UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Trabajo de Graduación

FUNCIONES BILINEALES Y ESPACIOS UNITARIOS

Héctor Canjura Linares

Francisco Mauricio Figeac

OCTUBRE 1979

San Salvador - El Salvador - Centro América

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR a.i. : Lic. JOSE LUIS ARGUETA ANTILLON

SECRETARIO a.i. : Lic. OSCAR ARMANDO ACEVEDO VELASQUEZ

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DECANO a.i. : Ing. JOSE FRANCISCO AGUIRRE TOVAR

SECRETARIO a.i. : Ing. MANUEL ANTONIO CAÑAS LAZO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO: Ing. CARLOS MAURICIO CANJURA.

ASESOR: ING. CARLOS MAURICIO CANJURA.

P R O L O G O

El inicio de un trabajo de investigación bibliográfico presenta un orden de dificultades que la práctica investigativa va superando. La primera de ellas compete sobre la escogencia del tema, el que una vez seleccionado, se abandona, porque frecuentemente surge una barrera entre nuestra motivación y el contenido específico que va surgiendo, solamente la orientación de colegas que ya experimentaron vivencias análogas, permite reformular los propósitos originales y ubicar en definitiva el terreno teórico por el cual habrá de transitarse. La siguiente dificultad, inherente a nuestra relación personal con el Objeto Matemático, va siendo solventada mediante aproximaciones sucesivas, a través de largos rodeos, donde los tropiezos son más que pasos en firme, nuevamente la consulta oportuna, alienta e impulsa para continuar.

Con esos obstáculos, logramos concluir la tarea, cuyo objetivo consiste en aplicar la teoría de espacios lineales de dimensión finita, a la geometría de los espacios unitarios, tal como se describe suscintamente en el siguiente resumen capitular.

En el Capítulo Introductorio se recuerdan conceptos elementales de Algebra Lineal, que son requeridos para desarro llar la temática propuesta, tales como aplicaciones lineales, funciones bilineales y espacios duales.

El Capítulo I, está dedicado a introducir un enfoque poco tradicional en el ámbito matemático doméstico, tal es la función determinante, presentando tratamiento novedoso, acerca de lo que conocemos como determinante de una matriz.

El Capítulo II aborda aspectos importantes de espacios vectoriales con producto interno, entre otros, el Teorema de Riesz. Este Capítulo concluye con una generalización de producto interno y norma, al introducir las funciones bilineales simétricas y funciones cuadráticas.

En el Capítulo III, se estudian particularmente las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales con producto interno, incorporándose los conceptos de operador adjunto y de dualidad entre dichos espacios.

El Capítulo IV, que constituye el cuerpo de nuestro trabajo, trata en principio sobre funciones sesquilineales en espacios vectoriales complejos, para definir funciones hermitianas, con las cuales se tiene base constructiva de los llamados espacios unitarios. A partir de esta construcción, toda la teoría expuesta en los anteriores Capítulos se transfiere al tratamiento de los espacios unitarios.

Advertimos que el trabajo elaborado, está fundamentado - en la lectura del texto Linear Algebra de W. H. Greub.

Finalmente, queremos expresar nuestro agradecimiento al Ing. Carlos Mauricio Canjura por su valiosa asesoría en la - preparación del trabajo, además, testimoniamos nuestra gratitud con la Sra. Nohemy de Rovelo por su asistencia en la dactilografía del mismo.

I N D I C E

		PAGINA
CAPITULO INTRODUCTORIO		
§1	APLICACIONES LINEALES	
1.1	Definición de Aplicación lineal	I
1.2	Composición de transformaciones lineales	II
1.3	Propiedades básicas de $L(E,F)$	III
§2	ESPACIOS VECTORIALES DUALES	
2.1	Funciones bilineales	IV
2.2	Espacios Duales	VI
2.3	Complementos ortogonales	XIII
§3	MATRICES	
3.1	Definición de matriz	XIV
3.2	Matriz de una aplicación lineal	XVI
3.3	Matriz de una aplicación dual	XVII
CAPITULO I DETERMINANTES		
§1	LA FUNCION DETERMINANTE	
1.1	Definición de función determinante	1
1.2	Representación de Δ en las bases de E	4
1.3	Unicidad	6
1.4	Existencia de Δ no-trivial	6

§2 EL DETERMINANTE DE UNA TRANSFORMACION LINEAL

2.1 Definición de determinante de un endomorfismo 9

2.2 Propiedades de det ϕ 11

2.3 Subespacios estables 13

§3 EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

3.1 Definición de determinante de una matriz 15

3.2 El determinante de una matriz como función de sus columnas 17

§4 FUNCIONES DETERMINANTES DUALES

4.1 Definición de función determinante dual 18

4.2 El determinante de una aplicación dual 22

§5 COFACTORES

5.1 Definición de cofactor 23

§6 EL POLINOMIO CARACTERISTICO

6.1 Vectores propios 27

6.2 La ecuación característica 28

6.3 Existencia de valores propios 29

6.4 Polinomio característico del endomorfismo inverso 30

6.5 El polinomio característico de una matriz 31

§7 LA TRAZA

7.1 La traza de una transformación lineal 31

7.2 La traza de una matriz 34

7.3 Dualidad de $L(E,F)$ en $L(F,E)$ 35

CAPITULO II ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO

§1 EL PRODUCTO INTERNO

1.1 Definición de producto interno 38

1.2 Definición de función norma 39

1.3 Ejemplos de espacios con producto interno 41

1.4 Ortogonalidad 41

1.5 Desigualdad de Schwarz 43

1.6 Desigualdad triangular 45

1.7 Teorema de Riesz 46

§2 BASES ORTONORMALES

2.1 Definición de base ortonormal 49

2.2 Proceso de ortogonalización de Schmidt 51

2.3 Complemento ortogonal 54

§3 FUNCIONES DETERMINANTES NORMADAS

3.1 Definición de función determinante normada 56

3.2 Determinantes gramnianos 57

§4 DUALIDAD EN UN ESPACIO CON PRODUCTO INTERNO

4.1 El isomorfismo τ 59

§5 FUNCIONES BILINEALES SIMETRICAS

5.1 Funciones bilineales y cuadráticas 60

5.2 Formas bilineales y formas cuadráticas 65

5.3 Definitud de funciones bilineales simétricas 66

CAPITULO III APLICACIONES LINEALES EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

§1 LA APLICACION ADJUNTA

1.1 Definición de aplicación adjunta 68

1.2 Relación entre las matrices asociadas a ϕ y $\tilde{\phi}$ 70

1.3 La aplicación lineal adjunta 72

1.4 La relación entre aplicaciones lineales y aplicaciones bilineales 74

1.5 Aplicaciones normales 77

§2 LA APLICACION AUTOADJUNTA

2.1 Definición de aplicación autoadjunta 81

2.2 Representación en forma diagonal 85

2.3 El espacio de vectores propios 86

2.4 El polinomio característico de una matriz simétrica 89

2.5 Vectores propios de funciones bilineales 89

§3 APLICACIONES ANTISIMETRICAS

3.1 Definición de aplicación antisimétrica 90

§4 APLICACIONES ISOMETRICAS

4.1 Definición de aplicación isométrica 93

4.2 Matriz asociada a a una aplicación isomé trica 97

CAPITULO IV ESPACIOS UNITARIOS

§1 FUNCIONES HERMITIANAS

1.1 Funciones sesquilineales en un espacio complejo 99

1.2 Funciones hermitianas 101

1.3 Matrices hermitianas 103

§2 ESPACIOS UNITARIOS

2.1 Definición de espacio unitario 104

2.2 Bases ortonormales de espacios unitarios 108

2.3 Dualidad de espacios unitarios 110

2.4 Funciones determinantes normadas en espacios unitarios 112

§3 APLICACIONES LINEALES EN ESPACIOS UNITARIOS

3.1 La aplicación adjunta 115

3.2 Producto interno en End(E) 120

3.3 Aplicaciones normales 122

3.4 Aplicaciones autoadjuntas y antisimétricas 124

3.5 Transformaciones unitarias 125

SIMBOLOGIA UTILIZADA EN EL PRESENTE TRABAJO.

Prop.	proposición
tq.	tal que
i.e.	es decir
I	matriz identidad
i	función identidad
i	unidad imaginaria
Pa.	prueba
ssi	si y solo si

Capítulo Introductorio

En el contexto de este Capítulo damos por conocidas las propiedades de la estructura de espacio vectorial, por lo cual abordaremos aquellos resultados que por su necesidad sean requeridos para desarrollar el presente trabajo.

§1. APLICACIONES LINEALES.

1.1 Definición de Aplicación Lineal.

Definición 1.1.1.

Sean E, F dos espacios vectoriales sobre el cuerpo K y $\phi: E \to F$, entonces ϕ es llamada una *aplicación lineal* de E en F si:

(i) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$

(ii) $\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$

para $x, y, \in E$, $\lambda \in K$.

Al conjunto de aplicaciones lineales de E en F lo representaremos por Hom (E,F) ó bien $L(E,F)$.

Nomenclatura: Si $F = K$, entonces ϕ es llamada *funcional lineal* - en E.

Las condiciones (i) y (ii) son claramente equivalentes a la condición:

$$\phi\left\{\sum_i \lambda_i x_i\right\} = \sum_i \lambda_i\ \phi(x_i)$$

Terminología.

(a) Si $\phi: E \to F$ es biyectiva, es llamada *isomorfismo lineal*, y es claro que $\phi^{-1}: F \to E$ también es un isomorfismo lineal.

(b) Si $\phi: E \to E$, ϕ se llamará *endomorfismo lineal*. Al conjunto de endomorfismos lineales en E lo representaremos por End(E).

(c) Si $E = F$ y ϕ es isomorfismo lineal se llama *automorfismo lineal*.

1.2 Composición de transformaciones lineales.

Sean $\phi: E \to F$ y $\Psi: F \to G$, dos aplicaciones lineales, entonces

$$\Psi \circ \phi : E \to G$$

es definida por $\Psi(\phi(x)) = (\Psi\circ\phi)(x)$, $\forall\ x \in E$

Prop. 1.2.1. La aplicación $\Psi\circ\phi$ es lineal.

Pa.

$$\begin{aligned}(\Psi\circ\phi)(\sum_i \lambda_i x_i) &= \Psi(\sum_i \lambda_i \phi(x_i))\\ &= \sum_i \lambda_i\ \Psi(\phi(x_i))\\ &= \sum_i \lambda_i\ (\Psi\circ\phi)(x_i)\end{aligned}$$

1.3 Propiedades básicas de $L(E, F)$.

Consideremos $(x_i)_{i \in I}$ una base de E y $\phi \in L(E, F)$, entonces ϕ puede caracterizarse como un isomorfismo lineal ssi $(\phi(x_i))_{i \in I}$ forma una base de F.

En efecto:

Si ϕ es isomorfismo, queda obviado que $(\phi(x_i))_{i \in I}$ es una base de F.

Conversamente, asumamos que los $\phi(x_i)$ forman una base de F, - entonces para cada y $\in$ F tenemos

$$y = \sum_i \beta_i \phi(x_i) = \phi\left(\sum_i \beta_i x_i\right)$$

esto implica que existe $x = \sum_i \beta_i x_i$ tq $\phi(x) = y$, así ϕ es sobreyectiva.

Ahora supongamos que:

$$\phi\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = \phi\left(\sum_i \beta_i x_i\right)$$

luego:

$$\phi\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) - \phi\left(\sum_i \beta_i x_i\right) = 0$$

$$\sum_i \lambda_i \phi(x_i) - \sum_i \beta_i \phi(x_i) = 0$$

$$\sum_i (\lambda_i - \beta_i)\phi(x_i) = 0$$

Siendo los vectores $\phi(x_i)$, l.i., obtenemos $\lambda_i = \beta_i$, $\forall\ i \in I$, y así

$$\sum_i \lambda_i x_i = \sum_i \beta_i x_i$$

Se sigue que ϕ es inyectiva, en consecuencia ϕ es isomorfismo lineal.

Respecto a la estructura de $L(E, F)$, afirmamos que es un espacio vectorial, determinado por:

$$\begin{aligned} + : L(E,F) \times L(E,F) &\longrightarrow L(E,F) \\ (\phi\ ,\ \Psi) &\rightsquigarrow \phi + \Psi : E \longrightarrow F \\ & \qquad\qquad\quad x \rightsquigarrow \phi(x)+\Psi(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \bullet : K \times L(E,F) &\longrightarrow L(E,F) \\ (\lambda,\phi) &\rightsquigarrow \lambda\phi : E \longrightarrow F \\ & \qquad\qquad x \rightsquigarrow \lambda\phi(x) \end{aligned}$$

Este espacio se llama *espacio de aplicaciones lineales de* E *en* F.

En el caso que $F = K$, $L(E,K)$ es denotado simplemente por $L(E)$.

§2. ESPACIOS VECTORIALES DUALES.

2.1 Funciones Bilineales.

Definición 2.1.1.

Sean E y F e.v., entonces una aplicación $\Phi: E \times F \to K$ se llama *función bilineal* si cumple:

(i) $\Phi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \Phi(x_1,y) + \lambda_2 \Phi(x_2,y)$

(ii) $\Phi(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \mu_1 \Phi(x,y_1) + \mu_2 \Phi(x,y_2)$

Comentario: Si Φ es bilineal en $E \times F$ y $E_1 \subset E$, $F_1 \subset F$ son subespacios de E y F respectivamente, entonces la restricción de Φ en $E_1 \times F_1$ es definida por:

$$\Phi_1(x,y) = \Phi(x,y), \; x \in E_1, \; y \in E_1$$

es también una función bilineal, denominada *restricción de Φ a* $E_1 \times F_1$.

Una bilineal Φ en $E \times F$ determina dos subespacios $N_E \subset E$ y $N_F \subset F$ definidos por

$$N_E = \{x : \Phi(x,y) = 0, \; \forall \; y \in F\}$$

$$N_F = \{y : \Phi(x,y) = 0, \; \forall \; x \in E\}$$

tales subespacios reciben la denominación de *nulespacios de* Φ.

Si $N_E = N_F = (0)$, la bilineal Φ es llamada *no degenerada*.

Notación. Una función bilineal no degenerada Φ, será denotada por $\langle | \rangle$, por lo que escribiremos:

$$\Phi(x,y) = \langle x | y \rangle \; ; \; (x,y) \in E \times F.$$

El conjunto de aplicaciones bilineales de E en F se escribirá $B(E,F)$.

2.2 Espacios Duales.

Definición 2.2.1.

Sean E^* y E e.v. y $<|> : E^* \times E \to K$ entonces E y E^* serán llamados *duales*, con respecto a la función bilineal no degenerada $<|>$.

Terminología: El escalar $<x^*|x>$ es llamado *producto escalar* de x^* y x, la función $<|>$ es llamada *producto escalar* entre E^* y E.

Ejemplo:

Sean E y $L(E)$, definamos la aplicación bilineal:

$$<|> : L(E) \times E \longrightarrow K$$

$$(f,x) \rightsquigarrow <f|x> = f(x)$$

Siendo $f(x) = 0$, $\forall\, x \in E$ ssi $f = 0$, se sigue que $N_{L(E)} = 0$.

Por otra parte, sea $x_o \neq 0$, $x_o \in E$, $E_1 = (x_o)$ subespacio unidimensional generado por $\underline{x_o}$ y $\underline{g}$ una aplicación lineal tq:

$$g : E_1 \longrightarrow K$$

$$\lambda x_o \rightsquigarrow \lambda$$

entonces para cualquier extensión $\underline{f}$ de $\underline{g}$ en todo el espacio E se tiene:

$$<f|x_o> = f(x_o) = g(x_o) = 1 \neq 0$$

Asi $<f|x> = 0$, $\forall\, f \in L(E)$ ssi $x = 0$ por tanto $N_E = (0)$, luego $<|>$ es no degenerada.

En consecuencia $<|>$ es un producto escalar entre $L(E)$ y E, y ambos espacios son duales.

Prop. 2.2.2. Sean E^* y E un par de e.v. duales con respecto a $<|>$. Entonces existe una inyección lineal ϕ tq:

$$\begin{aligned} \phi : E^* &\longrightarrow L(E) \\ x^* &\rightsquigarrow \phi(x^*) : E \longrightarrow K \\ &\qquad\qquad x \rightsquigarrow \phi(x^*)(x) = <x^*|x> \end{aligned}$$

Pa.

Para definir ϕ tomemos $x^* \in E^*$ un vector fijo y consideremos la funcional lineal

$$\begin{aligned} f_{x^*} : E &\longrightarrow K \\ x &\rightsquigarrow <x^*|x> \end{aligned}$$

Sea ahora

$$\begin{aligned} \phi : E^* &\longrightarrow L(E) \\ x^* &\rightsquigarrow f_{x^*} \end{aligned}$$

la bilinealidad de $<|>$ implica la linealidad de ϕ, luego ϕ queda definida por

$$\phi(x^*) = f_{x^*} .$$

Para probar que ϕ es inyectiva, supongamos $\phi(x^*) = 0$ para algún $x^* \in E^*$, entonces para cada $x \in E$

$$<x^*|x> = 0$$

Como $<|>$ es no degenerada, se tiene $x^* = 0$, así ϕ es inyectiva.

Lema 2.2.3. Sea E un e.v. y (e_k), $k=1,\ldots,n$ una base de E entonces el espacio $L(E)$ es isomorfo a E.

Pa.

Definamos (f_i), $i=1,\ldots,n$ con $f_i : E \to K$

tal que:

$$f_i\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \alpha_i;\ f_i \text{ es evidentemente lineal.}$$

Si definimos ahora

$$\Phi : E \longrightarrow L(E)$$

$$x \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k, \text{ donde } x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

Mostremos que Φ es un isomorfismo lineal.

i) Φ es lineal, en efecto:

$$\Phi(x+y) = \Phi\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k\right)$$

$$= \Phi\left(\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k+\beta_k) e_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k+\beta_k) f_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k = \Phi(x) + \Phi(y)$$

ii) Φ es inyectiva;

Si $\Phi(x) = \Phi(y)$ se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k \text{ , entonces}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) f_k = 0$$

En particular para $x = e_i$ se tiene que:

$$(\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) f_k)(e_i) = 0$$

$$(\alpha_i - \beta_i) f_i(e_i) = 0$$

$$(\alpha_i - \beta_i).1 = 0$$

se deduce entonces que

$$\alpha_i - \beta_i = 0$$

de donde $\alpha_i = \beta_i$, $\forall\, i=1,\ldots,n$

y así $x = y$.

Finalmente, siendo E de dimensión finita, se tiene que Φ es sobre, por lo tanto E es isomorfo a $L(E)$.

Prop. 2.2.4. Sean E y E^* un par de e.v. duales, tq. dim E=n. Entonces la inyección ϕ: $E^* \to L(E)$ es sobreyectiva y en particular -- dim E = dim E^*.

Pa.

Siendo ϕ inyectiva, es inmediato que dim $E^* \leq$ dim $L(E)$ y por Lema 2.2.3 se sigue que dim $E^* \leq$ dim E (1)

Además dim E = n de lo que se sigue que E^* tiene dimensión finita, - así ϕ es sobreyectiva.

Por otra parte, se sabe que $(E^*)^* = E$, entonces

$$\dim(E) \leq \dim(E^*)$$

de esta última desigualdad y de la relación (1)

se deduce que:

$$\dim E = \dim E^*$$

<u>Corolario 2.2.5.</u>

Sean E_1^* y E_2^* dos espacios duales de E, con $\dim E = n$. Entonces existe un único isomorfismo lineal ϕ tal que $\langle\phi^*(x)|x\rangle = \langle x^*|x\rangle$

<u>Pa.</u>

Sea ϕ: $E_1^* \to E_2^*$ tal que $\phi(x^*) = \phi_2^{-1}(\phi_1(x^*))$, con $\phi_1 : E_1^* \to L(E)$ y $\phi_2 : E_2^* \to L(E)$ definidos como en la proposición 2.2.2.

$$\begin{tikzcd} E_1^* \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\phi"'] & L(E) \\ E_2^* \arrow[ur, "\phi_2"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces existe ϕ único, por que es composición de isomorfismos lineales únicos.

Considerando el diagrama de flechas anterior:

$$(\phi_2 \circ \phi)(x^*) = \phi_1(x^*) \ , \ \forall\ x^* \in E_1^*$$

luego

$$((\phi_2 \circ \phi)\ (x^*))\ (x) = (\phi_1(x^*))\ (x)$$

$$\phi_2(\phi(x^*))\ (x) = \langle x^*|x\rangle \ , \text{ por def. de } \phi_1$$

pero

$$\phi_2(\phi(x^*))(x) = \langle\phi^*(x)|x\rangle, \text{ por def. de } \phi_2$$

asi

$$<\phi^*(x)|x> = <x^*|x>$$

Definición 2.2.6.

Dos bases (x_i), $i=1...n$ y (x_i^*), $i=1,...,n$ de E y E^* son llamadas *bases duales* si:

$$<x_i^*|x_j> = \delta_{ji}$$

Prop. 2.2.7. Sean E y E^* un par de e.v. duales tal que $\dim E = n$ y $\Phi: E^* \times E \to K$, entonces existe una aplicación lineal única $\phi: E \to E$ tal que:

$$\Phi(x^*,x) = <x^*|\phi(x)>, \text{ con } x^* \in E^*,\ x \in E$$

Pa.

Por proposiciones 2.2.2 y 2.2.3, existe un isomorfismo α tal que:

$$\alpha : E \longrightarrow L(E^*) \text{ tq. } (\alpha(x))(x^*) = <x^*|x>$$

Sea $x \in E$ y consideremos $f_x : E^* \longrightarrow K$

$$x^* \rightsquigarrow \Phi(x^*,x)$$

Dado que $f_x \in L(E^*)$, existe un elemento $\phi(x) \in E$ tal que

$$\alpha(\phi(x)) = f_x$$

asi:

$$f_x(x^*) = (\alpha(\phi(x))(x^*) = <x^*|\phi(x)>$$

entonces

$$\Phi(x^*,x) = \langle x^* | \phi(x) \rangle$$

Esta última igualdad garantiza la existencia de ϕ. Probemos ahora que:

i) ϕ es lineal. En efecto

$$\Phi(x^*,x+y) = \langle x^* | \phi(x+y) \rangle$$

pero $\Phi(x^*,x+y) = \Phi(x^*,x) + \Phi(x^*,y)$

$$= \langle x^* | \phi(x) \rangle + \langle x^* | \phi(y) \rangle$$

de donde:

$\langle x^* | \phi(x+y) \rangle = \langle x^* | \phi(x) \rangle + \langle x^* | \phi(y) \rangle$

ii) ϕ es única. En efecto

Sea $x \in E$ y $x^* \neq 0$, $x^* \in E^*$

Supongamos que $\Phi(x^*,x) = \langle x^* | \phi_1(x) \rangle = \langle x^* | \phi_2(x) \rangle$

entonces $\langle x^* | \phi_1(x) \rangle = \langle x^* | \phi_2(x) \rangle$

por lo que

$$\langle x^* | \phi_1(x) \rangle - \langle x^* | \phi_2(x) \rangle = 0$$

así:

$$\langle x^* | \phi_1(x) - \phi_2(x) \rangle = 0$$

como $x^* \neq 0$ se tiene que $\phi_1(x) - \phi_2(x) = 0$

entonces

$$(\phi_1 - \phi_2)(x) = 0 \quad , \forall\, x \in E$$

se sigue entonces que $\phi_1 = \phi_2$.

2.3 Complementos ortogonales.

Definición 2.3.1.

Los vectores $x^* \in E^*$, $x \in E$ se dicen *ortogonales* si $\langle x^* | x \rangle = 0$

Notación: $\langle x^* | x \rangle = 0$ se escribirá $x^* \perp x$

Si $E_1 \subset E$, es un subespacio, entonces los vectores de E^* que son ortogonales a los vectores de E_1, forman un subespacio de E^*, denominado *complemento ortogonal* de E_1, denotado por:

$$E_1^{\perp} = \{x^* \in E^* : x^* \perp x, \ \forall x \in E_1\}$$

Prop. 2.3.1. Sea E_1 subespacio de E, entonces

$$E_1 \subset (E_1^{\perp})^{\perp}$$

Pa.

Se sigue de def. 2.3.1.

Nota: $E^{\perp} = (0)$ y $(E^*)^{\perp} = (0)$, ya que $\langle | \rangle$ es no degenerada.

2.4 Aplicaciones Duales.

Definición 2.4.1.

Sean E, E^* y F, F^* dos pares de espacios duales y las aplicaciones:

$$\phi : E \longrightarrow F$$

$$\phi^* : F^* \longrightarrow E^*$$

entonces las aplicaciones ϕ y ϕ^* son llamadas *duales* ssi:

$$< y^* | \phi(x) > = <\phi^*(y^*) | x>$$

Prop. 2.4.2. Para toda $\phi \in L(E,F)$, existe a lo sumo $\phi^* \in L(F^*,E^*)$, tq ϕ y ϕ^* son duales.

