$= \psi(x)(f) + \psi(y)(f)$$
$$= (\psi(x) + \psi(y))(f)$$

Luego $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$.

ii) "Sea $a \in \mathbb{R}$, $x \in E$ y $f \in E^*$; $\psi(ax) = a\psi(x)$".

$\psi(ax)(f) = f(ax) = af(x) = a\psi(x)(f)$. Luego $\psi(ax) = a\psi(x)$.

c) "ψ es inyectiva"

Sea $\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base de E, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ é $y = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$;

si $x \neq y$ existe un $j \leq n$ tal que $a_j \neq b_j$. Si $\{e_1^*,\ldots, e_n^*\}$ es la base dual, entonces $e_j^*(x) = a_j$ y $e_j^*(y) = b_j$.

pero $\psi(x)(e_j^*) = e_j^*(x) = a_j$

$\psi(y)(e_j^*) = e_j^*(y) = b_j$

Luego

$x \neq y \Longrightarrow a_j \neq b_j$, para cierto $j \leq n$

$\Longrightarrow \psi(x)(e_j^*) \neq \psi(y)(e_j^*)$

$\Longrightarrow \psi(x) \neq \psi(y)$

d) " ψ es sobreyectiva"

Sean $\Omega \in E^{**}$ y $e_i^* \in E^*$, un elemento de la base dual.

$$\begin{aligned} \psi(x)(e_i^*) &= \Omega(e_i^*) \\ e_i^*(x) &= \Omega(e_i^*) \\ a_i &= \Omega(e_i^*) \end{aligned}$$

Luego existe $x = \sum_{i=1}^{n} \Omega(e_i^*)e_i \in E$, tal que

$\psi(x) = \Omega$.

Proposición 1.6-12

Si E es un espacio vectorial n-dimensional entonces E^{**} también lo es.

Demostración

Dado que E es isomorfo a E^{**} poseen la misma dimensión.

Observación 1.6-13

Así como dotamos a $L(E,F)$ de una norma podemos hacerlo con E^*;

$$\begin{aligned} \| \quad \| : E^* &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\rightsquigarrow \|f\| \end{aligned}$$

con $\|f\| = \text{Sup}\ \{|f(x)| : x \in E\ ;\ |x| \leq 1\}$

Lema 1.6-14

$|f(x)| \leq \|f\|\ |x|$, para todo $x \in E$.

Demostración

Dado que $\|f\| = \text{Sup}\ \{|f(x)| : x \in E;\ |x| \leq 1\}$ entonces $|f(x)| \leq \|f\|$, para todo $x \in E$, $|x| = 1$. Sea $x \in E$, $x \neq \theta$ tomando;
$y = \dfrac{x}{|x|}$,

$|y| = 1$; de donde

$$\left| f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leq \|f\| \Longrightarrow \frac{1}{|x|}\ |f(x)| \leq \|f\|$$
$$\Longrightarrow |f(x)| \leq \|f\|\,|x| \text{ para todo } x \in E.$$

Proposición 1.6-15

E^* con la norma definida como en 1.6-13 es también n-espacio euclídeo.

Demostración

Supongamos que E es un n-espacio euclídeo; debemos de finir un producto escalar en E^* y demostrar que la correspondiente norma es precisamente la definida en 1.6-13.

Sea $\{e_1,\dots, e_n\}$ una base ortonormal en E y sea $\{e_1^*,\dots, e_n^*\}$ la base dual en E^*; definiremos el producto escalar para los elementos de la base dual así:

$$(e_i^*/e_i^*) = 1 \ , \quad (e_i^*/e_j^*) = 0, \quad \text{si } i \neq j$$

y el producto esclar de

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^* \qquad y \qquad g = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i^* \qquad \text{así:}$$

$$(f/g) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

esta función define un producto escalar sobre E por proposición 1.2-2. La correspondiente norma es entonces

$$|f| = (f/f)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para} \quad f = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*$$

Verifiquemos si la norma definida en 1.6-13 coincide con esta norma. Es decir:

$$\|f\| = \text{Sup } \{|f(x)| \ : \ x \in E, \ |x| = 1\} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} = |f|$$

a) Si $f = \theta$; $\|f\| = 0 = |f|$

b) Si $f \neq \theta$; sea $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$

Entonces:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*\right)(x)$$

$$= (a_1 e_1^* + \ldots + a_n e_n^*)(c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n)$$

$$= a_1 e_1^*(c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n) + \ldots + a_n e_n^* \,(c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n)$$

$$= a_1 c_1 e_1^*(e_1) + \ldots + a_1 c_n e_1^*(e_n) + \ldots + a_n c_1 e_n^*(e_1) + \ldots +$$

$$+ a_n c_n e_n^*(e_n)$$

$$= a_1 c_1 + \ldots + 0 + \ldots + 0 + \ldots + a_n c_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$$

Por la desigualdad de Schwarz:

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)^{1/2}$$

pero si $|x| = 1$, entonces $\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)^{1/2} = 1$

Así: $\text{Sup}\,\{|f(x)| : x \in E;\ |x| = 1\} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}$

Solamente falta demostrar que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \leq \text{Sup}\,\{|f(x)| : x \in E,\ |x| = 1\}\ ;$$

para ello trataremos de encontrar un $x \in E$ con $|x| = 1$, tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \leq |f(x)|$$

Sea $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i e_i$, $|x| = 1$

$$(x/x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^2 a_i^2$$

$$(x/x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 a_i^2\right)^{1/2}$$

$$= \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}$$

$$= 1 \quad ; \quad \text{ya que } |x| = 1,$$

de donde $\lambda = \dfrac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}}$

Luego, $|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda a_i\right|$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1} \lambda^2 a_i^2\right)^{1/2} \quad \text{, por 1.2-4}$$

Como $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 a_i^2\right)^{1/2} = 1$ entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} = |f(x)|$$

$$\leq \text{Sup } \{|f(x)| : x \in E \; ; \; |x| = 1\} .$$

Por lo tanto

$$\text{Sup } \{|f(x)| : x \in E \; ; \; |x| = 1\} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} .$$

Proposición 1.6-16

La función canónica de E en E^{**} preserva la norma.

Demostración

Sea ψ la función canónica definida como en 1.6-11.

Luego

$$|\psi(x)| = \text{Sup } \{|\psi(x)(f)| : f \in E^* ; |f| = 1\}$$

$$"|\psi(x)| = |x|"$$

i) $|\psi(x)| \leq |x|$

$|\psi(x)(f)| = |f(x)| \leq |f||x| \leq |x|$; $|f| = 1$

Por lo tanto $|x|$ es cota superior de $\{|\psi(x)(f)| : |f| = 1\}$

Luego $\text{Sup } \{|\psi(x)(f)| : |f| = 1\} \leq |x|$

ii) $|x| \leq |\psi(x)|$

Sea x , $|x| = 1$, encontraremos f, $|f| = 1$, tal que $|f(x)| = 1$.

Sea $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ y $f = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*$

$$1 = |x| = |f|$$

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right| = |x|^2 = 1$$

Luego $|x| = |f(x)|$

$\leq \text{Sup } \{|\psi(x)(f)| : |f| = 1\}$

Es decir $|x| \leq |\psi(x)|$; si $|x| = 1$

Si tomamos cualquier $y \neq \theta$ con $y = ax$ y $|x| = 1$

$|\psi(y)| = |\psi(ax)| = |a\psi(x)| = |a||\psi(x)|$

$|\psi(y)| \geq |a||x| \geq |ax| \geq |y|$

Luego $|y| \leq |\psi(y)|$, para cualquier $y \neq \theta$.

TOPOLOGIA DE UN ESPACIO EUCLIDEO

1.7 CONJUNTOS ABIERTOS.

Consideremos la topología usual de un n-espacio euclídeo E.

Definición 1.7-1

Sea E un n-espacio euclídeo. Llamaremos *bola abierta* de centro x y radio r, con $r > 0$, al conjunto

$$B(x,r) = \{y \in E : |x - y| < r\} .$$

Definición 1.7-2

Sea E un n-espacio euclídeo. Llamaremos *bola cerrada* de centro x y radio r, con $r > 0$, al conjunto

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in E : |x - y| \leq r\} .$$

Definición 1.7-3

Sea $S \subset E$; S es un *conjunto abierto* si para todo $x \in S$

existe un $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset S$.

Proposición 1.7-4

Si $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ Es un conjunto de conjuntos abiertos, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$ es abierto.

Demostración

Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$; entonces existe un $\alpha_o \in A$ tal que $x \in S_{\alpha_o}$. Como S_{α_o} es abierto existe un $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset S$, $B(x,r) \subset S_{\alpha_o} \subset \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$, por lo que $\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$ es un abierto en E.

Proposición 1.7-5

Si, S_i $i = 1, \ldots, n$ es un conjunto finito de conjuntos abiertos, entonces $S = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$ es abierto.

Demostración

Sea $x \in S$, entonces $x \in S_i$, $i = 1, \ldots, n$. Como cada S_i es un abierto, existen $r_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ tales que $B(x,r_i) \subset S_i$, $i = 1, \ldots, n$. Sea $r = \min \{r_1, \ldots, r_n\}$.

Entonces $B(x,r) \subset S$.

Luego S es abierto.

Proposición 1.7-6

Sean $G \subset E$ un abierto, $x \in G$, $y \in E$, $y \neq \theta$,; entonces existe $b > 0$ tal que $x + ay \in G$, para toda a, tal que $|a| < b$

Demostración

Si G es abierto existe $B(x,r) \subset G$. Encontremos $b > 0$ tal que $x + ay \in B(x,r)$, si $|a| < b$.

$$|x - (x + ay)| = |-ay| = |ay| = |a||y|$$

$$|a||y| < r \quad \text{si } |a| < \frac{r}{|y|}$$

Es decir $x + ay \in G$ cuando $|a| < \dfrac{r}{|y|}$. Luego $b = \dfrac{r}{|y|}$.

Proposición 1.7-7

Todo conjunto unitario no es conjunto abierto.

Demostración

Si $E \neq (\theta)$, existe $y \in E$, $y \neq \theta$. Sea $x \in E$ y $r > 0$; si $x = \theta$ entonces $z = \dfrac{r}{2|y|}\, y \in B(0,r)$. Luego $B(x,r) \not\subset \{x\}$.

Si $x \neq \theta$, sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $1 < \alpha < \dfrac{r}{|x|} + 1$

$\alpha \neq 1 \Longrightarrow \alpha x \neq x$

$$|\alpha x - x| = |(\alpha - 1)x| = |\alpha - 1||x| < \frac{r}{|x|}\,|x| = r$$

$|\alpha x - x| < r \Longrightarrow \alpha x \in B(x,r)$

Luego $B(x,r) \not\subset \{x\}$.

Ejemplo 1.7-8

Sea $x \in E$ y sea $S_n = B\left\{x, \frac{1}{n}\right\}$ $n = 1,2,\ldots$. Entonces cada S_n es abierto, pero la intersección de los conjuntos S_n consiste de un solo elemento; luego no es abierto por ser un conjunto unitario.

Definición 1.7-9

Sea $\{e_1, .., e_n\}$ una base de E y sean $A = (a_1, ..., a_n)$ y $B = (b_1, ..., b_n)$ dos puntos distintos en $\mathbb{R}^n$ tales que $a_i \leq b_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Llamaremos *intervalo cerrado* al conjunto que denotaremos así:

$$[A,B] = \{x : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ , \quad a_i \leq x_i \leq b_i, \ i = 1, ..., n\}.$$

Definición 1.7-10

Un intervalo cerrado es llamado *intervalo cúbico cerrado* si existe un $r > 0$ tal que $b_i - a_i = r$, $i = 1, ..., n$.

El número r es llamado el *lado del intervalo.*

Definición 1.7-11

Un *punto interior* de un conjunto $S \subset E$ es un punto $x \in S$ tal que para algún $r > 0$, $B(x,r) \subset S$.

Proposición 1.7-12

(Caracterización de conjuntos abiertos).

Un conjunto es abierto sí y sólo si todos sus puntos son puntos interiores.

Demostración

($\Longrightarrow$) Si S es un conjunto abierto entonces para cada $x \in S$ existe un $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset S$; entonces x es un punto interior.

($\Longleftarrow$) Todos los puntos de S son interiores, entonces para todo $x \in S$, existe un $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset S$; luego S es abierto.

Definición 1.7-13

Los intervalos cerrados I y J son llamados *casi-disjuntos* si $I \cap J$ no contiene puntos interiores de I ó de J.

Lema 1.7-14

Sea E un n-espacio euclídeo. Entonces existe una sucesión $I_1, I_2, \ldots, I_m \ldots$ de intervalos cúbicos cerrados de lado 1 y casi-disjuntos dos a dos tal que

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

Demostración

Para cada $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ en $\mathbb{Z}^n$ formemos el intervalo cúbico cerrado

$$I_m = \{x : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ m_i \leq x_i \leq m_i + 1,\ i = 1, \ldots, n\}$$

Sean m, m' en $\mathbb{Z}^n$, $m \neq m'$ y probemos que I_m y $I_{m'}$ son casi-disjuntos.

Si $I_m \cap I_{m'} = \phi$, ellos son casi-disjuntos.

Supongamos que existe $x_o = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ en $I_m \cap I_{m'}$, y sea $\varepsilon > 0$. Los vectores $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, $z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i$ con $y_i = x_i + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}$, $z_i = x_i - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}$ pertenecen a $B(x_o, \varepsilon)$ ya que

$$\|x_o - z\| = \left\{\sum_{i=1} |x_i - x_i + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}|^2\right\}^{1/2}$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right|^2\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{4n}\right\}^{1/2}$$

$$= \left\{\frac{\varepsilon^2}{4}\right\}^{1/2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

De igual manera $\|x_o - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pero si $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ y $m' = (m_1', m_2', \ldots, m_n')$, por ser $m \neq m'$ podemos escoger j tal que $m_j \neq m_j'$; sea $m_j < m_j'$; entonces $m_j + 1 \leq m_j'$.

