UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

# ESTUDIO SOBRE LAS FUNCIONES ANALITICAS

Febrero, 1978

San Salvador, El Salvador, Centro América

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

| | |
|---|---|
| RECTOR: | HONORABLE CONSEJO DE ADMINISTRACION PROVISIONAL DE LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR |
| SECRETARIO: | DR. RAFAEL ANTONIO OVIDIO VILLATORO |

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

| | |
|---|---|
| DECANO: | ARQ. MANUEL ENRIQUE ALFARO |
| SECRETARIO: | ING. LUIS A. CARBAJAL VALDEZ |

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

| | |
|---|---|
| JEFE DEL DEPARTAMENTO: | ING. GABRIEL MELENDEZ MAYORGA |

ASESOR: LIC. MAURO HERNAN HENRIQUEZ RAUDA

# INDICE

PROLOGO .................................................. iv

CAPITULO I: CONCEPTOS PRELIMINARES

1.0 Función Compleja, Límite y Continuidad
Definiciones y Ejemplos .................................. 1

1.1 Convergencia Absoluta, Uniforme y Simple de Sucesiones y
Series de Números Complejos .............................. 3

1.2 Series Enteras o de Potencias ............................ 20

CAPITULO II: FUNCIONES ANALITICAS

2.0 Definición y Propiedades ................................. 28

2.1 Derivada de una Función Compleja ......................... 30

2.2 Primitiva de una Función Compleja ........................ 32

2.3 Ejemplos de Funciones Analíticas ......................... 34

CAPITULO III: INTEGRACION CURVILINEA DE FUNCIONES COMPLEJAS

3.0 Caminos y Circuitos: Definiciones y Ejemplos ............. 38

3.1 Integral a lo largo de un camino: Definición y Propiedades 41

3.2 Condiciones para la existencia de las Primitivas de las
Funciones Analíticas ..................................... 45

3.3 Homotopías de Caminos y de Circuitos ..................... 47

3.4 Teorema de Cauchy ........................................ 48

3.5 Indice de un punto respecto a un Circuito ................ 51

3.6 Fórmula de Cauchy ........................................ 54

3.7 Desigualdades de Cauchy y Teorema de Liouville ........... 58

3.8 Condiciones de Cauchy para la Derivada de una Función Com -
pleja .................................................... 60

CAPITULO IV: FUNCIONES ANALITICAS: SINGULARIDADES Y RESIDUOS

4.0 Singularidades ........................................... 66

4.1 Singularidades Aisladas. Serie de Laurent ................ 68

4.2 Función Analítica en un Entorno de Un Punto Singular Ais -
lado ..................................................... 74

4.3 Teorema de los Residuos (Restos) ......................... 76

# PROLOGO

Este es un trabajo que versa sobre un tema clásico de la Matemática y el desarrollo que se realiza aquí, lejos de ser un estudio exhaustivo de las funciones analíticas de variable compleja, constituye precisamente una introducción a dicho estudio pues el lector de este folleto comprobará que el tratamiento es a escala elemental.

Aún cuando la materia que se analiza aquí ya ha sido discutida en los cursos de "Variable Compleja" de nuestro pensum, mediante esta obra se pretende ofrecer a los estudiosos de esta disciplina un "nuevo" enfoque de ella, especialmente en lo que se refiere a la integración cauchiana para cuyo examen se han introducido los conceptos de índice de un punto con respecto a un circuito y homotopías de caminos y de circuitos.

La organización estructural del contenido está constituída por cuatro capítulos: en el primero de ellos se presentan las nociones que sirven de premisas para argumentos posteriores, el segundo está dedicado a discutir la analiticidad de las funciones complejas a partir de las series de potencias convergentes, en el tercero se aborda la integración compleja en el sentido Cauchy y algunas de sus propiedades y en el capítulo cuarto se realiza una aplicación teórica de los resultados del capítulo tres.

Además, se da por supuesto que el lector está familiarizado con el análisis real y la teoría de los números complejos por eso algunos resultados de esas áreas aquí utilizados solo se enuncian.

# CAPITULO I

## CONCEPTOS PRELIMINARES

### 1.0 FUNCION COMPLEJA, LIMITE Y CONTINUIDAD

En esta parte del trabajo se presentan las nociones y resultados básicos que se utilizarán en el desarrollo del tema que nos ocupa.

DEFINICION 1: Llamaremos Función Compleja o Función de la Variable Compleja $z$ a toda regla o aplicación $f$ que a todo elemento $z \in D \subset \mathbb{C}$ le asocia otro elemento $w \in \mathbb{C}$ y que denotamos por $f(z) = w$.
El conjunto $D$ se llama dominio de definición de $f$ y $f(z) = w$, el valor de $f$ en el punto $z$ ó la imagen de $z$ bajo $f$.

EJEMPLOS:

1) Una sucesión $(z_n)$ $n \in \mathbb{N}$ no es otra cosa que una función $f$ donde $D = \mathbb{N}$ y $f(n) = z_n$.
2) En la representación $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ de la función $f$ de la variable compleja $z$, $u$ se llama la parte real y $v$ la parte imaginaria de $f$.

   Así, para $f(z) = z^2-1$ se tiene:

   $z^2-1 = (x+iy)^2 - 1 = (x^2+y^2-1) + i(2xy)$

   es decir: $u(x,y) = x^2+y^2-1$ y $v(x,y) = 2xy$.

DEFINICION 2: Sea $f$ una función compleja definida en un conjunto $D$ del plano complejo, excepto tal vez en el punto $z_0 \in D$. Diremos que el número $L$ es el límite de $f(z)$ cuando $z$ tiende a $z_0$, lo que escribimos:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que

$|f(z) - L| < \varepsilon$ para todo $z \in D$ que satisfaga $0 < |z - z_0| < \delta$.

<u>EJEMPLO:</u>

$$\text{Sea } f(z) = \frac{z^2 + 9}{z - 3i}\,.$$

$f$ está definida sólo para $z \neq 3i$. Sin embargo $\lim\limits_{z \to 3i} f(z) = 6i$, pues

$$f(z) = \frac{z^2 + 9}{z - 3i} = \frac{(z + 3i)(z - 3i)}{z - 3i} = z + 3i.$$

En efecto, si $z \neq 3i$, entonces tenemos:

$$|f(z)-6i| = |z - 6i + 3i| = |z - 3i|$$

Luego, tomando $\delta = \varepsilon$ se obtiene

$$|f(z)-6i| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |z - 3i| < \delta, \quad \text{es decir}$$

$$\lim_{z \to 3i} \frac{z^2 + 9}{z - 3i} = 6i.$$

<u>DEFINICION 3:</u> Se dice que una función compleja $f$ definida en $D$ es contínua en el punto $z_0 \in D$ si se cumplen las condiciones siguientes:

a) $f(z_0)$ está definida

b) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe.

c) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Cuando $f$ es contínua en cada punto $z \in D$ se dice que $f$ es contínua en $D$.

La función del ejemplo anterior es contínua en $D = C - \{3i\}$ y no lo es en el punto $z_0 = 3i$ por cuanto no se satisface la condición a).

Se nota que el concepto de límite de una función compleja es semejante al de una variable real, así afirmamos que todas las propiedades de los límites en el caso real, también son aplicables al caso complejo.
Lo dicho antes es válido para la continuidad.

## 1.1 CONVERGENCIA ABSOLUTA, UNIFORME Y SIMPLE DE SUCESIONES Y SERIES DE NUMEROS COMPLEJOS

DEFINICION 4: Una sucesión $(z_n)$ se dice que converge a $z_0 \in \mathbb{C}$ o que tiene como límite $z_0$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que $|z_n - z_0| < \varepsilon$ para toda $n > N$.
Si $(z_n)$ no converge, se dice que es una sucesión divergente.

DEFINICION 5: Una sucesión $(z_n)$ se llama sucesión de Cauchy si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un número entero $N > 0$ tal que:

$$|z_m - z_n| < \varepsilon, \quad \text{para todo } m > N, \quad n > N.$$

CRITERIO DE CAUCHY SOBRE CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Una sucesión $(z_n)$ es convergente si, y sólo si, $(z_n)$ es una sucesión de Cauchy.

PRUEBA:

i) Supongamos en primer lugar que $(z_n)$ converja a $z_0$.
Como $z_m - z_n = (z_m - z_0) + (z_0 - z_n)$, se tiene usando la desigualdad triangular que: $|z_m - z_n| \leq |z_m - z_0| + |z_n - z_0|$. Por lo tanto, si $|z_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|z_m - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $m > N$, $n > N$, obtenemos $|z_m - z_n| < \varepsilon$ para $m > N$, $n > N$ es decir que $(z_n)$ es una sucesión de Cauchy.

ii) Sea ahora $(z_n)$ una sucesión de Cauchy y N un entero positivo, tal que $|z_m - z_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $m > N$ y $n > N$.

Como $|z_n - z_m| \leq |z_n - z_m| = |z_m - z_n|$, se obtiene para

$m = N+1$: $|z_n| \leq |z_m| + \frac{\varepsilon}{2}$; $n > N$.

De esto nos resulta que la sucesión $(z_n)$, para toda $n > N$, es una sucesión acotada pero toda sucesión acotada posee, por lo menos - un punto de acumulación, digamos $z_0$, así que para un cierto $p > N$, resulta:

$|z_p - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego tenemos que:

$|z_n - z_0| \leq |z_n - z_p| + |z_p - z_0|$

$|z_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, para todo $n > N$, es decir que $(z_n)$ converge a $z_0$.

Ahora enunciamos un criterio similar para las series:

PROPOSICION 1: La condición necesaria y suficiente para que una serie - $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ sea convergente es que, para todo $\varepsilon > 0$, exista un entero $N > 0$ tal que:

$$|S_m - S_n| < \varepsilon \quad , \qquad \text{para } m > n > N.$$

PRUEBA:

El enunciado nos dice precisamente que la sucesión de sumas -- parciales $(S_n)$ converge si, y sólo si, $(S_n)$ es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto la prueba de esta proposición es la misma que la del criterio de Cauchy relativo a sucesiones.

DEFINICION 6: Dada una sucesión $(z_n)$, se puede considerar una nueva sucesión $(S_n)$, llamada sucesión de las sumas parciales de los $z_n$, definida así:

$$S_1 = z_1$$
$$S_2 = z_1 + z_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n.$$

Si la sucesión $(S_n)$ converge a un número S, entonces escribimos:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

y la serie $\sum_1^{\infty} z_n$ se dice que es convergente. S se llama la suma de la serie.

PROPOSICION 2: Condición necesaria (aunque no suficiente) para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ sea convergente es que $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

PRUEBA:

Como $z_n = S_n - S_{n-1}$, se tiene en virtud de

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

EJEMPLO:

La serie armónica: $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$, satisface la condición $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, y sin embargo es divergente.

En efecto, para cualquier entero positivo p tenemos:

$$\frac{1}{2^p+1} + \dots + \frac{1}{2^p + 2^p} \geq \frac{1}{2^p + 2^p} \cdot 2^p = \frac{1}{2}$$

Luego, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ no existe un entero $N > 0$ alguno tal que la condición del criterio de Cauchy se cumpla.

## CONVERGENCIA ABSOLUTA

DEFINICION 7: Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ la llamaremos absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge.

Para investigar la convergencia de $\sum_{1}^{\infty} |z_n|$ utilizamos el siguiente resultado:

PROPOSICION 3 (Principio de Comparación)

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ dos series tales que $\sum_{1}^{\infty} |w_n|$ es convergente y además $|z_n| \leq |w_n|$, para $n > N_o$. Entonces $\sum_{1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.

PRUEBA:

Como $\sum_{1}^{\infty} |w_n|$ es convergente, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero $N > N_o$ tal que:

$$|z_{n+1}| + \dots + |z_m| \leq |w_{n+1}| + \dots + |w_m| < \varepsilon$$

siempre que $m > n > N$.

La desigualdad anterior, implica en virtud del criterio de Cauchy, la -- convergencia de $\sum_{1}^{\infty} |z_n|$, luego $\sum_{1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.

PROPOSICION 4: Toda serie absolutamente convergente es convergente y, además, se tiene

$$\left|\sum_1^\infty z_n\right| \le \sum_1^\infty |z_n|.$$

PRUEBA:

Cómo $\sum_1^\infty |z_n|$ converge, entonces para todo $\varepsilon > 0$ hay un $N > 0$ tal que:

$|z_{n+1}| + \dots + |z_m| < \varepsilon$, para $m > n > N$ según el criterio de Cauchy.

Luego:

$|z_{n+1} + \dots + z_m| \le |z_{n+1}| + \dots + |z_m| < \varepsilon, \quad m > n > N.$

Lo anterior, en vista del mismo criterio, implica la convergencia de $\sum_1^\infty z_n$.

Además, como $\left|\sum_1^n z_i\right| \le \sum_1^n |z_i|$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sum_1^n z_i\right| \le \lim_{n\to\infty} \sum_1^n |z_i|, \quad \text{es decir:}$$

$$\left|\sum_1^\infty z_n\right| \le \sum_1^\infty |z_n|.$$

DEFINICION 8: Diremos que una serie $\sum_1^\infty v_n$ es un rearreglo de la serie $\sum_1^\infty z_m$ si existe una función inyectiva entre los índices n y m, de manera que $v_n = z_m$ para índices correspondientes.

PROPOSICION 5: Si una serie $\sum_1^\infty z_m$ es absolutamente convergente, entonces cualquiera de sus rearreglos $\sum_1^\infty v_n$ converge de igual manera, y además tiene la misma suma de la serie original.

PRUEBA:

i) Sea $v_1 + v_2 + \ldots$ un rearreglo de la serie absolutamente convergente $z_1 + z_2 + \ldots$ Entonces, como para todo $v_n$ se tiene $v_n = z_m$ para una n apropiada, y a la misma n no le corresponden dos m, tenemos:

$$S_n = \sum_1^n |v_i| \leq \sum_1^\infty |z_k|$$

La expresión de la izquierda es la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_1^\infty |v_i|$. Como estas sumas parciales son no negativas, la última desigualdad muestra que estas sumas forman una sucesión *acotada*. Además $|v_i| \geq 0$; así la sucesión de sumas parciales también es *creciente;* por lo tanto, es una sucesión convergente.
Luego el rearreglo $\sum_1^\infty v_n$ es absolutamente convergente.

ii) Sean ahora $S' = \sum_1^\infty v_n$, $S = \sum_1^\infty z_n$

$$S'_m = \sum_1^m v_n, \quad S_n = \sum_1^n z_i.$$

Para un $\varepsilon > 0$ dado, podemos escoger un N tan grande que se cumpla:

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |z_{n+1}| + \ldots + |z_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $n > N$ y $p \geq 1$.

Ahora, para una m suficientemente grande, $S'_m$ contendrá todos los términos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ $(n > N)$ y, tal vez algunos términos más: $z_r$ $(r > n)$. Es decir que $S'_m$ tendrá la forma siguiente:

$$S'_m = S_n + A_{mn}, \qquad \text{donde } A_{mn} = \sum_{r>n} z_r$$

Sea n+p el mayor de los subíndices de los términos contenidos en $A_{mn}$. Entonces:

$$|A_{mn}| \leq |z_{n+1}| + \ldots + |z_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego: $|S'_m - S_n| = |A_{mn}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Así, podemos escribir lo siguiente:

$$|S'_m - S| = |(S'_m - S_n) + (S_n - S)| \leq |S'_m - S_n| + |S_n - S|$$

$$|S'_m - S| \leq |S'_m - S_n| + |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$|S'_m - S| < \varepsilon, \quad \text{para m bastante grande.}$$

De ahí se deduce que $S'_m$ converge a S y por lo tanto que S' = S.