Pa.

Sean ϕ_1^* y $\phi_2^* \in L(F^*,E^*)$ tq. sean duales a ϕ, entonces:

$$<y^* | \phi(x)> = <\phi_1^*(y^*) | x>$$

$$<y^* | \phi(x)> = <\phi_2^*(y^*) | x>$$

de donde:

$$<\phi_1^*(y^*) | x> = <\phi_2^*(y^*) | x>$$

por lo cual

$$\phi_1^* = \phi_2^*$$

§3. MATRICES.

3.1 Definición de Matriz.

Definición 3.1.1.

Al arreglo rectangular

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

de nm escalares α_{ij} se llama *matriz de* <u>n</u> *filas y* <u>m</u> *columnas.*

<u>Nota:</u> La i-ésima fila de A es denotada por

$$a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{im})$$

puede ser considerado como vector del espacio K^m, y es llamado *vector fila* de A.

Similarmente la j-ésima columna es denotada por

$$v_j = \begin{pmatrix} \alpha_{ij} \\ \alpha_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}$$

y puede ser considerado como vector de K^n. Tal vector es llamado *vector columna.*

Intercambiando filas y columnas de A, obtenemos la matriz *transpuesta* de A, denotada por

$$A^T = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & & \alpha_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$$

Notación: De manera explícita A puede escribirse como $A = (\alpha_{ij})_{nxm}$.

3.2 Matriz de una aplicación lineal.

Consideremos E y F, e.v. tq. dim E = n y dim F = m y la aplicación ϕ: E $\to$ F.

Con la ayuda de las bases (x_i), $i=1,\ldots,n$, (y_j), $j=1,\ldots,m$ en E y F respectivamente, cada vector $\phi(x_j)$ puede escribirse como combinación lineal de los y_j.

$$\phi(x_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \qquad ; \quad j = 1,\ldots,n.$$

de esta manera ϕ determina una matriz $(\alpha_{ij})_{nxm}$, así ϕ es tal que

$$\begin{aligned} \phi(x_1) &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \ldots + \alpha_{m1}y_m \\ \phi(x_2) &= \alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{m2}y_m \\ &\vdots \\ \phi(x_i) &= \alpha_{1i}y_1 + \alpha_{2i}y_2 + \ldots + \alpha_{mi}y_m \\ &\vdots \\ \phi(x_n) &= \alpha_{1n}y_1 + \alpha_{2n}y_2 + \ldots + \alpha_{mn}y_m \end{aligned}$$

y así ϕ tiene representación matricial relativa a las bases dadas; escribiéndose entonces

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, \ldots, & \alpha_{1m} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \alpha_{i1}, & \alpha_{i2}, \ldots, & \alpha_{im} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \alpha_{n1}, & \alpha_{n2}, \ldots, & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

Si llamamos M_{nxm} al conjunto de todas las matrices nxm, puede - considerarse a M como un operador entre los e.v. $L(E,F)$ y M_{nxm}

$$\begin{aligned} M : L(E,F) &\longrightarrow M_{nxm} \\ \phi &\rightsquigarrow M(\phi) \end{aligned}$$

3.3 <u>Matriz de una aplicación dual.</u>

Sean E^* y F^* un par de e.v. duales de E y F respectivamente y $\phi \in L(E,F)$, $\phi^* \in L(F^*,E^*)$ un par de aplicaciones duales.

Consideremos dos pares de bases duales

(x_i), $i=1,\ldots,n$; (x_i^*), $i=1,\ldots,n$ y (y_j), $j=1,\ldots,m$;

(y_j^*), $j=1,\ldots,m$ de E, E^*, F y F^* respectivamente

Prop. 3.3.1. $M(\phi^*) = (M(\phi))^T$

Pa.

Sean $M(\phi)$ y $M(\phi^*)$ definidas por

$$\phi(x_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \qquad \phi^*(y_j^*) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^* x_i^*$$

haciendo $x = x_i$; $y = y_j^*$ en la relación

$$<y^* | \phi(x)> = <\phi^*(y^*) | x>$$

tenemos

$$<y_j^* | \phi(x_i)> = <\phi^*(y_j^*) | x_i>$$

donde

$$<y_j^* | \phi(x_i)> = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik} < y_j^* | y_k> = \alpha_{ij}$$

$$<\phi^*(y_j^*) | x_i> = \sum_{t=1}^{m} \alpha_{tj}^* <x_t^* | x_i> = \alpha_{ji}^*$$

entonces

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}^*$$

de ahí que

$$(\alpha_{ij})_{nxm} = (\alpha_{ij}^*)_{mxn}^T$$

Capítulo I

DETERMINANTES

En el presente capítulo E será un espacio vectorial finito dimensional, definido sobre un cuerpo K, conmutativo y de característica cero.

§1. LA FUNCION DETERMINANTE.

1.1 Definición de función determinante.

Def. 1.1.1 Sean E e.v. y $\Delta : E^n \to K$. La aplicación Δ es llamada *función determinante* en E si:

(d_1) Δ es multilineal; es decir:

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, \alpha x_i + \beta x_i', \ldots x_n) =$$

$$\alpha\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \beta\Delta(x_1, x_2 \ldots, x_i', \ldots x_n)$$

(d_2) Δ es antisimétrica, esto es:

para cualquier permutación σ de los índices $i=1,2,\ldots,n$, se tiene

$$\Delta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\, \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

donde $\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma \text{ es par} \\ -1, & \text{si } \sigma \text{ es impar} \end{cases}$

De la anterior definición se desprenden algunas consecuencias inmediatas.

Consecuencia 1. Si llamamos por D(E) al conjunto de todas las funciones determinantes, es decir:

$$D(E) = \{ \Delta : E^n \to K : \Delta \text{ es función determinante}\}$$

Se tiene que D(E) posee estructura de espacio vectorial.

Pa.

(a) Sean Δ_1, $\Delta_2 \in D(E)$, entonces:

(i) $(\Delta_1+\Delta_2)(x_1,x_2,\dots,x_k + \alpha x_k',\dots,x_n)$

$= \Delta_1(x_1,x_2,\dots,x_k+\alpha x_k',\dots,x_n)+\Delta_2(x_1,x_2,\dots,x_k+\alpha x_k'+\dots x_n)$

$= \Delta_1(x_1,x_2,\dots,x_k,\dots,x_n)+\alpha\Delta_1(x_1,x_2,\dots x_k',\dots,x_n)$

$+ \Delta_2(x_1,x_2,\dots,x_k,\dots,x_n)+\alpha\Delta_2(x_1,x_2,\dots,x_k',\dots,x_n)$

$= (\Delta_1+\Delta_2)(x_1,x_2,\dots,x_k,\dots,x_n)+\alpha(\Delta_1+\Delta_2)(x_1,x_2,\dots x_k',\dots x_n)$

(ii) $(\Delta_1 + \Delta_2)(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(n)})$

$= \Delta_1(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(n)}) + \Delta_2(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(n)})$

$= \varepsilon(\sigma)\Delta_1(x_1,x_2,\dots,x_n) + \varepsilon(\sigma)\Delta_2(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$= \varepsilon(\sigma)(\Delta_1+\Delta_2)(x_1,x_2,\dots,x_n)$

(b) Similarmente se prueba que

$\lambda\, \Delta_1 \in D(E)$, para $\lambda \in K$ y $\Delta_1 \in D(E)$.

Consecuencia 2. El valor de Δ cambia de signo, cuando se intercambian dos índices cualesquiera.

Pa.

Intercambiemos los índices i,j, si σ es la transposición definida por $\sigma(i)=j$, $\sigma(j)=i$, $\sigma(k) = k$, $\forall_k$, $k\neq i$, $k\neq j$ esta permutación σ es impar, luego:

$\Delta(x_{\sigma(1)},\ldots, x_{\sigma(j)},\ldots, x_{\sigma(i)},\ldots, x_{\sigma(n)})$

$= \varepsilon(\sigma)\Delta(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$

$= - \Delta\ (x_1, x_2,\ldots, x_i,\ldots, x_j,\ldots, x_n)$

Si en la consecuencia anterior, tenemos que $x_i = x_j$, entonces:

$$2\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n) = 0$$

Siendo K de característica cero, debe ser

$$\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = 0$$

Esto es, una función determinante Δ se anula cuando dos argumentos son iguales.

Consecuencia 3. Más generalmente, se probará que una función determinante se anula, si sus argumentos son linealmente dependientes.

Pa.

Supongamos que los argumentos son l.d., entonces existe al menos un x_k, $1 \leq k \leq n$ tal que x_k puede expresarse como una combinación lineal de los demás argumentos, así:

$x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \alpha_i x_i$, sin perder generalidad, podemos suponer que

$k = n$, entonces

$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$, de donde

$$\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n) = \Delta(x_1,x_2,\dots,\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\ \Delta(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_i) = 0$$

ya que cada término de la sumatoria es cero por consecuencia 2.

Consecuencia 4. El valor de una función determinante no se altera, si a un argumento x_i, se le suma un múltiplo de otro argumento x_j, $i \neq j$.

Pa.

Consideremos λx_j, $\lambda \in K$, un múltiplo del argumento x_j y evaluemos

Δ en $(x_1,x_2,\dots,x_i + \lambda x_j,\dots,x_j,\dots,x_n)$

$\Delta(x_1,x_2,\dots,x_i + \lambda x_j,\dots,x_j,\dots,x_n) =$

$\Delta(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) + \lambda\ \Delta(x_1,\dots,x_j,\dots,x_j,\dots,x_n) =$

$\Delta(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)$

ya que por consecuencia 2, $\lambda\Delta(x_1,\dots,x_j,\dots,x_j,\dots,x_n) = 0$ es igual a cero.

1.2 Representación de Δ en las bases de E.

Sea $(e_i)\, i=1,\dots,n$ una base de E, entonces cada $x_i \in E$ puede ser escrito como:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j\ ,\ i = 1,2,\dots,n;\ \alpha_{ij} \in K.$$

Evaluando la función Δ con cada x_i expresado en términos de esta base obtenemos:

$$\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n) = \Delta\left(\sum_{j_1=1}^{n} \alpha_{1j_1}\, e_{j_1},\ \sum_{j_2=1}^{n} \alpha_{2j_2}\, e_{j_2},\dots,\ \sum_{j_n=1}^{n} \alpha_{n j_n}\, e_{j_n}\right)$$

$$= \sum_{j_i=1}^{n} \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2},\dots,\alpha_{n j_n}\Delta\,(e_{j_1},\, e_{j_2},\dots,e_{j_n})$$

$$i = 1,2,\dots,n$$

De C_1) se deduce que cuando para al menos dos índices j_k y j_t, ($t \neq k$) se tenga que $e_{j_k} = e_{j_t}$ la función Δ se anula, por ello la suma anterior bastará desarrollarla para aquellos índices tales que $j_k \neq j_l$, $1 \leq k \leq n$; $1 \leq l \leq n$.

Esto es equivalente a desarrollar la suma sobre todas las permutaciones σ del conjunto $\{1,2,\dots,n\}$, así:

$$\Delta\,(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_{1\sigma(1)}\,\alpha_{2\sigma(2)}\cdots\alpha_{n\sigma(n)}\,\Delta(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})$$

pero por (d_2) $\Delta(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\dots,e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\Delta(e_1,e_2,\dots,e_n)$

para cualquier $\sigma \in S_n$. Luego:

$$\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)}\cdots\alpha_{n\sigma(n)}\Delta(e_1,\dots,e_n)$$

esta última igualdad muestra que

$$\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0\ ,\ \forall(x_1,x_2,\dots,x_n) \in E^n$$

Si $\Delta(e_1,e_2,\dots,e_n) = 0$, es decir:

"Toda función determinante que se anula en una base de E, debe anularse en todo E".

1.3 Unicidad.

Sean Δ y Δ_1 dos funciones determinantes y asumamos que Δ_1 es no trivial, es decir $\Delta_1 \neq 0$, entonces para una base (e_i) $i=1,2,\ldots,n$ de E y $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in E^n$ arbitrario

$$\Delta\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \Delta(e_1,e_2,\ldots,e_n) \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)},\ldots,\alpha_{n\sigma(n)}$$

y $\Delta_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \Delta_1(e_1,e_2,\ldots,e_n) \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)},\ldots,\alpha_{n\sigma(n)}$

Siendo $\Delta_1 \neq 0$, entonces $\Delta_1(e_1,e_2,\ldots,e_n) \neq 0$ por lo cual tiene sentido entonces definir $\lambda \in K$ tal que

$$\lambda = \frac{\Delta(e_1,e_2,\ldots,e_n)}{\Delta_1(e_1,e_2,\ldots,e_n)}\ ,\ \text{así}$$

$$\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \lambda\ \Delta_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

Siendo esta igualdad satisfecha para todo $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in E^n$, se deduce que

$$\boxed{\Delta = \lambda\ \Delta_1}$$

Esta relación expresa que:

"Toda función determinante Δ es múltiplo de una función determinante Δ_1 no nula".

1.4 Existencia de Δ no-trivial.

Para probar que existe una función determinante Δ no trivial en E, definamos Δ así:

$$\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, \alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)}\cdots\alpha_{n\sigma(n)} \qquad y$$

verifiquemos que Δ así definida es función determinante

i) Δ es multilineal, en efecto

$$\Delta(x_1,x_2,\ldots,\lambda x_i + x_i',\ldots,x_n)$$

$$= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)}\cdots(\lambda\alpha_{i\sigma(i)} + \alpha'_{i\sigma(i)})\cdots \alpha_{n\sigma(n)}$$

$$= \lambda \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)}\cdots\alpha_{i\sigma(i)}\cdots\alpha_{n\sigma(n)}$$

$$+ \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)}\cdots\alpha'_{i\sigma(i)}\cdots\alpha_{n\sigma(n)}$$

$$= \lambda\, \Delta(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n) + \Delta(x_1,x_2,\ldots,x_i',\ldots,x_n)$$

ii) Δ es antisimétrica.

Consideremos una permutación fija ζ, entonces

$$\Delta(x_{\zeta(1)},x_{\zeta(2)},\ldots,x_{\zeta(n)}) =$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\alpha_{\zeta(1)\sigma(1)}\alpha_{\zeta(2)\sigma(2)}\cdots\alpha_{\zeta(n)\sigma(n)}$$

Como $(\zeta^{-1}\circ \zeta)_{(i)} = i$, podemos escribir

$$\sigma(i) = \sigma(\zeta^{-1}\circ\zeta)(i) = \sigma(\zeta^{-1}(\zeta(i)))$$

Luego $\Delta(x_{\zeta(1)},x_{\zeta(2)}\cdots,x_{\zeta(n)}) =$

$$= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\alpha_{\zeta(1)\,\sigma(\zeta^{-1}(\zeta(1)))}\,\alpha_{\zeta(2)\sigma(\zeta^{-1}(\zeta(2)))}\cdots\alpha_{\zeta(n)\sigma(\zeta^{-1}(\zeta(n)))}$$

haciendo $\rho = \sigma \circ \zeta^{-1}$, tendremos que ρ barre todas las permutaciones de S_n., pues σ lo hace, así, podemos escribir

$$\Delta(x_{\zeta(1)},\dots,x_{\zeta(n)}) = \sum_{\rho} \varepsilon(\rho.\zeta)\alpha_{\zeta(1)\rho(\zeta(1))}\cdots\alpha_{\zeta(n)\rho(\zeta(n))}$$

ordenando los índices $\zeta(i)$ en la sucesión creciente $1,2,\dots,n$ obtenemos

$$\Delta(x_{\zeta(1)},\dots,x_{\zeta(n)}) = \sum_{\rho} \varepsilon(\rho)\varepsilon(\zeta)\alpha_{1\rho(1)}\alpha_{2\rho(2)}\cdots\alpha_{n\rho(n)}$$

$$= \varepsilon(\zeta) \sum_{\rho} \varepsilon(\rho)\alpha_{1\rho(1)}\alpha_{2\rho(2)}\cdots\alpha_{n\rho(n)}$$

Luego Δ define una función determinante.

Probemos ahora que Δ es no trivial.

Evaluemos Δ en (e_i) $i = 1\dots n$, base de E

$$\Delta(e_1,e_2,\dots,e_n) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)}\cdots\alpha_{n\sigma(n)}$$

pero $\alpha_{i\sigma(i)} = 1$, si $i = \sigma(i)$

y $\alpha_{i\sigma(i)} = 0$, si $i \neq \sigma(i)$

así, habrá un término en la sumatoria en la cual

$\alpha_{1\sigma(1)} = \alpha_{2\sigma(2)} = \dots = \alpha_{n\sigma(n)} = 1$

por lo que $\Delta(e_1,e_2,\dots,e_n) \neq 0$, de donde $\Delta \neq 0$.

§2. EL DETERMINANTE DE UNA TRANSFORMACION LINEAL.

2.1 Definición de determinante de un endomorfismo.

Consideremos $\phi \in End(E)$ y $dim(E) = n$, definiremos el determinante de ϕ, escogiendo para ello una función determinante Δ no - trivial.

Prop. 2.1.1 La aplicación $\Delta_\phi : E^n \to K$

tal que:

$$\Delta_\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Delta(\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_n))$$

es una función determinante.

Pa.

(i) Δ_ϕ es multilineal.

$$\Delta_\phi (x_1, x_2, \ldots, \lambda x_i + x_i', \ldots, x_n)$$

$$= \Delta(\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(\lambda x_i + x_i'), \ldots, \phi(x_n)) \quad (1)$$

Siendo ϕ una aplicación lineal, la expresión (1) se transforma en:

$$\Delta(\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \lambda\phi(x_i) + \phi(x_i'), \ldots, \phi(x_n))$$

$$= \lambda\ \Delta(\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_i), \ldots, \phi(x_n)) + \Delta(\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_i'), \ldots, \phi(x_n))$$

$$= \lambda\Delta_\phi(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \Delta_\phi(x_1, x_2, \ldots, x_i', \ldots, x_n)$$

(ii) Δ_ϕ es antisimétrica. En efecto:

$$\Delta_\phi (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \Delta(\phi(x_{\sigma(1)}), \phi(x_{\sigma(2)}), \ldots, \phi(x_{\sigma(n)}))$$

y escribiendo $\phi(x_{\sigma(i)}) = w_{\sigma(i)}$, tenemos

$\Delta\ (w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}, \ldots, w_{\sigma(n)})$

$= \varepsilon(\sigma)\ \Delta(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ por ser Δ antisimétrica

$= \varepsilon(\sigma)\ \Delta(\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_n))$

$= \varepsilon(\sigma)\ \Delta_\phi\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Ya que Δ es una función determinante no nula, se tiene

$$\Delta_\phi = \lambda\Delta,\ \lambda \in K$$

El escalar $\underline{\lambda}$ es determinado por la transformación ϕ y no depende de la función Δ escogida. En efecto:

Si Δ' es otra función determinante no nula, entonces

$\Delta' = \lambda'\Delta$ y $\Delta'_\phi = \lambda'\ \Delta_\phi$, ya que

$$\begin{aligned}\Delta'_\phi\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \Delta'(\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_n)) \\ &= \lambda'\ \Delta(\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_n)) \\ &= \lambda'\Delta_\phi\end{aligned}$$

por lo tanto

$\Delta'_\phi = \lambda'\Delta_\phi = \lambda'(\lambda\Delta) = \lambda(\lambda'\Delta) = \lambda\Delta'$

Definición 2.1.2

Sea $\phi \in \text{End}\ (E)$ y Δ una función determinante no nula, llamaremos *determinante de ϕ* al escalar λ tal que

$$\Delta_\phi = \lambda\ \Delta$$

Notación: Denotaremos λ por det.ϕ , así

$$\Delta_\phi = (\text{det.}\ \phi)\Delta$$

una expresión menos condensada que la ecuación anterior es:

para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$

$$\Delta_\phi(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \Delta(\phi(x_1), \phi(x_2),\ldots, \phi(x_n))$$
$$= \det.\phi \quad \Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

un caso particular es $\phi = \lambda i$, donde i es el endomorfismo identidad, entonces:

$$\Delta_\phi \quad (x_1,x_2,\ldots,x_n) = \Delta_{\lambda i}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$
$$= \Delta(\lambda i(x_1), \lambda i(x_2),\ldots, \lambda i(x_n))$$
$$= \Delta(\lambda x_1, \lambda x_2,\ldots, \lambda x_n)$$
$$= \lambda^n \Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

de donde

$$\Delta_{\lambda i} = \lambda^n \Delta \text{ , por lo que}$$
$$\det.(\lambda \bar{I}) = \lambda^n$$

Ejemplos:

(1) Para $\lambda = 1$, det. $(i) = 1$; (El determinante del endomorfismo identidad es "uno").

(2) Para $\lambda = 0$, det. $(0) = 0$; (El determinante del endomorfismo nulo es "cero").

2.2 Propiedades de det. ϕ

Se sabe que $\phi \in$ End (E) es regular, si existe $\Psi \in$ End (E) tal que $\phi\Psi = \Psi\phi = i$, es decir, si ϕ es inversible.

Es importante señalar que un endomorfismo regular ϕ puede ser caracterizado por su determinante, como lo demuestra la

Prop. 2.2.1 Sea $\phi \in$ End (E), ϕ es regular si y solo si $\det \phi \neq 0$

Pa.

Supongamos que ϕ es regular y sea (e_i) $i = 1,\ldots,n$ una base de E, Δ una función determinante no trivial; entonces

$\Delta(\phi(e_1), \phi(e_2),\ldots, \phi(e_n)) = \det\phi \ \Delta(e_1,e_2,\ldots,e_n)$

por otra parte, dado que ϕ es regular, el conjunto $\{\phi(e_1), \phi(e_2),\ldots, \phi(e_n)\}$ es también una base de E y siendo Δ no trivial, tenemos que

$\Delta(\phi(e_1),\phi(e_2),\ldots, \phi(e_n)) \neq 0$, luego

$\det\phi \ \Delta(e_1,e_2,\ldots,e_n) \neq 0$, de donde se sigue que $\det.\phi \neq 0$

por otra parte, si $\det.\phi \neq 0$ entonces $\Delta(\phi(e_1),\phi(e_2),\ldots,\phi(e_n)) \neq 0$

por lo tanto los $\phi(e_i), i = 1,\ldots n$, son l.i, por lo que ϕ es inyectiva; ya que si $x = \sum \alpha_i e_i$, $w = \sum \beta_i e_i$ y

$$\phi(x) = \phi(w), \text{ entonces;}$$

$$\phi(x - w) = 0$$

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)e_i\right) = 0$$

$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\phi(e_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i - \beta_i = 0$ por ser los $\phi(e_i)$ l.i. y por lo tanto $x = w$.

Además, siendo E de dim finita, ϕ es sobreyectiva. Se deduce entonces que ϕ^{-1} existe y por lo tanto ϕ es inversible.

Prop. 2.2.2 Si Ψ y $\phi \in \operatorname{End}(E)$, entonces:

$$\det.(\Psi\circ\phi) = \det.\Psi \ \det.\phi$$

Pa.

Sea Δ una función determinante no nula;

$$\Delta_{\Psi\phi}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \Delta((\Psi\phi)(x_1), (\Psi\phi)(x_2),\ldots,(\Psi\phi)(x_n)$$

$$= \Delta(\Psi(\phi(x_1)),\Psi(\phi(x_2)),\ldots,\Psi(\phi(x_n)$$

$$= \det.\Psi \quad \Delta(\phi(x_1),\phi(x_2),\ldots,\phi(x_n))$$

$$= \det.\Psi \quad \det.\phi \quad \Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

Así:

$$\Delta_{\Psi\phi} = \det.\Psi \quad \det.\phi \quad \Delta$$

Luego $\det.\Psi\,\phi = \det.\Psi \quad \det.\phi$.

Particularmente, si ϕ es regular y ϕ^{-1} su automorfismo inverso, de la proposición 2.2.2 se sigue que:

$\det.\ (\phi.\phi^{-1}) = \det.\phi \quad \det.\phi^{-1}$; como

$\det.\ (\phi.\phi^{-1}) = \det.\ (i) = 1$, entonces

$\det.\ \phi^{-1} = \dfrac{1}{\det.\phi}$ o de otra manera

$\det.\ \phi^{-1} = (\det.\ \phi)^{-1}$

2.3 Subespacios Estables.

Definición 2.3.1

Sea $\phi \in \mathrm{End}\ (E)$ y $E_1 \subset E$ subespacio de E, se dice que E_1 es estable por ϕ , si $\phi(E_1) \subset E_1$.