Como $x_o \in I_m \cap I_{m'}$ se tiene que $m_j' \leq x_j \leq m_j + 1$, de donde

$m_j' = x_j = m_j + 1$; luego

$$m_j + 1 = x_j < x_j + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}} = y_j \quad y \quad z_j = x_j - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}} < x_j = m_j'$$

Así $y \notin I_m$ y $z \notin I_{m'}$, o sea que x_o no es un punto interior de I_m y x_o no es punto interior de $I_{m'}$.

Por lo tanto I_m é $I_{m'}$ son casi-disjuntos.

Sea $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$; para cada $i \leq n$, sea m_i un entero tal que $m_i \leq x_i \leq m_i + 1$; entonces $x \in I_m$, con $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Luego $E = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} I_m$, en donde cada I_m es un intervalo cúbico cerrado de lado 1, y dos cualesquiera de ellos son casi-disjuntos. Como $\mathbb{Z}$ es un conjunto numerable, $\mathbb{Z}^n$ lo es también, o sea que podemos escribir $E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_m$, en donde $(I_m)_{m \geq 1}$ es una familia numerable de intervalos cúbicos cerrados de lado 1 casi-disjuntos dos a dos.

Lema 1.7-15

Si $I \subset E$ es un intervalo cúbico cerrado de lado r, I puede ser cubierto por una familia finita de 2^n intervalos cúbicos cerrados casi-disjuntos dos a dos de lado $\frac{r}{2}$.

Demostración:

Sea $I = \{x : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ a_i \leq x_i \leq b_i,\ i=1,\dots,n\}$ un intervalo cúbico cerrado de lado r.

Los intervalos cúbicos cerrados de la forma

$J = \{x : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ c_i \leq x_i \leq d_i,\ i = 1,\dots, n\}$ en donde para cada i:

$$c_i = a_i \quad y \quad d_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

$$ó \quad c_i = \frac{a_i + b_i}{2} \quad y \quad d_i = b_i$$

constituyen una familia finita de 2^n intervalos cúbicos cerrados casi-disjuntos dos a dos de lado $\frac{r}{2}$ cuya unión es igual a I.

Teorema 1.7-16

Si $S \subset E$ es abierto, entonces S es la unión de un conjunto numerable de intervalos cúbicos cerrados los cuales son casi-disjuntos dos a dos.

Demostración

Consideremos una partición de E (Lema 1.7-14) de intervalos cúbicos cerrados de lado 1 y casi-disjuntos dos a dos $(I_i^{(1)})_{i \in N}$

Sean $J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_n^{(1)}, \ldots$, los intervalos de lado 1 que están contenidos en S y $K_1^{(1)}, K_2^{(1)}, \ldots, K_n^{(1)}, \ldots$ los restantes.

Partimos cada uno de los intervalos $K_1^{(1)}, K_2^{(1)}, \ldots, K_n^{(1)}, \ldots$ en intervalos cúbicos cerrados hasta obtener $I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, \ldots, I_n^{(2)}, \ldots$ de lado 1/2. (Lema 1.7-15)

Sean $J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_n^{(2)}, \ldots$ los intervalos que están contenidos en S y sean $K_1^{(2)}, K_2^{(2)}, \ldots, K_n^{(2)}, \ldots$ los restantes.

Continuamos este proceso hasta obtener intervalos

$I_1^{(m)}, \ldots, I_n^{(m)}, \ldots, J_1^{(m)}, \ldots, J_n^{(m)}, \ldots, K_1^{(m)}, \ldots, K_n^{(m)}, \ldots$ de lado $\frac{1}{2^{m-1}}$, para todo m, con $J_i^{(m)} \subset S$.

Los intervalos $J_j^{(m)}$ son un conjunto numerable de intervalos cúbicos cerrados casi-disjuntos dos a dos. Demostraremos ahora que la unión de ellos es igual a S. Sea $x_o \in S$; entonces existe $r > 0$ tal que $B(x_o, r) \subset S$.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Dado que $J_j^{(m)}$ es un intervalo cúbico cerrado, entonces

$$J_j^{(m)} = \{z : z = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i, \quad a_i \leq \gamma_i \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, n\},$$

$$b_i - a_i = \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in J_j^{(m)} \Longrightarrow a_i \leq \alpha_i \leq b_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \in J_j^{(m)} \Longrightarrow a_i \leq \beta_i \leq b_i$$

$$|x - y| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)^2 \right\}^{1/2}$$

$$|\alpha_i - \beta_i| \leq |\alpha_i - b_i| + |b_i - \beta_i|$$

$$\leq \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{2}{2^{m-1}} ;$$

entonces

$$|x - y| \leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{2^{m-1}} \right)^2 \right\}^{1/2} = \frac{2\sqrt{n}}{2^{m-1}}$$

Tomaremos un m tal que $\frac{2\sqrt{n}}{r} < 2^{m-1}$

Luego este m es tal que

$x_o \in I_i^{(m)} \Longrightarrow I_i^{(m)} \subset B(x_o, r)$; para todo $i \in \mathbb{N}$.

Notemos que a partir de m todos los intervalos están incluídos en S.

Así; si x_o no está en $J_n^{(j)}$, $j < m$, x_o estará en un $I_n^{(m)}$.

Por lo tanto $S = \bigcup_{\substack{j \geq 1 \\ m \geq 1}} J_j^{(m)}$.

Definición 1.7-17

Para todo conjunto $S \subset E$, el *interior de S* es la unión de todos los subconjuntos de S abiertos de E y se designa por $\overset{\circ}{S}$. ($\overset{\circ}{S}$ es el más grande abierto contenido en S).

Ejemplo 1.7-18

Demostrar que toda bola abierta en E es un conjunto abierto.

En efecto: Sea $z \in B(x,r)$

$$d(x,z) < r \Longrightarrow r - d(x,z) > 0$$

Construyamos la bola

$$B(z,r-d(x,z))$$

Sea $y \in B(z,r-d(x,z))$; entonces $d(z,y) < r-d(x,z)$.

Por propiedad de distancia sabemos que

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

entonces $\quad d(x,y) < d(x,z) + r - d(x,z)$

$$\Longrightarrow d(x,y) < r$$

$$\Longrightarrow y \in B(x,r)$$

Luego $B(z,r-d(x,z)) \subset B(x,r)$.

Proposición 1.7-19

Demostrar que el interior de un conjunto S es el conjunto de puntos interiores de S.

Demostración

Sea x un punto interior de S; entonces existe $B(x,r)$

tal que $B(x,r) \subset S$; entonces $x \in \bigcup_{\substack{F \subset S \\ F \text{ abierto}}} F$

ya que $F_1 = B(x,r)$ es un abierto.

Si $x \in \bigcup_{\substack{F \subset S \\ F \text{ abierto}}} F$, $x \in F_1$ para algún F_1 abierto, $F_1 \subset S$.

Entonces

$x \in F_1 \Longrightarrow x \in B(x,r) \subset F_1 \subset S$

$\Longrightarrow B(x,r) \subset S$

$\Longrightarrow x$ es punto interior de S.

1.8 CONJUNTOS CERRADOS

Definición 1.8-1

Sea $S \subset E$. S es un *conjunto cerrado* si su complemento es un conjunto abierto.

Proposición 1.8-2

La intersección de una familia de conjuntos cerrados es cerrado.

Demostración

Sea $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ una familia de cerrados de E.

$$\complement\left[\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha\right] = \bigcup_{\alpha\in A} \complement S_\alpha$$

$\bigcup_{\alpha\in A} \complement S_\alpha$ es abierto por 1.7-4

Luego por 1.8-1 $\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha$ es cerrado.

Proposición 1.8-3

La unión de un conjunto finito de cerrados es cerrado.

Demostración

Sean $S_1, S_2, \ldots, S_n$ cerrados en E y sea

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i.$$

Sabemos que $\complement\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \complement S_i$ es un abierto por 1.7-5.

Luego, por 1.8-1 S es cerrado.

Los conjuntos cerrados pueden ser estudiados en términos de la noción de punto límite de un conjunto.

Definición 1.8-4

Sea $S \subset E$; $x \in E$ es un *punto Límite* de S, si para todo $r > 0$ se tiene que $S \cap B(x,r)$ es un conjunto infinito de puntos.

Teorema 1.8-5

Un conjunto $S \subset E$ es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos límites.

Demostración

($\Longleftarrow$) Supongamos que S contiene todos sus puntos límites.

Sea $x \in \complement S$; x no es punto límite de S entonces existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap S$ es un conjunto finito; es decir $B(x,r) \cap S = \phi$ ó $B(x,r) \cap S = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Si la intersección es igual a vacío es inmediata la conclusión. Si la intersección es un conjunto finito tomemos $r' = \min \{r, |x-y_1|, \ldots, |x-y_n|\}$, entonces $S \cap B(x,r') = \phi$.

$S \cap B(x,r') = \phi \Longrightarrow B(x,r') \subset \complement S \Longrightarrow \complement S$ es abierto. Luego S es cerrado.

($\Longrightarrow$) Sea S cerrado y x un punto límite de S; para todo $r > 0$

$$B(x,r) \cap S \neq \phi \Longrightarrow B(x,r) \not\subset \complement S$$

$\Longrightarrow x \notin \complement S$ ya que $\complement S$ es un abierto; luego $x \in S$.

Por tanto S contiene todos sus puntos límites.

Definición 1.8-6

Un *punto adherente* de un conjunto $S \subset E$ es un punto $x \in E$ tal que para todo $r > 0$; $S \cap B(x,r)$ es diferente de vacío.

Definición 1.8-7

El conjunto de todos los puntos adherentes de S se denomina la *adherencia de S* y se denota por $\overline{S}$.

Proposición 1.8-8

La adherencia de un conjunto S es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a S:

$$\overline{S} = \bigcap F \;;\; S \subset F, \quad F \text{ cerrado.}$$

Demostración

$$\text{"}\complement\Big(\bigcap_{\substack{S\subset F\\ F \text{ cerrado}}} F\Big) \subset \complement\,\overline{S}\text{"}$$

Como $\bigcap\limits_{\substack{S\subset F\\ F \text{ cerrado}}} F$ es cerrado por 1.8-2, $\complement\bigcap\limits_{\substack{S\subset F\\ F \text{ cerrado}}} F$ es abierto.

Sea $x \in \complement\Big(\bigcap\limits_{\substack{S\subset F\\ F \text{ cerrado}}} F\Big)$; entonces existe $r > 0$ tal que

$B(x,r) \cap \Big(\bigcap\limits_{\substack{S\subset F\\ F \text{ cerrado}}} F\Big) = \phi$; de donde $B(x,r) \cap S = \phi$; entonces $x \notin \overline{S}$ ó sea $x \in \complement\,\overline{S}$.

Luego $\complement\Big(\bigcap\limits_{\substack{S\subset F\\ F \text{ cerrado}}} F\Big) \subset \complement\,\overline{S}$

$$\text{"}\complement\,\overline{S} \subset \complement\Big(\bigcap_{\substack{S\subset F\\ F \text{ cerrado}}} F\Big)\text{".}$$

Sea $x \in \complement \overline{S}$ entonces $x \notin \overline{S}$; existe $B(x,r)$ tal que $B(x,r) \cap S = \phi$ de donde $S \subset \complement B(x,r)$; $\complement B(x,r)$ es cerrado que contiene a S tal que $x \notin \complement B(x,r)$; en consecuencia $x \notin \bigcap\limits_{\substack{S\subset F \\ F \text{ cerrado}}} F$, entonces $x \in \complement\Big(\bigcap\limits_{\substack{S\subset F \\ F \text{ cerrado}}} F\Big)$.

Luego $\complement \overline{S} \subset \complement\Big(\bigcap\limits_{\substack{S\subset F \\ F \text{ cerrado}}} F\Big)$

Por lo tanto $\overline{S} = \bigcap\limits_{\substack{S\subset F \\ F \text{ cerrado}}} F$.

Proposición 1.8-9

Si $x \in \overline{S}$ y $x \notin S$, $B(x,r) \cap S$ es un conjunto infinito.

Demostración

Supongamos lo contrario. Sea $B(x,r) \cap S = \{y_1, \dots, y_n\}$. Sea $r_i < \frac{1}{2} d(x, y_i)$; si tomamos $r = \min\{r_i,\ i = 1, \dots, n\}$, entonces, $B(x,r) \cap S = \phi$ que es contrario a la hipótesis.

Proposición 1.8-10

$\overline{S}$ es la unión de S y el conjunto de puntos límites.

Demostración

Sea $S \subset E$.

Sea $S' = \{x \in E : B(x,r) \cap S$ es infinito$\}$. Debemos demostrar que

$\overline{S} = S \cup S'$.

" $\overline{S} \subset S \cup S'$ ".

Sea $x \in \overline{S}$, entonces para todo $r > 0$ $B(x,r) \cap S \neq \phi$

$x \in S$ ó $x \notin S$.

Si $x \in S$, $x \in S \cup S'$.

Si $x \notin S$, $B(x,r) \cap S$ es infinito por 1.8-9; ó sea $x \in S'$, de donde $x \in S \cup S'$.

Luego $\overline{S} \subset S \cup S'$.

" $S \cup S' \subset \overline{S}$ "

$x \in S \cup S' \Longrightarrow x \in S$ ó $x \in S'$

$x \in S' \Longrightarrow B(x,r) \cap S$ es infinito

$\Longrightarrow B(x,r) \cap S \neq \phi$

$\Longrightarrow x \in \overline{S}$.

$x \in S \Longrightarrow x \in B(x,r) \cap S$

$\Longrightarrow B(x,r) \cap S \neq \phi$

$\Longrightarrow x \in \overline{S}$

Luego $S \cup S' \subset \overline{S}$.

Ejemplo 1.8-11

Toda bola cerrada en E es un conjunto cerrado.

Demostración

Sea $\overline{B}(x,r)$ una bola cerrada en E. Demostrar que $\complement\, \overline{B}(x,r)$ es abierto.