<u>DEFINICION 9</u>: Sea $(n_k)$ una sucesión de números enteros positivos tales que: $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Para toda serie $\sum_1^\infty z_n$, denominaremos serie parcial de la serie dada, correspondiente a la sucesión parcial $(n_k)$, a la serie $\sum_1^\infty w_k$, donde $w_k = z_{n_k}$.

<u>PROPOSICION 6</u>: Si se tiene una serie absolutamente convergente $\sum_1^\infty z_n$, entonces toda serie parcial es absolutamente convergente y se cumple que:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} z_{n_k}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z_{n_k}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

<u>PRUEBA</u>:

i) Para todo entero p se tiene:

$$\sum_{k=1}^{p} |z_{n_k}| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_{n_p}| \leq \sum_{1}^{\infty} |z_n|.$$

Utilizando la proposición 3, se sigue que la serie parcial $\sum_{k=1}^{\infty} z_{n_k}$ - converge absolutamente.

ii) Además, se tiene:

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} |z_{n_k}| \leq \lim_{p\to\infty} (|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_{n_p}|) \leq \sum_{1}^{\infty} |z_n|$$

Luego: $\sum_{k=1}^{\infty} |z_{n_k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z_{n_k}| \leq \sum_{1}^{\infty} |z_n|.$

## CONVERGENCIA UNIFORME

DEFINICION 10: Sea $(f_n(z))$ una sucesión de funciones complejas definidas en D.

Diremos que $(f_n(z))$ converge uniformemente en D hacia una función $f(z)$, si se cumple: $\lim_{n\to\infty} d(f_n(z), f(z)) = 0.$

En otras palabras significa esto que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un entero N dependiente de $\varepsilon$ pero no de z, tal que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, para $n > N$ y $z \in D$.

EJEMPLO

1) La sucesión $\left(1 + \frac{z}{n}\right)$ converge simplemente a 1.

En efecto, según la definición de límite se tiene:

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) = 1$, pues dado cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un N tal que $\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right) - 1\right| < \varepsilon$, para $n > N$.

Es decir $\left|\frac{z}{n}\right| < \varepsilon$, entonces $\frac{|z|}{n} < \varepsilon$ de donde $n > \frac{|z|}{\varepsilon} = N$.

Como N depende de z y $\varepsilon$, la convergencia es simple

DEFINICION 11: Una serie de funciones complejas $\sum_{1}^{\infty} f_n(z)$ se llama uniformemente convergente si la sucesión de las sumas parciales $S_n = f_1(z) + \ldots + f_n(z)$ tiene el mismo tipo de convergencia en D hacia una función S llamada suma de la serie.

## CONVERGENCIA SIMPLE

DEFINICION 12: Una sucesión de funciones complejas definidas en D $(f_n(z))$, converge simplemente en D hacia una función f(z), si para toda $z \in D$, la sucesión $(f_n(z))$ tiene por límite la función f(z).

En otras palabras, lo anterior significa que para un $\varepsilon > 0$ dado y cada $z \in D$ existe un N tal que:

$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, para todo $n > N$.

La nomenclatura $N(\varepsilon, z)$ indica que N es una función de $\varepsilon$ y z.

OBSERVACION:

La convergencia uniforme de una sucesión $(f_n(z))$ implica la convergencia simple, lo contrario no es cierto.

La convergencia simple se realiza en un punto de un conjunto D, por eso a esta convergencia se le llama a veces convergencia puntual.

DEFINICION 13: Como antes, diremos que una serie de funciones complejas $\sum_{1}^{\infty} f_n(z)$ definidas en D, converge simplemente si la sucesión de sumas -- parciales:

$S_n = f_1(z) + \ldots + f_n(z)$ tiene convergencia simple en D hacia la suma S de la serie.

PROPOSICION 7: (Criterio de Weierstrass)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ una serie convergente tal que $\alpha_n > 0$ para toda n.

Supongamos que $\operatorname{Sup}_{z \in D} |f_n(z)| \leq \alpha_n$, entonces la serie $\sum_{1}^{\infty} f_n(z)$ es uniformemente convergente.

PRUEBA:

La hipótesis $\operatorname{Sup}_{z \in D} |f_n(z)| \leq \alpha_n$, significa que para cualquier $z \in D$ y todo n se tiene: $|f_n(z)| \leq \alpha_n$, luego se deduce que

$$\sum_{1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{1}^{\infty} \alpha_n.$$

Aplicando la proposición 3 se tiene que $\sum_{1}^{\infty} f_n(z)$ converge absolutamente, luego $\sum_{1}^{\infty} f_n(z)$ es convergente.

Probemos además que $\sum_{1}^{\infty} f_n(z)$ tiene convergencia uniforme hacia S

Sabemos que dado un número n, podemos escribir:

$$S(z) - (f_1(z) + \ldots + f_n(z)) = f_{n+1}(z) + \ldots + f_{n+p}(z) + \ldots$$

Como $\sum_{1}^{\infty} f_n(z)$ es absolutamente convergente, tenemos, utilizando la misma proposición 3, que:

$|S(z) - (f_1(z) + \ldots + f_n(z))| \leq |f_{n+1}(z)| + \ldots + |f_{n+p}(z)| + \ldots,$

pero $|f_n(z)| \leq \alpha_n$ para todo n, luego:

$|S(z) - (f_1(z) + \ldots + f_n(z))| \leq \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p} + \ldots$

Tenemos como hipótesis que $\sum_1^{\infty} \alpha_n$ es convergente; así, para un $\varepsilon > 0$ dado existe un $N(\varepsilon)$ tal que:

$$|\alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p}| < \varepsilon, \qquad \text{para } n > N.$$

Entonces:

$$|S(z) - (f_1(z) + \ldots + f_n(z))| \leq |\alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p}| < \varepsilon$$

Luego:

$$|S(z) - (f_1(z) + \ldots + f_n(z))| < \varepsilon \quad ; \qquad \text{para } n \quad N \text{ y } z \in D.$$

Como N depende sólo de $\varepsilon$ y no de z, queda probada la convergencia uniforme de $\sum_1^{\infty} f_n(z)$ hacia S.

## CONSECUENCIAS DE LA CONVERGENCIA UNIFORME

La relación entre la convergencia uniforme y la continuidad está enunciada en las siguientes proposiciones:

PROPOSICION 8: Sea $(f_n(z))$ una sucesión de funciones complejas definidas y contínuas en D, la cual converge uniformemente en D hacia f(z). Entonces f(z) es contínua en D.

PRUEBA:

Verificaremos, según la definición 3, que para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que para todo $z \in D$ que cumpla $0 < |z - z_0| < \delta$, se ten ga: $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Como $(f_n(z))$ converge uniformemente hacia f(z), existe un $N(\varepsilon)$ tal que - para todo $n \geq N$ y $z \in D$ se tiene:

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Además, si $f_n(z)$ es contínua en $z_0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \; ; \qquad z \in D \text{ y } |z - z_0| < \delta.$$

Para tal $z \in D$, tenemos:

$$|f(z) - f(z_0)| = |f(z) - f_n(z) + f_n(z) - f_n(z_0) + f_n(z_0) - f(z_0)|$$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|.$$

Como $|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $z \in D$, también $|f(z_0) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ se cumple.

Luego:

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

para $z \in D$ que cumple $|z - z_0| < \delta$.

<u>OBSERVACIONES:</u>

1) Si $(f_n(z))$ converge simplemente, las funciones $f_n(z)$ pueden ser contínuas aunque f(z) (límite de $(f_n(z))$) no lo sea.
2) La convergencia uniforme de $(f_n(z))$ no es condición necesaria para - que f(z) sea contínua.

De la proposición anterior se obtiene el siguiente enunciado:

<u>COROLARIO 1</u>: Sea $\sum_{1}^{\infty} f_n(z)$ una serie de funciones contínuas, que converge uniformemente a $S(z)$ en $D$. Entonces $S(z)$ también es contínua.

<u>PRUEBA:</u>

Sea $z_0 \in D$ y $\varepsilon > 0$ dado. Como en el caso de la sucesión -- (proposición 8) buscamos una $\delta > 0$ tal que:

$|S(z) - S(z_0)| < \varepsilon$, cuando $0 < |z - z_0| < \delta$, $z \in D$.

Escogemos $N(\varepsilon)$ tan grande que se cumpla:

$|S_n(z) - S(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$; $z \in D$ y $n \geq N(\varepsilon)$, donde

$$S_n(z) = f_1(z) + \ldots + f_n(z)$$

Lo anterior es posible porque la serie es uniformemente convergente.

La función $S_n(z)$, como es la suma de un número finito de funciones contínuas, es contínua en $D$. Así, podemos elegir un $\delta > 0$ tal que, para $n = N$ se cumpla:

$$|S_N(z) - S_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{cuando } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

tenemos además que:

$$|S_N(z_0) - S(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Luego:

$$S(z) - S(z_0) = S(z) - S_N(z) + S_N(z) - S_N(z_0) + S_N(z_0) - S(z_0)$$

$$|S(z) - S(z_0)| \leq |S(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_0)| + |S_N(z_0) - S(z_0)|$$

$$|S(z) - S(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \qquad \text{si } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

DEFINICION 14: Diremos que, en un intervalo cerrado y acotado $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, una función f es contínua a trozos, si es posible descomponer I en un número finito de subintervalos:

$$[a_0, a_1], \quad [a_1, a_2], \quad \ldots, \quad [a_{m-1}, a_m]$$

donde $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = b$, de tal forma que f sea contínua en cualquier punto interior a cada uno de los subintervalos, y además que:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to a_k \\ x > a_k}} f(x) = f(a_k^+)$ existe, para $0 \leq k \leq m-1$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to a_k \\ x < a_k}} f(x) = f(a_k^-)$ existe, para $1 \leq k \leq m$

PROPOSICION 9: (Teorema del Valor Medio)

Para toda función compleja f(z) contínua a trozos en $I = [a,b]$ se cumple:

$$\left| \int_a^b f(z)dz \right| \leq \int_a^b |f(z)|dz$$

PRUEBA:

Escribamos el número complejo $\int_a^b f(z)dz$ en su forma exponencial, es decir: $\int_a^b f(z)dz = r\, e^{i\theta}$, para $r \geq 0$ y $\theta$ constante.

Sea $g(z) = e^{-i\theta} f(z)$. Entonces tenemos:

$$\int_a^b g(z)dz = \int_a^b e^{-i\theta} f(z)dz = e^{-i\theta} \int_a^b f(z)dz$$

es decir:

$$\int_a^b g(z)dz = e^{-i\theta} r e^{i\theta} = r e^{0} = r .$$

Tenemos, además, que $\int_a^b f(z)dz = F(z) = r e^{i\theta}$ donde $r = |F(z)|$.

Descompongamos ahora g(z) en sus partes real e imaginaria:

$$g(z) = g_1(x) + i\, g_2(y).$$

Así, $\int_a^b g(z)dz = r = \int_a^b g_1(x)dx$ pues $g_1(x)$ es real.

Notemos que: $r = |F(z)| = \left|\int_a^b f(z)dz\right|$.

Como $g_1(x) \leq |g(z)|$ para cualquier número complejo, entonces:

$$\int_a^b g_1(x)dx \leq \int_a^b |g(z)|dz.$$

Pero $\int_a^b g_1(x)dx = r = |F(z)| = \left|\int_a^b f(z)dz\right|$.

Luego:

$$\left|\int_a^b f(z)dz\right| \leq \int_a^b |g(z)|dz.$$

Por último, vemos que $|g(z)| = |f(z)|$ por la forma en que hemos definido la función g(z), por lo tanto:

$$\left|\int_a^b f(z)dz\right| \leq \int_a^b |f(z)|dz.$$

PROPOSICION 10: Sea $(f_n(z))$ una sucesión de funciones complejas, contínuas a trozos en un intervalo cerrado y acotado $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, que converge uniformemente en I hacia una función contínua $f(z)$. Entonces se tiene:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(z)dz = \int_a^b f(z)dz.$$

PRUEBA:

Todo consiste en demostrar que dado un $\varepsilon > 0$, hay un entero - $N(\varepsilon)$ tal que para $n \geq N(\varepsilon)$ se cumpla:

$$\left| \int_a^b f(z)dz - \int_a^b f_n(z)dz \right| < \varepsilon$$

Para ello usaremos el teorema del valor medio (Proposición anterior):

$$\left|\int_a^b f(z)dz - \int_a^b f_n(z)dz\right| \leq \int_a^b |f(z) - f_n(z)|dz$$

En virtud de la convergencia uniforme de $(f_n(z))$, existe un entero $N(\varepsilon)$ tal que para $n \geq N(\varepsilon)$ y todo punto de I, se cumple:

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Así, tenemos que:

$$\left|\int_a^b f(z)dz - \int_a^b f_n(z)dz\right| \leq \int_a^b |f(z) - f_n(z)|dz \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dz$$

$$\left|\int_a^b f(z)dz - \int_a^b f_n(z)dz\right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon, \qquad \text{para todo } n \geq N(\varepsilon).$$

En forma análoga, tenemos una afirmación para una serie de funciones com - plejas:

<u>COROLARIO 2:</u> Sea $\sum_{1}^{\infty} f_n(z)$ una serie de funciones complejas, contínuas a - trozos en I, que converge uniformemente en I y cuya suma S(z) es contínua. Entonces se tiene:

$$\int_a^b \left[ \sum_1^\infty f_n(z) \right] dz = \int_a^b f_1(z)dz + \ldots + \int_a^b f_n(z)dz + \ldots$$

<u>PRUEBA:</u> Sea $S_n(z)$ la n-ésima suma parcial de $\sum_1^\infty f_n(z)$. Entonces podemos escribir:

$$\int_a^b S_n(z)dz = \int_a^b f_1(z)dz + \ldots + \int_a^b f_n(z)dz.$$

Demostremos que la sucesión $\int_a^b S_n(z)dz$ converge a $\int_a^b S(z)dz$.

En otras palabras, para $\varepsilon > 0$ dado, puede hallarse un $N(\varepsilon)$ tal que:

$$\left| \int_a^b S(z)dz - \int_a^b S_n(z)dz \right| < \varepsilon , \quad n \geq N(\varepsilon).$$

Para ello, escogeremos $N(\varepsilon)$ tan grande que: $\left| S(z) - S_n(z) \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$, $n \geq N(\varepsilon)$ $z \in I$.

Lo anterior es posible en virtud de la convergencia uniforme de $\sum_1^\infty f_n(z)$

Entonces:

$$\left| \int_a^b S(z)dz - \int_a^b S_n(z)dz \right| = \left| \int_a^b [S(z) - S_n(z)]dz \right| .$$

Utilizando la proposición 9, tenemos:

$$\left| \int_a^b [S(z) - S_n(z)]dz \right| \leq \int_a^b |S(z) - S_n(z)|dz$$

pero $\displaystyle\int_a^b |S(z) - S_n(z)| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dz = \varepsilon.$

Luego:

$$\left| \int_a^b S(z)dz - \int_a^b S_n(z)dz \right| < \varepsilon, \qquad n \geq N(\varepsilon).$$

## 1.2 SERIES ENTERAS O DE POTENCIAS

Las series de potencias juegan un papel fundamental en la teoría de las funciones analíticas, por eso se las estudiará en esta parte, pero antes, veremos la serie de Taylor:

DEFINICION 15: Sea f una función compleja definida en un entorno $I = [z_0 - \alpha, \quad z_0 + \alpha]$ e indefinidamente derivable en I. La serie de Taylor, para todo $n \in N$ y todo $z \in I$ es:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

donde los coeficientes $c_n$ estan dados por la regla:

$$c_0 = f(z_0), \ldots, c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Usando la fórmula de los coeficientes $c_n$, podemos escribir la serie de -- Taylor, así:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots$$

<u>EJEMPLOS:</u> Las series de Taylor alrededor del punto $z_0 = 0$, para las funciones $e^z$, sen z y cos z son:

a) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$

b) $\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$

c) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$

<u>OBSERVACION:</u> Es natural esperar que los polinomios de la forma:

$$P_n(z) = f(z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converjan uniformemente hacia f en I. En general no ocurre así, como lo demuestra el ejemplo de la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Para $x_0 = 0$, todas las derivadas de g son nulas en el punto 0,; por lo tanto los polinomios $P_n$ son tódos identicamente nulos, luego no pueden converger hacia g en un intervalo I de centro 0.