Prop. 2.3.2 Sea $\phi \in \mathrm{End}\ (E)$ y E_1, E_2 subespacios estables de E de dimensiones $\underline{p}$ y $\underline{q}$, respectivamente, tal que $E = E_1 \oplus E_2$ y sean los endomorfismos

$\phi_1 : E_1 \to E_1$ y $\phi_2 : E_2 \to E_2$ ambas inducidas por ϕ, entonces:
det. ϕ = det. ϕ_1 det. ϕ_2

Pa.

Definamos los endomorfismos de E siguientes:

$$\Psi_1 : E \longrightarrow E$$

$$x \rightsquigarrow \begin{cases} \phi_1(x), & \text{si } x \in E_1 \\ x, & \text{si } x \in E_2 \end{cases}$$

y

$$\Psi_2 : E \longrightarrow E$$

$$x \rightsquigarrow \begin{cases} x, & \text{si } x \in E_1 \\ \phi_2(x), & \text{si } x \in E_2 \end{cases}$$

resulta inmediato que $\phi = \Psi_2 \circ \Psi_1$ y por prop. 2.2.2 se tiene det. ϕ = det. Ψ_2 det. Ψ_1. La proposición quedará probada si mostramos que:

det. ϕ_1 = det. Ψ_1 y det. ϕ_2 = det. Ψ_2

para ello consideremos Δ una función determinante no trivial en E y el conjunto $\{b_1, b_2, \ldots, b_q\}$ base de E_2, entonces la función determinante Δ, definida en E_1 por

$\Delta_1(x_1, x_2, \ldots, v_p) = \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_p, b_1, b_2, \ldots, b_q)$

con $x_i \in E_1$ es una función determinante no trivial en E_1 luego

$\Delta_1(\phi_1(x_1), \phi_1(x_2), \ldots, \phi_1(x_p)) = \text{det. } \phi_1 \, \Delta_1(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ (1)

de la definición de Δ_1 y Ψ_1 también obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta_1(\phi_1(x_1), \phi_1(x_2),\ldots, \phi_1(x_p)) &= \Delta(\phi_1(x_1), \phi_1(x_2),\ldots, \phi_1(x_p),b_1,b_2,\ldots,b_q)\\ &= \Delta(\Psi_1(x_1),\ldots, \Psi_1(x_p), \Psi_1(b_1),\ldots, \Psi_1(b_q))\\ &= \det.\Psi_1\ \Delta(x_1,x_2,\ldots,x_p,b_1,b_2,\ldots,b_q)\\ &= \det.\Psi_1\ \Delta_1(x_1,x_2,\ldots,x_p) \qquad (2)\end{aligned}$$

comparando las igualdades (1) y (2), obtenemos

$$\det.\ \phi_1\ \Delta_1(x_1,x_2,\ldots,x_p) = \det.\ \Psi_1\ \Delta_1\ (x_1,x_2,\ldots,x_p)$$

de donde $\det.\ \phi_1 = \det.\ \Psi_1$

Similarmente se prueba la igualdad

$$\det.\ \phi_2 = \det.\ \Psi_2$$

§3. EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

3.1 Definición de determinante de una Matriz.

Sea $\phi \in \mathrm{End}\ (E)$ y $A = (\alpha_{ij})_{nxn}$ la matriz asociada a ϕ relativa a la base (e_i) $i = 1,\ldots,n$; como

$$\Delta\ (\phi(x_1), \phi(x_2),\ldots, \phi(x_n)) = \det.\ \phi\ \Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

tenemos que:

$$\Delta\ (\phi(e_1), \phi(e_2),\ldots, \phi(e_n)) = \det.\ \phi\ \Delta(e_1,e_2,\ldots, e_n) \qquad (3)$$

Además $\Delta(\phi(e_1),\phi(e_2),\ldots, \phi(e_n)) =\Delta(\sum_\sigma \alpha_{ij}e_j,\ldots \sum_j \alpha_{nj}\ e_j)$ (4)

$$= \sum \varepsilon\ (\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)},\ldots,\alpha_{n\sigma(n)}\Delta(e_1,\ldots,e_n)$$

Luego, comparando (3) y (4) resulta que

$$\det.\ \phi = \sum \varepsilon(\sigma)\ \alpha_{1\sigma(1)}\ \alpha_{2\sigma(2)}, \ldots, \alpha_{n\sigma(n)} \quad ,$$

así, determinante de ϕ es expresado en términos de los escalares de su matriz asociada.

Definición 3.1.1

Sea $\phi \in$ End (E) y $(\alpha_{ij})_{nxn}$ su matriz asociada, se define el *determinante* de la matriz $A = (\alpha_{ij})_{nxn}$ por:

$$\det.\ A = \sum \varepsilon(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)}, \ldots, \alpha_{n\sigma(n)}$$

Notación: El determinante de A puede escribirse como det. M (ϕ)

Prop. 3.1.2 Sean A y B dos matrices cuadradas nxn, entonces: det. (AB) = det. A. det. B.

Pa.

Sean Ψ y $\phi \in$ End (E) tal que $A = M(\phi)$ y $B = M(\Psi)$ entonces:

$$\begin{aligned} \det.\ (A.B) = \det.\ (M(\phi).\ M(\Psi)) &= \det.\ (M(\phi.\Psi)) \\ &= \det.\ (\phi.\Psi) \\ &= \det.\ \phi.\ \det.\ \Psi \\ &= \det.\ M(\phi).\ \det.\ M(\Psi) \\ &= \det.\ A.\ \det.\ B. \end{aligned}$$

Como un caso particular de la proposición anterior se deduce que si A es inversible

$\det.\ (A^{-1}) = (\det.(A))^{-1}$ en efecto:

$$\det.(I) = \det.(A.A^{-1}) = \det. A. \det. A^{-1} = 1$$

3.2 <u>El determinante de una matriz como función de sus columnas.</u>

Sea la matriz $A = (\alpha_{ij})_{nxn}$, podemos entonces considerar cada columna de A, como vector de K^n, así:

$$v_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

de esta manera det. A aparece como función de las columnas de A.

Investiguemos tal función, definiendo

$$\phi : K^n \longrightarrow K^n$$

$$e_j \rightsquigarrow v_j \qquad \text{donde } e_j = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\} j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } j=1,\ldots,n$$

entonces A es la matriz asociada a ϕ relativo a la base $(e_i)i=1\ldots n$.

Sea $\Delta = K^n \longrightarrow K$ una función determinante con $\Delta(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$, obtenemos entonces

$$\Delta(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \Delta(\phi(e_i), \phi(e_2), \ldots, \phi(e_n))$$

$$= \det. \phi \ \Delta(e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

$$= \det. \phi, \quad \text{así:}$$

$$\det. A = \Delta(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Esta última ecuación muestra que el determinante de una matriz A puede ser expresado como función de las columnas de A.

Prop. 3.2.1 (a) El determinante es lineal con respecto a cada vector columna.

(b) Si dos vectores columnas se intercambian, el determinante cambia de signo.

(c) El determinante no cambia, si a un vector columna se le adiciona el múltiplo de otro vector columna distinto.

(d) El determinante no es nulo si y solo si, los vectores columna son l.i.

La prueba es obvia a partir de las propiedades de Δ.

§4. FUNCIONES DETERMINANTES DUALES.

4.1 Definición de función determinante dual.

Sean E un e.v. de dimensión finita y E^* su espacio dual respecto al producto escalar $<|>$.

Consideremos $\Delta \neq 0$ y $\Delta^* \neq 0$, respectivas funciones determinantes de E y E^*, será probada la relación

$$\Delta^*(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)\,\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \alpha \det.\,(<\phi_i|x_j>)_{nxn} \qquad (1)$$

con $x_j \in E$ y $\phi_i \in E^*$.

Pa.

Sea la función

$$\Omega : E^{*(n)} \times E^n \longrightarrow K$$

$$(\phi_1,\ldots\phi_n;\ x_1\ldots,x_n) \rightsquigarrow \text{det. } (<\phi_i|x_j>)_{n\times n}$$

la cual denotaremos por

$$\Omega_{(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \text{det. } (<\phi_i|x_j>)_{n\times n}$$

De las propiedades de determinante de una matriz se tiene:

(i) Ω es lineal respecto a cada ϕ_i y cada x_j.

$$\Omega_{(\phi_1,\ldots,\lambda\phi_k+\phi_k',\ldots,\phi_n)}(x_1,\ldots,x_n) = \text{det.} \begin{bmatrix} <\phi_1|x_1> & \ldots & <\phi_n|x_n> \\ \vdots & & \\ <\lambda\phi_k+\phi_k'|x_1> & \ldots & <\lambda\phi_k+\phi_k'|x_n> \\ \vdots & & \\ <\phi_n|x_1> & \ldots & <\phi_n|x_n> \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\,\text{det.} \begin{bmatrix} <\phi_1|x_1> & \ldots & <\phi_n|x_n> \\ \vdots & & \\ <\phi_k|x_1> & \ldots & <\phi_k|x_n> \\ \vdots & & \\ <\phi_n|x_1> & \ldots & <\phi_n|x_n> \end{bmatrix} + \text{det.} \begin{bmatrix} <\phi_1|x_1> & \ldots & <\phi_1|x_n> \\ & & \\ <\phi_k'|x_1> & \ldots & <\phi_k'|x_n> \\ & & \\ <\phi_n|x_1> & \ldots & <\phi_n|x_n> \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\,\Omega_{(\phi_1,\ldots,\phi_k,\ldots,\phi_n)}(x_1,\ldots,x_n) + \Omega_{(\phi_1,\ldots,\phi_k',\ldots,\phi_n)}(x_1,\ldots,x_n)$$

Simularmente se prueba para los x_j.

(ii) Ω es antisimétrica para cada ϕ_i y cada x_j.

$$\Omega_{(\phi_{\sigma(1)},\ldots,\phi_{\sigma(n)})}(x_1,\ldots,x_n) = \det.\begin{pmatrix} <\phi_{\sigma(1)}|x_1>\ldots<\phi_{\sigma(1)}|x_n> \\ \vdots \\ <\phi_{\sigma(n)}|x_1>\ldots<\phi_{\sigma(n)}|x_n> \end{pmatrix}$$

$$=\varepsilon(\sigma)\det.\begin{pmatrix} <\phi_1|x_1>\ldots<\phi_1|x_n> \\ \vdots \\ <\phi_n|x_1>\ldots<\phi_n|x_n> \end{pmatrix}$$

$$=\varepsilon(\sigma)\ \Omega_{(\phi_1,\ldots,\phi_n)}(x_1,\ldots,x_n)$$

Por la unicidad de Δ, Ω puede reescribirse como

$$\Omega_{(\phi_1,\ldots\phi_n)}(x_1,\ldots,x_n) = \Phi(\phi_1,\ldots,\phi_n)\ \ \Delta(x_1,\ldots,x_n)$$

donde el escalar $\Phi\ (\phi_1,\ldots,\phi_n)$ depende de los ϕ_i

Evaluando Ω en la base $(e_i)_{i=1\ldots n}$ de E tenemos:

$$\Omega_{(\phi_1,\ldots,\phi_n)}(e_1,\ldots,e_n) = \Phi(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)\,\Delta\,(e_1,\ldots,e_n)$$

Como $\Delta\ (e_1,\ldots,e_n) = 1$ y Ω es lineal respecto a cada variable y anti simétrica, también lo será Φ.

Aplicando a Δ^* el teorema de unicidad tenemos

$\Phi(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n) = \beta\ \Delta^*(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)$, con $\beta\in K$

Luego

$$\Omega_{(\phi_1,\ldots,\phi_n)}(x_1,\ldots,x_n) = \beta\ \Delta^*(\phi_1,\ldots,\phi_n)\,\Delta\,(x_1,\ldots,x_n) \qquad (2)$$

Siendo $(e_i^*)_{i=1,\ldots,n}$ la correspondiente base dual de (e_i) $i=1,\ldots,n$ entonces

$$1 = \beta \, \Delta^* \, (e_1^*,\dots,e_n^*) \, \Delta \, (e_1,\dots,e_n)$$

así $\beta \neq 0$.

Multiplicando por $\alpha = \beta^{-1}$ la relación (2):

$$\alpha \, \Omega_{(\phi_1,\dots\phi_n)} = \alpha \, \beta \, \Delta^*(\phi_1,\dots\phi_n) \, \Delta \, (x_1,\dots,x_n)$$

obtenemos (1)

Definición 4.1.1.

Las funciones determinantes Δ y Δ^* son *duales* si

$$\Delta^*(\phi_1,\dots\phi_n) \, \Delta \, (x_1,\dots,x_n) = \det. \, (<\phi_i|x_j>)_{nxn}$$

Prop. 4.1.2 Para cada función determinante $\Delta \neq 0$ en E existe una y solo una función determinante Δ^* en E^*.

Pa.

(i) Existencia.

Sea $\Delta_o^* \neq 0$ una función determinante arbitraria en E^*,

$t_q \; \Delta_o^* \, (\phi_1,\dots\phi_n) \, \Delta(x_1,\dots,x_n) = \alpha \det. \, (<\phi_i|x_j>)_{nxn}$

haciendo $\Delta^* = \frac{1}{\alpha} \Delta_o^*$, tenemos que Δ^* y Δ son duales.

(ii) Unicidad.

Sean Δ_1^* y Δ_2^* dos funciones determinantes duales a $\Delta \neq 0$, entonces:

$$\Delta_1^* \, (\phi_1,\dots,\phi_n) \, \Delta \, (x_1,\dots,x_n) = \det. \, (<\phi_i|x_j>)_{nxn}$$

y

$$\Delta_2^* \, (\phi_1,\dots,\phi_n) \, \Delta \, (x_1,\dots,x_n) = \det. \, (<\phi_i|x_j>)_{nxn}$$

luego,

$(\Delta_1^* (\phi_1,\ldots,\phi_n) - \Delta_2^* (\phi_1,\ldots,\phi_n)) \Delta (x_1,\ldots,x_n) = 0$

en consecuencia

$$\Delta_1^* = \Delta_2^*$$

4.2 El determinante de una aplicación dual.

Prop. 4.2.1. Sea $\phi \in End (E)$ y $\phi^* \in End (E^*)$ dos aplicaciones lineales duales, entonces

$$det.\ \phi = det.\ \phi^*$$

Pa.

Sean Δ^* y Δ un par de funciones determinantes duales en E^* y E, - luego

$\Delta^* (\phi_1,\ldots,\phi_n) \Delta (x_1,\ldots,x_n) = det.\ (<\phi_i|x_j>)_{nxn}$

por lo cual

$\Delta^* (\phi^*(\phi_1),\ldots,\phi^*(\phi_n)) \Delta (x_1,\ldots,x_n) = det.\ (<\phi^*(\phi_i)|x_j>)_{nxn}$

$\Delta^* (\phi_1,\ldots,\phi_n) \Delta (\phi(x_1),\ldots,\phi(x_n)) = det.\ (<\phi_i|\phi(x_j)>)_{nxn}$

Siendo

$$< \phi^* (\phi_i)|x_j > = < \phi_i|\phi(x_j) >$$

como se ha visto en Capítulo Introductorio, puede afirmarse entonces que

$\Delta^*(\phi^*(\phi_1),\ldots,\phi^*(\phi_n)) \Delta (x_1,\ldots,x_n) = \Delta^* (\phi_1,\ldots,\phi_n) \Delta (\phi(x_1),\ldots,\phi(x_n))$

Pero

$$\Delta^* \, (\phi^*(\phi_1),\ldots,\phi^*(\phi_n)) = \text{det. } \phi^* \, \Delta^*(\phi_1,\ldots,\phi_n)$$

y

$$\Delta \, (\phi(x_1),\ldots, \, (x_n)) = \text{det. } \phi \, \Delta \, (x_1,\ldots,x_n)$$

obtenemos que

$$(\text{det. } \phi^* - \text{det. } \phi) \, \Delta^* \, (\phi_1,\ldots,\phi_n) \, \Delta \, (x_1,\ldots,x_n) = 0$$

luego

$$\boxed{\text{det. } \phi = \text{det. } \phi^*}$$

Corolario 4.2.2 Matrices transpuestas tienen el mismo determinante.

Pa.

Sea $M(\phi) = A$, entonces

$$\begin{aligned} \text{det. } A^* &= \text{det. } (M(\phi))^* = \text{det. } M(\phi^*) = \text{det. } \phi^* \\ &= \text{det. } \phi = \text{det. } M(\phi) = \text{det. } A \end{aligned}$$

§5. COFACTORES.

5.1 Definición de Cofactor

Consideremos la matriz $A = (\alpha_{ij})_{nxn}$, para i y j fijos, reemplacemos los elementos de la fila i y la columna j por ceros, - excepto en la posición (i,j), en la cual se reemplaza por 1, obtenemos así la matriz:

$$
{}_{ij} = \begin{pmatrix}
\alpha_{11} & ,\ldots, & \alpha_{1(j-1)} & 0 & , \alpha_{1(j+1)} & ,\ldots, \alpha_{1n} \\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & \\
\alpha_{(i-1)}, & \ldots, & \alpha_{(i-1)(j-1)}, & 0 & , \alpha_{(i-1)(j+1)}, & \ldots, \alpha_{(i-1)n} \\
0 & ,\ldots, & 0 & , 1 & , 0 & ,\ldots, 0 \\
\alpha_{(i+1)1}, & \ldots, & \alpha_{(i+1)(j-1)}, & 0 & , \alpha_{(i+1)(j+1)}, & \ldots, \alpha_{(i+1)n} \\
\cdot & & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & & \cdot & \cdot & & \\
\alpha_{n1} & ,\ldots, & \alpha_{n(j-1)}, & 0 & , \alpha_{n(j+1)} & ,\ldots, \alpha_{nn}
\end{pmatrix}
$$

Definición 5.1.1.

Llamaremos *cofactor* del elemento α_{ij} al determinante de la matriz C_{ij}. Denotaremos al cofactor del elemento α_{ij} por cof α_{ij}. Así:

$$\text{cof } \alpha_{ij} = \det.\ C_{ij}.$$

Definición 5.1.2.

La transpuesta de $(\text{cof } \alpha_{ij})_{nxn}$ será denominada la *adjunta* de A y será denotada por

$$\text{Adj. } A = (\alpha_{ij})_{nxn} = (\text{cof } \alpha_{ji})_{nxn}$$

Expresaremos el determinante C_{ij} en función de sus filas.

Escribamos cof α_{ij} en términos de las filas de C_{ij}

así, cof $\alpha_{ij} = \Delta(v_1-\alpha_{ij}\, e_j,\ldots,v_{(i-1)}-\alpha_{(i-1)j}e_j,e_j v_{(i+1)}-\alpha_{(i+1)j}e_j\ldots,v_n-\alpha_{nj}e_j)$

$= \Delta(v_1,v_2,\ldots,v_{i-1},e_j,v_{i+1},\ldots,v_n)$

donde v_i es la i-esima fila de C_{ij}

multiplicando por α_{kj} obtenemos:

$\alpha_{kj}\,\beta_{ji} = \Delta(v_1,v_2,\ldots,v_{i-1},\ e_j,\ v_{i+1},\ldots,v_n)$

y sumando en j, se sigue que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}\,\beta_{ji} = \Delta\,(v_1,v_2,\ldots,v_{i-1},\ v_k,\ v_{i+1},\ldots,\ v_n)$$

Luego, si $k = i$ tendríamos que $\Delta\,(v_1,v_2,\ldots,v_i,\ldots,v_n)$ es igual a - det. A, en cambio si $i \neq k$, v_k aparece repetido y así

$\Delta\,(v_1,\ldots,v_k,\ldots,v_k,\ldots,v_n) = 0$

entonces $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{kj}\,\beta_{ji} = \delta_{ki}$ det.A ; es decir

A. Adj. A = det.AI, siendo I la matriz identidad

Asumamos ahora que det.A $\neq 0$, entonces la expresión anterior de dividirse por det.A ; así

$$A.\ \frac{\text{Adj.}A}{\text{det.}A} = I, \quad \text{luego}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\text{det.}A}\cdot \text{Adj.}A}$$

Aplicando nuevamente la relación $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} \beta_{ji} = \delta_{ki}$. det. A.

a un sistema lineal con $\underline{n}$ ecuaciones y $\underline{n}$ incógnitas, obtenemos la llamada *Regla de Cramer* para la solución del sistema.

Sea $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k_j} \xi_k = \mu_j$ $(j=1,\ldots,n)$ el sistema mencionado

y asumamos que det. A. $\neq 0$, con $A = (\alpha_{k_j})_{n\times n}$.

multiplicando la j-ésima ecuación por β_{ji} tenemos:

$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \beta_{ji} \xi_k = \beta_{ji} \mu_j$, y sumando en$_j$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1} \alpha_{kj} \beta_{ji} \xi_k \right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} \mu_j$$

luego $\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} \beta_{ji} \right) \xi_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} \mu_j$

$$\text{det.A} \cdot \xi_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} \mu_j$$

así $\xi_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} \beta_{ji}}{\text{det.A}}$

Obsérvese además, que el numerador no es más que el desarrollo de la fila $\underline{i}$ del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}, \ldots \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \mu_1 \ \cdots \ \mu_j & \cdots & \mu_n \\ \alpha_{n1} \cdots \ \alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow i$$

§6. EL POLINOMIO CARACTERISTICO.

6.1 Vectores Propios.

Consideremos una transformación lineal ϕ de un espacio lineal n-dimensional E. Un vector $v \neq 0$ de E es llamado un *vector propio* de ϕ si:

$$\boxed{\phi(v) = \lambda v, \ \lambda \in K.}$$

El escalar λ es llamado el correspondiente *valor propio*.

Una transformación lineal ϕ no necesariamente tendrá vectores propios. Como ejemplo tomemos $E = \mathbb{R}^2$ sobre $K = \mathbb{R}$ y definamos ϕ por

$$\phi(v_1) = v_2$$

$\phi(v_2) = -v_1$ donde los vectores v_1 y v_2 forman una base de $\mathbb{R}^2$, esta transformación no tiene vectores propios, en efecto: Asumamos que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ es un vector propio de ϕ , luego

$\phi(v) = \lambda v$, así

$\phi(v) = \lambda\alpha_1 v_1 + \lambda\alpha_2 v_2$., además $\phi(v) = \alpha_1\phi(v_1) + \alpha_2\phi(v_2)$

$$= \alpha_1 v_2 - \alpha_2 v_1$$

Se sigue entonces que:

$(\lambda\alpha_1 - \alpha_2) v_1 + (\lambda\alpha_2 - \alpha_1) v_2 = 0$ y por consiguiente

$$\lambda\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \quad (1)$$

$$\lambda\alpha_2 - \alpha_1 = 0 \quad (2)$$

Supongamos que $\lambda = 0$, se tiene así que tanto α_1 como α_2 son cero, - lo cual no es posible pues siendo v vector propio, $v \neq 0$.

Si $\lambda \neq 0$, despejando λ de (1) y (2) tenemos

$\lambda = \dfrac{-\alpha_2}{\alpha_1}$ y $\lambda = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$, lo cual es imposible.

obteniéndose en ambos casos una contradicción se deduce que v no puede ser vector propio de ϕ.

6.2 La Ecuación Característica.

Asumamos que v es un vector propio de ϕ y que λ es su respectivo valor propio, entonces

$\phi(v) = \lambda v,\ v \neq 0$

Esta ecuación puede ser escrita como

$(\phi-\lambda_i)\ (v) = 0$, mostrando así que

$\phi - \lambda_i$ es no regular, de donde se deduce que

$$\det.\ (\phi - \lambda_i) = 0$$

La ecuación $\det.\ (\phi - \lambda_i) = 0$ es llamada la *Ecuación Característica* de la transformación lineal ϕ, es claro entonces que todo valor propio de ϕ satisface dicha ecuación.

El desarrollo del det. de $\phi - \lambda$ nos conduce a un polinomio en λ de grado n, como puede verificarse fácilmente. Este polinomio se denomina *polinomio característico*, así, escribiremos

$\det.\ (\phi-\lambda_i) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p\ \lambda^{n-p}$, con $\alpha_0 = (-1)^n$ y $\alpha_n = \det.\phi$

6.3 Existencia de Valores Propios.

Sea λ un valor propio de $\phi \in$ End (E), entonces det. $(\phi-\lambda_i)=0$, además det. $(\phi-\lambda_i) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p \lambda^{n-p}$ tenemos entonces que los λ son raices del polinomio característico:

$$f(\lambda) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p \lambda^{n-p}$$

Esto implica que $\phi \in$ End (E), con dim. E = n, posee al menos n valores propios no necesariamente diferentes

Caso 1. Sea $E = \mathbb{R}^n$

(a) Si n es impar, tenemos que $\alpha_\circ = (-1)^n = -1$

luego $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = -\infty$ y $\lim_{\lambda\to-\infty} f(\lambda) = \infty$

por tanto existe algún $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(\lambda) = 0$, lo que garantiza en este caso la existencia de al menos un valor propio.