Sea $y \in \complement\, \overline{B}(x,r)$; $d(x,y) > r$. Tomemos $r^* = \frac{1}{2}(d(x,y)-r)$ y formemos $B(y,r^*)$. Verifiquemos que $B(y,r^*) \subset \complement\, \overline{B}(x,r)$; para eso sea $z \in B(y,r^*)$;

$d(y,x) \leq d(y,z) + d(z,x)$

$d(y,x) - d(y,x) + r < d(x,z)$, es decir $d(x,z) > r$; luego $z \in \complement\, \overline{B}(x,r)$.

Ejemplo 1.8-12

Todo intervalo cerrado en E es un conjunto cerrado.

En efecto:

Sea $I = \{x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i : a_i \leq x_i \leq b_i,\quad i = 1,\ldots, n\}$ un intervalo cerrado, donde $A = (a_1,\ldots, a_n)$ y $B = (b_1,\ldots, b_n)$ son dos puntos distintos en $\mathbb{R}^n$. Observemos que el complemento de I es

$I^C = \{x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i : x_j < a_j$ ó $b_j < x_j$, para algún $j=1,\ldots,n\}$.

Demostraremos que I^C es abierto.

Sea $x \in I^C$ tal que $x_j < a_j$; sea $r = a_j - x_j$ y probemos que $B(x,r/2) \subset I^C$. Si $y \in B(x,r/2)$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, verifiquemos que $y_j < a_j$ es decir $a_j - y_j > 0$.

$a_j - y_j = a_j - x_j + x_j - y_j$.

Dado que $x_j - y_j \leq |x_j - y_j| \leq |x - y| < \frac{r}{2}$

$$a_j - y_j < a_j - x_j + \frac{r}{2} = a_j - x_j + \frac{a_j - x_j}{2}$$

$$= \frac{a_j - x_j}{2} > 0.$$

Luego I^C es abierto.

1.9 COMPLETITUD

Definición 1.9-1

Una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de un espacio vectorial normado E se dice que es de *Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si m, $k \geq \mathbb{N}$, entonces $|x_m - x_k| < \varepsilon$.

Lema 1.9-2

Sea E un n-espacio euclídeo y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal en E; entonces la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $x_k = \sum_{i=1}^{n} x_{ki} e_i$, $k = 1, \ldots, \ldots$ es de Cauchy si y solamente si $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración

($\Longrightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$; dado que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_k| < \varepsilon$, para todo $m,k > N$: para cada $i = 1,\ldots,n$ tenemos que

$$|x_{mi} - x_{ki}| \le |x_m - x_k| < \varepsilon ;$$

ya que $x_m - x_k = \sum_{i=1}^{n} (x_{mi} - x_{ki})e_i$.

Así $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de números reales, para cada $i = 1,\ldots, n$.

($\Longleftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$; dado que $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, para cada $i = 1,\ldots, n$ entonces existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $m,k > N_i$ implican que

$|x_{ki} - x_{mi}| < \varepsilon/n$.

$$\text{Así, } |x_k - x_m| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_{ki}e_i - \sum_{i=1}^{n} x_{mi}e_i\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}(x_{ki} - x_{mi})e_i\right|$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - x_{mi})^2\right\}^{1/2}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |x_{ki} - x_{mi}| < \varepsilon$$

Por tanto $|x_k - x_m| \le \sum_{i=1}^{n} |x_{ki} - x_{mi}| < \varepsilon$

es decir $|x_k - x_m| < \varepsilon$ siempre que $m,k > N$ tomando
$N = \text{máx}\ \{N_i;\ \ i = 1,\ldots, n\}$.

Luego $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Definición 1.9-3

Una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de E se dice que *converge* a x si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $k > N$ implica que $|x - x_k| < \varepsilon$.

Lema 1.9-4

La sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de E converge a $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ si y sólo si para cada $i = 1,\ldots, n$ las sucesiones $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ convergen a x_i.

Demostración

($\Longrightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$; entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $k > N$ implica que $|x - x_k| < \varepsilon$; por lo tanto para cada $i = 1,\ldots, n$ tenemos que $|x_i - x_{ik}| \leq |x - x_k| < \varepsilon$.

Así $|x_i - x_{ik}| < \varepsilon$ siempre que $k > N$.

($\Longleftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$; existe N_i, $i = 1,\ldots, n$ tal que $k > N_i$ implica que $|x_i - x_{ki}| < \varepsilon/n$.

Así $|x - x_k| < \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{ki}| < \varepsilon$; es decir que $|x - x_k| < \varepsilon$ siempre que $k > N$, tomando $N = \max \{N_i;\ i=1,\ldots, n\}$.

Definición 1.9-5

Si toda sucesión de Cauchy $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de un espacio vectorial normado E converge a un punto $x \in E$, diremos que *E es completo*.

Observación 1.9-6

Asumiremos el hecho de que toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente, es decir que $\mathbb{R}$ es completo.

Proposición 1.9-7

Si E es un n-espacio euclídeo entonces E es completo.

Demostración:

Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy tal que

$x_k = \sum_{i=1}^{n} x_{ki}e_i$ con $k = 1,2,\ldots,$ son elementos de un espacio euclídeo; por Lema 1.9-2 $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para cada $i = 1,\ldots,n$ y dado que $\mathbb{R}$ es completo para cada $i = 1,\ldots, n$ las sucesiones $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ convergen a x_i; por Lema 1.9-4 la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a

$x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$; por lo tanto E es completo.

Dado que E es completo podemos dar ahora algunas consecuencias; para ello necesitamos antes de un Lema.

Lema 1.9-8

Sean I, J dos intervalos cerrados con

$$I = \{x : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ a_i \leq \alpha_i \leq b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

$$J = \{x : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ m_i \leq \alpha_i \leq n_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$ Entonces $I \subset J$ si y solamente si $b_i \leq n_i$ y $m_i \leq a_i$ para todo $i \leq n$.

Demostración

$$(\Longrightarrow)\quad x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in I \Longrightarrow x \in J$$

$\Longrightarrow m_i \leq a_i \leq n_i$; por lo tanto $m_i \leq a_i$;

$y = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \in I \Longrightarrow y \in J \Longrightarrow m_i \leq b_i \leq n_i$; por lo tanto $b_i \leq n_i$.

$(\Longleftarrow)$ Sea $x \in I$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ con $a_i \leq \alpha_i \leq b_i$; dado que $m_i \leq a_i$ y $b_i \leq n_i$ entonces

$$m_i \leq a_i \leq \alpha_i \leq b_i \leq n_i$$

$\Longrightarrow m_i \leq \alpha_i \leq n_i$

$\Longrightarrow x \in J.$

Luego $I \subset J$.

Proposición 1.9-9

Sea $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_k \supset \dots$ una sucesión decreciente de intervalos cerrados diferentes de vacío. Entonces

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \phi$$

Demostración

Sea $I_k = \{x : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ a_{ik} \leq \alpha_i \leq b_{ik}\}$; podemos escoger una sucesión $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ tal que

$x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, \dots, x_k \in I_k, \dots$ siendo $x_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} e_i$.

$x_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i2} e_i, \dots,\ x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i, \dots,$.

Demostremos que la sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy; para ello basta demostrar que la sucesión $(a_{ik})_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy por Lema 1.9-2; pero $(a_{ik})_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente ya que por Lema 1.9-8 $I_1 \supset I_2 \Longrightarrow a_{i1} \leq a_{i2}$

$I_2 \supset I_3 \Longrightarrow a_{i2} \leq a_{i3}$ y así $I_1 \supset I_2 \supset \dots I_k \supset \dots$

$a_{i1} \leq a_{i2} \leq a_{i3} \leq \dots \leq a_{ik} \leq \dots$ y también $a_{ik} \leq b_{ik}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$. Así para $k = 1$, $a_{ik} \leq b_{ik} \leq b_{i1}$, por lo tanto $\lim_{k \to \infty} a_{ik}$ existe siendo $\lim_{k \to \infty} a_{ik} = a_i$, con $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Luego $(a_{ik})_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy; por lo tanto $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como E es completo, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a un $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, $x \in E$.

" $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ ".

Sea $j \in \mathbb{N}$ probaremos que $x \in I_j$. Para que $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ pertenezca a I_j debe cumplirse que $a_{ij} \leq a_i \leq b_{ij}$, $i \leq n$.

i) "$a_{ij} \leq a_i$" es decir verifiquemos que $a_{ij} \leq \lim_{k\to\infty} a_{ik}$; dado que

$(a_{ik})_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces $\lim_{k\to\infty} a_{ik}$ es la menor cota superior de $(a_{ik})_{k\in\mathbb{N}}$ por lo tanto

$$a_{ij} \leq \lim_{k\to\infty} a_{ik} .$$

ii) "$a_i \leq b_{ij}$" es decir verifiquemos que $\lim_{k\to\infty} a_{ik} \leq b_{ij}$; por Lema 1.9-8

sabemos que, para toda k, $k \in \mathbb{N}$, $a_{ik} \leq b_{ik}$; para un j fijo siempre $a_{ik} \leq b_{ij}$, para todo k, $k \in \mathbb{N}$; por lo tanto $\lim_{k\to\infty} a_{ik} \leq b_{ij}$; es decir $a_i \leq b_{ij}$.

Luego $a_{ij} \leq a_i \leq b_{ij}$.

Por tanto $a_{ik} \leq a_i \leq b_{ik}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$, es decir $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \phi$.

Proposición 1.9-10

Sea $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$ una sucesión decreciente de intervalos cúbicos cerrados diferentes de vacío; si los lados de los intervalos cúbicos convergen a cero entonces el conjunto $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ posee un solo elemento.

Demostración

Para cada k, I_k es un intervalo cúbico cerrado, es decir

$$I_k = \{x : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ a_{ik} \leq \alpha_i \leq b_{ik}\}$$

con $b_{ik} - a_{ik} = r_k$, $r_k > 0$; además tendremos que $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$; en este caso la intersección es un solo punto.

Verifiquemos si $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_k$ es único.

Sean $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ tales que $a_{ik} \leq x_i \leq b_{ik}$, $a_{ik} \leq y_i \leq b_{ik}$ para todo k.

Supongamos $x \neq y$ entonces, existe j tal que $x_j \neq y_j$; sea $x_j < y_j$, es decir $a_{jk} \leq x_j < y_j \leq b_{jk}$; entonces $b_{jk} - a_{jk} \geq y_j - x_j = \varepsilon_j > 0$ se da para todo k, $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\lim_{k\to\infty} |b_{jk} - a_{jk}| \geq \varepsilon_j \neq 0$ lo cual es una contradicción, ya que $b_{jk} - a_{jk} = r_k$ y $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$.

Luego $x = y$.

Lema 1.9-11

Sea $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de intervalos cúbicos cerrados diferentes de vacío cuyos lados convergen a cero. Sea r_m el lado de I_m y $\{x\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$.

Sea $\varepsilon > 0$; entonces existe un m, $m \in \mathbb{N}$ tal que $I_m \subset B(x,\varepsilon)$.

Demostración

Como $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$m > N \Longrightarrow 2\sqrt{n}\, r_m < \varepsilon$.

Sea $I_m = \{y : y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ \ a_{im} \leq \alpha_i \leq b_{im}\}$ un intervalo cúbico cerrado, con $b_{im} - a_{im} = r_m$; $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in I_m \Longrightarrow a_{im} \leq \alpha_i \leq b_{im}$; sea

$b = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{im}\, e_i$ y $a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{im}\, e_i$.

Dado $\varepsilon > 0$,

$$|y - a| = \left\{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - a_{im}|^2\right\}^{1/2}$$

$$|y - a|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - a_{im}|^2 \leq n\, r_m^2$$

$|y - a| \leq \sqrt{n}\, r_m$. Similarmente $|a - x| \leq \sqrt{n}\, r_m$. Entonces,

$|y - x| \leq |y - a| + |a - x| \leq 2\sqrt{n}\, r_m < \varepsilon$

Luego $y \in B(x,\varepsilon)$; por lo tanto $I_m \subset B(x,\varepsilon)$.

1.10 TEOREMA DEL RECUBRIMIENTO DE BOREL.

Definición 1.10-1

Un conjunto F es *acotado* si $F \subset I$, donde I es un intervalo cúbico cerrado.

Teorema 1.10-2

Si $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_k \supset \ldots$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos en E y si F_1 es acotado, entonces

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \text{ es no vacío.}$$

Demostración

Para demostrar que $F \neq \phi$ buscamos un punto x de F. Sea I un intervalo cúbico cerrado de lado r tal que $F_1 \subset I$. Se hace una partición finita de I en intervalos cúbicos cerrados de lado r/2. Al menos uno de esos intervalos cúbicos cerrados de lado r/2 intersecta a los F_k para un conjunto infinito de valores de k.

Sea I_1 uno de tales intervalos. $I_1 \cap F_i \neq \phi$ para una cantidad infinita de índices i.

Sea $k \in \mathbb{N}$; si $k < i$ y $F_i \cap I_1 \neq \phi$

$F_k \cap I_1 \neq \phi$ ya que $F_i \subset F_k$. Luego $F_k \cap I_1 \neq \phi$ para todo k.

Hacemos una partición finita de I_1 en intervalos de radio r/4. Sea I_2 un intervalo de la partición de I_1 tal que $F_k \cap I_2 \neq \phi$, para todo k; $I_2 \subset I_1$.

Se procede de la misma manera con I_2 partiendo cada intervalo hasta obtener una sucesión decreciente $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_r \supset \ldots$ de intervalos cúbicos cerrados con lados convergiendo a cero tal que $I_r \cap F_k \neq \phi$ para todo r y k.

Sea $\bigcap_{r=1}^{\infty} I_r = \{x\}$. Demostraremos que para cada k, $x \in \overline{F}_k$.

Sea $\delta > 0$; necesitamos probar que $B(x,\delta) \cap F_k \neq \phi$. En efecto; sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $I_m \subset B(x,\delta)$, por Lema 1.9-11. Dado que $F_k \cap I_m \neq \phi$, existe $y \in I_m \cap F_k$; entonces $y \in I_m \cap F_k \subset I_m \subset B(x,\delta)$

$\Longrightarrow y \in B(x,\delta) \Longrightarrow y \in B(x,\delta) \cap F_k$. Luego $B(x,\delta) \cap F_k \neq \phi$; es decir $x \in \overline{F}_k$; como F_k es cerrado, $F = \overline{F}_k$; luego $x \in F_k$. Por tanto

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Teorema 1.10-3

Si un conjunto acotado S contiene una infinidad de puntos, existe por lo menos un punto en E que es punto límite de S.