Las funciones f que son indefinidamente derivables y para las cuales los polinomios $P_n$ convergen hacia f en un intervalo de z o que siguen siendo sumas de su serie de Taylor, forman sólo una parte de las funciones indefinidamente derivables, cuyas propiedades estudiaremos en el Capítulo II y siguientes.

## SERIE DE POTENCIAS

DEFINICION 16: Una serie infinita de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots$$

donde z es una variable compleja y $z_0$, $c_n$ son números constantes complejos, se llama serie de potencias en $(z - z_0)$.

Cuando una serie de potencias converge a f(z) para cada z en un conjunto D, diremos en este caso que la serie representa la función f(z) o que la función está desarrollada en la serie de potencias.

Por ejemplo, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ representa la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ en el interior del círculo unitario $c = \{z \in C: |z| < 1\}$.

PROPOSICION 11: Una serie de potencia $\sum_{0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ tiene un radio de convergencia R tal que cuando $0 < R < \infty$, la serie converge absolutamente para $|z - z_0| < R$ y diverge para $|z - z_0| > R$.

El número R está dado por la fórmula:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{Sup} \sqrt[n]{|cn|}}$$

PRUEBA: Si hacemos $\alpha_n = c_n(z - z_0)^n$, tenemos entonces:

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Sup} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \lim_{n \to \infty} \operatorname{Sup} \sqrt[n]{|c_n|}\,|z - z_0| = \frac{|z - z_0|}{R}$$

Aplicaremos el criterio de la raíz, el cual nos dice así:

$$\lim_{n\to\infty} \text{Sup} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = L$$

i) Si $L < 1$, $\sum_0^\infty \alpha_n$ es absolutamente convergente.

ii) Si $L > 1$, $\sum_0^\infty \alpha_n$ es divergente.

iii) Si $L = 1$, el criterio falla (puede haber convergencia o divergencia).

Luego, por este criterio, tenemos:

$L = \dfrac{|z - z_0|}{R} < 1$, es decir $|z - z_0| < R$; así, la serie de potencias converge absolutamente cuando $|z - z_0| < R$ y diverge cuando $L = \dfrac{|z - z_0|}{R} > 1$, es decir $|z - z_0| > R$.

<u>OBSERVACIONES</u>: Cuando $R = 0$, la serie de potencias converge sólo para $z = z_0$; si $R = \infty$ la serie converge para todo $z \in C$.

Cuando $0 < R < \infty$, el círculo (disco) $C = \{z \in C: \ |z - z_0| < R\}$ se llama Círculo de Convergencia de la Serie.

<u>DEFINICION 17</u>: Una serie de potencias se dice que converge uniformemente en un conjunto D, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que para todo $z \in D$, se cumple:

$$|R_n(z)| < \varepsilon, \quad \text{para } n \geq N(\varepsilon).$$

<u>OBSERVACION</u>: Cuando una serie de potencias representa a una función $f(z)$, se escribe

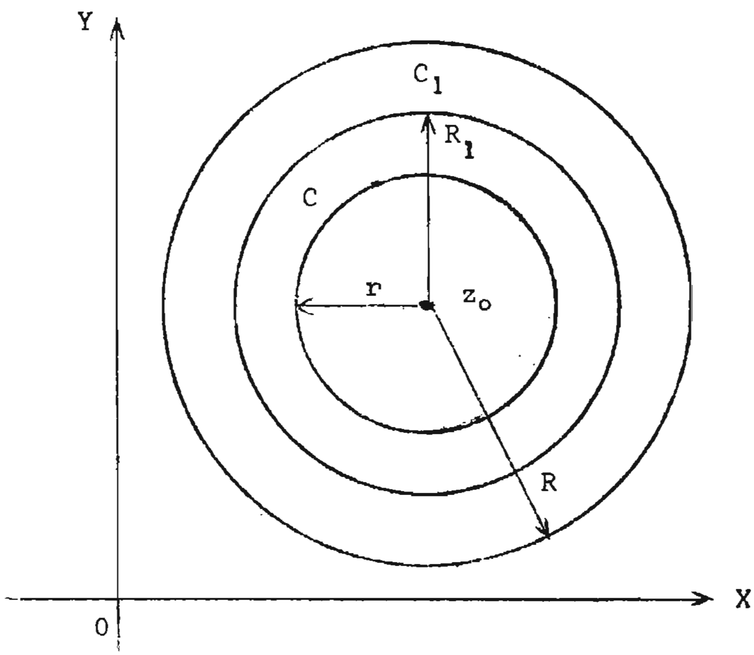
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{N-1} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=N}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

donde $S_n(z) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n(z - z_0)^n$ y $R_n(z) = \sum_{n=N}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$

Por la observación anterior se ve que la definición 17 es similar a la definición 11.

PROPOSICION 12: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R \neq 0$. Entonces para cualquier círculo c de centro $z_0$ y radio $r < R$, la serie de potencias converge uniformemente en c.

PRUEBA: Representemos en la siguiente figura los círculos c y $c_1$ concentricos en $z_0$ y radios r y $R_1$ respectivamente y además $r < R_1 < R$.




Puesto que $r < R_1$, podemos escribir: $r = \lambda R_1$, donde $0 < \lambda < 1$.

Si $|z - z_0| \leq r$ entonces:

$$|c_n(z - z\ )^n| \leq |c_n|r^n = |c_n|\lambda^n R_1^n.$$

Pero por hipótesis, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ converge para $|z - z_0| = R_1$, luego $|C_n|R_1^n < 1$, para $n \geq N_1$, donde $N_1$ es un número fijo suficiente-mente grande.

Además, puesto que $0 < \lambda < 1$, tenemos por la definición de límite, que para $\varepsilon > 0$, $\lambda^n < \varepsilon(1-\lambda)$ cuando $n \geq N_2(\varepsilon)$, siendo $N_2$ como $N_1$. Sea $N(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2(\varepsilon)\}$.

Tenemos entonces que para $n \geq N(\varepsilon)$ y $|z - z_0| \leq r$:

$$|R_n| = \left|\sum_{n=N}^{\infty} C_n(z - z_0)^n\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |C_n(z - z_0)^n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |C_n|\lambda^n R_1^n < \sum_{n=N}^{\infty} \lambda^n$$

Luego: $|R_n| = \lambda^N + \lambda^{N+1} + \ldots$

$$|R_n| = \lambda^N(1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots) = \frac{\lambda^N}{1-\lambda} < \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{(1-\lambda)} = \varepsilon$$

ya que la serie geométrica $1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots$ converge a $\frac{1}{1-\lambda}$ así, $|R_n| < \varepsilon$ de acuerdo con la definición 17.

<u>PROPOSICION 13</u>: Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias convergente a $f(z)$ para los $z \in C$ tales que $|z - z_0| < R$. Entonces $f(z)$ es una función continua en el círculo de convergencia C.

<u>PRUEBA</u>: Si $0 < r < R$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ es uniformemente convergente en el círculo C de centro $z_0$ y radio r según la proposición 12. Por otra parte tenemos que $\sum_{0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ está definida, es contínua en C y converge uniformemente hacia $f(z_0)$ para todo $z_0 \in C$, luego f es contínua en $C = \{z \in C: |z - z_0| < R\}$ por el Corolario 1.

PROPOSICION 14: (Principio de los Ceros Aislados)

Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ es una serie de potencias que converge en un círculo $C = \{z \in C: |z| < R\}$ y sea $f(z) = \sum_0^{\infty} C_n z^n$.

Entonces, siempre que todas las $C_n$ no sean simultáneamente nulas, existe un $r' < R$ tal que para $0 < |z| < r'$ se tiene $f(z) \neq 0$.

PRUEBA: Sea k el menor entero tal que $C_k \neq 0$; entonces podemos escribir:

$$f(z) = z^k(C_k + C_{k+1}z + \dots + C_{k+m}z^m + \dots)$$

La serie $\sum_{m=0}^{\infty} C_{k+m}z^m$ es convergente en C ya que sus términos se obtienen dividiendo por $z^k \neq 0$ los términos de la serie convergente $\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+m}z^{k+m}$.

Si $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{k+m} z^m$, entonces g(z) es contínua en C por la proposición 13, y puesto que $g(0) = C_k \neq 0$, existe $r' > 0$ tal que $g(z) \neq 0$ para $D' = \{z \in C: |z| < r'\}$, luego se tiene: $f(z) = z^k g(z) \neq 0$.

OBSERVACION: La conclusión de la proposición anterior también la podemos expresar en la forma siguiente:

Si una serie de potencias: $f(z) = \sum_0^{\infty} C_n z^n$ es convergente para $0 < |z| < r'$ y tal que: $f(z_p) = 0$, para una sucesión $(z_p)$ de puntos distintos que tiende a 0, entonces todos los coeficientes $C_n$ son nulos y por lo tanto f(z) es nula.

<u>PROPOSICION 15</u>: (Identidad de Series de Potencias)

Sean $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$

$g(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots$

dos series enteras convergentes en el mismo círculo $C = \{z \in C: |z| < R, R > 0\}$. Si existe una sucesión de puntos distintos $(z_p)$ del círculo C, tendiendo a 0 y tal que $f(z_p) = g(z_p)$, para todo p, se tiene $a_p = b_p$ y por lo tanto $a_n = b_n$ para todo $z \in C$.

<u>PRUEBA</u>: Sea $h(z_p) = f(z_p) - g(z_p)$.

Entonces:

$$h(z_p) = (a_0 + \dots + a_p z^p + \dots) - (b_0 + \dots + b_p z^p + \dots)$$

$$h(z_p) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)z + \dots + (a_p - b_p)z^p + \dots$$

Como $f(z_p) = g(z_p)$ para todo p, entonces: $h(z_p) = 0$. Aplicando la observación anterior vemos que:

$a_0 - b_0 = 0$; $a_1 - b_1 = 0$; ...; $a_p - b_p = 0$

Luego $a_0 = b_0$; $a_1 = b_1$; ...; $a_p = b_p$

Por lo tanto $a_n = b_n$ para todo n con lo que se obtiene el resultado deseado.

# CAPITULO II

## FUNCIONES ANALITICAS

La relación que existe entre las series de potencias y las funciones analíticas de variable compleja se pone de manifiesto en las definiciones y proposiciones que siguen:

### 2.0 DEFINICION Y PROPIEDADES

DEFINICION 18: Sea D un conjunto abierto en el plano C (es decir que para todo $z_o \in D$ existe un disco abierto $D^* = \{z \in C: |z-z_o| < R\}$, donde $D^* \subset D$).

Diremos que una función compleja $f: D \to C$ es analítica (u holomorfa) en D si, para todo $z_o \in D$, existe un disco (círculo) abierto $D^* \subset D$; tal que se cumpla en $D^*$ la siguiente condición:

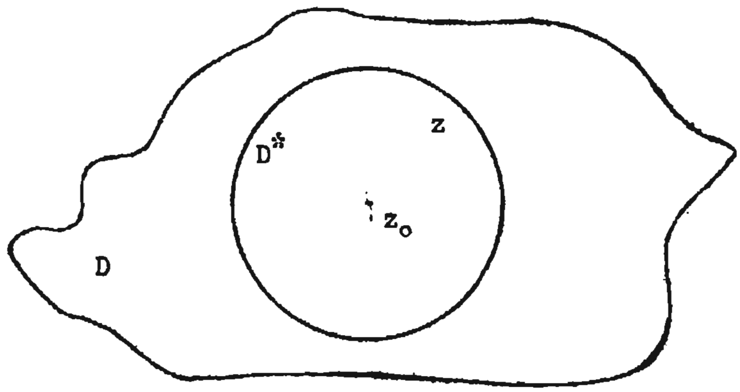
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_o)^n,$$

donde la serie entera es convergente en $D^*$.

Brevemente, podemos decir que una función f es analítica en D, si es desarrollable en serie de potencias de $(z-z_o)$ en un entorno de todo punto $z_o \in D$.

OBSERVACION: En vista de la proposición 15, esta serie, si existe, es necesariamente única.

La siguiente figura, ilustra la definición 18.




<u>DEFINICION 19</u>: Una función compleja f que sea analítica en todo el plano C, se llama función entera.

<u>PROPOSICION 16</u>: Si una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ (1) es convergente en D, entonces para todo $z_o \in D$, existe una serie de potencias (y sólo una) convergente para $D^*$: $|z-z_o| < R - |z_o|$ y que cumple:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_o)^n$$

<u>PRUEBA</u>: Sabemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ es convergente en D.
Sea $z = z_o + z'$; sustituyendo éste valor de z en la serie (1) tenemos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z_o+z')^n = c_o + c_1(z_o+z') + c_2(z_o+z')^2 + \ldots$$

Consideremos ahora la serie siguiente:

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|(|z_o| + |z'|)^n = |c_o| + |c_1|(|z_o|+|z'|)+|c_2|(|z_o|+|z'|)^2 +$$

Suponiendo que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ sea absolutamente convergente en D: $|z| < R$, se tiene que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|(|z_o| + |z'|)^n$ es convergente en el disco $D^*$ = $\{z \in C: |z-z_o| < R - |z_o|\}$ en virtud de la definición 7; pues si $|z| = |z_o| + |z'| < R$ entonces $|z'| = |z-z_o| < R - |z_o|$.

Luego, para los valores de $z \in D^*$, podemos rearreglar la serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z_o + z')^n$$

en potencias de $z' = z-z_o$, sin alterar la suma ni su convergencia (proposición 5); así obtenemos la serie entera:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n \tag{3}$$

convergente en $D^*$, donde los coeficientes $a_n$ vienen dados, en términos de los coeficientes $C_n$ de la serie (1), por la expresión:

$$a_n = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} C_{m+n} z_o^m$$

NOTA: En general el radio de convergencia de la serie (3) será mayor que $R - |z_o|$; así, la función definida por la fórmula (3) nos da una prolongación (analítica) de la función dada en (1) hacia puntos que se encuentran fuera del disco D.

## 2.1 DERIVADA DE UNA FUNCION COMPLEJA

DEFINICION 20: Sean D un conjunto abierto en C y f una función compleja contínua definida en D. Diremos que en $z_o \in D$, la función f admite una derivada respecto a la variable compleja z, si cuando $u = s + it$ tiende a cero en C:

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(z_o+u) - f(z_o)}{u}$$

existe.

Este límite se llama la derivada de f en el punto $z_o$ y la repre - sentamos por $f'(z_o)$.

PROPOSICION 17: Una serie de potencias con radio de convergencia $R \neq 0$, representa una función analítica en todo punto interior a su círculo de convergencia. Las derivadas de esta función se obtienen derivando término a término la serie original.

PRUEBA: Consideremos la representación:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n.$$

Suponiendo $R \neq 0$. Entonces podemos representar f(z) en la forma siguiente, según la proposición 16:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n.$$

La función f(z) es contínua en $z_o \in D$ por la proposición 14, luego es contínua en todo punto $z \in D$ pues $z_o$ es un punto arbitrario.