(b) Si n es par, $\alpha_\circ = (-1)^n$ y

$\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty} f(\lambda) = \infty$

como $f(0) = \alpha_n =$ det. ϕ, si det. $\phi > 0$, nada puede decirse sobre la existencia de raices de $f(\lambda)$; en cambio si det. $\phi < 0$, entonces existen al menos dos valores propios.

Caso 2. Sea $E = \mathbb{C}$, entonces de acuerdo al teorema fundamental del álgebra, $f(\lambda)$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$, luego existe al menos un valor propio de ϕ.

6.4 Polinomio Característico del Endomorfismo Inverso.

Sea Δ y Δ^* funciones determinantes en E y E^* respectivamente y sean $\phi: E \to E$ y $\phi^* : E^* \to E^*$ endomorfismos en E y E^* respectivamente.

Sabemos que $\det.\phi = \det.\ \phi^*$, de esta relación se deduce que - $\det.\ (\phi - \lambda_i) = \det.\ (\phi - \lambda_i)^*$.

Supongamos ahora que $E = E_1 \oplus E_2$ tal que E_1 y E_2 son estables por $\phi \in \mathrm{End}\ (E)$.

Dado que $\det.\phi = \det.\phi_1 \cdot \det.\phi_2$, con

$\phi_1 : E_1 \to E_1$ y $\phi_2 : E_2 \to E_2$ resulta que

$\det.\ (\phi - \lambda_i) = \det.\ (\phi_1 - \lambda_i).\ \det.\ (\phi_2 - \lambda_i)$ así:

El polinomio característico de ϕ es el producto de los polinomios característicos de ϕ_1 y ϕ_2.

Si ϕ es regular, entonces el polinomio característico de ϕ^{-1} estará dado por

$$F(\lambda) = \det.\ (\phi^{-1} - \lambda_i)\ ,\ \text{pero}$$

$$\begin{aligned}\phi^{-1} - \lambda_i &= \phi^{-1}_{\circ}\ (i - \lambda\phi)\\ &= -\ \phi^{-1}_{\circ}\ (\lambda\phi - i)\\ &= -\ \lambda\phi^{-1}_{\circ}\ (\phi - \lambda^{-1} i)\end{aligned}$$

Así: $$\begin{aligned}\det.\ (\phi^{-1} - \lambda i) &= \det.(-\lambda\phi^{-1}).\ \det.\ (\phi - \lambda^{-1} i)\\ &= (-\lambda)^n \det.\ \phi^{-1}.\ \det.\ (\phi - \lambda^{-1} i)\end{aligned}$$

Luego

$$F(\lambda) = (-\lambda)^n \text{ det. } \phi^{-1}.\ f(\lambda^{-1})$$

Escribamos

$F(\lambda) = \sum_{\mu=0}^{n} \beta_\mu \lambda^{n-\mu}$ obteniendo así entre los coeficientes de F y f la siguiente relación $\beta_\mu = (-1)^n \text{ det. } \phi^{-1} \alpha_{n-\mu}$, esta relación conduce a:

$$\beta_o = (-1)^n \qquad y \ \beta_n = \text{det. } \phi^{-1}$$

6.5 <u>El Polinomio característico de una matriz.</u>

Sea $(e_i)i=1,\dots n$ una base de E y $A = M(\phi)$ la matriz asociada a ϕ relativa a la base dada.

$$\begin{aligned} M(\phi - \lambda_i) &= M(\phi) - M(\lambda_i) \\ &= M(\phi) - \lambda M(i) \\ &= A - \lambda I \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \text{det. } (\phi - \lambda_i) &= \text{det. } M(\phi - \lambda_i) \\ &= \text{det. } (A - \lambda I) \end{aligned}$$

entonces

$$f(\lambda) = \text{det. } (A - \lambda I)$$

Este polinomio es llamado *polinomio característico* de A asociado a ϕ y las raices de este polinomio *valores propios* de A.

§7. <u>LA TRAZA.</u>

7.1 <u>La Traza de una Transformación Lineal.</u>

Al igual que det. otro escalar puede ser asociado a $\phi \in End(E)$.

Sea $\Delta \neq 0$ una función determinante en E, definamos la función

$$T : E^n \longrightarrow K$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n} \Delta\, (x_1, x_2, \ldots, \phi(x_i), \ldots, x_n)$$

Se probará que T es una función determinante.

(i) T es multilineal por la multilinealidad de Δ y la linealidad de ϕ.

(ii) T es antisimétrica, en efecto:

Sea $\sigma \in Sn$ una permutación cualquiera

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, \phi(x_{\sigma(i)}), \ldots, x_{\sigma(n)})$$

$$= \varepsilon(\sigma) \sum_{i=1}^{n} \Delta(x_1, x_2, \ldots, \phi(x_i), \ldots, x_n)$$

Así: $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta(x_1, x_2, \ldots, \phi(x_i) \ldots, x_n) = \alpha\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Siendo el escalar α determinado por ϕ.

Definición 7.1.1

Se llama *Traza de* ϕ al escalar α tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta(x_1, x_2, \ldots, \phi(x_i), \ldots, x_n)$$

$= \alpha\ \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y se denotará por tr.ϕ

Consideremos la aplicación

$$tr. : End\ (E) \rightarrow K$$

$$\phi \rightsquigarrow tr.\phi$$

Resulta inmediato probar que esta aplicación es lineal, es decir,

$$\text{tr. } (\lambda\phi+\mu\Psi) = \lambda \text{ tr. } \phi + M \text{ tr. } \Psi$$

Prop. 7.1.2. Sean ϕ y Ψ $\in$ End (E), entonces tr. $(\phi_\circ\Psi)$ = tr. $(\Psi_\circ\phi)$

Pa.

La traza de $\Psi_\circ\phi$ está definida

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta(x_1,x_2,\ldots,(\Psi_\circ\phi)(x_i),\ldots,x_n)$$

$$\text{tr. } (\Psi_\circ\phi)\ \Delta\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

reemplazemos x_k por $\Psi(x_k)$, $k = 1,\ldots,n$ de manera que

$$\sum_{i=1}^{n} (\Psi(x_1),\Psi(x_2),\ldots,(\Psi_\circ\phi)(\Psi(x_i)),\ldots,\Psi(x_n))$$

$$\text{det. } \Psi \sum_{i=1}^{n} \Delta(x_1,x_2,\ldots,(\phi_\circ\Psi)(x_i),\ldots,x_n)$$

$$\text{det. } \Psi \ .\ \text{tr. } (\phi_\circ\Psi)\ \Delta\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad (a)$$

pero $\sum_{i=1}^{n} \Delta(\Psi(x_1),\Psi(x_2),\ldots, (\Psi_\circ\phi)(\Psi(x_i)),\ldots,\Psi(x_n))$

$$\text{tr. } (\Psi_\circ\phi)\ \Delta\ (\Psi(x_1),\ \Psi(x_2),\ldots,\ \Psi(x_1),\ldots,\ \Psi(x_n))$$

$$\text{tr. } (\Psi_\circ\phi).\ \text{det. } \Psi\ \Delta\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad (b)$$

Comparando (a) y (b) resulta que, si det. $\Psi \neq 0$ es decir si Ψ es regular

$$\text{tr. } (\phi_\circ\Psi) = \text{tr. } (\Psi_\circ\phi) \qquad (c)$$

por otra parte, si Ψ es no regular consideremos el endomorfismo

$\Psi - \lambda_i$, tal que λ no es valor propio de Ψ, de donde

$\Psi - \lambda_i$ es regular, por lo cual

tr. $((\Psi - \lambda_i)\circ\phi) =$ tr. $(\phi\circ(\Psi - \lambda_i))$, por la linealidad del operador traza se tiene

tr. $(\Psi\circ\phi) - \lambda$ tr $\phi =$ tr.$(\phi\circ\Psi) - \lambda$ tr.ϕ

y finalmente se cumple (c).

7.2 La Traza de una Matriz.

Sea (e_i) $i=1,\ldots,n$ una base de E y $\phi \in$ End (E) relativo a la base dada.

Entonces ϕ determina una matriz $(\alpha_{ij})_{nxn}$ por la ecuación

$$\phi(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\, e_k \ , \quad i=1,\ldots,n$$

evaluando

$\sum_{i=1}^{n} \Delta\,(e_1,e_2,\ldots,\ \phi(e_i),\ldots,e_n)$ tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta(e_1,e_2,\ldots,\phi(e_i),\ldots,e_n) = \text{tr. } \phi\,\Delta\,(e_1,e_2,\ldots,e_n)$$

pero $\sum_{i=1}^{n} \Delta(e_1,e_2,\ldots,\phi(e_i),\ldots,e_n) = \Delta(e_1,e_2,\ldots,e_n) \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ii}$

luego tr. $\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$

Obsérvese que la fórmula anterior expresa que la traza ϕ es igual a la suma de los elementos de la diagonal principal de la ma triz asociada a ϕ.

Definición 7.2.1

Sea $A = (\alpha_{ij})_{nxn}$ y $\phi \in$ End (E) asociado a A, se llama *traza de* A al escalar:

$$tr.A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} \text{ ó de otra forma}$$

$$tr.\ M(\phi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$$

Se sigue de la definición anterior que:

$tr.A = tr.\ M(\phi) = tr.\ \phi.$

Nota: Observando que $\alpha_{ij} = \langle e_j^* | \phi(e_i)\rangle$ ya que

$$\langle e_j^* | \phi(e_i)\rangle = e_j^*(\phi(e_i))$$

$$= e_j^*\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_k\right)$$

se puede escribir la traza de ϕ como:

$$tr.\ \phi = \sum_{i=1}^{n} \langle e_j^* | \phi(e_i)\rangle , \quad \text{donde}$$

e_j^* es la base dual asociada a los e_i.

7.3 Dualidad de $L(E,F)$ y $L(F,E)$.

Definición 7.3.1.

Sean E,F dos espacios vectoriales, se define L (E, F) como el conjunto de las aplicaciones lineales de E en F. Similarmente se define L(E, F).

Con ayuda del operador tr. definiremos un producto escalar en $L(E, F)$ y $L(F, E)$.

Prop. 7.3.2 La aplicación $<|>: L(E, F) \times L(F, E) \longrightarrow K$

$$(\phi, \Psi) \rightsquigarrow tr.(\phi \circ \Psi)$$

es un producto escalar.

Pa.

(a) La función $<|>$ es evidentemente bilineal.

(b) Ahora asumamos que $<\phi|\Psi> = 0$ para alguna aplicación $\phi \in L(E,F)$ fija y para toda $\Psi \in L(F, E)$, mostremos que $\phi = 0$.

Supongamos que $\phi \neq 0$, luego existe $v \in E$ tal que $\phi(v) \neq 0$. Sea $b_1, b_2, \ldots, b_m$ base de F tal que

$\phi(v) = b_1$ y definamos Ψ como sigue

$\Psi: F \to E$

$b_1 \rightsquigarrow v$

$b_j \rightsquigarrow 0$, $j \neq 1$, entonces

$(\phi \circ \Psi)(b_1) = b_1$ y $(\phi \circ \Psi)(b_j) = 0$, $j \neq 1$ por definición

$<\phi|\Psi> = tr.(\phi \circ \Psi)$

probemos que $tr.(\phi \circ \Psi) \neq 0$, lo cual conducirá a una contradicción.

$$\sum_{j=1}^{m} \Delta(b_1, b_2, \ldots, (\phi \circ \Psi)(b_j), \ldots, b_m)$$

$$tr.(\phi \circ \Psi) \cdot \Delta(b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

al expander la sumatoria tenemos que todos sus términos son nulos, con excepción del primero que es:

$\Delta(b_1,b_2,...,b_m)$, en consecuencia

tr. $(\phi \circ \Psi) = 1$, lo cual es una contradicción.

Luego $\phi = 0$.

Similarmente se prueba para $\Psi \in L(F,E)$ fija y para toda $\phi \in L(E,F)$.

Así, la función definida inicialmente es un producto escalar de $L(E,F) \times L(F,E)$ en K.

Capítulo II

ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO

§1. EL PRODUCTO INTERNO.

1.1 Definición de Producto Interno.

Definición 1.1.1

Sea E un e. v. sobre K, se llama *producto interno* en E una función bilineal Φ: E x E $\to$ K
tq:

(i) $\Phi(x,x) = 0$, ssi $x = 0$

(ii) $\Phi(x,x) > 0$, si $x \neq 0$

(iii) $\Phi(x,y) = \Phi(y,x)$

Todo espacio vectorial donde se ha definido un producto interno Φ, se llamará *espacio vectorial con producto interno* -- (e.v.p.i.).

Notación: Emplearemos el símbolo $(x \mid y)$ para denotar el valor (x,y).

En lo sucesivo K será el cuerpo de los reales, a menos que se especifique lo contrario.

Terminología: Un e.v.p.i.,E, dim E = n, se llamará *espacio euclídeo* n *-dimensional.*

Prop. 1.1.2 La función $(|)$ es no degenerada.

Pa.

Asumamos que $(x|y) = 0$, para x fijo y $\forall\, y \in E$, en particular para $y = x$, luego $(x|x) = 0$; debe ser $x = 0$, por tanto $N_E = (0)$.

Consecuencia Inmediata: de la anterior proposición se concluye que todo espacio vectorial con producto interno es dual a él mismo. Esto significa que un producto interno es un producto escalar con la propiedad de simetría.

1.2 Definición de función norma.

La definición de un producto interno en E, induce una función llamada *norma*, que trataremos a continuación.

Definición 1.2.1

Sea E un e.v. de dimensión finita (euclídeo).

La función *norma* en E es una función real valorada

$$\|\ \ \|: E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow \|x\|$$

tq

(i) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in E$ y $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$

(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$, para $\lambda \in \mathbb{R}$

Un espacio euclídeo en el cual se ha definido una función norma, es llamado *espacio lineal normado*.

Prop. 1.2.2 Todo producto interno definido en un espacio vectorial E, induce una norma.

Pa.

Consideremos la definición:

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

Evidentemente satisface (i), (ii) y (iii) de 1.2.1.

Si $\|x\| = 1$, x será llamado *vector unitario*, los cuales se coleccionan en el conjunto:

$$S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$$

conocido como *esfera unitaria*.

Prop. 1.2.3 Todo producto interno en E puede expresarse en términos de la norma inducida.

Pa.

Sean x e y en E, por definición de norma tenemos:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y|x+y) \\ &= (x|x) + (y|x) + (x|y) + (y|y) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,(x|y) \end{aligned}$$

de donde:

$$\boxed{(x|y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)}$$

1.3 Ejemplos de Espacios con producto interno.

1.3.1 El Espacio $\mathbb{R}^n$

Definamos el conjunto:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

y además la función bilineal:

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

con $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$

Φ así definida cumple con las condiciones de 1.1.1.

1.3.2 El Espacio $C_{[0,1]}$.

Definamos el conjunto

$$C_{[0,1]} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua en } [0,1]\}$$

y además:

$$\Phi : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f,g) \rightsquigarrow \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

satisface las condiciones de 1.1.1.

1.4 Ortogonalidad.

Definición 1.4.1

Sea E un e.v.p.i., dos vectores $\underline{x}$, $\underline{y} \in E$ se dicen *ortogonales* si

$(x|y) = 0$.

Nota: La relación de ortogonalidad en E, es simétrica, y la reflexividad se cumple solamente cuando $x = y = 0$.

Prop. 1.4.2 Si $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ con $x_i \neq 0$, $i=1,\ldots,p$. tq $(x_i|x_j) = 0$ para $i \neq j$, entonces T es un sistema linealmente independiente.

Pa.

Construyamos la combinación lineal con elementos de T tq $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j = 0$ y probemos que $\alpha_j = 0$, para todo $j=1,\ldots,p$.

En efecto

$(x_i \,|\, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j) = 0$, como $(x_i \,|\, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j) = (x_i|\alpha_i x_i) =$

$\alpha_i(x_i|x_i) = 0$ y $(x_i|x_i) \neq 0$, entonces $\alpha_i = 0$, $\forall$ $i=1,\ldots,p$.

Definición 1.4.3.

Sean E_1 y E_2 subespacios de E e.v.p.i., se dice que son *ortogonales* ssi para todo $(x,y) \in E_1 \times E_2$ se tiene que

$(x|y) = 0$

Notación. Para anotar la ortogonalidad de dos subespacios - E_1 y E_2, escribiremos

$E_1 \perp E_2$

lo cual se leerá "E_1 ortogonal a E_2", de igual manera, $x \perp y$ significará que "$\underline{x}$ es ortogonal a $\underline{y}$".

1.5 Desigualdad de Schwarz.

Prop. 1.5.1 Sea E, e.v.p.i. Para $\underline{x}$, $\underline{y} \in E$ se cumple:

$$\boxed{|(x \mid y)| \leq \|x\| \ \|y\|}$$

Pa.

Caso 1. Si $\underline{x}$, $\underline{y}$ son l.d. entonces existe $\lambda \neq 0$ tq $x = \lambda y$

luego

$$(x|y) = (\lambda y|y) = \lambda(y|y) = \lambda\|y\|^2 = \lambda \|y\| \ \|y\|$$

$$= \|\lambda y\| \ \|y\| = \|x\| \ \|y\|$$

Caso 2. Si $\underline{x}$, $\underline{y}$ por l.i. entonces $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $w = x + \lambda y \neq 0$

Luego

$$(w|w) = (x+\lambda y \mid x+\lambda y)$$

$$= \|x\|^2 + 2\lambda(x|y) + \lambda^2 \|y\|^2$$

haciendo $\lambda = -\dfrac{(x\ y)}{\|y\|^2}$ tenemos:

$$0 < \|x\|^2 - \frac{2(x|y)^2}{\|y\|^2} + \frac{(x|y)^2}{\|y\|^2}$$

$$0 < \|x\|^2 \|y\|^2 - 2(x|y)^2 + (x|y)^2 = \|x\|^2 \ \|y\|^2 - (x|y)^2$$

$$(x|y)^2 < \|x\|^2 \ \|y\|^2 \implies |(x|y)| < \|x\| \ \|y\|$$

De la anterior desigualdad de Schwarz se deduce con facilidad que

$$-1 \leq \frac{(x|y)}{\|x\| \, \|y\|} \leq 1$$

Esto implica que existe $\theta \in [0,\pi]$ tq $\cos\theta = \dfrac{(x|y)}{\|x\| \, \|y\|}$

Terminología: θ es denominado *ángulo* entre los vectores $\underline{x}$ e $\underline{y}$.

Nota: La simetría del producto interno permite afirmar que $\underline{\theta}$ es el ángulo entre $\underline{y}$ y $\underline{x}$.

Si $x \perp y$ se sigue de inmediato que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Prop. 1.5.2 Teorema de los Cosenos.

Sea E e.v.p.i. y $\underline{x}$, $y \in E$. Entonces se cumple:

$$\boxed{\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \, \|y\| \cos\theta}$$

Pa.

Para $\underline{x}$, $\underline{y} \in E$ se tiene:

$\|x-y\|^2 = (x-y \,|x-y)$

Esto es:

$$\|x-y\|^2 = (x|x) - (x|y) - (y|x) + (y|y)$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,(x|y)$$

pero $(x|y) = \|x\| \, \|y\| \cos\theta$, de donde se sigue el teorema.

Consideremos ahora el caso donde $\underline{x}$ e $\underline{y}$ son l.d., i.e. $x = \lambda y$, $\lambda \neq 0$, entonces

$$\cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{\lambda\,\|y\|^2}{|\lambda|\,\|y\|^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \begin{cases} 1, & \lambda > 0 \\ -1, & \lambda < 0 \end{cases}$$

de donde $\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda > 0 \\ \Pi, & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$

Así la proposición anterior se expresa:

$$\|x-y\|^2 = \begin{cases} \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\,\|y\|, & \text{si } \lambda > 0 \\ \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\|, & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Finalmente si $x \perp y$, $\cos\theta$ es cero, de donde $\theta = \frac{\Pi}{2}$, por lo cual

$$\boxed{\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2}$$

Fórmula del ya conocido *Teorema de Pitágoras*.

1.6 Desigualdad triangular.

De la desigualdad de Schwarz se deduce:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$$

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2$$

$$\leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

por lo cual

$$\boxed{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}$$

Qué es la llamada *desigualdad triangular.*

Prop. 1.6.1

$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ ssi $\underline{x}$ e $\underline{y}$ son l.d.

Pa.

(a) $\Longrightarrow$

Sea $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, entonces $\|x+y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 =$

$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\|$, como $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$, se tie ne:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$$

así

$$(x|y) = \|x\| \|y\|$$

(b) $\Longleftarrow$

Si $y = \lambda x$, $x \neq 0$, entonces

$$\|x+\lambda x\| = \|x(\lambda+1)\| = |\lambda+1| \|x\| = |\lambda| \|x\| + \|x\|$$
$$= \|\lambda x\| + \|x\| = \|y\| + \|x\|$$

1.7 Teorema de Riesz.

Consideremos el espacio E, e.v.p.i., de dimensión finita $\underline{n}$, y $L(E)$, el espacio de funcionales lineales de E, probaremos que E y $L(E)$ son duales respecto a un producto escalar.

Prop. 1.7.1 E y $L(E)$ son duales respecto a

$$\phi : L(E) \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f\ ,\ x) \rightsquigarrow f(x)$$

Pa.

(i) Obviamente ϕ es no-degenerada, ya que si $f(x) = 0$, $\forall x \in E$, $\underline{f}$ es idénticamente nula.

(ii) ϕ es bilineal:

$$\begin{aligned}\phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, x) &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)\\ &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\\ &= \lambda_1 \phi(f_1, x) + \lambda_2 \phi(f_2, x)\end{aligned}$$

Similarmente se prueba que $\phi(f, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \phi(f, x_1) + \alpha_2 \phi(f, x_2)$.

Prop. 1.7.2 Sea $\underline{f} \in L(E)$, entonces para todo $x \in E$ y $\underline{a} \in E$, - existe un isomorfismo lineal de E sobre $L(E)$ tq

$$f_a(x) = (a|x)$$

Pa.

Definamos ρ por:

$$\rho : E \longrightarrow L(E)$$
$$a \rightsquigarrow f_a : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow (a|x)$$

Probemos que $\underline{\rho}$ es isomorfismo lineal.

(a) Linealidad.

Sean $\underline{a}$, $\underline{b}$ $\in$ E, entonces

$$f_{(a+b)}(x) = f_{a+b}(x) = (a + b \mid x) = (a|x) + (b|x)$$

$$= f_a(x) + f_b(x) \quad , \quad \forall\, x \in E$$

$$= (f_a + f_b)(x), \therefore f_{(a+b)} = f_{(a)} + f_{(b)}$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\underline{a} \in$ E, entonces

$$f_{\lambda a}(x) = (\lambda a|x) = \lambda(a|x)$$

$$= \lambda f_a(x) = \lambda f_a(x) \therefore f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

(b) Inyectividad.

Sean f_a, $f_b \in L(E)$ tq $f_a = f_b$. Entonces

$f_a(x) = f_b(x)$, $\forall\, x \in E$, luego

$$(a|x) = (b|x)$$

$$(a-b|x) = 0$$

en particular $x = a - b$, así:

$$(a-b|a-b) = 0$$

de donde $a - b = 0$ y $a = b$.

(c) Sobreyectividad.

Dado que E es dual a él mismo respecto al producto interno, se sigue que f es sobre si dim E = dim $L(E)$ = n lo cual ha sido demostrado en el Capítulo Preliminar.

§2. BASES ORTONORMALES.

2.1 Definición de Bases Ortonormales.

Sea E, e.v.p.i. con dimensión n y $(x_i)_{i = 1...n}$ una base de E, derivemos del producto interno $(|)$ la matriz $(g_{ij})_{nxn}$ - como sigue:

$$(g_{ij})_{nxn} = \begin{pmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_n) \\ \vdots & & & \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \cdots & (x_n|x_n) \end{pmatrix}$$

o sea:

$$\boxed{(g_{ij})_{nxn} = (\ (x_i|x_j)\ )_{nxn}}$$

Comentario. Dado que $(x_i|x_j) = (x_j|x_i)$, la matriz $(g_{ij})_{nxn}$ es simétrica, ya que $(g_{ij})_{nxn} = (g_{ji})_{nxn}$. Sean los vectores $\underline{x}$ e $\underline{y}$ tq :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad , \quad y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

Entonces:

$$(x|y) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ \Big| \ \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j)$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \alpha_i \beta_j (x_i | x_j)$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \alpha_i \beta_j \; g_{ij} = \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} g_{ij} \; \alpha_i \beta_j$$

Así el producto interno de $\underline{x}$ e $\underline{y}$ puede escribirse como una forma bilineal con los elementos $(g_{ij})_{nxn}$.

Definición 2.1.1

Sea E, e.v.p.i. y (x_i) i=1,..., n una base de E, se dice que tal base es *ortonormal* ssi

$$(x_i | x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

o sea $(x_i | x_j) = \delta_{ij}$

Consecuencias.