Demostración

Puesto que S es acotado, $S \subset I$, con I un intervalo cúbico cerrado; sea r el lado de I. Hacemos una partición finita de I en intervalos cúbicos cerrados de lado r/2. Sea $(J_i)_{i \leq n}$ esa partición; entonces $S \subset \bigcup_{i=1}^{n} J_i$; existe un j tal que $S \cap J_j$ es infinito.

Sea $I_1 = J_j$ que puede expresarse también así $I_1 = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ donde cada K_i es un subintervalo de I_1 de lado r/4. Para algún i, $K_i \cap S$ es infinito.

Sea $I_2 = K_i$ tal que $S \cap I_2$ es infinito; procediendo de esta manera obtendremos una sucesión $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$ de intervalos cúbicos cerrados cuyos lados convergen a cero, tal que $I_k \cap S$ es infinito para $k = 1, \ldots\ldots$

Sea $\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$; para probar que x es punto límite, sea $\delta > 0$ y demostremos que $B(x,\delta) \cap S$ es infinito.

El punto x pertenece a cada uno de los intervalos I_k y existe un k tal que $I_k \subset B(x,\delta)$, por Lema 1.9-11; pero como $I_k \cap S$ es infinito, entonces $B(x,\delta) \cap S$ es infinito.

Luego x es punto límite de S.

Corolario 1.10-4

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en E entonces tiene una subsucesión convergente.

Demostración

Sea $S \subset E$, $S = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; por Teorema 1.10-3 si S es un conjunto infinito y acotado tiene un punto límite. Sea x un punto límite de S, entonces para todo $r > 0$ $B(x,r) \cap S$ es diferente de vacío.

Si $r = 1$, $B(x,1)$ contiene un punto x_{n_1} de S.

Si $r = 1/2$, $B(x,1/2)$ contiene un punto x_{n_2} de S; y así sucesivamente podemos encontrar un $x_{n_k} \in B(x,1/k) \cap S$.

Demostremos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $k > N$ implica $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$, lo que es lo mismo que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Si $\frac{1}{N} < \varepsilon$, entonces $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k} < \frac{1}{N} < \varepsilon$, para todo $k > N$.

Luego $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Definición 1.10-5

Llamaremos *bola racional* a una bola $B(y,r)$ si $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$ donde $r, y_1, \ldots, y_n$ son racionales.

Lema 1.10-6

Sea $G \subset E$ un abierto; entonces para cada $x \in G$, existe una bola abierta $B(y,r)$ con $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$, los números $r, y_1, \ldots, y_n$ son todos racionales, $x \in B(y,r)$ y $B(y,r) \subset G$.

Demostración

Como G es abierto, para todo $x \in G$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $B(x,t) \subset G$. Sea $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Como $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R} \Longrightarrow x_i \in \overline{\mathbb{Q}}$.

$\Longrightarrow B(x_i, t/4n) \cap \mathbb{Q} \neq \phi$; entonces para todo i existe un $y_i \in B(x_i, t/4n) \cap \mathbb{Q}$, de donde $|x_i - y_i| < t/4n$; entonces si

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i,\quad |x - y| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i - \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) e_i\right|$$

$$|x - y| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right\}^{1/2}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < t/4.$$

Luego $|x - y| < t/4$.

Sea r un número racional tal que

$$t/4 < r < t/2$$

Como $|x - y| < t/4 < r$, $x \in B(y,r)$.

Sea $z \in B(y,r)$; entonces $|z - y| < r$;

$|z - x| = |z - y + y - x| \leq |z - y| + |y - x| < r + r$

$|z - x| < t/2 + t/2 = t$.

Luego $z \in B(x,t)$; entonces $B(y,r) \subset B(x,t)$; por lo tanto $x \in B(y,r) \subset B(x,t) \subset G$.

Lema 1.10-7

Si $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ es un conjunto de conjuntos abiertos, existe un subconjunto numerable (G_{α_i}) $i = 1, \ldots,$ tal que

$$\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_{\alpha_i}$$

Demostración

El conjunto B de bolas racionales es numerable porque

Q es numerable.

Sea $S = \{T \in B,\ \ T \subset G_\alpha$ para algún $G_\alpha\}$

Como S es numerable, S puede escribirse

$$S = \{S_1,\ S_2, \ldots,\ S_i, \ldots\}\ .$$

Para cada i escogemos un α_i tal que

$S_i \subset G_{\alpha_i}$, entonces

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_{\alpha_i} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha\ .$$

Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$; entonces $x \in G_\beta$, para algún β. Por Lema 1.10-6 existe y tal que

$x \in B(y,r) \subset G_\beta$ donde $B(y.r)$ es una bola racional que pertenece a S; si $B(y,r) = S_j$ entonces $S_j \subset G_{\alpha_j}$ implica que $x \in G_{\alpha_j}$, de donde $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_{\alpha_i}$

Luego $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_{\alpha_i}$

Por lo tanto $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_{\alpha_i}$

Teorema 1.10-8 (Teorema del Recubrimiento de Borel).

Si $F \subset E$ es un conjunto cerrado y acotado y $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ es un conjunto de conjuntos abiertos tal que $F \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ entonces $F \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_i$ para un cierto número finito de los G_α.

Demostración

Por Lema 1.10-7 podemos considerar que A es numerable y escribimos los conjuntos $(G_\alpha)_{\alpha\in A}$ como G_1, G_2,....

Sea $H_k = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$, $k = 1,2,\ldots.$

Observemos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k.$

H_k es abierto ya que es unión de abiertos. Consideremos para cada k el conjunto H_k^C que es cerrado.

Sea $S_1 = F$ y para $k > 1$, $S_k = F \cap H_k^C$. Cada conjunto S_k es cerrado ya que es intersección de cerrados y S_1 es acotado, además $S_k \subset F$.

Si cada S_k fuera distinto de vacío, por Teorema 1.10-2

$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_k \supset \cdots$ y $\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$ es no vacío, lo que significa que existe un punto en F que pertenece a todos los conjuntos S_k y que por lo tanto no pertenece a H_k, lo que es una contradicción ya que

$F \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$; por lo tanto existe un k tal que $S_k = \phi$;

$S_k = F \cap H_k^C = \phi$, entonces $F \subset H_k$. Luego $F \subset \bigcup_{i=1}^{k} G_i$.

capitulo II

Funciones Diferenciables

2.1 FUNCIONES CONTINUAS

Sean E y F espacios vectoriales de dimensiones n y m respectivamente y $G \subset E$. Consideremos la función $f: G \subset E \longrightarrow F$.

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base en E y $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m\}$ una base en F; para toda $x \in E$ y $\bar{x} \in F$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \text{y} \qquad \bar{x} = \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j \bar{e}_j .$$

Recordemos que la función f puede escribirse en términos de funciones coordenadas (definición 1.4-9). En vez de $\bar{x} = f(x)$, podemos escribir $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) = f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \bar{x}_2 &= f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \bar{x}_m &= f_m(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Así la función f tiene asociado un conjunto de m funciones

$f_j : G \to \mathbb{R} : x \rightsquigarrow \bar{x}_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Definición 2.1-1

La función $f : G \to F$ es *continua* en $x \in G$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $y \in G$ y $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Definición 2.1-2

Diremos que f es *continua en G* si es continua en todo punto de G.

Teorema 2.1-3

Sea $S \subset E$ un conjunto cerrado y acotado y $f: S \to \mathbb{R}$ continua en S, con $f(x) > 0$ para cada $x \in S$; entonces existe un $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$, para cada $x \in S$.

Demostración

Supongamos que la conclusión es falsa. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, existe un $x_n \in S$ tal que $f(x_n) < \frac{1}{n}$.

Como S es acotado, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en E; por 1.10-4 esta sucesión tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente o sea $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ existe y $x \in S$ puesto que S es cerrado.

Probaremos ahora que $f(x) = 0$, es decir que para todo $\varepsilon > 0$, $|f(x)| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$; existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|x - y| < \delta_1$ entonces $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $y \in S$, por ser f continua. Existe N, tal que si $k > N$, entonces $|x - x_{n_k}| < \delta_1$. Luego, si $k > N$, $|f(x)-f(x_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Existe M tal que $k > M \Longrightarrow \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $N_1 = \text{máx}\,\{N,M\}$, entonces $|f(x)|-|f(x_{n_k})| < |f(x)-f(x_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$|f(x)| < |f(x_{n_k})| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{n_k} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Luego $|f(x)| < \varepsilon$, de donde $|f(x)| = 0$, lo cual es una contradicción a la hipótesis.

Teorema 2.1-4

Si $\|\ \ \|$ es una norma en E y $|\ \ |$ es la norma euclídea, entonces existe $K > 0$ tal que $\|x\| \leq K|x|$ y $|x| \leq K\|x\|$ para todo $x \in E$.

Demostración

Sea $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Entonces

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\| \leq |x_1|\|e_1\| + \ldots + |x_n|\|e_n\|$$

$$\|x\| \leq |x|\|e_1\| + \ldots + |x|\|e_n\| \leq n|x| \max(\|e_i\|) = T|x|.$$

Por lo anterior $\|\ \ \| : E \to \mathbb{R}^+$ es una función real continua sobre el espacio euclídeo E ya que dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta \Longrightarrow |\,\|x\| - \|y\|\,| < \varepsilon$.

($|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\| \leq T|x - y| < \varepsilon$, entonces $|x - y| < \frac{\varepsilon}{T} = \delta$).

Sea $S = \{x : |x| = 1\}$, el cual es un conjunto cerrado y acotado (para la norma $|\ \ |$); $\|x\| > 0$ para todo $x \in S$, puesto que $x \in S \Longrightarrow |x| = 1 \Longrightarrow |x| > 0 \Longrightarrow x \neq \theta$; existe así un $\alpha > 0$ tal que $0 < \alpha < \|x\|$, para todo $x \in S$.

Si $x \in E$, $x \neq \theta$, $\frac{x}{|x|} \in S$

$$\alpha < \left\| \frac{x}{|x|} \right\| \Longrightarrow \alpha|x| < \|x\| \Longrightarrow |x| < \frac{1}{\alpha}\|x\| .$$

Luego $|x| \leq \frac{1}{\alpha}\|x\| = M\|x\|$.

Tomando $K = \text{máx}\{T, M\}$

$\|x\| \leq K|x|$ y $|x| \leq K\|x\|$.

Definición 2.1-5

Para todo $r > 0$, la bola $B(x,r)$ con la norma $\|\ \ \|$ es el conjunto

$$B(x,r) = \{y : \|x - y\| < r\}.$$

Teorema 2.1-6

Los conjuntos abiertos en E con respecto a la norma $\|\ \ \|$ son los mismos con respecto a la norma $|\ \ |$.

Demostración

Sea $G \subset E$ un conjunto abierto de acuerdo con la norma $|\ \ |$ y sea $x \in G$. Existe un $r > 0$ tal que $|y - x| < r$ implica que $y \in G$. Supongamos que $y \in E$ y $\|y - x\| < \frac{r}{K}$; entonces, por 2.1-4,

$$\frac{|y - x|}{K} \leq \|y - x\| < \frac{r}{K} ;$$

$$\frac{|y - x|}{K} < \frac{r}{K} \Longrightarrow |y - x| < r \Longrightarrow y \in G .$$

Por lo tanto G es abierto con la norma $\|\ \ \|$. De igual manera si

G es abierto para la norma $\|\quad\|$ lo será para la norma $|\quad|$.

Teorema 2.1-7

La continuidad de f en $x_o \in G$ ès independiente de las normas en E y F.

Demostración

Supongamos que f es continua con la norma $|\quad|$ en E y F; y sea $\|\quad\|$ otra norma en E y F. Entonces existen $K > 0$ y $K' > 0$ tales que para cada $x \in E$, $|x| \leq K\|x\|$ y para cada $\bar{x} \in F$, $\|\bar{x}\| \leq K'|\bar{x}|$.

Sea $\varepsilon > 0$. Existe un $\delta_1 > 0$ tal que $|x_o - y| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x_o) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{K'}$. Sea $\delta = \frac{\delta_1}{K}$; si $\|x_o - y\| < \delta$ se tiene $\|x_o - y\| < \frac{\delta_1}{K}$.

$|x_o - y| < K\|x_o - y\| < K\frac{\delta_1}{K} = \delta_1$ implica $|f(x_o) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{K'}$.

Entonces, $\|f(x_o) - f(y)\| < K'|f(x_o) - f(y)| < K'\frac{\varepsilon}{K'} = \varepsilon$

Luego f es continua con la norma $\|\quad\|$.

Teorema 2.1-8

La función $f : G \to F$ es continua en $x_o \in G$ si y sólo si para toda base $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m\}$ en F, las funciones reales asociadas $f_1, \ldots, f_m$ son contínuas.

Demostración

($\Longrightarrow$) Consideremos la norma euclídea $\| \ \|$ en F con la base ortonormal $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m\}$ y coordenadas $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$. Entonces para cada $\bar{x} = \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j \bar{e}_j$, tendremos $\|\bar{x}\| = \left(\sum_{j=1}^{m} |\bar{x}_j|^2 \right)^{1/2}$.

Sea $\varepsilon > 0$; existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x_o) - f(y)| = \left(\sum_{j=1}^{m} |f_j(x_o) - f_j(y)|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon,$$

siempre que $|x_o - y| < \delta$.

Para $j = 1, \ldots, m$.

$$|f_j(x_o)-f_j(y)| \leq |f(x_o)-f(y)| = \left(\sum_{j=1}^{m} |f_j(x_o)-f_j(y)|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$$

siempre que $|x_o - y| < \delta$.

Por lo tanto las funciones asociadas f_j son continuas, $j = 1, \ldots, m$.