De $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ obtenemos: $f(z_o) = a_o$, luego:

$$\frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} = a_1 + a_2(z-z_o) + a_3(z-z_o)^2 + \ \ldots$$

Otra vez, por la proposición 13, la función representada por la -

serie de potencias de la última igualdad, es contínua en $z_o$, entonces:

$$f'(z_o) = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} = a_1 = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)C_{m+1} z_o^m$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\, C_k\, z_o^{k-1}.$$

Dicho de otro modo, $f'(z)$ se obtiene derivando término a término la serie $\sum_0^{\infty} C_n z^n$; así, la m-ésima derivada de $f(z)$ en D es:

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-m+1)C_n\, z^{n-m}.$$

OBSERVACION: Una función f analítica en un abierto $D \subset C$ es derivable indefinidamente en C y todas sus derivadas son analíticas en D; además, para todo $z_o \in D$, existe un disco $D^*$: $|z-z_o| < R$ en el cual la función es igual a su serie de Taylor que converge en $D^*$.

## 2.2 PRIMITIVA DE UNA FUNCION COMPLEJA

DEFINICION 21: Dada una función f analítica en un abierto $D \subset C$, diremos que una función F analítica en D es una primitiva de f si se cumple $F' = f(z)$ para todo $z \in D$.

PROPOSICION 18: Si una serie entera $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ es convergente en un disco (círculo) D: $|z-z_o| < R$, entonces la serie:

$$F(z) = a_o(z-z_o) + \frac{a_1}{2}(z-z_o)^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}(z-z_o)^{n+1} + \ldots$$

es convergente en D y su suma es una primitiva de f.

PRUEBA: La proposición 17 nos da como resultado lo siguiente:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, C_k\, z_o^{k-1} = c_1 + 2c_2 z_o + \ldots + n\, C_n\, z_o^{n-1} + \ldots$$

Probaremos entonces la convergencia de esta última serie para

D: $|z-z_o| < R$.

Sea $\sigma$ tal que $0 < \sigma < R$, la sucesión de números complejos $(a_n \sigma^n)$ está acotada pues la serie que representa f(z) es convergente; -- luego también lo está la sucesión $\left(\frac{1}{n+1} a_n \sigma^{n+1}\right)$ la conclusión se sigue de la proposición 12.

PROPOSICION 19: Sean f y g dos funciones analíticas en un conjunto abierto $D \subset C$. Si existe un punto $a \in D$ y una sucesión de puntos distintos de D $(z_n)$ que tiene por límite el punto a, entonces se tiene $f(z) = g(z)$.

PRUEBA: Por hipótesis sabemos que las series:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad y \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

son convergentes en un disco abierto:

$$D^* = \{z \in C: \ |z-a| < R\}, \qquad D^* \subset D.$$

Como todas las condiciones de la proposición 15 se cunplen también en el caso presente, tenemos que:

$$f(z) = g(z), \qquad \text{para todo } z \in D^*.$$

## 2.3 EJEMPLOS DE FUNCIONES ANALITICAS

1) Un polinomio de la forma $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ es una serie de potencias convergente para todo $z \in C$, luego es una función entera (definición 19) y por lo tanto es una función analítica en C.

2) La función $f(z) = \frac{1}{z}$ es analítica en $C - \{0\}$.

Demostremos que, para todo $z_o \neq 0$, la serie de potencias:

$$(1) \quad \frac{1}{z_o} - \frac{(z-z_o)}{z_o^2} + \frac{(z-z_o)^2}{z_o^3} + \ldots + (-1)^n \frac{(z-z_o)^n}{z_o^{n+1}} + \ldots$$

es convergente para los z tales que $|z-z_o| \leq |z_o|$ y además que su suma es $1/z$.

En efecto, para todo $u \in C$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene la identidad:

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \ldots + (-1)^n u^n + \frac{1 - (-1)^{n+1} u^{n+1}}{1 + u}.$$

Cuando $|u| < 1$, se tiene $\lim_{n \to \infty} u^{n+1} = 0$, luego:

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \ldots + (-1)^n u^n + \ldots$$

siendo la serie convergente para $|u| \leq 1$; sustituyendo u por $\frac{z-z_o}{z_o}$ en (1), se encuentra que la serie (1) converge a $1/z$ para $|z-z_o| \leq |z_o|$.

OBSERVACIONES: Del ejemplo 1 se deduce que para toda función f analítica en un conjunto abierto $D \subset C$; $f^n$ $(n \geq 0)$ es analítica en D, lo mismo que f+g (g analítica en D) y también f.g.

Del ejemplo 2 se **tiene** que si f es analítica en $D \subset C$, la función $1/f$ es analítica en $D' \subset D$, donde $D' = \{z \in C: f(z) \neq 0\}$

Además se ve que si f y g son analíticas en D, la función $f/g$ es analítica en $D' \subset D$, donde $D' = \{z \in C: \ g(z) \neq 0\}$.

3) Su fórmula:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

define una función entera; en efecto la proposición 11 garantiza que la serie de potencias $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$ converge para todo $z \in C$, luego la función $e^z$ es analítica en C.

Consideremos un número complejo $z = x + iy$, entonces:

$$e^z = e^x \,(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

De donde obtenemos que:

$$|e^z| = e^x \neq 0, \qquad \text{para todo } z \in C.$$

En particular:

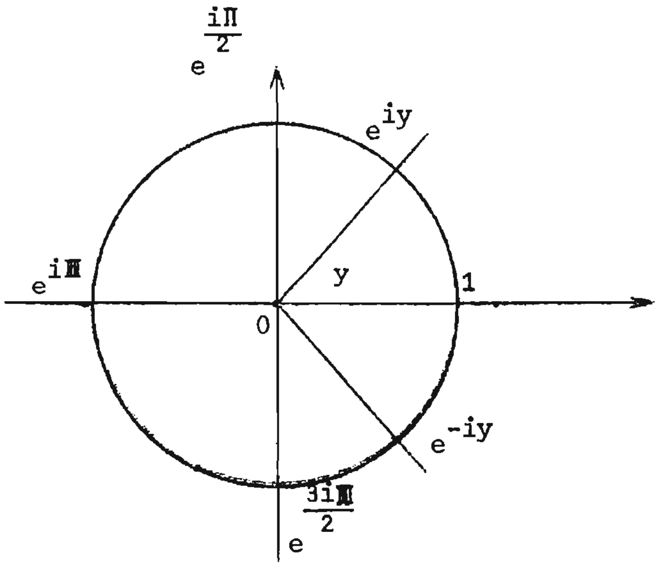
$$|e^{iy}| = 1.$$

La amplitud (argumento) del número complejo $e^z$ es un ángulo cuyo número real y es una medida en radianes.

Algunos valores de $e^z$ son:

$z = i\frac{\pi}{2} \rightarrow e^z = i$ ; $z = \frac{3i\pi}{2} \rightarrow e^z = -i$

$z = i\pi \rightarrow e^z = -1$ ; $z = 2i\pi \rightarrow e^z = 1$




4) La función $f(z) = e^{iz}$ de la variable compleja z es una función entera igual a la serie de potencias convergente:

$$f(z) = e^{iz} = 1 + i\frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{i^n z^n}{n!} + \ldots$$

para todo $z \in C$, luego $f(z) = e^{iz}$ es analítica en C.

5) Basandonos en el ejemplo 4 podemos definir en C las funciones:

a) $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

b) $\text{sen } z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

De donde obtenemos la relación de Euler:

$$e^{iz} = \cos z + i \text{ sen } z.$$

Como las funciones cos z y sen z pueden representarse por sus series de potencias convergentes para todo $z \in C$:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\text{sen } z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

se deduce que cos z y sen z son analíticas en C.

Nótese que los desarrollos de $e^z$, sen z y cos z son las se ries de Taylor alrededor del punto $z_o = 0$.

# CAPITULO III

## INTEGRACION CURVILINEA DE FUNCIONES COMPLEJAS

El objetivo central de esta parte es el estudio de la Integración de Funciones Complejas a lo largo de un camino y además algunas de sus propiedades; pero antes daremos las siguientes nociones introductorias:

### 3.0 CAMINOS Y CIRCUITOS

DEFINICION 22: Llamaremos camino a una función contínua,

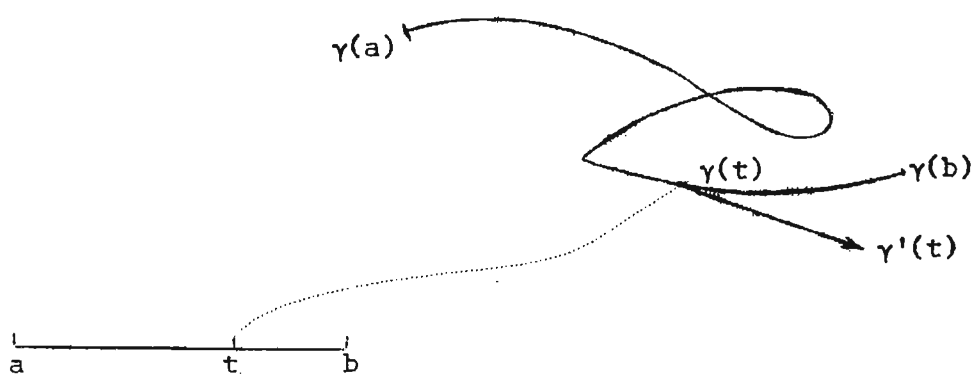
$$\gamma: \quad I = [a,b] \to C$$

definida en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$ (no reducido a un punto) hacia C, que se supone que es derivable con continuidad a trozos; es decir, que es una primitiva:

$$\gamma(t) = \int_a^t \gamma'(s)ds + C$$

de una función $\gamma'$ contínua a trozos en I.

Ilustramos la definición con la figura:



En esta gráfica vemos que cuando t barre con el intervalo $[a,b]$, el punto $\gamma(t)$ describe en el plano C una trayectoria $\gamma(I)$ (imagen de $\gamma$) que, en los puntos $\gamma(t)$ tales que $\gamma' \neq 0$ y contínua, admite una tangente de dirección igual a la del vector $\gamma'(t) \in C$.

EJEMPLOS

1) Si $\gamma$ es una función constante en I, $\gamma(I)$ es un conjunto unitario. Entonces $\gamma$ se llama camino constante.

2) La función $\alpha_\varepsilon(t) = e^{2\Pi i \varepsilon t}$, donde $\varepsilon \neq 0$, definida en $I = [0,1]$ - es un camino tal que $\gamma(I)$ es una parte del círculo unitario. $C = \{z: |z| = 1\}$. Si $\varepsilon \in Z$, $\gamma(I)$ es el círculo completo C. Se dice que $\alpha_n$ es el círculo unitario recorrido n veces, porque todo -- punto del círculo se obtiene para $|n|$ valores distintas de t.

3) Sean c y d dos puntos de C.

Definamos en $[0, 2]$ la función:

$$\gamma(t): \begin{cases} c(1-t) + dt, & 0 \leq t \leq 1 \\ d(2-t) + c(t-1), & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

La imagen $\gamma(I)$ es el segmento de extremos c y d; el camino $\gamma$ es el segmento recorrido en los dos sentidos. En el punto $t=1$ hay una discontinuidad para $\gamma'$.

NOTA: Es importante no confundir un camino $\gamma$ con la trayectoria $\gamma(I)$. A un camino se le puede llamar "Trayectoria Parametrizada". *

*: Cuando no se produzca confusión, un camino será la fig. de $\gamma(I)$ y su sentido de recorrido.

DEFINICION 23: Diremos que un camino $\gamma$ está contenido en un conjunto abierto $D \subset C$ si $\gamma(I) \subset D$. El punto $\gamma(a)$ se llama el origen del camino y $\gamma(b)$ el estremo. Para que dos puntos cualesquiera c y d de D -- puedan estar unidos por un camino, es suficiente y necesario que D sea conexo.

DEFINICION 24: Llamaremos circuito a un camino tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Los ejemplos 1 y 3 de caminos son también ejemplos de circuitos.

DEFINICION 25: Dado un camino $\gamma$, llamaremos camino opuesto a $\gamma$ (lo - representaremos por $\gamma_0$) el camino $\gamma_0(t) = \gamma(a+b-t)$ definido en I. El camino $\gamma_0$ tiene por origen el extremo $\gamma(b)$ de $\gamma$ y por extremo el - origen $\gamma(a)$ de $\gamma$; podemos decir que $\gamma_0$ es el camino $\gamma$ recorrido en -- sentido contrario.

DEFINICION 26: Sean dos caminos

$\gamma_1: \; I_1 = [a,b] \to C$

$\gamma_2: \; I_2 = [c,d] \to C$

tales que el origen $\gamma_2(c)$ de $\gamma_2$ sea el extremo $\gamma_1(b)$ de $\gamma_1$.

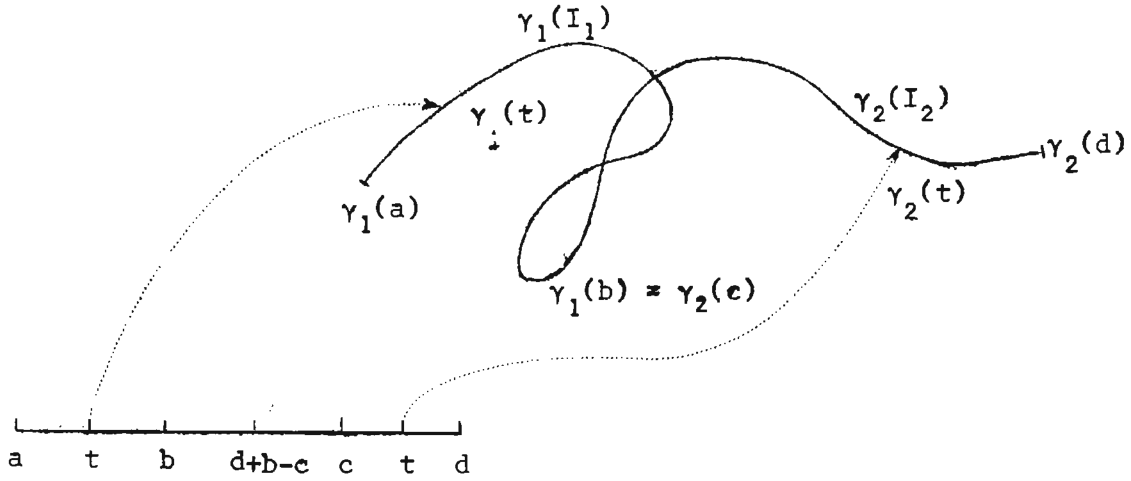
Llamaremos yuxtaposición de $\gamma_1$ y $\gamma_2$ (y la denotaremos por $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$) el camino:

$$\gamma: \; [a, d+b-c] \to C$$

definido así:

$$\gamma(t) \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t), & b \leq t \leq d+b-c \end{cases}$$

Ilustración gráfica:




En esta gráfica vemos que el origen de $\gamma_1 \vee \gamma_2$ es $\gamma_1(a)$ y el extremo de $\gamma_1 \vee \gamma_2$ es $\gamma_2(d)$.

NOTAS: Con esta nomenclatura, el ejemplo 3 de caminos puede escribirse así: $\gamma_0 \vee \gamma_{10}$ donde $\gamma_1$ es el camino $t \to c(1-t)+dt$ para $t \in [0,1]$.

En general, para todo camino $\gamma$, la yuxtaposición $\gamma \vee \gamma_0$ es un circuito cuyo origen es el de $\gamma$; en particular, un circuito es siempre la yuxtaposición de dos caminos.