C_1. Siendo $(x_i)_{i=1...n}$ una base ortonormal, tenemos que

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

C_2. Si es el caso que x = y

$$(x|x) = \| x \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

C_3. Si hacemos $y = x_i$, para $i = 1,2,...,n$ tendremos:

$$(x|x_i) = (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j | x_i) = \alpha_i$$

Notación. Denotaremos por θ_j al ángulo formado por el vector x y el vector de la base, x_j, para $j = 1,2,...,n$

Como $(x|y) = \|x\| \|y\| \cos \theta$, entonces

$$\cos \theta_j = \frac{(x \mid x_j)}{\|x\| \ \|x_j\|} = \frac{(x|x_j)}{\|x\|} = \text{con } x \neq 0$$

$$\cos \theta_j = \frac{\alpha j}{\|x\|}$$

Si $\|x\| = 1$, la igualdad anterior se reduce a

$$\boxed{\cos \theta_j = \alpha_j}$$

De esta manera hemos probado la proposición siguiente:

Prop. 2.1.2 Los componentes de un vector unitario de E, relativo a una base ortonormal, son iguales al coseno del ángulo θ_j.

2.2 Proceso de Ortogonalización de Schmidt.

En esta parte mostraremos que en todo E, e.v.p.i. de dimensión finita, siempre puede ser construida una base ortogonal, y de hecho ortonormal, mediante un proceso algorítmico conocido -

como Gramm-Schmidt.

En efecto, sea $(a_1)_{i=1,...,n}$ una base arbitraria de E y construyamos $(b_i)_{i=1...n}$ una base nueva de manera tal que sus vectores sean mutuamente ortogonales:

(i) Hagamos

$$b_1 = a_1$$

y definamos

$$b_2 = a_2 + \lambda_1 b_1$$

de forma tal que λ_1 sea un escalar a determinar, exigiendo que $b_1 \perp b_2$, entonces:

$(b_1|b_2) = 0$

$$\begin{aligned}(b_1|b_2) &= (b_1|a_2 + \lambda_1 b_1)\\ &= (b_1|a_2) + \lambda_1 \ (b_1|b_1)\\ &= (b_1|a_2) + \lambda_1 \ ||b_1||^2\end{aligned}$$

luego $(b_1|a_2) + \lambda_1 \ ||b_1||^2 = 0$, de donde

$$\lambda_1 = - \frac{(b_1|a_2)}{||b_1||^2} = - \frac{(a_1|a_2)}{||a_1||^2}$$

Como a_1, a_2 son l. i., entonces $b_2 \neq 0$.

De ahí que:

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_1|a_2)}{||a_1||^2} \cdot a_1$$

(ii) Para obtener b_3, escribamos:

$$b_3 = a_3 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

y determinemos λ_1 y λ_2 por medio de las siguientes condiciones: $b_1 \perp b_3$ y $b_2 \perp b_3$.

Desarrollando $(b_1 | a_3 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) = 0$ y

$$(b_2 | a_3 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) = (a_2 - \frac{(a_1|a_2)}{\|a_1\|^2} a_1 | a_3 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) = 0$$

se obtiene que:

$$\lambda_1 = \frac{(a_2|a_1)}{\| a_1 \|^2} \text{ y } \lambda_2 = - \frac{(a_3|b_2)}{\|b_2\|^2}$$

(iii) Sucesivamente el vector b_{i+1} puede expresarse como:

$$b_{i+1} = a_{i+1} + \sum_{j=1}^{i} \lambda_j b_j$$

y los λ_j, de $j = 1,\ldots,i$, se determinarán por las condiciones $b_1 \perp b_{i+1}$, $b_2 \perp b_{i+1},\ldots,b_i \perp b_{i+1}$, con lo cual resulta que

$$\lambda_j = - \frac{(a_{j+1}|b_j)}{\|b_j\|^2} \text{, con } j = 1\ldots i$$

Si tenemos una base $(b_i)_{i=1\ldots n}$, ortogonal, podemos definir

$$e_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}$$

con lo cual $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$, es una base ortonormal de E.

2.3 Complemento Ortogonal.

Sea E, e.v.p.i. de dimensión finita y E_1 subespacio de E, llamaremos *complemento ortogonal* de E_1 al conjunto:

$$E_1^{\perp} = \{x \in E : x \perp y, \forall\, y \in E_1\}$$

Prop. 2.3.1 Sea E e.v.p.i. dimensión finita y E_1 subespacio de E, entonces se cumple

(i) $E_1^{\perp}$ es subespacio de E.

(ii) $E_1^{\perp} \cap E_1 = (0)$

Pa.

(i) Sean $\underline{x}$, $\underline{y} \in E_1^{\perp}$ y λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall$ $z \in E_1$,

$z \perp x$ y $z \perp y$, entonces $\lambda_1 x \perp z$ y $\lambda_2 y \perp z$ y

$(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \perp z$, por tanto $(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \in E_1^{\perp}$.

(ii) Sea $x \in E_1 \cap E_1$, entonces $\underline{x} \in E_1$, $x \in E_1^{\perp}$, luego

$x \perp z$, $\forall z \in E_1$, y como $\underline{x}$ está en E_1, en particular para

$z = x$, $x \perp x$, en consecuencia $x = 0$.

Escojamos una base ortonormal $(y_i)i=1...p$ de E_1 y sea $y \in E_1$, de manera que

$$y = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_i$$

Sea $\underline{z} \in E$, tq

$z = x-y$, con $\underline{x} \in E$, $\underline{y} \in E_1$

Entonces

$$(z|y_j) = (x-y|y_j)$$

$$=(x-\sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_i|y_{ij})$$

$$= (x|y_j) - \sum_{i=1}^{p}\alpha_i(y_i|y_j)$$

$$(z|y_j) = (x|y_j) - \alpha_j$$

Si $\underline{z}$ fuera ortogonal a E_1, entonces $\underline{z} \in E_1^{\perp}$, por lo cual $(z|y_j) = 0$, para $j = 1,\ldots,p$, de ahí que:

$$(x|y_j) = \alpha_j$$

Así el vector $\underline{x} \in E$ puede descomponerse en la suma:

$$x = y + z,\ y \in E_1,\ z \in E_1^{\perp}$$

Al vector $\underline{y}$ le llamaremos *proyección ortogonal de* $\underline{x}$ *en* E_1.

Corolario 2.3.2

$$E = E_1 \oplus E_1^{\perp}$$

Pa.

Como dim $E = n$, entonces dim E = dim E_1 + dim $E_1^{\perp}$, y como $E_1 \cap E_1^{\perp} = (0)$, se deduce que E es la suma directa de E_1 y $E_1^{\perp}$.

Prop. 2.3.3

Sea E, e.v.p.i., la dimensión finita, entonces todo vector en E, tiene norma mayor o igual que la norma de su proyección -

ortogonal.

Pa.

Sea $x \in E$ tq $x = y+z$, con $y \in E_1$ y $z \in E_1^{\perp}$, luego:

$(x|x) = (y+z|y+z)$

$= (y|y) + (z|z) + 2(y|z)$

$||x||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$

de donde $||x||^2 \geq ||y||^2$, por tanto

$$\boxed{||x|| \geq ||y||}$$

Comentario. La anterior desigualdad es llamada *Desigualdad de Bessel*, la igualdad se cumple si $\underline{x} \in E_1$, en cuyo caso $||z|| = 0$.

Terminología. $||z||$ será llamada *distancia* de $\underline{x}$ a E_1.

§3. FUNCIONES DETERMINANTES NORMADAS.

3.1 Definición de Función Determinante Normada

Sea E e.v.p.i. de dimensión finita y $\Delta_o \neq 0$ una función determinante en E.

Como E es dual a él mismo, tenemos que:

$\Delta_o(x_1,\ldots,x_n)\,\Delta_o(y_1,\ldots,y_n) = \alpha \det.\,((x_i|y_j))_{nxn}$

con x_i, $y_j \in E$.

Tomemos una base ortonormal $(e_i)_{i=1\ldots n}$ de E, y evaluemos en e_i:

$$\Delta_o(e_1,\ldots,e_n)\ \Delta_o(e_1\ldots e_n) = \alpha\ \det.\ ((e_i|e_j))_{nxn}$$

$$\Delta_o^2\ (e_1,e_2,\ldots,e_n) = \alpha.1$$

$$\boxed{\Delta_o^2\ (e_1,e_2,\ldots,e_n) = \alpha}$$

En consecuencia $\alpha \in \mathbb{R}^+$, luego podemos definir una función Δ como $\Delta = \pm \frac{\Delta_o}{\sqrt{\alpha}}$, por lo cual

$$\Delta(x_1,\ldots,x_n)\Delta(y_1,\ldots,y_n) = \det.\ ((x_i|y_i))_{nxn}$$

<u>Definición 3.1.1</u>

Se llama *función determinante normada*, a toda función determinante Δ en E, que satisface

$$\Delta(x_1,\ldots,x_n)\Delta(y_1,\ldots,y_n) = \det.\ ((x_i|y_j))_{nxn}$$

<u>Nota.</u> De la definición 3.1.1. tenemos que en E, e.v.p.i., existen dos funciones determinantes normadas: Δ y $-\Delta$.

3.2 <u>Determinantes Grammianos.</u>

<u>Definición 3.2.1.</u>

Sean $x_1,\ldots,x_p$, vectores de E, e.v.p.i. Se llama *determinante de Gram* al determinante:

$$G(x_1,\ldots,x_p) = \det.\ ((x_i|x_j))_{pxp}$$

con i,j de 1 en 1 hasta p.

<u>Prop. 3.2.2.</u> El determinante grammiano es no negativo i. e. $G(x_1,\dots,x_p) \geq 0$.

<u>Pa.</u>

<u>Caso 1.:</u> $x_1,\dots,x_p$ son l.d.

Si $x_1,\dots,x_p$ son l.d., entonces las columnas de la matriz - $((x_i|x_j))_{pxp}$ son l.d., de donde $G(x_1,\dots,x_p) = 0$.

<u>Caso 2.:</u> $x_1,x_2,\dots,x_p$ son l.i.

Siendo $x_1,\dots,x_p$ l.i., generan un subespacio E_1 de E donde - el producto interno definido en E es satisfecho, entonces

$\Delta_1^2\ (x_1,\dots,x_p) = \det.\ ((x_i|x_j))_{pxp}$

siendo Δ_1 función determinante normada en E_1.

Por ser $(x_i)_{i=1,\dots,p}$ base de E_1, $\Delta_1(x_1,\dots,x_p) \neq 0$,

luego $\det.\ ((x_i|x_j))_{pxp} > 0$.

<u>Prop. 3.2.3.</u> Si $p = 2$, entonces se implica la desigualdad de - Schwarz.

<u>Pa.</u>

Para $p = 2$ tenemos:

$$G(x,y) = \det.\ ((x|y))_{2x2}$$
$$= \|x\|^2\ \|y\|^2 - (x|y)^2$$
$$G(x,y) + (x|y)^2 = \|x\|^2\ \|y\|^2$$

Como $G(x,y) \geq 0$, entonces

$$(x|y)^2 \leq ||x||^2 \; ||y||^2$$

de donde

$$|(x|y)| \leq ||x|| \; ||y||$$

§4. DUALIDAD EN UN ESPACIO CON PRODUCTO INTERNO.

4.1 El isomorfismo τ.

Sea E un e.v. con p.i. tq dim E = n y sea E^* su correspondiente e.v. dual, respecto al producto escalar $<|>$.

Por lo estudiado en el Capítulo Preliminar, prop. 2.2.7., se sigue que existe un isomorfismo τ: $E \to E^*$, tq

$$<\tau(x)|y> = (x|y), \text{ con } \underline{x}, \underline{y} \in E,$$

pues E^* y E son ambos duales a E.

Con la ayuda de $\underline{\tau}$ introduciremos un producto interno en E^* definido por:

$$(x^*|y^*) = (\tau^{-1}(x^*)|\tau^{-1}(y^*))$$

con x^*, $y^* \in E^*$.

Definamos ahora un nuevo producto escalar en E x E^*:

$$\begin{aligned} <|> : E \times E^* &\longrightarrow K \\ (x,x^*) &\rightsquigarrow <x|x^*> \end{aligned}$$

tq $\quad <x|x^*> = <x^*|x>.$

Entonces se sigue la definición de $\underline{\tau}$ y la simetría asumida que:

$$<\tau(x)|y> = (x|y)=(y|x)=<\tau(y)|x> = <x|\tau(y)>$$

Esta relación prueba que la aplicación dual $\tau^*: E \to E^*$ coincide con $\underline{\tau}$, y así $\underline{\tau}$ es dual a sí misma.

§5. FUNCIONES BILINEALES SIMETRICAS.

5.1 Funciones Bilineales y cuadráticas.

Se sabe que el estudio del producto interno está basado en las propiedades de bilinealidad, simetría y positividad, vamos ahora a generalizar este concepto, abordando el estudio de productos internos que pueden o no cumplir, la propiedad - $\Phi(x,x) \geq 0$.

<u>Definición 5.1.1.</u>

Sea E e.v., de dimensión finita y $\Phi \in B(E,E)$, Φ es llamada *simétrica* ssi

$$\Phi(x,y) = \Phi(y,x), \forall(x,y) \in E \times E.$$

Con esta definición puede obtenerse una función no lineal Ψ, que satisface las propiedades estudiadas en §1.

En efecto, sea $\Phi \in B(E,E)$ tq Φ es simétrica y definamos:

$$\Psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow \Phi(x,x)$$

Prop. 5.1.2. La función bilineal Φ queda univocamente determinada por Ψ.

Pa.

Al sustituir x por x+y en 5.1.1 tenemos:

$$\begin{aligned}\Psi(x + y) &= \Phi(x + y,\ x + y)\\ &= \Phi(x,x) + 2\Phi(x,y) + \Phi(y,y)\\ &= \Psi(x) + 2\Phi(x,y) + \Psi(y)\end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{\Phi(x,y) = \frac{1}{2}\ (\Psi(x + y) - \Psi(x) - \Psi(y))}$$

Prop. 5.1.3. La función Ψ cumple

$$\Psi\ (x+y) + \Psi(x-y) = 2(\Psi(x) + \Psi(y))$$

Pa.

Reemplazando x por x-y en $\Phi(x)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\Psi(x - y) &= \Phi(x - y,\ x - y)\\ &= \Phi(x,x) - 2\Phi(x,y) + \Phi(y,y)\\ &= \Psi(x) - 2\Phi(x,y) + \Psi(y)\\ &= \Psi(x) - (\Psi(x+y) - \Psi(x) - \Psi(y)) + \Psi(y)\\ &= -\Psi(x+y) + 2(\Psi(x) + \Psi(y))\end{aligned}$$

luego:

$$\boxed{\Psi(x+y) + \Psi(x-y) = 2\ (\Psi(x) + \Psi(y))}$$

Esta igualdad es llamada *Ley del Paralelogramo*.

Definición 5.1.4.

Toda función Ψ continua en E que satisface la Ley del Paralelogramo se llama *función cuadrática*.

Prop. 5.1.5. Existe una biyección entre todas las funciones bilineales simétricas y todas las funciones cuadráticas.

Pa.

Tenemos definido $\Phi(x,x) = \Psi(x)$, por lo cual a cada bilineal simétrica le corresponde una cuadrática.

Recíprocamente, sea Ψ una función cuadrática, como la ley del Paralelogramo se cumple para cualquier $\underline{x} \in E$, en particular se cumple para: $x = y = 0$.

$$\Psi(0) + \Psi(0) = 2(\Psi(0) + \Psi(0))$$
$$2\Psi(0) = 4\Psi(0)$$

por lo cual $\Psi(0) = 0$

Además haciendo $x = 0$, tenemos:

$$\Psi(y) + \Psi(-y) = 2(\Psi(0) + \Psi(y))$$

luego $\Psi(y) = \Psi(-y)$, por lo que Ψ es función par.

Definamos Φ por la siguiente regla de correspondencia:

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}(\Psi(x+y) - \Psi(x) - \Psi(y))$$

tq $\Phi(x,x) = \Psi(x)$.

Verifiquemos que Φ así definida es <u>simétrica</u> y <u>bilineal</u>.

(i) <u>Simetría.</u>

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \frac{1}{2}\,(\Psi(x+y) - \Psi(x) - \Psi(y))\\ &= \frac{1}{2}\,(\Psi(y+x) - \Psi(y) - \Psi(x))\\ &= \Phi(y,x)\end{aligned}$$

(ii) <u>Bilinealidad.</u>

Se tiene:

$$2\Phi(x_1+x_2,y) = \Psi(x_1+x_2+y) - \Psi(x_1+x_2) - \Psi(y)$$

$$2\Phi(x_1,y) = \Psi(x_1+y) - \Psi(x_1) - \Psi(y)$$

$$2\Phi(x_2,y) = \Psi(x_2+y) - \Psi(x_2) - \Psi(y)$$

de donde:

$$\begin{aligned}2(\Phi(x_1+x_2,y) - \Phi(x_1,y) - \Phi(x_2,y)) &= \Psi(x_1+x_2+y) - \Psi(x_1+x_2) - \Psi(x_1+y) + \Psi(x_1)\\ &\quad + \Psi(x_2) - \Psi(x_2+y) + \Psi(y)\\ &= (\Psi(x_1+x_2+y)+\Psi(y))-(\Psi(x_1+y)+\Psi(x_2+y))\\ &\quad - (\Psi(x_1+x_2) - \Psi(x_1) - \Psi(x_2))\end{aligned}$$

Probemos que la suma del lado derecho es <u>cero</u>, i.e.

$$\Psi(x_1+x_2+y) + \Psi(y) = (\Psi(x_1+y) + \Psi(x_2+y)) + (\Psi(x_1+x_2) - \Psi(x_1) - \Psi(x_2))$$

Aplicando la ley del Paralelogramo obtenemos:

$$\Psi(x_1+x_2+y) + \Psi(y) = \frac{1}{2}\,(\Psi(x_1+x_2+2y) + \Psi(x_1+x_2))$$

y

$$\Psi(x_1+y) + \Psi(x_2+y) = \frac{1}{2}\,(\Psi(x_1+x_2+2y) + \Psi(x_1-x_2))$$

Sustrayendo:

$$(\Psi(x_1+x_2+y) + \Psi(y)) - (\Psi(x_1+y) + \Psi(x_2+y)) = \frac{1}{2}(\Psi(x_1+x_2) - \Psi(x_1-x_2))$$

pero

$$\Psi(x_1+x_2) - \Psi(x_1-x_2) = \frac{1}{2}(\Psi(x_1+x_2) - \Psi(x_1-x_2))$$

Por tanto

$$2(\Phi(x_1+x_2,y) - \Phi(x_1,y) - \Phi(x_2,y)) = 0$$

de donde

$$\Phi(x_1+x_2,y) = \Phi(x_1,y) + \Phi(x_2,y)$$

Solamente falta probar que $\Phi(\lambda x,y) = \lambda\Phi(x,y)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Hagamos $x_1 = x$ y $x_2 = -x$, entonces

$$\Phi(x-x,y) = \Phi(x,y) + \Phi(-x,y)$$

de donde

$$\Phi(-x,y) = -\Phi(x,y)$$

Sea $\underline{k} \in Z^+$, entonces

$$\begin{aligned}\Phi(kx,y) &= \Phi(\underbrace{x+\dots+x}_{k\text{-veces}},y)\\ &= \underbrace{\Phi(x,y)+\dots+\Phi(x,y)}_{k\text{-veces}}\\ &= k\Phi(x,y)\end{aligned}$$

Como se ha probado para $k = -1$, vale para todo $\underline{k} \in Z$.

Consideremos ahora $\lambda = \frac{p}{q}$. con p. $q \in Z$, $q \neq 0$, entonces:

$$q\Phi(\frac{p}{q} x,y) = \Phi(px, y)$$
$$= p\Phi(x,y)$$

dividiendo entre $\underline{q}$ tenemos:

$$\Phi(\frac{p}{q} x,y) = \frac{p}{q} \Phi(x,y)$$

Ahora sea $(\lambda_n)_{n\in N}$ una sucesión racional, convergente en $\lambda\in Q'$ i.e. $\lim_{n\to\infty} (\lambda_n) = \lambda$. Como Ψ es continua, también lo será Φ, de ahí que:

$$\Phi(\lambda_n x,y) = \lambda_n \Phi(x,y)$$

en el límite es igual a

$$\Phi(\lambda x,y) = \lambda\Phi(x,y)$$

Notación: Si no hay ambigüedad escribiremos $\Phi(x,x)$ por $\Phi(x)$.

5.2 Formas Bilineales y Formas Cuadráticas.

Asumamos una base de E, $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$, y consideremos

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \ , \qquad y = \sum_{j=1}^{n} \beta'_j x_j$$

entonces una función bilineal simétrica Φ puede expresarse como forma bilineal:

$$\Phi(x,y) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \beta'_j x_j\right)$$
$$= \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \beta_i \beta'_j \Phi(x_i,x_j)$$

llamando $\alpha_{ij} = \Phi(x_i,x_j)$, tenemos

$$\boxed{\Phi(x,y) = \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \alpha_{ij}\ \beta_i\ \beta_j'}$$

La matriz $(\alpha_{ij})_{nxn}$ es simétrica, ya que $\Phi(x_i,x_j) = \Phi(x_j,x_i)$.

La correspondiente forma cuadrática se obtiene reemplazando $\underline{x}$ por $\underline{y}$ en $\Phi(x,y)$:

$$\Phi(x,x) = \Phi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\ \beta_i \beta_j$$

5.3 Definitud de funciones bilineales simétricas.

En este apartado trataremos del signo algebráico del escalar $\Phi(x)$.

Definición 5.3.1.

Sea $\Phi \in B(E,E)$, simétrica. Se dice que Φ es *definida positiva* si $\Phi(x) > 0$, $\forall\ x \neq 0$.

Consecuencia: Φ es no degenerada.

Prop. 5.3.2. Toda función Φ bilineal simétrica definida positiva, cumple la desigualdad de Schwartz i.e.

$$\Phi(x,y)^2 \leq \Phi(x)\ \Phi(y)$$

Pa.

Ver proposición 1.5.1.

Definición 5.3.3.

Si $\Phi(x) \geq 0$, $\forall\, x \in E$, pero $\Phi(x) = 0$, para algún $x \neq 0$, Φ se llama *semidefinida positiva.*

Nota: Si Φ es semidefinida positiva la Prop. 5.3.2. es válida, pero la igualdad puede darse sin que los vectores $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sean - l.d.

Consecuencia: Φ semi-definida positiva es degenerada.

Pa.

Sea $x_0 \neq 0$ tq $\Phi(x_0) = 0$, entonces

$$\Phi(x_0,y)^2 \leq \Phi(x_0)\ \Phi(y) = 0$$

$$\Phi(x_0,y)^2 = 0,\ \forall\, y \in E$$

De similar manera se define las funciones bilineales simétricas *definidas negativas* y *semi-definidas negativas.*

Para concluir damos la siguiente definición:

Definición 5.3.4.

Si $\Phi(x)$ asume valores positivos y negativos en $\mathbb{R}$, se dice que Φ es *indefinida.*

Capítulo III

APLICACIONES LINEALES EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

§1. LA APLICACION ADJUNTA.

1.1 Definición de aplicación adjunta.

Consideremos E y F e.v.p.i., de dimensión finita n y m respectivamente y ϕ: E $\to$ F, aplicación lineal. Si E^* y F^* son dos espacios duales de E y F respectivamente, entonces ϕ induce la aplicación dual $\phi^* : F^* \to E^*$.

En consecuencia de los productos escalares definidos en E^*xE y F^*xF, podemos afirmar que ϕ y ϕ^* están relacionados por

$$<\phi^*(y^*)|x> = <y^*|\phi(x)>$$

para $\underline{x} \in E$, $\underline{y}^* \in F^*$.

Como E y F son duales a ellos mismos, respecto al producto interno, la anterior relación queda expresada así:

$$(\phi^*(y)|x) = (y|\phi(x))$$

para $\underline{x} \in E$, $\underline{y} \in F$.

Definición 1.1.1.

Sea $\phi \in$ Hom (E,F), se llama *aplicación adjunta* de ϕ, a la -

aplicación ϕ^* $\in$ Hom (F,E) tq.

$$(y|\phi(x)) = (\phi^*(y)|x), \; x \in E, \; y \in F.$$

Notación: Representaremos a la adjunta de ϕ como $\tilde{\phi}$, con esto:

$$(y|\phi(x)) = (\tilde{\phi}(y)|x)$$

De esta manera, para cada $\phi \in$ Hom (E,F), existe una y solo una $\tilde{\phi} \in$ Hom (F,E) determinada por ϕ, por lo cual podemos definir entre los espacios Hom (E,F) y Hom (F,E) una aplicación:

$$\sim : \text{Hom}(E,F) \longrightarrow \text{Hom}(F,E)$$
$$\phi \rightsquigarrow \tilde{\phi}$$

Prop. 1.1.2.