($\Longleftarrow$) Si las f_j, $j = 1, \ldots, m$ son continuas y si tomamos $\varepsilon > 0$, existe $\delta_j > 0$ tal que $|f_j(x_o) - f_j(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ siempre que $|x_o - y| < \delta_j$; tomando $\delta = \min \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$,

$$|f(x_o-f(y)| = \left(\sum_{j=1}^{m} |f_j(x_o)-f_j(y)|^2 \right)^{1/2} < \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \right)^2 \right)^{1/2} = \varepsilon$$

siempre que $|x_o - y| < \delta$; es decir que f es continua.

Teorema 2.1-9

Sean E y F espacios vectoriales normados y $f : E \to F$ una aplicación lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i) f es continua en todo E

ii) f es continua en θ

iii) Existe un $K > 0$ tal que $\|f(x)\| < K\|x\|$, para todo $x \in E$.

Demostración

i) $\Longrightarrow$ ii). Es trivial.

ii) $\Longrightarrow$ iii). Supongamos que f es continua en θ; entonces $B = f^{-1}(B_F(f(\theta),1))$ es un abierto tal que $\theta \in B$. Luego existe un $r > 0$ tal que $B(\theta,r) \subset B$.

Sea $y \in E$, $y \neq \theta$ y $z = \frac{r}{2\|y\|}\cdot y$;

$$\|z\| = \left\|\frac{r}{2\|y\|}\cdot y\right\| = \frac{r}{2} < r \Longrightarrow \|f(z)\| < 1;$$

$$\|f(z)\| = \left\|f\left(\frac{r}{2\|y\|}\,y\right)\right\| = \frac{r}{2\|y\|}\|f(y)\| < 1;$$

entonces $\|f(y)\| < \frac{2}{r}\|y\|$, de donde el K que buscábamos es $\frac{2}{r}$.

iii) $\Longrightarrow$ i) Probaremos que f es continua en $x_o \in E$.

Sea $\varepsilon > 0$; buscamos un $\delta > 0$ tal que $\|x-x_o\| < \delta \Longrightarrow \|f(x)-f(x_o)\| < \varepsilon$.

$$\|f(x)-f(x_o)\| = \|f(x-x_o)\| \leq K\|x-x_o\| < \varepsilon$$

si $\|x - x_o\| < \frac{\varepsilon}{K}$; $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$.

Luego f es continua.

Teorema 2.1-10

Sean E y F espacios de dimensión finita. Entonces toda aplicación lineal de E en F es continua.

Demostración

Sea $g: E \to F$ una aplicación lineal. Para probar que g es continua, encontremos un $K > 0$ tal que $\|g(x)\| < K \|x\|$.

Sea $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$; se tiene entonces $g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(e_i)$ por ser g lineal; $\|g(x)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \|g(e_i)\|$.

Dado que $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$ define una norma en E, entonces $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| < M \|x\|$, por 2.1.4. Luego $\|g(x)\| < LM \|x\|$ donde $L = \text{máx} \|g(e_i)\|$, $i = 1,\ldots, n$, lo que implica la continuidad de g.

2.2 FUNCIONES DIFERENCIABLES

En esta sección trataremos siempre con E un n-espacio vectorial normado, F un m-espacio vectorial normado y G subconjunto abierto de E.

Definición 2.2-1

Una función $f : E \to F$ es llamada diferenciable en $x \in G$, si existe una función $\ell x \in L(E,F)$ tal que, para todo $y \in G$,

$$f(y) - f(x) = \ell x(y-x) + R(x,y)$$

donde $\lim\limits_{|y-x|\to 0} \dfrac{|R(x,y)|}{|y-x|} = 0.$

La función ℓx es llamada "la diferencial de f en x".

Denotaremos a la función ℓx como Df(x).

Observación 2.2-2

Es importante ver que la diferencial de f en un punto x es una función lineal de E en F; así, para todo y, z $\in$ E tendremos: $[Df(x)](y+z) = [Df(x)](y) + [Df(x)](z)$ y para todo y $\in$ E y a $\in \mathbb{R}$, tendremos: $[Df(x)](ay) = a\,[Df(x)](y)$.

Definición 2.2-3

Diremos que $f : G \to F$ es diferenciable en G si f es diferenciable en todo punto de G.

Observación 2.2-4

Si f es diferenciable en todo punto x $\in$ G, tendremos la función diferencial $Df: G \to \mathcal{L}(E,F)$, definida de tal manera que a todo elemento x $\in$ G le hace corresponder la diferencial de f en x.

Puesto que la diferencial de f en un punto x $\in$ G es una función lineal y se puede evaluar para todo y $\in$ E entonces $[Df(x)](y)$ es un elemento de F.

Proposición 2.2-5

Si f es diferenciable en x entonces para todo y $\in$ E

$$\left[Df(x)\right](y) = \lim_{a\to 0} \frac{f(x+ay) - f(x)}{a}$$

Demostración

Dado que f es diferenciable en x

$f(y) - f(x) = \left[Df(x)\right](y-x) + R(x,y)$, para todo $y \in G$; donde

$$\lim_{|y-x|\to 0} \frac{|R(x,y)|}{|y-x|} = 0.$$

Dado que existe $b > 0$, tal que $x + ay \in G$, para todo $|a| < b$

entonces $\dfrac{f(x+ay) - f(x)}{a} = \dfrac{1}{a}\left\{\left[Df(x)\right](x+ay-x) + R(x,x+ay)\right\}$

$$= \frac{1}{a}\left[Df(x)\right](ay) + \frac{1}{a}R(x,x+ay)$$

$= \left[Df(x)\right](y) + \dfrac{1}{a}R(x,x+ay)$, por ser $Df(x)$ un elemento de $L(E,F)$, de donde, si $|a| < b$,

$$\left[Df(x)\right](y) = \frac{f(x+ay) - f(x)}{a} - \frac{1}{a}R(x,x+ay); \qquad (1)$$

pero $\dfrac{|R(x,x+ay|}{|a|} = \dfrac{|y|\,|R(x,x+ay)|}{|y|\,|a|} = \dfrac{|y|\,|R(x,x+ay)|}{|ay|}$.

Siendo $\displaystyle\lim_{|ay|\to 0} \frac{|R(x,x+ay|}{|ay|} = 0$ entonces $\displaystyle\lim_{|ay|\to 0} \frac{|y|\,|R(x,x+ay)|}{|ay|} = 0$,

luego $\displaystyle\lim_{|a|\to 0} \frac{|R(x,x+ay)|}{|a|} = 0$, por consiguiente $\displaystyle\lim_{a\to 0} \frac{R(x,x+ay)}{a} = 0.$

Así, aplicando límite en la igualdad (1), tendremos:

$$\lim_{a\to 0} [Df(x)](y) = \lim_{a\to 0} \frac{f(x+ay)-f(x)}{a} - \lim_{a\to 0} \frac{R(x,x+ay)}{a};$$

entonces $[Df(x)](y) = \lim_{a\to 0} \frac{f(x+ay)-f(x)}{a}$, ya que $\lim_{a\to 0} \frac{R(x,x+ay)}{a} = 0$.

Definición 2.2-6

Sea $\{e_1,\ldots, e_n\}$ una base de E, y sea $(x_1,\ldots, x_n)$ el correspondiente sistema de coordenadas. La evaluación de $Df(x)$ en el vector e_i de la base es llamada la derivada parcial de f con respecto a x_i, y es designada por $[Df(x)](e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Por la proposición 2.2-5, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{a\to 0} \frac{f(x+ae_i)-f(x)}{a}$.

Observación 2.2-7

Si $\lim_{a\to 0} \frac{f(x+ae_i) - f(x)}{a}$ existe, diremos que la derivada parcial de f con respecto a x_i existe en x. Así, la definición 2.2-6 nos dice que si f es diferenciable, sus derivadas parciales existen y están dadas por la evaluación de $Df(x)$ en los vectores de la base.

Proposición 2.2-8

Si f es diferenciable en x, entonces la función $Df(x)$ es única.

Demostración

Supongamos que ℓ y m son diferenciales de f en x; entonces:

$$f(y) - f(x) = \ell(y-x) + R(x,y)$$

$$f(y) - f(x) = m(y-x) + S(x,y),$$

donde $\displaystyle \lim_{|y-x|\to 0} \frac{|R(x,y)|}{|y-x|} = \lim_{|y-x|\to 0} \frac{|S(x,y)|}{|y-x|} = 0.$

Supongamos $m \neq \ell$; entonces existe un $z \in E$ tal que $m(z) \neq \ell(z)$; por tanto $m(z) - \ell(z) \neq \theta$, es decir $(m-\ell)(z) \neq \theta$.

Luego $\displaystyle \lim_{a\to 0} \frac{|(m-\ell)(az)|}{|az|} = \lim_{a\to 0} \frac{|a(m-\ell)(z)|}{|a||z|}$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{|a||(m-\ell)(z)|}{|a||z|}$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{|(m-\ell)(z)|}{|z|}$$

$$= \frac{|(m-\ell)(z)|}{|z|} \neq 0,$$

es decir: $\displaystyle \lim_{a\to 0} \frac{|(m-\ell)(az)|}{|az|} \neq 0.$

Sin embargo; por proposición 1.7-6, para todo a, con $|a| \leq K$

$$m(az)-\ell(az) = f(x+az) - f(x) - S(x,x+az) - (f(x+az) - f(x) - R(x,x+az)),$$

$$m(az) - \ell(az) = R(x,x+az) - S(x,x+az).$$

Así:

$$\lim_{a\to 0} \frac{|(m-\ell)(az)|}{|az|} = \lim_{a\to 0} \frac{|R(x,x+az) - S(x,x+az)|}{|az|}$$

$$\leq \lim_{a\to 0} \frac{|R(x,x+az)|}{|az|} + \lim_{a\to 0} \frac{|S(x,x+az|}{|az|} ;$$

pero $\lim_{a\to 0} \frac{|R(x,x+az)|}{|az|} = \lim_{a\to 0} \frac{|S(x,x+az)|}{|az|} = 0$;

por tanto $\lim_{a\to 0} \frac{|(m-\ell)(az)|}{|az|} = 0$; lo cual contradice el hecho de que este límite sea diferente de cero; así $\ell = m$.

Proposición 2.2-9 (Diferenciabilidad implica continuidad).

Sea $G \subset E$ un abierto. Si $f : G \to F$ es diferenciable en $x \in G$, entonces f es continua en x.

Demostración

Dado que f es diferenciable en el punto $x \in G$, entonces para todo $y \in G$

$$f(y) - f(x) = \ell x(y-x) + R(x,y) ,$$

donde $\lim_{|y-x|\to 0} \frac{|R(x,y)|}{|y-x|} = 0$, es decir $\lim_{|y-x|\to 0} \frac{|f(y) - f(x) - \ell x(y-x)|}{|y - x|} = 0.$

Sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta_1 > 0$ tal que

$|f(y) - f(x) - \ell x(y-x)| < \epsilon\ |y-x|$ siempre que $|y-x| < \delta_1$, así:

$|f(y)-f(x)| - |\ell x(y-x)| \leq |f(x) - f(x) - \ell x(y-x)| < \epsilon\ |y-x|$

siempre que $|y - x| < \delta_1$. Entonces

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon\ |y - x| + |\ell x(y - x)|\ ,$$

donde $|y - x| < \delta_1$; dado que $\ell x \in L(E,F)$, por proposición 2.1-10 es continua; luego por proposición 2.1-9, existe $K > 0$ tal que $|\ell x(y - x)| \leq K|y - x|$. Así:

$|f(y)-f(x)| < \epsilon\ |y-x| + K|y - x| = (\varepsilon + K)\ |y - x|$, siempre que $|y - x| < \delta_1$. Tomando $\delta = \min\ \{\delta_1, \frac{\varepsilon}{\varepsilon+K}\}$ se tendrá $|f(y) - f(x)| < (\varepsilon + K)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+K}\right) = \varepsilon$, siempre que $|y - x| < \delta$. Luego f es continua en x.

Observación 2.2-10

El recíproco del teorema anterior es falso; por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ y sin embargo no es diferenciable en $x = 0$.

Proposición 2.2-11

Sean E y F espacios normados, y sean $|\ \ |_E$ y $|\ \ |_F$, $\|\ \ \|_E$ y $\|\ \ \|_F$ normas respectivamente equivalentes. Si $f: G \to F$ es diferenciable en x con respecto a las normas $|\ \ |_E$ y $|\ \ |_F$ también lo es respecto a las normas $\|\ \ \|_E$ y $\|\ \ \|_F$ y su derivada es la misma.

Demostración

Por hipótesis f es diferenciable en x respecto a las nor mas $|\ \ |_E$ y $|\ \ |_F$; así existe $\ell x \in L(E,F)$ tal que para todo $y \in G$

$$f(y) - f(x) = \ell x(y-x) + R(x,y)$$

donde $\lim\limits_{|y-x|\to 0} \dfrac{|R(x,y)|_F}{|y-x|_E} = 0$, es decir

$\lim\limits_{|y-x|\to 0} \dfrac{|f(y) - f(x) - \ell x(y-x)|_F}{|y-x|_E} = 0.$ Demostraremos que

$$\lim_{\|y-x\|\to 0} \frac{\|f(y) - f(x) - \ell x(y-x)\|_F}{\|y-x\|_E} = 0.$$

Dado que $|\ \ |_E$ y $\|\ \ \|_E$ son normas equivalentes existen m y m' tales que

$$m' \leq \frac{\|z\|_E}{|z|_E} \leq m \quad \text{con } m', m > 0 \text{ y } z \neq 0$$

Similarmente existen $M > 0$ y $M' > 0$ tales que

$M' \leq \dfrac{\|z\|_F}{|z|_F} \leq M.$ Así tendremos:

$$\frac{|f(y) - f(x) - \ell x(y-x)|_F}{|y-x|_E} \geq \frac{\dfrac{\|f(y) - f(x) - \ell x(y-x)\|_F}{M}}{\dfrac{\|y-x\|_E}{m'}}$$

$$\geq \frac{m' \|f(y) - f(x) - \ell x(y-x)\|_F}{M \|y-x\|_E},$$

es decir:

$$\left(\frac{m'}{M}\right) \frac{\|f(y) - f(x) - \ell x(y-x)\|_F}{\|y-x\|_E} \le \frac{|f(y) - f(x) - \ell x(y-x)|_F}{|y-x|_E} \;;$$

aplicando límite:

$$\left(\frac{m'}{M}\right) \lim_{\|y-x\|\to 0} \frac{\|f(y) - f(x) - \ell x(y-x)\|_F}{\|y - x\|_E} \le \lim_{|y-x|\to 0} \frac{|f(y)-f(x)-\ell x(y-x)|}{|y - x|_E}$$

$$= 0.$$

Luego $\displaystyle \lim_{\|y-x\|\to 0} \frac{\|f(y) - f(x) - \ell x(y-x)\|}{\|y - x\|} = 0$.