DEFINICION 27: Sean $\gamma_1$ y $\gamma_2$ los mismos caminos de la definición anterior. Diremos que $\gamma_1$ y $\gamma_2$ son equivalentes si existe una biyección creciente $\psi$: $I_2 \to I_1$, contínua y derivable con continuidad a trozos, lo mismo que la recíproca $\psi^{-1}$, tal que $\gamma_2(t) = \gamma_1(\psi(t))$ en $I_2$.

## 3.1 INTEGRAL A LO LARGO DE UN CAMINO

DEFINICION 28: Sean $\gamma$ un camino y f una función compleja contínua en

$\gamma(I)$; (no suponemos que f está definida fuera de $\gamma(I)$ y tampoco que sea analítica). Entonces la función compuesta $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ es contínua en I y por la proposición 9 su integral está definida.

Llamaremos integral de f a lo largo del camino $\gamma$ al número complejo:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)dt.$$

La definición anterior nos muestra que la integral de una función compleja a lo largo de un camino $\gamma$ depende tanto del conjunto $\gamma(I)$ como de su parametrización $\gamma(t)$ (ver proposición 22).

<u>PROPOSICION 20</u>: Si $\gamma_1: [a,b] \to C$ y

$\gamma_2: [c,d] \to C$

son dos caminos equivalentes, entonces se tiene:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

<u>PRUEBA</u>: Sea $\psi: [c,d] \to [a,b]$ una biyección creciente, contínua y derivable con continuidad a trozos tal que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \psi$.

Luego $\gamma_2'(t) = \gamma_1'(\psi(t))\, \psi'(t)$ en $I_2$ excepto en un número finito de - puntos.

Utilizando la fórmula de cambio derivables

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du = \int_a^b f(\phi(t))\, \psi(t)dt$$

tenemos:

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_c^d f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt = \int_c^d f(\gamma_1(\psi(t)))\gamma_1'(\psi(t))\psi'(t)dt$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\psi(c)}^{\psi(d)} f(\gamma_1(u))\gamma_1'(u)du = \int_a^b f(\gamma_1(u))\gamma_1'(u)du$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

PROPOSICION 21: Si la función f es tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \gamma(I)$, entonces:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq M \int_a^b |\gamma'(t)|dt = ML$$ donde L es la longitud de la trayectoria $\gamma(t)$.

PRUEBA: Sabemos por la definición 28 que:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

La proposición 9 nos da como resultado que:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|dz.$$

Entonces por la definición 28 tenemos:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt$$

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt;$$

pero $|f(z)| \leq M$; $z \in \gamma(I)$ y como $f(\gamma(t)) = f(z)$ entonces:

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dt \right| \leq \int_a^b M|\gamma'(t)|dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)|dt = ML$$

PROPOSICION 22: Sean $\gamma$ y $\gamma_0$ dos caminos opuestos, entonces:

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz.$$

PRUEBA: Según la definición 25, se tiene:

$$\gamma_0(t) = \gamma(a + b - t) = -\gamma(t),$$

entonces:

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_b^a f(\gamma_0(t))\gamma_0'(t)dt$$

por definición 28.

Cambiando los límites de integración se tiene:

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = - \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = - \int_{\gamma} f(z)dz$$

DEFINICION 29: Cuando $\gamma$ es la yuxtaposición de dos caminos $\gamma_1$ y $\gamma_2$ se tiene:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

OBSERVACIONES: Como el segundo miembro de la igualdad anterior no cambia cuando se invierten los dos términos, se tiene que si $\gamma$ es un cir -

cuito, la integral $\int_{\gamma} f(z)dz$ es independiente del origen de $\gamma$.

Si $\gamma$ es un circuito constante se tiene $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$, para toda función $f$.

Por último, si el camino $\gamma$ está contenido en un abierto $D \subset C$, y $u$ es una función analítica en $D$, entonces, si $\Gamma$ es el camino compuesto $u(\gamma(t))$, se tiene:

$$\int_{\gamma} f(u(z))\, u'(z)dz = \int_{\Gamma} f(w)dw.$$

## 3.2 CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE LAS PRIMITIVAS DE LAS FUNCIONES ANALITICAS

La noción de Integral a lo largo de un camino nos permitirá establecer las condiciones bajo las cuales existe una función primitiva de una función analítica:

PROPOSICION 23: Para que una función $f$ analítica en $D$ admita una primitiva en $D$, es necesario y suficiente que para todo circuito $\gamma$ contenido en $D$, se tenga

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Cuando es así, toda primitiva $F$ de $f$ en $D$ se obtiene de la siguiente manera:

$$F(z) = \int_{\alpha(z)} f(u)du + c,$$

donde $\alpha(z)$ es un camino cualquiera contenido en D, de origen $z_0 \in D$ y de extremo z. La diferencia de dos primitivas en D es constante.

PRUEBA: a) Mostraremos que la condición es necesaria:

Si F es una primitiva de f en D, entonces para todo camino $\gamma$ contenido en D, tenemos:

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = f(\gamma(t))\gamma'(t) \quad \text{en } [a,b],$$

luego:

$$\int_\gamma f(u)du = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particular, si $\gamma$ es un circuito ($\gamma(a) = \gamma(b)$) se tiene:

$$\int_\gamma f(u)du = F(\gamma(a)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

Esto nos prueba además, que si una primitiva F de f en D existe, se tiene que la diferencia:

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\alpha(z)} f(u)du$$

es una constante para cualquier camino $\alpha(z)$.

b) En segundo lugar probaremos que la condición es suficiente.

Cuando existe una primitiva, la integral $\int_{\alpha(z)} f(u)du$ depende sólo de z y $z_0$ y no del camino $\alpha(z)$: en efecto si $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ son dos de esos caminos, $\gamma = \alpha(z) \vee \beta_0(z)$ es un circuito de origen $z_0$, luego la conclusión se deduce utilizando la proposición 22 y la definición 29:

$$\int_{\alpha(z)} f(u)du - \int_{\beta(z)} f(u)du = \int_\gamma f(w)dw = 0$$

La fórmula $F(z) = \int_{\alpha(z)} f(u)du + c$ define entonces una función F en D (una vez escogidas $z_0$ y c).

Nos falta determinar que esta función es analítica y tiene por derivada f: en efecto, para todo $z_1 \in D$, existe un disco $\overset{*}{D}$: $|z-z_1| < r$, $\overset{*}{D} \subset D$, en el cual f es desarrollable en serie de potenciss de $(z-z_1)$, luego -- existe una primitiva analítica $F_1$ de f en $\overset{*}{D}$ (por la proposición 18), la cual podemos suponer que anula en $z_1$. Para todo camino $\lambda(z)$ en $\overset{*}{D}$ de origen $z_1$ y extremo z, tenemos:

$$F_1(z) = \int_{\lambda(z)} f(u)du.$$

Luego, si $\alpha(z_1)$ es un camino en D de origen $z_0$ y extremo $z_1$, $\alpha(z_1) \vee \lambda(z)$ es un camino en D de origen $z_0$ y extremo z, se tiene por la definición 29:

$$F(z) = F(z_1) + F_1(z), \qquad \text{para todo } z \in \overset{*}{D}.$$

## 3.3 HOMOTOPIAS DE CAMINOS Y DE CIRCUITOS

DEFINICION 30: Sean D un conjunto abierto en C, $\gamma_1: I \to C$, $\gamma_2: I \to C$ dos caminos contenidos en D, definidos en el intervalo $I = [a,b]$.

Llamaremos homotopía de $\gamma_1$ a $\gamma_2$ en D a la función contínua $\psi: I \times J \to D$, donde $J = [c,d] \subset \mathbb{R}$, tal que $\psi(t, c) = \gamma_1(t)$ y $\psi(t, d) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in I$.

OBSERVACIONES: En esta definición exigimos la continuidad de la función $\psi(t, s)$ y no solo la continuidad de cada una de las funciones parciales. La idea intuitiva de homotopía de dos caminos es la de una "deformación contínua" que permite pasar del uno al otro.

DEFINICION 31: Diremos que un camino $\gamma_2$es homótopo de otro $\gamma_1$ en D, -- cuando existe una homotopía $\psi$ de $\gamma_1$ a $\gamma_2$ en D.

Cuando $\gamma_1$y $\gamma_2$ son circuitos en D, diremos que $\gamma_1$ y $\gamma_2$ son homótopos como circuitos en D, si existe una homotopía $\psi$: $I \times J \to D$, que cumple la propiedad suplementaria: $\psi(a,s) = \psi(b,s)$, para todo $s \in J$. Esta homotopía $\psi$ se llama homotopía de circuitos

DEFINICION 32: Diremos que un circuito $\gamma$ contenido en D es homótopo de un punto en D si es homótopo como circuito en D de un circuito constante. Diremos que un conjunto abierto conexo D es simplemente conexo, si todo circuito en D es homótopo de un punto en D.

## 3.4 TEOREMA DE CAUCHY

PROPOSICION 24: Sea $D \subset C$ un conjunto abierto conexo, y sea f una función analítica en D. Si $\gamma_1$ y $\gamma_2$ son dos circuitos contenidos en D y homótopos en D, se tiene:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

En el caso que D es simplemente conexo, se tiene $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$, para todo circuito contenido en D.

PRUEBA: Sean los circuitos $\gamma_1$ y $\gamma_2$ definidos así:

$$\gamma_1: \; I = [a,b] \to D$$

$$\gamma_2: \; I = [a,b] \to D$$

y $\psi$: $I \times J \to D$ una homotopía de $\gamma$ a $\gamma$ en D, donde $J = [c,d]$.

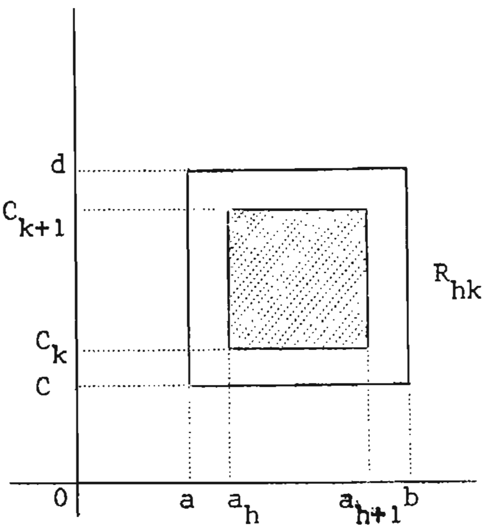
Dividamos los intervalos I y J en un número finito de subintervalos:

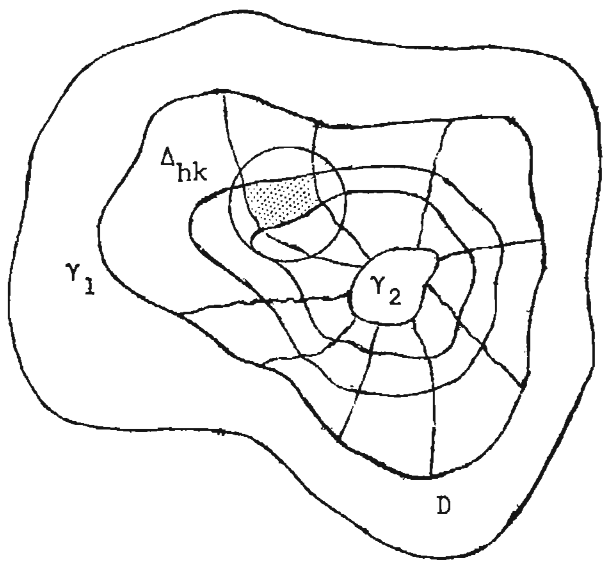
I : $[a_h, a_{h+1}]$, para $0 \leq h \leq n-1$

J : $[c_k, c_{k+1}]$, para $0 \leq k \leq m-1$

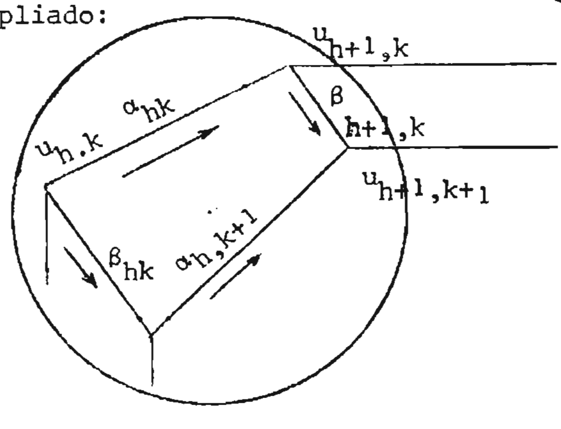
de forma que la imagen $\psi(R_{hk})$ del rectángulo $R_{hk} = [a_h, a_{h+1}] \times [c_k, c_{k+1}]$ esté totalmente contenido en un disco $\Delta_{hk} \subset D$, de centro $z_{hk}$, en el cual la función f sea desarrollable en serie de potencias de $(z-z_{hk})$ y por la proposición 18 admite una primitiva en $\Delta_{hk}$.

Lo anterior lo ilustramos con la siguiente figura.




Dibujemos el disco $\Delta_{hk}$ ampliado:



Consideremos ahora en $\Delta_{hk}$, los cuatro segmentos que unen las imágenes bajo $\psi$ de los cuatro vértices del rectángulo $R_{hk}$:

$\beta_{h,k}$ : de origen $u_{hk} = \psi(a_h, c_k)$
y extremo $u_{h,k+1} = \psi(a_h, c_{k+1})$

$\beta_{h+1,k}$ : de origen $u_{h+1,k} = \psi(a_{h+1}, c_k)$
y extremo $u_{h+1,k+1} = \psi(a_{h+1}, c_{k+1})$

$\alpha_{h,k}$ : de origen $u_{h,k}$ y de extremo $u_{h+1,k}$

$\alpha_{h,k+1}$ : de origen $u_{h,k+1}$ y de extremo $u_{h+1,k+1}$.

Utilizando la proposición 23 al circuito $\alpha_{hk} \vee \beta_{h+1,k} \vee \alpha_{0_{h,k+1}} \vee \beta_{0_{hk}}$ se tiene:

$$\int_{\beta_{hk}} f(z)dz + \int_{\alpha_{h,k+1}} f(z)dz = \int_{\alpha_{hk}} f(z)dz + \int_{\beta_{h+1,k}} f(z)dz$$

Observemos ahora que la yuxtaposición $\alpha_k = \alpha_{0,k} \vee \alpha_{1,k} \vee \ldots \vee \alpha_{n-1,k}$ es un circuito en D (puesto que $\psi$ es una homotopía de circuitos); por la misma razón, se tiene $\beta_{0,k} = \beta_{n,k}$.

Sumando las n relaciones de la integral a lo largo del cicuito $\alpha_0$ tenemos:

$$\int_{\alpha_k} f(z)dz = \int_{\alpha_{k+1}} f(z)dz.$$

de donde en particular para el circuito $\alpha_0$ resulta:

$$\int_{\alpha_0} f(z)dz = \int_{\alpha_m} f(z)dz.$$

El mismo razonamiento demuestra que:

luego: $$\int_{\alpha_0} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz \quad y \quad \int_{\alpha_m} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

En el caso que D es simplemente conexo y la función f es analítica y admite una primitiva en D, la proposición 23 nos garantiza que para todo circuito $\gamma$ contenido en D se tiene

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

## 3.5 INDICE DE UN PUNTO RESPECTO A UN CIRCUITO

DEFINICION 33: Sea $\gamma : I = [c,d] \to C$ un circuito en C y sea a un punto de C tal que $a \notin \gamma(I)$. Entonces el número (entero positivo o negativo)

$$j(a;\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z-a}$$

se llama índice de a respecto al circuito $\gamma$.

Este número es la expresión matemática que corresponde a la noción intuitiva del número de veces que el circuito $\gamma$ gira alrededor de a.