(a) ϕ es un operador lineal de Hom (E,F) en Hom (F,E)

(b) $\tilde{\tilde{\phi}} = \phi$

Pa.

(a) Se sigue de la definición y de las propiedades del producto interno que

(i) $\widetilde{(\phi + \Psi)} = \tilde{\phi} + \tilde{\Psi}$

(ii) $\widetilde{(\lambda\phi)} = |\lambda| \; \tilde{\phi}$, $\lambda \in K$

(b) ϕ y $\tilde{\tilde{\phi}}$ están relacionados por

$$(\tilde{\phi}(y)|x) = (y|\tilde{\tilde{\phi}}(x))$$

Además

$$(\phi(x)|y) = (x|\tilde{\phi}(y)) = (\tilde{\phi}(y)|x)$$

luego

$$(\phi(x)|y) = (y|\tilde{\tilde{\phi}}(x)) = (\tilde{\tilde{\phi}}(x)|y)$$

por tanto

$$\phi(x) = \tilde{\tilde{\phi}}(x), \ \forall \ x \in E$$

<u>Prop. 1.1.3.</u> Los subespacios de F, Im ϕ y Ker $\tilde{\phi}$ son ortogonal - mente suplementarios.

<u>Pa.</u>

Probaremos que Im ϕ = $(\text{Ker } \tilde{\phi})^{\perp}$, para tal efecto bastará verifi car que: Ker $\tilde{\phi} \perp$ Im ϕ:

para cualquier par de vectores $\underline{y} \in$ Ker $\tilde{\phi}$ y $\phi(x) \in$ Im ϕ,

tenemos que:

$$(y|\phi(x)) = (\tilde{\phi}(y)|x) = 0$$

por lo tanto

$$\text{Ker } \tilde{\phi} \perp \text{Im } \phi$$

Así

$$(\text{Ker } \tilde{\phi})^{\perp} = \text{Im } \phi$$

<u>Consecuencia:</u> Siendo F de dimensión finita:

$$F = \text{Im } \phi \oplus \text{Ker } \tilde{\phi}$$

1.2 <u>Relación entre las matrices asociadas a ϕ y $\tilde{\phi}$.</u>

Sean las bases $(x_i)_{i=1...n}$ y $(y_j)_{j=1...m}$ de E y F respecti vamente, consideremos además las matrices A y $\tilde{A}$ asociadas a ϕ y $\tilde{\phi}$ definidas por

$$\phi(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}\, y_k \quad , \; i=1\ldots n$$

$$\tilde{\phi}(y_j) = \sum_{t=1}^{n} \tilde{\alpha}_{jt}\, x_t \quad , \; j=1\ldots m$$

Sustituyendo $\underline{x}$ por x_i e $\underline{y}$ por y_j en la definición 1.1.1 tenemos:

$$(\phi(x_i)|y_j) = (x_i|\tilde{\phi}(y_j))$$

$$(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}\, y_k|y_j) = (x_i|\sum_{t=1}^{n} \tilde{\alpha}_{jt}x_t)$$

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}(y_k|y_j) = \sum_{t=1}^{n} \tilde{\alpha}_{jt}(x_i|x_t)$$

llamando:

$$G = (g_{it})_{nxn} \quad tq \quad g_{it} = (x_i|x_t)$$

$$H = (h_{jk})_{mxm} \quad tq \quad h_{jk} = (y_j|y_k)$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}\, h_{kj} = \sum_{t=1}^{n} \tilde{\alpha}_{jt}\, g_{ti}$$

expresando la anterior relación como producto de matrices tenemos

$$(\alpha_{ik})_{nxm}\,(h_{kj})_{mxm} = (\tilde{\alpha}_{jt})_{mxn}\,(g_{ti})_{nxn}$$

$$(\gamma_{ij})_{nxm} = (\lambda_{ji})_{mxn}$$

$$(\gamma_{ij})^{T}_{mxn} = (\lambda_{ji})_{mxn}$$

lo que es lo mismo:

$$(A \cdot H)^T = (\tilde{A} \cdot G^T)$$

$$H^T \cdot A^T = \tilde{A} \cdot G^T$$

entonces

$$\boxed{\tilde{A} = H^T \; A^T \, (G^T)^{-1}}$$

Asumiendo que las bases de E y F son ortonormales se tiene - que:

$$g_{it} = \delta_{it}$$

$$h_{jk} = \delta_{jk}$$

Así $G = I = H$, de donde

$$\boxed{\tilde{A} = A^T}$$

1.3 La aplicación lineal adjunta.

En este apartado haremos la consideración de tomar E = F.

Si $\tilde{\phi} \in End(E)$, por lo estudiado se sabe que existe $\tilde{\phi} \in End(E)$, como $\tilde{\phi}$ es la aplicación dual de ϕ respecto a un producto interno, se sigue que

$$det.\ \phi = det.\ \tilde{\phi}$$

por lo cual

$$tr.\ \phi = tr.\ \tilde{\phi}$$

Prop. 1.3.1. Sean ϕ, $\Psi \in End(E)$, entonces

$$\widetilde{\phi \circ \Psi} = \tilde{\Psi} \circ \tilde{\phi}$$

Pa.

$$(x_1 | \widetilde{(\phi \circ \Psi)}(x_2)) = ((\phi \circ \Psi)(x_1) | x_2)$$

$$= (\phi(\Psi(x_1)) | x_2)$$

$$= (\Psi(x_1) | \tilde{\phi}(x_2))$$

$$= (x_1 | \tilde{\Psi}(\tilde{\phi}(x_2))$$

$$= (x_1 | (\tilde{\Psi} \circ \tilde{\phi})(x_2))$$

Corolario 1.3.2. Si $M(\phi) = A$ y $M(\tilde{\phi}) = B$ relativas a bases ortonormales, entonces

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Pa.

Se sigue de la proposición anterior y del hecho que $A^T = \tilde{A}$.

Prop. 1.3.3. Si dos vectores propios de ϕ y $\tilde{\phi}$ cuyos valores propios son diferentes entonces son ortogonales.

Pa.

Sean e y $\tilde{e}$ vectores propios de ϕ y $\tilde{\phi}$ respectivamente, entonces

$$\phi(e) = \lambda e \quad y \quad \tilde{\phi}(\tilde{e}) = \tilde{\lambda}\tilde{e}$$

haciendo

$$(\phi(e)|\tilde{e}) = \lambda(e|\tilde{e})$$

$$(e|\tilde{\phi}(\tilde{e})) = \tilde{\lambda}(e|\tilde{e})$$

pero

$$(\phi(e)|\tilde{e}) = (e|\tilde{\phi}(\tilde{e}))$$

de donde

$$(\lambda-\tilde{\lambda})\ (e|\tilde{e}) = 0$$

como $\lambda \neq \tilde{\lambda}$, se tiene $e \perp \tilde{e}$.

1.4 La relación entre aplicaciones lineales y aplicaciones bilineales.

Sean $\phi \in End(E)$ y $\Phi: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tq

$$\Phi(x,y) = (\phi(x)|y).$$

Destacaremos que existe una correspondencia entre ϕ y Φ que definiremos como:

$$\rho : End(E) \longrightarrow B(E)$$
$$\phi \rightsquigarrow \Phi$$

Probaremos que ρ es un isomorfismo lineal de End(E) sobre B(E).

Prop. 1.4.1. La aplicación ρ es un isomorfismo lineal.

Pa.

i) ρ es lineal.

Siendo End(E) y B(E) e.v., se tiene que para $\phi_1,\phi_2 \in End(E)$,

$\phi_1 + \phi_2 \in End(E)$ y para Φ_1, $\Phi_2 \in B(E)$, también $\Phi_1 + \Phi_2 \in B(E)$

Sean ϕ_1 y $\phi_2 \in End(E)$ tq

$$\rho(\phi_1) = \Phi_1 : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \rightsquigarrow (\phi_1(x)|y)$$

y

$$\rho(\phi_2) = \Phi_2 : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \rightsquigarrow (\phi_2(x)|y)$$

Entonces

$$\rho(\phi_1+\phi_2) = \Phi: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \rightsquigarrow ((\phi_1+\phi_2)(x)|y)$$

pero

$$((\phi_1+\phi_2)(x)|y) = (\phi_1(x)|y) + (\phi_2(x)|y)$$

en consecuencia

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

Por tanto

$$\rho(\phi_1 + \phi_2) = \rho(\phi_1) + \rho(\phi_2)$$

Similarmente se prueba que

$$\rho(\lambda\phi) = \lambda\Phi = \lambda\rho(\phi) ,$$

ii) <u>ρ es inyectiva.</u>

Sean Φ_1 y $\Phi_2 \in B(E)$ tq. $\Phi_1 = \Phi_2$, esto es

$$\Phi_1(x,y) = \Phi_2(x,y),\ \forall (x,y) \in E \times E.$$

Entonces

$$\Phi_1(x,y) = (\phi_1(x)|y).$$

y

$$\Phi_2(x,y) = (\phi_2(x)|y)$$

luego

$$(\phi_1(x)|y) = (\phi_2(x)|y)$$

$$(\phi_1(x) - \phi_2(x)|y) = 0$$

de donde

$$\phi_1(x) = \phi_2(x) \quad , \quad \forall\ x \in E.$$

Asi $\qquad \phi_1 = \phi_2$

iii) <u>ρ es sobreyectiva.</u>

Sea $\Phi \in B(E)$ y escojamos $\underline{x} \in E$, vector fijo, consideremos además

$$f_x : E \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$y \rightsquigarrow \Phi(x,y)$$

aplicando el teorema de Riesz tenemos

$$f_x(y) = (x_1|y), \ \forall\ y \in E.$$

donde $\underline{x_1}$ está determinado por $\underline{x}$

Definamos $\phi \in End(E)$ tq.

$$\phi : E \longrightarrow E$$
$$x \rightsquigarrow x_1$$

Entonces

$$\Phi(x,y) = (x_1|y) = (\phi(x)|y)$$

Por tanto para cada $\Phi \in B(E)$, existe $\phi \in End(E)$ tq.

$$\rho(\phi) = \Phi$$

1.5 Aplicaciones normales.

Definimos una aplicación normal como sigue:

Definición 1.5.1.

Sea $\phi \in End(E)$, ϕ es llamado *aplicación normal* si

$$\phi \circ \tilde{\phi} = \tilde{\phi} \circ \phi$$

La definición ofrecida es equivalente a:

$$\boxed{(\phi(x)|\phi(y)) = (\tilde{\phi}(x)|\tilde{\phi}(y))}$$

En efecto

$$((\tilde{\phi}\circ\phi)(x)|y) = (\tilde{\phi}(\phi(x))|y) = (\phi(x)|\phi(y))$$

y además

$$((\phi\circ\tilde{\phi})(x)|y) = (\phi(\tilde{\phi}(x))|y) = (\tilde{\phi}(x)|\tilde{\phi}(y))$$

siendo ϕ normal se cumple la igualdad.

Del hecho que $(\phi(x)|\phi(y)) = (\tilde{\phi}(x)|\tilde{\phi}(y))$ y haciendo $y = x$, podemos obtener:

$$(\phi(x)|\phi(x)) = \|\phi(x)\|^2 = (\tilde{\phi}(x)|\tilde{\phi}(x)) = \|\tilde{\phi}(x)\|^2$$

o sea que:

$$\text{Ker } \phi = \text{Ker } \tilde{\phi}$$

Así, podemos escribir la descomposición ortogonal de E, $E = \text{Im } \phi \oplus \text{Ker } \tilde{\phi}$, como:

$$E = \text{Im } \phi \oplus \text{Ker } \phi$$

Sabiendo que el <u>rango</u> de ϕ es la dimención Im ϕ, podemos afirmar que <u>ϕ</u> es <u>regular</u> ssí $r(\phi) = \dim E$, i.e. que en la igualdad

$$r(\phi) + \dim \text{Ker } \phi = \dim E$$

la dim Ker ϕ debe ser cero.

<u>Prop. 1.5.2.</u> La igualdad $E = \text{Im } \phi \oplus \text{Ker } \phi$, implica que la restricción de ϕ a Im ϕ es regular.

<u>Pa.</u>

Sea $\phi\big|_{\text{Im } \phi} : \text{Im } \phi \longrightarrow \text{Im } \phi$, la restricción de ϕ a su imagen, asi para cualquier <u>y</u> $\in$ Im ϕ tq $\phi\big|_{\text{Im } (\phi)}(x) = y$, tenemos que solo existe un <u>x</u> $\in$ Im ϕ que satisface tal igualdad, puesto que por la descomposición de E, éste es único.

Consecuencia: ϕ^n tiene el mismo rango de ϕ i.e.

$$r(\phi^n) = r(\phi)$$

Prop. 1.5.3. Si ϕ es normal, ϕ y $\tilde{\phi}$ poseen los mismos vectores propios.

Pa.

Probemos en principio que si ϕ es normal, entonces lo será también $\phi - \lambda i$:

Sea ϕ y $\tilde{\phi}$ su aplicación adjunta y consideremos que ϕ es normal, probemos que

$$(\phi-\lambda i)\circ(\tilde{\phi}-\lambda i) = (\tilde{\phi}-\lambda i)\circ(\phi-\lambda i)$$

aplicando la composición del miembro izquierdo a $\underline{x} \in E$ tenemos:

$$\begin{aligned}
&((\phi-\lambda i)\circ(\tilde{\phi}-\lambda i))(x)\\
&= \phi((\tilde{\phi}-\lambda i)(x))-\lambda i((\tilde{\phi}-\lambda i)(x))\\
&= \phi(\tilde{\phi}(x))-\lambda\phi(x)-\lambda\tilde{\phi}(x)+\lambda^2 x\\
&= \tilde{\phi}(\phi(x))-\tilde{\phi}(\lambda i(x)-\lambda(\phi(x)-\lambda i(x)\\
&= \tilde{\phi}(\phi(x)-\lambda i(x))-\lambda(\phi(x)-\lambda i(x))\\
&= (\tilde{\phi}-\lambda i)(\phi-\lambda i)(x)
\end{aligned}$$

Siendo $\phi-\lambda i$ normal, entonces:

$$\mathrm{Ker}\ (\phi-\lambda i) = \mathrm{Ker}\ (\tilde{\phi} - \lambda i)$$

así, todo vector propio de $\tilde{\phi}$ lo será de ϕ y viceversa.

Resultado: Si dos vectores propios de una transformación normal ϕ, tienen valores propios diferentes, entonces son ortogonales.

Sea $\phi \in End(E)$ y consideremos la descomposición ortogonal

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_r$$

donde cada E_i es un subespacio estable por ϕ, denotemos por ϕ_i la restricción de ϕ a E_i.

Con estas consideraciones probaremos la siguiente proposición.

<u>Prop. 1.5.4.</u> ϕ es normal ssi los subespacios E_i son estables bajo $\tilde{\phi}_i$ y cada ϕ_i es normal.

<u>Pa.</u>

(i) Asumamos que ϕ es normal y probemos que los E_i son estables bajo $\tilde{\phi}_i$ y que ϕ_i es normal.

En efecto, sea ϕ normal y $x_i \in E_i$, elemento cualquiera, entonces para cada x_j en E_j con $i \neq j$ tenemos

$$(\tilde{\phi}(x_i) | x_j) = (x_i | \phi(x_j)) = 0$$

siendo que $x_i \in E_i$ y $\phi(x_j) \in E_j$, se deduce de la igualdad anterior que $\tilde{\phi}(x_i) \in E_i, \forall\, x_i \in E_i$, de donde $\tilde{\phi}_i(E_i) \in E_i$, siendo $\tilde{\phi}_i$ la restricción de $\tilde{\phi}$ a E_i.

De la relación $||\phi_i(x_i)||^2 = ||\tilde{\phi}_i(x_i)||^2$ se probará la normalidad de ϕ_i:

$$\|\phi_i(x_i)\|^2 = \|\phi(x_i)\|^2 = \|\tilde{\phi}(x_i)\|^2 = \|\tilde{\phi}_i(x_i)\|^2$$

(ii) Conversamente, asumamos E_i estable bajo $\tilde{\phi}_i$ y ϕ_i, normal, entonces para cada $\underline{x} \in E$ puede escribirse como:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \quad \text{con} \quad x_i \in E_i$$

Nuevamente verifiquemos que $\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x)\|^2$

$$\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(\sum_{i=1}^{n}(x_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\phi(x_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\tilde{\phi}_i(x_i)\|^2$$

$$= \|\tilde{\phi}\ (\sum_{i=1}^{n} x_i)\|^2 = \|\tilde{\phi}(x)\|^2$$

Así ϕ es normal.

§2. LA APLICACION AUTOADJUNTA.

2.1 Definición de aplicaciones autoadjuntas.

Definición 2.1.1.

Sea $\phi \in \mathrm{End}(E)$, se dice que ϕ es *autoadjunta* si $\phi = \tilde{\phi}$.

La definición anterior es equivalente a

$$(\phi(x)|y) = (x \mid y), \quad \text{para } (x,y)\in E^2$$

Como resultado de esta definición se tiene la siguiente proposición, que ayudará a su vez a resolver el problema de los valores característicos de ϕ.

Prop. 2.1.2. Si $\phi \in End(E)$ es autoadjunta y $F \subset E$ es subespacio estable, entonces $F^{\perp}$ es también estable.

Pa.

Sea $\underline{z} \in F^{\perp}$, entonces para cualquier $\underline{y} \in F$ tenemos

$$(\phi(z)|y) = (z|\phi(y)) = 0, \text{ de donde } \phi(z) \in F^{\perp}$$

Nota: Sea $M(\phi) = A$ y $M(\tilde{\phi}) = \tilde{A}$, sabiendo que $\tilde{A} = A^T$, para bases ortonormales, si $\phi = \tilde{\phi}$, entonces $A = A^T$ i.e. que A es simétrica.

Prop. 2.1.3. Si E e.v.p.i. de dimensión $\underline{n}$ y ϕ endomorfismo autoadjunto, entonces ϕ tiene $\underline{n}$ vectores propios que son mutuamente ortogonales.

Pa.

Definamos la aplicación

$$F : E - \{0\} \longrightarrow E$$
$$x \rightsquigarrow \frac{(x|\phi(x))}{(x|x)}$$

Es evidente que F es continua en cada $\underline{x} \neq 0$ por ser cociente de funciones continuas.

Además

$$F(\lambda x) = \frac{(\lambda x|\lambda\phi(x))}{(\lambda x|\lambda x)} = \frac{(x|\phi(x))}{(x|x)} = F(x), \text{ para}$$

todo $\lambda \neq 0$.

Esto significa que F es homogénea de grado 0.

Apliquemos ahora la función F a elementos de la esfera unitaria $S = \{x \in E: ||x|| = 1\}$, por ser S un subconjunto de E, cerrado y acotado, F asume un valor mínimo en S.

Sea $e \in S$ tq. $F(e_1)$ es el valor mínimo de F en S, esto es

$$F(e_1) \leq F(x) \quad , \forall\ x \in S$$

A partir de la propiedad de homogeneidad grado 0, se deduce que $F(e_1)$ es el valor mínimo de F en E.

En efecto: Sea $x \neq 0$ un vector en E y $\underline{e}$ su respectivo vector unitario tq $x = ||x|| e$, entonces

$$F(x) = F(||x||e) = F(e) \geq F(e_1)$$

por ser $F(e_1)$ el valor mínimo en S.

Probemos que e_1 es un vector propio de ϕ.

Sea $\underline{y} \in E$ y $f: \mathbb{R} \longrightarrow E - \{0\}$

$$t \rightsquigarrow F(e_1+ty)$$

Si $t = 0$ tendremos $f(0) = F(e_1)$ y como $F'(e_1) = 0$, entonces debe ser $f'(0) = 0$.

Por definición de $\underline{f}$ tenemos para $\underline{t} \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = F(e_1+ty)$$

$$= \frac{(e_1+ty|\phi(e_1+ty)}{(e_1+ty|e_1+ty)}$$

$$= \frac{(e_1+ty)|\phi(e_1)+t\phi(y))}{(e_1+ty|e_1+ty)}$$

$$= \frac{(e_1|\phi(e_1))+t(e_1|\phi(y))+t(y|\phi(e_1))+t^2(y|\phi(y))}{(e_1|e_1)+t(e_1|y)+t(y|e_1)+t^2(y|y)}$$

$$f(t) = \frac{(e_1|\phi(e_1))+2t(e_1|\phi(y))+t^2(y|\phi(y)}{1+2t\ (e_1|y)\ +\ t^2(y|y)}$$

derivando f en t = 0 tenemos:

$$f'(0) = 2(\phi(e_1)|y) - 2\ (e_1|\phi(e_1))(e_1|y)$$

igualando a 0 tenemos

$$(\phi(e_1)|y) - (e_1|\phi(e_1))\ (e_1|y) = 0$$

$$(\phi(e_1) - (e_1|\phi(e_1))e_1|y) = 0$$

de donde

$$\phi(e_1) - (e_1|\phi(e_1))e_1 = 0$$

$$\phi(e_1) = (e_1|\phi(e_1))e_1$$

$$\phi(e_1) = \lambda_1 e_1$$

de donde λ_1 es el correspondiente valor propio del vector propio e_1.

En S hay n vectores unitarios linealmente independientes - por lo que existen $e_1, e_2, \ldots, e_n$, vectores propios de ϕ tq

$$e_i \perp e_j \quad \text{si } i \neq j.$$

2.2 Representación en forma diagonal.

Cualquier vector propio de ϕ puede ser construido fácilmente encontrando un sistema de n vectores propios ortogonales.

En efecto, consideremos el subespacio de dimensión 1, (e_1) generado por e_1, desde que ϕ es autoadjunta, siendo (e_1) estable, lo será también su complemento ortogonal E_1, obviamente la restricción de ϕ a E_1 será autoadjunta y por tanto esta construcción puede aplicarse a E_1. Entonces existe un vector $e_2 \in E_1$ tq

$$(e_1 | e_2) = 0.$$

Continuando de esta manera obtenemos un sistema de n-vectores propios e_i, $i=1,\ldots,n$ tq

$$(e_i | e_j) = \delta_{ij}$$

El conjunto de tales vectores propios forma una base ortonormal de E.

En esta base, ϕ tiene la forma:

$$\phi(e_i) = \lambda_i e_i$$

siendo λ_i el valor propio asociado a e_i, esto es que la matriz de una transformación autoadjunta tiene forma diagonal si los vectores propios son usados como base i.e.

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2.3 El espacio de vectores propios.

Definición 2.3.1.

Sea $\underline{\lambda}$ un valor propio de ϕ, se define como *espacio propio* correspondiente a λ:

$$E(\lambda) = \{x \in E : \phi(x) = \lambda x\}$$

Prop. 2.3.2. Si ϕ es autoadjunta, y $\lambda \neq \lambda_1$, entonces $E(\lambda) \perp E(\lambda_1)$

Pa.

Sean $e \in E(\lambda)$, $e_1 \in E(\lambda_1)$, por lo tanto

$$\phi(e) = \lambda e \quad y \quad \phi(e_1) = \lambda_1 e_1$$

luego

$$(e|\phi(e_1)) = (e|\lambda_1 e_1) = \lambda_1(e|e_1)$$

$$(\phi(e)|e_1) = (\lambda e|e_1) = \lambda(e|e_1)$$

como ϕ es autoadjunta

$$\lambda_1\ (e|e_1) = \lambda(e|e_1)$$

así

$$(\lambda_1 - \lambda)\ (e|e_1) = 0$$

Consecuencia inmediata del teorema anterior es que, si $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,r}$ son los diferentes valores propios de ϕ, se tendrá

$$E(\lambda_i) \perp E(\lambda_j)\ ,\ \forall\ i \neq j$$

por consiguiente, como todo vector $\underline{x} \in E$ puede escribirse en términos de una combinación lineal de vectores propios de ϕ, entonces tenemos que

$$E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \ldots \oplus E(\lambda_r)$$

Sea ϕ_i la restricción de ϕ a $E(\lambda_i)$, entonces para $x \in E(\lambda_i)$, tenemos

$$\phi_i(x) = \lambda_i x,\ i = 1,\ldots,r$$

El polinomio característico de ϕ_i está expresado por

$$\det.\ (\phi_i - \lambda_i) = (\lambda_i - \lambda)^{k_i}\ ,\ i=1,\ldots,r$$

donde $k_i = \dim E(\lambda_i)$.