Por consiguiente, para todo $y \in G$ se tiene $f(y) - f(x) = \ell x(y-x) + R(x,y)$,

donde $\displaystyle \lim_{\|y-x\|\to 0} \frac{\|R(x,y)\|_F}{\|y-x\|_E} = 0$,

y f es entonces diferenciable respecto a las nuevas normas y su derivada es la misma.

2.3 CASOS ESPECIALES

Consideremos ahora algunos casos especiales.

Ejemplo 2.3-1

Sean $E = F = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable en x.

La derivada de f en x es entonces una función lineal

$$\ell x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ tal que para } y \neq x$$

$f(y) - f(x) = \ell x(y - x) + R(x,y)$ donde

$$\lim_{|y-x|\to 0} \frac{|R(x,y)|}{|y-x|} = 0$$

Los vectores en $\mathbb{R}$ pueden ser identificados con los números reales; es entonces fácil de comprobar que la derivada de f en x, evaluada en el vector 1, es simplemente la derivada usual $f'(x)$ de f en x. En efecto:

$f(y) - f(x) = \ell x(y-x) + R(x,y)$; haciendo $y = x + h$:

$f(x+h) - f(x) = \ell x(h) + R(x,x+h)$; dividiendo todo por h,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\ell x(h) + R(x,x+h)\right]$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \ell x\left(\frac{1}{h}\cdot h\right) + \frac{R(x,x+h)}{h}$$

y aplicando límite, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \ell x(1)$,

es decir $\quad f'(x) = \ell x(1)$.

Ejemplo 2.3-2

Sean E un espacio n-dimensional, $F = \mathbb{R}$, $\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base en E y $\{e_1^*,\ldots, e_n^*\}$ la base dual en $E^* = L(E,\mathbb{R})$.

Recordemos que para cada $i = 1,\ldots, n$, $e_i^* \in E^*$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

Sean $G \subset E$ abierto, $f : G \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x \in G$ y $\ell x \in E^*$ la derivada de f en x.

Puesto que $\ell x \in E^*$ puede ser expresada como:

$$\ell x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^* \ ;$$

$$f(y) - f(x) = \ell x(y - x) + R(x,y)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*(y-x) + R(x,y)$$

donde $\displaystyle \lim_{|y-x|\to 0} \frac{|R(x,y)|}{|y-x|} = 0$;

fijemos $j = 1,\ldots, n$ y sea $y = x + ce_j$.

Entonces

$$f(x + ce_j) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*(ce_j) + R(x,x+ce_j)$$

$$= c\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*(e_j) + R(x,x+ce_j)$$

$$= ca_j + R(x,x + ce_j) \ ;$$

ya que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$;

dividiendo todo por c:

$$\frac{f(x + ce_j) - f(x)}{c} = a_j + \frac{R(x + ce_j)}{c}$$

Como $\lim\limits_{c\to 0} \dfrac{|R(x,x+ce_j)|}{|ce_j|} = \lim\limits_{c\to 0} \dfrac{|R(x,x+ce_j)|}{|c|} = 0$, entonces

$$\lim_{c\to 0} \frac{f(x+ce_j) - f(x)}{c} = a_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) .$$

Por lo tanto, la derivada de f en x es

$$Df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, e_i^*$$

ó también $Df(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} (Df(x))(e_i).e_i^*$

Ejemplo 2.3-3

Sea E un espacio n-dimensional y F, m-dimensional; $\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base de E y $\{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_m\}$ una base de F. Sean $G \subset E$ un abierto, $f: G \to F$ diferenciable en $x \in G$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$; $f_1, f_2, \ldots, f_m$ las funciones coordenadas de f.

Demostrar que f es diferenciable en x si y sólo si las funciones $f_j: G \to \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots, m$ son diferenciables en x. Además las derivadas en x de las funciones f_i son las funciones coordenadas de la derivada de f en x, es decir $Df_1(x)$, $Df_2(x),\ldots, Df_m(x)$ son las coordenadas de $Df(x)$.

Demostración

(⟹) Puesto que f es diferenciable en x,

$f(y) - f(x) = \ell(y-x) + R(x,y)$, $\ell \in L(E,F)$ con $\lim\limits_{|y-x|\to 0} \dfrac{|R(x,y)|}{|y-x|} = 0$

Si las correspondientes coordenadas de ℓ son $\ell_1,\dots,\ell_m$, con $\ell_i \in E^*$, entonces $f_i(y) - f_i(x) = \ell_i(y-x) + R_i(x,y)$, $i = 1,\dots, m$.

Definamos para $\overline{x} \in F$, $\overline{x} = \sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i\overline{e}_i$ la norma $\|\overline{x}\| = \|\sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i\overline{e}_i\| = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$ $(*)$

Entonces para cada i, $|R_i(x,y)| \leq \|R(x,y)\| \leq K|R(x,y)|$.

Luego $\displaystyle\lim_{|y-x|\to 0} \frac{|R_i(x,y)|}{|y-x|} = 0.$

Por lo tanto cada f_i es diferenciable en x y su derivada es ℓ_i, $i=1,\dots,m$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que cada f_i, $i = 1,\dots, m$ es diferenciable en x y su derivada es ℓ_i; entonces

$$f_i(y) - f_i(x) = \ell_i(y-x) + R_i(x,y), \quad i = 1,\dots, m, \quad \text{donde } \ell_i \in E^* \text{ y}$$

$$\lim_{|y-x|\to 0} \frac{|R_i(x,y)|}{|y-x|} = 0 .$$

Sea $\ell : E \to F : y \rightsquigarrow \ell(y)$, con $\ell(y) = \ell_1(y)\overline{e}_1 + \dots + \ell_m(y)\overline{e}_m$ y $R(x,y) = f(y) - f(x) - \ell(y-x)$; es lineal por 1.4-10. Falta demostrar que

$$\lim_{|y-x|\to 0} \frac{\|R(x,y)\|}{|y-x|} = 0.$$

Usando la norma definida en $(*)$

$$\|R(x,y)\| = \sum_{i=1}^{m} |R_i(x,y)|$$

$$\frac{\|R(x,y)\|}{|y-x|} = \frac{\sum_{i=1}^{m} |R_i(x,y)|}{|y-x|}$$

$$\lim_{|y-x|\to 0} \frac{\|R(x,y)\|}{|y-x|} = \lim_{|y-x|\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{m} |R_i(x,y)|}{|y-x|}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lim_{|y-x|\to 0} \frac{|R_i(x,y)|}{|y-x|} = 0.$$

Luego $\lim_{|y-x|\to 0} \frac{\|R(x,y)\|}{|y-x|} = 0.$

Por lo tanto f es diferenciable en x y su derivada es ℓ.

Proposición 2.3-4

Sea $f : G \to F$, diferenciable en G y sean $f_j : G \to \mathbb{R}$, sus funciones coordenadas, $j = 1,\dots, m$. Sea $\{e_{ij} \,/\, 1 \le i \le n;\ 1 \le j \le m\}$ base de $L(E,F)$, donde e_{ij} es la función que satisface:

$$e_{ij}(e_k) = \begin{cases} \bar{e}_j \ ; & \text{cuando } i = k \\ \theta \ ; & \text{cuando } i \neq k \end{cases}$$

Entonces las funciones coordenadas de Df, respecto a la base de $L(E,F)$, son las nm derivadas parciales $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

Demostración

Por ejemplo 2.3-3

$$[Df(x)](z) = \sum_{j=1}^{m} [Df_j(x)](z)\overline{e}_j, \text{ para todo } z \in E.$$

Sea $z = e_i$, para $i = 1,\ldots, n$; entonces

$$[Df(x)](e_i) = \sum_{j=1}^{m} [Df_j(x)](e_i)\overline{e}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} [Df_j(x)](e_i)e_{ij}(e_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).e_{ij}\ (e_i); \text{ por definición 2.2-6.}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left\{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)e_{ij}\right\}(e_i)\ ;\ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$$

$$= \left\{\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)e_{ij}\right\}(e_i).$$

Tomemos $z = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$; entonces

$$[Df(x)]\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = [Df(x)](a_1e_1) + \ldots + [Df(x)](a_ne_n)$$

$$= \left\{\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x)e_{1j}\right\}(a_1e_1) + \ldots + \left\{\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x)e_{nj}\right\}(a_ne_n)$$

$$= \left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x)e_{1j}\right\}\left(\sum_{i=1}^{n} a_ie_i\right)+\ldots+\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x)e_{nj}\right\}\left(\sum_{i=1}^{n} a_ie_i\right)$$

ya que $e_{ij}(e_k) = 0$ si $i \neq K$; así

$$[Df(x)]\left(\sum_{i=1}^{n} a_ie_i\right) = \left\{\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x)e_{1j}+\ldots+\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x)e_{nj}\right\}\left(\sum_{i=1}^{n} a_ie_i\right)$$

$$[Df(x)]\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \left\{\sum_{\substack{i\leq n\\ j\leq m}} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) e_{ij}\right\}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) .$$

Luego $Df(x) = \sum_{\substack{i\leq n\\ j\leq m}} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) e_{ij}$.

Definición 2.3-5

Así como se definió en 1.4-12 la matriz asociada a f con $f \in L(E,F)$ podemos hacerlo con $Df(x)$, así:

$$Df(x)(e_1) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x)\bar{e}_j$$

$$Df(x)(e_2) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_2}(x)\bar{e}_j$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$Df(x)(e_n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x)e_j$$

La matriz

$$M(Df) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

es llamada la matriz jacobiana de la función f en x.

2.4 FUNCIONES DE CLASE C^1.

Observación 2.4-1

Si f es diferenciable en $x \in G$, entonces

$\lim_{a\to 0} \frac{f(x+ae_i) - f(x)}{a}$, $i = 1,\ldots, n$ existe; es decir la derivada parcial de f con respecto a x_i existe en x. Pero es posible que

$\lim_{a\to 0} \frac{f(x+ae_i) - f(x)}{a}$, $i = 1,\ldots, n$ exista sin que f sea diferenciable.

Ejemplo 2.4-2

Sea $E = \mathbb{R}^2$ un espacio de dimensión 2 con una base ortonormal $\{e_1,e_2\}$ y las correspondientes coordenadas x,y. Sea $F = \mathbb{R}$ y sea f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Demostrar que las derivadas parciales de $f(x,y)$ existen en el punto $(0,0)$, sin que f sea diferenciable en $(0,0)$.

En efecto, en cada punto de la recta $y = x$ (excepto en el origen) la función tiene el valor constante $\frac{1}{2}$, ya que $f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. Así, f no es continua en $(0,0)$, puesto que si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{4}$, para todo $\delta > 0$, escogiendo $x \in \mathbb{R}$ de tal manera que $0 < x < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$; entonces el punto (x,x)

cumple $\|(x,x) - (0,0)\| < \delta$ y $|f(x,x) - f(0,0)| > \varepsilon$; en efecto:

$$0 < x < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \Longrightarrow x^2 < \frac{\delta^2}{2}$$

$$\Longrightarrow 2x^2 < \delta^2$$

$$\Longrightarrow \sqrt{x^2 + x^2} < \delta$$

$$\Longrightarrow \|(x,x)\| < \delta$$

y $|f(x,x) - f(0,0)| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$; por consiguiente f no es continua en (0,0) y la proposición 2.2-9 nos dice que f no es diferenciable en (0,0). Sin embargo, sea $x = (0,0)$ y $\|e_2\| = 1$. Entonces

$f(x + ae_2) = f(0,a)$; para todo $a \neq 0$

y $$\lim_{a\to 0} \frac{f(x+ae_2) - f(x)}{a} = \lim_{a\to 0} \frac{f(0,a) - f(0,0)}{a} = \lim_{a\to 0} \frac{0}{a} = 0.$$

Luego la derivada parcial de f en el punto (0,0) en la dirección e_2 es 0. De la misma manera la derivada parcial de f en el punto (0,0) en la dirección e_1 es 0.

Definición 2.4-3

$f : G \to F$ es una aplicación de clase C^1 o continuamente diferenciable en G, si:

1) f es diferenciable en todo punto de G

2) Df es continua.

Proposición 2.4-4

Si E es un n-espacio vectorial, $G \subset E$ un abierto y

$f : G \to \mathbb{R}$ posee derivadas parciales continuas en G con respecto a las coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ de una base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en E, entonces f es de clase C^1.