En efecto, para $t \in I$ escribamos

$$h(t) = \int_{s}^{t}\frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s) - a}$$

de forma que $2\pi i j(a;\gamma) = 2\pi i \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z-a} = h(d).$

Como h es una primitiva de una función contínua, tenemos: $h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$ excepto en un número finito de puntos de I.

Sea $g(t) = e^{-h(t)}(\gamma(t) - a)$ entonces:

$$g'(t) = -h'(t)e^{-h(t)}(\gamma(t)-a) + \gamma'(t)e^{-h(t)}).$$

Sustituyendo el valor de $h'(t)$ en $g'(t)$ se tiene:

$$g'(t) = \frac{-\gamma'(t)e^{-h(t)}}{\gamma(t) - a}(\gamma(t) - a) + \gamma'(t)e^{-h(t)}$$

$$g'(t) = -\gamma'(t)e^{-h(t)} + \gamma'(t)e^{-h(t)} = 0.$$

Luego la función contínua g es constante en I, y en particular se tiene: $g(c) = g(d)$; pero $h(c) = 0$, así $g(c) = \gamma(c)-a = e^{-h(d)}(\gamma(d)-a) = g(d)$.

Por hipótesis $\gamma$ es un circuito $(\gamma(d) = \gamma(c))$ entonces:

$$\gamma(c) - a = e^{-h(d)}(\gamma(c) - a)$$

por lo tanto $1 = e^{-h(d)}$, de donde $h(d) = 2n\pi i$ para $n \in Z$.

PROPOSICION 25: Sean a un punto de C, $\gamma_1$ y $\gamma_2$ dos circuitos en C - {a} homótopo en C - {a} entonces se tiene: $j(a; \gamma_1) = j(a; \gamma_2)$.

PRUEBA: Como $C - \{a\} \subset C$ es un conjunto abierto conexo, podemos apli - car la proposición 24 a la función $\frac{1}{z-a}$ que es analítica en C - {a} (ver ejemplo 2 de funciones analíticas), así tenemos:

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-a}\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-a}\,dz$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad anterior por $\frac{1}{2\pi i}$ tenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-a},$$

y por la definición 33 tenemos $j(a; \gamma_1) = j(a; \gamma_2)$.

<u>PROPOSICION 26</u>: Sea $D \subset C$ un conjunto abierto simplemente conexo y sea $\gamma$ un circuito contenido en D. Entonces para todo punto $a \notin D$ se tiene: $j(a; \gamma) = 0$.

<u>PRUEBA</u>: Sabemos por el ejemplo 2 de funciones analíticas que $\frac{1}{z-a}$ es una de ellas en D.

La proposición 24 aplicada a esta función nos da como resultado:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 0,$$

pues D es simplemente conexo.

Multiplicando la igualdad anterior por $\frac{1}{2\pi i}$ tenemos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 0$$

y por la definición 33 resulta que $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = j(a; \gamma) = 0$

<u>PROPOSICION 27</u>: Sea $\varepsilon_n : t \to e^{nit}$, para todo $t \in [0, 2\pi]$, el círculo unidad recorrido n veces (n entero positivo o negativo). Para todo z tal que $|z| < 1$ se tiene $j(z; \varepsilon_n) = n$ y para todo z tal que $|z| > 1$ se tiene $j(z; \varepsilon_n) = 0$.

<u>PRUEBA</u>: Tomemos un punto $z_0$ del disco unitario D: $|z| < 1$.

Sea $z_0 = 0$; entonces, haciendo $u(t) = e^{nit}$, se tiene:

$$j(0; \varepsilon_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon_n} \frac{du}{u} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{n\,i\,e^{nit}}{e^{nit}}$$

$$= \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi\, n}{2\pi} = n.$$

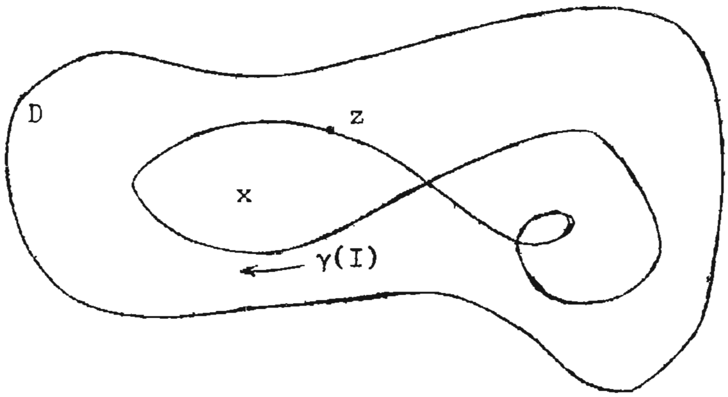
Para probar la segunda parte de la proposición, tomemos el punto $z_1$ en el disco D': $|z| > 1$; entonces $z_1$ no pertenece al disco abierto $|z| < |z_1|$ y el disco D' está contenido en el disco $|z| < |z_1|$. Como un disco abierto es simplemente conexo, la afirmación $j(z_1, \varepsilon_n) = 0$ - se deduce de la proposición 26.

## 3.6 FORMULA DE CAUCHY

DEFINICION 34: Sea $D \subset C$ un conjunto abierto simplemente conexo, y - sea $\gamma: I \to D$ un circuito en D. Entonces, para toda función analítica f en D y todo punto $x \in D - \gamma(I)$, la fórmula de Cauchy es:

$$j(x; \gamma)\, f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - x}$$

Ilustramos la definición con la gráfica:




OBSERVACION: La fórmula anterior es interesante cuando $j(x; \gamma) \neq 0$, Por ejemplo, si D contiene un disco cerrado $|z-a| \leq r$, se tiene para todo x del disco $|x-a| < r$:

$$f(x) = \frac{1}{2\Pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-x} dz$$

donde $\gamma$ es el circuito $\gamma(t) = a + re^{it}$ para $t \in [0, 2\Pi]$ de la proposición anterior.

Tenemos entonces una fórmula que nos da los valores de f en el disco $|x-a| < r$ cuando se les conoce sobre el círculo $|x-a| \leq r$.

<u>PROPOSICION 28</u>: Sea $\gamma$: $I = [b,c] \to C$ un camino en C y sea $g$: $\gamma(I) \to C$ una función definida y contínua en $\gamma(I)$. Entonces la - función:

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(u)du}{u - z}$$

está definida y es analítica en $C - \gamma(I)$. Más exactamente, para todo punto $a \in C - \gamma(I)$, si hacemos:

$$C_n = \int_\gamma \frac{g(u)du}{(u-a)^{n+1}} \quad ,$$

para todo $n \geq 0$, se tiene una serie de potencias convergente:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

en todo el disco abierto de centro a y de radio la distancia $d(a, \gamma(I))$.

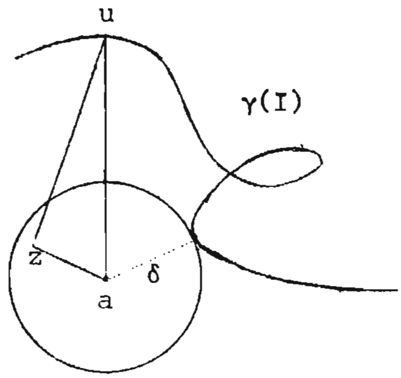
Por otra parte se tiene:

$$f^{(n)}(a) = n!\, C_n = n! \int_\gamma \frac{g(u)du}{(u-a)^{n+1}}$$

PRUEBA: Sea $\delta = d(a, \gamma(I)) > 0$ y supongamos que $|z-a| = q\delta$ para $0 \leq q < 1$.

Por definición se tiene que $\delta = d(a, \gamma(I)) = \inf_{u \in \gamma(I)} |u-a|$ entonces

$|u-a| \geq \delta$ para todo $u \in \gamma(I)$, por lo tanto $|z-a| \leq q|u-a| < 1$, es decir $\left|\frac{z-a}{u-a}\right| \leq q < 1$.




Podemos escribir entonces para todo $u \in \gamma(I)$:

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{(u-a)\left(1 - \frac{z-a}{u-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}},$$

donde la serie es convergente, con las mayoraciones:

$$\left|\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}\right| \leq \frac{q^n}{\delta}$$

para $n \geq 0$.

Ahora, por definición tenemos:

$$f(z) = \int_b^c \frac{g(\gamma(t))\,\gamma'(t)dt}{\gamma(t) - z} = \int_b^c g(\gamma(t))\,\gamma'(t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}}\right)dt$$

Como $\left|\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}\right| \leq \frac{q^n}{\delta}$ entonces cuando t recorre I, la serie integrada es uniformememte convergente: en efecto, puesto que g es continua y $\gamma'$ contínua a trazos en $[b, c]$, existe un número M tal que: $|g(\gamma(t))\ \gamma'(t)| \leq M$, para todo $t \in \gamma(I)$ (proposición 7)

Por lo tanto nos resulta:

$$\left|g(\gamma(t))\ \gamma'(t)\ \frac{(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}}\right| \leq M\,\frac{q^n}{\delta}.$$

Aplicando ahora el corolario 2 (capítulo I) obtenemos la serie de potencias convergente:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \int_b^c \frac{g(\gamma(t))\ \gamma'(t)dt}{(\gamma(t)-a)^{n+1}} ;$$

en otras palabras tenemos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \int_\gamma \frac{g(u)du}{(u-a)^{n+1}}$$

y por último: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n.$

PROPOSICION 29: Si una función f es analítica en un conjunto abierto D, entonces para todo $a \in D$, la serie de Taylor de f en un punto a es convergente y tiene por suma f(z) en todo el disco abierto de centro a y radio la distancia de a a $C - D$.

PRUEBA: Si $0 < r < d(a, C - D)$, podemos aplicar la fórmula de Cauchy (definición 34) en el disco $|z-a| < r$ para el circuito

$$\gamma: t \to a + r\,e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Utilizando la proposición 27 con $n = 1$, tenemos $j(z;\gamma) = 1$, luego por la proposición 28, obtenemos para la función f un desarrollo en serie de potencias de (z-a):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

convergente en $|z-a| < r$.

Si hacemos $C_n = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}$ obtenemos que el desarrollo anterior es la serie de Taylor:

$$f(z) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(z-a) + \dots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(a)(z-a)^p + \dots$$

converge a f(z) en el disco $|z-a| < r$ según la proposición 17.

## 3.7 DESIGUALDADES DE CAUCHY Y TEOREMA DE LIOUVILLE

PROPOSICION 30: (Desigualdades de Cauchy)

Sea f una función analítica en un conjunto abierto $D \subset C$; -- sean $a \in D$ y $\Delta$: $|z-a| \leq r$ un disco cerrado de centro a tal que $\Delta \subset D$ y sea M el extremo superior de $|f(z)|$ sobre el círculo $\Gamma$: $|z-a| = r$, frontera de $\Delta$. Entonces, para todo entero $n \geq 0$, se tiene:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{r^n}$$

con el convenio $f^{(0)} = f$.

PRUEBA: La fórmula $f^{(n)}(a) = n!\, C_n = n! \int_\gamma \frac{g(u)du}{(u-a)^{n+1}}$ de la proposi-ción 28 aplicada a la fórmula de Cauchy:

$$j(x;\gamma)\, f(x) = \frac{1}{2\Pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{z - x}$$

nos da como resultado:

$$j(x;\gamma)\, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\Pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-x)^{n+1}},$$

para $n \geq 1$.

Aplicando ahora esta última fórmula para el circuito: $\gamma(t) = a + r\, e^{it}$, $t \in [0, 2\Pi]$ y para el punto $x = a$, obtenemos:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\Pi r^n} \int_0^{2\Pi} f(a + r\, e^{it})\, e^{-nit}\, dt.$$

Utilizando además la proposición 9 resulta:

$$|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\Pi r^n} \left| \int_0^{2\Pi} f(a + r\, e^{it})\, e^{-nit}\, dt \right| \leq \frac{n!}{2\Pi r^n} \int_0^{2\Pi} |f(a + r\, e^{it})| |e^{-nit}| dt$$

Por hipótesis tenemos $\operatorname{Sup} |f(z)| = M$ entonces $|f(a + r\, e^{it})| \leq M$ y $|e^{-nit}| = 1$, luego:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\Pi r^n} \int_0^{2\Pi} M\, dt = \frac{n!M}{r^n}.$$

PROPOSICION 31: (Teorema de Liouville)

Una función entera acotada en C es necesariamente constante.

PRUEBA: Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ una función entera, siendo la serie de potencias convergente en C. Como $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in C$, podemos usar la proposición 30 tomando un disco abierto $|z| < r$, donde r es arbitrariamente grande.

Obtenemos por lo tanto, para $n \geq 1$:

$$|C_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

pero $\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^n} = 0$ pues $n \geq 1$, con lo que nos resulta: $C_n = 0$ para $n \geq 1$.

Por último para $n = 0$ obtenemos el resultado deseado:

$$f(z) = C_0 \quad \text{en } C.$$

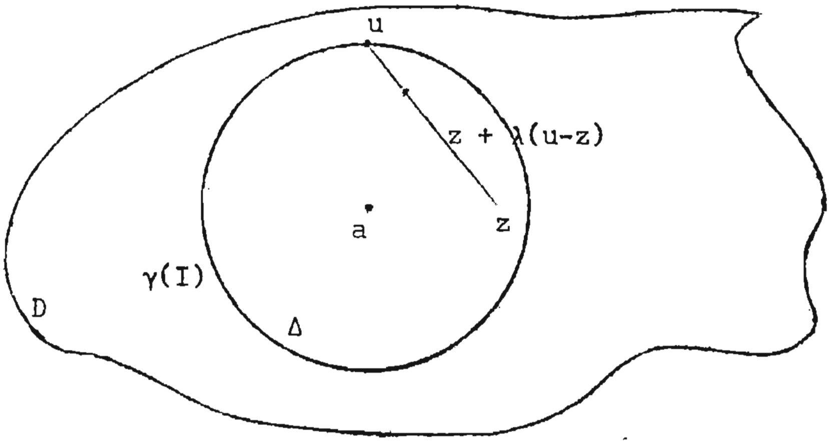
## 3.8 CONDICIONES DE CAUCHY PARA LA DERIVADA DE UNA FUNCION COMPLEJA

El hecho de ser contínuamente derivable caracteriza a las funciones analíticas de una variable compleja.

PROPOSICION 32: Toda función compleja definida y continuamente derivable en un conjunto abierto $D \subset C$ es analítica en D (y por lo tanto es indefinidamente derivable en D).

PRUEBA: Sea f una función contínuamente derivable en D.

Probaremos que para todo disco cerrado $\Delta$: $|z-a| \leq r$, $\Delta \subset D$, f(z) es igual, en $\Delta'$: $|z-a| < r$, a la suma de una serie de potencias de (z-a) convergente.




Consideremos el circuito: $\gamma(t) = a + r e^{it}$; $t \in [0, 2\Pi]$.

En virtud de la proposición 28, nos bastará demostrar que para z tal que $|z-a| < r$ se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\Pi i} \int_\gamma \frac{f(u)du}{u - z}$$

Para ello, hagamos, para $0 \leq \lambda < 1$:

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\Pi i} \int_\gamma \frac{f(z+\lambda(u-z))}{u - z} du.$$

Se tiene:

para $\lambda = 1$

$$g(1) = \frac{1}{2\Pi i} \int_\gamma \frac{f(u)du}{u - z}$$

para $\lambda = 0$

$$g(0) = \frac{1}{2\Pi i} \int_\gamma \frac{f(z)du}{u - z} = f(z). \frac{1}{2\Pi i} \int_\gamma \frac{du}{u-z} = f(z)$$

ya que $\frac{1}{2\Pi i} \int_\gamma \frac{du}{u-z} = j(z; \gamma) = 1$ por la proposición 27.