En efecto, si $M(\phi_i)$ es la matriz relativa a la base formada por los vectores propios de ϕ_i, se tiene que

$$M(\phi_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix}_{k_i \times k_i}$$

luego

$$M(\phi_i) - \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda_i - \lambda & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i - \lambda \end{pmatrix}_{k_i \times k_i}$$

de ahí que

$$\det.(M(\phi_i) - \lambda I) = (\lambda_i - \quad)^{k_i}$$

así

$$\det.(\phi_i - \lambda_i) = (\lambda_i - \lambda)^{k_i}$$

Se sigue entonces que

$$\det.(M(\phi) - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \ . \ . \ . \ (\lambda_r - \lambda)^{k_r}$$

de donde

$$\boxed{\det.\ (\phi - \lambda i) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \ . \ . \ . \ (\lambda_r - \lambda)^{k_r} \ , \lambda \in K}$$

De esta relación se deducen los resultados siguientes:

(i) El polinomio característico de ϕ tiene $\underline{n}$ ceros reales, si si cada cero λ_i es considerado con su propia multiplicidad k_i, siendo $\underline{n}$ la dimensión de E,

(ii) $\dim E(\lambda_i)$ viene dada por la multiplicidad del cero λ_i en - el polinomio característico

2.4 El Polinomio característico de una matriz simétrica.

Prop. 2.4.1. Sea $A = M(\phi)$ una matriz simétrica de orden n relativa a una base ortonormal, entonces A posee n valores propios.

Pa.

Como $A = M(\phi)$ es una matriz simétrica relativa a una base ortonormal, ϕ debe ser autoadjunta, y siendo

$$(\phi - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - \lambda)^{k_i}$$

el polinomio característico de ϕ, el polinomio característico de A tiene n raíces ya que

$$\det.(\phi - \lambda i) = \det.(A - \lambda I)$$

2.5 Vectores propios de funciones bilineales.

Se tiene que existe una biyección entre End(E) y B(E) tq

$$\Phi(x,y) = (\phi(x)|y)$$

Partiendo de esta relación definiremos vectores y valores propios de Φ.

Sea $e \in E$ un vector propio de ϕ y λ su valor propio correspondiente, entonces para cualquier $y \in E$ se tiene:

$$\Phi(e,y) = (\phi(e)|y) = (\lambda e|y) = \lambda(e|y)$$

Soponiendo que Φ es simétrica, tendremos

$$\Phi(x,y) = (\phi(x)|y)$$
$$\Phi(y,x) = (\phi(y)|x) = (x|\phi(y))$$

luego $(\phi(x)|y) = (x|\phi(y))$, por lo que ϕ es autoadjunta, en consecuencia existe un sistema ortonormal $(e_i)_{i=1...n}$ de vectores propios tq $\phi(e_i) = \lambda_i\, e_i$.

Con esto:

$$\begin{aligned}\Phi(e_i,e_j) &= (\phi(e_i)|e_j)\\ &= \lambda_i(e_i|e_j)\\ &= \lambda_i\ \delta_{ij}\end{aligned}$$

por lo cual, para todo $\Phi \in B(E)$, simétrica, existe una base ortonormal de E, en la cual $M(\Phi)$ tiene forma diagonal:

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

§3. APLICACIONES ANTISIMETRICAS.

3.1 Definición de aplicaciones antisimétricas

Definición 3.1.1.

Sea $\phi \in End(E)$. Se dice que ϕ es *antisimétrica* si $\phi = -\tilde{\phi}$

Como resultado de 3.1.1. se tiene la relación

$$(\phi(x)|y) + (x|\phi(y)) = 0$$

Nota: La matriz asociada a ϕ antisimétrica con respecto a una base ortonormal es antisimétrica, i.e. $A = - A^T$

Haciendo $y = x$ en la relación $(\phi(x)|y)+(x|\phi(y)) = 0$ tenemos

$$(x|\phi(x)) = 0$$

de donde $x \perp \phi(x)$

Recíprocamente, si $x \perp \phi(x)$, $\forall x \in E$ entonces ϕ es antisimétrica, ya que haciendo $x' = x + y$ tendremos

$$(x+y|\phi(x+y)) = 0$$

de donde

$$(x|\phi(x)) + (x|\phi(y)) + (y|\phi(x)) + (y|\phi(y)) = 0$$

así

$$(x|\phi(y)) + (\phi(x)|y) = 0$$

De esta manera se ha probado la siguiente proposición que caracteriza a los endomorfismos antisimétricos:

Prop. 3.1.2. ϕ es antisimétrico ssi $x \perp \phi(x)$, $\forall x \in E$

Si $x \neq 0$ es un vector propio de ϕ, entonces

$$(\phi(x)|x) = (\lambda x|x) = (\lambda x|x) = 0$$

de donde $\lambda = 0$.

Esto significa que todo vector propio de ϕ pertenece a Ker ϕ.

Sea $M(\phi)$ la matriz asociada a ϕ relativa a una base orto - normal, entonces

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \alpha_{n1} & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ya que $\alpha_{ij} = 0$ siempre que $i = j$, de donde

$$\operatorname{tr} M(\phi) = 0 \quad y \quad \operatorname{tr} \phi = 0$$

La relación $\phi = - \tilde{\phi}$ implica que

$$\det \phi = (-1)^n \det \phi$$

por lo cual si $\underline{n}$ es impar $\det \phi = 0$

Más generalmente se tiene

<u>Prop. 3.1.3.</u> El rango de una matriz antisimétrica es siempre par.

<u>Pa.</u>

Si $\phi = - \tilde{\phi}$, se tiene que $\phi \circ \tilde{\phi} = \tilde{\phi} \circ \phi$, esto es que ϕ es también normal si es antisimétrica y así

$$E = \operatorname{Ker} \phi \oplus \operatorname{Im} \phi$$

Consecuentemente para la restricción ϕ_1: $\operatorname{Im} \phi \to \operatorname{Im} \phi$ de ϕ, cumple que

$$r(\phi_1) = \dim(\mathrm{Im}\ \phi)$$

Por tanto ϕ_1 es regular, si de nuevo ϕ_1 es antisimétrica se sigue que

$$\det \phi_1 = (-1)^n \det \phi_1$$

lo que implica n par.

§4. APLICACIONES ISOMETRICAS.

4.1 Definición de aplicación isométrica.

Definición 4.1.1.

Sean E y F e.v.p.i., de dimensión n y m respectivamente, la aplicación lineal $\phi : E \to F$ es llamada *isométrica* si

$$(\phi(x_1)|\phi(x_2)) = (x_1|x_2),\ x_1,x_2 \in E$$

i.e. que el producto interno es preservado bajo ϕ.

Haciendo $x = x_1 = x_2$, encontramos que

$$\|\phi(x)\| = \|x\|,\ x \in E$$

Conversamente, la relación $\|\phi(x)\| = \|x\|$ implica que es isométrica.

En efecto:

$$(\phi(x_1)|\phi(x_2)) = \frac{1}{2}(\|\phi(x_1+x_2)\|^2 - \|\phi(x_1)\|^2 - \|\phi(x_2)\|^2)$$

$$2(\phi(x_1)|\phi(x_2)) = \|x_1+x_2\|^2 - \|x_1\|^2 - \|x_2\|^2$$

pero

$$2(x_1|x_2) = \|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1\|^2 - \|x_2\|^2$$

de donde

$$(\phi(x_1)|\phi(x_2)) = (x_1|x_2)$$

De esta forma hemos logrado encontrar una caracterización de las funciones isométricas: ϕ es isométrica ssi

$$\|\phi(x)\| = \|x\|.$$

<u>Prop. 4.1.3.</u> Toda aplicación isométrica de E en F es inyectiva.

<u>Pa.</u>

Sea $\phi(x_1) = \phi(x_2)$, entonces

$$\begin{aligned}(\phi(x_1-x_2)|\phi(x_1-x_2)) &= (\phi(x_1) - \phi(x_2)|\phi(x_1) - \phi(x_2)) \\ &= (\phi(x_1)|\phi(x_1)) - 2(\phi(x_1)|\phi(x_2))+(\phi(x_2)|\phi(x_2)) \\ &= (\phi(x_1)|\phi(x_1) - 2(\phi(x_1)|\phi(x_1))+(\phi(x_1)|\phi(x_1))\end{aligned}$$

$$(x_1 - x_2 \mid x_1 - x_2) = 0$$

de donde $x_1 = x_2$.

Supongamos ahora que dim E = dim F = n, con este supuesto - probaremos que existe para cada ϕ isométrica, existe ϕ^{-1} también isométrica.

<u>Prop. 4.1.4.</u> Sea ϕ E $\rightarrow$ F, una aplicación isométrica. Entonces -

existe ϕ^{-1} : $F \to E$, aplicación isométrica, siempre que

$$\dim E = \dim F, \text{ finita.}$$

Pa.

Siendo ϕ inyectiva y $\dim E = \dim F = n$, se concluye que existe ϕ^{-1}.

Prop. 4.1.5. Un isomorfismo lineal ϕ es isométrico ssi $\tilde{\phi} = \phi^{-1}$.

Pa.

Sea ϕ un isomorfismo lineal de E sobre F, tq ϕ es isométrico, entonces:

$$\begin{aligned}(\phi(x)|y) &= (\phi^{-1}(\phi(x))|\phi^{-1}(y)) \\ &= (x|\phi^{-1}(y)) \quad , x \in E, y \in F\end{aligned}$$

luego $\tilde{\phi} = \phi^{-1}$.

Recíprocamente:

$$\begin{aligned}(\phi(x_1)|\phi(x_2)) &= (x_1|\tilde{\phi}(\phi(x_2)) \\ &= (x_1|\phi^{-1}(\phi(x_2)) \\ &= (x_1 \mid x_2)\end{aligned}$$

Para finalizar este apartado probaremos que toda aplicación isométrica preserva la ortonormalidad en las bases de E y F.

Prop. 4.1.6. Sean E, F e.v.p.i. de dimensión finita $\underline{n}$. Una apli_ cación ϕ es isométrica ssi transforma bases ortonormales de E en bases ortonormales de F.

Pa.

(i) Supongamos que ϕ es isométrica y $(e_i)_{i=1\ldots n}$, una base ortonormal de E, luego $(\phi(e_i))_{i=1\ldots n}$ es obviamente una base ortogonal de F, por ser ϕ en particular biyectiva, como $\|e_i\| = 1$, para todo i, se sigue que

$$\|\phi(e_i)\| = 1.$$

(ii) Sean x_1, $x_2 \in E$ tq

$$x_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\, e_j$$

$$x_2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j}\, e_j$$

entonces

$$\phi(x_1) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\, \phi(e_j)$$

$$\phi(x_2) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k}\, \phi(e_k)$$

$$(\phi(x_1)|\phi(x_2)) = \sum_{j,k}^{n} \alpha_{ij}\, \alpha_{2k}\, (\phi(e_j)|\phi(e_k))$$

$$= \sum_{j,k}^{n} \alpha_{ij}\alpha_{2k}\, \delta_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\alpha_{2j}$$

$$= (x_1 \mid x_2)$$

4.2 Matriz asociada a una aplicación isométrica.

Consideremos $\phi \in \mathrm{Hom}(E,F)$, tq ϕ es isométrica, encontraremos una manera de caracterizar una aplicación isométrica a través de $M(\phi)$, relativa a ciertas bases de E y F.

Prop. 4.2.1. Sean $\phi \in \mathrm{Hom}(E,F)$, ϕ-isométrica y las bases (a_i) y (b_i), con $i=1,\ldots,n$, de E y F respectivamente, entonces la matriz $((a_i \mid a_j))_{n\times n}$, tiene como elementos

$$(a_i \mid a_j) = \sum_{k,t=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jt}(b_k \mid b_t)$$

Pa.

Sea $M(\phi) = (\alpha_{ij})_{n\times n}$, relativa a las bases dadas, obtenida por

$$\phi(a_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}b_j$$

Siendo ϕ isométrica tenemos

$$(\phi(a_i) \mid \phi(a_j)) = (a_i \mid a_j)$$

lo cual puede escribirse como:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}b_k \,\middle|\, \sum_{t=1}^{n} \alpha_{jt}b_t \right) = \sum_{k,t=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jt} (b_k \mid b_t)$$

así

$$(a_i|a_j) = \sum_{k,t=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jt}(b_k|b_t)$$

Introduciendo una notación compacta para expresar las matrices $((a_i|a_j))_{nxn}$ y $((b_k|b_t))_{nxn}$ por $(g_{ij})_{nxn}$ y $(h_{kt})_{nxn}$ respectivamente, tenemos finalmente:

$$(g_{ij})_{nxn} = (\sum_{\substack{k=1\\t=1}}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jt}\, h_{kt})_{nxn}$$

<u>Comentario:</u> Si (a_i), (b_i), con $i=1,...,n$ son ortonormales, entonces:

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad y \quad h_{kt} = \delta_{kt}$$

así la matriz $(g_{ij})_{nxn}$ queda reducida a:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}$$

la matriz $M(\phi)$ asociada a ϕ-isométrica, relativa a bases ortonormales es *ortogonal*, esto es que

$$\boxed{M(\phi)\ (M(\phi))^T = I}$$

Capítulo IV

ESPACIOS UNITARIOS

§1. FUNCIONES HERMITIANAS.

1.1 Funciones sesquilineales en un espacio complejo.

Definición 1.1.1.

Sean E e.v. sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita $\underline{n}$ y Φ: $E \times E \to \mathbb{C}$ tq

(i) $\Phi(\lambda x_1+\mu x_2,y) = \lambda\Phi(x_1,y) + \mu\Phi(x_2,y)$

(ii) $\Phi(x,\lambda y_1 + \mu y_2) = \bar{\lambda}\Phi(x,y_1) + \bar{\mu}\Phi(x,y_2)$

Donde $\bar{\lambda}$ y $\bar{\mu}$ son los conjugados complejos de λ y μ respectivamente. Entonces ϕ se llama *función sesquilineal.*

La correspondiente función cuadrática Ψ asociada a Φ se - obtiene reemplazando $\underline{y}$ por $\underline{x}$:

$$\boxed{\Psi(x) = \Phi(x,x)}$$

Prop. 1.1.2. La función cuadrática Ψ asociada a una función Φ sesquilineal cumple la ley del paralelogramo.

Por (i) de 1.1.1. se tiene que:

$$\Phi(x+y,\ x+y) = \Phi(x,x) + \Phi(x,y) + \Phi(y,x) + \Phi(y,y)$$

$$\Phi(x-y,\ x-y) = \Phi(x,x) - \Phi(x,y) - \Phi(y,x) + \Phi(y,y)$$

sumando ambas expresiones

$$\Phi(x+y,x+y) + \Phi(x-y,x-y) = 2(\Phi(x,x) + \Phi(y,y))$$

lo que es igual a

$$\boxed{\Psi(x+y) + \Psi(x-y) = 2(\Psi(x) + \Psi(y))}$$

Consecuencia

$$\Psi(\lambda x) = \Phi(\lambda x,\lambda x) = \lambda.\bar{\lambda}\Phi(x,x) = ||\lambda||^2\ \Phi(x,x) = ||\lambda||^2\ \Psi(x)$$

$$\boxed{\Psi(\lambda x) = ||\lambda||^2\ \Psi(x)}$$

Recordando el proceso de §5 de Capitulo II, relativo a Funciones bilineales y cuadráticas Φ puede expresarse en términos de Ψ, con la variante (ii) de la definición 1.1.1.

Prop. 1.1.3. Φ queda univocamente determinada por Ψ.

Pa.

Reemplazando $\underline{x}$ por $x+y$ en $\Psi(x) = \Phi(x,x)$, tenemos:

$$\begin{aligned}\Psi(x+y) &= \Phi(x+y,\ x+y)\\ &= \Phi(x,x) + \Phi(x,y) + \Phi(y,x) + \Phi(y,y)\\ &= \Psi(x) + \Phi(x,y) + \Phi(y,x) + \Psi(y)\end{aligned}$$

reemplazando ahora $\underline{y}$ por iy tenemos:

$$\Psi(x+iy) = \Psi(x) + \Phi(x,iy) + \Phi(iy,x) + \Psi(iy)$$

$$= \Psi(x) + \Psi(y) - i\Phi(x,y) + i\Phi(y,x)$$

Sumando $\Psi(x+y)$ a $i\Psi(x+iy)$ obtenemos:

$$\Psi(x+y) + i\Psi(x+iy) = (1+i)\,(\Psi(x) + \Psi(y)) + 2\Phi(x,y)$$

de donde

$$\boxed{2\Phi(x,y) = (\Psi(x+y) - \Psi(x) - \Psi(y)) + i(\Psi(x+iy) - \Psi(x) - \Psi(y))}$$

1.2 Funciones Hermitianas.

A cada función sesquilineal Φ puede asociársele otra función sesquilineal $\tilde{\Phi}$, definida como:

$$\boxed{\tilde{\Phi}(x,y) = \overline{\Phi(y,x)}}$$

Definición 1.2.1.

Sea Φ una aplicación sesquilineal, Φ es llamada *hermitiana* ssi $\tilde{\Phi} = \Phi$

$$\boxed{\Phi(x,y) = \overline{\Phi(y,x)}}$$

Breve comentario: Considerando $\mathbb{R}$ como parte de $\mathbb{C}$, toda función Φ bilineal simétrica es hermitiana.

Resultado. Sustituyendo $\underline{x}$ por $\underline{y}$ en 1.2.1. tenemos:

$$\boxed{\Psi(x) = \Phi(x,x) = \overline{\Phi(x,x)} = \overline{\Psi(x)}}$$

porque todo número real es igual a su conjugado, la función cuadrática Ψ asociada a ϕ, hermitiana, toma valores en $\mathbb{R}$.

Prop. 1.2.2. Si una función sesquilineal Φ, cuya función cuadrática Ψ asociada es real, entonces Φ es hermitiana.

Pa.

Si Ψ es real , entonces en

$$2\Phi(x,y) = (\Psi(x+y) - \Psi(x)) - \Psi(y) + i(\Psi(x+iy) - \Psi(x) - \Psi(y)),$$

el término $(\Psi(x+y) - \Psi(x) - \Psi(y))$ es real.

Intercambiando x e y en la ecuación anterior tenemos:

$$2\Phi(y,x) = (\Psi(x+y) - \Psi(x) - \Psi(y)) + i(\Psi(y+ix) - \Psi(x) - \Psi(y))$$

Comparando $2\Phi(x,y)$ y $2\Phi(y,x)$ se observa que

$$\mathbb{R}(2\Phi(x,y)) = \mathbb{R}(2\Phi(y,x)).$$

Sumando las partes imaginarias de $2\Phi(x,y)$ y $2\Phi(y,x)$, se obtiene:

$$\mathrm{Im}(2\Phi(x,y)) + \mathrm{Im}(2\Phi(y,x)) = \Psi(x+iy) + \Psi(y+ix) - 2\Psi(x) - 2\Psi(y)$$

pero

$$\Psi(x+iy) = \Psi(x) + \Psi(y) - i\Phi(x,y) + i\Phi(y,x)$$

$$\Psi(y+ix) = \Psi(x) + \Psi(y) - i\Phi(y,x) + i\Phi(x,y)$$

de donde

$$\Psi(x + iy) + \Psi(y + ix) = 2\Psi(x) + 2\Psi(y)$$

por lo cual

$$Im(2\Phi(x,y)) + Im(2\Phi(y,x)) = 0$$

de donde

$$Im(2\Phi(x,y)) = - Im(2\Phi(y,x))$$

entonces

$$\Phi(x,y) = \overline{\Phi(y,x)}$$

Podemos afirmar que Φ es sesquilineal ssi los valores de Φ son reales.

Definición 1.1.4.

Una función hermitiana Φ es llamada *definida positiva* ssi $\Psi(x) > 0$, $\forall$ $x \neq 0$

1.3 Matrices Hermitianas.

Sea (x_i),$i=1,\ldots,n$ una base de E, entonces cada Φ sesquilineal define una matriz $M(\Phi)$ como sigue:

$$\boxed{(\alpha_{ij})_{nxn} = (\Phi(x_i,x_j))_{nxn}}$$

Prop. 1.3.1. La función Φ es univocamente determinada por - $M(\Phi)$.

Pa.

Sea $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j$ dos vectores de E, tenemos:

$$\Phi(x,y) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i , \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i \overline{\gamma_j}\, \Phi(x_i,x_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_i \overline{\gamma_j} \quad ;$$

de donde

$$\alpha_{ij} = \Phi(x_i,x_j)$$

<u>Consecuencia.</u> Las matrices $M(\Phi)$ y $M(\tilde{\Phi})$ están relacionadas - por:

$$\tilde{\alpha}_{ij} = \overline{\alpha}_{ji}$$

<u>Definición 1.3.1.</u>

Toda matriz $(\alpha_{ij})_{nxn}$ asociada a Φ hermitiana, se llama - *matriz hermitiana.*

Si Φ es hermitiana, entonces $\alpha_{ij} = \overline{\alpha}_{ji}$

§2. ESPACIOS UNITARIOS.

2.1. Definición de Espacio Unitario.

<u>Definición 2.1.1.</u>

Un *espacio unitario* es un e.v. complejo E, donde se defi- ne una función Φ que es:

i) sesquilineal

ii) hermitiana

iii) definida positiva

<u>Notación:</u> La función Φ se representa por $(|)$, denominando a $(x|y)$, *producto interno* de los vectores $\underline{x}$ e $\underline{y}$.

La definición anterior se traduce en términos de la notación adoptada como:

(i) <u>Sesquilinealidad.</u>

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 | y) = \lambda_1 (x_1|y) + \lambda_2 (x_2|y)$$

$$(x|\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \overline{\lambda}_1 (x|y_1) + \overline{\lambda}_2 (x|y_2)$$

(ii) <u>Hermitiana.</u>

$$(x|y) = \overline{(y|x)}$$

(iii) <u>Definida positiva.</u>

$$(x|x) > 0, \ \forall \ x \neq 0$$

De manera análoga a lo dicho en 1.3.1. Capítulo II, respecto al producto interno en $\mathbb{R}^n$, el producto interno "stan - dard" en C^n queda definido como:

$$\boxed{(x|y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overline{\gamma}_i}$$

donde $x = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $y = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ con $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$.

También la <u>norma</u> de $\underline{x}$ en E-unitario queda establecida por:

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}}$$

verificándose además la desigualdad de Schwarz de manera análoga a 1.5. del Capitulo II.

Se sigue de la Desigualdad de Schwarz, tal como se hizo en el apartado referido, la desigualdad triangular, verificándose la igualdad si

$$y = \lambda x, \; \lambda > 0$$

En efecto, asumamos

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$$

siendo $(x+y \mid x+y) = \|x+y\|^2$, tenemos:

$$(x+y \mid x+y) = (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + (x \mid y) + \overline{(x \mid y)} = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\| \cdot \|y\|$$

de donde

$$(x \mid y) + \overline{(x \mid y)} = 2\|x\| \cdot \|y\|$$

esto es

$$\mathbb{R}\,((x \mid y)) = \|x\| \cdot \|y\|$$

por lo cual

$$|(x \mid y)| = \|x\| \cdot \|y\|$$

Por Schwarz se sigue que $\underline{x}$ e $\underline{y}$ son l.d.

Falta ahora comprobar que $\lambda \geq 0$, para ello sustituyamos $y = \lambda x$ en $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$:

$$\|x + \lambda x\| = \|x\| + \|\lambda x\|$$

elevando al cuadrado:

$$\|x\|^2 + \|\lambda x\|^2 + (x|\lambda x) + \overline{(x|\lambda x)} = \|x\|^2 + \|\lambda x\|^2 + 2\|x\| \,.\, \|\lambda x\|$$

$$\overline{\lambda}\,(x|x) + \lambda\overline{(x|x)} = 2\,|\lambda|\,\|x\|^2$$

$$(\lambda+\overline{\lambda})\,\|x\|^2 = 2\,|\lambda|\,.\,\|x\|^2$$

$$\lambda+\overline{\lambda} = 2|\lambda|$$

de donde

$$\mathbb{R}(\lambda) = |\lambda| \text{ , así } \lambda \geq 0$$

Definición 2.1.2.

Dos vectores $\underline{x}$ e $\underline{y}$ de E-unitario son llamados *ortogonales* ssi $(x|y) = 0$

Cada subespacio E_1 de E-unitario determina un *complemento ortogonal* $E_1^{\perp}$ tq

$$E_1^{\perp} = \{x \in E : x \perp y, \forall\, y \in E_1\}$$

En consecuencia, tales espacios forman una descomposición directa de

$$E = E_1 \oplus E_1^{\perp}$$

2.2 Bases ortonormales de espacios unitarios.

Definición 2.2.1.

Una base $(e_i), i=1,\ldots,n$ de E-unitario es llamada *ortonormal* ssi

$$(e_i|e_j) = \delta_{ij}$$

Nota 1. La norma de $\underline{x}$ asociada al producto interno "standard" en $\mathbb{C}^n$, queda definida como:

$$(x|x) = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overline{\beta}_i$$

donde $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$

Nota 2. Bases ortogonales en E-unitario pueden construirse utilizando el mismo algoritmo de ortonormalización para espacios reales.