Demostración

Para facilidad, un elemento $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in E$ será denotado por $(a_1, \ldots, a_n)$

Sea $x_o \in G$ y sea $\varepsilon > 0$. Dado que las derivadas parciales son continuas, para $1 \leq i \leq n$ existen $r_i > 0$ tales que si $y \in G$ y $|x_o - y| < r_i$; para $i = 1, \ldots, n$ entonces

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right| < \frac{\varepsilon}{n}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Tomando $r = \min\{r_i ; i = 1, 2, \ldots n\}$, entonces $r > 0$ es tal que si $y \in B(x_o, r)$ entonces

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right| < \frac{\varepsilon}{n}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Sea $y \in B(x_o, r)$; entonces los puntos

$$x_o = x^0 = (x_1, \ldots, x_n)$$

$$x^1 = (y_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$x^2 = (y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$y = x^n = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pertenecen a $B(x_o, r)$ puesto que

$$|x_o - x| < r$$

$$|x_o - x^1| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^1)^2 \right\}^{1/2}$$

$$= ((x_1 - y_1)^2)^{1/2}$$

$$\leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2} = |x_o - y| < r$$

$$|x_o - x^2| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^2)^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}$$

$$\leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2} = |x_o - y| < r$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$|x_o - y^n| = |x_o - y| < r$$

Entonces $f(y) - f(x_o) = f(x^n) - f(x^\circ) = \sum_{i=1}^{n} (f(x^i) - f(x^{i-1}))$

Para cada $i = 1, \ldots, n$, definamos la función $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$g_i(x) = f(y_1, \ldots, y_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$; veamos si

$$g_i'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i} (y_1, \ldots, y_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

$$g_i'(x) = \lim_{a \to 0} \frac{g_i(x+a) - g_i(x)}{a}$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{f(y_1, \ldots, y_{i-1}, x + a, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(y_1, \ldots, y_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{a}$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{f((y_1, \ldots, y_{i-1}, x, x_{i+1} \ldots, x_n) + ae_i) - f(y_1, \ldots, y_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{a}$$

$g_i'(x) = [Df(y_1,\ldots,y_{i-1},x,x_{i+1},\ldots,x_n)](e_i)$, (proposición 2.2-5).

$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(y_1,\ldots,y_{i-1},x,x_{i+1},\ldots,x_n)$, (Definición 2.2-6).

Luego $g_i'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(y_1,\ldots,y_{i-1},x,x_{i+1},\ldots,x_n)$.

Por teorema del valor medio para funciones de una variable tendremos que existe z_i, con

$y_i \leq z_i \leq x_i$ tal que

$$z_i = \lambda_i y_i + (1-\lambda_i)x_i \ ; \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1$$

y $g_i(y_i) - g_i(x_i) = (y_i - x_i)\, g_i'(z_i)$

Pero $g_i(y_i) - g_i(x_i) = f(y_1,\ldots,y_{i-1},y_i,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(y_1,\ldots,y_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$

$= f(x^i) - f(x^{i-1})$.

Además $g_i'(z_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(y_1,\ldots,y_{i-1},z_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$

donde $(y_1,\ldots,y_{i-1},z_i,x_{i+1},\ldots,x_n) = (y_1,\ldots,y_{i-1},\lambda_i y_i+(1-\lambda_i)x_i,y_{i+1},\ldots,x_n)$

$= (y_1,\ldots,y_{i-1},\lambda_i(y_i-x_i)+x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$

$= (0,\ldots,0,\lambda_i(y_i-x_i),0,\ldots,0) + (y_1,\ldots,y_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$

$= \lambda_i(0,\ldots,0,y_i-x_i,0,\ldots,0) + (y_1,\ldots,y_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$

$(y_1,\ldots,y_{i-1},z_i,x_{i+1},\ldots,x_n) =$

$=\lambda_i[(y_1,\ldots,y_i,x_{i+1}\ldots,x_n)-(y_1,\ldots,y_{i-1},x_i,\ldots,x_n)]+(y_1,\ldots,y_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$

$=\lambda_i(y_1,\ldots,y_i,x_{i+1},\ldots,x_n)-\lambda_i(y_1,\ldots y_{i-1},x_i,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$

$=\lambda_i(y_1,\ldots,y_i,x_{i+1},\ldots,x_n) + (1-\lambda_i)(y_1,\ldots y_{i-1},x_i,\ldots,x_n)$

$= \lambda_i x^i + (1 - \lambda_i)x^{i-1}$

denotando $\lambda_i x^i + (1 - \lambda_i)x^{i-1}$ por y^i, $i = 1,\ldots, n$ tendremos que

$(y_1,\ldots,y_{i-1},z_i,x_{i+1},\ldots,x_n) = y^i$

Así $g'(z_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(y^i)$

y $f(x^i) - f(x^{i-1}) = (y_i - x_i)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(y^i))$

Dado que $f(y) - f(x_o) = \sum_{i=1}^{n} (f(x^i) - f(x^{i-1}))$

entonces $f(y) - f(x_o) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(y^i)$.

Verifiquemos si $y^i \in B(x,r)$, para todo $r = 1,\ldots, n$.

$|x_o-y^i| = |x_o-(y_1,\ldots,y_{i-1},\lambda_i(y_i-x_i) + x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)|$

$= |(x_1-y_1,\ldots,x_{i-1}-y_{i-1},\lambda_i(y_i-x_i),0,\ldots,0)|$

$= ((x_1-y_1)^2+\ldots+(x_{i-1}-y_{i-1})^2+\lambda_i^2(y_i-x_i)^2)^{1/2}$

$\leq ((x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_{i-1}-y_{i-1})^2 + (y_i-x_i)^2)^{1/2};\ 0 \leq \lambda_i \leq 1$

$$|x_o - y^i| \leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2} \leq |x_o - y| < r$$

Así $|x_o - y^i| < r$ y $y^i \in B(x_o, r)$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Sabemos que $f(y) - f(x_o) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(y^i)$. Si definimos

$R(x_o, y) = f(y) - f(x_o) - \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o)$ entonces

$$|R(x_o,y)| = \left| \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(y^i) - \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(y^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) \right] \right|$$

$$\leq |y_1 - x_1| \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(y^1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right| + \ldots + |y_n - x_n| \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(y^n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right|$$

$$\leq |y_1 - x_1| \frac{\varepsilon}{n} + \ldots + |y_n - x_n| \frac{\varepsilon}{n}$$

$\leq |y - x_o| \frac{\varepsilon}{n} + \ldots + |y - x_o| \frac{\varepsilon}{n}$; ($|y - x_o|$ es la norma euclideana);

entonces $|R(x_o,y)| < \epsilon \, |y - x_o|$, siempre que $|y - x_o| < r$, con $r = \min \{r_i ; \; i = 1, \ldots, n\}$.

Luego $\lim\limits_{|y-x_o| \to 0} \frac{|R(x_o,y)|}{|y-x_o|} = 0$.

Definamos $\ell x_o : G \to \mathbb{R}$ de tal manera que $\ell x_o(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o).z_i$, entonces

$\ell x_o(y - x_o) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o)(y_i - x_i)$, es decir que

$$f(y) - f(x_o) = \ell x_o(y - x_o) + R(x_o, y)$$

donde $\lim\limits_{|y-x_o|\to 0} \dfrac{|R(x_o,y)|}{|y-x_o|} = 0.$ Luego f es diferenciable en x_o; su diferencial es ℓx_o.

Como $\{e_1^*,\ldots, e_n^*\}$ es la base de E^* y $e_i^*(y-x_o) = y_i-x_i$, para $i = 1,\ldots,n$

entonces $\ell x_o(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_o)e_i^*(z)$, de donde

$$\ell x_o = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o)e_i^*$$

y la diferencial de f en x_o viene dada por $Df(x_o) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)e_i^*$

Esta expresión muestra que las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ son las funciones coordenadas correspondientes a la función diferencial Df. Entonces

$$|Df(x_o) - Df(y)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o)e_i^* - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)e_i^*\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right]e_i^*\right|$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right| < n.\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Así; $|Df(x_o) - Df(y)| < \varepsilon$ siempre que $|x_o - y| < r$ e $y \in G$, con $r = \min\{r_i;\ i = 1,\ldots,n\}$; es decir la función $Df : G \to E^*$ es continua.

Observación 2.4-5

El recíproco de la proposición anterior se da así, si la función $f : G \to \mathbb{R}$ es diferenciable en G y su función diferencial $Df : G \to E^*$ es continua entonces las derivadas parciales existen por proposición 2.2-5 y además son continuas puesto que si Df es continua en G, tomando $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ e $y \in G$ entonces $|Df(x) - Df(y)| < \varepsilon$, y dado que $f : G \to \mathbb{R}$ es diferenciable, por caso especial 2.3-2

$$Df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)e_i^* \quad y \quad Df(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)e_i^* \ ;$$

Así: $$|Df(x) - Df(y)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)e_i^* - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)e_i^*\right|$$
$$= \left|\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right) e_i^*\right|$$
$$= \left\{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right]^2\right\}^{1/2}$$

pero para todo $i = 1,\ldots, n$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right| \leq \left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right]^2\right\}^{1/2} \ ;$$

entonces $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right| \leq \left|Df(x) - Df(y)\right| < \varepsilon$.

Luego $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right| < \varepsilon$, para todo $i = 1,\ldots,n$ siempre que $|x - y| < \delta$.

Por consiguiente las derivadas parciales son continuas.

Proposición 2.4-6

Sean E y F espacios de dimensiones n y m respectivamente, $f : G \to F$ tal que las derivadas parciales de las funciones coordenadas de f respecto a una base ortonormal $\{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_m\}$ existen y son continuas. Entonces f es continuamente diferenciable.

Demostración

Sean $f_j : G \to \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots, m$, las funciones coordenadas de f, las cuales poseen derivadas parciales continuas; por proposición 2.4-4, para todo $j = 1,\ldots, m$, f_j es de clase C^1; por tanto para todo $j = 1,\ldots, m$ f_j es diferenciable; entonces, si $x \in G$ existe $\ell_j x \in E^*$ tal que, para todo $y \in G$,

$$f_j(y) - f_j(x) = \ell_j\, x(y-x) + R_j(x,y)$$

donde $\lim\limits_{|y-x|\to 0} \frac{|R_j(x,y)|}{|y-x|} = 0$ y además la función $Df_j : G \to E^* : x \rightsquigarrow \ell_j x$ es continua en G.

Definamos la función $\ell x : E \to F : z \rightsquigarrow \ell x(z)$ donde

$$\ell x(z) = \ell_1\, x(z)\bar{e}_1 + \ldots + \ell_m\, x(z)\bar{e}_m$$

Así: $\ell x(y-x) = \ell_1\, x(y-x)\bar{e}_1 + \ldots + \ell_m\, x(y-x)\bar{e}_m$

Como $R_j(x,y) \in \mathbb{R}$ podemos definir $R(x,y) = R_1(x,y)\bar{e}_1 + \ldots + R_m(x,y)\bar{e}_m$.

Además $f(y) = f_1(y)\bar{e}_1 + \ldots + f_m(y)\bar{e}_m$ y

$$f(x) = f_1(x)\bar{e}_1 + \ldots + f_m(x)\bar{e}_m$$

Así tendremos:

$$
\begin{aligned}
f(y) - f(x) &= \sum_{j=1}^{m} f_j(y)\bar{e}_j + \sum_{j=1}^{m} f_j(x)\bar{e}_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} (f_j(y) - f_j(x))\bar{e}_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} (\ell_j\, x(y-x) + R_j(x,y))\bar{e}_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \ell_j\, x(y-x)\bar{e}_j + \sum_{j=1}^{m} R_j(x,y)\bar{e}_j \\
&= \ell x(y-x) + R(x,y)
\end{aligned}
$$

Por tanto $f(y) - f(x) = \ell x(y-x) + R(x,y)$.

Probemos que $\displaystyle \lim_{|y-x|\to 0} \frac{\|R(x,y)\|}{|y-x|} = 0$.

Si tomamos $\varepsilon > 0$, dado que $\displaystyle \lim_{|y-x|\to 0} \frac{|R_j(x,y)|}{|y-x|} = 0$

entonces $|R_j(x,y)| \leq \frac{\varepsilon}{m}\, |y-x|$ siempre que $|y-x| < \delta_j$; con $\delta_j > 0$, para todo $j = 1, \ldots, m$.

Luego $\|R(x,y)\| = \|R_1(x,y)\bar{e}_1 + \ldots + R_m(x,y)\bar{e}_m\|$

$$\|R(x,y)\| \leq |R_1(x,y)|\,\|\overline{e}_1\| + \ldots + |R_m(x,y)|\,\|\overline{e}_m\|$$

$$\leq |R_1(x,y)| + \ldots + |R_m(x,y)| \; ; \; \|\overline{e}_j\| = 1$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{m}|y-x| + \ldots + \frac{\varepsilon}{m}|y-x|$$

$$\leq \varepsilon|y-x|.$$

Así: $\|R(x,y)\| \leq \varepsilon\,|y-x|$, donde $|y-x| < \delta$, tomando $\delta = \min\{\delta_j,\ j=1,\ldots,m\}$; luego f es diferenciable en x.

Observemos que la convergencia a cero es independiente de las normas aplicando proposición 2.2-11.

Demostremos ahora que Df es continua en G.

Sea $\varepsilon > 0$; dado que Df_j es continua, entonces existe

$\delta_j > 0$, con $j = 1,\ldots, m$, tal que

$|Df_j(x) - Df_j(y)| < \frac{\varepsilon}{m}$ siempre que $|x-y| < \delta_j$, de donde

$|Df_j(x) - Df_j(y)|\,|z| < \frac{\varepsilon}{m}$, tomando $|z| = 1$.

Así, $\sum_{j=1}^{m} |(Df_j(x) - Df_j(y))(z)| < \varepsilon$, $|z| = 1$, entonces

$$\sum_{j=1}^{m} \left|[Df_j(x)](z) - [Df_j)y)](z)\right| < \varepsilon \;, \quad |z| = 1$$

Pero, $\left|\sum_{j=1}^{m} ([Df_j(x)](z) - [Df_j(y)](z))\overline{e}_j\right| \leq \sum_{j=1}^{m} \left|[Df_j(x)](z) - [Df_j(y)](z)\right|$

Asi, $\left|\sum_{j=1}^{m} \left\{[Df_j(x)](z) - \sum_{j=1}^{m} [Df_j(y)](z)\right\}\overline{e}_j\right| < \varepsilon$, $|z| = 1$,

$$\left| \sum_{j=1}^{m} [Df_j(x)](z)\overline{e}_j - \sum_{j=1}^{m} [Df_j(y)](z)\overline{e}_j \right| < \varepsilon, \ |z| = 1 \ ;$$

entonces $\left| [Df(x)](z) - [Df(y)](z) \right| < \varepsilon$, $|z| = 1$; que es equivalente a afirmar

$\text{Sup}\ \{ \left| [Df(x)](z) - [Df(y)](z) \right| : z \in E, |z| = 1 \} < \varepsilon$; y como este supremo es $|Df(x) - Df(y)|$, entonces $|Df(x) - Df(y)| < \varepsilon$, siempre que $|y - x| < \delta$, tomando $\delta = \text{Min}\{\delta_j, j=1,\ldots,m\}$. Luego f es de clase C^1.