Para probar que $f(z) = \frac{1}{2\Pi i} \int_\gamma \frac{f(u)du}{u - z}$, nos basta, por lo tanto, verificar que la función g es constante en $[0,1]$.

La escribimos ahora en la forma:

$$g(\lambda) = \frac{r}{2\Pi} \int_0^{2\Pi} \frac{f(z+\lambda(a + r e^{it} - z))}{a + r e^{it} - z} e^{it} dt.$$

La hipótesis de derivabilidad hecha para f demuestra que g es contínua en $[0,1]$ y derivable en $]0,1[$, viniendo dada su derivada por:

$$g'(\lambda) = \frac{r}{2\Pi} \int_0^{2\Pi} f'(z+\lambda(a + r e^{it} - z))e^{it} dt.$$

Pero:

$$\frac{\partial}{\partial t} (f(z+\lambda(a + r e^{it} - z))) = i\lambda r e^{it} f'(z+\lambda(a + r e^{it} - z)$$

La fórmula de $g'(\lambda)$ para $0 < \lambda < 1$ nos da por lo tanto:

$$g'(\lambda) = \frac{1}{2\Pi i} f(z+\lambda(a + r e^{it} - z))\Big|_0^{2\Pi} = 0$$

ya que $e^{2\Pi i} = e^{i0} = 1$.

Luego g es constante en $]0,1[$ y como es contínua en $[0,1]$ se tiene $g(0) = g(1)$.

PROPOSICION 33 (Condiciones de Cauchy)

Toda función compleja analítica o no, definida en un conjunto abierto $D \subset C$, puede escribirse en la forma:

$$f(x + iy) = P(x,y) + i\, Q(x, y),$$

donde P y Q son funciones reales definidas en D.

PRUEBA: Decir que f es contínua en D, equivale a decir que P y Q lo son.

Supongamos f contínua, buscaremos las condiciones de P y Q bajo las cuales la función f admita en $z_0 = x_0 + i\, y_0$, una derivada respecto a la variable compleja z.

De acuerdo con la definición 20:

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{P(x_0+s, \quad y_0+t) + i\, Q(x_0+s, \quad y_0+t) - [P(x_0,y_0) + i\, Q(x_0,y_0)]}{s + it}$$

debe existir y además su valor debe ser el mismo a lo largo de cada recta $\alpha s + \beta t = 0$ que pase por el origen.

Tomemos entonces como rectas los dos ejes de coordenadas:

Donde $t = 0$, tenemos:

$$\lim_{s\to 0} \frac{P(x_0+s,\, y_0) + i\, Q(x_0+s,\, y_0) - [P(x_0,y_0) + i\, Q(x_0,y_0)]}{s} = f'(z_0)$$

y escrito en otra forma:

$$\lim_{s\to 0} \frac{P(x_0+s,\, y_0) - P(x_0,y_0)}{s} + i \lim_{s\to 0} \frac{Q(x_0+s,\, y_0) - Q(x_0,y_0)}{s} = f'(z_0)$$

Luego, el límite anterior tiene por valor:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,\, y_0) + i\, \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,\, y_0) = f'(z_0): \quad (1)$$

Y donde $s=0$, tenemos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{P(x_0,\, y_0+t) + i\, Q(x_0,\, y_0+t) - [P(x_0,\, y_0) + i\, Q(x_0,\, y_0)]}{it}$$

y escrito en la forma:

$$\lim_{t\to 0} \frac{P(x_0, \quad y_0+t) - P(x_0,\, y_0)}{it} + i \lim_{t\to 0} \frac{Q(x_0,\, y_0+t) - Q(x_0,\, y_0)}{it} = f'(z_0)$$

Luego se tiene: $-\frac{i\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) = f'(z_0)$: (2)

Igualando (1) y (2) resulta:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$$

y
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Las dos últimas igualdades se conocen como las condiciones de Cauchy.

Reciprocamente: si las funciones P y Q admiten derivadas parciales de primer orden, contínuas en D y si además verifican las condiciones -- (ecuaciones) de Cauchy $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$; $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$

entonces la función $f(x+iy) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$ es analítica en D.

PRUEBA: Nos bastará probar que en todo punto $(x_0, y_0)$ de D

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{P(x_0+s,\ y_0+t) + i\,Q(x_0+s,\ y_0+t) - [P(x_0,y_0) - i\,Q(x_0, y_0)]}{s + it}$$

existe, con lo que $f(z)$ tendrá una derivada en todo punto de D: $f'(z)$; la hipótesis de continuidad de las derivadas parciales de P y Q demostrará que $f'(z)$ es contínua en D, luego por la proposición 32 f será analíticamen D; por lo tanto, consideremos la diferencia:

$$F(s, t) = P(x_0+s,\ y_0+t) + i\,Q(x_0+s,\ y_0+t) - P(x_0, y_0) -$$
$$- i\,Q(x_0, y_0) - (s+it)\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$$

Se tiene entonces:

$$R\,F(s,t) = P(x_0+s,\ y_0+t) - P(x_0,\ y_0) - s\,\frac{\partial P}{\partial x} + t\,\frac{\partial Q}{\partial x}\,,$$

lo que podemos escribir, en vista de las ecuaciones de Cauchy,así:

$$R\,F(s,t) = P(x_0+s,\ y_0+t) - P(x_0,\ y_0) - s\,\frac{\partial P}{\partial x} - t\,\frac{\partial P}{\partial y}$$

También:

$$I\,F(s,t) = Q(x_0+s,\ y_0+t) - Q(x_0,\ y_0) - s\,\frac{\partial Q}{\partial x} - t\,\frac{\partial Q}{\partial y}$$

Como las derivadas parciales de P y Q son contínuas, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $r > 0$ tal que para $|s| \leq r$ y $|t| \leq r$, se tenga

$$|R\,F(s,t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,|s + it| \qquad y \qquad |I\,F(s,t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,|s + it|$$

Luego:

$$|F(s,t)| \leq |R\,F(s,t)| + |I\,F(s,t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|s + it|,$$

lo que demuestra la existencia del límite que define la derivada $f'(z)$.

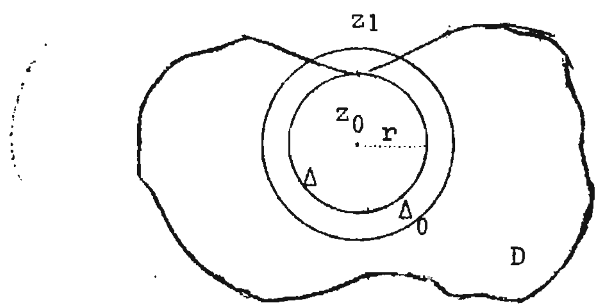
# CAPITULO IV

## FUNCIONES ANALITICAS: SINGULARIDADES Y RESIDUOS

Aquí tendremos la oportunidad de aplicar en forma teórica las nociones desarrolladas en el Capítulo anterior.

### 4.0 SINGULARIDADES

Sea f una función analítica en un conjunto abierto conexo $D \subset C$; si $z_0$ es un punto de D, se sabe por la proposición 29 que la serie de Taylor de f en el punto $z_0$ converge en el mayor disco abierto $\Delta$: $|z-z_0| < r$, $\Delta \subset D$, pero puede ocurrir que el disco de convergencia $\Delta_0$ de esta serie sea mayor que $\Delta$.



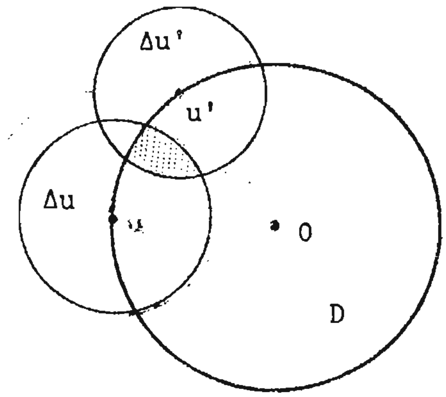

Como la frontera $|z-z_0| = r$ de $\Delta$ contiene por lo menos un punto $z_1$ de la frontera de D, vemos que existe una función g analítica en $\Delta_0$ y que coincide con f en el conjunto abierto $\Delta_0 \cap D$.
Lo anterior nos lleva a clasificar los puntos de frontera $z_1 \in D$ en dos clases:

<u>DEFINICION 35:</u> Diremos que un punto $z_1$ es regular para f si existe un conjunto abierto conexo $\Delta_0$ tal que $z_1 \in \Delta_0$ y una función g analítica en $\Delta_0$, que coincida con f en un conjunto abierto $D_1 \subset D \cap \Delta_0$, del cual $z_1$ es punto frontera. Si no ocurre lo antes dicho, diremos que $z_1$ es punto singular para f.

<u>PROPOSICION 34:</u> Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ una serie de potencias de z, con radio de convergencia $R > 0$ y finito. Entonces existe por lo menos un punto frontera del disco de convergencia D: $|z-z_0| < R$ de la serie, tal que es un punto singular para f.

<u>PRUEBA:</u> Supongamos lo contrario; entonces, para todo punto frontera $u \in D$ tal que $|u| = R$, existiría un disco abierto $\Delta u$ de centro u y radio $r > 0$, tal que hubiera una función $g_u$ analítica en $\Delta u$ coincidente con f en $D \cap \Delta u$.

Además, para dos puntos u, u' tales que $u \neq u'$ y $|u| = |u'| = R$, si $\Delta u \cap \Delta u' \neq \phi$, entonces las funciones $g_u$ y $g_{u'}$ coinciden en $\Delta u \cap \Delta u'$: en efecto, entonces $D \cap \Delta u \cap \Delta u' \neq \phi$ es un conjunto abierto, en donde, por hipótesis, $g_u$ y $g_{u'}$ coinciden con f, y como $\Delta u \cap \Delta u'$ es conexo, $gu = g_{u'}$ por la proposición 19.




Sea D' un conjunto abierto tal que $D' = D \cup \Delta u$ cuando u recorre el cículo $|u| = R$ (figura anterior). Podemos definir en D' una función g así: $g=f$ en D y $g=gu$ en cada uno de los discos $\Delta u$. Esta función g es analítica y prolonga f. Por definición, los puntos del círculo $|u| = R$ pertenecen todos a D', por lo tanto el mayor disco abierto $D_o \subset D'$ tiene un radio $R_o > R$. La serie de Taylor de g en el punto o sería convergente en $D_o$; pero esta serie es la misma que la de f, así llegamos a una -- contradicción, lo que prueba el enunciado.

## 4.1 SINGULARIDADES AISLADAS

DEFINICION 36: Sea D un conjunto abierto en C; diremos que un punto frontera $a \in D$ es aislado si existe un disco abierto $\Delta$: $|z-a| < r$ el cual tenga todos los puntos de D excepto el punto a.
Lo anterior equivale a decir que en $\Delta$ no existe ningún punto frontera de D distinto de a.

**PROPOSICION 35:** Si $r_1 < r < r' < r_2$ y si designamos por $\gamma(t) = a + r\, e^{it}$ un circuito y $\gamma'(t) = a + r' e^{it}$ otro circuito ($0 \leq t \leq 2\Pi$), entonces, para toda función analítica en la corona abierta $S: r_1 < |z-a| < r_2$, se tiene

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma'} f(z)dz.$$

**PRUEBA:** En vista de la proposición 24 nos bastará demostrar que $\gamma$ y $\gamma'$ son homótopos como circuitos en S.

Para ello consideremos la homotopía: $\psi(t,s) = a + (r(1-s) + sr')e^{it}$, donde $0 \leq t \leq 2\Pi$ y $0 \leq s \leq 1$.

Según las definiciones 30 y 31 debemos probar que:

$\psi(t,0) = \gamma(t)$ y $\psi(t,1) = \gamma'(t)$ para todo $t \in [0, 2\Pi]$.

Además $\psi(0,s) = \psi(2\Pi,s)$, para $s \in [0,1]$

En efecto, tenemos:

$\psi(t,0) = a + (r(1-0) + 0r')e^{it} = a + r\, e^{it} = \gamma(t)$

y

$\psi(t,1) = a + (r(1-1) + 1r')e^{it} = a + r' e^{it} = \gamma'(t)$.

Por otra parte:

$\psi(0,s) = a + (r(1-s) + sr')e^{i} = a + r(1-s) + sr'$

$\psi(2\Pi,s) = a + (r(1-s) + sr')e^{i2\Pi} = a + r(1-s) + sr'$

Luego $\psi(0,s) = \psi(2\Pi,s)$

Por lo tanto $\gamma(t)$ y $\gamma'(t)$ son homotopos como circuitos en S.

PROPOSICION 36: Sea f una función analítica en S. Con los mismas hipôtesis de la proposición anterior se tiene para $r < |x-a| < r'$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(z)dz}{z - x} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - x}$$

PRUEBA: Definamos en S la siguiente función

$$\begin{cases} g(z) = \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}, & z \neq x \\ g(x) = f'(x), & z = x \end{cases}$$

Esta función g es analítica en S; en efecto: es evidente si $z \neq x$ (por ejemplo 2 de funciones analíticas).

Falta analizar que pasa en un externo del punto x; para ello sea $\Delta$: $|z-x| < r$ un disco tal que $\Delta C D$.

Por la proposición 17 sabemos que la serie de Taylor

$$f(z) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(z-x) + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(z-x)^n + \dots$$

es convergente en $\Delta$; la definición de la función g muestra que para todo $z \in \Delta$, g(z) es la suma de la serie de potencias de (z-x) convergente:

$$f'(x) + \frac{f''(x)}{2!}(z-x) + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!}(z-x)^{n-1} \dots$$

por lo tanto g es analítica en S.

Aplicando ahora la proposición 35 a la función g(z), encontramos:

$$\int_{\gamma} \left(\frac{f(z) - f(x)}{z - x}\right) dz = \int_{\gamma'} \left(\frac{f(z) - f(x)}{z - x}\right) dz$$

entonces:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-x} - f(x) \int_{\gamma} \frac{dz}{z-x} = \int_{\gamma'} \frac{f(z)dz}{z-x} - f(x) \int_{\gamma'} \frac{dz}{z-x}.$$

Como $x \neq z$ $(x \notin \gamma(I))$ se tiene por la proposición 27:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-x} = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_{\gamma'} \frac{dz}{z-x} = 2\pi i$$

luego:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-x} = \int_{\gamma'} \frac{f(z)dz}{z-x} - f(x)\, 2\pi i,$$

de donde obtenemos por último:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-x} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(z)dz}{z-x}$$

De lo anterior se deduce un desarrollo en serie de f(z) que sustituye el desarrollo de Taylor:

PROPOSICION 37: (Serie de Laurent)

Con las condiciones de la proposición anterior, se tiene, para toda función f analítica en S y todo $z \in S$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n},$$

donde la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ es convergente para $|z-a| < r_2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}$ es convergente para $|z-a| > r_1$. Los coeficientes $C_n$ y $d_n$ vienen dados por las fórmulas:

$$C_n = \frac{1}{2\Pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} ; \qquad d_n = \frac{1}{2\Pi i} \int_\gamma f(z)(z-a)^{n-1}dz$$

válidas para todo circuito $\gamma(t) = a + r e^{it}$; $0 \leq t \leq 2\Pi$, y $r_1 < r < r_2$.

La expresión para f(z) se llama Serie de Laurent de f en S.

PRUEBA: En efecto, sea z un punto cualquiera de S (corona - abierta); como $r_1 < |z-a| < r_2$, podemos encontrar dos números r y r' tales que $r_1 < r < |z-a| < r' < r_2$.

Por la proposición 28 se tiene:

$$\frac{1}{2\Pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(u)du}{u - z} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$$

donde

$$C_n = \frac{1}{2\Pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(u)du}{(u-a)^{n+1}}$$

y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ es convergente para $|z-a| < r'$.