Prop. 2.2.2. Sea E-unitario y $(\alpha_{ij})_{n\times n}$ la matriz asociada a

$$\begin{aligned} \tau: E &\longrightarrow E \\ e_i &\rightsquigarrow e_i^* \end{aligned}$$

de tal forma que $(e_i), i=1,\ldots,n$ y $(e_i^*), i=1,\ldots,n$ son bases ortonormales de E, entonces los elementos de $(\alpha_{ij})_{n\times n}$ cumplen la relación:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\overline{\alpha}_{kj} = \delta_{ij} \;, \; i=1,\dots,n, \; j=1,\dots,n$$

<u>Pa.</u>

Sea $(\tau(e_i)|\tau(e_j)) = (e_i^*|e_j^*) = \delta_{ij}$

además

$$\tau(e_i) = e_i^* = (e_{i1}\; e_{i2}\; . \; . \; . \; e_{in})$$

$$\tau(e_j) = e_j^* = (e_{j1}\; e_{j2}\; . \; . \; . \; e_{jn})$$

por definición de producto interno

$$(\tau(e_i)|\tau(e_j)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\overline{\alpha}_{kj} = \delta_{ij}$$

comparando ambos resultados se verifica la proposición.

<u>Nomenclatura:</u> La matriz a que hace referencia la prop. ante - rior se denomina *matriz unitaria.*

Reciprocamente, si (e_i),i=1,...,n es una base ortonor - mal y $(\alpha_{ij})_{nxn}$ unitaria , son dadas, entonces (e_i^*), i=1,...,n

tq $e_i^* = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}e_k$ es también ortogonal.

En efecto:

$$(e_i^*|e_k^*) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\overline{\alpha}_{ki}\;(e_i|e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\overline{\alpha}_{ki}$$

$$= \delta_{ik}$$

por ser $(\alpha_{ij})_{nxn}$ unitaria.

2.3 Dualidad en espacios unitarios.

Sea E e.v. sobre $\mathbb{C}$, definamos en E la aplicación *conjugación* como:

$$\begin{aligned} - : E &\longrightarrow E \\ x &\rightsquigarrow \bar{x} \end{aligned}$$

tq

(i) $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$

(ii) $\overline{\lambda x} = \bar{\lambda}\bar{x}$

(iii) $\bar{\bar{x}} = x$

Si adicionalmente se define en E un producto interno, entonces requeriremos que se cumpla:

(iv) $\overline{(x|y)} = (\bar{x}|\bar{y})$

Prop. 2.3.1. Una conjugación puede siempre ser definida en un espacio complejo E, n-dimensional.

Pa.

Sea (x_i), $i=1,\ldots,n$ una base cualquiera de E y definamos

$$\begin{aligned} - : E &\longrightarrow E \\ x &\rightsquigarrow \bar{x} \end{aligned}$$

tq si $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, entonces $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} x_i$

Esta función así definida obviamente cumple ser una conjugación.

Comentario: Si en un espacio unitario E se ha definido una conjugación, se tiene que $\overline{(x|y)} = (\bar{y}|\bar{x})$

Aprovechando la existencia de una conjugación en E e.v. complejo n-dimensional, lograremos probar que E es dual a él mismo, relativo a un producto escalar.

Definamos la función

$$\begin{aligned} <|> : E \times E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) &\rightsquigarrow <x|y> = (x|\bar{y}) \end{aligned}$$

Probemos que <|> es un producto escalar.

(i) <|> es bilineal.

$$\begin{aligned} <\lambda_1x_1+\lambda_2x_2|\mu_1y_1+\mu_2y_2> &= (\lambda_1x_1+\lambda_2x_2|\overline{\mu_1y_1+\mu_2y_2}) \\ &= \lambda_1(x_1|\overline{\mu_1y_1+\mu_2y_2})+\lambda_2(x_2|\overline{\mu_1y_1+\mu_2y_2}) \\ &=\lambda_1\mu_1(x_1|\bar{y}_1)+\lambda_1\mu_2(x_1|\bar{y}_2)+\lambda_2\mu_1(x_2|\bar{y}_1)+\lambda_2\mu_2(x_2|\bar{y}_2) \\ &=\lambda_1\mu_1<x_1|y_1>+\lambda_1\mu_2<x_1|y_2>+\lambda_2\mu_1<x_2|y_1>+\lambda_2\mu_2<x_2|y_2> \end{aligned}$$

(ii) <|> es no degenerado, porque el producto interno (|) - tampoco lo es.

Por lo estudiado en espacios duales , E es dual a él - mismo relativo a $<|>$.

Desde esta perspectiva, las propiedades de la dualidad pueden ser transportadas a espacios unitarios.

El teorema de Riesz asegura que cualquier aplicación lineal f en E puede expresarse como:

$$f_a(x) = (x|a)$$

para a fijo en E, univocamente determinado por f, en nuestra consideración, existe un vector b $\in$ E que cumple:

$$\begin{aligned} f_b(x) &= \langle x|b\rangle \\ &= (x|\bar{b}) \end{aligned}$$

de donde $a = \bar{b}$

2.4 Funciones determinantes normadas en espacios unitarios.

Asumamos que en E-unitario se ha definido una conjugación y sea $\Delta_\circ \not\equiv 0$ una función determinante en E, nos proponemos definir una función determinante asociada a $\Delta_\circ$, relativa a la conjugación definida en E.

Prop. 2.4.1. La función

$$\bar{\Delta}_\circ(x_1,\ldots,x_n) = \overline{\Delta_\circ(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)}$$

es una función determinante no nula en E.

Pa.

(i) Multilinealidad.

$$\bar{\Delta}_\circ(x_1,\ldots,\lambda x_i+\mu x_i',\ldots,x_n) = \overline{\Delta_\circ(\bar{x}_1,\ldots,\overline{\lambda x_i+\mu x_i'},\ldots,\bar{x}_n)}$$

$$= \overline{\Delta_\circ(\bar{x}_1,\ldots,\bar{\lambda}\bar{x}_i+\bar{\mu}\bar{x}_i',\ldots,\bar{x}_n)}$$

$$= \overline{\bar{\lambda}\Delta_\circ(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_i,\ldots,\bar{x}_n)+\bar{\mu}\Delta_\circ(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_i',\ldots,\bar{x}_n)}$$

$$= \lambda\bar{\Delta}_\circ(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)+\mu\bar{\Delta}_\circ(x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_n)$$

(ii) Antisimetría.

$$\bar{\Delta}_\circ(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) = \overline{\Delta_\circ(\bar{x}_{\sigma(1)},\ldots,\bar{x}_{\sigma(n)})}$$

$$= \overline{\varepsilon(\sigma)\Delta_\circ(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)}$$

$$= \varepsilon(\sigma)\bar{\Delta}_\circ(x_1,\ldots,x_n)$$

Definición 2.4.2.

La función $\bar{\Delta}_\circ$ es llamada *función determinante conjugada* asociada a $\Delta_\circ$, relativa a la conjugación $-$.

Como se ha mencionado, E puede considerarse dual a él mismo, por lo cual aplicando la relación

$$\Delta^*(x_1^*,\ldots,x_n^*)\ \Delta\ (x_1,\ldots,x_n) = \alpha \det(\langle x_i^*|x_j\rangle)$$

a nuestro caso específico, tenemos:

$$\Delta(x_1,\ldots,x_n)\bar{\Delta}(y_1,\ldots,y_n) = \alpha \det((x_i|y_j))_{nxn}$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$, x_i, $y_j \in E$

Evaluando $\bar{\Delta}$ en los correspondientes vectores conjugados de los y_j y observando que

$$<x_i|\bar{y}_j> = (x_i|y_j)$$

tenemos

$$\Delta(x_1,\ldots,x_n)\bar{\Delta}(\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_n) = \alpha \det((x_i|y_j))_{nxn}$$

Evaluando ahora ambas funciones en una base ortonormal de E tendremos $x_i = y_i = e_i$, de donde

$$||\Delta(e_1,\ldots,e_n)||^2 = \alpha$$

por lo cual $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

¿Bajo qué condiciones definiremos una función *determinante normada* en E-unitario?

Consideremos para responder a nuestra pregunta, $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $||\lambda||^2 = \alpha$, así puede definirse $\Delta_\circ \not\equiv 0$ tq $\Delta_\circ = \frac{1}{\lambda} . \Delta$, entonces

$$\frac{1}{\lambda}\Delta(x_1,\ldots,x_n)\frac{1}{\bar{\lambda}}\bar{\Delta}(\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_n) = \det((x_i|y_j))_{nxn}$$

lo que implica:

$$\boxed{\Delta_\circ(x_1,\ldots,x_n)\ \Delta_\circ(y_1,\ldots,y_n) = \det\ ((x_i|y_j))_{nxn}}$$

Así, cualquier función determinante no nula que satisface la identidad anterior es llamada *función determinante normada*.

Consecuencia. Una función determinante normada asume el valor de 1 en toda base ortonormal.

§3. APLICACIONES LINEALES EN ESPACIOS UNITARIOS.

3.1 La aplicación adjunta.

Sean E, F dos espacios unitarios y $\phi \in Hom(E,F)$, tal como se hizo en el caso real, podemos asociar a ϕ, una aplicación $\tilde{\phi} \in Hom(F,E)$.

Consideremos las conjugaciones:

$$- : E \longrightarrow E$$
$$x \rightsquigarrow \bar{x}$$

$$- : F \longrightarrow F$$
$$y \rightsquigarrow \bar{y}$$

Entonces E y F son duales a ellos mismos, luego ϕ deter mina una aplicación dual ϕ^* : $F \to E$ definida por la relación:

$$<\phi(x)|y> = <x|\phi^*(y)>$$

según se ha estudiado en el Capitulo Introductorio.

Aplicando la conjugación definida en F tenemos:

$$<\phi(x)|\bar{y}> = <x|\phi^*(\bar{y})>$$

De la relación existente entre el producto interno y el producto escalar estudiada en 2.3, puede escribirse la anterior igualdad como:

$$(\phi(x)|y) = (x|\overline{\phi^*(\bar{y})})$$

Ahora definamos la aplicación ϕ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : F &\longrightarrow E \\ y &\rightsquigarrow \overline{\phi^*(\bar{y})} \end{aligned}$$

Queda claro que $\tilde{\phi}$ es obviamente lineal.

Entonces

$$\boxed{(\phi(x)|y) = (x|\tilde{\phi}(y))}$$

para $\underline{x} \in E$, $y \in F$.

<u>Prop. 3.1.1.</u> La aplicación adjunta $\tilde{\phi}$, no depende de las conjugaciones definidas en E y en F.

Pa.

Sean $\tilde{\phi}_1$ y $\tilde{\phi}_2$ dos aplicaciones adjuntas, entonces

$$(\phi(x)|y) = (x|\tilde{\phi}_1(y)) = (x|\tilde{\phi}_2(y))$$

luego

$$(x|\tilde{\phi}_1(y) - \tilde{\phi}_2(y)) = 0, \text{ para } \underline{y} \text{ en } F \text{ y } \forall\ \underline{x} \in E.$$

por tanto

$$(x|(\tilde{\phi}_1 - \tilde{\phi}_2)(y)) = 0$$

de ahí

$$\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2$$

Así $\tilde{\phi}$ depende de ϕ y no de las conjugaciones.

Prop. 3.1.2. Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y ϕ , $\Psi \in \mathrm{Hom}(E,F)$, se cumple:

(i) $\widetilde{\phi + \Psi} = \tilde{\phi} + \tilde{\Psi}$

(ii) $\widetilde{\lambda\phi} = \bar{\lambda}\tilde{\phi}$.

Pa.

$$\begin{aligned}
\text{(i)}\quad ((\phi+\Psi)(x)|y) &= (\phi(x)+\Psi(x)|y) \\
&= (\phi(x)|y)+(\Psi(x)|y) \\
&= (x|\tilde{\phi}(y))+(x|\tilde{\Psi}(y)) \\
&= (x|\tilde{\phi}(y)+\tilde{\Psi}(y))
\end{aligned}$$

pero

$$((\phi+\Psi)(x)|y) = (x|\widetilde{(\phi+\Psi)}(y))$$

comparando ambas igualdades se deduce que

$$\widetilde{\phi + \Psi} = \tilde{\phi} + \tilde{\Psi}$$

(ii) $((\lambda\phi)(x)|y) = (\phi(\lambda x)|y)$

$$= (\lambda x|\tilde{\phi}(y))$$

$$= \lambda(x|\tilde{\phi}(y))$$

$$= (x|\bar{\lambda}\tilde{\phi}(y))$$

pero:

$$((\lambda\phi)(x)|y) = (x|\widetilde{(\lambda\phi)}(y))$$

luego

$$\widetilde{\lambda\phi} = \bar{\lambda}\tilde{\phi}$$

<u>Prop. 3.1.3.</u> Las matrices $M(\phi)$ y $M(\tilde{\phi})$ relativas a bases ortonormales de E y F, están relacionadas por

$$\tilde{\alpha}_{ji} = \bar{\alpha}_{ij} \ , \ i=1,\ldots,n; \ j=1,\ldots,m$$

<u>Pa.</u>

Sean $(e_i), i=1,\ldots,n$ y $(f_j), j=1,\ldots,m$, bases ortonormales de E y F respectivamente, entonces:

$$(\phi(e_i)|f_j) = (\sum_{k=1}^{m} \tilde{\alpha}_{ki} f_k | f_k) = \tilde{\alpha}_{ki}(f_k|f_k) = \tilde{\alpha}_{ki}$$

$$(e_i|\tilde{\phi}(f_j)) = (e_i| \sum_{t=1}^{n} \alpha_{tj} e_t) = (e_t|\alpha_{tj} e_t) = \bar{\alpha}_{tj}$$

como $(\phi(e_i)|f_j) = (e_i|\tilde{\phi}(f_j))$, resulta que:

$$\tilde{\alpha}_{kt} = \alpha_{tk}$$

Tratemos el caso en que E = F, se probará que det ϕ y det $\tilde{\phi}$ son complejos conjugados.

<u>Prop. 3.1.4.</u> Sea $\phi \in \mathrm{End}(E)$ y $\tilde{\phi}$ su adjunta. Entonces det $\tilde{\phi} = \overline{\det \phi}$.

<u>Pa.</u>

Sea $\Delta \neq 0$ una función determinante en E y $\bar{\Delta}$ su función determinante conjugada, por def. 2.4.2. tenemos:

$$\bar{\Delta}\,(\tilde{\phi}(x_1),\ldots,\tilde{\phi}(x_n)) = \overline{\Delta(\overline{\tilde{\phi}(x_1)},\ldots,\overline{\tilde{\phi}(x_n)})}$$

$$= \overline{\Delta(\phi^*(\bar{x}_1),\ldots,\phi^*(\bar{x}_n))}$$

$$= \overline{\det \phi^* \Delta(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)}$$

$$= \overline{\det \phi}\ \overline{\Delta(\bar{x}_1,\ldots,x_n)}$$

$$= \overline{\det \phi}\ \bar{\Delta}(x_1,\ldots,x_n)$$

pero

$$\tilde{\Delta}(\tilde{\phi}(x_1),\ldots,\tilde{\phi}(x_n)) = \det \tilde{\phi}\,\tilde{\Delta}(x_1,\ldots,x_n)$$

de donde $\det \tilde{\phi} = \overline{\det \phi}$

Particularmente

$$\boxed{\operatorname{tr} \tilde{\phi} = \overline{\operatorname{tr} \phi}}$$

Si ϕ es reemplazado por $\phi-\lambda i, \lambda \in \mathbb{C}$, de la anterior proposición se desprende que:

$$\boxed{\det (\phi-\lambda i) = \overline{\det (\phi - \bar{\lambda} i)}}$$

Sabemos que

$$\det (\tilde{\phi}-\bar{\lambda} i) = \det \widetilde{(\phi-\lambda i)} = \overline{\det (\phi-\lambda i)}$$

luego:

$$\det (\tilde{\phi}-\bar{\bar{\lambda}} i) = \det \widetilde{(\phi-\bar{\lambda} i)} = \overline{\det (\phi-\bar{\lambda} i)}$$

3.2 Producto interno en End(E).

En este apartado estudiaremos las propiedades que se derivan de la definición de un producto interno en End(E), con E-unitario, de dimensión n.

Sean ϕ, $\Psi \in$ End(E), se definirá el producto interno en End(E) como:

$$(\,|\,) : \mathrm{End}(E) \times \mathrm{End}(E) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\phi, \Psi) \rightsquigarrow \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(\phi\circ\tilde{\Psi})$$

(i) Que la función es sesquilineal se sigue inmediatamente,

(ii) La función es hermitiana:

$$(\phi|\Psi) = \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\,(\phi\circ\tilde{\Psi})$$

$$= \frac{1}{n}\,\overline{\mathrm{tr}\,(\Psi\circ\tilde{\phi})}$$

$$= \overline{(\Psi|\phi)}$$

(iii) La función es positiva:

Sea $(e_i), i=1,\ldots,n$ una base ortonormal de E, entonces

$$\phi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}e_j \quad y \quad \tilde{\phi}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_{ij}e_j$$

siendo $\bar{\alpha}_{ij} = \tilde{\alpha}_{ji}$.

Haciendo $(\phi\circ\tilde{\Psi})(e_i) = \phi(\tilde{\phi}(e_i)) = \phi(\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{\alpha}_{ij}\ e_j)$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (\tilde{\alpha}_{ij}\alpha_{ij})e_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (\bar{\alpha}_{ji}\alpha_{ij})e_j$$

de donde $\mathrm{tr}\,(\phi\circ\tilde{\Psi}) = \sum_{i,j=1} \bar{\alpha}_{ji}\alpha_{ij} = \sum_{i,j=1} ||\alpha_{ij}||^2 > 0,$

por lo cual $(\Psi|\phi) > 0$, $\phi \neq 0$.

3.3 Aplicaciones normales.

De manera semejante como se hizo en los espacios lineales, se define a $\phi \in End(E)$, como *normal* si

$$\phi \circ \tilde{\phi} = \tilde{\phi} \circ \phi$$

Esta condición es equivalente a

$$\|\phi(x)\|^2 = \|\tilde{\phi}(x)\|^2 \quad , \forall\, x \in E$$

siguiéndose que Ker ϕ= Ker $\tilde{\phi}$, y así:

$$E = Im\ \phi \oplus Ker\ \tilde{\phi} = Im\ \phi \oplus Ker\ \phi$$

Prop. 3.3.1. Si ϕ es normal, entonces los vectores propios de las aplicaciones ϕ y $\tilde{\phi}$ coinciden; y los valores propios correspondientes son conjugados unos de otros.

Pa.

Sea $\underline{e}$ un vector propio de ϕ y λ su correspondiente valor propio, entonces $\phi(e) = \lambda e$.

Como $(\phi-\lambda i)(e) = 0$, esto implica que $\underline{e} \in Ker(\phi-\lambda i)$, por ser ϕ normal, $\underline{e} \in Ker\ (\tilde{\phi}-\bar{\lambda} i)$, luego $(\tilde{\phi}-\bar{\lambda} i)(e) = 0$, de donde $\tilde{\phi}(e) = \bar{\lambda} e$.

Se ha visto en el caso de espacios lineales reales con producto interno, que todo ϕ, autoadjunta, posee $\underline{n}$ vectores -

propios mutuamente ortogonales. En el caso complejo, demostraremos que acontece lo mismo si ϕ es normal

Prop. 3.3.2. Si ϕ es normal, entonces tiene n-vectores propios mutuamente ortogonales.

Pa.

De acuerdo al teorema fundamental del Algebra, el polinomio característico de ϕ posee al menos un cero λ_1, por lo que λ_1 es valor propio de ϕ. Sean e_1 el correspondiente vector propio y E_1 el complemento ortogonal de (e_1).

$$(\phi(y)|e_1) = (y|\tilde{\phi}(e_1)) = (y|\bar{\lambda}e_1) = \lambda(y|e_1) = 0$$

de donde $\phi(y) \in E_1$; asi E_1 es estable bajo ϕ.

Restringiendo ϕ a E_1, obtenemos que la restricción de ϕ es nuevamente normal, luego existe $e_2 \in E_1$ que es un vector propio de $\phi|_{E_1}$ . . . continuando con el proceso encontramos n-vectores propios, que obviamente son mutuamente ortogonales i.e. $(e_i|e_j) = 0$ si $i \neq j$.

Relativo a la base formada por los vectores propios la matriz $M(\phi)$ tiene forma diagonal, con los valores propios en la diagonal principal:

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{C}$$

3.4 Aplicaciones autoadjuntas y antisimétricas.

Sea $\phi \in End(E)$, una aplicación autoadjunta i.e. $\phi = \tilde{\phi}$, luego la relación

$$(\phi(x)|y) = (x|\tilde{\phi}(y))$$

conduce a

$$\boxed{(\phi(x)|y) = (x|\phi(y))}$$

Reemplazando y por x tenemos

$$(\phi(x)|x) = (x|\phi(x))$$

siendo E-unitario

$$(x|\phi(x)) = \overline{(\phi(x)|x)}$$

así $(\phi(x)|x) = \overline{(\phi(x)|x)}$, luego $(\phi(x)|x) \in \mathbb{R}$, $\forall\ x \in E$.

Prop. 3.4.1. Si ϕ es autoadjunta, entonces todos los valores propios son reales.

Pa.

Sea $\phi(e) = \lambda e$, luego

$(\phi(e)|e) = (\lambda e|e) = \lambda(e|e)$, como $(\phi(e)|e) \in \mathbb{R}$ y

$(e|e) \neq 0$, se deduce que $\lambda \in \mathbb{R}$.

Es evidente que toda ϕ autoadjunta es normal, y por prop. 3.3.2. se tiene que existe un sistema de n vectores propios mutuamente ortonormales, relativo a estos vectores, la matriz - $M(\phi)$ tiene forma diagonal.

Como es conocido, una transformación ϕ es llamada *antisimétrica* si $\tilde{\phi} = -\phi$; en E-unitario no existe diferencia esencial entre autoadjuntas y antisimétricas.

Prop. 3.4.2. En un espacio E unitario toda antisimétrica es - autoadjunta y viceversa.

Pa.

$\widetilde{i\phi} = \tilde{i}\tilde{\phi} = -i\tilde{\phi} = -i\phi$, luego $\tilde{\phi} = -\phi$.

3.5 Transformaciones unitarias.

Definición 3.5.1.

Una *aplicación unitaria*, es una aplicación lineal de E - que preserva el producto interno:

$$(\phi(x)|\phi(y)) = (x|y),\ \forall\ x,\ y \in E.$$

La anterior definición puede expresarse en términos de - isometría, de ahí que ϕ sea un automorfismo de E.

Prop. 3.5.2. Si $\phi \in End(E)$ es una aplicación unitaria, entonces $\|\det \phi\| = 1$.

Pa.

Observando que $(\phi(x)|\phi(y)) = (x|y)$ y siendo ϕ un automorfismo, entonces:

$$(\phi(x)|y) = (\phi^{-1}(\phi(x))|\phi^{-1}(y)) = (x|\phi^{-1}(y))$$

lo cual comprueba que $\phi^{-1} = \tilde{\phi}$, así $\det \phi \det \phi^{-1} = 1$.

implica:

$$\det \phi . \det \tilde{\phi} = 1$$

$$\det \phi . \overline{\det \phi} = 1$$

de donde:

$$\boxed{\|\det \phi\| = 1}$$

Finalmente probaremos que cada vector propio de ϕ-unitaria posee norma unitaria.

Prop. 3.5.3. Sea λ un valor propio de ϕ-unitaria. Entonces $\|\lambda\| = 1$.

Pa.

Sea e un vector propio de ϕ, entonces $\phi(e) = \lambda e$, luego

$$\|\phi(e)\| = \|\lambda e\| = \|\lambda\| \ \|e\|$$

pero

$$\|\phi(e)\| = \|e\|$$

de donde $\|\lambda\| = 1$.

Como $\tilde{\phi} = \phi^{-1}$, la relación $\tilde{\phi}\circ\phi = \phi\circ\tilde{\phi}$ implica que $\phi^{-1}\circ\phi=\phi\circ\phi^{-1}$, por lo cual ϕ es normal y la matriz $M(\phi)$ relativa a la base ortonormal (e_i), $i=1,\dots,n$ es de forma diagonal, donde los λ_i son complejos de módulo uno.

nvdr.

B I B L I O G R A F I A

1. W. H. GREUB/SPRINGER-VERLAG.
   "Linear Algebra".

2. J. I. NIETO/MONOGRAFIA O.E.A.
   "Introducción a los Espacios de Hilbert".

3. J. DIEUDONNÉ/HERMANN.
   "Algébre Linéaire et géométrie élémentaire".