2.5 COMPOSICION DE FUNCIONES DIFERENCIABLES

En esta Sección consideraremos la composición de funciones diferenciables.

Sean E,F y K espacios vectoriales cuyas dimensiones son n,m y k respectivamente . Sean $G \subset E$ abierto, $f : G \to F$, $H \subset F$ abierto tal que $f(G) \subset H$ y $g : H \to K$.

Teorema 2.5-1

Si, con la disposición anterior, f es diferenciable en $x \in G$ y g es diferenciable en $f(x) \in H$, entonces la función $g \circ f: G \to K$ es diferenciable en x.

Si ℓ es la derivada de f en x y si m es la derivada de g en f(x), entonces $m \circ \ell$ es la derivada de $g \circ f$ en x.

Demostración

Demostraremos que

$$\lim_{|y-x|\to 0} \frac{|(g\circ f)(y) - (g\circ f)(x) - (m\circ \ell)(y-x)|}{|y - x|} = 0$$

es decir $(g\circ f)(y) - (g\circ f)(x) = (m\circ\ell)(y-x) + Q(x,y)$ donde

$$\lim_{|y-x|\to 0} \frac{|Q(x,y)|}{|y-x|} = 0 \ ;$$

f es diferenciable en $x \in G$ significa que

$$f(y) - f(x) = \ell(y-x) + R(x,y) \qquad (1)$$

donde $\lim_{|y-x|\to 0} \frac{|R(x,y)|}{|y-x|} = 0$.

Como g es diferenciable en $f(x) \in H$,

$$g(f(y)) - g(f(x)) = m(f(y) - f(x)) + \bar{R}(f(y),f(x)) \qquad (2)$$

donde $\lim_{|y-x|\to 0} \frac{|\bar{R}(f(y),f(x))|}{|f(y)-f(x)|} = 0$.

Para $g\circ f$ tendremos

$$(g\circ f)(y) - (g\circ f)(x) = g(f(y)) - g(f(x)). \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) en (3):

$$(g\circ f)(y) - (g\circ f)(x) = m(f(y) - f(x)) + \bar{R}(f(y),f(x)) \qquad (4)$$

Sustituyendo (1) en (4):

$$(g\circ f)(y) - (g\circ f)(x) = m(\ell(y-x) + R(x,y)) + \overline{R}(f(y),f(x))$$

$$= m(\ell(y-x)) + m(R(x,y)) + \overline{R}(f(y),f(x)).$$

Ahora demostraremos que

$$\lim_{|y-x|\to 0} \frac{|m(R(x,y)) + \overline{R}(f(y),f(x))|}{|y-x|} = 0 \ ;$$

$|m(R(x,y))| \leq |m|\,|R(x,y)|$ ya que m es lineal;

$$\frac{|m(R(x,y))|}{|y-x|} \leq \frac{|R(x,y)|}{|y-x|}\,|m| \ ;$$

como $\lim_{|y-x|\to 0} \frac{|R(x,y)|}{|y-x|} = 0$ entonces

$$\lim_{|y-x|\to 0} \frac{|m(R(x,y))|}{|y-x|} = 0$$

Sabemos que $\lim_{|y-x|\to 0} \frac{|f(y) - f(x) - \ell(y-x)|}{|y-x|} = 0$

esto significa que dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$|y-x| < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x) - \ell(y-x)| < \varepsilon\,|y-x|$;

$$|y-x| < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < |\ell(y-x)| + |y-x|\varepsilon$$

$$\leq |\ell|\,|y-x| + |y-x|\varepsilon$$

$$\leq |y-x|\,(\varepsilon + |\ell|) \ ;$$

entonces $|f(y) - f(x)| < |y-x|M.$

Dado que $\lim\limits_{|y-x|\to 0} \dfrac{|\overline{R}(f(y),\ f(x))|}{|f(y)-f(x)|} = 0$,

$\dfrac{|\overline{R}(f(y),f(x))|}{M|y-x|} \leq \dfrac{|\overline{R}(f(y),f(x))|}{|f(y)-f(x)|}$ implica

$\dfrac{1}{M} \lim\limits_{|y-x|\to 0} \dfrac{|\overline{R}(f(y),f(x))|}{|y-x|} = 0$.

Luego $(g\circ f)(y) - (g\circ f)(x) = (m\circ \ell)(y-x) + Q(x,y)$ con

$$\lim_{|y-x|\to 0} \frac{|Q(x,y)|}{|y-x|} = 0.$$

Expresemos este resultado en términos de las matrices jacobianas de f y g.

La derivada de f en x tiene la matriz jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

La derivada de g en $f(x) = y$ es representada por la matriz jacobiana

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(y) & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_m}(y) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}\ y) & \dots & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_m}(y) \end{pmatrix}$$

Luego por 1.4-13 la derivada de $g\circ f$ en x tiene la matriz jacobiana BA.

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial h_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

que es igual al producto de las matrices jacobianas de g y f,

donde $$\frac{\partial h_r}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_r}{\partial x_j}(y)\,\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \qquad \begin{array}{l} r = 1,\ldots,k \\ i = 1,\ldots,n \end{array}$$

Ejemplo 2.5-2

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funciones. En términos del sistema de coordenadas estas funciones tienen la siguiente representación

$$f: \begin{array}{l} u = u(x,y,z) \\ v = v(x,y,z) \end{array} \qquad y$$

$$g: \begin{array}{l} r = r(u,v) \\ s = s(u,v) \\ t = t(u,v) \end{array}$$

La derivada de f en el punto $m = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ es la matriz jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(m) & \frac{\partial u}{\partial y}(m) & \frac{\partial u}{\partial z}(m) \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x}(m) & \frac{\partial v}{\partial y}(m) & \frac{\partial v}{\partial z}(m) \end{pmatrix}.$$

La derivada de g en el punto $f(m) = n = (u,v) \in \mathbb{R}^2$ es la matriz jacobiana

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial u}(n) & \frac{\partial r}{\partial v}(n) \\ \frac{\partial s}{\partial u}(n) & \frac{\partial s}{\partial v}(n) \\ \frac{\partial t}{\partial u}(n) & \frac{\partial t}{\partial v}(n) \end{pmatrix} .$$

La derivada de $g \circ f$ será la matriz jacobiana BA.

2.6 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

LA SEGUNDA DERIVADA

Observación 2.6-1

Sean E y F espacios de dimensión n y m respectivamente, G un abierto de E y $f : G \to F$ una función que suponemos diferenciable en G. Se tiene entonces una función diferencial $Df : G \to \mathcal{L}(E,F)$, donde $\mathcal{L}(E,F)$ es un espacio vectorial normado.

Definición 2.6-2

f es dos veces diferenciable en el punto $x \in G$ si la función Df es diferenciable en el punto x.

Observación 2.6-3

Si Df es diferenciable en G, se tiene entonces una función diferencial $D(Df) : G \to \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))$, donde $D(Df)(x) \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))$ es llamada *Segunda derivada de f en el punto* x.

NOTACION:

Denotaremos la segunda derivada de f en el punto x por $D^2 f(x)$.

Definición 2.6-4

f es de Clase C^2 (o bien dos veces diferenciable con continuidad en G) si:

1) f es dos veces diferenciable en todo punto de G.
2) $D^2 f$ es continua.

(Condición equivalente: Df es de clase C^1 en G).

Observación 2.6-5

El ejemplo 2.3-3 se cumple para cualquier función f, así, si $f : G \to F$ es diferenciable en $x \in G$ y $f_j : G \to \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots, m$ son sus funciones coordenadas, la función Df es diferenciable en $x \in G$ si y solamente si sus nm funciones coordenadas $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_r} : G \to \mathbb{R}$ son diferenciables en x.

Observación 2.6-6

Por la observación 2.6-5, la función $\frac{\partial f_j}{\partial x_r} : G \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x \in G$ siempre que Df sea diferenciable en x. Así, $D\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_r}\right)(x)$, la diferencial de $\frac{\partial f_j}{\partial x_r}$, $j = 1,\dots, m$, $r = 1,\dots, n$, en un punto $x \in G$ existe y pertenece a E^*.

Observación 2.6-7

Si $\{e_1,\dots, e_n\}$ es una base de E, las evaluaciones de $D\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_r}\right)(x)$, $j = 1,\dots, m$, $r = 1,\dots, n$, en los vectores de la base son llamadas *Segundas derivadas parciales de* f_j con respecto a x_r, $r = 1,\dots, n$ y son designadas por

$$\left[D\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_r}\right)(x)\right](e_i) = \frac{\partial\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_r}\right]}{\partial x_i}(x)$$

de acuerdo a la definición 2.2-6.

NOTACION:

Denotaremos por $\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i\, \partial x_r}(x)$ a las segundas derivadas parciales de f_j con respecto a x_i, $i = 1,\dots, n$.

Definición 2.6-8

Sea $\{e_1,\dots, e_n\}$ una base de E y $\{e_{rj} \ / \ 1 \leq r \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ una base de $L(E,F)$; entonces para cada $1 \leq i \leq n$, $1 \leq r \leq n$ y para cada $1 \leq j \leq m$, definiremos la función

$$e_{irj} : E \to L(E,F)$$

como

$$e_{irj}(e_k) = \begin{cases} e_{rj}, & \text{cuando } i = k \\ \theta , & \text{cuando } i \neq k \end{cases}$$

y si $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, $e_{irj}(x) = a_i e_{rj}$

Observación 2.6-9

La proposición 2.3-4 se cumple para cualquier función f, por tanto si f es dos veces diferenciable en x y $\frac{\partial f_j}{\partial x_r}$ son las coordenadas de Df en la base $\{e_{rj} \ / \ 1 \leq r \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ y $\{e_{irj} \ / \ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq r \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ es una base de $L(E,L(E,F))$ definida como en 2.6-8 entonces

$$D(Df)(x) = \sum_{\substack{i \leq n \\ r \leq n \\ j \leq m}} \frac{\partial \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_r}\right)}{\partial x_i}(x) e_{irj}$$

es decir

$$D^2 f(x) = \sum_{\substack{i \leq n \\ r \leq n \\ j \leq m}} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \ \partial x_r}(x) e_{irj}.$$

Proposición 2.6-10

Sea $f : G \to F$ dos veces diferenciable en todo punto de G; encontrar la matriz jacobiana de Df.

Demostración

Dado que las coordenadas de Df son las nm derivadas parciales $\frac{\partial f_j}{\partial x_r}$; la matriz jacobiana de Df vendrá dada por:

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\, \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2\, \partial x_1}(x) & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n\, \partial x_1}(x) \\
\vdots & & & \vdots \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\, \partial x_n}(x) & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2\, \partial x_n}(x) & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n\, \partial x_n}(x) \\
\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1\, \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2\, \partial x_1}(x) & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_n\, \partial x_1}(x) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1\, \partial x_n}(x) & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2\, \partial x_n}(x) & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_n\, \partial x_n}(x) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial^2 f_m}{\partial x_1\, \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_2\, \partial x_1}(x) & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_n\, \partial x_1}(x) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial^2 f_m}{\partial x_1\, \partial x_n}(x) & \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_2\, \partial x_n}(x) & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_m\, \partial x_n}(x)
\end{pmatrix}
$$

Proposición 2.6-11

Sean E y F espacios de dimensiones n y m respectivamente, $f : G \to F$ una función diferenciable en G, tal que las segundas derivadas parciales de las funciones coordenadas de f respecto a una base ortonormal de $\mathcal{L}(E,F)$ existen y son continuas, entonces f es de clase C^2.

Demostración

Las coordenadas de Df son las nm funciones $\frac{\partial f_j}{\partial x_r}$; las derivadas parciales de estas nm funciones son las n^2m funciones

$\frac{\partial\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_r}\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i\ \partial x_r}$, es decir las segundas derivadas parciales de las coordenadas de f. Como por hipótesis las funciones $\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i\ \partial x_r}$ existen y son continuas entonces por proposición 2.4-6 Df es de clase C^1, es decir f es de clase C^2.

Definición 2.6-12

f es tres veces diferenciable en un punto $x \in G$ si la aplicación D^2f es diferenciable en un punto $x \in G$.

Observación 2.6-13

Si D^2f es diferenciable en G, entonces $D(D^2f)(x) \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F)))$ y es llamada *tercera derivada parcial de f en el punto x.*

NOTACION:

Denotaremos la tercera derivada de f en el punto $x \in G$, $D(D^2f)(x)$, por $D^3f(x)$.

Definición 2.6-14

f es de clase C^3 (o bien tres veces diferenciable con continuidad en G) si:

1) f es treces veces diferenciable en todo punto de G.

2) D^3f es continua.

Generalizando tendremos:

Definición 2.6-15

f es de clase C^n ; $n \geq 1$ (o bien n veces diferenciable con continuidad en G) si:

1) f es n veces diferenciable en todo punto de G.

2) D^nf es continua.

Observación 2.6-16

La función $D^nf(x)$ es un elemento de

$$\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,\ldots, \mathcal{L}(E,F)\ldots) = \mathcal{L}n(E,F)$$

con

$$D^n f : G \to \mathcal{L}n(E,F).$$

BIBLIOGRAFIA

CASPER, Goffman. "Calculus of Several Variables". Harper & Row, Weather Hill, Ltd., Londres, 1965.

COTLAR, Mischa y CIGNOLI, Roberto. "Nociones de Espacios Normados". Editorial Universitaria, Buenos Aires, 1967.

DIEUDONNE, J. "Fundamentos de Análisis Moderno". Editorial Reverté, S.A., Barcelona, 1966.

HALMOS, Paul R. "Espacios Vectoriales Finito-Dimensionales". Compañía Editorial Continental, S.A., México, D.F., 1965.

HENRY, Cartan. "Cálculo Diferencial". Colección Métodos, Omega Barcelona.

HERSTEIN, I. N. "Algebra Moderna". Editorial Trillas, México, 1973.