Por otra parte, para $|u-a| = r$, podemos escribir:

$$\frac{1}{u-z} = - \frac{1}{z-a} \left( \frac{1}{1 - \frac{u-a}{z-a}} \right) = - \left( \frac{1}{z-a} + \ldots + \frac{(u-a)^{n-1}}{(z-a)^n} + \ldots \right.$$

donde la serie es convergente para:

$$\left| \frac{(u-a)^{n-1}}{(z-a)^n} \right| = \frac{r^{n-1}}{|z-a|^n} = \frac{1}{r} \left| \frac{r}{z-a} \right|^n .$$

Como f es contínua (luego acotada) en el círculo $|u-a| = r$, la serie de têrmino general

$$\frac{r^n\ f(a + r\ e^{it})e^{nit}}{(z-a)^n}$$

es uniformemente convergente para $0 \leq t \leq 2\Pi$ por la proposición 7.

Según el corolario 2 (Capítulo I) se tiene:

$$-\frac{1}{2\Pi i}\int_{\gamma}\frac{f(u)du}{u-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{(z-a)^n}$$

para $d_n = \frac{1}{2\Pi i}\int_0^{2\Pi} i\ r^n\ f(a + r\ e^{it})e^{nit}\ dt = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\gamma} f(u)(u-a)^{n-1}du$,

siendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{(z-a)^n}$ convergente para $|z-a| > r$.

Teniendo en cuenta la proposición 35 y el hecho de que $\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ y $f(z)(z-a)^{n-1}$ son funciones analíticas en S, podemos sustituir en las expresiones de $C_n$ y $d_n$ los radios r y r' por cualquier número r" tal que $r_1 < r" < r_2$, por lo tanto las series $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{(z-a)^n}$ convergen en $|z-a| < r_2$ y $|z-a| > r_1$ respectivamente.

Luego, como f es analítica en S, para $r < |z-a| < r'$ se tiene por la proposición 36:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(u)du}{u-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(u)du}{u-z}$$

y por el desarrollo anterior se llega finalmente a:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n/(z-a)^n$$

## 4.2 FUNCION ANALITICA EN UN ENTORNO DE UN PUNTO SINGULAR AISLADO

Cuando se estudia el comportamiento de una función analítica f en un"disco punteado" $\Delta - \{a\}$: $0 < |z-a| < r$, se puede, en virtud de lo dicho antes, asociarle de un modo único su desarrollo de Laurent.

DEFINICION 37: En el desarrollo de Laurent la función $u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}$ se llama la parte singular de f en el punto a.

Clasificaremos los puntos frontera aislados según la naturaleza de la - parte singular correspondiente; por lo tanto se consideran los siguientes casos:

1º. Si u(z) es identicamente nula ($d_n = 0$ para $n \geq 1$) entonces se tiene para $0 < |z-a| < r$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$$

pero esta función es analítica en el disco abierto $\Delta$: $|z-a| < r$, luego prolonga f a $\Delta$.

Inversamente, si f puede ser extendida en una función analítica en $\Delta$, la proposición 24 demuestra que: $d_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)(z-a)^{n-1}dz = 0$ para $n \geq 1$.

Este es el caso en que a es un punto frontera regular para f. Cuando f no es identicamente nula, el número más pequeño $m \geq 0$ tal que $C_m \neq 0$, se llama orden de f en el punto a y lo representamos por $w(a; f)$.

Decir que $w(a; f) = 0$ significa que la función f extendida en $\Delta$ no se anula en a; si $w(a; f) = m \geq 1$, podemos escribir $f(z) = (z-a)^m f_1(z)$, donde $f_1(a) \neq 0$ y se dice que a es un cero múltiple de orden m de f (cero simple, doble, triple, etc. para m = 1, 2, 3, ...)

2º. Si la función $v(x) = u(a + \frac{1}{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n$ es un polinomio no identicamente nulo, entonces:

$$u(z) = \frac{d_1}{z-a} + \frac{d_2}{(z-a)} + \dots + \frac{d_n}{(z-a)^n}$$

para $d_n \neq 0$.

Se dice en este caso que a es un polo múltiple de orden n de f (polo simple, doble, triple, etc., para n = 1,2,3, ...). El número -n se llama simple orden de f en a y lo representaremos por $w(a; f)$; podemos escribir entonces:

$f(z) = (z-a)^{-n} f_1(z)$, donde $f_1(z)$ es de la forma:

$$f\ (z) = d_n + d_{n-1}(z-a) + \dots + d_1(z-a)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k(z-a)^{n+k}$$

y la serie del segundo miembro es convergente en $\Delta$; así $f_1(z)$ es analítica en $\Delta$ y $f_1(a) \neq 0$ pues $d_n \neq 0$.

3º. Si la función v(x) definida en el caso 2º. no es un polinomio sino una función trascendente, es decir que existen infinitos valores de n tales que $d_n \neq 0$, se dice en este caso que a es un punto singular, esencial aislado de f. Para toda función trascendente v, la función v(1/z) tiene por tanto z = 0 por punto singular esencial.

## 4.3 TEOREMA DE LOS RESTOS

PROPOSICION 38: Sea $v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ una función entera en C. Para todo $a \in C$ y todo circuito $\gamma: I \to C$ tal que $a \notin \gamma(I)$, se tiene:

$$\int_\gamma V\left(\frac{1}{z-a}\right) dz = 2\Pi i\, d_{1j}(a;\gamma)$$

PRUEBA: Sea $\delta = d(a, \gamma(I)) > 0$.

Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ es uniformemente convergente para $|z| < 2/\delta$, la serie de têrmino general: $\dfrac{d_n \gamma'(t)}{(\gamma(t)-a)^n}$ tiene el mismo tipo de convergencia para $t \in I$.

Por el corolario 2 se tiene entonces:

$$\int_\gamma V\left(\frac{1}{z-a}\right)dz = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n}$$

Luego, para n = 0 y $n \geq 2$, la función $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n}$ admite en $C - \{a\}$ una primitiva $(1-n)(z-a)^{1-n}$, por tanto $\int_\gamma \dfrac{dz}{(z-a)^n} = 0$ por la proposición 23.

Entonces, para $n = 1$, tenemos, por la definición 33:

$$\int_\gamma V\left(\frac{1}{z-a}\right)dz = d_1 \int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^1} = d_1\, 2\Pi i j(a;\gamma)$$

$$\int_\gamma V\left(\frac{1}{z-a}\right)dz = 2\Pi i\, d_{1j}(a;\gamma)$$

DEFINICION 38: Cuando a es un punto frontera aislado de un conjunto abierto conexo $D \subset C$ y f es analítica en D, llamamos resto (resíduo) de f en el punto a (y lo representamos por $\mathrm{Res}_a\, f$) el coeficiente $d_1$ en el desarrollo de Laurente de f en a.

PROPOSICION 39 (Teorema de los Restos)

Sea $D \subset C$ un conjunto abierto simplemente conexo, de puntos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$; de forma que los $a_k$ son puntos frontera aislados del conjunto abierto $D' = D - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Para toda función f analítica en D' y todo circuito $\gamma$ contenido en D' se tiene:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\Pi i \sum_{k=1}^{n} j(a_k;\gamma)\mathrm{Res}_a\, f$$

PRUEBA: Como f es analítica en D', admite un desarrollo de Laurent en un entorno de cada uno de los puntos $a_k$.

Sea $u_k(z)$ la parte singular de f en el punto $a_k$.

Consideremos la función:

$g(z) = f(z) - u_1(z) - u_2(z) - \dots - u_n(z)$

analítica en D'.

Probaremos que los $a_k$ son puntos regulares para $g(z)$:

Sea $\Delta$: $|z-a_k| < r$ tal que $\Delta \subset D$ y $a_j \notin \Delta$, $a_j \neq a_k$; entonces podemos escribir en $\Delta - \{a_k\}$:

$$g(z) = (f(z) - u_k(z)) - \sum_{j \neq k} u_j(z)$$

Como para $j \neq k$ el punto $a_k$ es regular para $u_j(z)$, lo es también para $\sum_{j \neq k} u_j(z)$.

Además, por definición el punto $a_k$ es regular para $f(z) - u_k(z)$, luego también lo es para $g(z)$. Así, podemos extender g en una función analítica en D; como D es simplemente conexo, podemos utilizar la proposición 24, así tenemos $\int_\gamma g(z)dz = 0$, luego:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma g(z)dz + \int_\gamma u_1(z)dz + \int_\gamma u_2(z)dz + \dots + \int_\gamma u_n(z)dz$$

y por la proposición 38 se tiene:

$$\int_\gamma f(z)dz) = 2\Pi ij(a_1;\gamma)\mathrm{Res}_{a_1} u_1 + \dots + 2\Pi ij(a_n;\gamma)\mathrm{Res}_{a_n} u_n$$

pero por definición $\mathrm{Res}_{a_k} u_k = \mathrm{Res}_{a_k} f$, por lo tanto:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} j(a_k;\gamma)\text{Res}_{a_k} f$$

NOTAS: El cálculo del resto de una función f de un punto singular aislado a consiste en encontrar el primer término de la serie de Taylor de la función $v\left(\frac{1}{z-a}\right)$ tal que esta función sea la parte singular de f en a.

En el caso particular en que a es un polo de orden m, se puede escribir:

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a)^m}$$

donde $f_1$ es analítica en un entorno de a y $f_1(a) \neq 0$; sustituyendo f(z) por su desarroll de Laurent en el punto a, se ve que $\text{Res}_a f$ es el coeficiente de $(z-a)^{m-1}$ en el desarrollo de Taylor de $f_1(z)$ en el punto a.

APLICACION DEL TEOREMA DE LOS RESTOS AL CALCULO DE INTEGRALES

El método de los restos para calcular determinadas integrales impropias de la forma $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ es el siguiente:

Se supone que f sea la restricción en $\mathbb{R}$ de una función (que se sigue denominando f) que es, por ejemplo, analítica en un conjunto abierto de la forma $D' = D - \{a_1, \ldots, a_n\}$, donde D contiene el semiplano

$I_z \geq 0$, y las $a_k$ son puntos del semiplano $I_z > 0$ (se puede reemplazar estos semiplanos por $I_z \leq 0$ y $I_z < 0$). Se considera luego un circuito $\gamma$, yuxtaposición $\gamma_1 \vee \gamma_2$ de los caminos:

$$\gamma_1: \quad t \to t; \qquad \text{para } -R \leq t \leq R$$

$$\gamma_2: \quad t \to R\, e^{it}; \qquad \text{para } 0 \leq t \leq \Pi$$

donde el número R se toma tal que $R > |a_k|$ para todo k; entonces se tiene $j(a_k;\gamma) = 1$ y el teorema de los restos nos permite escribir:

$$(1) \qquad \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz = 2\Pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k} f.$$

Si además se tiene: $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$

se deduce de (1) pasando al límite:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\Pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k} f$$

Ejemplo: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{}{(x^2+1)^3} = \frac{3\Pi}{8}$

Aquí no hay más que un solo polo en el semiplano $I_z > 0$: el punto i; se tiene entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\Pi i \operatorname{Res}_i f.$$

Para obtener el resto del punto i, se hace $z = i+t$ y se desarrolla en el entorno de $t = 0$ hasta el têrmino en $1/t$:

$$\frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{t^3(2i+t)^3} = -\frac{1}{8it^3}\left(1 + \frac{t}{2i}\right)^{-3}$$

$$= -\frac{1}{8it^3}\left(1 - \frac{3t}{2i} - \frac{3t^2}{2} + 0(t^2)\right).$$

El resto es entonces $\frac{3}{6i}$, de donde:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\Pi i \, \frac{3}{6i} = \frac{3\Pi}{8}$$

2. Evaluar $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + a^4}\, dx.$

Para aplicar el teorema de los restos escribimos:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + a^4}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + a^4}\, dx.$$

Sea $f(z) = \frac{1}{x + a}$, los polos de $f(z)$ en el semiplano superior $I_z \;\; 0$ son: $z = a\, e^{\frac{i\Pi}{4}}$ y $z = a\, e^{i\frac{3\Pi}{4}}$

Calculemos los residuos:

$$\operatorname{Res}_{ae^{\frac{i\Pi}{4}}} f(z) = \lim_{z \to ae^{\frac{i\Pi}{4}}} (z - a\, e^{i\Pi/4})\, \frac{1}{z^4 + a^4} = \frac{1}{4a^3 e^{i\frac{3\Pi}{4}}}$$

$$\operatorname{Res}_{ae^{i\frac{3\pi}{4}}} f(z) = \lim_{z \to ae^{i\frac{3\pi}{4}}} \left(z - ae^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \frac{1}{z^4 + a^4} = \frac{1}{4a^3 e^{i\frac{9\pi}{4}}}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4 + a^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4 + a^4}\,dx = \frac{1}{2}\left[2\pi i\left(\frac{1}{4a^3 e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1}{4a^3 e^{i\frac{9\pi}{4}}}\right)\right]$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4 + a^4}\,dx = \pi i\left[\frac{1}{4a^3}\left(\frac{1}{e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1}{e^{i\frac{9\pi}{4}}}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi i}{4a^3}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= \frac{\pi i}{4a^3}\left[\cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - i\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4a^3}\left[i\cos\frac{3\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4a^3}\left[-i\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{4a^3}$$

# CONCLUSIONES

Hemos llegado al fin de la tarea que nos propusimos desarrollar y consideramos ahora necesario señalar los resultados -- más relevantes de la materia tratada a través de nuestro trabajo. Entre ellos podemos mencionar los siguientes:

1) Existe una semejanza clara entre los conceptos de función, límite y continuidad para el caso de variables complejas y el de variables reales.

   Lo mismo podemos afirmar para las nociones de convergencia absoluta, uniforme y simple de sucesiones y series de números - complejos.

2) Existe una estrecha relación entre las series de potencias -- convergentes y serie de Taylor y funciones analíticas.

3) La integración curvilínea de funciones complejas se desarrolló mediante el uso del concepto de homotopías de caminos y de circuitos y no usando las nociones de curvas suaves cerradas o -- curvas de Jordan, como se trata en algunas obras.

   El teorema de Cauchy se discutió para el caso de un dominio conexo o simplemente conexo.

4) En cuanto a las aplicaciones de la teoría desarrollada creemos que fué muy escasa, ya que se limitó al uso del teorema de los residuos para calcular integrales impropias; pero ello está mo

tivado por el escaso tiempo de que disponíamos para la presentación del trabajo.

Aclaramos que hubieramos querido incluir otras aplicaciones como la teoría de la representación conforme, la resolución de ecuaciones diferenciales, etc.; pero tal vez estos tópicos podrían ser objeto de futuros temas de investigación.

# BIBLIOGRAFIA


1) FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA
J.I. Nieto
Depto. de Asuntos Científicos O.E.A., 1973.

2) ANALISIS MATEMATICO
T.M. Apostol

3) CALCULO AVANZADO
W. Kaplan
Editorial Continental, 1974.

4) ELEMENTS OF COMPLEX ANALYSIS
L. Pennisi
Holt, Rinehart and Winston, New York, 1963.

5) COMPLEX ANALYSIS
Shaums Outline Series
McGraw-Hill Book Company

6) MATEMATICAS AVANZADAS PARA INGENIERIA
Tomo II
E. Kreyszig
Editorial Limusa-Willey, 1973.

7) FOUNDATIONS OF MODER ANALYSIS
J. Dieudonnê
Academic Press International Edition, 1960.

8) CALCULO INFINITESIMAL
J. Dieudonnê
Ediciones Omega, S.A., Barcelona, 1971.